

Н. Н. БОГОЛЮБОВ  
Д. В. ШИРКОВ

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1984

**Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.** — 4-е изд., испр. — М.: Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 600 с.

Данная книга посвящена изложению теории квантовых полей — завершающей главы курса современной теоретической физики, лежащей в основе квантовой теории материи. Благодаря систематически последовательному и в то же время доступному характеру изложения предыдущие издания приобрели репутацию учебных пособий. Первая часть книги (главы I—VI) фактически является учебником для студентов старших курсов университетов, специализирующихся в области квантовой теории поля, а вторая часть представляет пособие для аспирантов и научных работников.

В текст предыдущего, третьего издания 1976 года внесены исправления и небольшие изменения, особенно в главу «Ренормализационная группа».

Табл. 3. Рис. 70. Библиогр. 183 назв.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию . . . . .	9
Предисловие к третьему изданию . . . . .	9
Предисловие ко второму изданию . . . . .	9
Предисловие к первому изданию . . . . .	10

## Введение

План изложения (11). Некоторые обозначения (13).

## Глава I

### Классическая теория свободных полей

§ 1. Лагранжев формализм . . . . .	16
1.1. Поля и частицы (16). 1.2. Гамильтонов и лагранжев формализмы (17). 1.3. Функция Лагранжа и принцип стационарного действия (18). 1.4. Трансформационные свойства функций поля. Тензоры и спиноры (20). 1.5. Другие группы преобразований (24).	
§ 2. Теорема Нётер и динамические инварианты . . . . .	24
2.1. Теорема Нётер (25). 2.2. Вектор энергии-импульса (28). 2.3. Тензор момента количества движения и тензор спина (28). 2.4. Изотопический спин, заряд и вектор тока (30).	
§ 3. Скалярное поле . . . . .	34
3.1. Лагранжев формализм действительного скалярного поля (35). 3.2. Им- пульсное представление и частотные компоненты (36). 3.3. Дискретное им- пульсное представление (40). 3.4. Комплексное скалярное поле (40). 3.5. Поле пионов (42).	
§ 4. Векторное поле . . . . .	44
4.1. Лагранжиан, дополнительное условие и инварианты (44). 4.2. Переход к импульсному представлению (47). 4.3. Спин векторного поля (49). 4.4. Запись уравнений Клейна — Гордона в виде системы уравнений первого порядка (50).	
§ 5. Электромагнитное поле . . . . .	53
5.1. Потенциал электромагнитного поля (53). 5.2. Градиентное преобразова- ние и условие Лоренца (54). 5.3. Лагранжев формализм (55). 5.4. Попереч- ные, продольные и временные составляющие (57). 5.5. Спин (58).	
§ 6. Спинорное поле. Матрицы Дирака и законы преобразования спи- норных функций . . . . .	59
6.1. Факторизация оператора Клейна — Гордона (59). 6.2. Матрицы Ди- рака (60). 6.3. Уравнение Дирака (64). 6.4. Трансформационные свойства спинорного поля (65).	
§ 7. Спинорное поле. Свойства решений и динамические инварианты . . . . .	70
7.1. Импульсное представление и матричная структура (70). 7.2. Разложе- ния по спиновым состояниям и соотношения нормировки и ортогональ- ности (73). 7.3. Лагранжев формализм и инварианты (76). 7.4. Спинорное поле с массой нуль (80).	

§ 8. Лагранжиан системы полей . . . . .	81
8.1. Лагранжиан взаимодействия и его симметрия (82). 8.2. Локальные фазовые преобразования и калибровочные поля (83). 8.3. Поле Янга — Миллса (86). 8.4. Динамические инварианты системы полей (88).	
<b>Глава II</b>	
<b>Квантовая теория свободных полей</b>	
§ 9. Общие принципы квантования волновых полей . . . . .	91
9.1. Операторная природа функций поля и амплитуда состояния (91). 9.2. Представления уравнения Шредингера (92). 9.3. Трансформационные свойства амплитуды состояния и операторов поля (93). 9.4. Постулат квантования волновых полей (95). 9.5. Физический смысл положительно- и отрицательно-частотных составляющих и сопряженных функций (97). 9.6. Состояние вакуума и амплитуда состояния в фоковом представлении (98).	
§ 10. Установление перестановочных соотношений . . . . .	101
10.1. Типы перестановочных соотношений (101). 10.2. Перестановочные соотношения Ферми — Дирака и Бозе — Эйнштейна (103). 10.3. Связь спина со статистикой. Теорема Паули (105). 10.4. Нормальное произведение операторов и запись динамических переменных (107). 10.5. Перестановочные соотношения в дискретном импульсном представлении (109).	
§ 11. Скалярное и векторное поля . . . . .	112
11.1. Действительное и комплексное скалярные поля (112). 11.2. Поле пимезонов (115). 11.3. Комплексное векторное поле (115). 11.4. Гамильтонов формализм и каноническое квантование (118).	
§ 12. Электромагнитное поле . . . . .	121
12.1. Особенности электромагнитного поля и схема квантования (121). 12.2. Индефинитная метрика (123). 12.3. Запись основных величин (127).	
§ 13. Спинорное поле . . . . .	127
13.1. Квантование по Ферми — Дираку и перестановочные функции (127). 13.2. Динамические переменные (129). 13.3. Зарядовое сопряжение (130). 13.4. Квантование нейтринное поле (133).	
§ 14. <i>CPT</i> -теорема . . . . .	135
14.1. Зарядовое сопряжение в квантованном случае (135). 14.2. <i>P</i> -преобразование (137). 14.3. Обращение времени (138). 14.4. <i>CPT</i> -теорема (140).	
<b>Глава III</b>	
<b>Сингулярные функции и регуляризация</b>	
§ 15. Функции Грина . . . . .	142
15.1. Функции Грина скалярного поля (142). 15.2. Причинная функция Грина скалярного поля (144). 15.3. Причинные функции Грина различных полей (146).	
§ 16. Особенности функций Грина и регуляризация . . . . .	149
16.1. Вычисление $D^+$ - и $D^-$ -функций (149). 16.2. Явный вид и особенности функций $D(x)$ и $D^c(x)$ (151). 16.3. Регуляризация Паули — Вилларса (153). 16.4. Размерная регуляризация (156).	
§ 17. Приведение к нормальной форме . . . . .	157
17.1. Коэффициентные функции операторных выражений (157). 17.2. Теорема Вика для обычных произведений (159). 17.3. Некоторые определения (165).	
§ 18. Коэффициентные функции . . . . .	167
18.1. Несобственная природа сингулярных функций (167). 18.2. Некоторые свойства регуляризации Паули — Вилларса (172).	
§ 19. Умножение операторных выражений . . . . .	174
19.1. Умножение сингулярных функций (174). 19.2. Некоторые свойства сингулярных функций (180). 19.3. Умножение операторных функций (181).	

## Глава IV

## Матрица рассеяния

§ 20. Основные понятия теории взаимодействующих полей . . . . .	185
20.1. Введение (185). 20.2. Представление взаимодействия (188). 20.3. Матрица рассеяния (189). 20.4. Релятивистская ковариантность и унитарность $S$ -матрицы (191). 20.5. Условие причинности (192). 20.6. Классические поля как функциональные аргументы (195).	
§ 21. Лагранжиан взаимодействия и $S$ -матрица . . . . .	196
21.1. Разложение $S$ -матрицы по степеням взаимодействия (196). 21.2. Условия ковариантности, унитарности и причинности для $S_n$ (198). 21.3. Определение явного вида $S_1(x)$ и $S_2(x, y)$ (201). 21.4. Хронологическое произведение локальных операторов (204). 21.5. Определение функций $S_n$ при любом $n$ (205). 21.6. Анализ произвола в функциях $S_n$ и наиболее общий вид $S(g)$ (208).	
§ 22. Раскрытие хронологических произведений . . . . .	213
22.1. Хронологическое спаривание (213). 22.2. Теорема Вика для хронологических произведений (218).	
§ 23. Приведение $S$ -матрицы к нормальной форме . . . . .	220
23.1. Структура коэффициентов матрицы рассеяния (220). 23.2. Диаграммы Фейнмана и правила соответствия (222). 23.3. Примеры (227). 23.4. Заключительные замечания (229).	
§ 24. Правила Фейнмана для вычисления матричных элементов матрицы рассеяния . . . . .	230
24.1. Переход к импульсному представлению (230). 24.2. Вычисление матричных элементов (232). 24.3. Учет свойств симметрии (237). 24.4. Рассеяние внешними полями (239). 24.5. Общая структура матричных элементов (241).	
§ 25. Вероятности процессов рассеяния и эффективные сечения . . . . .	244
25.1. Нормировка амплитуды состояния (244). 25.2. Вычисление вероятностей переходов (246). 25.3. Рассеяние двух частиц (248). 25.4. Эффективные сечения рассеяния (249). 25.5. Двухчастичный распад (251).	
§ 26. Примеры расчета процессов второго порядка . . . . .	252
26.1. Комптоновское рассеяние (252). 26.2. Аннигиляция пары электрон — позитрон (255). 26.3. Тормозное излучение (257).	

## Глава V

Устранение расходимостей из  $S$ -матрицы

§ 27. Расходимости $S$ -матрицы в электродинамике (второй порядок) . . .	260
27.1. Расходящаяся диаграмма с двумя внешними электронными линиями $\Sigma$ (260). 27.2. Выделение из $\Sigma$ расходящейся части (265). 27.3. Расходящаяся диаграмма с двумя внешними фотонными линиями $\Pi$ (267). 27.4. Выделение расходимостей из $\Pi$ и градиентная инвариантность (269). 27.5. Построение интегрируемой функции $S_2$ (271).	
§ 28. Расходимости $S$ -матрицы в электродинамике (третий порядок) . . .	272
28.1. Вершинная диаграмма третьего порядка (273). 28.2. Выделение расходимости из $\Gamma$ и градиентная инвариантность (275). 28.3. Тожество Уорда (278). 28.4. Получение интегрируемой функции $S_3$ (280).	
§ 29. Общие правила устранения расходимостей из $S$ -матрицы . . . . .	282
29.1. Постановка задачи (282). 29.2. Общий метод устранения расходимостей (283). 29.3. Графическое представление процедуры вычитания и $R$ -операция (285). 29.4. Индекс диаграммы $\omega(G)$ и степень расходимости (287). 29.5. Структура экспоненциальной квадратичной формы (291). 29.6. Выбор операции $\Delta(G)$ (296). 29.7. Размерная перенормировка (298).	
§ 30. Структура $R$ -операции . . . . .	298
30.1. Факторизация $R$ -операции (298). 30.2. Параметрическое представление (301). 30.3. Переход к пределу при $\epsilon=0$ (303). 30.4. Иллюстрация (306).	

- § 31. Аналитические свойства коэффициентных функций в импульсном представлении . . . . . 308
- 31.1. Аналитические свойства  $S_n$  (308). 31.2. Структура функций  $H_n$  (309). 31.3. Аналитические свойства функций  $H_n$  (310).
- § 32. Классификация ренормируемости теорий . . . . . 312
- 32.1. Взаимодействия первого и второго рода (312). 32.2. Перечень взаимодействий первого рода (315). 32.3. Природа взаимодействий второго рода (316). 32.4. Фиксирование теории первого рода конечным числом констант (319).

## Глава VI

## Приложения общей теории устранения расходимостей

- § 33. Спинорная электродинамика. I. Общий вид контрчленов . . . . . 321
- 33.1. Типы расходящихся диаграмм и теорема Фарри (321). 33.2. Градиентная инвариантность матрицы рассеяния (326). 33.3. Тождества Уорда (333). 33.4. Контрчлены (336).
- § 34. Спинорная электродинамика. II. Ренормировка массы и заряда 337
- 34.1. Градиентное преобразование спаривания  $\overline{A}A$  (337). 34.2. Неоднозначность процесса устранения бесконечностей (338). 34.3. Полные функции Грина  $G$ ,  $D$  и вершинная часть  $\Gamma$  (343). 34.4. Радиационные поправки во внешние линии и выбор конечных постоянных (348).
- § 35. Спинорная электродинамика. III. Радиационные поправки второго порядка . . . . . 351
- 35.1. Поправки к фотонной функции (351). 35.2. Поправки к электронной функции Грина (354). 35.3. Поправки к вершинной части (357). 35.4. Схема вычисления поправок к формуле Клейна — Нишины (358).
- § 36. Некоторые модели сильных взаимодействий . . . . . 360
- 36.1. Модель  $\phi^3$  (360). 36.2. Псевдоскалярное поле с нелинейным взаимодействием (364). 36.3. Псевдоскалярная модель мезон-нуклонного взаимодействия (368). 36.4. Второй заряд, мультипликативные ренормировки и внешние линии (370).
- § 37. Полные функции Грина и вершинные функции . . . . . 372
- 37.1. Высшие функции Грина (372). 37.2. Источники и производящие функционалы (375). 37.3. Производящий функционал для высших функций Грина (378). 37.4. Вершинные функции (380).
- § 38. Уравнения Швингера и Дайсона . . . . . 382
- 38.1. Обобщенная теорема Вика (383). 38.2. Редукционные формулы (386). 38.3. Уравнения Швингера (389). 38.4. Уравнения Дайсона (391). 38.5. Учет контрчленов (393).

## Глава VII

## Уравнение Шредингера и динамические переменные

- § 39. Уравнение Шредингера для амплитуды состояний . . . . . 396
- 39.1. Уравнение для  $\Phi(g)$  в вариационных производных (396). 39.2. Уравнение Шредингера в представлении взаимодействия и уравнение Томонага — Швингера (397). 39.3. Сингулярности обобщенного гамилтониана (401). 39.4. Основные свойства обобщенного гамилтониана (405).
- § 40. Динамические переменные системы взаимодействующих полей . . . 407
- 40.1. Энергия, импульс и тензор момента (407). 40.2. Локальные динамические величины (410). 40.3. Вектор тока (413). 40.4. Условие Лоренца (415). 40.5. Операторы волновых полей (416).
- § 41. Поляризация вакуума и аномальный магнитный момент электрона 417
- 41.1. Поляризация вакуума (417). 41.2. Аномальный магнитный момент электрона (421).

- § 42. Уравнение Дирака с радиационными поправками . . . . . 426  
 42.1. Обобщение волновой функции электрона (426). 42.2. Обобщение уравнения Дирака (430). 42.3. Лэмбовский сдвиг уровней (432). 42.4. Значительные замечания (435).

## Глава VIII

### Метод функционального усреднения

- § 43. Континуальный интеграл в квантовой теории поля . . . . . 437  
 43.1. Введение (437). 43.2. Вычисление  $\langle T(\exp i \int v\phi dp) \rangle_0$  (438). 43.3. Континуальные интегралы (440). 43.4. Континуальный интеграл по ферми-полям (444).
- § 44. Производящие функционалы и функции Грина . . . . . 447  
 44.1. Запись основных величин через функциональные интегралы (447). 44.2. Представления для функций Грина в виде континуальных бозе-интегралов (449).
- § 45. Градиентные преобразования спинорной электродинамики . . . . . 451  
 45.1. Функциональный интеграл в произвольной калибровке (451). 45.2. Градиентная инвариантность матрицы рассеяния (454). 45.3. Обобщенные тождества Уорда (456). 45.4. Переход к поперечной калибровке (458). 45.5. Градиентные преобразования функций Грина (460).
- § 46. Исследование модели Блоха—Нордсика . . . . . 461  
 46.1. Модель Блоха—Нордсика и определение  $G(x, y|A)$  (461). 46.2. Вычисление  $G(x, y)$  (464).

## Глава IX

### Ренормализационная группа

- § 47. Группа мультипликативных ренормировок в квантовой теории поля . . . . . 468  
 47.1. Введение (468). 47.2. Групповой характер мультипликативных ренормировок (470). 47.3. Переход к импульсному представлению (473). 47.4. Вывод функциональных уравнений (474). 47.5. Свойства функциональных уравнений (476).
- § 48. Общий анализ групповых уравнений . . . . . 478  
 48.1. Уравнения спинорной электродинамики. Двухзарядный случай (478). 48.2. Дифференциальные уравнения (480). 48.3. Общее решение уравнений (482). 48.4. Связь ренормгруппы и теории возмущений (485). 48.5. Схемная зависимость (486).
- § 49. Асимптотический анализ в ультрафиолетовой области . . . . . 489  
 49.1. Асимптотические уравнения для инвариантного заряда (489). 49.2. Асимптотики инвариантного заряда (492). 49.3. Асимптотики функций Грина (496). 49.4. Высшие функции Грина (498).
- § 50. Анализ функций Грина спинорной электродинамики . . . . . 499  
 50.1. Постановка задачи (499). 50.2. Ультрафиолетовые асимптотики (499). 50.3. Инфракрасная асимптотика электронной функции Грина (504). 50.4. Матричные элементы и вероятности перехода (505).
- § 51. Модели сильных взаимодействий . . . . . 506  
 51.1. Главное логарифмическое приближение модели  $\Phi^4$  (506). 51.2. Двухпетлевое приближение (508). 51.3. Надежность результатов. Высшие приближения (509). 51.4. Квантовая хромодинамика (511). 51.5. Анализ двухзарядной модели (512). 51.6. Симметричные асимптотики высших функций Грина (516).

## Глава X

### Дисперсионные соотношения

- § 52. Основные свойства  $S$ -матрицы в локальной теории поля . . . . . 518  
 52.1. Введение (518). 52.2. Общие свойства матрицы рассеяния (521). 52.3. Локальные свойства (524). 52.4. Оптическая теорема (527).

§ 53. Спектральное представление пионной функции Грина . . . . .	528
53.1. Радиационные операторы первого и второго порядка (529). 53.2. Вакуумные ожидания произведения и коммутатора двух токов (531). 53.3. Аналитические свойства $Q^r$ и $Q^a$ (534). 53.4. Спектральное представление $q^r$ , $q^a$ и $q^i$ (547)	
§ 54. Спектральное представление фермионной функции Грина . . . . .	540
54.1. Радиационные ферми-операторы (540). 54.2. Вывод спектрального представления (541). 54.3. Близость к противоречию (544).	
§ 55. Представление Поста — Лемана — Дайсона . . . . .	545
55.1. Постановка задачи (545). 55.2. Общая форма представления (547). 55.3. Области интегрирования (550). 55.4. Некоторые следствия (562).	
§ 56. Вывод дисперсионных соотношений для пион-нуклонного рассеяния . . . . .	554
56.1. Связь амплитуды рассеяния с запаздывающим и опережающим матричными элементами (554). 56.2. Переход к фиксированной системе отсчета. Трудности аналитического продолжения (558). 56.3. Схема получения дисперсионных соотношений для амплитуды рассеяния вперед (560). 56.4. Случай рассеяния при $p \neq 0$ (564)	
§ 57. Дисперсионные соотношения для пион-нуклонного рассеяния вперед . . . . .	565
57.1. Переход к вещественным величинам (565). 57.2. Изотопическая и спиновая структура (569). 57.3. Свойства симметрии по энергии (570). 57.4. Физические дисперсионные соотношения (571). 57.5. Дальнейшее развитие метода (572).	
<b>Приложение 1. Некоторые сведения об изотопическом формализме</b> . . . . .	<b>575</b>
А. Дублет нуклонов (575). Б. Триплет пионов (576). В. Амплитуда пион-нуклонного рассеяния (577).	
<b>Приложение 2. Сводка сингулярных функций</b> . . . . .	<b>579</b>
А. Вспомогательные сингулярные функции (579). Б. Функции скалярного поля (580). В. Сингулярные функции электромагнитного, векторного и спинорного полей (582). Г. Связь с обозначениями других авторов (583)	
<b>Приложение 3. Сводка формул для вычисления матричных элементов</b> . . . . .	<b>584</b>
А. Формулы с матрицами и спинорами Дирака (584). Б. Вычисление интегралов (585). В. Фейнмановская параметризация (586). Г. Размерная регуляризация (586)	
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>588</b>
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	<b>594</b>



## ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Предыдущее издание на языке оригинала вышло в 1976 г. В 1980 г. оно было переведено (во второй раз) на английский язык (США, Уайли). Таким образом, к настоящему времени помимо трех русских изданий имеется два американских и одно французское (Франция, Дюно) — всего шесть изданий.

Ввиду неубывающего интереса к этой книге мы издаем ее еще раз, внося исправления мелких погрешностей, а также небольшие изменения в текст главы «Ренормализационная группа».

Октябрь 1984 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В новом издании заново написаны главы, излагающие методы континуального интегрирования и ренормализационной группы — два, весьма актуальные в последние годы, раздела теории. Значительной переработке и пополнению подвергся также материал, относящийся к полным функциям Грина и уравнениям для них.

Эта работа выполнялась в атмосфере дружеских советов и плодотворных обсуждений с нашими коллегами из Математического института имени В. А. Стеклова АН СССР и Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, которым мы приносим глубокую благодарность.

г. Дубна, март 1975 г.

*Авторы*

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке второго издания основное внимание было обращено на усовершенствование принципиальных моментов изложения. Так, в частности, в новой редакции даются основы квантования полей и общие правила устранения расходимостей. Значительные изменения внесены в материал двух последних глав (ренормализационная группа и дисперсионные соотношения), где мы стремились облегчить изложение, освободив его от ряда сложных вопросов (например, доказательства диспер-

сионных соотношений при  $t \neq 0$ ), достаточно подробно изложенных в более специальной литературе.

Авторы благодарны большому числу своих коллег из Математического института имени В. А. Стеклова АН СССР, Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований и Института математики СО АН СССР за полезные замечания и советы при работе над вторым изданием.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая монография представляет собой попытку систематического изложения современной теории квантованных полей начиная с основ и вплоть до последних ее достижений.

При написании книги авторы руководствовались намерением изложить теорию поля с единой точки зрения, совмещая внутреннюю логическую последовательность и замкнутость с полнотой охватываемого материала. Мы стремились также везде, где это возможно, внести максимальную ясность в основные положения теории, используемые на ее современном этапе развития. При этом, естественно, особое внимание было обращено на математическую корректность рассуждений, в связи с чем степень освещения приложений теории к расчетам конкретных физических явлений претендует лишь на методическую полноту.

Авторы стремились также достаточно полно осветить наиболее перспективные направления, развивающиеся в самое последнее время. Мы надеемся, что благодаря этому книга окажется полезной не только лицам, приступающим к изучению квантовой теории поля, но и теоретикам, работающим в этой области физики.

Глава «Дисперсионные соотношения», излагающая наиболее новые результаты, ввиду их большой актуальности была включена в книгу дополнительно.

Авторы благодарят сотрудников и аспирантов Отдела теоретической физики Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР и Кафедры статистической физики и механики физического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова за замечания и предложения в процессе подготовки рукописи. Мы особенно благодарны Б. В. Медведеву, сделавшему ряд ценных замечаний по отдельным разделам книги.

Москва, февраль 1957 г.

*Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков*

## ВВЕДЕНИЕ

**План изложения.** Эта книга содержит систематическое изложение основ современной теории квантованных полей, проведенное с привлечением необходимых математических понятий. Основная часть книги (первые семь глав) представляет собой последовательное развитие формализма, основанного на лагранжевой формулировке теории свободных полей и аксиоматическом построении матрицы рассеяния для взаимодействующих полей.

Содержание первой главы составляет аппарат неквантованных релятивистских свободных полей, основанный на лагранжевом формализме и теореме Нётер.

Во второй главе проведено квантование свободных полей на основе принципа соответствия и без обращения к каноническому формализму. В главе третьей обсуждаются свойства перестановочных и причинных функций, а также некоторые математические вопросы, возникающие при умножении сингулярных функций.

В четвертой главе дана общая теория матрицы рассеяния и развит аппарат теории возмущений. При этом мы следуем идеям Гейзенберга, Фейнмана и особенно Штюкельберга и определяем матрицу рассеяния без обращения к гамильтонову формализму, положив в основу физические требования ковариантности, унитарности и причинности. Условие причинности, явно сформулированное при помощи вариационной производной, играет при этом важную роль. Другими словами, мы даем конструктивное построение разложения теории возмущений для  $S$ -матрицы в рамках аксиоматического подхода. Путем тщательного анализа произвола, возникающего при умножении сингулярных функций Грина, для матрицы рассеяния получено наиболее общее выражение, представляющее собой основу для последующей процедуры устранения расходимостей.

Далее, в главе пятой, на примере диаграмм низших порядков спиновой электродинамики продемонстрирована техника практических вычислений фейнмановских интегралов и выделения из них простейших ультрафиолетовых расходимостей. Проблема устранения расходимостей в теории возмущений затем рассмотрена в полном объеме и изложена строгая теория перенормировок  $S$ -матрицы. Дана классификация перенормируемости теорий в рамках теории возмущений.

Шестая глава содержит применение общей теории перенормировки в любом порядке теории возмущений к спинорной электродинамике, теориям скалярного и псевдоскалярного мезонного поля с самодействием и к теории псевдоскалярного взаимодействия нуклонов и псевдоскалярных мезонов. Особое внимание здесь обращено на структуру перенормировок полных функций Грина. Получены также уравнения Швингера для этих функций.

В седьмой главе путем введения «половинной»  $S$ -матрицы изучается вопрос об описании эволюции системы квантованных полей во времени и выводится уравнение Томонага — Швингера. Введены динамические переменные и построены обобщения операторов свободных полей на случай взаимодействия. Получено уравнение Дирака с радиационными поправками и изложена теория лэмбовского сдвига уровней.

В трех заключительных главах рассмотрены некоторые общие методы теории квантованных полей, не связанные органически с разложением теории возмущений.

Глава восьмая содержит изложение метода континуального интегрирования. Этот метод, основанный на особом представлении полных функций Грина через континуальные интегралы, обладает большой общностью. Его возможности продемонстрированы на материале спинорной электродинамики. Здесь получены обобщенные тождества Уорда, выведены формулы калибровочного преобразования электронной функции Грина и определена структура ее инфракрасных особенностей. Этот метод в последнее время становится все более популярным благодаря исследованиям неабелевых калибровочных полей, а также приобретает решающее значение как инструмент теоретического анализа квантовополевых моделей, не основанный на теории возмущений.

В девятой главе представлен метод ренормализационной группы, основанный на групповом характере мультипликативных перенормировок. Кроме изложения основ и аппарата функциональных и дифференциальных уравнений, большое внимание уделено практически важному анализу асимптотик в ультрафиолетовой области.

Последняя, десятая глава посвящена методу дисперсионных соотношений. Наше изложение, основанное на аксиоматической формулировке, содержит вывод спектральных представлений для одночастичных функций Грина и доказательство дисперсионных соотношений для пион-нуклонного рассеяния. Техника рассуждений основана на широком использовании вариационных производных  $S$ -матрицы по квантованным полям (т. е. токов) и матричных элементов от их произведений. Материал этой главы дает достаточное представление о методах теории функций многих комплексных переменных, используемых для аналитического продолжения обобщенных функций.

За 30 лет существования метода дисперсионных соотношений эти методы, поначалу казавшиеся экзотическими, нашли широкое при-

менение в квантовой теории поля и в настоящее время составляют основу большей части ее строгих основных результатов (связь спина со статистикой, *CPT*-теорема и т. п.).

Собственно метод дисперсионных соотношений в широком смысле слова, т. е. метод изучения основных величин теории, использующий их аналитические свойства, за этот период также получил очень большое развитие и нашел многообразные и физически богатые применения. Некоторые из них, как, например, высокоэнергетические свойства амплитуды рассеяния (теоремы Померанчука, Логунова; граница Фруассара), основываются на строго доказанных аналитических свойствах, другие используют дополнительные постулируемые утверждения (например, двойное спектральное представление Манделстама). Все эти вопросы, однако, выходят за рамки нашего изложения.

**Некоторые обозначения.** Введем еще ряд общих обозначений. Все компоненты 4-векторов выбраны действительными. Метрика определяется тензором Минковского, взятым с обратным знаком:

$$g^{mn} = 0 \text{ при } m \neq n; \quad g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1,$$

т. е. произведение двух контравариантных 4-векторов  $a$  и  $b$  с компонентами  $\{a^0, a^1, a^2, a^3\} = \{a^0, \mathbf{a}\}$  и  $\{b^0, b^1, b^2, b^3\} = \{b^0, \mathbf{b}\}$  определено как

$$ab \equiv \sum_{0 \leq m, n \leq 3} g^{mn} a^m b^n = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Жирные буквы относятся к обычным 3-векторам. Переход от контравариантных  $a^i$  к ковариантным  $a_i$  компонентам (опускание индекса) достигается с помощью метрического тензора

$$a_m = \sum g^{mn} a^n = g_{mn} a^n; \quad g_{mn} = g^{mn},$$

т. е.

$$a_0 = a^0, \quad a_\alpha = -a^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad a_m = \{a^0, -\mathbf{a}\}.$$

Здесь и в дальнейшем мы будем подразумевать суммирование по дважды повторяющимся индексам, опуская знак суммы. При этом, как правило, индексы суммирования по всем четырем компонентам 0, 1, 2, 3 обозначаются латинскими буквами, а по трем пространственным — греческими. Например,

$$ab = g^{mn} a_m b_n = a^n b_n = a_m b^m, \\ ab = a_\alpha b_\alpha = a^\alpha b^\alpha.$$

Поднимая (или опуская) один из индексов метрического тензора, получаем символ Кронекера:

$$g_{nm} g^{mk} = \delta_n^k.$$

В то же время индексы, относящиеся к группам внутренних симметрий (например, изотопические индексы), обозначаются, как правило, латинскими буквами, взятыми из начала алфавита ( $a, b, \dots$ ).

Для (операторных) функций поля кроме индивидуализированных обозначений, введенных в соответствующих местах изложения, иногда используются обобщающие обозначения. Поля с целым спином (бозе-поля) обозначаются символом  $\varphi$ , а поля с полуцелым спином (ферми-поля) — символом  $\psi$ . При этом, иногда, для того чтобы подчеркнуть общность рассмотрения, непрерывные пространственно-временные координаты объединяются с дискретными в один аргумент, обозначаемый греческой буквой

$$\varphi_a(x) \rightarrow \varphi(\xi), \quad \psi_a(x) \rightarrow \psi(\xi), \quad \xi = (x, a).$$

Символ интегрирования по  $\xi$  имеет следующий смысл:

$$\int d\xi = \sum_a \int d^4x.$$

В случае самого общего рассмотрения, справедливого как для бозе-, так и для ферми-полей, применяется специальное обозначение  $u(\xi)$ .

Символом  $\hat{a}$  обозначена свертка компонент 4-вектора  $a_m$  с матрицами Дирака  $\gamma^m$ :

$$\hat{a} = a^m \gamma_m.$$

Для производных иногда используются сокращенные обозначения

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial x^n} = \partial_n \varphi_a = \varphi_{a; n}; \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = \partial^n u = u^{;n}.$$

При этом, разумеется,

$$\varphi_a^{;n} = g^{nm} \varphi_{a; m}.$$

Оператор Даламбера

$$\square = \Delta - \partial_0^2$$

представим как

$$\square = -\partial^n \partial_n.$$

По всей книге используется система единиц, в которой скорость света и постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ , равны единице, т. е.

$$c = \hbar = 1.$$

В этой системе энергия, импульс и масса имеют размерность обратной длины, а время  $x_0 = t$  — размерность длины.

Формулы четырехмерного преобразования Фурье, как правило, записываются в виде

$$\hat{f}(x) \sim \int e^{-i p x} \hat{f}(p) dp, \quad \hat{f}(p) \sim \int e^{i p x} f(x) dx.$$

Знак показателя экспоненты выбран из соображений соответствия его первого слагаемого квантовомеханической формуле

$$f(x^0, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}) \sim \int e^{-iEt\hbar} (E, \mathbf{x}) dE.$$

Трехмерное преобразование Фурье соответственно имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) \sim \int e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\varphi}(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad \tilde{\varphi}(\mathbf{p}) \sim \int e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Исключения составляют формулы для положительно-частотных частей функций поля и положительно-частотных частей функций Грина. Нормировочные множители фурье-преобразований (степени  $2\pi$ ) в различных местах книги выбираются по-разному.

Признаком библиографической ссылки является год, стоящий после фамилии автора. Например, «Дайсон (1949)» обозначает ссылку на работу Дайсона, опубликованную в 1949 году, полное библиографическое наименование которой приведено в списке цитированной литературы в конце книги.

Внутри каждого параграфа употребляется одинарная нумерация формул: (1), (2), (3), ..., которая непосредственно используется для ссылок на формулы внутри этого параграфа. Употребление двойной нумерации (13.26), (57.11), (ПЗБ.2) сигнализирует об отсылке к формуле другого параграфа или приложения. При этом первый символ указывает номер параграфа или приложения, а второе число — порядковый номер формулы в нем.

## КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ

## § 1. Лагранжев формализм

**1.1. Поля и частицы.** Мы начинаем наше изложение с рассмотрения классической теории релятивистских волновых полей. Процедура квантования полей (глава II) приведет нас к понятию квантовых (квантованных) полей. *Квантовое поле* — это фундаментальная физическая концепция, в рамках которой формулируются и описываются свойства элементарных частиц и их взаимодействий.

Метод квантованных полей позволяет описывать систему многих частиц единым физическим объектом в обычном пространстве-времени — квантовым полем. Он также дает возможность описывать важнейшее свойство мира элементарных частиц — их взаимные превращения.

Хорошо известным в классической физике примером волнового поля является электромагнитное поле, описывающее взаимодействие электрически заряженных частиц. Классическое описание электромагнитного поля, основанное на уравнениях Максвелла, приводит к чисто волновым представлениям об электромагнетизме. Иногда также оказывается удобным рассматривать непрерывную систему — электромагнитное поле — в виде дискретной механической системы с бесконечно большим числом степеней свободы, точнее, в виде бесконечно большого числа так называемых *осцилляторов поля*. Подобное рассмотрение позволяет использовать при изучении поля аппарат классической механики.

Переход к корпускулярной, вернее, к единой корпускулярно-волновой точке зрения осуществляется с помощью так называемой процедуры квантования, в которой полю сопоставляются дискретные кванты энергии, соответствующие различным возможным энергетическим состояниям осцилляторов поля. При этом говорят, что электромагнитные кванты являются частицами, описывающими взаимодействие электрически заряженных частиц. Масса покоя квантов электромагнитного поля равна нулю. Гамма-кванты обладают собственным моментом количества движения — спином. Это свойство находит свое отражение в том, что электромагнитное поле 4-х-компонентно, оно описывается 4-векторным потенциалом  $A_\mu$ .

Свойства волновых полей, соответствующие другим частицам (электронам, нуклонам, мезонам и т. д.), также отражают спиновые, зарядовые и прочие характеристики этих частиц. Указанные ча-



стицы отождествляются с квантами соответствующих полей и описывают взаимодействие между другими частицами, являющимися источниками данного волнового поля. Известный пример подобного соответствия представляют  $\pi$ -мезоны, являющиеся квантами поля, описывающего основную часть взаимодействия между нуклонами. Можно сказать, что ядерные силы в основном «переносятся» пионами.

Таким образом, квантовая теория взаимодействующих волновых полей представляет собой *теорию взаимодействия элементарных частиц*.

Мы рассмотрим сначала классическую теорию свободных волновых полей (глава I), затем квантовую теорию свободных волновых полей (глава II) и, наконец, теорию взаимодействующих квантованных полей.

При изложении теории классических полей в целях наглядности мы будем иногда использовать понятия, связанные с характеристиками соответствующих частиц (масса, спин и т. п.). При этом следует иметь в виду, что полный смысл эти понятия приобретают лишь после квантования.

**1.2. Гамильтонов и лагранжев формализмы.** Рассматривая поле в виде механической системы с бесконечно большим числом степеней свободы, можно построить теорию поля по аналогии с классической механикой точки. Поле при этом характеризуется так называемой *функцией поля*  $u(x)$ , соответствующей бесконечно большому числу степеней свободы. Уравнения для функций поля могут быть получены из лагранжевой функции системы с помощью вариационного принципа стационарного действия, а динамические переменные построены путем образования величин, подобных соответствующим величинам в аппарате классической механики.

При этом, по аналогии с механикой, оказываются возможными два способа построения теории волновых полей.

В *каноническом* (или *гамильтоновом*) *формализме* основными величинами являются обобщенные координаты и импульсы, а также гамильтонова функция системы, конструируемая с помощью функции Лагранжа и обобщенных координат и импульсов. С помощью функции Гамильтона непосредственно получают канонические уравнения и динамические переменные, причем указанный путь построения теории поля позволяет детально провести формальную аналогию с классической механикой.

Однако при всей своей наглядности гамильтонов формализм обладает существенным недостатком: из-за выделенной роли времени изложение теряет релятивистскую инвариантность, что представляет особенно большие неудобства в квантовой теории поля.

Второй способ изложения теории поля, который мы будем называть *лагранжевым формализмом*, основывается на том, что введение обобщенных импульсов, равно как и функции Гамильтона, не является обязательным. Исходя из лагранжиана системы, с помощью вариационного принципа получают уравнения движения, а сохра-

няющиеся во времени динамические величины типа энергии — импульса, заряда и т. п. определяют с помощью теоремы Нётер как инварианты, соответствующие различным преобразованиям системы координат и функций поля. В то время как в каноническом формализме основной независимой переменной является время, а координатные переменные играют роль параметров, в лагранжевом формализме все четыре координаты входят совершенно симметрично. Черты деталей аналогии с механической системой точек при этом выступают менее четко, зато изложение теории с самого начала становится релятивистски ковариантным. Конечные результаты в обоих случаях, разумеется, эквивалентны. Наше изложение будет построено на основе лагранжева формализма.

**1.3. Функция Лагранжа и принцип стационарного действия.** Уравнения поля и их инварианты получаются непосредственно из функции Лагранжа. Сформулируем поэтому сначала основные требования, которые накладываются на эту функцию. Среди них важное место занимает условие *релятивистской инвариантности* или условие инвариантности относительно полной неоднородной группы Лоренца. В связи с этим напомним определение группы Лоренца. Как известно, *полной группой Лоренца* называется группа однородных линейных преобразований координат четырехмерного пространства-времени, которые оставляют инвариантной квадратичную форму, представляющую собой квадрат 4-интервала:

$$x^2 = x_n x^n \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2, \quad (1)$$

и не меняют направления времени. Указанная группа включает пространственные повороты в трех плоскостях  $x^1 x^2$ ,  $x^2 x^3$ ,  $x^3 x^1$ , лоренцовы повороты в трех плоскостях  $x^0 x^1$ ,  $x^0 x^2$ ,  $x^0 x^3$ , отражения пространственных осей  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  и все произведения указанных преобразований. При этом детерминанты преобразований поворотов равны  $+1$ , а детерминанты преобразований отражения осей равны  $-1$ . Поэтому выделяют собственную группу Лоренца преобразований с детерминантом, равным  $+1$ , включающую шесть поворотов и отражения четного числа пространственных осей, сводящихся к поворотам.

Часто оказывается удобным рассматривать полную группу Лоренца вместе с преобразованиями трансляции по всем четырем координатным осям. Совокупность указанных преобразований мы будем называть неоднородной *группой Лоренца* (полная группа Пуанкаре).

Инвариантность относительно этой группы будем называть *релятивистской* или *лоренцевой инвариантностью*.

Наконец, включение операции отражения времени (переход от ортохронной к неортохронной группе) приводит нас к общей группе Лоренца (соответственно общей группе Пуанкаре).

Вернемся к функции Лагранжа. Она является функцией времени и в механике записывается в виде суммы по всем материальным

точкам системы. Эта сумма для непрерывной системы типа волнового поля выражается пространственным интегралом от плотности функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(x^0) = \int dx \mathcal{L}(x^0, x). \quad (2)$$

Однако в вариационный принцип входит не функция Лагранжа, а действие  $\mathcal{A}$ , получаемое из нее интегриацией по  $x^0$ . Поэтому нековариантное выражение (2) в лагранжевом формализме фактически оказывается промежуточным, и вполне достаточно рассматривать плотность функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(x^0, x) = \mathcal{L}(x),$$

зависящую от всех четырех пространственно-временных переменных. В дальнейшем будем именовать  $\mathcal{L}(x)$  лагранжианом.

При этом, если лагранжиан  $\mathcal{L}(x)$  зависит лишь от состояния полей в бесконечно малой окрестности  $x$ , т. е. от значений  $u_i$  и конечного числа их частных производных, взятых в точке  $x$ , то он именуется локальным лагранжианом, а соответствующая теория — локальной теорией. Противный случай, когда, например,  $\mathcal{L}(x)$  представляется в виде

$$\int dy F\left(u(x), u(y), \frac{\partial u(x)}{\partial x^k}, \frac{\partial u(y)}{\partial y^m}\right),$$

соответствует так называемым нелокальным теориям, которые нами не рассматриваются.

Лагранжиан  $\mathcal{L}$  обычно считают действительной функцией (в квантованном случае — эрмитовым оператором — см. § 21.3) от переменных поля  $u_i(x)$  и их первых производных  $u_{i;k}(x)$ , не зависящей явно от координат и обладающей свойством релятивистской инвариантности.

Таким образом, мы можем записать локальный лагранжиан в виде

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(u_i(x), u_{i;k}(x)).$$

Интеграл от лагранжиана по некоторому объему пространства-времени

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(x) dx \quad (dx = dx^0 dx) \quad (3)$$

называется действием.

Из вариационного принципа стационарного действия

$$\delta \mathcal{A} = 0,$$

полагая, что вариации функций поля  $\delta u_i$  исчезают на границе 4-объема интеграции, с помощью интеграции по частям получаем уравнения Лагранжа — Эйлера

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta u_i(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i(x)} - \frac{d}{dx^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;k}(x)} = 0, \quad (4)$$

которые определяют полевые функции  $u_i(x)$ , т. е. являются уравнениями полей. В соответствии с упомянутыми свойствами лагранжиана уравнения поля являются дифференциальными уравнениями не выше второго порядка.

Поскольку физические свойства системы определяются действием, т. е. интегралом (3), то лагранжиан  $\mathcal{L}(x)$  оказывается неоднозначным. К нему можно добавлять полную 4-дивергенцию от некоторого 4-вектора:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \frac{\partial}{\partial x^k} F^k(x).$$

Интеграл (3) от  $F^k_{;k}$  с помощью теоремы Гаусса — Остроградского сводится к поверхностному интегралу от  $F^k$  по трехмерной границе четырехмерного объема интегрирования.

Указанный произвол в лагранжиане обычно используют, считая  $F^k$  некоторой функцией переменных поля

$$F^k(x) = \Phi^k(u(x)).$$

В этом случае, принимая во внимание, что вариации функций поля  $\delta u$  исчезают на границе четырехмерного объема, получаем, что член  $F^k_{;k}$  не дает вклада в вариацию действия, вследствие чего не меняет уравнений движения.

**1.4. Трансформационные свойства функций поля. Тензоры и спиноры.** Перед тем как перейти к построению инвариантов полей, рассмотрим трансформационные свойства полевых функций. Другими словами, нам нужно установить законы преобразования полевых функций при преобразовании координат из неоднородной группы Лоренца:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = Lx, \\ x'^k &= \Omega^k_l x^l + a^k = \Omega^{kl} x_l + a^k; \quad g_{mn} \Omega^{mk} \Omega^{nl} = g^{kl}. \end{aligned} \quad (5)$$

Полевой функцией  $u(x)$  называется одна (однокомпонентная полевая функция) или несколько (многокомпонентная полевая функция) функций четырех координат  $x^k$ , заданных в каждой системе отсчета. Переходу от одной системы отсчета  $x$  к другой  $x'$ , связанной с  $x$  лоренцевым преобразованием (5), сопоставляется однородное линейное преобразование компонент полевой функции

$$u(x) \rightarrow u'(x') = \Lambda u(x), \quad (6)$$

причем матрица преобразования функций  $\Lambda$  целиком определяется матрицей лоренцева преобразования  $L$ . Подчеркнем, что рассматриваемое преобразование (6) не ограничивается заменой аргумента  $x$  на  $x'$ , описывая преобразования систем отсчета, но не перемещения из одной точки пространства в другую.

Таким образом, каждому лоренцеву преобразованию  $L$  соответствует линейное преобразование  $\Lambda_L$ , причем, очевидно, единич-

ному элементу группы  $L$  соответствует единичное преобразование  $\Lambda = 1$ , а произведению двух элементов группы Лоренца соответствует произведение двух преобразований

$$\Lambda_{L_1 L_2} = \Lambda_{L_1} \Lambda_{L_2}.$$

Система операторов  $\Lambda$  с такими свойствами в теории групп называется *линейным представлением группы*. Операторы  $\Lambda$ , очевидно, можно представлять себе в виде матриц, ранг которых определяется числом компонент функции поля  $u$ . В случае, когда число компонент  $u$  конечно, говорят, что группа преобразований  $\Lambda$  образует *конечномерное* представление группы Лоренца, в противном случае мы приходим к *бесконечномерному* представлению этой группы. Ввиду того, что все основные физические поля обычно описываются функциями с конечным числом компонент, мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением лишь конечномерных представлений группы Лоренца.

Таким образом, мы можем рассматривать преобразования  $\Lambda$  как операторы, действующие в конечномерном пространстве компонент полевых функций, и изображать их квадратными матрицами конечного ранга.

Иногда оказывается, что пространство компонент функций поля, в котором действует представление  $\Lambda$ , может быть разбито на подпространства, инвариантные относительно всех преобразований данного представления (т. е. на подпространства, которые под действием  $\Lambda$  переходят сами в себя). Такое представление называется *приводимым*. В противном случае представление является *неприводимым*. Если процесс выделения инвариантных подпространств в пространстве приводимого представления провести до конца, т. е. разбить это пространство на инвариантные подпространства, которые сами уже не будут содержать таковых, то, очевидно, исходное представление разобьется на неприводимые представления, действующие в «своих» инвариантных подпространствах. Поэтому изучение всякого приводимого представления может быть сведено к изучению неприводимых представлений данной группы. Возможные типы волновых функций и их законы преобразования (6) могут быть получены исследованием конечномерных представлений группы Лоренца.

Подобное исследование составляет особый раздел теории представлений непрерывных групп и вкратце сводится к следующему. Конечномерные представления группы Лоренца могут быть однозначными или двузначными. Это связано с тем, что соответствие  $L \rightarrow \Lambda_L$  не обязательно должно быть однозначным, поскольку функции поля, вообще говоря, не являются непосредственно наблюдаемыми на опыте величинами (наблюдаемыми величинами, однако, всегда являются *билинейные комбинации* полевых функций). Неоднозначность оператора  $\Lambda_L$ , соответствующего преобразованию  $L$ , должна быть все же такова, чтобы наблюдаемые величины трансфор-

мировались вполне однозначно при любом лоренцевом преобразовании  $L$ . Кроме того, необходимо, чтобы операторы  $\Lambda_L$  были непрерывными функциями параметров преобразования  $L$ , т. е. чтобы бесконечно малому преобразованию системы отсчета соответствовало бесконечно малое преобразование функций поля. Совокупность указанных требований приводит к тому, что представления группы Лоренца распадаются на две категории. Первая категория характеризуется *однозначностью соответствия*  $L \rightarrow \Lambda_L$  и содержит однозначные так называемые *тензорные* и *псевдотензорные* \*) представления. Функции поля, преобразующиеся по тензорным представлениям, называются *тензорами* (*псевдотензорами*) и в некоторых случаях могут быть наблюдаемы непосредственно (электромагнитное поле). Во втором случае это соответствие оказывается двузначным:  $L \rightarrow \pm \Lambda_L$ .

Закон преобразования (псевдо)тензора  $N$ -го ранга

$$T^{i_1, i_2, \dots, i_N}$$

при непрерывных преобразованиях координат (преобразования отражения нечетного числа осей рассматриваются ниже отдельно) имеет вид

$$T'^{i_1, i_2, \dots, i_N}(x') = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x'^{i_N}}{\partial x^{j_N}} T^{j_1, \dots, j_N}(x) \quad (7)$$

или, в обозначениях (5),

$$T'^{i_1, \dots, i_N}(x') = \Omega_{j_1}^{i_1} \dots \Omega_{j_N}^{i_N} T^{j_1, \dots, j_N}(x).$$

Двузначные представления называются *спинорными*, а соответствующие величины — *спинорами*. Закон преобразования спинорных величин имеет более сложную структуру и для простейших спиноров приведен в § 6. Отметим лишь, что вытекающий из (7) закон преобразования тензорных величин

$$u(x) \rightarrow u'(x') = u(x)$$

при преобразовании трансляции

$$x'^h = x^h + a^h$$

является справедливым также и для спиноров.

Приведем теперь простейшие тензорные представления и соответствующие им величины. Тензор нулевого ранга, при любых непрерывных преобразованиях трансформирующийся по закону

$$u'(x') = u(x), \quad (8)$$

является *скаляром* или *псевдоскаляром*.

\*) Различие между тензорами и псевдотензорами связано с преобразованиями отражения пространственных осей и подробно рассматривается ниже.

Тензор первого ранга, преобразующийся при поворотах координат по закону

$$u'^k(x') = \Omega^k_n u^n(x) = \Omega^{kn} u_n(x), \quad \Omega^{kn} = -\Omega^{nk}, \quad n \neq k, \quad (9)$$

называется *контравариантным вектором (псевдовектором)*. Связанный с ним *ковариантный* вектор

$$u_k(x) = g_{km} u^m(x)$$

преобразуется по закону

$$u'_k(x') = \Omega_k^m u_m(x). \quad (10)$$

Могут быть выписаны без труда соответствующие формулы для тензоров различной вариантности второго и более высоких рангов.

Как указывалось ранее, соотношениями типа (7) — (10) устанавливаются законы преобразования тензорных величин лишь при преобразованиях непрерывного типа. Законы их преобразования при отражении нечетного числа пространственных осей этими выражениями не определяются и должны быть сформулированы особо. В силу тождественности двукратного преобразования, вытекающей из однозначности тензорных представлений, эти законы могут иметь лишь две формы:

$$u'(x') = u(x) \quad (11)$$

или

$$u'(x') = -u(x). \quad (12)$$

Тензор нулевого ранга, преобразующийся по (12), называется *псевдоскаляром*. Что же касается тензоров первого ранга, то формула (12) оказывается совместной с (10) и потому псевдовектором (или аксиальным вектором) именуется тензор, преобразующийся согласно (11).

Различие в законах преобразования (11) и (12) имеет на первый взгляд несколько формальный характер. Однако, как мы увидим ниже (§ 8), определяемое этими соотношениями *свойство четности* играет существенную роль при определении возможных *форм взаимодействия* различных полей.

Одним из важных постулируемых свойств лагранжиана является его лоренц-инвариантность, т. е. лагранжиан является скаляром. Это означает, что

$$\mathcal{L}'(x') \equiv F(u'_i(x'), u'_{i;k}(x')) = F(u_i(x), u_{i;k}(x)) \equiv \mathcal{L}(x). \quad (13)$$

Поскольку бесконечно малый элемент объема  $dx = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$  также является инвариантом, мы получаем, что значение действия для любой конечной области пространства = времени  $\Delta$  не меняется при преобразованиях Лоренца, т. е.

$$\mathcal{A}_\Delta = \int_\Delta \mathcal{L}(x) dx = \int_{\Delta'} \mathcal{L}'(x') dx'.$$

Здесь  $\Delta$  — некоторая область интегрирования, выраженная в переменных  $x$ , а  $\Delta'$  — та же самая область, выраженная в переменных  $x'$ . Скалярность лагранжиана обеспечивает инвариантность действия.

Условие (13) означает, что лагранжиан зависит лишь от инвариантных комбинаций полевых функций и их первых производных.

**1.5. Другие группы преобразований.** Группа Лоренца не исчерпывает преобразования, приводящие к физически важным законам сохранения.

Закону сохранения электрического заряда соответствует *фазовое (калибровочное) преобразование*, касающееся лишь функций поля и не затрагивающее координат. Для описания частиц, обладающих электрическим зарядом, используют *комплексные* поля. Комплексное поле, выражаемое через две действительные функции,

$$u(x) = u_1(x) + iu_2(x),$$

очевидно, содержит лишнюю степень свободы, которая может быть ассоциирована с дополнительной дискретной характеристикой, например, электрическим зарядом.

Требование действительности (эрмитовости в квантованном случае) приводит к тому, что лагранжиан, равно как и сохраняющиеся во времени динамические переменные, может зависеть от комплексных полей  $u$  только через квадратичные формы вида  $u^*u$ , где  $u$  и  $u^*$  — взаимно комплексно сопряженные функции  $u$  (или) их производные. Отсюда непосредственно вытекает, что комплексные волновые поля  $u(x)$  могут быть умножены на произвольный унитарный фазовый множитель  $\exp(i\alpha)$ , что не приводит к изменению квадратичной формы  $u^*u$  и тем самым к каким-либо наблюдаемым эффектам.

Рассматривая  $u$  и  $u^*$  как линейно независимые функции, запишем фазовое преобразование в виде:

$$u_j \rightarrow u'_j = e^{i\alpha} u_j, \quad u_j^* \rightarrow u_j'^* = e^{-i\alpha} u_j^*. \quad (14)$$

Полагая  $\alpha$  бесконечно малой величиной, находим

$$u'_j = u_j + i\alpha u_j; \quad u_j'^* = u_j^* - i\alpha u_j^*. \quad (15)$$

Преобразования (14) отличаются от преобразований группы Лоренца тем, что затрагивают только функции поля и не затрагивают координат. Подобные преобразования, известные как преобразования, соответствующие внутренним симметриям, играют в современной физике важную роль. Они включают изотопические преобразования, унитарные преобразования, а также некоторые другие.

## § 2. Теорема Нётер и динамические инварианты

Для описания физической системы еще недостаточно знать уравнения движения. Необходимо также уметь выражать через решения этих уравнений основные физические характеристики си-



стемы. Такие, сохраняющиеся во времени, аддитивные динамические величины мы будем называть *динамическими инвариантами* (иногда для краткости — *инвариантами*). Инструментом, позволяющим получать выражения для динамических инвариантов, является известная теорема Э. Нётер.

**2.1. Теорема Нётер \*** гласит, что *всякому конечно-параметрическому (зависящему от  $s$  постоянных параметров) непрерывному преобразованию функций поля и одновременно координат, обращающему в нуль вариацию действия (при условии выполнения уравнений движения), соответствует  $s$  динамических инвариантов, т. е. сохраняющихся во времени комбинаций функций поля и их производных.*

Для доказательства рассмотрим бесконечно малое преобразование координат и функций поля:

$$x^k \rightarrow x'^k = x^k + \delta x^k, \quad (1)$$

$$u_i(x) \rightarrow u'_i(x') = u_i(x) + \delta u_i(x). \quad (2)$$

Вариации  $\delta x^k$  и  $\delta u_i$  выражаются через бесконечно малые линейно независимые параметры преобразования  $\delta \omega_n$  формулами:

$$\delta x^k = \sum_{1 \leq n \leq s} X_{(n)}^k \delta \omega_n, \quad \delta u_i(x) = \sum_{1 \leq n \leq s} \Psi_{i(n)} \delta \omega_n. \quad (3)$$

Индексы функций поля  $i$  и параметров преобразования  $n$  могут иметь (или не иметь) простое тензорное содержание. Мы не будем пока его конкретизовать и условимся подразумевать суммирование по этим индексам, когда они дважды повторяются.

Отметим, что закон преобразования производных функций поля

$$u_{i;k}(x) \rightarrow u'_{i;k}(x') = u_{i;k}(x) + \delta u_{i;k}(x)$$

содержит вариации  $\delta u_{i;k}$ , не являющиеся производными от  $\delta u_i$ . Иными словами, операции  $\delta$  и  $\partial/\partial x$  не перестановочны. Дело в том, что  $\delta u_i$  — вариация функции поля как за счет изменения ее формы, так и за счет изменения аргумента. Введем вариацию формы функции

$$\bar{\delta} u_i(x) = u'_i(x) - u_i(x),$$

которая с точностью до бесконечно малых второго порядка может быть представлена в виде

$$\bar{\delta} u_i(x) = \delta u_i(x) - u_{i;k} \delta x^k = (\Psi_{i(n)} - u_{i;k} X_{(n)}^k) \delta \omega_n \quad (4)$$

По определению операции  $\bar{\delta}$  она перестановочна с  $\partial/\partial x$ .

Определим теперь вариацию действия

$$\delta \mathcal{A} = \delta \int \mathcal{L}(x) dx = \int \mathcal{L}'(x') dx' - \int \mathcal{L}(x) dx,$$

\*) Эта теорема в работе Нётер (1918) названа первой. Вторая теорема Нётер рассматривает группы преобразований с параметрами, зависящими от  $x$ .

где

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(u'_i(x'), u'_{i;k}(x')) = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x),$$

причем

$$\delta\mathcal{L}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} \delta u_{i;k} = \delta\mathcal{L}(x) + \frac{d\mathcal{L}}{dx^n} \delta x^n.$$

Здесь  $\bar{\delta}\mathcal{L}$  — вариация  $\mathcal{L}$  за счет вариаций формы  $u_i$  и  $u_{i;k}$ :

$$\bar{\delta}\mathcal{L}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} \bar{\delta}u_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} \delta u_{i;k},$$

а второй член описывает полную вариацию за счет вариаций координат. Итак:

$$\delta\mathcal{A} = \int \left( \bar{\delta}\mathcal{L}(x) + \frac{d\mathcal{L}}{dx^n} \delta x^n \right) dx + \int \mathcal{L}(x) dx' - \int \mathcal{L}(x) dx.$$

Рассмотрим разность последних двух членов, описывающую вариацию объема интегрирования.

Преобразуем элемент объема

$$dx' \equiv dx'_0 dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \frac{\partial(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_0, x_1, x_2, x_3)} dx \approx \left( 1 + \frac{\partial\delta x^k}{\partial x^k} \right) dx.$$

Поэтому

$$\int \mathcal{L}(x) dx' - \int \mathcal{L}(x) dx = \int \mathcal{L}(x) \frac{\partial\delta x^k}{\partial x^k} dx$$

и

$$\delta\mathcal{A} = \int \left[ \bar{\delta}\mathcal{L}(x) + \frac{d}{dx^n} (\mathcal{L}(x) \delta x_n) \right] dx.$$

Используя уравнение движения

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} = \partial_k \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} \right),$$

получаем

$$\delta\mathcal{L}(x) = \left\{ \partial_k \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} \right) \bar{\delta}u_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} \partial_k (\bar{\delta}u_i) \right\} = \partial_k \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} \bar{\delta}u_i \right]$$

и

$$\delta\mathcal{A} = \int \frac{d}{dx^n} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i;n}} \bar{\delta}u_i + \mathcal{L}(x) \delta x^n \right\} dx.$$

С учетом (3) и (4) имеем:

$$\delta\mathcal{A} = - \sum_{1 \leq n \leq s} \int \partial_k [\theta_{(n)}^k(x)] dx \delta\omega_n,$$

где

$$\theta_{(n)}^k(x) = - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} (\Psi_{i(n)} - u_{i;l} X_{(n)}^l) - \mathcal{L}(x) X_{(n)}^k. \quad (5)$$

Из требования исчезновения вариации действия получаем теперь, приравнявая нулю коэффициенты при независимых параметрах

преобразования  $\delta\omega_n$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_n} = - \int \partial_k [\theta_{(n)}^k(x)] dx = 0. \quad (6)$$

Используя произвольность области интегрирования, приходим к уравнению непрерывности

$$\frac{d}{dx^k} \theta_n^k(x) = 0. \quad (7)$$

Преобразуя интеграл в правой части (6) по теореме Гаусса, можно получить законы сохранения соответствующих поверхностных интегралов. Считая для этого, что интегрирование в (6) происходит по объему, неограниченно расширяющемуся в пространственно-подобных направлениях и ограниченному во времениподобных направлениях пространственно-подобными трехмерными поверхностями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , получим, предполагая, что на границах пространственного объема поле практически равно нулю:

$$\int_{\sigma_1} d\sigma_k \theta_{(n)}^k - \int_{\sigma_2} d\sigma_k \theta_{(n)}^k = 0.$$

Здесь  $d\sigma_k$  — проекция элемента поверхности  $\sigma$  на 3-плоскость, перпендикулярную к оси  $x^k$ . Полученное уравнение показывает, что поверхностные интегралы

$$C_n(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_k \theta_{(n)}^k$$

фактически не зависят от поверхности  $\sigma$ . В частном случае, когда поверхности представляют собой 3-плоскости  $x^0 = t = \text{const}$ , интеграция происходит по трехмерному конфигурационному пространству и интегралы

$$C_n(x^0) = \int dx \theta_{(n)}^0 = \text{const} \quad (8)$$

не зависят от времени.

Таким образом, доказано, что каждому непрерывному  $s$ -параметрическому преобразованию координат (1) и функций поля (2) соответствуют  $s$  инвариантов (8)  $C_n$  ( $n = 1, \dots, s$ ), не зависящих от времени.

Величины  $\theta_{(n)}^k$  неоднозначны. К ним могут быть прибавлены выражения вида

$$\frac{\partial}{\partial x^m} f_{(n)}^{km}$$

при условии, что

$$f_{(n)}^{km} = -f_{(n)}^{mk}.$$

Указанный произвол, однако, не влияет на значение сохраняющихся интегралов (8).

Перейдем к конкретизации величин  $\theta$  и связанных с ними законов сохранения (8).

**2.2. Вектор энергии-импульса.** При бесконечно малых пространственно-временных трансляциях

$$x'^k = x^k + \delta x^k,$$

выбирая в качестве параметров преобразования  $\delta\omega^i$  величины  $\delta x^k$ , находим с учетом закона трансформации (8)

$$X_l^k = \delta_l^k, \quad \Psi_{il} = 0 \quad (l = 0, 1, 2, 3),$$

и  $\theta$  превращается в тензор второго ранга

$$T_l^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;k}(x)} \frac{\partial u_i}{\partial x^l} - \mathcal{L} \delta_l^k \quad (k, l = 0, 1, 2, 3).$$

Этот тензор в полностью контравариантном виде имеет форму

$$T^{lk} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;k}(x)} \frac{\partial u_i}{\partial x^l} - \mathcal{L} g^{kl}. \quad (9)$$

Интегралы типа (8) от  $T^{i0}$  представляют сохраняющийся во времени 4-вектор

$$P^l = \int T^{l0} dx. \quad (10)$$

Нулевая компонента этого вектора  $P^0$  представляет собой в классической механике функцию Гамильтона, т. е. энергию. Из соображений ковариантности поэтому вытекает, что 4-вектор (10) представляет собой энергию-импульс, а тензор (9) является *тензором энергии-импульса*.

Заметим здесь, что нас будут интересовать лишь интегральные динамические величины, подобные 4-вектору энергии-импульса  $P^l$ . Структура тензора  $T^{kl}$ , который в нашем изложении не является даже однозначным, приобретает самостоятельный интерес лишь в теории, включающей последовательный учет гравитационных эффектов. Известно, однако, что такой объединенной теории до сих пор не существует, и потому мы не будем касаться подобных вопросов.

**2.3. Тензор момента количества движения и тензор спина.** При бесконечно малых 4-вращениях

$$x'^n = x^n + x_m \delta \Omega^{nm}$$

благодаря антисимметричности величин

$$\delta \Omega^{nm} = -\delta \Omega^{mn}$$

в качестве параметров преобразования могут быть выбраны шесть линейно независимых из них

$$\delta \Omega^{nm} = \delta \omega^{nm}, \quad n < m.$$

Индексы  $n, m$  здесь обозначают плоскость, в которой происходит вращение с параметром  $\delta\omega^{nm}$ . Мы видим, что в формуле (3) индекс ( $n$ ) распадается на два индекса:

$$(n) \rightarrow n, m,$$

и находим с учетом антисимметричности  $\omega^{nm}$ :

$$\begin{aligned} \delta x^k &= X_j^k \delta\omega^j = \sum_{n < m} X_{nm}^k \delta\omega^{nm} = x_i \delta\omega^{ki} = x_i \delta\omega^{mi} \delta_m^k = \\ &= \sum_{m < l} x_i \delta\omega^{mi} \delta_m^k + \sum_{m > l} x_i \delta\omega^{mi} \delta_m^k = \sum_{m < l} \delta\omega^{ml} (x_i \delta_m^k - x_m \delta_l^k), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$X_{nm}^k = x_m \delta_n^k - x_n \delta_m^k, \quad n < m. \quad (11)$$

Полную вариацию функции поля представим в виде

$$u'_i(x') = u_i(x) + \delta u_i, \quad \delta u_i = \sum_{i, k < l} A_{ikl}^i u_j(x) \delta\omega^{kl}.$$

Для скалярного поля

$$A_{ikl}^i = 0,$$

для векторного поля

$$A_{ikl}^j = g_{ik} \delta_l^j - g_{il} \delta_k^j, \quad k < l.$$

Подставляя значения  $X_{nm}^k$  из (11) и

$$\Psi_{inm} = A_{inm}^i u_j(x) = g_{in} u_m(x) - g_{im} u_n(x)$$

в (5), получаем тензор момента количества движения

$$\begin{aligned} M_{lm}^k &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u_i / \partial x^k)} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x^l} x_m - \frac{\partial u_i}{\partial x^m} x_l \right\} + \mathcal{L} (x_l \delta_m^k - x_m \delta_l^k) - \\ &- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u_i / \partial x^k)} A_{ilm}^i u_j(x) = (x_m T_l^k - x_l T_m^k) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u_i / \partial x^k)} A_{ilm}^i u_j(x). \quad (12) \end{aligned}$$

Из формулы (12) ясно видна связь между свойствами симметрии тензора энергии-импульса  $T_l^k$  и структурой тензора момента  $M_{lm}^k$ . В случае скалярного поля второй член в (12) отсутствует и соотношение между  $M$  и  $T$  принимает форму, подобную той, которая имеет место в механике точки. Поэтому член

$$M_0^{lm, k} = x^m T_l^k - x^l T_m^k \quad (13)$$

следует отождествить с собственным *орбитальным* моментом волнового поля. В случае однокомпонентного поля этот момент сохраняется:

$$\frac{\partial M_0^{lm, k}}{\partial x^k} = 0. \quad (14)$$

Подставляя сюда (13), получаем, что тензор энергии-импульса для скалярного поля оказывается симметричным по своим индексам:

$$T^{kl} = T^{lk}.$$

В случае многокомпонентного (векторного, спинорного) поля выражение для  $M^{lm,k}$  имеет вид (12). Второй член этого выражения

$$S_{lm}^k = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u_i / \partial x^k)} u_j(x) A_{i,lm}^j \quad (15)$$

характеризует поляризационные свойства поля и, как следует из квантовой теории (см. главу II), соответствует *спиновому* моменту частиц, описываемых квантованным полем.

Для пространственной плотности орбитального и спинового моментов находим:

$$M_0^{lm,0} = x^m T^{l0} - x^l T^{m0},$$

$$S_{lm}^0 = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u_i / \partial x^0)} u_j(x) A_{i,lm}^j.$$

Интегрируя эти выражения по конфигурационному пространству, получаем тензоры орбитального и спинового моментов в виде

$$M_0^{lm} = \int M_0^{lm,0} dx = \int dx (x^m T^{l0} - x^l T^{m0}),$$

$$S_{lm} = \int S_{lm}^0 dx = - \int dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u_i / \partial x^0)} u_j(x) A_{i,lm}^j. \quad (16)$$

Свертывая пространственные компоненты последнего выражения с антисимметричным тензором третьего ранга  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ , получаем компоненты трехмерного (псевдо) вектора спина

$$S_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\beta\gamma} \quad (\beta < \gamma) \quad (17)$$

или

$$S_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\beta\gamma}.$$

**2.4. Изотопический спин, заряд и вектор тока.** Рассмотрим теперь вращение в фиктивном трехмерном изотопическом пространстве. Поскольку волновые функции не зависят явно от координат этого пространства, а обычные координаты  $x_k$  при изотопических преобразованиях не преобразуются, запишем формулы бесконечно малого преобразования только для волновых функций

$$u'_i = u_i + \delta u_i, \quad \delta u_i = R_{i\alpha\beta}^{\alpha\beta} u_j \delta \omega_{\alpha\beta} \quad (\alpha < \beta). \quad (18)$$

Здесь  $\delta \omega_{\alpha\beta}$  — антисимметричные по индексам  $\alpha, \beta$  ( $= 1, 2, 3$ ) бесконечно малые углы вращений изотопического пространства.

Видно теперь, что тензор  $\theta$  (5) для рассматриваемого случая отличается от тензора момента количества движения (12) отсутст-

вием орбитального члена

$$N_{\alpha\beta}^k = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} R_{ij}^{\alpha\beta} u_j. \quad (19)$$

Он полностью аналогичен тензору спинового момента (15) (за исключением того обстоятельства, что по индексам  $\alpha, \beta$  он является тензором трехмерного пространства). Соответствующие пространственные интегралы

$$I_{\alpha\beta} = \int N_{\alpha\beta}^0 dx$$

сохраняются во времени и представляют компоненты аксиального 3-вектора изотопического спина (в изотопическом пространстве)

$$I_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} I_{\beta\gamma} \quad (\beta < \gamma). \quad (20)$$

Третья компонента этого вектора связывается с электрическим зарядом  $Q$  соотношением:

$$Q = I_3 + \frac{B+S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}. \quad (21)$$

Здесь  $B$  — барионное число,  $S$  — странность,  $Y = B + S$  — гиперзаряд.

В случае, когда  $Y = 0$  ( $\Sigma$ -гипероны, пи-мезоны),  $Q = I_3$  и соответствующая пространственная плотность представляет собой нулевую компоненту 4-вектора тока

$$J^0(x) = N_{12}^0. \quad (22)$$

В более общем случае следует учитывать второй член в правой части (21). Так, для протонов и нейтронов, образующих нуклонный изотопический дублет  $S = 0, B = Y = 1,$

$$Q = I_3 + 1/2. \quad (23)$$

Для  $K$ -мезонов  $B = 0, S = Y = -1$  и, следовательно,

$$Q = I_3 - 1/2. \quad (24)$$

Как известно,  $K$ -мезоны образуют изотопический дублет ( $I_3 = +1/2, -1/2$ ), состоящий из  $K^0$  и  $K^-$ .

Для иллюстрации рассмотрим изотопические дублет и антидублет  $\Xi$ -гиперонов ( $B = -Y = 1$  для  $\Xi$  и  $-1$  для  $\bar{\Xi}$ ), которые описываются двухкомпонентной комплексной функцией поля

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2),$$

являющейся спинором в трехмерном изотопическом пространстве \*). При вращении на угол  $\beta$  в плоскости  $(z_1, z_2)$  изопространства функ-

\*) Заметим, что  $\Xi$ -частицы являются фермионами, так что компоненты  $u_\sigma$  ( $\sigma = 1, 2$ ) преобразуются по спинорному представлению группы Лоренца (см. § 6.4). Поэтому  $\bar{u}$  фактически означает дираковское сопряжение  $u$ .

ции  $u$  и  $\dot{u}$  преобразуются следующим образом (сравни с пунктом А Приложения I):

$$\begin{aligned} u &\rightarrow u' = \exp\left(-i\beta \frac{\tau_3}{2}\right) u = \left(\cos \frac{\beta}{2} - i\tau_3 \sin \frac{\beta}{2}\right) u, \\ \dot{u} &\rightarrow \dot{u}' = \dot{u} \exp\left(i\beta \frac{\tau_3}{2}\right) = \dot{u} \left(\cos \frac{\beta}{2} + i\tau_3 \sin \frac{\beta}{2}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $\tau_3$  — изоспиновая матрица, которая может быть выбрана в диагональном виде

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Для бесконечно малого  $\beta$  получаем

$$\begin{aligned} u'_\sigma &= u_\sigma + \xi u_\sigma = \left[\delta_{\sigma\rho} - i(\tau_3)_{\sigma\rho} \frac{\beta}{2}\right] u_\rho, \\ \dot{u}'_\sigma &= \dot{u}_\sigma + \delta \dot{u}_\sigma = \dot{u}_\rho \left[\delta_{\rho\sigma} + i(\tau_3)_{\rho\sigma} \frac{\beta}{2}\right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Сравнивая (27) и (18), находим

$$R^{12} = -\frac{i}{2} \tau_3, \quad \dot{R}^{12} = \frac{i}{2} \tau_3.$$

Подставив эти соотношения в (19) с учетом явного вида матрицы  $\tau_3$  (26), получим ток изоспина

$$\begin{aligned} I^k &= N_{12}^k = -\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\sigma; k}} R_{\sigma\rho}^{12} u_\sigma + \dot{u}_\rho \dot{R}_{\rho\sigma}^{12} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_{\sigma; k}}\right) = \\ &= \frac{i}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1; k}} u_1 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{2; k}} u_2\right) - \left(\dot{u}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_{1; k}} - \dot{u}_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_{2; k}}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Преобразования, соответствующие гиперзаряду  $Y$ , имеют вид (см. § 1.5)

$$u \rightarrow e^{i\alpha} u, \quad \dot{u} \rightarrow \dot{u} e^{-i\alpha},$$

откуда нетрудно найти ток гиперзаряда

$$Y^k = i \left( \dot{u}_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_{\sigma; k}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\sigma; k}} u_\sigma \right).$$

Теперь, в соответствии с формулой (21), мы можем получить 4-вектор электромагнитного тока и электрический заряд

$$\begin{aligned} J^k &= I^k + \frac{1}{2} Y^k = i \left( \dot{u}_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_{2; k}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{2; k}} u_2 \right), \\ Q &= \int J^0 dx = i \int \left( \dot{u}_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_{2; 0}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{2; 0}} u_2 \right) dx. \end{aligned}$$



Отсюда видно, что функции  $u_2, u_2^*$  соответствуют заряженным компонентам дублетов  $\Xi^-$  и  $\Xi^+$ , а функции  $u_1, u_1^*$  — нейтральным (т. е.  $\Xi^0$  и  $\bar{\Xi}^0$ ) частицам.

Заметим, наконец, что выражения

$$J^k = i \left( \dot{u}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,k}^*} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,k}} u \right) \quad (28)$$

и

$$Q = i \int \left( \dot{u}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,0}^*} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,0}} u \right) dx \quad (29)$$

определяют 4-вектор тока и заряд для любого (в том числе и многокомпонентного) комплексного поля.

Подчеркнем одно обстоятельство. Требование лоренц-инвариантности (и вытекающие из него законы сохранения 4-импульса и момента количества движения) является обязательным атрибутом любой релятивистской теории поля. В то же время инвариантность относительно фазовых преобразований типа преобразований (1.14, 15) или более общих изотопических преобразований является дополнительным требованием, отражающим те или иные более конкретные представления о свойствах элементарных частиц и соответствующих волновых полей. Эти требования основываются на опыте и зачастую имеют приближенный характер. Так, например, сильные взаимодействия барионов и мезонов являются инвариантными относительно любых вращений в изотопическом пространстве. Взаимодействия с электромагнитным полем разрушают эту инвариантность, сохраняя лишь ее часть, связанную с вращениями вокруг оси  $z_3$ , т. е. с законом сохранения электрического заряда. Следовательно, можно сказать, что закон сохранения электрического заряда является точным законом сохранения в сильных и электромагнитных взаимодействиях, тогда как полная изотопическая инвариантность (изотопическая симметрия взаимодействий) и, в частности, законы сохранения двух остальных компонент изотопического спина  $I_1$  и  $I_2$  являются приближенными и нарушаются электромагнитными взаимодействиями.

Подобные приближенные законы сохранения, основанные на приближенных условиях инвариантности или симметрии, в последние годы играют все большую роль в физике элементарных частиц. Среди них наиболее известными являются различные схемы так называемых унитарных симметрий, основанных на так называемых специальных унитарных группах  $SU(n)$ , которые с физической точки зрения являются обобщениями изотопической симметрии. Мы имеем в виду  $SU(3)$ -симметрию, включающую наряду с изоспином странность,  $SU(4)$ -симметрию, в которой участвует еще квантовое число чарм (иначе — очарование), и т. д. Эти симметрии,

как бы вложенные друг в друга, образуют усложняющуюся последовательность и физически проявляются при все более и более высоких энергиях. В области достаточно низких энергий все они являются нарушенными.

Особняком стоит симметрия относительно группы  $SU(3)$ -преобразований в пространстве так называемых цветовых переменных, являющаяся основой локальных калибровочных преобразований, лежащих в основе квантовой хромодинамики. По господствующим в настоящее время представлениям эта цветовая симметрия является точной.

### § 3. Скалярное поле

Перейдем к изучению различных конкретных волновых полей, к которым применим развитый выше общий формализм. В главе I будут рассмотрены следующие важнейшие свободные волновые поля:

- а) скалярное (псевдоскалярное) поле, соответствующее бесспиновым частицам (например, псевдоскалярным  $\pi$ -мезонам);
- б) векторное поле;
- в) электромагнитное поле;
- г) простейшее спинорное поле со спином  $1/2$ , соответствующее заряженным лептонам ( $e^\pm, \mu^\pm, \dots$ ), барионам, а также кваркам;

д) безмассовое спинорное поле, соответствующее нейтрино.

Подчеркнем, что неправильно было бы сказать, что свободные поля «описывают» соответствующие частицы, так как полное описание элементарных частиц со всеми их физическими характеристиками (например, магнитными моментами) может дать лишь теория взаимодействующих полей. Правильнее поэтому сказать, что отдельные свободные поля соответствуют различным частицам, представляя собой основу для описания этих частиц в рамках теории взаимодействующих полей.

Как указывалось в § 2, обычно предполагается, что лагранжиан зависит лишь от функций поля и их частных производных не выше первого порядка. Это приводит к тому, что соответствующие уравнения поля оказываются дифференциальными уравнениями не выше второго порядка.

Важное свойство лагранжианов свободных полей вытекает из требования линейности и однородности уравнений свободных полей. К таким уравнениям приводят лишь лагранжианы, квадратичные по функциям поля и их производным.

Этими условиями в совокупности с соображениями релятивистской инвариантности и трансформационными свойствами функций поля лагранжиан фактически оказывается определенным с точностью до коэффициентов.

Приступая к рассмотрению простейшего из волновых полей — скалярного поля, мы остановимся на двух вариантах:

а) действительном (псевдо) скалярном поле, описывающем нейтральные бесспиновые мезоны, и

б) комплексном (псевдо) скалярном поле, описывающем заряженные бесспиновые мезоны.

**3.1. Лагранжев формализм действительного скалярного поля.** Наиболее простое волновое поле описывается однокомпонентной действительной волновой функцией  $\varphi(x)$ , трансформирующейся при преобразованиях Лоренца как скаляр или псевдоскаляр. В предыдущем параграфе уже отмечалось, что различие между скаляром и псевдоскаляром заключается в законе преобразования при отражении нечетного числа координатных осей и проявляется лишь в форме возможного закона взаимодействия (точнее, в форме лагранжиана взаимодействия) с другими полями. Поэтому в теории свободных полей мы не будем делать различия между скалярами и псевдоскалярами, векторами и псевдовекторами и т. д., рассматривая их одновременно.

Рассмотрим действительное скалярное поле, описывающее нейтральные бесспиновые частицы — нейтральные (псевдо) скалярные мезоны со спином нуль.

Лагранжиан этого поля

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \frac{m^2}{2} \varphi^2(x) \quad (1)$$

определен сформулированными выше условиями с точностью до коэффициентов, которые выбираются таким образом, чтобы формулы (1.4) приводили к уравнению Клейна — Гордона

$$-\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^k \partial x^k} - m^2 \varphi = (\square - m^2) \varphi(x) = 0, \quad (2)$$

являющемуся, очевидно, единственным инвариантным уравнением второго порядка для скалярного поля. Здесь  $\square$  — оператор Даламбера,

$$\square \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^k} = \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} - \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0}. \quad (3)$$

Подставляя лагранжиан (1) в (2.9), получаем тензор энергии-импульса действительного скалярного поля в виде

$$T_{kl} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} - g_{kl} \mathcal{L}. \quad (4)$$

Отсюда находим плотность энергии

$$T^{00} = \frac{1}{2} \sum_n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^n} \right)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \frac{m^2}{2} \varphi^2 \quad (5)$$

и плотность вектора импульса

$$T^{\alpha\alpha} = - \frac{\partial\varphi}{\partial x^0} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (6)$$

С помощью (2.12) приходим к выражению для тензора момента количества движения

$$M_{lm}^k = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \left( x_m \frac{\partial\varphi}{\partial x^l} - x_l \frac{\partial\varphi}{\partial x^m} \right) + \mathcal{L} (x_l \delta_m^k - x_m \delta_l^k). \quad (7)$$

Полагая здесь  $k = 0$ , имеем для пространственной плотности сохраняющегося во времени тензора момента:

$$M_{lm}^0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x^0} \left( x_m \frac{\partial\varphi}{\partial x^l} - x_l \frac{\partial\varphi}{\partial x^m} \right) + \mathcal{L} (x_l \delta_m^0 - x_m \delta_l^0). \quad (8)$$

Спиновый момент скалярного поля равен нулю из-за его однокомпонентности. Ввиду действительности поля равен нулю также 4-вектор тока.

**3.2. Импульсное представление и частотные компоненты.** Выражения для динамических величин принимают более наглядный вид в импульсном представлении. С этой целью представим функцию поля  $\varphi(x)$  в виде четырехмерного интеграла Фурье:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikx} \tilde{\varphi}(k), \quad (9)$$

причем

$$dk = dk^0 dk^1 dk^2 dk^3,$$

$$kx = k_n x^n = k^0 x^0 - \mathbf{k} \mathbf{x},$$

а степень множителя  $2\pi$  выбрана равной  $(-3/2)$  для удобства дальнейшего перехода к трехмерному интегралу.

Условие действительности функции  $\varphi(x)$  приводит к следующему свойству комплексного сопряжения для  $\tilde{\varphi}$ :

$$\tilde{\varphi}^*(k) = \tilde{\varphi}(-k). \quad (10)$$

Подставляя разложение (9) в уравнение поля (2), находим, что функция  $\tilde{\varphi}$  удовлетворяет уравнению

$$(k^2 - m^2) \tilde{\varphi}(k) = 0$$

и поэтому может быть представлена в виде

$$\tilde{\varphi}(k) = \delta(k^2 - m^2) \varphi(k). \quad (11)$$

Множитель  $\delta(k^2 - m^2)$  устанавливает связь между «энергетической» переменной  $k^0$ , «импульсной» переменной  $\mathbf{k}$  и членом  $m^2$ , который поэтому представляет собой квадрат массы:

$$k^2 - m^2 = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2 - m^2 = 0.$$

С учетом (11) разложение (9) принимает вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \delta(k^2 - m^2) e^{ikx} \varphi(k). \quad (12)$$

Из-за наличия под знаком интеграла  $\delta$ -функции интеграция происходит не по всему 4-мерному  $k$ -пространству, а лишь по двум трехмерным гиперболоидам

$$k^0 = \pm \sqrt{k^2 + m^2}, \quad (13)$$

один из которых целиком лежит внутри верхнего светового конуса, а другой — внутри нижнего. Замечая еще, что указанные гиперболоиды по отдельности являются лоренц-инвариантными, мы приходим к следующему лоренц-инвариантному разбиению интеграла (12) на два слагаемых:

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x), \quad (14)$$

$$\varphi^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikx} \delta(k^2 - m^2) \varphi^+(k), \quad (15)$$

$$\varphi^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) \varphi^-(k). \quad (16)$$

Здесь

$$\varphi^+(k) = \theta(k^0) \varphi(k) \quad \text{и} \quad \varphi^-(k) = \theta(k^0) \varphi(-k), \quad (17)$$

а  $\theta$  — известная разрывная функция

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (18)$$

Функции  $\varphi^+(x)$  и  $\varphi^-(x)$  соответственно введенным индексам мы будем в дальнейшем именовать *положительно-частотной* и *отрицательно-частотной* частями функции  $\varphi(x)$ . Как видно, при этом знак частотности связывается со знаком произведения  $kx$  (точнее, со знаком «частотного» члена  $k^0 x^0 = +x^0 \sqrt{k^2 + m^2}$ ) в подынтегральной экспоненте. В связи с этим заметим, что в современной литературе иногда принимают обратный порядок обозначений, связывая «частотность» со знаком формы

$$k_\mu x_\mu = kx + k_4 x_4 = -kx, \quad k_4 = ik_0, \quad x_4 = ix_0.$$

Наш выбор обозначений связан с тем, что (как будет показано в главе II) выражения типа (15) в квантовой теории соответствуют рождению частиц поля, а выражения типа (16) — их уничтожению. Поэтому в принятой нами системе обозначений знаки (+) и (—) не только соответствуют знаку частоты, но и символизируют физический смысл соответствующих квантовых операторов: (+) — рождение, (—) — уничтожение.

Как будет показано ниже, произведенное разбиение оказывается также весьма удобным при записи динамических величин в им-

пульсном представлении, поскольку последние выражаются в виде квадратичных форм от  $\varphi^+(k)$  и  $\varphi^-(k)$ .

Заметим, кроме того, что в связи с действительностью функции  $\varphi(x)$  правила комплексного сопряжения для  $\varphi^+(k)$  и  $\varphi^-(k)$  имеют вид

$$(\varphi^+(k))^* = \varphi^-(k), \quad (\varphi^-(k))^* = \varphi^+(k). \quad (19)$$

Выполняя в (15) и (16) интеграцию по  $k^0$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk}{2k^0} e^{ikx} \varphi^+(k), \\ \varphi^-(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk}{2k^0} e^{-ikx} \varphi^-(k) \end{aligned} \right\} (k^0 = +\sqrt{k^2 + m^2}). \quad (20)$$

Формулы, обратные (20), выражают  $\varphi^\pm(k)$  через функцию поля в координатном представлении  $\varphi(x)$  и ее временную производную  $\dot{\varphi}(x) = \varphi_{;0}(x)$ . Они имеют вид:

$$\varphi^\pm(k) = \int (2\pi)^{-3/2} e^{\mp ikx} [k^0 \varphi(x) \mp i \dot{\varphi}(x)] dx; \quad k^0 = \sqrt{k^2 + m^2}. \quad (21)$$

Здесь удобно перенормировать трехмерные фурье-амплитуды. Обозначим для этого

$$\left. \begin{aligned} \varphi^+(k) &= \frac{\varphi^+(k)}{\sqrt{2k^0}} \\ \varphi^-(k) &= \frac{\varphi^-(k)}{\sqrt{2k^0}} \end{aligned} \right\} (k^0 = +\sqrt{k^2 + m^2}), \quad (22)$$

тогда выражения (20) примут вид

$$\varphi^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk}{\sqrt{2k^0}} e^{ikx} \varphi^+(k), \quad (23)$$

$$\varphi^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk}{\sqrt{2k^0}} e^{-ikx} \varphi^-(k). \quad (24)$$

Выбор нормировочного множителя в (22) станет понятным из выражений для динамических величин (см. ниже, (26)).

Подставляя (14), (23) и (24) в выражение для плотности энергии (5) и интегрируя по конфигурационному пространству, получаем:

$$\begin{aligned} P^0 &= \int T^{00} dx = \frac{1}{2} \int \left[ \sum_k \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right)^2 + m^2 \varphi^2 \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int dx \left\{ \sum_k \frac{\partial \varphi^+}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x^k} + 2 \frac{\partial \varphi^+}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi^-}{\partial x^k} + \frac{\partial \varphi^-}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi^-}{\partial x^k} \right\} + \\ &\quad + m^2 (\varphi^+(x) \varphi^+(x) + 2\varphi^+(x) \varphi^-(x) + \varphi^-(x) \varphi^-(x)). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что слагаемые, содержащие произведения функций  $\varphi^\pm$  одинаковой частотности, не дают вклада в динамический

инвариант  $P^0$ . В самом деле, например,

$$\int d\mathbf{x} \left\{ \sum_n \frac{\partial \varphi^+}{\partial x^n} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x^n} + m^2 \varphi^+(x) \varphi^+(x) \right\} = \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}'}{2\sqrt{k^0 k'^0}} \varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^+(\mathbf{k}') e^{i(k^0 + k'^0)x^0} \times \\ \times \left( m^2 - \sum_n k^n k'^n \right) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} = \\ = \int \frac{d\mathbf{k}}{2k^0} \varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^+(-\mathbf{k}) e^{2ik^0 x^0} (m^2 - k^0 k^0 + \mathbf{k}\mathbf{k})$$

и так как

$$m^2 - k^0 k^0 + \mathbf{k}\mathbf{k} = m^2 - k^2 = 0,$$

получаем:

$$\int d\mathbf{x} \left\{ \sum_n \frac{\partial \varphi^+}{\partial x^n} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x^n} + m^2 \varphi^+(x) \varphi^+(x) \right\} = 0.$$

Подобное соотношение имеет место и для квадратичной формы по  $\varphi^-$ . Поэтому

$$P^0 = \int d\mathbf{x} \left\{ \sum_k \frac{\partial \varphi^+}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi^-}{\partial x^k} + m^2 \varphi^+(x) \varphi^-(x) \right\}. \quad (25)$$

С помощью выкладки, вполне аналогичной только что проведенной, находим теперь:

$$P^0 = \int d\mathbf{k} \cdot k^0 \varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k}) \quad (k^0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}).$$

Соответствующее выражение для вектора импульса имеет вид

$$P^\alpha = \int T^{\alpha 0} d\mathbf{x} = \int d\mathbf{k} \cdot k^\alpha \varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k}) \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Объединяя эти выражения, запишем их в форме, справедливой также и в том случае, если бы в течение всей выкладки функции  $\varphi^+$  и  $\varphi^-$  считать взаимно некоммутируемыми (т. е. не менять их порядка):

$$P^n = \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \cdot k^n (\varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k}) + \varphi^-(\mathbf{k}) \varphi^+(\mathbf{k})). \quad (26)$$

Такое представление окажется полезным при квантовании скалярного поля.

Теперь виден смысл нормировки в (22). Амплитуды  $\varphi^+(\mathbf{k})$  и  $\varphi^-(\mathbf{k})$  выбраны так, чтобы произведения  $\varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k})$  могли быть истолкованы как плотности средних чисел частиц, обладающих импульсом  $\mathbf{k}$ , энергией  $k^0$  и массой  $m = \sqrt{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2}$  и не имеющих заряда и спина. Примером таких незаряженных бесспиновых частиц являются нейтральные псевдоскалярные  $\pi^0$ -мезоны.

С помощью четырехмерных амплитуд  $\varphi^+(\mathbf{k})$  и  $\varphi^-(\mathbf{k})$  4-вектор энергии-импульса может быть представлен в явно ковариантной форме:

$$P^n = \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \cdot k^n \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) (\varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k}) + \varphi^-(\mathbf{k}) \varphi^+(\mathbf{k})). \quad (27)$$

3.3. Дискретное импульсное представление. Иногда используют удобное в ряде случаев *дискретное импульсное представление*. При этом считают, что поле заключено в пространственном кубе объемом  $V=L^3$ , где  $L$  — длина ребра куба. Из условия периодичности  $\varphi$  по каждой пространственной координате с периодом  $L$  получаем, что  $\varphi$  может быть представлена в виде суммы

$$\varphi(x) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{\varphi_{n_1, n_2, n_3}^+}{\sqrt{2k^0}} \exp \left[ \frac{2\pi i}{L} (n_0 x^0 - n_1 x^1 - n_2 x^2 - n_3 x^3) \right] + \\ + \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{\varphi_{n_1, n_2, n_3}^-}{\sqrt{2k^0}} \exp \left[ -\frac{2\pi i}{L} (n_0 x^0 - n_1 x^1 - n_2 x^2 - n_3 x^3) \right], \quad (28)$$

причем в этом выражении  $n_1, n_2$  и  $n_3$  пробегают все целочисленные значения от  $-\infty$  до  $+\infty$  и

$$k^0 = \frac{2\pi}{L} n_0, \quad n_0 = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \frac{L^2 m^2}{4\pi^2}}.$$

В (28) суммирование происходит по импульсам, компоненты которых являются целыми кратными величины  $2\pi/L$ . Устремляя размеры куба  $L$  к бесконечности, можем, очевидно, в пределе перейти к непрерывному представлению. При таком предельном переходе

$$(2\pi/L)^3 \rightarrow dk \quad (29)$$

а также

$$(L/2\pi)^{3/2} \varphi_n \rightarrow \varphi(k). \quad (30)$$

Используя эти правила предельного перехода, нетрудно установить, что 4-вектор энергии-импульса (26) в дискретном представлении принимает следующий вид:

$$P_m = \sum_{n_1, n_2, n_3} k^m \varphi_{n_1, n_2, n_3}^+ \varphi_{n_1, n_2, n_3}^- \quad (31)$$

Выражение (31) позволяет трактовать поле, заключенное в объеме  $L^3$ , как систему с бесконечным числом степеней свободы — набор бесконечного числа частиц, которые с точки зрения гамильтонова формализма, путем введения канонических координат и импульсов, обычно трактуют в виде осцилляторов поля в энергии

$$k^0 = \frac{2\pi}{L} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \frac{L^2 m^2}{4\pi^2}}$$

и импульсом

$$k = \frac{2\pi}{L} n \quad (n = n_1, n_2, n_3).$$

При этом квадратичная комбинация амплитуд  $\varphi_n^+ \varphi_n^-$  играет роль среднего числа частиц с данной энергией и импульсом.

3.4. Комплексное скалярное поле. Формализм комплексного скалярного поля строится по аналогии с теорией действительного скалярного поля. Отличие заключается в том, что комплексное скалярное поле описывается комплексной функцией

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x),$$



т. е., по существу, двумя независимыми действительными функциями  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Удобнее, однако, использовать в формализме не  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а их комбинации:  $\varphi$  и  $\varphi^* = \varphi_1 - i\varphi_2$ .

Лагранжиан комплексного поля запишем в виде, аналогичном лагранжиану действительного поля:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - m^2 \varphi^*(x) \varphi(x). \quad (32)$$

Из этого выражения с помощью формул § 2, считая вариации функций  $\varphi$  и  $\varphi^*$  независимыми, получаем уравнения поля:

$$(\square - m^2) \varphi(x) = 0, \quad (\square - m^2) \varphi^*(x) = 0;$$

тензор энергии-импульса

$$T_{kl} = \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^l} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) - g^{kl} \mathcal{L}; \quad (33)$$

плотность 4-вектора энергии-импульса

$$T^{00} = \sum_k \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + m^2 \varphi^* \varphi, \quad T^{0\alpha} = - \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^0} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \right) \quad (34)$$

и 4-вектор тока

$$J_k = i \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^k} \varphi \right). \quad (35)$$

Спиновый момент комплексного скалярного поля, подобно тому как это имело место для действительного скалярного поля, оказывается равным нулю.

Производя разбиение на положительно- и отрицательно-частотные части и переходя к импульсному представлению,

$$\begin{aligned} \varphi^\pm(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \delta(k^2 - m^2) e^{\pm ikx} \varphi^\pm(k), \\ \varphi^{*\pm}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \delta(k^2 - m^2) e^{\pm ikx} \varphi^{*\pm}(k), \end{aligned}$$

находим после выполнения интегрирования по переменной  $k^0$ :

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk}{\sqrt{2k^0}} e^{\pm ikx} \varphi^\pm(k), \quad (36)$$

$$\varphi^{*\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk}{\sqrt{2k^0}} e^{\pm ikx} \varphi^{*\pm}(k), \quad (37)$$

где аналогично ранее рассмотренному случаю действительного поля введены трехмерные амплитуды

$$\left. \begin{aligned} \varphi^\pm(k) &= \frac{\varphi^\pm(k)}{\sqrt{2k^0}}, \\ \varphi^{*\pm}(k) &= \frac{\varphi^{*\pm}(k)}{\sqrt{2k^0}} \end{aligned} \right\} (k^0 = \sqrt{k^2 + m^2}).$$

Видно, что обозначения частотных функций в  $k$ -представлении здесь введены таким образом, что, например,  $\varphi^{*+}(k)$  означает не комплексно-сопряженную с  $\varphi^+(k)$ , а положительно-частотную часть  $\varphi^+(k)$ . Поэтому правила комплексного сопряжения в импульсном представлении имеют вид

$$(\varphi^+(k))^* = \varphi^-(k), \quad (\varphi^-(k))^* = \varphi^+(k). \quad (38)$$

Подставляя разложения (36) и (37) в выражения для плотности энергии-импульса (34) и заряда (35), находим, проинтегрировав по конфигурационному пространству:

$$P^l = \int dk \cdot k^l \{ \varphi^+(k) \varphi^-(k) + \varphi^{*-}(k) \varphi^+(k) \} \\ (l = 0, 1, 2, 3, k^0 = \sqrt{k^2 + m^2}), \quad (39)$$

$$Q = \int dk \{ \varphi^{*+}(k) \varphi^-(k) - \varphi^{*-}(k) \varphi^+(k) \}. \quad (40)$$

Из этих выражений для 4-вектора энергии-импульса и заряда вытекает, что произведение  $\varphi^{*-}(k) \varphi^+(k)$  может быть истолковано как плотность среднего числа частиц массы  $m$  с энергией  $k^0$ , импульсом  $k$  и зарядом  $-1$ , а произведение  $\varphi^{*+}(k) \varphi^-(k)$  — как плотность среднего числа частиц с энергией  $k^0$ , импульсом  $k$  и зарядом  $+1$ .

Соответственно этому после квантования (§ 10)  $\varphi^{*+}(k)$  описывает рождение частицы с массой  $m$ , импульсом  $k$  и зарядом  $1$ , а  $\varphi^-$  — ее уничтожение. Аналогичное соответствие имеет место также для  $\varphi^+$  и  $\varphi^{*-}$ .

Таким образом, комплексное скалярное поле описывает положительно и отрицательно заряженные бесспиновые частицы.

**3.5. Поле пионов.** Вместе с нейтральным  $\pi^0$ -мезоном заряженные  $\pi^+$  и  $\pi^-$ -мезоны образуют *изотопический триплет* (см. Приложение 1Б). Этот триплет описывается трехкомпонентной полевой функцией, компоненты которой образуют изотопический вектор.

Обычно употребляют два различных представления пионного поля. В первом из них все три компоненты действительны:

$$\pi(x) = \{ \pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x) \}, \quad \pi_\alpha^*(x) = \pi_\alpha(x), \quad (41)$$

а во втором первая и третья — взаимно антисопряжены:

$$\Phi(x) = \{\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x)\} \quad \Phi_2^* = \Phi_2, \quad \Phi_1^* = -\Phi_3. \quad (42)$$

Связь между представлениями (41) и (42) может быть выбрана в виде

$$\Phi_1 = -\frac{\pi_1 - i\pi_2}{\sqrt{2}}, \quad \Phi_2 = \pi_3, \quad \Phi_3 = \frac{\pi_1 + i\pi_2}{\sqrt{2}}. \quad (43)$$

Лагранжиан свободного пионного поля, инвариантный относительно вращений в трехмерном изотопическом пространстве в представлении (41), имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\pi; n\pi; n) - \frac{m^2}{2} (\pi\pi). \quad (44)$$

Переходя по формулам, обратным к (43), к представлению (42), получим

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\Phi; n\Phi; n) - \frac{m^2}{2} (\Phi\Phi) = \quad (45)$$

$$= \{\Phi_1; n\Phi_1; n - m^2\Phi_1\Phi_1\} + \frac{1}{2} \{\Phi_2; n\Phi_2; n - m^2\Phi_2\Phi_2\}. \quad (46)$$

Изотопическая инвариантность лагранжиана (44) приводит к новому закону сохранения — закону сохранения вектора изотопического спина  $I$ . Поскольку третья компонента вектора изоспина для пи-мезонов равна электрическому заряду (ср. (2.21) при  $Y=0$ ), рассмотрим в изотопическом пространстве операцию вращения на угол  $\alpha$  плоскости  $z_1z_2$ :

$$\pi'_1 = \cos\alpha \cdot \pi_1 - \sin\alpha \cdot \pi_2, \quad \pi'_2 = \sin\alpha \cdot \pi_1 + \cos\alpha \cdot \pi_2, \quad \pi'_3 = \pi_3. \quad (47)$$

Как показано в Приложении 1Б, это преобразование в представлении (42) записывается в виде

$$\Phi' = \exp\{-iT_3\alpha\}\Phi, \quad (48)$$

причем матрица  $T_3$  диагональна:

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

С помощью теоремы Нётер получаем 4-вектор тока

$$J_n(x) = i\Phi^*(x)T_3\Phi; n(x) \quad (49)$$

и заряд

$$Q = I_3 = i \int dx (\Phi_1^*\Phi_1; 0 - \Phi_3^*\Phi_3; 0). \quad (50)$$

Таким образом, действительная компонента  $\Phi_2 = \pi_3$  не вносит вклада в заряд, а комплексно-сопряженные компоненты  $\Phi_1$  и  $\Phi_3$

вносят вклады, противоположные по знаку. Соответствие между компонентами полей  $\varphi_\alpha$  и частицами  $\pi^{\pm,0}$  устанавливается следующим образом:

$$\varphi_1 \sim \pi^+, \quad \varphi_2 \sim \pi^0, \quad \varphi_3 \sim \pi^- \quad (51)$$

## § 4. Векторное поле

**4.1. Лагранжиан, дополнительное условие и инварианты.** Функция, описывающая векторное поле, состоит из четырех компонент  $U_0$ ,  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ , которые в совокупности образуют ковариантный 4-вектор, т. е. при лоренцевых преобразованиях поворота

$$x'^k = x^k + \delta x^k, \quad \delta x^k = \omega^{kn} x_n, \quad \omega^{kn} + \omega^{nk} = 0$$

преобразуются по формулам

$$U'_k(x') = U_k(x) + \delta U_k, \quad \delta U^k = \omega^{kn} U_n(x). \quad (1)$$

Простейшая возможность обобщения на векторное поле формализма, развитого в предыдущем параграфе, состоит в выборе лагранжиана векторного поля в форме (для простоты мы пока будем рассматривать действительное векторное поле)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{\partial U_n}{\partial x_m} \frac{\partial U^n}{\partial x^m} + \frac{m^2}{2} U_k U^k, \quad (2)$$

т. е. в виде ковариантной суммы четырех «лагранжианов», по отдельности соответствующих компонентам  $U_0$ ,  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ . Такой лагранжиан, очевидно, приводит к уравнениям Клейна — Гордона для каждой из компонент  $U_k$  и к динамическим переменным, являющимся ковариантными суммами соответствующих выражений для скалярного поля. Легко видеть, однако, что такая формулировка приводит также к отрицательным членам в выражении для энергии, соответствующим компоненте  $U_0$ . Выход из этой ситуации заключается в наложении на компоненты  $U_k$  инвариантного дополнительного условия

$$\frac{\partial U^k}{\partial x^k} = 0. \quad (3)$$

Это условие является единственным возможным инвариантным условием, линейным по функциям поля.

Оно уменьшает количество линейно независимых компонент с четырех до трех и, как будет показано ниже, обеспечивает положительную определенность энергии векторного поля. Остающиеся три независимые компоненты соответствуют трем возможным значениям проекции спина на заданную ось, равным соответственно 1, 0,  $-1$ , т. е. описывают частицы со спином единица. Наложение дополнительного условия (3) соответствует исключению частицы со спином нуль, приводящей в этой формулировке к отрицательной энергии.

Поэтому при изложении теории векторного поля иногда (Вентцель (1942), стр. 94, Паули (1941), стр. 33) выбирают форму лагранжиана таким образом, чтобы, кроме уравнений поля, также автоматически обеспечить выполнение дополнительного условия (3). Отсылая читателя за подробными выкладками к цитированной литературе, укажем здесь, что такая программа может быть основана на следующем лагранжиане:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial U_n}{\partial x_m} - \frac{\partial U_m}{\partial x_n} \right) \left( \frac{\partial U_n}{\partial x^m} - \frac{\partial U_m}{\partial x^n} \right) + \frac{m^2}{2} U_n U^n, \quad (4)$$

который отличается от (2) членом

$$\frac{1}{2} \frac{\partial U_n}{\partial x^m} \frac{\partial U^m}{\partial x_n}. \quad (5)$$

Произвол в выборе лагранжиана связан, как видно, с возможностью построения нескольких различных инвариантов из производных первого порядка от компонент вектора.

Такой же произвол возникает и при выборе лагранжиана для электромагнитного поля, также описываемого векторным потенциалом. В теории электромагнитного поля из-за равенства нулю массы не удастся, однако, построить формализм так, чтобы автоматически обеспечить выполнение дополнительного условия (3). Поэтому в классической теории обычно обеспечивают выполнение условия (3) путем соответствующего градиентного преобразования (см. § 5). Однако при квантовании электромагнитного поля (см. главу II, § 12) не удастся удовлетворить условию (3) как функциональному соотношению между компонентами квантованного потенциала, так как оно оказывается несовместным с перестановочными соотношениями. Поэтому приходится накладывать на допустимые состояния некоторые условия, эквивалентные выполнению условия (3) лишь для средних значений.

Таким образом, в теории электромагнитного поля наложение дополнительного условия производится независимо от лагранжева формализма. Представляется поэтому естественным и в векторном поле не связывать дополнительное условие (3) с лагранжевым формализмом. Можно, например, использовать лагранжиан типа (2), накладывая условие (3) независимо от него.

Здесь возникает вопрос о структуре неоднозначности в лагранжиане и о влиянии этой неоднозначности на динамические переменные. Заметим в этой связи, что действие, соответствующее разности (5) двух выписанных лагранжианов, после интегрирования по частям с учетом условия (3) обращается в нуль и, следовательно, действия, соответствующие лагранжианам (2) и (4), совпадают. Лагранжианы (2) и (4) приводят к различным тензорам энергии-импульса, момента и т. д. Однако разности этих величин с учетом дополнительного условия и уравнений поля могут быть представлены в виде соответствующих дивергенций, в результате чего дина-

мические переменные типа вектора энергии-импульса оказываются равными друг другу. Этого будет достаточно, так как в соответствии с замечанием, сделанным в § 2, вопрос однозначного определения величин типа тензора энергии-импульса выходит за рамки рассматриваемого круга вопросов.

Заметим, что при переходе к системе взаимодействующих полей лагранжианы (2) и (4) могут приводить к неэквивалентным теориям. Такой случай, например, имеет место для заряженного векторного поля, взаимодействующего с электромагнитным.

Переходя к построению лагранжева формализма векторного поля, заметим, что в соответствии с общими свойствами действительное векторное поле описывает нейтральные частицы, а комплексное поле — заряженные. Для краткости мы ограничим наше рассмотрение комплексным векторным полем, имея при этом в виду, что соответствующие выкладки для действительного поля приводят к существенно отличным результатам лишь при вычислении тока и заряда.

На основании вышеизложенного лагранжиан векторного поля выберем в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{\partial \dot{U}_k^*}{\partial x^n} \frac{\partial U^k}{\partial x_n} + m^2 \dot{U}_n^* U^n \quad (6)$$

и независимо от него наложим дополнительные условия на  $U$  и  $\dot{U}$ :

$$\frac{\partial U^n}{\partial x^n} \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0, \quad \frac{\partial \dot{U}^n}{\partial x^n} \equiv \left(\frac{\partial \dot{U}^*}{\partial x}\right) = 0.$$

Из лагранжиана (6) с помощью формул § 2 находим уравнения поля

$$(\square - m^2) U_n(x) = 0, \quad (\square - m^2) \dot{U}_n^*(x) = 0,$$

тензор энергии-импульса

$$T_{kl} = -\left(\frac{\partial \dot{U}_n^*}{\partial x^k} \frac{\partial U^n}{\partial x^l} + \frac{\partial \dot{U}_n^*}{\partial x^l} \frac{\partial U^n}{\partial x^k}\right) - g^{kl} \mathcal{L}, \quad (7)$$

вектор тока

$$J_k = -i \left( \dot{U}_m^* \frac{\partial U^m}{\partial x^k} - \frac{\partial \dot{U}_m^*}{\partial x^k} U^m \right) \quad (8)$$

и тензор спинного момента

$$S_{lm}^n = \left( \dot{U}_m^* \frac{\partial U_l}{\partial x_n} + \frac{\partial \dot{U}_l^*}{\partial x_n} U_m - \dot{U}_l^* \frac{\partial U_m}{\partial x_n} - \frac{\partial \dot{U}_m^*}{\partial x_n} U_l \right). \quad (9)$$

Полагая в (7)  $k = 0$ , получаем пространственную плотность 4-вектора энергии-импульса

$$T^{00} = - \sum_k \frac{\partial \dot{U}_n^*}{\partial x^k} \frac{\partial U^n}{\partial x^k} - m^2 \dot{U}_n^* U^n, \quad (10)$$

$$T^{0\alpha} = \left( \frac{\partial \dot{U}_n^*}{\partial x^0} \frac{\partial U^n}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \dot{U}_n^*}{\partial x^\alpha} \frac{\partial U^n}{\partial x^0} \right), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Подобным образом, исходя из формул (8) и (9), приходим к плотности заряда

$$J^0 = -i \left( \dot{U}_n^* \frac{\partial U^n}{\partial x^0} - \frac{\partial \dot{U}_n^*}{\partial x^0} U^n \right) \quad (12)$$

и к пространственным плотностям компонент вектора спина  $S$

$$S_\gamma = \epsilon_{\gamma\alpha\beta} \int S_{\alpha\beta}^0 dx, \quad \alpha < \beta,$$

$$S_{\alpha\beta}^0 = \dot{U}_\beta^* \frac{\partial U_\alpha}{\partial x^0} + \frac{\partial \dot{U}_\alpha^*}{\partial x^0} U_\beta - \dot{U}_\alpha^* \frac{\partial U_\beta}{\partial x^0} - \frac{\partial \dot{U}_\beta^*}{\partial x^0} U_\alpha. \quad (13)$$

**4.2. Переход к импульсному представлению.** Для дальнейшего вычисления динамических величин, как обычно, перейдем к импульсному представлению

$$U_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikx} \delta(k^2 - m^2) U_n(k),$$

$$\dot{U}_n^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikh} \delta(k^2 - m^2) \dot{U}_n^*(k)$$

и разложим потенциалы  $U$ ,  $\dot{U}$  на положительно- и отрицательно-частотные части

$$U_n(x) = U_n^+(x) + U_n^-(x), \quad \dot{U}_n^*(x) = \dot{U}_n^{*+}(x) + \dot{U}_n^{*-}(x).$$

Выполняя интеграцию по переменной  $k^0$ , получим трехмерное импульсное представление потенциалов в виде

$$\left. \begin{aligned} U_n^\pm(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk}{\sqrt{2k^0}} e^{\pm ikx} U_n^\pm(k), \\ \dot{U}_n^{*\pm}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk}{\sqrt{2k^0}} e^{\pm ikx} \dot{U}_n^{*\pm}(k). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Здесь введены наши обычные обозначения

$$\left. \begin{aligned} U_n^\pm(k) &= \frac{U_n^\pm(k)}{\sqrt{2k^0}}, \quad \dot{U}_n^{*\pm}(k) = \frac{\dot{U}_n^{*\pm}(k)}{\sqrt{2k^0}} \quad (k^0 = \sqrt{k^2 + m^2}), \\ U_n^\pm(k) &= \theta(k^0) U_n(\pm k), \quad \dot{U}_n^{*\pm}(k) = \theta(k^0) \dot{U}_n^*(\pm k). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Напомним при этом, что в соответствии с определениями импульсных амплитуд условия комплексного сопряжения имеют вид

$$(U_n(k))^* = \dot{U}_n^*(-k) \text{ и, следовательно, } (U_n^\pm(k))^* = \dot{U}_n^\mp(k). \quad (16)$$

Подставляя разложения (14) в выражения (11), (12) и (13) и выполняя интеграцию по  $d\mathbf{x}$ , получим 4-вектор энергии-импульса

$$P^n = \int T^{0n} d\mathbf{x} = - \int d\mathbf{k} \cdot k^n \{ \dot{U}_m^*(\mathbf{k}) U^{+m}(\mathbf{k}) + \dot{U}_m^*(\mathbf{k}) U^{-m}(\mathbf{k}) \}, \quad (17)$$

заряд

$$Q = \int J^0 d\mathbf{x} = - \int d\mathbf{k} (\dot{U}_n^*(\mathbf{k}) U^{-n}(\mathbf{k}) - \dot{U}_n^*(\mathbf{k}) U^{+n}(\mathbf{k})) \quad (18)$$

и вектор спина

$$S = i \int d\mathbf{k} \{ [\dot{U}^*(\mathbf{k}) \times U^-(\mathbf{k})] - [\dot{U}^*(\mathbf{k}) \times U^+(\mathbf{k})] \}. \quad (19)$$

Как видно, вектор спина (19) не зависит от времени, что обусловлено симметрией тензора энергии-импульса (7).

Принимая во внимание условия комплексного сопряжения (4.16), замечаем, что согласно (17) в выражении энергии  $P^0$  член с  $m = 0$  оказывается отрицательным, так что энергия не является положительно определенной. Как упоминалось выше, указанная трудность снимается при наложении дополнительных условий, которые в трехмерном импульсном представлении (14) принимают вид

$$k^n U_n^\pm(\mathbf{k}) = 0, \quad k^n \dot{U}_n^\pm(\mathbf{k}) = 0. \quad (20)$$

В силу этих условий компоненты  $U_n$  не являются более независимыми. Выражая с помощью (20) компоненту  $U_0$  через остальные:

$$U_0^\pm(\mathbf{k}) = - \frac{1}{k^0} k^\alpha U_\alpha^\pm(\mathbf{k}), \quad \dot{U}_0^\pm(\mathbf{k}) = - \frac{1}{k^0} k^\alpha \dot{U}_\alpha^\pm(\mathbf{k}) \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

получаем для квадратичной формы, входящей под знак интеграла в (17), следующее выражение, зависящее лишь от «пространственных» компонент потенциала:

$$- \dot{U}_n^\pm(\mathbf{k}) U^{\mp n}(\mathbf{k}) = \dot{U}_\alpha^\pm(\mathbf{k}) U_\alpha^\mp(\mathbf{k}) - \frac{1}{(k^0)^2} (k^\alpha \dot{U}_\alpha^\pm(\mathbf{k})) (k^\beta U_\beta^\mp(\mathbf{k})). \quad (21)$$

Форма (21) диагонализуется линейной подстановкой

$$U(\mathbf{k}) = e_1 a_1(\mathbf{k}) + e_2 a_2(\mathbf{k}) + \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \frac{k^0}{m} a_3(\mathbf{k}), \quad (22)$$

представляющей собой разложение потенциала  $U_\alpha$  на продольную и поперечные составляющие по отношению к импульсу  $\mathbf{k}$ . Здесь  $e_1$  и  $e_2$  суть единичные векторы, ортогональные волновому вектору  $\mathbf{k}$  и друг другу:

$$(e_r \cdot e_s) = \delta_{rs}, \quad (e_s \cdot \mathbf{k}) = 0, \quad r, s = 1, 2,$$



и являющиеся ортами поперечной поляризации. Подстановка (22) есть не что иное как переход к локальному реперу в импульсном пространстве.

Подставляя (22) в (21), находим после несложных выкладок:

$$\rightarrow U_n^{\star\pm}(\mathbf{k}) U^{\mp n}(\mathbf{k}) = a_{\alpha}^{\star\pm}(\mathbf{k}) a_{\alpha}^{\mp}(\mathbf{k}).$$

Внося это выражение в (17) и (18), получаем диагональные выражения для энергии-импульса и заряда, причем в новых переменных энергия оказывается явным образом положительно определенной:

$$P^l = \int d\mathbf{k} \cdot k^l \{ a_{\alpha}^{\star+}(\mathbf{k}) a_{\alpha}^{-}(\mathbf{k}) + a_{\beta}^{\star-}(\mathbf{k}) a_{\beta}^{+}(\mathbf{k}) \}, \quad (23)$$

$$Q = \int d\mathbf{k} \{ a_{\alpha}^{\star+}(\mathbf{k}) a_{\alpha}^{-}(\mathbf{k}) - a_{\beta}^{\star-}(\mathbf{k}) a_{\beta}^{+}(\mathbf{k}) \}. \quad (24)$$

**4.3. Спин векторного поля.** Для уяснения связи амплитуд  $a$  со спиновой переменной рассмотрим проекцию спинового вектора на направление волнового вектора. Подставляя (22) в (19), получаем:

$$S_3 \sim \{ a_1^{\star+}(\mathbf{k}) a_2^{-}(\mathbf{k}) - a_2^{\star+}(\mathbf{k}) a_1^{-}(\mathbf{k}) + a_2^{\star-}(\mathbf{k}) a_1^{+}(\mathbf{k}) - a_1^{\star-}(\mathbf{k}) a_2^{+}(\mathbf{k}) \}. \quad (25)$$

Это выражение диагонализуется линейной подстановкой

$$\left. \begin{aligned} a_1^{\pm} &= \frac{b_1^{\pm} + b_2^{\pm}}{\sqrt{2}}, & a_2^{\pm} &= \frac{b_1^{\pm} - b_2^{\pm}}{i\sqrt{2}}, & a_3^{\pm} &= b_3^{\pm}, \\ a_1^{\star\pm} &= \frac{b_1^{\star\pm} + b_2^{\star\pm}}{\sqrt{2}}, & a_2^{\star\pm} &= i \frac{b_1^{\star\pm} - b_2^{\star\pm}}{\sqrt{2}}, & a_3^{\star\pm} &= b_3^{\star\pm}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

не меняющей диагонального вида  $P$  и  $Q$ :

$$P^n = \int d\mathbf{k} \cdot k^n (b_{\alpha}^{\star-}(\mathbf{k}) b_{\alpha}^{+}(\mathbf{k}) + b_{\alpha}^{\star+}(\mathbf{k}) b_{\alpha}^{-}(\mathbf{k})), \quad (27)$$

$$Q = \int d\mathbf{k} (b_{\alpha}^{\star+}(\mathbf{k}) b_{\alpha}^{-}(\mathbf{k}) - b_{\alpha}^{\star-}(\mathbf{k}) b_{\alpha}^{+}(\mathbf{k})), \quad (28)$$

$$S_3 \sim [b_1^{\star+}(\mathbf{k}) b_1^{-}(\mathbf{k}) - b_1^{\star-}(\mathbf{k}) b_1^{+}(\mathbf{k}) + b_2^{\star-}(\mathbf{k}) b_2^{+}(\mathbf{k}) - b_2^{\star+}(\mathbf{k}) b_2^{-}(\mathbf{k})]. \quad (29)$$

Из этих формул видно, что квадратичные комбинации амплитуд  $b^{\star\pm}$  и  $b^{\pm}$  могут рассматриваться как плотности среднего числа частиц, обладающих определенными значениями энергии, импульса, заряда и проекции спина на направление движения. При этом, например, величина  $b_2^{\star-}(\mathbf{k}) b_2^{+}(\mathbf{k})$  представляет плотность частиц с импульсом  $\mathbf{k}$ , энергией  $k^0$ , зарядом  $-1$  и проекцией спина на ось движения, равной  $+1$ ; соответственно  $b_3^{\star-}(\mathbf{k}) b_3^{+}(\mathbf{k})$  является плотностью числа частиц с импульсом  $\mathbf{k}$ , энергией  $k^0$ , зарядом  $-1$  и нулевой проекцией спина и т. д. Как мы убедимся ниже (см. главу II), в связи с этим после квантования амплитуда  $b_3^{\star+}(\mathbf{k})$  описывает рождение частицы с энергией  $k^0$ , импульсом  $\mathbf{k}$ , зарядом  $+1$ ,

проекцией спина  $-1$ , амплитуда  $b_{\frac{1}{2}}^-(\mathbf{k})$  описывает ее уничтожение, и т. д.

Поэтому в соответствии с (22), (26), (29) амплитуды  $a_{1,2}$  соответствуют линейно поляризованным, а  $b_{1,2}$  — поляризованным по кругу колебаниям.

Таким образом, комплексное векторное поле описывает положительно и отрицательно заряженные частицы с массой  $m = \sqrt{k_0^2 - \mathbf{k}^2}$  и тремя возможными значениями проекции вектора спина на направление движения, равными соответственно  $1, 0, -1$ . Строгое обоснование этого соответствия дает, разумеется, лишь квантовая теория.

**4.4. Запись уравнений Клейна — Гордона в виде системы уравнений первого порядка.** Заметим, что в общем случае система уравнений

$$(\square - m^2) u_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (30)$$

может быть заменена системой уравнений первого порядка вида

$$\left( i\Gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - M \right) u(x) = 0, \quad (31)$$

где  $\Gamma^n$  и  $M$  — некоторые квадратные матрицы, а число  $r$  ( $r > s$ ) компонент функции  $u$  равно рангу матриц  $\Gamma$  и  $M$ , свойства которых определяются законами преобразования функции  $u$  и условиями ковариантности уравнений (31).

В частности, если матрицы  $\Gamma$  определяются условиями

$$\Gamma^n \Gamma^m + \Gamma^m \Gamma^n = 2g^{mn}.$$

а матрица  $M$  диагональна, то, как будет показано в § 6, ранг единственного неприводимого представления  $\Gamma$  равен четырем, а функция  $u$  является четырехкомпонентным спинором.

Случай, когда  $\Gamma$  определяются соотношениями

$$\Gamma^k \Gamma^n \Gamma^m + \Gamma^m \Gamma^n \Gamma^k = g^{kn} \Gamma^m + g^{mn} \Gamma^k, \quad (32)$$

а матрица  $M$  диагональна, был исследован Дэффином (1938) и Кеммером (1939) (см. также Паули (1941)). Ранг матриц оказывается здесь равным шестнадцати. Соответствующее представление распадается на три неприводимых. В первом из них  $u$  однокомпонентна и равна нулю, во втором — пятикомпонентна и в третьем — десятикомпонентна. Пятикомпонентная функция реализует скалярное представление, соответствует скаляру и его 4-градиенту и описывает частицы со спином нуль. Десятикомпонентная функция реализует векторное представление, соответствует 4-вектору  $U$  и шести компонентам тензора

$$H_{mn} = \frac{\partial U_n}{\partial x^m} - \frac{\partial U_m}{\partial x^n}$$

и описывает частицы со спином единица.

Условия ковариантности уравнений типа (31) при лоренцевых преобразованиях накладывают на матрицы  $\Gamma$  некоторые соотношения, устанавливающие связь между матрицами  $\Gamma$  и законами преобразования волновой функции  $u$ . Рассмотрим для этого бесконечно малое преобразование вращения (при преобразовании трансляции уравнения (31) тривиально ковариантны):

$$x^n \rightarrow x'^n = x^n + x_k \omega^{nk}, \quad \omega^{nk} + \omega^{kn} = 0,$$

при котором функция  $u$  преобразуется по закону

$$u'(x') = \Lambda u(x). \quad (33)$$

В соответствии с требованием ковариантности уравнение (31) в новых переменных будет иметь старую форму:

$$\left( i\Gamma^n \frac{\partial}{\partial x'^n} - M \right) u'(x') = 0.$$

Выражая входящие сюда производные по преобразованным координатам  $x'$  через производные по первоначальным координатам  $x$ , умножая слева на  $\Lambda^{-1}$  и приравнявая друг другу члены первого порядка малости по параметрам  $\omega$ , находим условия связи между матрицей преобразования  $\Lambda$  и коэффициентами уравнения  $\Gamma$  и  $M$ :

$$\left. \begin{aligned} \Lambda^{-1}M\Lambda &= M, \\ \Lambda^{-1}\Gamma^k\Lambda &= \Gamma^k + \Gamma_n\omega^{kn}, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

обеспечивающие ковариантность рассматриваемого уравнения.

Таким образом, тензорные законы преобразования функций поля в формализме Дэффина — Кеммера принимают вид (33), причем матрица преобразования  $\Lambda$  оказывается связанной с матричными коэффициентами уравнения поля. Тензорный закон преобразования как бы принимает «внешний вид» преобразования спинорного типа (см. § 6). Этот факт, разумеется, связан с переходом к новой системе «независимых компонент» функции поля, фактически являющихся линейными комбинациями тензорных компонент и их первых производных.

Уравнение (31) может быть также получено вариационным методом из лагранжиана вида

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left( \Pi\Gamma^n \frac{\partial u}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x^n} \Gamma^n u \right) - \Pi M u. \quad (35)$$

Входящая сюда функция  $\bar{\Pi}$ , называемая «сопряженной» по отношению к  $u$ , удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x^n} \Gamma^n + \bar{\Pi} M = 0$$

и линейно связана с комплексно-сопряженной по отношению к  $u$  функцией  $u^*$  матричным соотношением

$$\bar{\Pi} = u^* \Gamma. \quad (36)$$

Матрица последнего преобразования  $\Gamma$  определяется через  $\Gamma^k$  и  $M$  с помощью условия действительности лагранжиана (35). Этим путем получаем:

$$(\Gamma)^{-1} \Gamma^k \Gamma^\dagger = \Gamma^k, \quad (\Gamma)^{-1} M \Gamma^\dagger = M.$$

Очевидно также, что из лагранжиана (35) обычным путем могут быть получены выражения для динамических переменных.

Для иллюстрации рассмотрим случай комплексного скалярного поля. Уравнение Клейна — Гордона

$$(\square - m^2) \varphi(x) = 0$$

может быть заменено на матричные уравнения первого порядка

$$i\Gamma_n \frac{\partial u}{\partial x_n} - Mu = 0,$$

где  $M$  — диагональная матрица  $M_{ik} = m\delta_{ik}$ , а  $\Gamma_n$  имеют вид (точками изображены нули)

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, & \Gamma_1 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ \Gamma_2 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, & \Gamma_3 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (37)$$

Не составляет труда убедиться, что компоненты  $u$  могут быть выражены через  $\varphi_{,n}$  следующим образом:

$$u_n = \frac{i}{\sqrt{m}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^n}, \quad n=0, 1, 2, 3, \quad u_4 = \sqrt{m} \varphi. \quad (38)$$

При этом матрица  $\Gamma$  преобразования (36) будет

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

причем

$$u = u^* \Gamma = \{u_0^*, -u_1^*, -u_2^*, -u_3^*, u_4^*\},$$

а лагранжиан (35) может быть представлен в виде

$$\mathcal{L} = \varphi^* (\square - m^2) \varphi, \quad (40)$$

отличающемся от (3.32) лишь членом, имеющим вид 4-дивергенции.

Таким образом, для свободного поля формулировка Дэффина — Кеммера полностью эквивалентна обычной. Отличие проявляется при введении взаимодействия между полями. Так, например, взаимодействие с электромагнитным полем обычно вводится так называемым *минимальным* образом, когда градиенты (т. е. импульсы в смысле обычного квантово-механического соответствия), входящие в свободный лагранжиан, «удлиняются» по правилу (введения обобщенных импульсов  $p \rightarrow p - \frac{e}{c} A$ ):

$$i \frac{\partial}{\partial x^n} \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x^n} - e A_n, \quad (41)$$

обеспечивающему градиентную инвариантность полного лагранжиана  $\mathcal{L}_{\text{полн}}$  (см. ниже § 8.2). Удлинение лагранжиана (35), зависящего от  $\partial/\partial x^n$  линейно, приводит к лагранжиану взаимодействия, линейному по потенциалу электромагнитного поля  $A_n$ , тогда как удлинение свободного лагранжиана (3.1) приводит к лагранжиану взаимодействия, квадратичному по  $A_n$ .

## § 5. Электромагнитное поле

5.1. Потенциал электромагнитного поля. Электромагнитное поле описывается известными уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^0}, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^0}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0. \end{aligned}$$

Для более симметричного описания электромагнитного поля вводится действительный ковариантный 4-вектор электромагнитного потенциала  $A_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) так, чтобы

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^0}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Компоненты «четырёхмерного ротора» потенциала  $\mathbf{A}$  образуют известный антисимметричный тензор электромагнитного поля

$$H_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l} = \partial_k A_l - \partial_l A_k, \quad (1)$$

компоненты которого связаны с компонентами векторов напряженности электрического и магнитного полей соотношениями

$$E_\alpha = H_{\alpha 0} \quad (\alpha = 1, 2, 3); \quad H_1 = H_{23}, \quad H_2 = H_{31}, \quad H_3 = H_{12}.$$

Эту связь удобно изобразить в следующем наглядном виде:

$$H_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения Максвелла записываются с помощью тензора  $H_{kl}$  в виде

$$\frac{\partial H_{kl}}{\partial x_l} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial H_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial H_{lm}}{\partial x^k} = 0. \quad (3)$$

Переходя, далее, в этих уравнениях от  $H_{kl}$  к потенциалу  $A_l$ , убеждаемся, что четверка уравнений (3) является следствием определения (1) и не приводит к какому-либо уравнению для  $A_l$ , а четверка уравнений (2) дает:

$$\square A_n + \frac{\partial^2 A^k}{\partial x^k \partial x^n} = 0. \quad (4)$$

Отсюда видно, что формулировка уравнений электромагнитного поля в терминах потенциала  $A_n$  действительно проста, симметрична и явно ковариантна.

**5.2. Градиентное преобразование и условие Лоренца.** Заметим далее, что процедура введения векторного потенциала  $A$  в сильной степени неоднозначна. Дело заключается в том, что в теории Максвелла наблюдаемые величины, каковыми являются векторы  $E$ ,  $H$ , тензор  $H_{kl}$ , а вместе с ними и уравнения электромагнитного поля, инвариантны относительно так называемого *градиентного (или калибровочного) преобразования потенциала  $A$* :

$$A_n(x) \rightarrow A'_n(x) = A_n(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x^n}. \quad (5)$$

Потенциал  $A$  не является наблюдаемой величиной и оказывается неоднозначным. В (5)  $f(x)$  — произвольная функция, обладающая частными производными первого и второго порядка.

Отмеченной неоднозначностью потенциала  $A$  можно воспользоваться таким образом, чтобы удовлетворить какому-либо дополнительному условию. В качестве такого дополнительного условия выбирают обычно так называемое *условие Лоренца*

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} \equiv \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) = 0, \quad (6)$$

являющееся единственно возможным инвариантным условием, линейным по  $A$ . Не составляет труда убедиться, что  $f(x)$  всегда может быть выбрана таким образом, чтобы удовлетворить условию (6).

С учетом условия Лоренца уравнения поля (4) принимают вид

$$\square A_l = 0. \quad (7)$$

Однако дополнительное условие Лоренца еще не полностью определяет потенциал  $A$ . Соотношения (6) и (7) остаются инвариантными относительно «специализированного градиентного преобразования»

$$A_n(x) \rightarrow A'_n(x) = A_n(x) + \frac{\partial f_0(x)}{\partial x^n}, \quad (8)$$

характеризующегося тем, что произвольная функция  $f_0(x)$  должна удовлетворять уравнению Даламбера \*)

$$\square f_0 = 0.$$

В любой частной лоренцевой системе отсчета функцию  $f_0$  можно выбрать таким образом, чтобы одна из компонент  $A$ , например «скалярный» потенциал  $A_0$ , обратилась в нуль. Условие Лоренца принимает при этом вид

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\alpha} \equiv \operatorname{div} A = 0. \quad (9)$$

\*) Как было показано Огневским и Полубариновым (1961), аналогичная инвариантность имеет место для нейтрального векторного поля с ненулевой массой, описываемого лагранжианом (4.2).

Для того чтобы установить физический смысл соотношения (9), удобно перейти к импульсному представлению

$$A_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \delta(k^2) e^{ikx} A_n(k). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), находим:

$$k_\alpha A_\alpha(k) |_{k^2=0} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(k)) |_{k^2=0} = 0. \quad (11)$$

Условие (11) представляет собой *условие поперечности* электромагнитного поля. Таким образом, несмотря на то что электромагнитное поле описывается четырехкомпонентным потенциалом, физический смысл имеют лишь *две линейно независимые компоненты*, ортогональные волновому вектору. Важно подчеркнуть, что, хотя условие поперечности не является ковариантным, можно добиться его выполнения в любой частной лоренцевой системе путем соответствующего специализированного калибровочного преобразования (8).

Отметим также, что фактическое сведение четырехкомпонентного поля к двухкомпонентному, происходящее вследствие условия градиентной инвариантности, тесно связано с *равенством нулю массы покоя* частиц поля — *фотонов*. Именно в силу этого важного свойства из уравнений поля выпадает потенциал  $A$  и возникает свойство инвариантности электромагнитного поля при градиентных преобразованиях.

**5.3. Лагранжев формализм.** Переходя к лагранжеву формализму, заметим, что, как мы увидим ниже (см. главу II), при квантовании электромагнитного поля не удастся удовлетворить дополнительному условию Лоренца (6), как соотношению между компонентами квантованного потенциала  $A_n$ . Условие Лоренца в квантовой теории электромагнитного поля придется заменить некоторым условием для вторично квантованной волновой функции, обеспечивающим равенство нулю лишь среднего значения оператора  $(\partial A/\partial x)$  по допустимым состояниям.

Поэтому мы не будем связывать условие Лоренца с лагранжевым формализмом. Функцию Лагранжа возьмем по образцу векторного поля, положив там  $m = 0$ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_m}{\partial x^n} \frac{\partial A^m}{\partial x_n}. \quad (12)$$

Этот лагранжиан фактически совпадает с лагранжианом Дирака — Фока — Подольского (1932) (см. также Вентцель (1942)):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} H_{kl} H^{kl} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2,$$

отличаясь от него дивергенцией

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ A_k \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - A_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \right].$$

От обычно используемого градиентно-инвариантного выражения

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} H_{kl} H^{kl} \quad (13)$$

лагранжиан (12) разнится на величину, которая при интеграции по всему пространству-времени с учетом условия Лоренца обращается в нуль, не давая вклада в действие системы.

Подобным образом лагранжиан (12) приводит к величинам типа тензора энергии-импульса, не совпадающим с обычными градиентно-инвариантными выражениями. Однако, как и в случае векторного поля, соответствующие разности выражаются через дивергенции и с учетом уравнений поля и условия Лоренца не дают вклада в динамические характеристики системы типа 4-вектора энергии-импульса. Что же касается однозначности самого тензора энергии-импульса (и подобных ему величин), то в соответствии с замечанием, сделанным в § 2, этот вопрос выходит за рамки настоящего изложения.

Из лагранжиана (12) обычной процедурой с помощью формул (1.4), (2.9), (2.15) получаем уравнения поля

$$\square A_k = 0;$$

тензор энергии-импульса

$$T_{kl} = -\frac{\partial A_n}{\partial x^k} \frac{\partial A^n}{\partial x^l} - g^{kl} \mathcal{L};$$

пространственную плотность энергии-импульса

$$T^{00} = -\frac{1}{2} \frac{\partial A^n}{\partial x^k} \frac{\partial A_n}{\partial x^k}, \quad T^{0\alpha} = \frac{\partial A_n}{\partial x^0} \frac{\partial A^n}{\partial x^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3); \quad (14)$$

тензор спинного момента

$$S_{lm}^n = \left( A_m \frac{\partial A_l}{\partial x_n} - A_l \frac{\partial A_m}{\partial x_n} \right)$$

и пространственную плотность вектора спина

$$S_{\alpha\beta}^0 = A_\beta \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^0} - A_\alpha \frac{\partial A_\beta}{\partial x^0}. \quad (15)$$

В дополнение к лагранжеву формализму наложим условие Лоренца

$$\left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) = 0.$$

Заметим при этом, что это условие относится лишь к теории некантованного электромагнитного поля и, как мы увидим (в главе II), при квантовании заменяется некоторыми условиями для допустимых состояний, эквивалентными условию Лоренца лишь в среднем.



Полученные выражения тензоров энергии-импульса и момента количества движения, как следовало ожидать, отличаются от соответствующих обычно принятых в теории электромагнитного поля градиентно-инвариантных выражений, получаемых из градиентно-инвариантного лагранжиана (13). Однако нетрудно показать, что разности между соответствующими тензорами могут быть представлены в виде суммы соответствующих антисимметричных дивергенций и членов, обращающихся в нуль при учете уравнений поля и дополнительного условия Лоренца, а следовательно, приводят к совпадающим выражениям для динамических характеристик системы.

Для вычисления динамических характеристик произведем разбиение компонент потенциала на положительно- и отрицательно-частотные части

$$A_n(x) = A_n^+(x) + A_n^-(x)$$

и перейдем к импульсному представлению. Запишем формулу трехмерного импульсного представления, имея в виду, что трехмерные импульсные амплитуды  $A(\mathbf{k})$  связаны с четырехмерными амплитудами  $A(k)$  обычными соотношениями типа (4.15) и удовлетворяют следующим условиям комплексного сопряжения:

$$(A_n^\pm(\mathbf{k}))^* = A_n^\mp(\mathbf{k}).$$

**5.4. Поперечные, продольные и временные составляющие.** Введем систему отсчета, связанную с вектором импульса  $\mathbf{k}$ , т. е. перейдем к локальному реперу в импульсном пространстве, представив  $A(\mathbf{k})$  в виде суммы временной, продольной и поперечных составляющих:

$$A_n^\pm(\mathbf{k}) = e_n^1 a_1^\pm(\mathbf{k}) + e_n^2 a_2^\pm(\mathbf{k}) + e_n^3 a_3^\pm(\mathbf{k}) + e_n^0 a_0^\pm(\mathbf{k}). \quad (16)$$

Здесь  $e^1$  и  $e^2$  — единичные пространственные векторы поляризации, ортогональные друг другу и орту  $e^3$  вектора импульса:

$$(e^\alpha e^\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \quad e_n^0 = 0, \quad e^3 = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|},$$

$$[e^1 e^2] = e^3, \quad [e^2 e^3] = e^1, \quad [e^3 e^1] = e^2,$$

а  $e^0$  — единичный временной вектор:  $e_n^0 = \delta_{n0}$ .

Легко проверить, что при преобразовании (16) основная квадратичная форма, определяющая 4-вектор энергии-импульса (ср. ниже (20)), не меняет своего вида:

$$A_n^+(\mathbf{k}) A^{-n}(\mathbf{k}) = g^{mn} a_m(\mathbf{k}) a_n^-(\mathbf{k}). \quad (17)$$

Внося разложение (16) в дополнительное условие Лоренца, записанное по отдельности для положительно- и отрицательно-

частотных компонент:

$$k^n A_n^+(\mathbf{k}) = 0, \quad k^n A_n^-(\mathbf{k}) = 0,$$

получим два соотношения

$$|\mathbf{k}| a_3^\pm(\mathbf{k}) - k^0 a_0^\pm(\mathbf{k}) = 0.$$

Замечая, что, ввиду равенства нулю массы  $m$ ,  $|\mathbf{k}| = k^0$ , находим отсюда

$$a_3^+(\mathbf{k}) a_3^-(\mathbf{k}) - a_0^+(\mathbf{k}) a_0^-(\mathbf{k}) = 0. \quad (18)$$

Смысл полученного соотношения (18) состоит в том, что в силу условия Лоренца плотности средних чисел «продольных» фотонов  $a_3^+ a_3^-$  и «временных» фотонов  $a_0^+ a_0^-$  равны друг другу, а их вклады в 4-вектор энергии-импульса противоположны по знаку. Можно поэтому сказать, что «продольные» и «временные» фотоны как бы «компенсируют» друг друга. Подставляя (18) в (17), получаем:

$$-A_n^+(\mathbf{k}) A^{-n}(\mathbf{k}) = \sum_{\nu=1, 2} a_\nu^+(\mathbf{k}) a_\nu^-(\mathbf{k}). \quad (19)$$

Вычисляя далее 4-вектор энергии-импульса

$$P^n = \int d\mathbf{k} \cdot k^n \{-A_m^+(\mathbf{k}) A^{-m}(\mathbf{k})\} = \sum_{\mu=1, 2} \int d\mathbf{k} \cdot k^\mu a_\mu^+(\mathbf{k}) a_\mu^-(\mathbf{k}), \quad (20)$$

находим, что в рассматриваемом случае, как и для векторного поля, энергия оказывается положительно определенной лишь в силу дополнительного условия Лоренца.

5.5. Спин. Определяя затем вектор спина

$$\left. \begin{aligned} S_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \int S_{\beta\gamma}^0 d\mathbf{x}, \\ S &= i \int d\mathbf{k} [A^+(\mathbf{k}) \times A^-(\mathbf{k})] = i \int d\mathbf{k} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} e^{\alpha} a_{\beta}^+ a_{\gamma}^-, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

сохраняющийся во времени в силу симметрии тензора  $T^{kl}$ , находим его проекцию на направление волнового вектора  $\mathbf{k}$  в виде

$$S_3 \sim i (a_1^+(\mathbf{k}) a_2^-(\mathbf{k}) - a_2^+(\mathbf{k}) a_1^-(\mathbf{k})). \quad (22)$$

Вводя новые амплитуды  $b_1^\pm$  и  $b_2^\pm$ , подобно тому, как это было сделано в § 4.2, получаем для  $P^n$  и  $S_3$  «диагональные» выражения

$$P^n = \int d\mathbf{k} \cdot k^n (b_1^+(\mathbf{k}) b_1^-(\mathbf{k}) + b_2^+(\mathbf{k}) b_2^-(\mathbf{k})), \quad (23)$$

$$S_3 \sim (b_1^+(\mathbf{k}) b_1^-(\mathbf{k}) - b_2^+(\mathbf{k}) b_2^-(\mathbf{k})), \quad (24)$$

из которых непосредственно вытекает, что произведения

$$b_i^+(\mathbf{k}) b_i^-(\mathbf{k}) \quad (i = 1, 2)$$

могут рассматриваться как средние числа частиц с массой нуль, импульсом  $\mathbf{k}$ , энергией  $k^0 = |\mathbf{k}|$ , обладающих проекцией спино-

вого момента на направление волнового вектора  $k$ , равной  $+1$  ( $i = 1$ ) и  $-1$  ( $i = 2$ ). Фактически мы имеем дело с фотонами.

Таким образом, переход к импульсному представлению позволяет наглядно убедиться, что электромагнитное поле описывает поперечные фотоны с двумя возможными значениями проекции спина на направление движения. Строгое обоснование этого соответствия теория, разумеется, дает лишь в результате вторичного квантования.

## § 6. Спинорное поле. Матрицы Дирака и законы преобразования спинорных функций

**6.1. Факторизация оператора Клейна — Гордона.** Перейдем к рассмотрению простейшего спинорного поля, которое, как будет показано ниже, описывает заряженные частицы со спином  $1/2$ , каковыми, например, являются электроны и позитроны. Соответствующие уравнения, следуя Дираку, получим путем «факторизации» оператора Клейна — Гордона:

$$\square - m^2 = P_n P^n - m^2, \quad (1)$$

где для удобства записи использованы обычные квантовомеханические обозначения

$$P_n = i \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Оператор (1) является квадратичным относительно производных  $\partial/\partial x^n$  и, как легко убедиться, не может быть представлен в виде произведения двух линейных по  $P^n$  сомножителей с численными коэффициентами. В самом деле, если по аналогии с формулой разложения на множители разности двух квадратов попытаться представить (1) в виде

$$\square - m^2 = (P - m)(P + m),$$

где  $P$  — некоторая линейная комбинация операторов  $P^k$  с коэффициентами  $\gamma^k$ ,

$$P = P_k \gamma^k,$$

то для этого необходимо потребовать, чтобы выполнялось соотношение

$$P_n P^n = (P_k \gamma^k)^2,$$

раскрывая правую часть которого, найдем условие, определяющее коэффициенты  $\gamma$ :

$$\gamma^n \gamma^m + \gamma^m \gamma^n = 2g^{mn}. \quad (2)$$

Ввиду того, что согласно этому условию величины  $\gamma^k$  с различными индексами антикоммутируют, они не являются числами и могут быть выбраны в виде матриц.

С помощью этих величин оператор Клейна — Гордона может быть представлен в виде произведения двух коммутирующих матричных операторов:

$$\square - m^2 = \left( i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} + m \right) \left( i\gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - m \right), \quad (3)$$

и для того чтобы функция поля подчинялась уравнению Клейна — Гордона

$$(\square - m^2) \psi = 0, \quad (4)$$

мы можем потребовать, чтобы она удовлетворяла также одному из уравнений первого порядка:

$$\left( i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} + m \right) \psi(x) = 0 \quad \text{или} \quad \left( i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - m \right) \psi(x) = 0. \quad (5)$$

Уравнения (5), разумеется, являются менее общими, чем (4), и хотя всякое решение одного из уравнений (5) удовлетворяет уравнению (4), обратное соотношение не имеет места.

Важно отметить, что уравнения (5) фактически являются *совершенно новыми* уравнениями, так как удовлетворяющие им функции реализуют *спинорное* представление группы Лоренца.

Можно ожидать поэтому, что уравнения (5) содержат более детальную информацию, чем (4). Как известно, это положение действительно имеет место, поскольку именно с помощью уравнений (5) Дираку впервые удалось описать *спин электрона*, равный  $1/2$ . Уравнения (5) называются *уравнениями Дирака*, а матрицы  $\gamma$ , определяемые соотношениями (2), — *матрицами Дирака*.

Общим свойством всех рассмотренных нами ранее решений уравнения Клейна — Гордона, соответствующих однозначным представлениям группы Лоренца, является то, что соответствующие им частицы обладают целым спином (в рассмотренных случаях 0 и 1). Для описания частиц с полуцелым спином приходится прибегать к спинорным представлениям, простейшее из которых соответствует уравнениям (5) и (2).

Ввиду матричного характера операторов (5) волновая функция  $\psi$ , которая им удовлетворяет, является многокомпонентной, причем число ее компонент определяется рангом матриц  $\gamma$ .

**6.2. Матрицы Дирака.** Перейдем теперь к изучению свойств **четырёх гиперкомплексных чисел  $\gamma^n$** , определенных соотношениями (2). Ранг неприводимого представления этих величин может быть установлен на основании следующих соображений.

Если к указанным четырем числам добавить все возможные их взаимные произведения (включая многократные) и все линейные комбинации полученных этим путем гиперкомплексных чисел со всевозможными комплексными коэффициентами, то мы, очевидно, получим такую совокупность элементов, внутри которой определены операции сложения элементов и умножения элементов на

элемент и на комплексные числа. Как говорят, мы получим тогда некоторую алгебру  $A$  над полем комплексных чисел. Кроме того, нам надо будет предположить, что здесь имеется конечномерное матричное представление.

Используя ряд алгебраических теорем, можно показать, что ранг  $n$  неприводимого матричного представления данной системы гиперкомплексных чисел связан с числом  $h$  линейно независимых элементов алгебры  $A$  соотношением

$$h = n^2. \quad (6)$$

При переходе к матричному представлению чисел  $\gamma$  не составляет труда убедиться, что это соотношение выражает тот простой факт, что число  $h$  линейно независимых квадратных матриц ранга  $n$  равно числу элементов этих матриц.

Определим число  $h$ . Из четырех матриц  $\gamma^k$  путем их взаимного перемножения можно построить 16 линейно независимых матриц:

$$\left. \begin{aligned} &\text{единичную матрицу } I = g^{kk}\gamma^k\gamma^k \quad (\text{нет суммирования}), \\ &\text{четыре матрицы } \gamma^k \quad (k = 0, 1, 2, 3), \\ &\text{шесть матриц } \sigma^{kl} = i \frac{\gamma^k\gamma^l - \gamma^l\gamma^k}{2} = \\ &\quad = i\gamma^k\gamma^l \quad (k < l; k, l = 0, 1, 2, 3), \\ &\text{одну матрицу *) } \gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \\ &\text{четыре матрицы } D^k = \gamma^k\gamma^5 \quad (k = 0, 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Легко видеть, что все остальные произведения матриц (2), а следовательно, и все линейные комбинации таких произведений, т. е. вся алгебра  $A$ , выражаются через матрицы (7) посредством линейных соотношений. Имеем, например, выполняя коммутации,

$$\gamma^2\gamma^1 = i\sigma^{12}, \quad \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^0 = -iD^2 \text{ и т. д.}$$

Как можно показать, матрицы (7) являются линейно независимыми. Для доказательства этого свойства нам потребуется рассмотреть шпуры матриц (7). Так как шпуром матрицы называется сумма ее диагональных элементов, то возможна циклическая перестановка матричных сомножителей под знаком шпура. Так, например,

$$\text{Sp } ABC \equiv \sum_{\alpha, \beta, \gamma} A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} C_{\gamma\alpha} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} C_{\gamma\alpha} A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} = \text{Sp } CAB. \quad (8)$$

Используя это свойство и определение (2), покажем, что шпуры всех матриц (7), кроме единичной, равны нулю.

Рассмотрим, например, шпур одной из матриц  $\gamma^k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) Умножим  $\gamma^k$  слева на  $\gamma_n\gamma^n = 1$  ( $n \neq k$ ) и воспользуемся свойством

\*) Символ  $\gamma^4$  обычно резервируется для матрицы, отличающейся от  $\gamma^0$  множителем  $i$ , т. е.  $\gamma^4 = i\gamma^0$ .

цикличности. Имеем тогда:

$$\text{Sp } \gamma^k = \text{Sp } \gamma_n \gamma^n \gamma^k = \text{Sp } \gamma^n \gamma^k \gamma_n \quad (\text{нет суммирования!}),$$

откуда с помощью (2) получаем:

$$\text{Sp } \gamma^k = \frac{1}{2} \text{Sp } \gamma_n (\gamma^k \gamma^n + \gamma^n \gamma^k) |_{n \neq k} = 0. \quad (9)$$

Аналогичным приемом легко показать, что все остальные шпурь также равны нулю. Для иллюстрации вычислим еще шпур матрицы  $\gamma^5$ . Циклически переставляя входящую в  $\gamma^5$  множителем матрицу  $\gamma^0$ , имеем:

$$\text{Sp } \gamma^5 = \text{Sp } \gamma^0 D^0 = \text{Sp } D^0 \gamma^0. \quad (10)$$

Однако результат непосредственной коммутации  $\gamma^0$  и  $D^0$  дает:

$$\gamma^0 D^0 = -D^0 \gamma^0,$$

откуда непосредственно вытекает, что шпур матрицы  $\gamma^5$  равен нулю.

Покажем теперь, что из условия равенства нулю шпуров всех матриц (7), кроме единичной, вытекает их линейная независимость. Для доказательства предположим противное. Пусть

$$F = aI + \sum_n b^n \gamma^n + \sum_{m, k} c^{mk} \sigma^{mk} + \sum_l d^l D^l + e \gamma^5 = 0,$$

где  $a, b, c, d$  и  $e$  — некоторые комплексные коэффициенты. Беря шпур от  $F$ , находим:

$$a = 0.$$

Заметим теперь, что произведения  $\gamma^k O$ , где  $O$  — любая из 16 матриц (7), не содержат единичной матрицы  $I$ , за единственным исключением  $O = \gamma^k$ . Поэтому, взяв шпур от произведения  $\gamma^k F$ , получаем, что  $b^k = 0$ . Подобным образом беря последовательно шпурь от произведений  $F$  с каждой из матриц (7), убеждаемся, что все коэффициенты в  $F$  равны нулю. Таким образом, число линейно независимых матриц рассматриваемой алгебры равно 16, а ранг неприводимого представления матриц  $\gamma^k$  в соответствии с (6) равен четырем.

Итак, гиперкомплексные числа  $\gamma^k$  могут быть представлены в виде *четырёхрядных квадратных матриц*. Из определения (2) вытекает, что четыре матрицы  $\gamma^k$  могут быть выбраны унитарными, если условия эрмитова сопряжения наложить в виде

$$\gamma^{\dagger k} = \gamma^k. \quad (11)$$

(Здесь под матрицей  $a$ , эрмитово-сопряженной с  $a$ , как обычно понимается матрица, получаемая из  $a$  операцией комплексного сопряжения ее элементов с последующей транспозицией строк и столбцов, т. е.  $a_{\alpha\beta}^{\dagger} = a_{\beta\alpha}^*$ .)

Также нетрудно проверить, что матрица  $\gamma^5$  антикоммутирует с  $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ , а ее квадрат равен  $+1$ , т. е.

$$\gamma^k \gamma^l + \gamma^l \gamma^k = 2g^{kl} \quad (k, l = 0, 1, 2, 3, 5), \quad (12)$$

где, по определению,

$$g^{55} = +1. \quad (13)$$

При этом

$$\gamma^{\dagger k} = g_{kn} \gamma^n = \gamma_k \quad (k = 0, 1, 2, 3, 5). \quad (14)$$

Из свойства четырехрядности матриц  $\gamma$  вытекает далее, что шпур единичной матрицы равен четырем, т. е.

$$\text{Sp I} = \text{Sp } \gamma^k \gamma_k = 4 \quad (\text{нет суммирования!}) \quad (15)$$

Принимая теперь во внимание доказанное выше равенство нулю шпуров матриц  $\gamma^k$ , а также их произведений  $\sigma^{kl}, D^k$  и используя основную формулу (2), после небольших дополнительных вычислений приходим к следующей совокупности формул:

$$\left. \begin{aligned} \text{Sp } \gamma^k &= 0, \\ \text{Sp } \gamma^k \gamma^l &= 4g^{kl}, \\ \text{Sp } \gamma^k \gamma^l \gamma^m \gamma^n &= 4g^{kl} g^{mn} + 4g^{lm} g^{kn} - 4g^{km} g^{ln} \end{aligned} \right\} (k, l, m, n = 0, 1, 2, 3, 5) \quad (16)$$

и т. д.

Как общее правило, получаем, что шпур произведения нечетного числа матриц  $\gamma$  всегда равен нулю, а шпур произведения четного числа этих матриц выражаются с точностью до множителя 4 через антисимметризованные суммы произведений соответствующего числа множителей  $g^{hl}$ , причем знаки отдельных членов этих сумм определяются четностью соответствующей перестановки индексов.

Заканчивая рассмотрение матриц Дирака, отметим, что основные соотношения (2), а вместе с тем и все полученные выше свойства матриц являются инвариантными относительно унитарного преобразования

$$\gamma^k \rightarrow O \gamma^k O^{-1}, \quad (17)$$

где  $O$  — произвольная неособенная (т. е. обладающая обратной) матрица, которую можно считать унитарной.

Отсюда следует, что вообще матрицы  $\gamma$  определены с точностью до унитарного преобразования и конкретное представление этих матриц может быть выбрано различными способами. Обычно употребляют представление матриц Дирака, в котором  $\gamma^0$  является

диагональной:

$$\left. \begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Это представление матриц  $\gamma$  связано с иногда употребляемыми матрицами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\sigma$ ,  $\rho$  посредством соотношений

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \gamma_0 \gamma^n \quad (n = 1, 2, 3), & \beta &= \gamma^0, \\ \sigma_\nu &= \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^0 \quad (\nu = 1, 2, 3), & \sigma_1 &= \sigma^{23}, & \sigma_2 &= \sigma^{31}, & \sigma_3 &= \sigma^{12}, \\ \rho_1 &= -\gamma^5, & \rho_2 &= i\gamma^0 \gamma^5, & \rho_3 &= \gamma^0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Все остальные представления могут быть получены из (18) с помощью преобразования (17).

**6.3. Уравнение Дирака.** Вернемся к рассмотрению уравнений Дирака (5). Замечая, что схема матриц Дирака инвариантна относительно изменения знака  $\gamma$  (преобразование (17) при  $O = \gamma^5$ ), приходим к выводу, что знак перед массой в операторе Дирака не является существенным. Обычно основное уравнение Дирака записывают в виде

$$\left( i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - m \right) \psi(x) = 0. \quad (20)$$

Второе, сопряженное уравнение Дирака может быть получено из (20) следующим образом. Беря эрмитово сопряжение от (20), имеем с учетом (14)

$$i \frac{\partial \psi^*}{\partial x^n} \gamma^n + m \psi^* = i \sum_n g^{nn} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^n} \gamma^n + m \psi^* = 0.$$

Полученное уравнение для  $\psi^*$ , однако, не обладает правильной формой, отличаясь от первого уравнения (5) множителем  $g^{nn}$  под знаком суммы. Для того чтобы устранить этот недостаток, можно, например, умножить его справа на матрицу  $\gamma^0$ . После выполнения коммутаций дираковских матриц под знаком суммы получаем уравнение

$$i \frac{\partial \psi^*}{\partial x^n} \gamma^n + m \psi^* = 0, \quad (21)$$



обладающее правильной формой. Входящая сюда функция  $\bar{\psi}$  определена соотношением

$$\bar{\psi}(x) = \psi^*(x) \gamma^0 \quad (22)$$

и называется «сопряженной» (точнее, *дираковски-сопряженной*) относительно  $\psi$ . Соответственно этому уравнение (21) называется «сопряженным» относительно (20). Ниже будет показано (см. § 7), что, подобно (4.36), функция  $\psi$  делает возможными введение лагранжиана и построение динамических переменных.

В связи с тем, что ранг матриц Дирака  $\gamma$  равен четырем, волновые функции  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  являются *четырёхкомпонентными* и иногда представляются в виде *четырёхкомпонентного столбца* и *четырёхкомпонентной строки* соответственно. При всей своей наглядности представление  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  в виде строк и столбцов может, иногда, приводить к некоторой путанице (например, при введении операции зарядового сопряжения, см. главу II, § 13). Практически достаточно иметь в виду, что, расписывая матричную форму уравнения Дирака (20), мы получаем четыре уравнения

$$\left( i\gamma_{\alpha\beta}^n \frac{\partial}{\partial x^n} - m \mathbf{1}_{\alpha\beta} \right) \psi_{\beta}(x) = 0$$

для четырех компонент  $\psi_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ). Очевидно, что сопряженное уравнение (21) также может быть записано в компонентах.

**6.4. Трансформационные свойства спинорного поля.** Обратимся к рассмотрению преобразований спинорных волновых функций при лоренцевых преобразованиях системы отсчета. Заметим при этом, что в отличие от ранее рассмотренных тензорных представлений, когда уравнения поля в силу ковариантности оператора Клейна — Гордона автоматически являлись ковариантными, условия ковариантности уравнений Дирака (20), (21) должны быть рассмотрены особо.

Как известно, уравнение называется *ковариантным*, если после преобразования, т. е. записанное в преобразованных координатах и функциях, оно имеет ту же форму, что и до преобразования.

При пространственно-временных трансляциях

$$x^k \rightarrow x'^k = x^k + a^k$$

оператор Дирака не меняется:

$$i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - m = i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x'^n} - m.$$

Поэтому в соответствии с замечанием, сделанным в § 1.4, следует положить

$$\psi'(x') = \psi(x),$$

так как при этом в новых переменных уравнение имеет старую форму:

$$\left(i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x'^n} - m\right)\psi'(x') = 0, \quad (23)$$

т. е. остается ковариантным.

При бесконечно малых вращениях

$$x \rightarrow x' = x + \delta x, \quad \delta x^k = x^n \omega^k_n = g^{kl} x^n \omega_{ln}, \quad \omega_{kn} + \omega_{nk} = 0 \quad (24)$$

оператор Дирака уже не является ковариантным

$$\left(i\gamma^k \frac{\partial}{\partial x'^k} - m\right) = i\gamma^n \left(\frac{\partial}{\partial x^n} - \omega^k_n \frac{\partial}{\partial x^k}\right) - m,$$

ввиду чего закон преобразования спинорной волновой функции имеет более сложную матричную структуру (1.6):

$$\psi'(x') = \Lambda \psi(x). \quad (25)$$

Для установления связи матрицы преобразования  $\Lambda$  с матрицами Дирака и параметрами преобразования будем исходить из условия ковариантности уравнения Дирака, полагая, что в преобразованных переменных оно имеет вид (23). Умножая (23) слева на  $\Lambda^{-1}$ , мы получим исходное уравнение (20) в том случае, если выполняется соотношение

$$\Lambda^{-1} \gamma^n \Lambda = \gamma^n + \gamma^k \omega^n_k \quad (n, k = 0, 1, 2, 3). \quad (26)$$

При этом члены первого порядка малости по  $\omega$  взаимно сокращаются и, пренебрегая членами второго порядка, мы получаем:

$$\Lambda^{-1} \left(i\gamma^k \frac{\partial}{\partial x'^k} - m\right) \psi'(x') = \left(i\gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - m\right) \psi(x) = 0.$$

Представляя матрицу  $\Lambda$  в виде

$$\Lambda = 1 + \lambda^{ik} \omega_{ik}, \quad (27)$$

где коэффициенты разложения  $\lambda^{ik}$  обладают свойством антисимметричности

$$\lambda^{ik} = -\lambda^{ki},$$

находим, что ввиду (26) они подчиняются соотношениям

$$2(\gamma^n \lambda^{kl} - \lambda^{kl} \gamma^n) = g^{nk} \gamma^l - g^{nl} \gamma^k,$$

которые вместе с условиями антисимметричности дают:

$$4\lambda^{kl} = \gamma^k \gamma^l = -i\sigma^{kl} = i\sigma^{lk}. \quad (28)$$

Формулы (27), (28) дают в явном виде матрицу преобразования  $\Lambda$  при бесконечно малых преобразованиях поворота. Оказывается, однако, что с помощью этих формул можно получить также явный вид матрицы  $\Lambda$  и для конечных преобразований. Воспользуемся

для этого групповым свойством оператора  $\Lambda(\varphi)$ , где  $\varphi$  — угол поворота в одной из плоскостей  $x^k x^l$ . Из аддитивности поворотов следует, что

$$\Lambda(\varphi_1 + \varphi_2)\psi = \Lambda(\varphi_1)\Lambda(\varphi_2)\psi, \quad \text{т. е.} \quad \Lambda(\varphi_1 + \varphi_2) = \Lambda(\varphi_1)\Lambda(\varphi_2).$$

Полагая здесь  $\varphi_1 = \varphi$ ,  $\varphi_2 = d\varphi$ , после небольшой выкладки

$$\Lambda(\varphi + d\varphi) = \Lambda(\varphi)\Lambda(d\varphi), \quad \frac{\Lambda(\varphi + d\varphi) - \Lambda(\varphi)}{d\varphi} = \Lambda(\varphi) \frac{\Lambda(d\varphi) - 1}{d\varphi}$$

получаем дифференциальное уравнение группы поворотов

$$\frac{d\Lambda(\varphi)}{d\varphi} = \Lambda(\varphi) 2\lambda_{lk}.$$

Интегрируя это уравнение с учетом (28) и вытекающего из (27) начального условия  $\Lambda(0) = 1$ , находим:

$$\Lambda^{lk}(\varphi) = \exp \frac{1}{2} [\gamma^l \gamma^k \varphi] = e^{i\sigma^{kl} \frac{\varphi}{2}}. \quad (29)$$

Таким образом, оператор  $\Lambda(\varphi)$  как бы производит поворот на «половинный» угол  $\varphi/2$ .

Проведенный здесь расчет, которым мы получили формулу (29), является частным случаем известного в теории групп рассуждения, с помощью которого по операторам бесконечно малых преобразований непрерывной группы восстанавливается вся группа в целом.

Рассмотрим частные случаи формулы (29). Для пространственного поворота в плоскости  $x^\alpha x^\beta$  ( $\alpha \neq \beta$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ )

$$x'^\alpha = x^\alpha \cos \varphi - x^\beta \sin \varphi, \quad x'^\beta = x^\beta \cos \varphi + x^\alpha \sin \varphi; \quad (30)$$

находим отсюда:

$$\left. \begin{aligned} \psi'(x') &= \Lambda_{\alpha\beta} \psi(x), \\ \Lambda_{\alpha\beta} &= e^{-i\sigma^{\alpha\beta} \frac{\varphi}{2}} = \cos \frac{\varphi}{2} - i\sigma^{\alpha\beta} \sin \frac{\varphi}{2}, \\ \Lambda_{\alpha\beta}^{-1} &= e^{i\sigma^{\alpha\beta} \frac{\varphi}{2}} = \cos \frac{\varphi}{2} + i\sigma^{\alpha\beta} \sin \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Для лоренцева поворота в плоскости  $x^0 x^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ )

$$\left. \begin{aligned} x'^0 &= x^0 \operatorname{ch} \varphi + x^\alpha \operatorname{sh} \varphi, \\ x'^\alpha &= x^\alpha \operatorname{ch} \varphi + x^0 \operatorname{sh} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (\operatorname{th} \varphi = v) \quad (32)$$

получаем соответственно

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{0\alpha} &= e^{-i\sigma^{0\alpha} \frac{\varphi}{2}} = \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2} - i\sigma^{0\alpha} \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2}, \\ \Lambda_{0\alpha}^{-1} &= e^{i\sigma^{0\alpha} \frac{\varphi}{2}} = \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2} + i\sigma^{0\alpha} \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

При преобразовании экспонент в (31) и (33) были использованы свойства матриц  $(\sigma^{\alpha\beta})^2 = 1$ ,  $(\sigma^{0\alpha})^2 = -1$  (не суммировать по  $\alpha$ ,  $\beta$ ).

Как можно было заметить из (26), выражение  $\Lambda^{-1}\gamma^n\Lambda$  при бесконечно малом преобразовании (24) выражается через матрицы  $\gamma^n$  той же линейной формой, что и преобразованные координаты  $x'$  — через  $x$ . Образую выражения  $\Lambda^{-1}\gamma^n\Lambda$  с помощью (31) и (33) и сравнивая с (30) и (32), находим, что то же самое имеет место и для конечных преобразований вращения.

Из формул пространственного вращения (31) непосредственно вытекает неоднозначность спинорных функций. Полагая  $\varphi = 2\pi$ , находим, что полному пространственному обороту системы координат соответствует матрица преобразования  $\Lambda(2\pi) = -1$ , т. е. при таком преобразовании функция поля меняет знак. Поскольку, однако, преобразование поворота на  $2\pi$  приводит систему координат в первоначальное положение, т. е. совпадает с тождественным преобразованием, то отсюда следует, что спинорные волновые функции всегда определены с точностью до знака.

Приведем еще вид матрицы  $\Lambda$  для преобразований отражения координатных осей. Замечая, что формулы преобразования при отражениях четного числа различных пространственных осей, сводящихся к поворотам, вытекают из (31), ограничимся преобразованием отражения всех трех пространственных осей ( $P$ -преобразование):

$$\left. \begin{aligned} x'^\alpha &= -x^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad x'^0 = x^0, \\ \psi'(x') &= \eta(P) \Lambda_{123} \psi(x), \quad \Lambda_{123} = \gamma^0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

В силу двужначности спинорного представления фазовый множитель  $\eta(P)$  подчиняется условию  $\eta^2(P) = \pm 1$ .

Трансформационные свойства сопряженного спинора  $\psi$  вытекают из его определения (22). Беря эрмитово сопряжение от (25) и умножая справа на  $\gamma^0$ , получаем:

$$\overset{*}{\psi}'(x') \gamma^0 = \bar{\psi}'(x') = \overset{*}{\psi} \overset{\dagger}{\Lambda} \gamma^0 = \psi(x) \gamma^0 \overset{\dagger}{\Lambda} \gamma^0, \quad (35)$$

т. е. что сопряженный спинор преобразуется матрицей  $\gamma^0 \overset{\dagger}{\Lambda} \gamma^0$ . Нетрудно убедиться, далее, что для преобразований из полной группы Лоренца всегда выполняется соотношение

$$\gamma^0 \overset{\dagger}{\Lambda} \gamma^0 = \Lambda^{-1}, \quad (36)$$

в силу которого закон трансформации сопряженного спинора для этой группы будет

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) \Lambda^{-1}. \quad (37)$$

Для доказательства (36) заметим, что его выполнение при преобразовании отражения пространственных осей (34) является очевид-

ным, а его справедливость при поворотах может быть установлена с помощью вытекающего из (2) и (14) соотношения

$$\gamma^0 \gamma^k \gamma^0 = \gamma^k. \quad (38)$$

Ввиду того, что матрицы преобразований поворотов согласно (31) и (33) являются линейными функциями квадратичных комбинаций дираковских матриц, находим с помощью (38)

$$\gamma^0 \Lambda (\gamma^k \gamma^l) \gamma^0 = \gamma^0 \Lambda (\gamma^l \gamma^k) \gamma^0 = \Lambda (\gamma^0 \gamma^l \gamma^0 \cdot \gamma^0 \gamma^k \gamma^0) = \Lambda (\gamma^l \gamma^k) = \Lambda (-\gamma^k \gamma^l),$$

что, согласно вторым формулам (31) и (33), эквивалентно (36) \*).

На основании изложенного можно сказать, что при произвольном однородном лоренцевом преобразовании системы координат

$$x' = Lx, \quad x'^n = L^{nm} x_m \quad (40)$$

спинорная волновая функция  $\psi(x)$  и сопряженная ей функция  $\bar{\psi}(x)$  преобразуются с помощью взаимно обратных матричных операторов  $\Lambda$  и  $\Lambda^{-1}$ , обладающих свойством

$$\Lambda^{-1} \gamma^n \Lambda = L^{nm} \gamma_m. \quad (41)$$

Покажем теперь, что из совокупности законов преобразования (25), (37) и соотношения (41) вытекает, что *квадратичные формы спиноров  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  преобразуются по тензорным представлениям группы Лоренца.*

Рассмотрим для этого квадратичную форму

$$\bar{\psi}(x) O \psi(x), \quad (42)$$

где  $O$  — некоторая, пока произвольная, матрица, составленная из произведений матриц  $\gamma$ . При лоренцевом преобразовании (40) на основании (25) и (37) находим:

$$\bar{\psi}'(x') O \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \Lambda^{-1} O \Lambda \psi(x).$$

Обратимся к простейшим частным случаям:

а)  $O = 1$ ;  $\bar{\psi}'(x') \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \psi(x)$ , откуда ясно, что форма  $\bar{\psi} \psi$  представляет собой скаляр;

б)  $O = \gamma^n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ); с помощью (41) находим:

$$\bar{\psi}'(x') \gamma^n \psi'(x') = L^{nm} \bar{\psi}(x) \gamma_m \psi(x),$$

откуда следует, что четверка величин  $\bar{\psi} \gamma^n \psi$  образует контравариантный 4-вектор.

\*) Произведя аналогичный расчет для преобразования, включающего отражение оси времени, мы получили бы вместо (37) соотношение

$$\bar{\psi}'(x') = -\bar{\psi}(x) \Lambda^{-1}. \quad (39)$$

Аналогичным образом можно показать, что величины

$$\psi(x) \frac{\gamma^n \gamma^m - \gamma^m \gamma^n}{2} \psi(x) = i \psi(x) \sigma^{mn} \psi(x)$$

представляют собой компоненты антисимметричного контравариантного тензора второго ранга и т. д.

Особый интерес представляют случаи, когда в  $O$  входит множителем матрица  $\gamma^5$ . Дело в том, что, как нетрудно проверить, при собственных преобразованиях Лоренца  $\gamma^5$  коммутирует с  $\Lambda$ :

$$\Lambda^{-1} \gamma^5 \Lambda = \gamma^5,$$

а при несобственных — антикоммутирует:

$$\Lambda^{-1} \gamma^5 \Lambda = -\gamma^5.$$

Поэтому форма  $\psi(x) \gamma^5 \psi(x)$  в первом случае ведет себя как скаляр, а во втором — меняет знак. Ясно, что она представляет собой *псевдоскаляр*. Подобным образом четыре величины

$$\bar{\psi}(x) \gamma^5 \gamma^n \psi(x)$$

при поворотах преобразуются как компоненты 4-вектора, а при отражениях дополнительно меняют знак. Они образуют *псевдовектор*.

Аналогичными рассуждениями может быть без труда установлена тензорная природа и более сложных форм типа (42). Мы, однако, на этом закончим рассмотрение свойств матриц  $\gamma$  и законов преобразования спинорных функций, так как приведенный материал окажется вполне достаточным для дальнейшего изложения.

## § 7. Спинорное поле. Свойства решений и динамические инварианты

7.1. Импульсное представление и матричная структура. Перейдем к рассмотрению свойств решений матричного уравнения Дирака (6.20)

$$\left( i \gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - m \right) \psi(x) = 0.$$

Каждая из 4-х компонент  $\psi$  удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона. В самом деле, действуя на (6.20) слева оператором  $(i\hat{\partial} + m)$ , находим с учетом (6.3):

$$\begin{aligned} \left( i \gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} + m \right) \left( i \gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - m \right) \psi(x) &\equiv (i\hat{\partial} + m) (i\hat{\partial} - m) \psi(x) = \\ &= (\square - m^2) \psi(x) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому  $\psi(x)$  может быть представлена в виде

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikx} \delta(k^2 - m^2) \psi(k), \quad (1)$$

причем импульсная амплитуда  $\psi(k)$ , по определению, удовлетворяет уравнению

$$(\hat{k} + m) \psi(k) |_{k^2 = m^2} = 0. \quad (2)$$

Здесь введено обозначение

$$\hat{a} = a^n \gamma_n = (a\gamma) = a^0 \gamma_0 - a\gamma,$$

которым мы часто будем пользоваться при дальнейшем изложении.

Разлагая, как обычно, функцию  $\psi(x)$  на положительно- и отрицательно-частотную части,

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x), \quad (3)$$

$$\psi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikx} \delta(k^2 - m^2) \theta(\pm k^0) \psi(k), \quad (4)$$

и интегрируя по  $k^0$ , получаем формулы трехмерного импульсного представления в виде

$$\psi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{\pm ikx} \psi^\pm(k). \quad (5)$$

Здесь приняты обозначения

$$\left. \begin{aligned} \psi^+(k) &= \frac{\psi(k)}{2k^0}, \\ \psi^-(k) &= \frac{\psi(-k)}{2k^0} \end{aligned} \right\} (k^0 = \sqrt{k^2 + m^2}). \quad (6)$$

Трехмерные амплитуды  $\psi^+(k)$  и  $\psi^-(k)$  удовлетворяют матричным уравнениям

$$(m + \hat{k}) \psi^+(k) = 0, \quad (m - \hat{k}) \psi^-(k) = 0. \quad (7)$$

Разные знаки  $\hat{k}$  в этих уравнениях обусловлены различием знаков в подынтегральных экспонентах в формулах (5).

Матричная структура  $\psi^+$  и  $\psi^-$  зависит от представления дираковских матриц  $\gamma$  и может быть определена следующим образом. В силу установленной выше ковариантности уравнения (2) его можно рассматривать в какой-либо фиксированной системе отсчета, имея в виду, что переход к любой другой системе может быть всегда осуществлен с помощью изложенных в предыдущем параграфе преобразований. Выбирая в качестве таковой систему, в которой  $k = 0$ , находим из (2) и (7)

$$\begin{aligned} (\gamma^0 k^0 + m) \psi(k^0) |_{k^0 = m} &= 0, \\ (\gamma^0 + 1) \psi^+(0) &= 0, \\ (\gamma^0 - 1) \psi^-(0) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда в представлении (6.18) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\alpha}^{+}(0) &= c_3 \delta_{\alpha}^3 + c_4 \delta_{\alpha}^4, \\ \psi_{\beta}^{-}(0) &= c_1 \delta_{\beta}^1 + c_2 \delta_{\beta}^2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь  $\alpha, \beta$  — матричные индексы, а  $\delta_k^i$  — символы Кронекера.

Решение для произвольного отличного от нуля  $k$  может быть получено из (8) соответствующим лоренцевым преобразованием.

Уравнения, которым удовлетворяют  $\psi^{+}$  и  $\psi^{-}$ , могут быть также представлены в форме

$$\left. \begin{aligned} (\gamma^0 k^0 - \gamma k + m) \psi^{+}(k) &= 0, \\ (-\gamma^0 k^0 - \gamma k + m) \psi^{-}(-k) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (k^0 = +\sqrt{k^2 + m^2}),$$

в которой они отличаются друг от друга лишь знаком при  $k^0$ . Каждое из них, как только что установлено, обладает двумя линейно независимыми решениями. Отсюда вытекает, что уравнение Дирака для каждого заданного значения 4-вектора  $k$  (знак компоненты  $k^0$  фиксирован) обладает лишь двумя линейно независимыми решениями.

Теперь нетрудно установить трансформационную природу функций  $\psi^{+}$  и  $\psi^{-}$ . Рассмотрим для этого совокупность преобразований, состоящую из трехмерных чисто пространственных вращений и отражений пространственных осей. Она образует группу  $G$ , являющуюся подгруппой группы Лоренца. Ввиду того, что преобразования из группы  $G$  не затрагивают координату времени  $x^0$ , они оставляют также инвариантной матричную структуру разбегания (3) функции поля на частотные части. Иными словами, при трехмерных вращении и пространственных отражениях двухкомпонентные величины  $\psi^{+}$  и  $\psi^{-}$  преобразуются независимо друг от друга. Поэтому каждая из них реализует двумерное представление группы вращений и отражений трехмерного пространства. Такие представления называются *спинорными*, а величины, преобразующиеся по ним, — *спинорами трехмерного пространства*.

Таким образом, четырехкомпонентная функция поля  $\psi$ , преобразующаяся по спинорному представлению группы Лоренца и представляющая собой поэтому *спинор четырехмерного псевдоевклидова пространства*, на котором определена группа Лоренца, *разлагается относительно группы трехмерных вращений и отражений на две неприводимые части, которые являются спинорами трехмерного пространства* \*).

Факт независимости преобразования частотных составляющих функций поля  $\psi^{+}$  и  $\psi^{-}$  при трехмерных вращении и отражениях в используемом нами представлении (6.18) немедленно проверяется следующим образом.

В соответствии с (8) полевая функция  $\psi$  может быть при  $k = 0$  представлена в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^{-} \\ \psi^{+} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $\psi^{-}$  и  $\psi^{+}$  двухкомпонентны

\*) Отметим, что употребляемая нами терминология заимствована из книги К а р т а н а (1938). Некоторые авторы употребляют термин «спинор» для двухкомпонентного спинора трехмерного пространства. В этих случаях четырехкомпонентный спинор группы Лоренца именуется «биспинором».



С другой стороны, записывая матрицы Дирака (6.18) с помощью *двухрядных матриц Паули*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_1 = i \sigma_3, \dots, \quad (10)$$

в «расщепленном виде» \*)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\alpha \\ -\sigma_\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha=1, 2, 3), \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

убеждаемся, что матрицы преобразований трехмерных вращений и отражений в соответствии с (6.31) и (6.34) в «расщепленном» представлении (9) оказываются диагональными:

$$\gamma^1 \gamma^2 = -i \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 \gamma^3 = -i \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 \gamma^1 = -i \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

откуда непосредственно вытекает независимость преобразований  $\psi^+$  и  $\psi^-$ .

Соответственно этому сопряженный спинор  $\bar{\psi}$  при фиксированном знаке  $k^0$  также обладает двумя линейно независимыми решениями. Из комплексности рассматриваемых решений уравнения Дирака вытекает, что они могут описывать положительно и отрицательно заряженные частицы. Из наличия двух линейно независимых решений вытекает, что указанные частицы могут находиться в двух различных состояниях, отличающихся, как будет показано ниже, знаком проекции спина на направление движения.

**7.2. Разложения по спиновым состояниям и соотношения нормировки и ортогональности.** Обозначая нормированные линейно независимые решения для  $k^0 > 0$ , т. е. для первого из уравнений (7), через  $v^{\nu,+}(\mathbf{k})$ , а для  $k^0 < 0$ , т. е. для второго из уравнений (7), через  $v^{\nu,-}(\mathbf{k})$  ( $\nu = 1, 2$ ), запишем разложения функций  $\psi^+(\mathbf{k})$  и  $\psi^-(\mathbf{k})$  по спиновым состояниям в виде

$$\psi_\alpha^\pm(\mathbf{k}) = \sum_{\nu=1,2} a_{\nu}^{\pm}(\mathbf{k}) v_{\alpha}^{\nu,\pm}(\mathbf{k}). \quad (13)$$

Соответственно для сопряженного спинора

$$\bar{\psi}^\pm(\mathbf{k}) = \sum_{\nu=1,2} \bar{a}_{\nu}^{\pm}(\mathbf{k}) \bar{v}^{\nu,\pm}(\mathbf{k}). \quad (14)$$

Так как  $\bar{\psi}^+$  и  $\bar{\psi}^-$  представляют собой положительно- и отрицательно-частотные части функции  $\bar{\psi}$ , условия эрмитова сопряжения для нормированных спиноров  $v$  имеют следующий вид:

$$(v^{\nu,\pm}(\mathbf{k}))^* = v^{\nu,\mp}(\mathbf{k}). \quad (15)$$

\*) Здесь принято сокращенное обозначение для единичной и нулевой двухрядных матриц:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому условия ортонормированности спиноров  $v$  можно записать в форме

$$\bar{v}^{\nu, \pm}(\mathbf{k}) v^{\mu, \mp}(\mathbf{k}) \equiv \sum_{\alpha=1, 2, 3, 4} \bar{v}_{\alpha}^{\nu, \pm}(\mathbf{k}) v_{\alpha}^{\mu, \mp}(\mathbf{k}) = \delta^{\mu\nu}. \quad (16)$$

Путем чисто алгебраических преобразований из (15) и (16) и уравнений Дирака можно получить ряд соотношений для квадратичных форм спиноров  $v$  и  $\bar{v} = \bar{v}\gamma^0$ , важнейшими из которых являются:

условие ортонормированности для дираковски-сопряженных спиноров

$$\bar{v}^{\nu, \pm}(\mathbf{k}) v^{\mu, \mp}(\mathbf{k}) = \bar{v}^{\nu, \pm}(\mathbf{k}) \gamma^0 v^{\mu, \mp}(\mathbf{k}) = \pm \frac{m}{k^0} \delta^{\mu\nu}, \quad (17)$$

условие взаимной ортогональности спиноров  $v$  с аргументами, отличающимися знаками,

$$\bar{v}^{\nu, \pm}(\mathbf{k}) v^{\mu, \pm}(-\mathbf{k}) = 0; \quad (18)$$

соотношения

$$\bar{v}^{\nu, \pm}(\mathbf{k}) [(k^{\alpha}\gamma^{\beta} - k^{\beta}\gamma^{\alpha} \pm m\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}) v^{\mu, \pm}(-\mathbf{k}) = 0, \quad (19a)$$

$$\sum_{\alpha=1, 2, 3} k^{\alpha} [\bar{v}^{\nu, \pm}(\mathbf{k}) (\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} - \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}) v^{\mu, \mp}(\mathbf{k})] = 0 \quad \left. \vphantom{\sum} \right\} (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (19b)$$

и, наконец, формулы суммирования по спиновому индексу

$$\sum_{\nu=1, 2} v_{\alpha}^{\nu, +}(\mathbf{k}) \bar{v}_{\beta}^{\nu, -}(\mathbf{k}) = \frac{(\hat{k} - m)_{\alpha\beta}}{2k^0}, \quad (20)$$

$$\sum_{\nu=1, 2} v_{\alpha}^{\nu, -}(\mathbf{k}) \bar{v}_{\beta}^{\nu, +}(\mathbf{k}) = \frac{(\hat{k} + m)_{\alpha\beta}}{2k^0} \quad \left. \vphantom{\sum} \right\} (k^0 = +\sqrt{k^2 + m^2}). \quad (21)$$

Для доказательства соотношения (17) будем исходить из уравнений Дирака

$$\left. \begin{aligned} (\gamma^0 k^0 - \gamma\mathbf{k} + m) v^{\nu, +}(\mathbf{k}) &= 0, \\ (\gamma^0 k^0 + \gamma\mathbf{k} - m) v^{\mu, -}(-\mathbf{k}) &= 0 \end{aligned} \right\} (k^0 = \sqrt{k^2 + m^2}). \quad (22)$$

Умножая первое из этих уравнений слева на  $\bar{v}^{\mu, -}(\mathbf{k})$ , имеем:

$$k^0 \bar{v}^{\mu, -}(\mathbf{k}) v^{\nu, +}(\mathbf{k}) - k^{\mu} \bar{v}^{\mu, -}(\mathbf{k}) \gamma^{\nu} v^{\nu, +}(\mathbf{k}) + m \bar{v}^{\mu, -}(\mathbf{k}) v^{\nu, +}(\mathbf{k}) = 0.$$

Выполняя затем операцию эрмитова сопряжения с учетом свойств эрмитовости дираковских матриц (6.14), получаем выражение

$$k^0 v^{\nu, -}(\mathbf{k}) v^{\mu, +}(\mathbf{k}) + k^{\nu} v^{\nu, -}(\mathbf{k}) \gamma^{\mu} v^{\nu, +}(\mathbf{k}) + m v^{\nu, -}(\mathbf{k}) v^{\mu, +}(\mathbf{k}) = 0,$$

из сравнения которого с первоначальным непосредственно вытекает:

$${}^*v^{\nu} - (\mathbf{k}) \gamma^0 v^{\mu} + (\mathbf{k}) = -\frac{m}{k^0} \delta^{\mu\nu}.$$

Аналогичным путем доказывается и второе соотношение (17).

Для доказательства свойства ортогональности (18) умножим первое из уравнений (22) слева на  $\bar{v}^{\mu,+}(-\mathbf{k})$ :

$$k^0 {}^*v^{\mu,+} + (-\mathbf{k}) v^{\nu,+} + (\mathbf{k}) - \bar{v}^{\mu,+} + (-\mathbf{k}) (\gamma^0 \gamma \mathbf{k} - m \gamma^0) v^{\nu,+} + (\mathbf{k}) = 0.$$

Умножая затем второе из уравнений (22) слева на  $v^{\nu,-}(\mathbf{k})$  и выполняя операцию эрмитова сопряжения, приходим к соотношению

$$k^0 {}^*v^{\mu,+} + (-\mathbf{k}) v^{\nu,+} + (\mathbf{k}) + \bar{v}^{\mu,+} + (-\mathbf{k}) (\gamma^0 \gamma \mathbf{k} - m \gamma^0) v^{\nu,+} + (\mathbf{k}) = 0,$$

из сравнения которого с предыдущим непосредственно вытекает одно из соотношений (18)

$${}^*v^{\mu,+} + (-\mathbf{k}) v^{\nu,+} + (\mathbf{k}) = 0.$$

Вывод соотношений (19а) и (19б) выполняется с помощью тех же приемов умножения уравнений Дирака на произведения матрицы  $\gamma^{\mu}$  и на сопряженные спиноры и эрмитова сопряжения полученных этим путем выражений. Ввиду относительной громоздкости выкладки вывод соотношений (19) мы здесь опускаем.

Для получения формул спинового суммирования (20) и (21) рассмотрим обычную функцию Грина для уравнений Дирака (2), удовлетворяющую неоднородному уравнению

$$G(k) (\hat{k} + m) = (\hat{k} + m) G(k) = 1 \quad (23)$$

и, следовательно, имеющую вид

$$G(k) = (\hat{k} + m)^{-1} = \frac{\hat{k} - m}{k^2 - m^2}. \quad (24)$$

В последних уравнениях  $k^0$  не равно корню  $\pm \sqrt{k^2 + m^2}$ , который мы обозначим здесь через  $\lambda$ :

$$\lambda(k) = \sqrt{k^2 + m^2}.$$

Напротив, число  $\pm \lambda$  имеет для  $k^0$  характер собственного значения соответствующего однородного уравнения. Поэтому  $G(k)$  при  $k^0 = \pm \lambda$  даже не определена. Однако при  $k^0 \neq \pm \lambda$  функция  $G(k)$  может быть разложена по полной системе решений однородного уравнения

$$(\hat{k} + m) v = 0,$$

состоящей в соответствии с (22) из четырех решений  $v^{\nu,+}(\mathbf{k})$ ,  $v^{\nu,-}(-\mathbf{k})$  ( $\nu = 1, 2$ ). При этом получаем разложение

$$G_{\alpha\beta}(k) = \sum_{\nu=1,2} (v_{\alpha}^{\nu,+}(\mathbf{k}) \omega_{\beta}^{\nu,+}(\mathbf{k}) + v_{\alpha}^{\nu,-}(-\mathbf{k}) \omega_{\beta}^{\nu,-}(\mathbf{k})).$$

Если подставить его в (23):

$$(\gamma^0 k^0 - \gamma \mathbf{k} + m) \left[ \sum_{\nu=1,2} (v_{\alpha}^{\nu,+}(\mathbf{k}) \omega_{\beta}^{\nu,+}(\mathbf{k}) + v_{\alpha}^{\nu,-}(-\mathbf{k}) \omega_{\beta}^{\nu,-}(\mathbf{k})) \right] = 1$$

и использовать уравнения поля

$$(\gamma k - m) v^{\nu,+}(k) = \gamma^0 \lambda v^{\nu,+}(k); \quad (\gamma k - m) v^{\nu,-}(-k) = -\gamma^0 \lambda v^{\nu,-}(-k),$$

то найдем

$$(k^0 - \lambda) \gamma^0 \sum_{\nu} v^{\nu,+}(k) \omega^{\nu,+}(k) + (k^0 + \lambda) \gamma^0 \sum_{\nu} v^{\nu,-}(-k) \omega^{\nu,-}(k) = 1 \quad (25)$$

Умножая (25) слева на  $\bar{v}^{\mu,+}(-k)$  с учетом свойств нормировки (16) и ортогональности (18), получаем выражение для коэффициента  $\omega^{\nu,-}$ :

$$\omega^{\nu,-}(k) = \frac{\bar{v}^{\nu,+}(-k)}{k^0 + \lambda(k)}.$$

Определяя подобным образом второй коэффициент  $\omega^{\nu,+}$ , приходим к следующему выражению для  $G$ :

$$G(k) = \sum_{\nu} \frac{(k^0 + \lambda) v^{\nu,+}(k) \bar{v}^{\nu,-}(k) + (k^0 - \lambda) v^{\nu,-}(-k) \bar{v}^{\nu,+}(-k)}{(k^0)^2 - \lambda^2}. \quad (26)$$

Вспомня затем, что  $\lambda^2 = k^2 + m^2$ , и сравнивая (26) и (24) в пределах при  $k^0 \rightarrow +\lambda$  и  $k^0 \rightarrow -\lambda$ , получаем соответственно формулы (20) и (21)

Соотношения (17)–(19) понадобятся нам при вычислении динамических величин спинорного поля (в этом параграфе), а формулы (20) и (21) окажутся полезными при квантовании спинорного поля (глава II) и при вычислении квадратов матричных элементов в теории взаимодействующих полей (глава IV).

**7.3. Лагранжев формализм и инварианты.** Обратимся теперь к лагранжеву формализму. Уравнения Дирака (6.20) и (6.21) могут быть получены с помощью вариационного принципа из следующего лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left( \bar{\psi}(x) \gamma^{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^{\alpha}} \gamma^{\alpha} \psi(x) \right) - m \bar{\psi}(x) \psi(x). \quad (27)$$

Лагранжиан спинорного поля (27) обращается в нуль, если входящие в него функции  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  удовлетворяют уравнениям поля.

Обычным путем получаем из (27) тензор энергии-импульса

$$T^{\mu k} = \frac{i}{2} \left( \bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^k} \gamma^{\mu} \psi(x) \right) \quad (28)$$

и 4-вектор тока

$$J^k(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^k \psi(x). \quad (29)$$

Для вычисления тензора спина заметим, что после выполнения суммирования по спинорным индексам формула (2.15) для спинорного поля может быть записана в виде

$$S^{k,lm} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi / \partial x^k)} A^{\psi,lm} \psi(x) - \bar{\psi}(x) A^{\bar{\psi},lm} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \bar{\psi} / \partial x^k)}.$$

Входящие сюда коэффициенты  $A^{\psi}$  и  $A^{\bar{\psi}}$  с помощью формул (6.27), (6.28) и правил перехода к сопряженному спинору определяются

в виде

$$A\psi \cdot lm = \frac{i}{2} \sigma^{lm}, \quad A\bar{\psi} \cdot lm = -\frac{i}{2} \sigma^{lm},$$

где  $\sigma$  — так называемый «матричный тензор спина», введенный в (6.7):

$$\sigma^{lm} = i \frac{\gamma^l \gamma^m - \gamma^m \gamma^l}{2}. \quad (30)$$

С помощью выписанных формул приходим из лагранжиана (27) к следующему выражению для тензора спинового момента спинорного поля:

$$S^{ml, k} = \frac{1}{4} \bar{\psi}(x) \{ \gamma^k \sigma^{lm} + \sigma^{lm} \gamma^k \} \psi(x). \quad (31)$$

Для выполнения интеграции по трехмерному пространству и получения динамических переменных, как обычно, удобно перейти к трехмерному импульсному представлению:

$$\psi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{\pm ikx} \sum_{\nu=1, 2} a_{\nu}^{\pm}(k) v^{\nu, \pm}(k), \quad (32)$$

$$\bar{\psi}^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{\pm ikx} \sum_{\nu=1, 2} a_{\nu}^{\pm*}(k) \bar{v}^{\nu, \pm}(k). \quad (33)$$

Подставляя (32) и (33) в (28), полагая индекс  $k = 0$  и интегрируя по трехмерному пространству с учетом условия ортонормированности (16), получаем 4-вектор энергии-импульса

$$P^l = \int dx \cdot T^{0l} = \int dk \cdot k^l \sum_{\nu=1, 2} (a_{\nu}^{\dagger}(k) a_{\nu}^{-}(k) - a_{\nu}^{-*}(k) a_{\nu}^{\dagger}(k)), \quad (34)$$

где, как и всюду,  $k^0 = \sqrt{k^2 + m^2}$ .

Принимая во внимание, что согласно (32) и (33) законы эрмитова сопряжения амплитуд  $a^{\dagger}$  и  $a^{\pm}$  имеют вид

$$(a^{\dagger})^* = a^{-} \quad \text{и} \quad (a^{-})^* = a^{\dagger}, \quad (35)$$

убеждаемся, что в классической теории энергия спинорного поля

$$P^0 = \int dk \cdot k^0 \sum_{\nu} (a_{\nu}^{\dagger}(k) a_{\nu}^{-}(k) - a_{\nu}^{-*}(k) a_{\nu}^{\dagger}(k)) \quad (36)$$

не является положительно определенной. Положительная определенность энергии спинорного поля достигается лишь в квантовой теории квантованием по Ферми—Дираку.

Переходя к вычислению вектора спина, отметим, что в соответствии с (6.19) компоненты тензора спина  $\sigma^{lm}$  могут быть выражены

через матрицы  $\alpha_i$  и  $\sigma_i$  следующим образом:

$$(\sigma^{lm}) = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha_1 & i\alpha_2 & i\alpha_3 \\ -i\alpha_1 & 0 & \sigma_3 & -\sigma_2 \\ -i\alpha_2 & -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 \\ -i\alpha_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Поэтому, полагая в (31)  $k = 0$  и  $l, m = 1, 2, 3$ , убеждаемся, что пространственная плотность вектора спина выражается матричным «вектором»  $\sigma$ :

$$S = \frac{1}{2} \int \psi^*(x) \sigma \psi(x) dx. \quad (38)$$

В противоположность спинам векторного и электромагнитного полей вектор спина спинорного поля (38) не сохраняется во времени (что связано с отсутствием симметрии у тензора энергии-импульса). Однако в том случае, когда функции поля  $\psi$ ,  $\psi^*$  не зависят от некоторых координат  $x^0, x^1, \dots$ , можно добиться выполнения «уравнения непрерывности» для отдельных компонент тензора  $S$ , а следовательно, сохранения во времени соответствующих интегралов. Так, полагая  $\partial/\partial x^1 = \partial/\partial x^2 = 0$ , получим:

$$\frac{\partial S^{12, k}}{\partial x^k} = 0,$$

откуда следует, что проекция вектора спина на ось  $x^3$

$$S_3 = \int dx \cdot S^{12, 0}$$

сохраняется во времени. В импульсном представлении это положение соответствует «сохранению проекции вектора спина на направление движения».

Переходя в (38) к трехмерному импульсному представлению и выполняя интегрирование по трехмерному конфигурационному пространству, получаем:

$$S \sim \frac{1}{2} \{ \psi^{*\dagger}(k) \sigma \psi^-(k) + \psi^{*-}(k) \sigma \psi^+(k) + e^{2ik^0 x^0} \psi^{*\dagger}(k) \sigma \psi^+(-k) + \\ + e^{-2ik^0 x^0} \psi^{*-}(k) \sigma \psi^-(-k) \}. \quad (39)$$

Ограничиваясь рассмотрением компоненты  $S_3$ , воспользуемся соотношением (19), которое представим в форме

$$v^{\pm}(k) \sigma v^{\pm}(-k) = \pm \frac{i}{m} v^{\pm}(k) [k \times \gamma] v^{\pm}(-k).$$

В силу этого соотношения в системе отсчета, где  $k_1 = k_2 = 0$ , зависящие от времени члены в  $S_3$  исчезают, и мы приходим

к выражению

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \{ a_{\nu}^{*+}(\mathbf{k}) a_{\mu}^{-}(\mathbf{k}) v^{\nu, +}(\mathbf{k}) + a_{\nu}^{*-}(\mathbf{k}) a_{\mu}^{+}(\mathbf{k}) v^{\nu, -}(\mathbf{k}) + \sigma_3 v^{\mu, +}(\mathbf{k}) + \sigma_3 v^{\mu, -}(\mathbf{k}) \}, \quad (40)$$

для дальнейшей конкретизации которого удобно перейти к какому-либо конкретному представлению матриц Дирака. В используемом нами представлении (6.18) матрица  $\sigma_3$  имеет вид

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выбирая при этом нормированные спиноры в системе  $k_1 = k_2 = 0$  в виде

$$\left. \begin{aligned} v^{1, -} &= N^{-1} \begin{pmatrix} 1, & 0, & \frac{k^3}{k^0 + m}, & 0 \end{pmatrix}, \\ v^{2, -} &= N^{-1} \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & -\frac{k^3}{k^0 + m} \end{pmatrix}, \\ v^{1, +} &= N^{-1} \begin{pmatrix} \frac{k^3}{k^0 + m}, & 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}, \\ v^{2, +} &= N^{-1} \begin{pmatrix} 0, & -\frac{k^3}{k^0 + m}, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где  $N$  — нормировочный множитель, равный

$$N = \sqrt{1 + \left(\frac{k^3}{k^0 + m}\right)^2} = \sqrt{\frac{2k^0}{k^0 + m}},$$

находим, что (40) принимает форму

$$\frac{1}{2} (a_1^{*+} a_1^{-} - a_2^{*+} a_2^{-} + a_1^{*-} a_1^{+} - a_2^{*-} a_2^{+}). \quad (42)$$

Сравнивая выражения для энергии-импульса (34), проекции вектора спина (42) и непосредственно вытекающего из (29) выражения для заряда

$$Q = \int \psi^*(x) \psi(x) dx = \int dk \sum_{\nu} (a_{\nu}^{*+}(\mathbf{k}) a_{\nu}^{-}(\mathbf{k}) + a_{\nu}^{*-}(\mathbf{k}) a_{\nu}^{+}(\mathbf{k})), \quad (43)$$

находим \*), что спинорное поле соответствует заряженным частицам с возможными значениями проекции спина на заданную ось, равными  $\pm 1/2$ . Более детальная классификация возможных значений энергии-импульса, заряда и проекции спина будет проведена после

\*) Принимая во внимание, что квантование спинорного поля (см. ниже § 13) сохраняет структуру выражений (34), (42) и (43), меняя лишь знаки некоторых слагаемых.

квантования (§ 13), где она получит полное и однозначное обоснование.

**7.4. Спинорное поле с массой нуль.** Особый интерес представляет спинорное поле с массой нуль, соответствующее нейтрино.

Полагая в (6.20)  $m = 0$ , получаем

$$i\gamma^n \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^n} = 0. \quad (44)$$

Это уравнение распадается на два независимых двухкомпонентных уравнения. Для того чтобы показать это, воспользуемся тем, что в отсутствие массового члена оператор уравнения Дирака антикоммутирует с матрицей  $\gamma^5$ .

Вводя проекционные операторы

$$P_{\pm} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2},$$

получаем

$$P_{\pm} i\gamma^n \frac{\partial \psi}{\partial x^n} = i\gamma^n P_{\mp} \frac{\partial \psi}{\partial x^n} = 0,$$

т. е. два отдельных уравнения для  $\psi_{\pm} = P_{\pm} \psi$ :

$$i\gamma^n \frac{\partial \psi_{\pm}(x)}{\partial x^n} = 0. \quad (45)$$

В представлении (6.18)

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_1 \mp \psi_3 \\ \psi_2 \mp \psi_4 \\ \mp \psi_1 \pm \psi_3 \\ \mp \psi_2 \pm \psi_4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, каждая из функций  $\psi_+$ ,  $\psi_-$  содержит лишь по две независимых компоненты и в «расщепленном» виде

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ -\varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (46)$$

может быть выражена через двухкомпонентные спиноры

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} (\psi_1 - \psi_3), \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_3).$$

Используя «расщепленную» запись (11) для матриц Дирака, получим вместо (45)

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^0} - \sigma \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_1(x) = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial x^0} + \sigma \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_2(x) = 0. \quad (47)$$

Уравнения такого вида впервые были предложены Вейлем (1929). Для того чтобы уяснить физический смысл двухкомпонентных функций  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , перейдем к импульсному представлению:

$$\varphi_{\alpha}(x) = \varphi_{\alpha}^{+}(x) + \varphi_{\alpha}^{-}(x), \quad \varphi_{\alpha}^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{\pm i p x} \phi_{\alpha}^{\pm}(p) dp. \quad (48)$$



Уравнения Вейля принимают вид

$$(\rho^0 + \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{p}) \phi_{\frac{1}{2}}^{\pm}(\rho) = 0, \quad (49)$$

$$(\rho^0 - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{p}) \phi_{\frac{1}{2}}^{\pm}(\rho) = 0. \quad (50)$$

Как было показано в § 7.3, матричный «вектор»  $\boldsymbol{\sigma}$  описывает спин фермиона. Принимая во внимание, что у безмассового нейтрино  $\rho^0 = |\boldsymbol{p}|$ , видим из уравнений (49), (50), что спин нейтрино может быть направлен либо по направлению его движения, либо наоборот.

Значение удвоенной проекции спина фермиона на направление его импульса  $\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{p} / |\boldsymbol{p}|$  называют *спиральностью*. Экспериментально установлено, что у нейтрино спин направлен антипараллельно импульсу, т. е. спиральность нейтрино равна  $(-1)$ . (Это справедливо как для электронного, так и для мюонного нейтрино.) Как будет показано в § 13.3, функция  $\psi_{-}$  описывает частицы с отрицательной спиральностью, а  $\psi_{+}$  — с положительной.

Поэтому оператор для нейтрино определим следующим образом:

$$\nu(x) = P_{-} \psi(x) = \psi_{-}(x).$$

Он удовлетворяет уравнению Дирака:

$$i \gamma_n \frac{\partial \nu(x)}{\partial x_n} = 0 \quad (51)$$

и дополнительному условию

$$P_{+} \nu(x) = \frac{1 + \gamma^5}{2} \nu(x) = 0. \quad (52)$$

Соответствующая сопряженная функция

$$\bar{\nu}(x) = \nu^{*}(x) \gamma^0$$

удовлетворяет сопряженному уравнению

$$i \frac{\partial \bar{\nu}(x)}{\partial x^n} \gamma^n = 0 \quad (53)$$

и дополнительному условию

$$\bar{\nu}(x) P_{-} = \bar{\nu}(x) \frac{1 - \gamma^5}{2} = 0. \quad (54)$$

Лагранжиан нейтринного поля записывается в виде

$$\mathcal{L}(x) = \frac{i}{2} (\bar{\nu}(x) \gamma^n \nu_{;n}(x) - \bar{\nu}_{;n}(x) \gamma^n \nu(x)). \quad (55)$$

Динамические характеристики нейтринного поля мы рассмотрим после квантования (см. § 13.3).

## § 8. Лагранжиан системы полей

В этом параграфе, не затрагивая вопросов взаимодействия различных полей по существу, мы вкратце рассмотрим общие принципы построения лагранжианов для систем полей и получим некоторые динамические переменные таких систем.

**8.1. Лагранжиан взаимодействия и его симметрия.** При рассмотрении процессов, связанных со взаимодействием различных полей, исходят из лагранжиана

$$\mathcal{L}_{\text{полн}} = \mathcal{L}_{\text{св}} + \mathcal{L}_{\text{вз}}, \quad (1)$$

представляющего сумму лагранжианов свободных полей  $\mathcal{L}_{\text{св}}$  и члена  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$ , именуемого *лагранжианом взаимодействия*.

Лагранжиан взаимодействия  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  должен удовлетворять основному физическому требованию — обладать свойством релятивистской инвариантности. Он может поэтому представлять собой любую *инвариантную* алгебраическую или интегральную комбинацию функций взаимодействующих полей. Отвлекаясь от интегральных лагранжианов, приводящих к не рассматриваемым нами нелокальным теориям, получаем, что лагранжиан взаимодействия  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  может быть сконструирован из функций поля путем свертывания произведений двух величин одинаковой тензорной размерности, как, например: двух скаляров, двух псевдоскаляров, двух векторов и т. п.

Так, взаимодействие скалярного поля  $\varphi$  со спинорным полем  $\psi$  может быть построено по типу скаляр  $\times$  скаляр:

$$\bar{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x), \quad (2)$$

по типу вектор  $\times$  вектор:

$$\bar{\psi}(x)\gamma^n\psi(x)\varphi_n(x) \quad (3)$$

и т. д.

Аналогично этому простейшие формы взаимодействия псевдоскалярного поля  $\varphi'$  со спинорным полем  $\psi$  имеют следующий вид:

$$\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)\varphi'(x), \quad (4)$$

$$\bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^n\psi(x)\varphi'_n(x). \quad (5)$$

Кроме релятивистской инвариантности, представляющей собой безусловное требование к теории, мы можем накладывать на лагранжиан также и другие ограничения.

Так, например, закон сохранения электрического заряда требует определенной структуры от лагранжиана, допускающей одновременные фазовые преобразования комплексно-сопряженных полевых функций, описывающих заряженные частицы:

$$\varphi \rightarrow e^{i\alpha}\varphi, \quad \varphi^* \rightarrow e^{-i\alpha}\varphi^*. \quad (6)$$

Закон сохранения барионного заряда приводит к новым ограничениям на возможные структуры лагранжианов взаимодействия. Такие лагранжианы должны быть инвариантны относительно специального фазового преобразования

$$B \rightarrow e^{i\beta}B, \quad \bar{B} \rightarrow e^{-i\beta}\bar{B}, \quad (7)$$

где  $B$  — все поля, описывающие барионы (частицы с единичным барионным зарядом), а  $\bar{B}$  — все поля, описывающие антибарионы.

Закон сохранения электрического заряда является абсолютным, т. е. выполняющимся во всех взаимодействиях. Аналогичные законы сохранения барионного и лептонного зарядов также имеют место во всех наблюдаемых процессах \*).

Вторую группу законов сохранения составляют законы, выполняющиеся лишь в некоторых взаимодействиях и отвечающие поэтому так называемым нарушенным симметриям. Так, сильные взаимодействия являются изотопически инвариантными. Этот эмпирический факт находит свое отражение в структуре лагранжиана сильных взаимодействий, который должен быть инвариантом относительно преобразований поворотов в фиктивном трехмерном изотопическом пространстве.

Так, например, изотопически инвариантный лагранжиан пион-нуклонного взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L}_{\pi N}(x) = ig\bar{\Psi}(x)\gamma^5\tau\Psi(x)\pi(x), \quad (8)$$

т. е. имеет структуру (псевдоскаляр  $\times$  псевдоскаляр) относительно лоренцовых преобразований и (3-вектор  $\times$  3-вектор) относительно изотопических вращений. Изотопическая симметрия не является абсолютным свойством (нарушенная симметрия) и не выполняется, например, в электромагнитных взаимодействиях. Соответственно лагранжианы взаимодействия нуклонов и пионов с электромагнитным полем не обладают изотопической симметрией.

Другим примером нарушенной симметрии является закон сохранения странности (гиперзаряда), выполняющийся в сильных и электромагнитных взаимодействиях, но не имеющий места в слабых взаимодействиях.

**8.2. Локальные фазовые преобразования и калибровочные поля.** В теории взаимодействующих полей важную роль играют преобразования функций поля, зависящие не от постоянных параметров, а от параметров, являющихся функциями координат (параметров-функций).

Примером такого преобразования является градиентное преобразование электромагнитного потенциала (5.5), зависящее от параметра-функции  $f(x)$ .

Взаимодействие полей, описывающих заряженные частицы с электромагнитным полем, может быть введено на основе локального обобщения фазового преобразования (6).

Изменение калибровки (6) означает изменение фазового множителя, т. е. изменение, не приводящее к каким-либо физическим следствиям. Инвариантность относительно такого преобразования

---

\*) В последние годы появились теоретические модели так называемого великого объединения взаимодействий, в которых эти законы нарушаются. В подобных моделях симметрия (7) также оказывается нарушенной. Однако предсказываемые эффекты, как, например, распад протона, пока еще не обнаружены на опыте.

(см. Паули (1941)) соответствует тому, что голько выражения билинейные по  $\varphi$  и  $\varphi^*$  связаны с физически измеримыми величинами. Потребуем теперь, чтобы теория оставалась инвариантной и в том случае, когда параметр преобразования (6) зависит от  $x$ :

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{ief(x)} \varphi(x), \quad \varphi^*(x) \rightarrow e^{-ief(x)^*} \varphi^*(x), \quad (9)$$

т. е. относительный фазовый множитель функции поля  $\varphi(x)$  в двух различных пространственно-временных точках был бы совершенно произволен. Локальные фазовые преобразования вида (9), а также их многопараметрические аналоги — см. ниже (20), (21) — называются *калибровочными преобразованиями*.

Не составляет труда убедиться, что лагранжианы рассмотренных выше комплексных полей (3.32), (7.27) не являются инвариантными относительно локальных фазовых преобразований вида (9) в силу того, что соответствующие градиенты, кроме фазового множителя, получают аддитивную добавку:

$$\partial_n \varphi(x) \rightarrow e^{ief(x)} \left( \partial_n + ie \frac{\partial f(x)}{\partial x^n} \right) \varphi(x). \quad (10)$$

Инвариантность лагранжиана можно восстановить, если ввести дополнительное векторное поле  $A_n$ , преобразующееся одновременно с (9), таким образом, чтобы его преобразование компенсировало бы изменение лагранжиана под влиянием (10). Этого можно достичь путем замены всех производных  $\partial_n \varphi$  и  $\partial_m \varphi^*$  в лагранжиане на операторы

$$D_n \varphi = (\partial_n - ie A_n(x)) \varphi(x); \quad D_m \varphi^* = (\partial_m + ie A_m(x)) \varphi^*(x), \quad (11)$$

при условии, что закон преобразования поля  $A_n$  имеет вид

$$A_n(x) \rightarrow A'_n(x) = A_n(x) + f_{,n}(x) \quad (12)$$

Выражения  $D_n \varphi$ ,  $D_m \varphi^*$  называются *ковариантными производными*. Под одновременным действием фазового преобразования (9) комплексного поля  $\varphi$ ,  $\varphi^*$  и «компенсирующего» его градиентного преобразования (12) вспомогательного векторного поля  $A_n$  они преобразуются подобно (9), т. е. меняют фазу

$$\left. \begin{aligned} D_n(A') \varphi'(x) &= e^{ief(x)} D_n(A) \varphi(x), \\ D_n(A') \varphi'^*(x) &= e^{-ief(x)^*} D_n(A) \varphi^*(x). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Константа  $e$ , входящая в (11) и (13), может быть отождествлена с электрическим зарядом, а векторное поле  $A_n$  — с электромагнитным полем, рассмотренным в § 5. Таким образом, электромагнитное поле, введенное через ковариантные производные  $D$ ,  $D^*$ , выступает как *компенсирующее* поле. Поля, компенсирующие изменение ка-

либровки полей материи, называют также *калибровочными полями*. В силу абелевого (перестановочного) характера группы, образованной преобразованиями (12), электромагнитное поле является калибровочным абелевым полем.

Переход в свободном лагранжиане от обычных производных к ковариантным

$$\mathcal{L}_0(\varphi, \varphi^*, \partial_n \varphi, \partial_m \varphi^*) \rightarrow \mathcal{L}_0(\varphi, \varphi^*, D_n \varphi, D_m \varphi^*) \quad (14)$$

приводит к появлению членов взаимодействия исходного поля  $\varphi$  с электромагнитным полем  $A$ .

Взаимодействие, введенное с помощью ковариантных производных (или, как иногда говорят, с помощью «удлинения» производных), называют также *минимальным электромагнитным взаимодействием*.

В случае спинорных полей, когда  $\mathcal{L}_0$  линейно по производным, минимальное электромагнитное взаимодействие линейно по полю  $A$ :

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = e\psi(x) \gamma^n \psi(x) A_n(x). \quad (15)$$

Для получения полного лагранжиана системы [электромагнитное поле + заряженные комплексные поля] к (14) следует добавить лагранжиан свободного электромагнитного поля, инвариантный относительно градиентного преобразования (12). Так, например, полный лагранжиан спинорной электродинамики (т. е. системы электрон-позитронного и электромагнитного полей) будет иметь вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\psi, \bar{\psi})|_{(7.27)} + \mathcal{L}_0(A)|_{(8.13)} + \mathcal{L}_{\text{вз}}(\psi, \bar{\psi}, A)|_{(8.15)}. \quad (16)$$

Выражение (16) инвариантно относительно преобразований

$$\psi'(x) = \psi(x) e^{ief(x)}, \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{-ief(x)}, \quad A'_n(x) = A_n(x) + \partial_n f(x). \quad (17)$$

Для полей с целым спином в обычной формулировке (3.32), (4.6) минимальное взаимодействие содержит квадратичные члены. Так, лагранжиану комплексного скалярного поля (3.32) соответствует

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = ie [\bar{\varphi}(x) \varphi;_{;n}(x) - \bar{\varphi};_{;n}(x) \varphi(x)] A^n(x) + e^2 \bar{\varphi}(x) \varphi(x) A^n(x) A_n(x). \quad (18)$$

Однако при использовании формализма Дэффина—Кеммера лагранжиан (4.35) оказывается линейным относительно производных. Соответственно этому

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = e\bar{\psi}(x) \Gamma^n u(x) A_n(x) = ie (\bar{\varphi}\varphi;_{;n} - \bar{\varphi};_{;n}\varphi) A^n(x). \quad (19)$$

Таким образом, мы убедились, что электромагнитное поле обеспечивает инвариантность полного лагранжиана относительно локальных фазовых преобразований, являющихся обобщениями «глобальных» фазовых преобразований (6), приводящих к сохранению электрического заряда. Такая точка зрения устанавливает связи

между свойствами полей в пространстве-времени и так называемыми внутренними симметриями. Как отмечалось в § 2.4, такие симметрии, как правило, описываются группами  $SU(n)$ ,  $n \geq 2$ . Эти группы являются неабелевыми.

Требование инвариантности относительно неабелевых калибровочных преобразований приводит к необходимости введения новых векторных полей — полей Янга — Миллса (1954).

**8.3. Поле Янга—Миллса.** Пусть полевая функция  $u$  преобразуется по некоторому представлению калибровочной группы

$$u'_A = [\Lambda(\epsilon)]_{AB} u_B. \quad (20)$$

В случае изотопических преобразований, первоначально рассмотренных Янгом и Миллсом (а также сектора слабых взаимодействий в объединенной модели слабых и электромагнитных взаимодействий Вайнберга—Салама—Глешоу), это — группа  $SU(2)$ , а поле  $u_A$ , соответствующее изотопическому спину  $I$ , имеет  $2I + 1$  компонент, и  $\Lambda_{AB}$  — это  $(2I + 1) \times (2I + 1)$ -матрица, зависящая от трех параметров изотопических вращений  $\epsilon^\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ).

В современной кварк-глюонной калибровочной полевой модели сильных взаимодействий (квантовой хромодинамике) центральную роль играет группа  $SU(3)$ -преобразований в фиктивном пространстве так называемых «цветовых» переменных. В этом случае поле кварков  $\psi_A$  трехкомпонентно ( $A = 1, 2, 3$ ) и преобразуется по фундаментальному представлению цветовой группы  $SU(3)$ , а матрицы третьего ранга  $\Lambda_{AB}$  зависят от восьми параметров цветовых преобразований  $\epsilon^\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, 8$ ). В силу некоммутативности соответствующих преобразований группы  $SU(2)$  и  $SU(3)$  являются неабелевыми.

Инфинитезимальная форма преобразований (20) имеет вид

$$u'_A = u_A + igT_{AB}^\nu \epsilon^\nu u_B. \quad (21)$$

Здесь  $T_{AB}^\nu$  — генераторы представления калибровочной группы, по которому преобразуется поле  $u$ , а из параметров  $\epsilon^\nu$  выделен общий множитель  $g$ . Для того чтобы обеспечить инвариантность лагранжиана поля  $u$  относительно преобразования (21) с параметрами  $\epsilon^\nu(x)$ , зависящими от координат, необходимо, в полной аналогии с только что рассмотренным случаем электродинамики, заменить в  $\mathcal{L}_0(u)$  все производные  $\partial_n u$  на ковариантные:

$$(D_n u)_A = \partial_n u_A - igT_{AB}^\nu B_n^\nu u_B, \quad (22)$$

содержащие новое компенсирующее поле  $B$ , которое является аналогом электромагнитного поля  $A$  из рассуждений пункта 8.2. Однако, в отличие от поля  $A$ , являющегося скаляром относительно калибровочных преобразований (9) из группы  $U(1)$  (и потому не несущего электрического заряда), новое калибровочное неабелево поле  $B$  несет групповые индексы, вследствие чего преобразуется по

более сложному, нежели (12), закону

$$B_n^{\prime\alpha} = B_n^\alpha + ig t^{\alpha\beta\gamma} \epsilon^\gamma(x) B_n^\beta + \partial_n \epsilon^\alpha(x). \quad (23)$$

Кроме градиентного удлинения,  $(\mathbf{s}, \mathbf{n})$  испытывает также калибровочное вращение. Входящие в (23) матрицы  $t^\alpha$  с компонентами

$$(t^\alpha)^{\beta\gamma} = -t^{\alpha\beta\gamma}$$

образуют базис присоединенного представления (т. е. представления бесшпуровыми матрицами  $N \times N$ , где  $N$  — размерность группы  $SU(N)$ ). В случае группы  $SU(2)$

$$t^{\alpha\beta\gamma} = i\epsilon^{\alpha\beta\gamma},$$

где  $\epsilon$  — абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга в пространстве трех измерений. Для цветовой группы  $SU(3)$  тензор  $t$  также представляет собой антисимметричный тензор третьего ранга, однако на этот раз в пространстве восьми измерений, а восемь матриц  $T$  могут быть выбраны в виде так называемых матриц Гелл-Манна (см. например главу I книги Славнова, Фаддеева (1978)).

Воспользовавшись тем, что базис присоединенного представления  $t^{\alpha\beta\gamma}$  образует структурные константы, т. е. входит в правую часть перестановочных соотношений для генераторов

$$[T^\alpha, T^\beta] = t^{\alpha\beta\gamma} T^\gamma, \quad (24)$$

нетрудно проверить, что при преобразованиях (21), (23) ковариантная производная (22) преобразуется подобно (21):

$$[D_n(B') u']_A = [D_n(B) u]_A + ig T_{AB}^\gamma \epsilon^\gamma (D_n(B) u)_B. \quad (25)$$

Аналогом электромагнитного тензора напряженности  $H_{mn}$  (5.1) здесь является тензор

$$F_{mn}^\alpha = \partial_m B_n^\alpha - \partial_n B_m^\alpha + ig t^{\alpha\beta\gamma} B_m^\beta B_n^\gamma. \quad (26)$$

В отличие от  $H_{mn}$ , инвариантного относительно градиентного преобразования (12), тензор  $F_{mn}^\alpha$  при преобразованиях (23) преобразуется по присоединенному представлению калибровочной группы:

$$F_{mn}^\alpha \rightarrow F_{mn}^\alpha + ig t^{\alpha\beta\gamma} F_{mn}^\beta \epsilon^\gamma(x), \quad (27)$$

вследствие чего инвариантный лагранжиан поля Янга—Миллса, не взаимодействующего с другими полями, имеет вид

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{mn}^\alpha F^{mn, \alpha}. \quad (28)$$

Это выражение, кроме квадратичных, включает также кубические члены и члены четвертой степени по компонентам поля  $B$  и их производным. Таким образом, свободное поле Янга—Миллса неизбежно содержит самодействие и не удовлетворяет принципу суперпозиции. Важно отметить, что эффекты самодействия неабелева калибровочного поля и его взаимодействия с другими полями (полями материи)  $u$  описываются одной и той же константой связи  $g$ .

Конечные преобразования, отвечающие (23), можно записать в компактной форме, если ввести матрицы-функции

$$[B_m(x)]^{\beta\gamma} = B_m^\alpha(x) t^{\alpha\beta\gamma},$$

значения которых при каждом  $x$  принадлежат присоединенному представлению калибровочной группы. Формула конечного преобразования имеет вид

$$B'_m(x) = \Lambda(\varepsilon) B_m(x) \Lambda^{-1}(\varepsilon) + \frac{i}{g} \Lambda(\varepsilon) \partial_m \Lambda^{-1}(\varepsilon), \quad (29)$$

где

$$\Lambda(\varepsilon) = \exp(ig\varepsilon t^\alpha)$$

Таким образом, процедура построения калибровочной модели взаимодействующих полей может быть сформулирована следующим образом:

1) Выбираем простую калибровочную группу  $G$  и набор полей материи  $u_{(i)}$ , преобразующихся по представлениям этой группы и описываемых свободным лагранжианом

$$\mathcal{L}_0(u, du) = \sum_i \mathcal{L}_0^i(u_{(i)}, \partial_n u_{(i)}), \quad i = 1, \dots, n.$$

2) Вводим калибровочное векторное поле  $B_n$ , отвечающее присоединенному представлению группы  $G$ , и образуем полный лагранжиан системы (поля материи  $u_{(1)}, \dots, u_{(n)}$  + поле Янга—Миллса  $B_n$ ) по рецепту

$$\mathcal{L}_0(u, du) \rightarrow \mathcal{L}(u, B) = \mathcal{L}_0(u, D(B)u) + \mathcal{L}_{YM}(B). \quad (30)$$

В первом члене правой части производные каждого из полей  $u$  удлинены по правилу (22) с одной и той же константой  $g$ , которая входит также в  $F_{mn}$  и, следовательно, в  $\mathcal{L}_{YM}$ . Поэтому лагранжиан (30), описывающий систему взаимодействующих  $(n+1)$  полей, в случае простой калибровочной группы содержит всего лишь одну константу связи. Этот лагранжиан как целое инвариантен относительно калибровочного преобразования (21), (23) всех входящих в него полей.

**8.4. Динамические инварианты системы полей.** Обратимся к рассмотрению инвариантов системы полей. Ввиду релятивистской инвариантности лагранжиана взаимодействия полный лагранжиан системы является инвариантным относительно четырех трансляций и шести поворотов системы отсчета. Соответствующие этим преобразованиям инварианты — энергия-импульс и момент количества движения — определяются формулами, вытекающими из теоремы Нётер.

Особой простотой обладает случай, когда  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  не зависит от производных функций поля. При этом согласно формулам (2.9) и (2.16) импульс и спин системы полей равны сумме импульсов и спинов отдельных полей, а плотность энергии системы полей равна сумме плотностей энергии отдельных полей минус  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$ , т. е.

$$P = \sum_i P_i, \quad P^0 = \sum_i P_i^0 - \int \mathcal{L}_{\text{вз}}(x) dx, \quad S = \sum_i S_i. \quad (31)$$



Более детально энергия и импульс системы взаимодействующих квантовых полей будут рассмотрены в главе II.

Обратимся к инвариантам фазовых преобразований. Рассмотрим в качестве первого примера систему, описываемую лагранжианом (16). Эта система инвариантна относительно калибровочного преобразования спинорных функций типа (6)

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi}, \quad (6')$$

являющегося также частным случаем калибровочного преобразования (9) при  $ef(x) = \alpha = \text{const}$ .

Соответствующий инвариант (2.29) в силу независимости  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  от  $\partial\psi/\partial x$  совпадает с зарядом свободного электрон-позитронного поля (7.43).

Приведем другой пример. Рассмотрим систему четырех полей: протонного, нейтронного, электрон-позитронного и нейтринного. При этом протоны, нейтроны и нейтрино будем описывать спинорным полем типа (7.27). Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{вз}}, \\ \mathcal{L}_0 &= \mathcal{L}_P + \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\nu, \\ \mathcal{L}_P &= \frac{i}{2} \left( \bar{\Psi}_P(x) \gamma^n \frac{\partial \Psi_P}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{\Psi}_P}{\partial x^n} \gamma^n \Psi_P(x) \right) - M \bar{\Psi}_P(x) \Psi_P(x), \\ \mathcal{L}_N &= \frac{i}{2} \left( \bar{\Psi}_N(x) \gamma^m \frac{\partial \Psi_N}{\partial x^m} - \frac{\partial \bar{\Psi}_N}{\partial x^m} \gamma^m \Psi_N(x) \right) - M \bar{\Psi}_N(x) \Psi(x), \\ \mathcal{L}_e &= \frac{i}{2} \left( \bar{\psi}(x) \gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^k} \gamma^k \psi(x) \right) - m \bar{\psi}(x) \psi(x), \\ \mathcal{L}_\nu &= \frac{i}{2} \left( \bar{\nu}(x) \gamma^l \frac{\partial \nu}{\partial x^l} - \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial x^l} \gamma^l \nu(x) \right). \end{aligned}$$

Здесь  $M$  — масса нуклона,  $m$  — масса электрона,  $\Psi_P$  — протонная волновая функция,  $\Psi_N$  — нейтронная волновая функция,  $\psi$  — электрон-позитронная функция,  $\nu$  — нейтринная функция.

Традиционная запись взаимодействия этих полей, описывающая  $\beta$ -процессы и восходящая к Ферми, имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = G [(\bar{\Psi}_P O \Psi_N) (\bar{\psi} O \nu) + (\bar{\Psi}_N O \Psi_P) (\bar{\nu} O \psi)], \quad (32)$$

где  $O$  — дираковские матрицы, определяющие вид взаимодействия. Полный лагранжиан  $\mathcal{L}$  инвариантен относительно нескольких независимых фазовых преобразований; например:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \psi(x) &\rightarrow e^{-i\chi}\psi(x), & \bar{\psi}(x) &\rightarrow e^{i\chi}\bar{\psi}(x), \\ \Psi_P(x) &\rightarrow e^{i\chi}\Psi_P(x), & \bar{\Psi}_P(x) &\rightarrow e^{-i\chi}\bar{\Psi}_P(x), \\ \Psi_N(x) &\rightarrow \Psi_N(x), & \bar{\Psi}_N(x) &\rightarrow \bar{\Psi}_N(x), \\ \nu(x) &\rightarrow \nu(x), & \bar{\nu}(x) &\rightarrow \bar{\nu}(x). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Соответствующий этому преобразованию инвариант равен разности зарядов полей  $\Psi_P$  и  $\psi$  и представляет собой электрический заряд.

$$2) \left. \begin{aligned} \Psi_P &\rightarrow e^{i\beta} \Psi_P, & \bar{\Psi}_P &\rightarrow e^{-i\beta} \bar{\Psi}_P, \\ \Psi_N &\rightarrow e^{i\beta} \Psi_N, & \bar{\Psi}_N &\rightarrow e^{-i\beta} \bar{\Psi}_N, \\ \psi &\rightarrow \psi, & \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}, \\ \nu &\rightarrow \nu, & \bar{\nu} &\rightarrow \bar{\nu}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Соответствующий инвариант равен сумме зарядов полей  $\Psi_P$  и  $\Psi_N$  и является *барионным зарядом*.

Между видом лагранжиана взаимодействия и типом элементарного процесса, описываемым этим лагранжианом, существует простое соответствие, которое строго обосновывается в теории вторичного квантования (глава IV).

Как будет показано в § 9, функции поля  $u$ ,  $\bar{u}$  распадаются на операторы рождения и уничтожения. Функция  $u(x)$  распадается на оператор уничтожения основной частицы и оператор рождения античастицы,  $\bar{u}(x)$  — на оператор уничтожения античастицы и оператор рождения основной частицы. Поэтому комбинация функций типа

$$u_1(x) \bar{u}_2(x) \dots u_k(x)$$

описывает процесс, в котором рождается античастица поля  $u_1$  (либо поглощается частица поля  $u_1$ ), рождается частица поля  $u_2$  (либо поглощается античастица поля  $u_2$ ) и т. д.

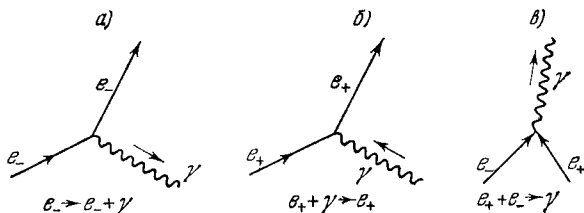


Рис. 1. а — излучение фотона  $\gamma$  электроном  $e_-$ ; б — поглощение фотона  $\gamma$  позитроном  $e_+$ ; в — аннигиляция пары  $e_+$ ,  $e_-$  с испусканием фотона.

Например, лагранжиан взаимодействия электрон-позитронного и электромагнитного полей (15) описывает элементарные процессы, часть которых изображена на рис. 1.

С помощью этих правил соответствия легко убедиться, что инвариантность данного лагранжиана взаимодействия относительно преобразования (6') обеспечивает сохранение электрического заряда в соответствующих процессах.

## КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ

### § 9. Общие принципы квантования волновых полей

**9.1. Операторная природа функций поля и амплитуда состояния.** До сих пор мы рассматривали классические поля. Теперь перейдем к квантованию волновых полей. В квантовой теории полей полевые функции описывают совокупности частиц, процессы взаимных превращений которых содержатся в теории явно. В соответствии с этим волновые функции квантованных полей приобретают операторный смысл и распадаются на операторы рождения и операторы уничтожения частиц, между которыми устанавливаются перестановочные соотношения. Операторные волновые функции определяются уравнениями поля и перестановочными соотношениями с точностью до унитарного преобразования.

Функции поля, таким образом, уже не являются функциями в классическом смысле, а становятся операторами, действующими на общую для всех полей волновую функцию вторичного квантования  $\Phi$ , которая называется *амплитудой состояния* (или вектором состояния).

Подобно тому как в обычной квантовой механике состояние системы задается волновой функцией  $\psi$ , в квантовой теории поля физическое состояние системы полностью характеризуется амплитудой состояния  $\Phi$ . Так же как и  $\psi$ , амплитуда состояния  $\Phi$  может рассматриваться как вектор в некотором линейном пространстве (т. е. в котором определено скалярное произведение).

Ввиду того, что в квантовополевом случае состояние характеризуется такими величинами, как 4-импульс, спин, ..., число и сорт частиц, с математической точки зрения удобно говорить об обобщенных гильбертовых пространствах, включающих в себя «несобственные» элементы.

Как и в квантовой механике, не все векторы  $\Phi$  обладают конечной нормой (например, соответствующие плоским волнам). Однако нормы физических состояний всегда могут быть выбраны конечными (эти состояния описываются волновыми пакетами). Такие векторы состояний удобно нормировать на единицу:

$${}^*\Phi\Phi = 1. \quad (1)$$

В квантовой теории поля средние значения и вероятности состояний даются квадратичными формами амплитуды состояния. Поста-

Условие (23) является наиболее общим операторным условием совместности трансформационных свойств операторных полевых функций, рассмотренных в § 2, и трансформационных свойств амплитуд состояний, вытекающих из постулата квантования. Они накладывают на операторы поля ряд важных условий, которые удобно рассмотреть в дифференциальном виде (т. е. для бесконечно малых преобразований). Займемся этим.

Начнем с бесконечно малого преобразования сдвига

$$x' = x + \delta x, \quad \delta x^k = a^k.$$

Используя (18), рассмотрим в (23) члены первого порядка по  $a^k$ . Получим

$$-\frac{\partial u}{\partial x^k} a^k = -i P_k a^k u(x) + i u(x) P_k a^k,$$

т. е.

$$i \frac{\partial u(x)}{\partial x^k} = [u(x), P_k]. \quad (24)$$

При бесконечно малых поворотах

$$x \rightarrow x' = x + \delta x, \quad \delta x^k = X_{(mn)}^k \delta \omega^{mn}, \quad \Lambda_\omega = \delta_{ij} + A_{i(kl)}^j \delta \omega^{kl}$$

получаем аналогично

$$i \left\{ \sum_j A_{i(mn)}^j u_j - u_i;_k (x_n \delta_m^k - x_m \delta_n^k) \right\} = [M_{mn}, u_i]. \quad (25)$$

Наконец, для бесконечно малых фазовых преобразований находим

$$u(x) = [u(x), Q], \quad -\dot{u}(x) = [\dot{u}(x), Q]. \quad (26)$$

Можно получить также интегральные аналоги уравнений (24)—(26). Рассмотрим наиболее простой случай конечных трансляций. Перепишывая для этого уравнения (23) в виде

$$u(L^{-1}x) = U_L^\dagger u(x) U_L,$$

подставим в него (22). Находим

$$u(x-a) = e^{-iP \cdot a} u(x) e^{iP \cdot a}.$$

При  $a = x$  получаем отсюда

$$u(x) = e^{iP \cdot x} u(0) e^{-iP \cdot x}.$$

Эта формула, очевидно, является обобщением (7). Она дает зависимость от пространственно-временных координат в явном виде. Из нее следует, что выражение

$$u_S(x) = e^{-iP \cdot x} u(0) e^{iP \cdot x} = u(x) |_{x^0=0} \quad (27)$$

может рассматриваться как оператор поля в представлении Шредингера. Поэтому  $u(x)$ , связанный с (27) соотношением

$$u(x) = e^{iHt} u_S(x) e^{-iHt}, \quad Ht = P_0 x^0, \quad (28)$$

является оператором поля в гейзенберговском представлении. Уравнения (24) представляют собой уравнения движения в гейзенберговском представлении.

Мы получили уравнения (24)—(26), представляющие собой операторные условия для квантованных функций волновых полей, не зависящие от конкретного вида перестановочных соотношений. Разумеется, вместо принятия общего постулата квантования можно было бы постулировать именно эти уравнения. Такая процедура иногда принимается при изложении теории на базе канонического формализма (см. ниже § 11.4). Она, однако, уступает изложенной в общности. Уравнения (24)—(26) позволяют установить ряд свойств операторов  $u$ , общих для всех полей.

**9.5. Физический смысл положительно- и отрицательно-частотных составляющих и сопряженных функций.** Из уравнений (24) непосредственно вытекает физический смысл положительно-частотной и отрицательно-частотной частей операторной функции поля (Швингер (1949а)). Рассмотрим поле частиц с массой  $m$ , описываемое функцией  $u(x)$ :

$$\begin{aligned} u(x) &= u^+(x) + u^-(x), \\ u^+(x) &= \int_{k^0 > 0} e^{ikx} \delta(k^2 - m^2) \tilde{u}(k) dk, \\ u^-(x) &= \int_{k^0 > 0} e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) \tilde{u}(-k) dk. \end{aligned}$$

Подставляя в (24)  $u^+$  и  $u^-$  по отдельности, находим:

$$\left. \begin{aligned} [u^+(x), P^n] &= - \int_{k^0 > 0} e^{ikx} k^n \delta(k^2 - m^2) \tilde{u}(k) dk, \\ [u^-(x), P^n] &= \int_{k^0 > 0} e^{-ikx} k^n \delta(k^2 - m^2) \tilde{u}(-k) dk, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

откуда вытекает:

$$[u^+(k), P^n] = -k^n u^+(k) \quad \left. \vphantom{[u^+(k), P^n]} \right\} \quad k^0 = \sqrt{k^2 + m^2}. \quad (30)$$

$$[u^-(k), P^n] = k^n u^-(k) \quad \left. \vphantom{[u^-(k), P^n]} \right\} \quad (31)$$

Здесь приняты обозначения

$$u^+(k) = \tilde{u}(k)|_{k^0 > 0}, \quad u^-(k) = \tilde{u}(-k)|_{k^0 > 0}.$$

Введем теперь состояние с определенным значением  $p^n$  4-вектора энергии-импульса, описываемое амплитудой  $\Phi_p$ :

$$P^n \Phi_p = p^n \Phi_p. \quad (32)$$

вим теперь вопрос о трансформационных свойствах амплитуд состояний  $\Phi$  при преобразованиях координат и полевых функций, рассмотренных в § 2.

Ввиду того что задание этих свойств представляет собой основной постулат квантования волновых полей и что этот постулат может быть сформулирован естественным образом в духе соответствия с обычной квантовой механикой, напомним кратко некоторые основные сведения из квантовой механики.

**9.2. Представления уравнения Шредингера.** Наиболее распространенным в квантовой механике является представление Шредингера. В этом представлении поведение динамической системы во времени описывается с помощью зависящей от времени волновой функции  $\psi(t)$ , удовлетворяющей уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H \psi(t), \quad t = x^0. \quad (2)$$

Здесь  $H$  — гамильтонов оператор, соответствующий полной энергии системы и не зависящий от времени для замкнутых (консервативных) систем. В представлении Шредингера динамические переменные замкнутых систем характеризуются операторами, не зависящими явно от времени. Их средние значения

$$\bar{B}_t = \psi^*(t) B \psi(t) \quad (3)$$

могут, однако, зависеть от времени через волновые функции  $\psi(t)$ . Считая оператор  $H$  постоянным во времени, мы можем формально проинтегрировать уравнение (2) и написать

$$\psi(t) = U(t) \psi, \quad (4)$$

где

$$U(t) = \exp(-iHt) \quad (5)$$

и

$$\psi = \psi(0) = \text{const}$$

не зависит от времени.

Подставляя это выражение в (3), получаем

$$B_t = \psi^* U^\dagger(t) B U(t) \psi = \psi^* e^{iHt} B e^{-iHt} \psi. \quad (6)$$

Формулу (6) можно интерпретировать как среднее по функциям  $\psi$ , не зависящим от времени, от оператора

$$B_H(t) = U^\dagger(t) B U(t) = e^{iHt} B_H(0) e^{-iHt}, \quad (7)$$

зависящего от времени. Мы приходим, таким образом, к представлению Гейзенберга, в котором явно зависящими от времени оказываются не волновые функции, а динамические переменные. С точки зрения вычисления наблюдаемых значений динамических величин оба представления совершенно эквивалентны. Связь представлений

осуществляется с помощью оператора (5), который является унитарным \*)

$$\hat{U}(t) U(t) = 1. \quad (8)$$

Дифференцируя (7) по времени, получаем уравнения движения в гейзенберговском представлении

$$i \frac{\partial B_H(t)}{\partial t} = [B_H(t), H], \quad (10)$$

где  $[a, b] = ab - ba$  — квантовые скобки Пуассона. Отметим, что формулы (4) и (7), описывающие эволюцию системы от момента 0 до момента  $t$ , являются как бы *дополнительными* друг к другу. Для перехода к моменту времени  $t$  следует *либо* преобразовать волновую функцию  $\psi$  по формуле (4), *либо* преобразовать оператор по формуле (7).

**9.3. Трансформационные свойства амплитуды состояния и операторов поля.** Исследуем теперь трансформационные свойства амплитуд состояний  $\Phi$  при преобразованиях координат и полевых функций типа рассмотренных в § 2:

$$x \rightarrow x' = L(\omega)x, \quad u(x) \rightarrow u'(x') = \Lambda(\omega)u(x). \quad (11)$$

Здесь  $\omega$  — независимые параметры преобразования.

Преобразованию (11) соответствует некоторое преобразование вектора состояния, которое вследствие принципа суперпозиции должно быть линейным:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = U(\omega)\Phi. \quad (12)$$

Для того чтобы обеспечить инвариантность нормы амплитуды состояния, оператор преобразования  $U$ , зависящий от параметров преобразования  $\omega$ , должен удовлетворять соотношению

$$\hat{U}(\omega) U(\omega) = 1. \quad (13)$$

Обсудим смысл унитарного преобразования (12). Формулы (12) и (13) соответствуют формулам (4) и (8). Преобразование вектора состояния (12) является *альтернативой* преобразования операторной волновой функции при преобразовании (11).

Для вычисления среднего значения динамической величины в новой системе координат следует либо рассмотреть среднее от преобразованного оператора  $B'$  по исходным векторам состояний  $\Phi$ , либо среднее от исходного операторного выражения  $B$  по преобразованным  $\Phi'$ , т. е.:

$$\bar{B}' = \Phi^* B' \Phi = \Phi'^* B \Phi'. \quad (14)$$

\*) Вообще, унитарный оператор  $V$  определяется соотношением

$$(V\Phi_1)^* (V\Phi_2) = \Phi_1^* \Phi_2. \quad (9)$$

Под  $B$  мы подразумеваем как сами операторные функции полей, так и динамические переменные типа энергии-импульса, заряда и т. п., выражающиеся через их билинейные комбинации.

В частном случае, когда  $B$  — полевая операторная функция в  $x$ -представлении, получаем из (14)

$$\Phi^* \Phi' (x) \Phi = \Phi^* \varphi (x) \Phi'$$

или, с учетом (12),

$$u' (x) = \overset{\dagger}{U} (\omega) u (x) U (\omega) = U^{-1} (\omega) u (x) U (\omega). \quad (15)$$

Требование совместности преобразований (11) и (15) приводит к важным условиям на операторы, рассмотренным ниже.

Рассмотрим конкретный случай преобразования из неоднородной группы Лоренца

$$x \rightarrow x' = Lx = x + \delta x, \quad \delta x^k = a^k + \omega^{kn} x_n, \quad (16)$$

где  $a^k$  и  $\omega^{kn}$  — бесконечно малые параметры трансляций и поворотов.

Оператор преобразования амплитуды состояния

$$\Phi \rightarrow \Phi' = U_L \Phi$$

представим в виде

$$U_L = U (a, \omega) = 1 + \delta U_L. \quad (17)$$

Бесконечно малая величина  $\delta U_L$  в силу (13) должна быть антиэрмитова, а также линейна по  $a$  и  $\omega$ . Напишем поэтому

$$\delta U_L = iP_n a^n + \frac{i}{2} M_{nm} \omega^{nm}, \quad (18)$$

где  $P$  и  $M$  — эрмитовы операторы.

Преобразование амплитуды состояния

$$\Phi' = \left( 1 + iP a + \frac{i}{2} M \omega \right) \Phi$$

по виду совпадает с бесконечно малым преобразованием скалярной функции поля

$$u' (x) = \left( 1 + i p a + \frac{i}{2} m \omega \right) u (x),$$

соответствующим (16), причем коэффициенты  $p$ ,  $m$  имеют смысл обычных квантовомеханических операторов 4-импульса и тензора момента количества движения

$$p_n = i \frac{\partial}{\partial x^n}, \quad m_{kn} = i \left( x_k \frac{\partial}{\partial x^n} - x_n \frac{\partial}{\partial x^k} \right). \quad (19)$$

Это обстоятельство отражает тот факт, что 4-импульс и момент являются генераторами трансляций и вращений.



Исходя из соображений соответствия, мы будем поэтому интерпретировать  $P$  и  $M$  в (18) как операторы 4-вектора энергии-импульса и тензора момента количества движения соответственно. Разумеется, в квантовой теории поля, где амплитуда  $\Phi$  не зависит от координат  $x$  явным образом, мы не можем использовать формулы типа (19) и должны выбрать в качестве  $P$  и  $M$  некоторые операторы, действующие на амплитуду состояния. Аналогично этому при градиентных преобразованиях функций поля

$$u \rightarrow u' = e^{i\alpha} u, \quad u^* \rightarrow u'^* = e^{-i\alpha} u^*$$

унитарный оператор преобразования

$$\Phi' = U_{\alpha} \Phi$$

имеет разложение

$$U_{\alpha} = 1 + i\alpha Q + \dots, \quad (20)$$

в котором эрмитов оператор  $Q$  следует интерпретировать как оператор заряда.

**9.4. Постулат квантования волновых полей.** В качестве основного постулата квантования волновых полей мы примем, что операторы 4-вектора энергии-импульса  $P$ , тензора момента количества движения  $M$ , заряда  $Q$  и т. п., являющиеся генераторами бесконечно малых преобразований векторов состояний (см. формулы (18) и (20)), выражаются через операторные функции полей теми же соотношениями типа (2.10), (2.16), (2.29), что и в классической теории полей, разумеется, с установлением при этом надлежащего порядка операторного умножения. Этот постулат является дальнейшим применением принципа соответствия и определяет закон трансформации вторично-квантованных амплитуд состояния.

Заметим теперь, что операторы  $U_L$ , соответствующие преобразованиям  $L$  из группы Лоренца, реализуют представление группы Лоренца и потому, в частности, обладают групповым свойством

$$U_{L_1 L_2} = U_{L_1} U_{L_2}. \quad (21)$$

Используя это свойство и форму бесконечно малого преобразования (18), можно получить выражение  $U_L$  для конечных преобразований. Для этого следует записать для  $U_L$  дифференциальное групповое уравнение и проинтегрировать его (провести выкладку, аналогичную содержащейся в § 6.4). Этим путем получаем, например, для конечных пространственно-временных трансляций

$$x \rightarrow x' = Lx, \quad Lx = x + a, \quad U_L = \exp(iPa). \quad (22)$$

Рассмотрим условие совместимости трансформационных свойств операторных волновых функций. Из (11) и (15) получаем

$$\Lambda_{\omega} u(L_{\omega}^{-1} x) = \hat{U}(\omega) u(x) U(\omega). \quad (23)$$

Условие (23) является наиболее общим операторным условием совместности трансформационных свойств операторных полевых функций, рассмотренных в § 2, и трансформационных свойств амплитуд состояний, вытекающих из постулата квантования. Они накладывают на операторы поля ряд важных условий, которые удобно рассмотреть в дифференциальном виде (т. е. для бесконечно малых преобразований). Займемся этим.

Начнем с бесконечно малого преобразования сдвига

$$x' = x + \delta x, \quad \delta x^k = a^k.$$

Используя (18), рассмотрим в (23) члены первого порядка по  $a^k$ . Получим

$$- \frac{\partial u}{\partial x^k} a^k = -i P_k a^k u(x) + i u(x) P_k a^k,$$

т. е.

$$i \frac{\partial u(x)}{\partial x^k} = [u(x), P_k]. \quad (24)$$

При бесконечно малых поворотах

$$x \rightarrow x' = x + \delta x, \quad \delta x^k = X_{(mn)}^k \delta \omega^{mn}, \quad \Lambda_\omega = \delta_{ij} + A_{i(kl)}^j \delta \omega^{kl}$$

получаем аналогично

$$i \left\{ \sum_i A_{i(mn)}^j u_j - u_i;_k (x_n \delta_m^k - x_m \delta_n^k) \right\} = [M_{mn}, u_i]. \quad (25)$$

Наконец, для бесконечно малых фазовых преобразований находим

$$u(x) = [u(x), Q], \quad -\dot{u}^*(x) = [\dot{u}^*(x), Q]. \quad (26)$$

Можно получить также интегральные аналоги уравнений (24)–(26). Рассмотрим наиболее простой случай конечных трансляций. Переписывая для этого уравнения (23) в виде

$$u(L^{-1}x) = U_L u(x) U_L,$$

подставим в него (22). Находим

$$u(x-a) = e^{-iP \cdot a} u(x) e^{iP \cdot a}.$$

При  $a = x$  получаем отсюда

$$u(x) = e^{iP \cdot x} u(0) e^{-iP \cdot x}.$$

Эта формула, очевидно, является обобщением (7). Она дает зависимость от пространственно-временных координат в явном виде. Из нее следует, что выражение

$$u_S(x) = e^{-iP \cdot x} u(0) e^{iP \cdot x} = u(x)|_{x^0=0} \quad (27)$$

может рассматриваться как оператор поля в представлении Шредингера. Поэтому  $u(x)$ , связанный с (27) соотношением

$$u(x) = e^{iHt} u_S(x) e^{-iHt}, \quad Ht = P_0 x^0, \quad (28)$$

является оператором поля в гейзенберговском представлении. Уравнения (24) представляют собой уравнения движения в гейзенберговском представлении.

Мы получили уравнения (24)—(26), представляющие собой операторные условия для квантованных функций волновых полей, не зависящие от конкретного вида перестановочных соотношений. Разумеется, вместо принятия общего постулата квантования можно было бы постулировать именно эти уравнения. Такая процедура иногда принимается при изложении теории на базе канонического формализма (см. ниже § 11.4). Она, однако, уступает изложенной в общности. Уравнения (24)—(26) позволяют установить ряд свойств операторов  $u$ , общих для всех полей.

**9.5. Физический смысл положительно- и отрицательно-частотных составляющих и сопряженных функций.** Из уравнений (24) непосредственно вытекает физический смысл положительно-частотной и отрицательно-частотной частей операторной функции поля (Швингер (1949а)). Рассмотрим поле частиц с массой  $m$ , описываемое функцией  $u(x)$ :

$$\begin{aligned} u(x) &= u^+(x) + u^-(x), \\ u^+(x) &= \int_{k^0 > 0} e^{ikx} \delta(k^2 - m^2) \tilde{u}(k) dk, \\ u^-(x) &= \int_{k^0 > 0} e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) \tilde{u}(-k) dk. \end{aligned}$$

Подставляя в (24)  $u^+$  и  $u^-$  по отдельности, находим:

$$\left. \begin{aligned} [u^+(x), P^n] &= - \int_{k^0 > 0} e^{ikx} k^n \delta(k^2 - m^2) \tilde{u}(k) dk, \\ [u^-(x), P^n] &= \int_{k^0 > 0} e^{-ikx} k^n \delta(k^2 - m^2) \tilde{u}(-k) dk, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

откуда вытекает:

$$[u^+(k), P^n] = -k^n u^+(k) \quad \left. \vphantom{[u^+(k), P^n]} \right\} \quad k^0 = \sqrt{k^2 + m^2}. \quad (30)$$

$$[u^-(k), P^n] = k^n u^-(k) \quad \left. \vphantom{[u^-(k), P^n]} \right\} \quad (31)$$

Здесь приняты обозначения

$$u^+(k) = \tilde{u}(k)|_{k^0 > 0}, \quad u^-(k) = \tilde{u}(-k)|_{k^0 > 0}.$$

Введем теперь состояние с определенным значением  $p^n$  4-вектора энергии-импульса, описываемое амплитудой  $\Phi_p$ :

$$P^n \Phi_p = p^n \Phi_p. \quad (32)$$

Умножая (30) справа на  $\Phi_p$ , получаем с учетом (32)

$$P^n u^+(k) \Phi_p = (p^n + k^n) u^+(k) \Phi_p.$$

Из (31) тем же способом находим:

$$P^n u^-(k) \Phi_p = (p^n - k^n) u^-(k) \Phi_p,$$

причем в обоих случаях  $k^0 = \sqrt{k^2 + m^2} > 0$ .

Из полученных уравнений вытекает, что выражение  $u^+(k) \Phi_p$  представляет амплитуду состояния с энергией импульсом  $k + p$ , а  $u^-(k) \Phi_p$  соответствует состоянию с энергией-импульсом  $p - k$ . Поскольку при этом выполняется соотношение  $k^2 = m^2$ , то можно считать, что оператор  $u^+(k)$  описывает рождение частицы с массой  $m$  и 4-импульсом  $k$ , а оператор  $u^-(k)$  соответствует уничтожению такой же частицы.

Подчеркнем, что это свойство частотных частей операторов поля является совершенно общим, справедливым для полей любой тензорной размерности, как действительных, так и комплексных, и не зависит от конкретного вида перестановочных соотношений.

Переходя к обсуждению уравнения (25), заметим, что оно явным образом содержит матрицу  $A$  преобразования компонент функций поля, которая определяется тензорной размерностью последнего и реализует конечномерное представление группы Лоренца. Детальный анализ уравнения (25) приводит к разложению операторной функции поля по состояниям с определенными значениями полного момента, что соответствует разложению по сферическим гармоникам.

Рассмотрим еще уравнения (26). Вводя амплитуду  $\Phi_q$  состояния с определенным значением заряда  $q$

$$Q\Phi_q = q\Phi_q,$$

получаем с помощью (26) два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} Q u \Phi_q &= (q - 1) u \Phi_q, \\ Q u^* \Phi_q &= (q + 1) u^* \Phi_q, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

из которых вытекает, что оператор  $u^*$  увеличивает заряд поля на 1, а оператор  $u$  уменьшает его на ту же величину. Подобными свойствами обладают, разумеется, и положительно- и отрицательно-частотные части операторов  $u^*$  и  $u$  по отдельности.

**9.6. Состояние вакуума и амплитуда состояния в фоковском представлении.** На основании проведенного рассмотрения можно естественным образом определить состояние вакуума и установить правила построения амплитуд, соответствующих состояниям с определенным числом различных частиц.

Рассмотрим динамическую систему, состоящую из нескольких не взаимодействующих квантованных полей, характеризующихся опе-

раторными функциями

$$u_1(x), \dots, u_n(x).$$

Для удобства записи включим в эту последовательность также и соответствующие сопряженные функции в тех случаях, когда они отличаются от  $u_i$ .

Определим амплитуду *состояния вакуума*  $\Phi_0$  для данной динамической системы. Так как в вакууме отсутствуют частицы, то энергия и импульс вакуума равны нулю. Поскольку отрицательно-частотные операторы  $u^-$  уменьшают энергию и импульс, а энергия не может быть отрицательной, то должны иметь место соотношения

$$u_1^-(x) \Phi_0 = \dots = u_n^-(x) \Phi_0 = 0$$

при всех  $x$ . Переходя к импульсному представлению, получаем соответственно

$$u_1^-(k_1) \Phi_0 = \dots = u_n^-(k_n) \Phi_0 = 0 \quad (34)$$

при всех  $k_i$  таких, что  $k_i^2 = m_i^2$ , где  $m_i$  — масса частиц  $i$ -го сорта. Соотношения (34) и сопряженные им

$$\Phi_0^* u_1^+(k_1) = \dots = \Phi_0^* u_n^+(k^n) = 0 \quad (35)$$

вместе с условием нормировки

$$\Phi_0^* \Phi_0 = 1 \quad (36)$$

можно считать *определением вакуума свободных полей*.

Амплитуда любого состояния рассматриваемой динамической системы может быть теперь представлена с помощью введенной выше амплитуды вакуума и операторов рождения соответствующих частиц. Так, амплитуда состояния, содержащего всего  $s$  частиц  $j_1, \dots, j_s$  сортов (некоторые из индексов  $j$  могут совпадать), представится выражением вида

$$\Phi = \int F_s(k_1, \dots, k_s) \delta(k_1^2 - m_{j_1}^2) \dots \delta(k_s^2 - m_{j_s}^2) u_{j_1}^+(k_1) \dots \\ \dots u_{j_s}^+(k_s) dk_1 \dots dk_s \Phi_0$$

Здесь  $F_s$  — весовая функция, характеризующая распределение частиц по отношению к непрерывным параметрам состояний — энергии и импульсу, а индексы  $j_1, \dots, j_s$  соответствуют дискретным характеристикам состояний (например, зарядам частиц и значениям проекции спина на заданное направление).

Общая амплитуда для произвольного состояния представится суперпозицией таких выражений:

$$\Phi = \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_s) \\ s \geq 0}} \int F_s(k_1, \dots, k_s) \delta(k_1^2 - m_{j_1}^2) \dots \delta(k_s^2 - m_{j_s}^2) u_{j_1}^+(k_1) \dots \\ \dots u_{j_s}^+(k_s) dk_1 \dots dk_s \cdot \Phi_0. \quad (37)$$

Выражение (37) также может быть записано в конфигурационном представлении. Для этого сначала выполним в нем интеграцию по всем  $k_i^0$ :

$$\Phi = \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_s) \\ s \geq 0}} \int F_s(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_s) u_{l_1}^+(\mathbf{k}_1) \dots u_{l_s}^+(\mathbf{k}_s) d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_s \cdot \Phi_0, \quad (38)$$

где, как обычно,

$$u^+(\mathbf{k}) = \frac{u(\mathbf{k})}{\sqrt{2k^0}} \quad (k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}),$$

а также

$$F_s(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_s) = \frac{F_s(k_1, \dots, k_s)}{\prod_{1 \leq i \leq s} \sqrt{2k_i^0}} \quad (k_i^0 = \sqrt{\mathbf{k}_i^2 + m_i^2}).$$

Переходя к конфигурационному представлению с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \prod \{ \sqrt{2k_i^0} \} F_s(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_s) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3s/2}} \int e^{-i \sum_j (k_j x_j)} \varphi_s(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_s, \\ (2k^0)^{-1/2} u^+(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} u^+(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad u^+(0, \mathbf{x}) = u^+(\mathbf{x})|_{x^0=0}, \end{aligned}$$

получаем вместо (38) следующее выражение для амплитуды состояния:

$$\Phi = \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_s) \\ s \geq 0}} \int \varphi_s(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s) u_{l_1}^+(0, \mathbf{x}_1) \dots \dots u_{l_s}^+(0, \mathbf{x}_s) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_s \cdot \Phi_0. \quad (39)$$

Входящие сюда функции  $\varphi_s(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)$  имеют смысл обычных волновых функций системы  $s$  частиц в конфигурационном пространстве. Если бы мы имели состояние, в котором присутствует точно  $s$  частиц, то амплитуда состояния полностью характеризовалась бы одной такой функцией. В общем случае, когда число частиц не фиксировано, амплитуда состояния характеризуется цепочкой функций  $\varphi_s$ . Мы фактически получим тогда *фоковское представление* амплитуды состояния.

Следует подчеркнуть, что временная зависимость из  $\Phi$  выпала; это совершенно естественно, так как в выбранном нами представлении амплитуда состояния при отсутствии взаимодействия оказывается постоянной.

## § 10. Установление перестановочных соотношений

**10.1. Типы перестановочных соотношений.** Перейдем к установлению перестановочных соотношений между операторными волновыми функциями. В классической теории свободных полей с квадратичным лагранжианом при введении канонического формализма полевые функции линейно выражаются через взаимно сопряженные обобщенные координаты и импульсы. Классические скобки Пуассона функций поля

$$\{u_\alpha(x), u_\beta(y)\}$$

оказываются при этом некоторыми функциями от  $x$  и  $y$  (точнее, от разности  $x - y$ ), *не зависящими от  $u$* . Поэтому, исходя из принципа соответствия\*), в квантовой теории полей принимают, что закон перестановки операторных полевых функций имеет одну из двух форм:

либо

$$\{u_\alpha(x), u_\beta(y)\}_- \equiv u_\alpha(x) u_\beta(y) - u_\beta(y) u_\alpha(x) = \Delta_{\alpha\beta}, \quad (1б)$$

либо \*\*)

$$\{u_\alpha(x), u_\beta(y)\}_+ \equiv u_\alpha(x) u_\beta(y) + u_\beta(y) u_\alpha(x) = \Delta_{\alpha\beta}, \quad (1ф)$$

т. е. считают, что  $c$ -числом  $\Delta_{\alpha\beta}$  является либо коммутатор, либо антикоммутатор двух полевых операторов.

Соотношения первого типа называются перестановочными соотношениями Бозе—Эйнштейна, а соотношения второго типа — перестановочными соотношениями Ферми—Дирака.

Кванты полей, удовлетворяющих соотношениям (1б), подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна. Соответствующие частицы называются *бозонами*. Кванты полей, удовлетворяющих (1ф), подчиняются статистике Ферми—Дирака, а соответствующие частицы называются *фермионами*.

Точный вид перестановочных функций  $\Delta$  для любого поля определяется уравнениями (9.24)—(9.26) и структурой оператора энергии данного поля. Однако независимо от конкретного вида перестановочных соотношений можно показать, что перестановочная функция зависит лишь от разности  $x - y$ , т. е.

$$\{u_\alpha(x), u_\beta(y)\} = \Delta_{\alpha\beta}(x - y). \quad (2)$$

Для того чтобы установить это, рассмотрим коммутационные соотношения (1) в импульсном представлении. Вследствие линейности формул фурье-преобразования коммутаторы или антикоммутаторы

\*) См. по этому поводу § 21 в книге Дирака (1958).

\*\*) Антикоммутативность полевых операторов, выражаемая перестановочными соотношениями (1ф), приводит к тому, что коммутаторы динамических величин, являющихся билинейными по полевым операторам, выражаются через перестановочные функции  $\Delta_{\alpha\beta}$ . В этом смысле и следует понимать принцип соответствия для второго случая.

частотных составляющих в импульсном представлении  $u_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k})$  также должны быть  $c$ -числами. Покажем прежде всего, что операторы одинаковой частотности должны строго коммутировать или антикоммутировать:

$$\{u_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k}), u_{\beta}^{\pm}(\mathbf{q})\} = 0. \quad (3)$$

Здесь, как и в (2), символ  $\{\dots\}$  обозначает либо коммутатор, либо антикоммутатор.

Рассмотрим амплитуду состояний  $\Phi_p$  с определенным значением 4-импульса, удовлетворяющую уравнению (9.32). Действуя на нее операторами  $u_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k})$  и  $u_{\beta}^{\pm}(\mathbf{q})$  в различной последовательности, получаем новые амплитуды

$$\Phi_1 = u_{\beta}^{\pm}(\mathbf{q}) u_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k}) \Phi_p, \quad \Phi_2 = u_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k}) u_{\beta}^{\pm}(\mathbf{q}) \Phi_p,$$

которые, в соответствии с ранее установленным, удовлетворяют уравнениям

$$P^n \Phi_{1,2} = (p^n + k^n + q^n) \Phi_{1,2}.$$

Складывая и вычитая эти уравнения, находим

$$P^n (\Phi_2 \pm \Phi_1) = P^n \{u_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k}), u_{\beta}^{\pm}(\mathbf{q})\} \Phi_p = \\ = (p^n + k^n + q^n) \{u_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k}), u_{\beta}^{\pm}(\mathbf{q})\} \Phi_p$$

Если теперь допустить, что  $\{u_{\alpha}^{\pm}, u_{\beta}^{\pm}\}$  есть  $c$ -число, отличное от нуля, то сокращая на него, получим

$$P^n \Phi_p = (p^n + k^n + q^n) \Phi_p,$$

т. е. приходим к противоречию с исходным уравнением (9.32). Тем самым доказано (3). Точно таким же образом можно доказать, что

$$\{u_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k}), u_{\alpha}^{\mp}(\mathbf{q})\} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{k} \neq \mathbf{q}. \quad (4)$$

Соотношения (3), (4) имеют простой физический смысл. Они соответствуют тому, что акты рождения частиц любого поля не интерферируют между собой, как не интерферируют между собой акты уничтожения частиц, а также акты рождения и уничтожения частиц с различными импульсами.

Для доказательства (2) теперь достаточно рассмотреть коммутаторы (антикоммутаторы) разночастотных частей операторных функций поля. Используя явный вид фурье-преобразования

$$\{u_{\alpha}^{\pm}(x), u_{\beta}^{\mp}(y)\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(p \cdot x - q \cdot y)} \{u_{\alpha}^{\pm}(p), u_{\beta}^{\mp}(q)\} dp dq,$$

убеждаемся, что если потребовать, чтобы коммутатор (антикоммутатор) в импульсном представлении был пропорционален  $\delta$ -функции (ср. (4))

$$\{u_{\alpha}^{\pm}(p), u_{\beta}^{\mp}(q)\} \sim \delta(p - q), \quad (5)$$



то мы получим, что в координатном представлении соответствующая величина будет функцией разности  $x - y$ :

$$\{u_{\alpha}^{\pm}(x), u_{\beta}^{\pm}(y)\} = \Delta_{\alpha\beta}^{\pm}(x - y).$$

Следовательно, будет функцией разности и полный коммутатор (антикоммутатор). Тем самым доказано и (2). Отметим, что формула (2) выражает трансляционную инвариантность перестановочных соотношений. Вполне естественно, что для ее доказательства были использованы свойства оператора 4-вектора энергии-импульса, являющегося генератором преобразований сдвига.

Не составляет труда показать, что в случае комплексных полей, помимо (4), всегда равны нулю также коммутаторы (антикоммутаторы) операторов, относящихся к частицам разных зарядов, т. е.

$$\{u^+, u^-\} = \{u^{*+}, u^{*-}\} = 0. \quad (6)$$

Для этого следует рассмотреть амплитуду состояния  $\Phi_q$  с определенным значением заряда и провести рассуждения, подобные проведенным выше для доказательства (3). Мы предоставляем это читателю.

Физический смысл соотношений (6) заключается во взаимной независимости актов рождения и уничтожения частиц с различными зарядами.

Таким образом установлено, что для любого (комплексного) поля отличными от нуля могут быть лишь  $c$ -числа

$$\{u_{\alpha}^-(p), u_{\alpha}^{*+}(p)\} \quad \text{и} \quad \{u_{\alpha}^{*-}(p), u_{\alpha}^+(p)\},$$

т. е. (анти)коммутаторы операторов рождения и уничтожения, относящихся к частицам с одинаковым 4-вектором энергии-импульса и одинаковым зарядом. Соответствующие выражения в координатном представлении являются трансляционно инвариантными:

$$\{u^+(x), u^{*-}(y)\} = \Delta^+(x - y), \quad \{u^-(x), u^{*+}(y)\} = \Delta^-(x - y),$$

а их сумма дает полную перестановочную функцию

$$\{u(x), u^*(y)\} = \Delta(x - y) = \Delta^+(x - y) + \Delta^-(x - y).$$

Для определения нормировки в перестановочных соотношениях (5) и явного вида перестановочных функций следует обратиться к явному виду оператора 4-вектора энергии-импульса и использовать уравнения (9.24—9.26).

**10.2. Перестановочные соотношения Ферми—Дирака и Бозе—Эйнштейна.** Для установления конкретного вида перестановочных соотношений воспользуемся теперь уравнениями (9.24), причем оператор энергии-импульса запишем в виде

$$P^n = \sum_{\alpha} \int dq q^n [a_{\alpha}^{*+}(q) a_{\alpha}^-(q) \pm a_{\alpha}^{*-}(q) a_{\alpha}^+(q)]. \quad (7)$$

В соответствии с классическими выражениями (3.26), (3.39), (4.23), (5.20) и (7.34) мы выразили его через независимые амплитуды  $a_{\alpha}^{\pm}$ ,  $a_{\alpha}^{*\pm}$ , связанные с  $u^{\pm}$ ,  $u^{*\pm}$  линейными соотношениями вида

$$u_{\alpha}^{\pm}(k) = v_{\alpha\beta}^{\pm}(k) a_{\beta}^{\pm}(k), \quad (8)$$

причем коэффициенты  $v_{\alpha\beta}^{\pm}$  являются  $c$ -числами.

Ввиду некоммутативности операторов  $a^{\pm}$ ,  $a^{*\pm}$  их порядок в (7) соответствует порядку функций  $\bar{u}$  и  $u$  в лагранжианах. Напомним, что операторы  $a^{\pm}$  и  $a^{*\pm}$  связаны условиями комплексного (теперь эрмитового) сопряжения

$$(a^{\pm}(k))^* = a^{*\mp}(k). \quad (9)$$

Верхний знак перед вторым членом в правой части (7) относится к полям с целым спином (скалярное, векторное, электромагнитное), нижний — к полям с полуцелым спином (спинорное).

Заметим теперь, что из (3), (6) и (8) вытекают следующие свойства коммутаторов операторов  $a^{\pm}$ ,  $a^{*\pm}$  и их билинейных форм, входящих в (7):

$$\begin{aligned} [a^{+}(k), a^{*}(q) a^{-}(q)]_{-} &= [a^{-}(k), a^{-}(q) a^{+}(q)]_{-} = 0, \\ [a^{+}(k), a^{-}(q) a^{+}(q)]_{-} &= \{a^{+}(k), a^{-}(q)\} a^{+}(q), \\ [a^{-}(k), a^{*}(q) a^{-}(q)]_{-} &= \{a^{-}(k), a^{*}(q)\} a^{-}(q), \end{aligned} \quad (10)$$

а также аналогичные соотношения для коммутаторов  $a^{\pm}$ , которые могут быть получены из приведенных с помощью эрмитова сопряжения. Подставляя (7) в (9.30) и (9.31), с помощью (10) получаем

$$\begin{aligned} k^n a_{\alpha}^{-}(k) &= \int dq q^n \{a^{-}(k), a_{\beta}^{*}(q)\} a_{\beta}^{-}(q), \\ -k^n a_{\alpha}^{+}(k) &= \pm \int dq q^n \{a_{\alpha}^{+}(k), a_{\beta}^{-}(q)\} a_{\beta}^{+}(q), \end{aligned}$$

откуда следует

$$\{a_{\alpha}^{-}(k), a_{\beta}^{+}(q)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(k - q), \quad (11)$$

$$\{a_{\alpha}^{+}(k), a_{\beta}^{-}(q)\} = \mp \delta_{\alpha\beta} \delta(k - q). \quad (12)$$

Таким образом, для поля каждого типа мы получили два варианта перестановочных соотношений. Требование симметрии этих соотношений относительно замены знака электрического заряда, точнее, замены частиц на античастицы

$$a_{\alpha}^{\pm}(k) \leftrightarrow a_{\alpha}^{*\mp}(k) \quad (13)$$

однозначно определяет рецепт квантования в каждом случае. Симметрия (13) отражает тот факт, что выбор между «основной» функцией поля  $u$  и ее комплексно-сопряженной  $u^*$  есть вопрос соглашения, и противоположный выбор

$$\psi(x) = u^*(x), \quad \psi^*(x) = u(x)$$

приводит лишь к замене «основных» частиц на античастицы. Такая замена сказывается на операторе заряда, который не инвариантен относительно (13), но не должна сказываться на уравнении движения (9.24) и выражении для 4-вектора энергии-импульса. Условия симметрии относительно (13) также обеспечивают правильный переход от комплексного к действительному полю

$$u^*(x) = u(x), \quad a^\pm(k) = a^\pm(k).$$

Отметим, что преобразование вида (13) называется *зарядовым сопряжением*, а соответствующая симметрия — *зарядовой симметрией* (см. ниже §§ 13, 14).

Используя симметрию относительно (13), получаем, что в случае полей с целым спином (верхний знак в правой части (12)) *непротиворечивым оказывается квантование по Бозе—Эйнштейну*, а в случае спинорных полей (нижний знак) — *по Ферми—Дираку*.

Заметим еще, что если вместо симметрии (13) использовать свойство положительности метрики в гильбертовом пространстве

$$\Phi^\dagger A \Phi = \Phi^\dagger |A|^2 \Phi > 0,$$

то к тем же самым выводам можно прийти только с помощью уравнения (12). Мы предоставляем читателю проделать соответствующую выкладку.

Таким образом, мы получили, что поля с целым спином квантуются по Бозе—Эйнштейну

$$[a_{\alpha}^-(k), a_{\beta}^+(q)]_- = \delta_{\alpha\beta} \delta(k - q), \quad [a_{\alpha}^-(k), a_{\beta}^+(q)]_- = \delta_{\alpha\beta} \delta(k - q), \quad (14)$$

а с полуцелым спином — по Ферми—Дираку:

$$[a_{\alpha}^-(k), a_{\beta}^+(q)]_+ = \delta_{\alpha\beta} \delta(k - q), \quad [a_{\alpha}^-(k), a_{\beta}^+(q)]_+ = \delta_{\alpha\beta} \delta(k - q). \quad (15)$$

Отметим здесь, что перестановочными соотношениями (14), (15) однозначно определяются нормировки операторных полевых функций.

**10.3. Связь спина со статистикой. Теорема Паули.** Полученные результаты представляют собой частный случай *фундаментальной теоремы Паули*, устанавливающей связь трансформационных свойств поля и способа его квантования (связь спина со статистикой):

«Поля, описывающие частицы с целым спином, квантуются по Бозе—Эйнштейну; поля, описывающие частицы с полуцелым спином, квантуются по Ферми—Дираку».

Теорема Паули применима к полям с произвольным (сколь угодно высоким) спином.

При доказательстве теоремы Паули мы использовали положительность метрики и (или) симметрию относительно (13). Однако возможны и иные пути рассуждений. Нарушение связи спина со статистикой, устанавливаемой теоремой Паули, приводит к ряду других глубоких противоречий. Покажем это для комплексного скалярного поля (рассуждение Паули).

Вычислим для этого в явном виде частотные части перестановочной функции в координатном представлении.

Переходя к координатному представлению, получаем в правых частях формул (14) выражения

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk dq}{\sqrt{2k^0} \sqrt{2q^0}} e^{iqy - ikx} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{2k^0} e^{-ik(x-y)} = \frac{1}{i} D^-(x-y), \quad (16)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{2k^0} e^{ik(x-y)} = iD^+(x-y) = \frac{1}{i} D^-(y-x). \quad (17)$$

Мы ввели здесь стандартные обозначения для частотных частей перестановочной функции Паули—Йордана:

$$D(x) = D^+(x) + D^-(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k^0) d^4k, \quad (18)$$

причем

$$\varepsilon(k^0) = \theta(k^0) - \theta(-k^0) = \begin{cases} +1 & \text{при } k^0 > 0, \\ -1 & \text{при } k^0 < 0. \end{cases}$$

Квантование рассматриваемого комплексного скалярного поля по Бозе—Эйнштейну по формулам (14) после перехода к координатному представлению дает

$$[\varphi^-(x), \varphi^{*+}(y)]_- = \frac{1}{i} D^-(x-y), \quad (19)$$

$$[\varphi^+(x), \varphi^{*-}(y)]_- = \frac{1}{i} D^+(x-y). \quad (20)$$

Поэтому полный коммутатор в координатном представлении выражается через функцию Паули—Йордана

$$[\varphi(x), \varphi^{*}(y)]_- = \frac{1}{i} D(x-y), \quad (21)$$

В то же время при квантовании по Ферми—Дираку из формулы (11) и формулы (12) с верхним знаком получаем

$$[\varphi^-(x), \varphi^{*+}(y)]_+ = \frac{1}{i} D^-(x-y), \quad [\varphi^+(x), \varphi^{*-}(y)]_+ = iD^+(x-y),$$

$$[\varphi(x), \varphi^*(y)]_+ = \frac{1}{i} D(x-y).$$

Эта формула содержит противоречие, поскольку при  $y = x$  левая часть ее существенно положительна, а правая обращается в нуль. Последнее легче всего усмотреть из вытекающего из (17) свойства антисимметрии:

$$D(-x) = -D(x) \quad (22)$$

Таким образом, квантование скалярного поля по Ферми—Дираку приводит к противоречию со свойствами коммутаторов в пространстве-времени (см. Паули (1941)).

При изложении квантования спинорного поля по Ферми—Дираку часто апеллируют к отрицательному знаку у второго члена в классическом выражении для энергии (7.34), приводящему к знаконеопределенности при квантовании по Бозе—Эйнштейну. Мы не будем повторять эти хорошо известные рассуждения, тем более, что в нашей основной аргументации мы существенно использовали этот знак.

Отметим еще, что мы установили теорему Паули для идеализированного случая свободных полей. В последние годы аналогичное утверждение было доказано для взаимодействующих полей в рамках так называемой аксиоматической квантовой теории поля (см., например, главу 4 книги Стритера и Вайтмана (1964), а также главу 5 в книге Боголюбова, Логунова, Тодорова (1969)).

**10.4. Нормальное произведение операторов и запись динамических переменных.** Введем понятие оператора, записанного в нормальной форме, и понятие нормального произведения операторов.

*Нормальной формой оператора* называется такая форма, в каждом слагаемом которой все операторы рождения  $u^+$  (соответственно  $a^+$  в импульсном представлении) стоят слева от всех операторов уничтожения  $u^-$  (соответственно  $a^-$ ).

Нетрудно видеть, что нормальная форма операторов является наиболее удобной с точки зрения вычислений. Действительно, при вычислении матричного элемента  $\overset{*}{\Phi} A \Phi$  какого-либо оператора  $A$  в нормальной форме необходимо лишь коммутировать входящие в  $A$  операторы  $u^-$  со всеми  $u^+$  из амплитуды состояния  $\Phi$  и  $u^+$  из  $A$  со всеми  $u^-$  из  $\overset{*}{\Phi}$  до тех пор, пока один из  $u^-$  не подействует на  $\Phi^0$  или один из  $u^+$  — на  $\overset{*}{\Phi}_0$ , что даст нуль.

Рассмотрим пример: запишем в нормальной форме произведение двух бозе-операторов  $\varphi^*(x)$  и  $\varphi(y)$ . Имеем последовательно

$$\begin{aligned} \varphi^*(x)\varphi(y) &= \varphi^{*+}(x)\varphi^+(y) + \varphi^{*+}(x)\varphi^-(y) + \varphi^{*-}(x)\varphi^+(y) + \varphi^{*-}(x)\varphi^-(y) = \\ &= \varphi^{*+}(x)\varphi^+(y) + \varphi^{*+}(x)\varphi^-(y) + \varphi^+(y)\varphi^{*-}(x) + \varphi^-(y)\varphi^{*-}(x) - i\Delta^-(x-y). \end{aligned}$$

Очевидно, что в более общем случае, приводя к нормальной форме произведение некоторого количества операторных волновых функций  $u$ , мы получим сумму произведений компонент  $\varphi^+$ ,  $\varphi^-$  и перестановочных  $\Delta^-$ -функций. Общий рецепт такого приведения рассмотрен нами ниже (§ 17) и составляет содержание важной теоремы Вика. Все выражение в целом можно условно считать «полиномом» по степеням  $\Delta^-$ -функций. Нулевой член этого полинома, т. е. сумма членов, вообще не содержащих  $\Delta^-$ -функций, называется *нормальным произведением* исходных операторных волновых функций. Нормальное произведение можно также определить как произведение, приведенное к нормальной форме, причем в процессе приведения все перестановочные функции считаются равными нулю.

Нормальное произведение операторов  $u_1, u_2, \dots, u_n$  обозначается символом

$$: u_1 u_2 \dots u_n :.$$

В качестве другого примера запишем нормальное произведение двух операторов  $\psi^*(x)$  и  $\psi(y)$ , квантованных по Ферми—Дираку. Имеем, очевидно,

$$: \psi^*(x)\psi(y) := \psi^{*+}(x)\psi^+(y) + \psi^{*+}(x)\psi^-(y) - \psi^+(y)\psi^{*-}(x) + \psi^-(y)\psi^{*-}(x).$$

Условимся теперь *все динамические переменные, квадратично зависящие от операторов с одинаковыми аргументами, такие, как лагранжиан, энергия-импульс, ток и т. д., записывать по определению в форме нормального произведения*. Например, лагранжиан комплексного скалярного поля (3.32) будем писать в виде

$$\mathcal{L} = : \varphi, {}_n \varphi :^n : - m^2 : \varphi \varphi :.$$

Нетрудно видеть, что отсюда в силу определения амплитуды вакуума  $\Phi_0$

$$\varphi^-(x)\Phi_0 = 0, \quad \varphi^{*-}(x)\Phi_0 = 0$$

и ему сопряженного соотношения  $\Phi_0 \varphi^+(x) = 0$ ,  $\Phi_0 \varphi^{*+}(x) = 0$  следует равенство нулю средних значений всех динамических величин по вакуумному состоянию, т. е.

$$\Phi_0 P^n \Phi_0 = 0, \quad \Phi_0 Q \Phi_0 = 0 \text{ и т. д.}$$

Тем самым из теории сразу исключаются псевдофизические величины типа *нулевой энергии*, *нулевого заряда* и т. п., обычно возникающие при квантовании. Совершенно очевидно при этом, что все законы сохранения, установленные в классической теории для введенных динамических величин, сохраняются и здесь, так как при доказательстве использовались алгебраические тождества, справедливые и для нормальных произведений.

Отметим, что переход к нормальному произведению может нарушать свойство положительности.

Для того чтобы записать перестановочные соотношения в релятивистски инвариантном виде, перейдем к 4-мерным операторам, определяемым соотношениями

$$a^{\pm}(k) = \frac{a(\pm k)}{\sqrt{2k^0}} \quad (k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}),$$

откуда также вытекает:

$$a^{\pm}(k) = \int \sqrt{2k^0} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) a(\pm k) dk^0.$$

Представляя поэтому правые части (14) и (15) в виде

$$\delta_{ij} \int dk^0 \int dk'^0 2k^0 \theta(k^0) \delta(k - k') \delta(k^2 - m^2),$$

получим, приравнивая подынтегральные выражения,

$$\begin{aligned} \theta(k^0) \theta(k'^0) \delta(k^2 - m^2) \delta(k'^2 - m^2) \{a_i(-k), a_j(k')\}^* &= \\ = \theta(k^0) \theta(k'^0) \delta(k^2 - m^2) \delta(k'^2 - m^2) \{a_i(-k), a_j^*(k')\} &= \\ = \delta_{ij} \delta(k - k') \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0). \end{aligned}$$

Отсюда следует для ферми-операторов

$$\delta(k^2 - m^2) \delta(k'^2 - m^2) \{a_i(k), a_j^*(k')\}_+ = \delta_{ij} \delta(k + k') \delta(k^2 - m^2) \quad (23)$$

и для бозе-операторов —

$$\begin{aligned} \delta(k^2 - m^2) \delta(k'^2 - m^2) \{a_i(k), a_j^*(k')\}_- &= \\ = -(\theta(k^0) - \theta(k'^0)) \delta_{ij} \delta(k + k') \delta(k^2 - m^2) \end{aligned} \quad (24)$$

**10.5. Перестановочные соотношения в дискретном импульсном представлении.** Приведем еще запись перестановочных соотношений в упоминавшемся выше (§ 3) дискретном импульсном представлении. Используя дискретное разложение типа (3.28) для функций поля

$$u(x) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{(n_1, n_2, n_3)} \left( \frac{u^+(n)}{\sqrt{2k^0}} e^{\frac{2\pi i t}{L}(nx)} + \frac{u^-(n)}{\sqrt{2k^0}} e^{-\frac{2\pi i t}{L}(nx)} \right)$$

и дискретное представление типа (3.31) 4-вектора энергии-импульса

$$P^m = \sum_{(\alpha, n)} (a_{\alpha}^{\dagger}(n) a_{\alpha}^{-}(n) + a_{\alpha}^{+}(n) a_{\alpha}^{*}(n)) k^m,$$

где

$$u(n) = u(n_1, n_2, n_3), \quad a(n) = a(n_1, n_2, n_3),$$

$$k^\alpha = \frac{2\pi}{L} n^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad \text{и} \quad k^0 = \frac{2\pi}{L} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \frac{L^2}{4\pi^2} m^2},$$

выкладкой, аналогичной вышеприведенной, приходим к следующим дискретным перестановочным соотношениям:

в случае спинорного поля

$$\{a_\alpha^+(n), a_\beta^*(n')\}_+ = \{a_\alpha^-(n), a_\beta^*(n')\}_+ = \delta_{\alpha\beta} \delta_{nn'}, \quad (25)$$

в случае всех остальных полей

$$\{a_\alpha^-(n), a_\beta^*(n')\}_- = \{a_\alpha^+(n), a_\beta^*(n')\}_- = \delta_{\alpha\beta} \delta_{nn'}. \quad (26)$$

Здесь  $\delta_{nn'}$  — произведение символов Кронекера:

$$\delta_{nn'} = \delta_{n_1 n'_1} \delta_{n_2 n'_2} \delta_{n_3 n'_3},$$

а дискретные операторы  $a(n)$  связаны с непрерывными  $a(k)$  в пределе больших  $L$  соотношениями типа (3.30):

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{3/2} a(n) = a(k).$$

В теории вторичного квантования квадратичные комбинации дискретных операторов рождения и уничтожения типа

$$a^\dagger a^*, \quad a^\dagger a^-$$

играют роль операторов числа частиц. В самом деле, рассмотрим случай квантования по Бозе—Эйнштейну. Получим тогда из (26)

$$a^- a^\dagger - a^\dagger a^- = 1. \quad (27)$$

Обозначая оператор  $a^\dagger a^-$  через  $n$ :

$$n = a^\dagger a^-, \quad (28)$$

покажем, что собственные значения  $N$  оператора  $n$

$$n\Phi = N\Phi \quad (29)$$

целочисленны. Рассмотрим для этого выражение

$$(\Phi (a^\dagger)^k (a^-)^k \Phi). \quad (30)$$

Выполняя последовательные коммутации операторов  $a^\dagger$  и  $a^-$  с учетом следующего из (27) и (28) соотношения

$$a^\dagger n = (n-1) a^\dagger,$$

получаем последовательно:

$$a^\dagger a^\dagger a^- a^- = a^\dagger n a^- = (n-1) a^\dagger a^- = n(n-1),$$

$$a^\dagger a^\dagger a^\dagger a^- a^- a^- = a^\dagger n(n-1) a^- = (n-1) a^\dagger (n-1) a^- = n(n-1)(n-2),$$

.....  
 .....  
 .....



откуда следует

$$(\overset{*}{\Phi} (a^+)^k (a^-)^k \Phi) = (\overset{*}{\Phi} n (n-1) \dots (n-k+1) \Phi) = N(N-1) \dots (N-k+1) (\overset{*}{\Phi} \Phi). \quad (31)$$

Ввиду того, что оператор

$$(a^+)^k (a^-)^k$$

представляет собой произведение некоторого оператора на сопряженный ему, матричный элемент (30) не может быть отрицательным. С другой стороны, при целом  $N$  найдется такое

$$k > N + 1,$$

при котором (31) станет меньшим нуля, что невозможно. Следовательно,  $N$  — целое число.

Как видно, в дискретном представлении 4-импульс и заряд выражаются суммами типа

$$\sum_{\nu} \omega_{\nu} n_{\nu},$$

где  $\omega_{\nu}$  — 4-импульс или заряд одной частицы в состоянии  $\nu$ . Естественно поэтому считать  $n_{\nu}$  оператором, представляющим число частиц в данном состоянии.

Обратимся к квантованию Ферми—Дирака:

$$a^- a^+ + a^+ a^- = 1. \quad (32)$$

Обозначая

$$a^+ a^- = n,$$

исследуем собственные значения  $N$  оператора  $n$ . Рассмотрим для этого выражение

$$\overset{*}{\Phi} n^2 \Phi = N^2 \overset{*}{\Phi} \Phi$$

Коммутируя операторы  $a^-$  и  $a^+$  с учетом соотношений

$$a^- n = (1 - n) a^-, \quad a^- a^- + a^- a^- = 0,$$

получаем:

$$n^2 = a^+ a^- a^+ a^- = a^+ a^- n = a^+ (1 - n) a^- = n - a^+ a^+ a^- a^- = n,$$

т. е.

$$\overset{*}{\Phi} n^2 \Phi = \overset{*}{\Phi} n \Phi,$$

откуда

$$N^2 = N,$$

и, следовательно,

$$N = 0, 1. \quad (33)$$

Используя выражения операторов энергии-импульса и заряда, далее без труда находим, что числа  $N_{\nu}$ , соответствующие операторам

$$n_{\nu} = a_{\nu}^+ a_{\nu}^-, \quad n_{\nu}^* = a_{\nu}^- a_{\nu}^+,$$

действительно равны числу частиц с соответствующими импульсами и зарядами, и операторы  $n_{\nu}$  и  $n_{\nu}^*$  поэтому являются операторами числа частиц.

Мы видим, таким образом, что квантование по Бозе—Эйнштейну и Ферми—Дираку приводит к совершенно различным физическим картинам. При квантовании по (27) числа заполнения  $N$  могут принимать любые сколь угодно большие целые значения. В случае статистики Бозе—Эйнштейна в одном и том же состоя-

нии (характеризуемом 4-импульсом, зарядом и спином) может находиться любое сколь угодно большое число частиц. Наоборот, при квантовании по (32) числа заполнения в согласии с (33) принимают лишь два значения: 0 и 1. Соотношение (33) является выражением *принципа Паули*: в системе частиц, подчиняющихся статистике Ферми—Дирака, в одном и том же состоянии может находиться не более одной частицы.

Мы вкратце рассмотрели здесь обычное дискретное представление функций поля, применявшееся главным образом в ранних работах по квантовой теории поля. Его достоинством является простота и наглядность введения чисел заполнения и возможностью представления амплитуды состояния как функции этих чисел.

Однако ввиду его нековариантности мы не станем его использовать в нашем изложении и будем иметь дело с непрерывным представлением.

Нетрудно заметить, что в этом случае операторные выражения

$$a^+(k) a^-(k), \quad a^+(k) a^-(k)$$

играют роль плотности числа частиц в трехмерном импульсном пространстве.

## § 11. Скалярное и векторное поля

В этом параграфе мы рассмотрим простейшие бозонные поля, действительное и комплексное (псевдо)скалярные поля, пионное поле и поле заряженных векторных мезонов.

**11.1. Действительное и комплексное скалярные поля.** В соответствии с формулами §§ 10.2 и 10.3 коммутаторы действительного скалярного поля имеют вид:

$$[\varphi^-(k), \varphi^+(q)]_- = \delta(k - q), \quad (1)$$

$$[\varphi^-(x), \varphi^+(y)]_- = \frac{1}{i} D^-(x - y) = iD^+(y - x), \quad (2a)$$

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_- = \frac{1}{i} D(x - y), \quad (2б)$$

где перестановочная функция Паули—Йордана  $D$  и ее частотные части  $D^\pm$  определены согласно (10.16), (10.17), (10.18).

Дифференцируя (2б) по  $x^0$ , с учетом (10.16) и (10.18), получаем при  $y^0 = x^0$ ,  $y = x'$

$$[\dot{\varphi}(x, x^0), \varphi(x', x^0)] = \frac{1}{i} \delta(x - x') \quad (3)$$

Основные динамические переменные квантового действительного скалярного поля получим по общему рецепту § 10, записывая соответствующие выражения для неквантованного поля с помощью нормальных произведений:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} : \frac{\partial \varphi}{\partial x^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} : - \frac{m^2}{2} : \varphi^2 : , \\ T_{mn} &= : \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \frac{\partial \varphi}{\partial x^n} : - g^{mn} \mathcal{L}, \\ P^n &= \int dk k^n \varphi^+(k) \varphi^-(k). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Заметим, что рассуждениями § 9, установившими смысл частотных частей функции поля  $\varphi^+$  и  $\varphi^-$ , не была определена их нормировка. Эта нормировка может теперь быть установлена с помощью выражения (4) для 4-вектора энергии-импульса. Вводя в рассмотрение амплитуду состояния, содержащего одну скалярную частицу с ненормированной функцией распределения по импульсам  $c(\mathbf{k})$ :

$$\Phi_1 = \int c(\mathbf{k}) \varphi^+(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \Phi_0, \quad (5)$$

вычислим среднее значение оператора  $P^n$  (4) по этому состоянию. Выполняя коммутации операторов, получаем:

$$\langle P^n \rangle_1 \equiv \frac{\Phi_1 P^n \Phi_1}{\Phi_1 \Phi_1} = \frac{\int c^*(\mathbf{k}) c(\mathbf{k}) k^n d\mathbf{k}}{\int c^*(\mathbf{k}) c(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}. \quad (6)$$

Переход к состоянию с фиксированным значением 4-импульса  $K^n$  может быть выполнен в (5) и (6) путем локализации функции  $c(\mathbf{k})$  в малой окрестности значения  $\mathbf{k} = \mathbf{K}$  (например, предельным процессом типа  $c(\mathbf{k}) \rightarrow \sim \delta(\mathbf{k} - \mathbf{K})$ ). При этом  $k^n \rightarrow K^n$ , и мы получаем:

$$\langle P^n \rangle_1 \rightarrow K^n.$$

Таким образом, среднее значение оператора  $P^n$  по состоянию с фиксированным значением 4-импульса  $K^n$  в точности равно  $K^n$  (что находится в соответствии с результатами предыдущего параграфа, см. петит), и следовательно, нормировка операторов  $\varphi^+$  и  $\varphi^-$  в выражении (4) является правильной.

В отличие от действительного поля комплексное скалярное поле, описывающее заряженные частицы с обоими знаками заряда, характеризуется двумя комплексно сопряженными функциями  $\varphi$  и  $\varphi^*$ .

Переходя к рассмотрению частотных частей функций  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\varphi}^*$ , находим в соответствии с установленными в § 10 свойствами для  $\varphi$  уменьшать, а для  $\varphi^*$  увеличивать заряд поля, что оператор  $\varphi^+$  описывает рождение частицы с отрицательным зарядом, оператор  $\varphi^-$  — уничтожение частицы с положительным зарядом, оператор  $\varphi^{*+}$  — рождение частицы с положительным зарядом и оператор  $\varphi^{*-}$  — уничтожение частицы с отрицательным зарядом.

В § 10 было также установлено, что скалярное поле квантуется по Бозе—Эйнштейну и что операторы, относящиеся к частицам с различными зарядами, всегда коммутируют между собой. Отсюда вытекает, что правила перестановки операторов комплексного скалярного поля имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} [\varphi^-(\mathbf{k}), \varphi^+(k')]_- &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [\varphi^-(\mathbf{k}), \varphi^{*+}(k')]_- &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

а все остальные коммутаторы равны нулю.

Соответствующие формулы в  $x$ -представлении были получены в § 10.3 (см. (10.19), (10.20) и (10.21)).

Основные динамические величины получим, записав формулы (3.32), (3.33), (3.39) и (3.40) с помощью нормальных производений. Получаем:

$$\mathcal{L} = : \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} : - m^2 : \varphi \varphi^* : , \quad (8)$$

$$T_{mn} = : \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^m} \frac{\partial \varphi}{\partial x^n} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \right) : - g^{mn} \mathcal{L} , \quad (9)$$

$$P^n = \int d\mathbf{k} \cdot k^n (\varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k}) + \varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k})) , \quad (10)$$

$$Q = \int d\mathbf{k} (\varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k}) - \varphi^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k})) . \quad (11)$$

Из структуры операторов  $P^n$  и  $Q$  вытекает, что  $\varphi^+(\mathbf{k})$  есть оператор рождения частицы с энергией-импульсом  $\mathbf{k}$  и зарядом  $+1$ ,  $\varphi^-(\mathbf{k})$  — оператор уничтожения той же частицы;  $\varphi^+(\mathbf{k})$  — оператор рождения частицы с энергией-импульсом  $\mathbf{k}$  и зарядом  $-1$ ;  $\varphi^-(\mathbf{k})$  — оператор уничтожения той же частицы.

Отметим, что простейшее комплексное (псевдо)скалярное поле, как это отмечалось в § 2.4, соответствует  $K$ -мезонам. Как известно,  $K$ -мезоны образуют два изотопических дублета — дублет «основных» частиц ( $K^0$ ,  $K^-$ ) и дублет античастиц ( $\bar{K}^0$ ,  $K^+$ ). Изложенный формализм как бы соответствует заряженным компонентам этих дублетов ( $K^+$ ,  $K^-$ ). Для описания всех четырех  $K$ -мезонов необходимо заменить изотопический скаляр  $\varphi$  на двухкомпонентный изоспинор

$$\Phi = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_- \end{pmatrix}, \quad \Phi^* = (K_0^*, K_+^*) \quad (12)$$

и учесть связь (2.24) между третьей компонентой изотопического спина и электрическим зарядом. Получаем вместо (8), (10) и (11)

$$\mathcal{L} = : \Phi^*_{,n} \Phi^{,n} : - m_K^2 : \Phi \Phi^* : , \quad (13)$$

$$\begin{aligned} P^n &= \int dq q^n \{ \Phi^+(q) \Phi^-(q) + \Phi^+(q) \Phi^-(q) \} = \\ &= \int dq q^n \{ K_-^+(q) K_-^-(q) + K_0^+(q) K_0^-(q) + K_0^+(q) K_0^-(q) + K_+^+(q) K_+^-(q) \} , \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} Q &= \int dq \left\{ \Phi^+(q) \frac{\tau_3 - 1}{2} \Phi^-(q) - \Phi^+(q) \frac{\tau_3 - 1}{2} \Phi^-(q) \right\} = \\ &= \int dq [K_+^+(q) K_+^-(q) - K_-^+(q) K_-^-(q)] . \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $K_0^+$ ,  $K_+^+$  — операторы рождения и уничтожения «основного» дублета ( $K_0$ ,  $K_-$ ), а  $K_0^-$ ,  $K_+^-$  — антидублета ( $K_0$ ,  $K_+$ ).

**11.2. Поле пи-мезонов.** Как это уже было упомянуто в § 3.5, пионное поле описывается тремя действительными компонентами  $\pi_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) изотопического вектора  $\pi(x)$  или их комплексными линейными комбинациями

$$\varphi_1 = \frac{\pi_1 - i\pi_2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_2 = \pi_3, \quad \varphi_3 = \frac{\pi_1 + i\pi_2}{\sqrt{2}}. \quad (3.43)$$

Напомним также, что переход от  $\pi_i$  к  $\varphi_k$  сохраняет свойство диагональности квадратичной формы (ср. (3.44) и (3.45)).

Переходя к рассмотрению частотных частей функций  $\varphi$ , находим, что в соответствии с обсуждением в § 9.5 операторы  $\varphi$  описывают:

- $\varphi_1^*$  — рождение  $\pi^+$ -мезона,
- $\varphi_1^-$  — уничтожение  $\pi^+$ -мезона,
- $\varphi_2^+$  — рождение  $\pi^0$ -мезона,
- $\varphi_2^-$  — уничтожение  $\pi^0$ -мезона,
- $\varphi_3^*$  — рождение  $\pi^-$ -мезона,
- $\varphi_3^-$  — уничтожение  $\pi^-$ -мезона.

Перестановочные соотношения имеют вид

$$[\varphi_m^-(k), \varphi_n^+(q)]_- = [\pi_m^-(k), \pi_n^+(q)]_- = \delta_{mn} \delta(k - q), \quad (16)$$

$$[\varphi_m^-(x), \varphi_n^+(y)]_- = [\pi_m^-(x), \pi_n^+(y)]_- = \frac{\delta_{mn}}{i} D^-(x - y), \quad (17)$$

$$[\varphi_m(x), \varphi_n(y)]_- = [\pi_m(x), \pi_n(y)]_- = \frac{\delta_{mn}}{i} D(x - y). \quad (18)$$

Основные динамические величины свободного пионного поля получим, записав соответствующие выражения из § 3.5 с помощью нормальных произведений:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} : (\pi; \pi; \pi; \pi) : - \frac{m^2}{2} : \pi\pi : = \frac{1}{2} : \varphi_\alpha; \varphi_\alpha : - \frac{m^2}{2} : \varphi_\alpha \varphi_\alpha :, \quad (19)$$

$$P^n = \int dq q^n \pi^+(q) \pi^-(q) = \int dq q^n \varphi_\alpha^+(q) \varphi_\alpha^-(q), \quad (20)$$

$$Q = \int dq \{ \varphi_1^+(q) \varphi_1^-(q) - \varphi_3^+(q) \varphi_3^-(q) \} = \int dq \varphi^+(q) T_3 \varphi^-(q). \quad (21)$$

При переходе от (19) к (20), (21) следует учесть взаимную зависимость (3.43) комплексных функций  $\varphi_\alpha$ .

**11.3. Комплексное векторное поле.** При квантовании векторного поля мы, как и ранее в § 4, ограничимся рассмотрением комплексного векторного поля. Заметим при этом, что переход к действительному векторному полю в нижеприведенных формулах может быть выполнен с учетом изменения вида перестановочных соотношений (ср. переход от (7) к (1)).

Для установления правил квантования 4-потенциала векторного поля заметим, что механическое обобщение на этот случай

правил квантования скалярного поля, т. е. независимое квантование каждой компоненты потенциала  $U_n$  по образцу скалярного поля оказывается невозможным, поскольку такая процедура не обеспечивает положительности среднего значения энергии и оказывается несоместной с дополнительным условием (4.3).

Схема квантования поэтому должна быть связана с дополнительным условием, которое, как мы убедились § 4, автоматически обеспечивает положительность  $P^0$ . Там было, в частности, показано, что в результате перехода от  $U_n$  к продольным и поперечным составляющим по формуле (4.22) 4-вектор энергии-импульса может быть выражен через три линейно независимые амплитуды  $a_\alpha(\mathbf{k})$  следующим образом:

$$P^n = \int d\mathbf{k} \cdot k^n \sum_{\alpha=1, 2, 3} (a_\alpha^*(\mathbf{k}) a_\alpha^-(\mathbf{k}) + \bar{a}_\alpha^*(\mathbf{k}) a_\alpha^+(\mathbf{k})). \quad (4.23)$$

При такой записи классического 4-импульса учтено дополнительное условие (4.3) и обеспечена положительность неквантованного  $P^0$ . Ясно также, что непосредственное квантование по Бозе—Эйнштейну трех независимых амплитуд  $a_\alpha$  обеспечит положительную определенность среднего значения оператора энергии.

Ввиду этого операторы  $a_\alpha$  должны быть подчинены следующим перестановочным соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} [a_\alpha^-(\mathbf{k}), a_\beta^+(\mathbf{k}')^-]_- &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [\bar{a}_\alpha^*(\mathbf{k}), a_\beta^+(\mathbf{k}')^-]_- &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

(все остальные коммутаторы равны нулю).

Переписывая в нормальной форме выражения 4-вектора энергии-импульса (4.27), заряда (4.28) и проекции вектора спина на направление движения (4.29), записанные с помощью амплитуд  $b_\alpha$ , связанных с  $a_\alpha$  соотношениями (4.26), получаем:

$$P^n = \int d\mathbf{k} \cdot k^n \sum_{\alpha} (b_\alpha^+(\mathbf{k}) b_\alpha^-(\mathbf{k}) + b_\alpha^+(\mathbf{k}) b_\alpha^-(\mathbf{k})), \quad (22)$$

$$Q = \int d\mathbf{k} \sum_{\alpha} (b_\alpha^+(\mathbf{k}) b_\alpha^-(\mathbf{k}) - b_\alpha^+(\mathbf{k}) b_\alpha^-(\mathbf{k})), \quad (23)$$

$$S_3 \sim d\mathbf{k} \{ b_1^+(\mathbf{k}) b_1^-(\mathbf{k}) - b_1^+(\mathbf{k}) b_1^-(\mathbf{k}) + b_2^+(\mathbf{k}) b_2^-(\mathbf{k}) - b_2^+(\mathbf{k}) b_2^-(\mathbf{k}) \}. \quad (24)$$

Вычисляя затем соответствующие средние, убеждаемся, что  $b_1^+(\mathbf{k})$  и  $b_1^-(\mathbf{k})$  суть соответственно операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом  $\mathbf{k}$ , зарядом  $+1$  и проекцией спина на ось движения  $+1$ ,  $b_2^+(\mathbf{k})$ ,  $b_2^-(\mathbf{k})$  — операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом  $\mathbf{k}$ , зарядом  $+1$  и проекцией спина  $-1$ ,  $b_3^+(\mathbf{k})$  и  $b_3^-(\mathbf{k})$  — операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом  $\mathbf{k}$ , зарядом  $+1$  и нулевой проекцией спина. Смысл

операторов  $b_{\alpha}^{\pm}$  и  $b_{\alpha}^{\pm*}$  можно получить отсюда, применяя следующее правило:

*«переход от  $b_{\alpha}^{\pm}$  к  $b_{\alpha}^{\pm*}$  соответствует изменению знака заряда и знака проекции спина».*

Так, например, вычисляя средние значения операторов (22), (23), (24) по одночастичному (содержащему одну частицу) состоянию, определяемому амплитудой типа (5)

$$\Phi_1 = \int c(\mathbf{k}) b_1^{\dagger}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \Phi_0,$$

получаем с учетом закона эрмитова сопряжения  $b_1^{\dagger*} = b_1^*$  в результате перехода к  $c(\mathbf{k})$ , локализованному около  $\mathbf{k} = \mathbf{K}$ ,

$$\langle P^n \rangle_1 = K^n, \quad \langle Q \rangle_1 = -1, \quad \langle S_3 \rangle_1 = -1 \text{ и т. п.}$$

Мы видим отсюда, что векторное поле (4.3), (4.6) описывает заряженные частицы с массой  $m$  и тремя возможными значениями проекции спина (1, 0, -1) на направление движения. Говоря короче, это поле описывает векторные мезоны со спином 1.

Амплитуды  $a_{\alpha}$  также имеют простой смысл. Так, амплитуды  $a_3$  соответствуют частицам с нулевой проекцией спина на направление движения, а  $a_1$  и  $a_2$  описывают смеси состояний с проекциями спина 1 и -1, соответствующие линейным поляризациям.

Выпишем еще перестановочные соотношения для четырех зависимых амплитуд  $U_n$ . С помощью (4.22) без труда находим перестановки трех амплитуд  $U_{\alpha}(\mathbf{k})$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ):

$$[U_{\alpha}^*(\mathbf{k}), U_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{k}')]_{-} = [U_{\alpha}(\mathbf{k}), U_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{k}')]_{-} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left( \delta_{\alpha\beta} + \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{m^2} \right).$$

Используя связь  $U_0$  с  $U_{\alpha}$ :

$$U_0(\mathbf{k}) = -\frac{1}{k_0} k^{\alpha} U_{\alpha}(\mathbf{k}),$$

определяем затем коммутаторы, содержащие  $U_0$ :

$$[U_0^*(\mathbf{k}), U_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}')]_{-} = [U_0(\mathbf{k}), U_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}')]_{-} = -\frac{k^0 k^{\alpha}}{m^2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

$$[U_0^*(\mathbf{k}), U_0^{\dagger}(\mathbf{k}')]_{-} = [U_0(\mathbf{k}), U_0^{\dagger}(\mathbf{k}')]_{-} = \left( \frac{k^0 k^0}{m^2} - 1 \right) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Объединяя полученные выражения, получаем формулу

$$\begin{aligned} [U_n^*(\mathbf{k}), U_l^{\dagger}(\mathbf{k}')]_{-} &= [U_n(\mathbf{k}), U_l^{\dagger}(\mathbf{k}')]_{-} = \\ &= (-g_{nl} + k_n k_l / m^2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (25)$$

которая является релятивистски симметричной и совместной с дополнительным условием (4.3). Переходя к координатному

представлению, получаем отсюда:

$$[\dot{U}_i^*(x), U_n^+(y)]_- = [U_i^-(x) \dot{U}_n^+(y)]_- = \left( g_{in} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^n} \right) iD^-(x-y), \quad (26)$$

$$[\dot{U}_i^*(x), U_n(y)]_- = \left( g_{in} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^n} \right) iD(x-y), \quad (27)$$

где, как обычно,  $D(x-y)$  — перестановочная функция Паули—Йордана, а  $D^-$  — ее отрицательно-частотная часть.

Не представляет труда проверить, что перестановочные соотношения (27) являются совместными как с уравнениями поля, так и с дополнительным условием. Так, действуя на обе стороны (27) оператором Клейна—Гордона  $\square_x - m^2$ , приходим к тождеству  $0 = 0$ , так как в соответствии с (10.18)

$$(\square_x - m^2) D(x-y) = 0.$$

Применяя к (27) операцию  $\sum_i \partial / \partial x_i$ , приходим к аналогичному результату, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( g_{in} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^n} \right) D(x-y) = \left( \frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{\square}{m^2} \frac{\partial}{\partial x^n} \right) D(x-y) = 0.$$

Практически важным случаем векторного поля является поле, описывающее изотопический триплет  $(\rho^+, \rho^0, \rho^-)$  векторных ро-мезонов.

**11.4. Гамильтонов формализм и каноническое квантование.** В целях сравнения с рассмотренной выше схемой квантования, основанной на лагранжевом формализме, мы рассмотрим сейчас каноническую схему квантования для действительного скалярного поля.

В основе канонического квантования лежит канонический (иначе гамильтонов) формализм классической механики. Напомним кратко его суть применительно к системам с бесконечно-большим числом степеней свободы (классическим полям).

В каноническом формализме основной величиной является функция Гамильтона  $H$ , рассматриваемая как функция канонических переменных — обобщенных координат  $q_i$  и обобщенных импульсов  $p_i$ . В случае отсутствия внешних полей функция Гамильтона совпадает с энергией системы  $P_0$ . В качестве обобщенных координат в нашем случае можно выбрать значение функции поля  $\varphi(x)$  в узлах пространственной решетки

$$q_i(t) = \varphi(x_i, t). \quad (28)$$

Здесь подразумевается разбиение всего 3-мерного объема на ячейки размером  $\Delta V_i$  около узлов  $x_i$ . Обозначая

$$\dot{q}_i(t) = \frac{\partial \varphi(x_i, t)}{\partial t},$$



канонический импульс определим следующим образом:

$$p_i(t) = \frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial \dot{q}_i(t)}.$$

Здесь  $\mathcal{L}$  — функция Лагранжа. В соответствии с (1.2) она может быть представлена в виде

$$\mathcal{L}(t) = \sum_i \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t)) \Delta V_i.$$

С учетом этого соотношения получаем

$$p_i(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i(t)} \Delta V_i. \quad (29)$$

Функцию Гамильтона (гамильтониан) с помощью формул (2.9), (2.10), (28) и (29) запишем следующим образом:

$$H = \sum_i T^{00}(\mathbf{x}_i, t) \Delta V_i = \sum_i p_i(t) \dot{q}_i(t) - \mathcal{L}(t). \quad (30)$$

Здесь имеется в виду, что  $q_i$  выражены как функции обобщенных импульсов  $p_i$ .

Для целей перехода к непрерывному случаю ( $\Delta V \rightarrow 0$ ) удобно также ввести другой канонический импульс (фактически плотность импульса)

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)}. \quad (31)$$

Вместо (30) получаем

$$H = \int d\mathbf{x} \{ \pi(\mathbf{x}, t) \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{x}, t) \}, \quad (32)$$

где опять скорости выражены через импульсы.

Канонические переменные  $q$ ,  $p$  удовлетворяют уравнениям движения в форме Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (33)$$

которые также называют *каноническими уравнениями*. Пусть теперь  $A(p, q)$  — некоторая динамическая величина, представленная как функция канонических переменных и не зависящая явно от времени. Ее полная производная по времени с помощью (33) представляема в виде

$$\frac{dA(p, q)}{dt} = \sum_i \left[ \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right] \equiv \{H, A\}, \quad (34)$$

где введено сокращенное обозначение для так называемых *классических скобок Пуассона*

$$\{A, B\} = \sum_i \left[ \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right]. \quad (35)$$

Скобки Пуассона для канонических переменных имеют вид

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}. \quad (36)$$

Постулат квантования в каноническом формализме состоит в замене классических скобок Пуассона на *квантовые скобки Пуассона*

$$\{A, B\} \rightarrow i[A, B] \equiv i(AB - BA). \quad (37)$$

Операторы  $q_i$  и  $p_i$  после квантования удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = i\delta_{ij}.$$

Переходя к непрерывному пределу, получаем

$$[q(\mathbf{x}, t), q(\mathbf{x}', t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (38)$$

$$[\pi(\mathbf{x}, t), q(\mathbf{x}', t)] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (39)$$

а также

$$\frac{dA}{dt} = i[H, A]. \quad (40)$$

С учетом того, что для лагранжиана (3.1)

$$q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \pi(\mathbf{x}) = \dot{\varphi}(\mathbf{x}),$$

убеждаемся, что формула (39) совпадает с (3). «Релятивизация» формулы (39) и переход к обычным (не одновременным) коммутационным соотношениям (3) может быть выполнен путем обращения к импульсному представлению.

Уравнение движения (40) является аналогом нулевой компоненты (9.24).

Отметим, что при применении метода канонического квантования к другим полям могут встретиться трудности. Мы имеем здесь в виду прежде всего случаи так называемых *сингулярных лагранжианов*. Лагранжиан является сингулярным, если канонический импульс, определенный согласно (31), оказывается тождественно равным нулю.

Пример сингулярного лагранжиана представляет градиентноинвариантный лагранжиан электромагнитного поля

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} H_{mn} H^{mn} = -\frac{1}{4} (\partial_m A_n - \partial_n A_m) (\partial^m A^n - \partial^n A^m). \quad (5.13)$$

В этом случае естественно рассматривать четыре компоненты потенциала  $A_m$  как независимые канонические координаты. Однако импульс  $\pi_0$ , канонически сопряженный координате  $A_0$ , оказывается равным нулю:

$$\pi_0(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0(\mathbf{x})} = 0.$$

Второй пример сингулярного лагранжиана дает лагранжиан поля Янга—Миллса (8.28). Стандартная процедура канонического квантования в этом случае должна быть модифицирована. Отсылая читателя, интересующегося этим вопросом, к книге Дирака (1964), отметим, что физически сингулярные лагранжианы соответствуют системам с неголономными связями и для проведения квантования необходимо эти связи разрешить.

## § 12. Электромагнитное поле

### 12.1. Особенности электромагнитного поля и схема квантования.

При квантовании электромагнитного поля необходимо одновременно удовлетворить требованиям положительности плотности энергии, дополнительному условию Лоренца и условию поперечности. Вся формулировка должна при этом обладать свойством релятивистской ковариантности.

Сходное положение мы имели при квантовании векторного мезонного поля. Отличие состоит в том, что векторные мезоны могут находиться в трех спиновых состояниях, а фотоны из-за их поперечности — лишь в двух и что в противоположность мезонам масса покоя фотонов равна нулю. Первое обстоятельство приводит к тому, что компоненты потенциала электромагнитного поля в еще большей степени, нежели у векторного поля, содержат в себе «лишние» переменные, ибо имеются четыре компоненты, а состояний, в которых могут находиться реальные фотоны, только два.

Второе отличие ( $m = 0$ ) делает невозможным применение к электромагнитному полю процедуры, использованной при квантовании векторного поля. Действительно, уже квантование гипотетического векторного поля с исчезающе малой массой, т. е. поля, отличающегося от электромагнитного поля отсутствием градиентного преобразования и потому трехкомпонентного, вызывает значительные затруднения. При подобном квантовании мы получаем бессмысленные выражения, во-первых, при диагонализации энергии-импульса подстановкой (4.22), а во-вторых, при установлении перестановочных соотношений для компонент потенциала  $A_n$  (11.25)—(11.27) из-за присутствия исчезающе малой массы в знаменателях указанных выражений.

Поэтому квантование электромагнитного поля видоизменяется следующим образом. Компоненты векторного потенциала считаем независимыми величинами, отказавшись тем самым от условия Лоренца в операторной форме. Тогда по общему рецепту квантования (§ 9), исходя из структуры 4-вектора энергии-импульса, выраженного через продольную, поперечные и временную компоненты  $a_n(\mathbf{k})$

$$P^n = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \cdot k^n (a_m^+(\mathbf{k}) a^{-m}(\mathbf{k}) + a_m^-(\mathbf{k}) a^{+m}(\mathbf{k})), \quad (1)$$

приходим к перестановочным соотношениям

$$[a_m^-(\mathbf{k}), a_n^+(\mathbf{k}')]_- = -g^{mn} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2)$$

Используя формулы перехода от импульсного к координатному представлению

$$A_n^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} e^{\pm i\mathbf{k}x} A_n^\pm(\mathbf{k}) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}} e^{\pm i\mathbf{k}x} e_n^m(\mathbf{k}) a_m^\pm(\mathbf{k}), \quad (3)$$

получаем

$$[A_m^-(x), A_n^+(y)] = ig_{mn} D_0^-(x-y),$$

где  $D_0^-$  есть обычная отрицательно-частотная перестановочная функция для нулевой массы:

$$D_0^-(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int dk \delta(k^2) \theta(-k^0) e^{i\mathbf{k}x}.$$

Полный коммутатор компонент  $A_n$  имеет следующий вид:

$$[A_n(x), A_m(y)]_- = ig^{mn} D_0(x-y), \quad (4)$$

$$D_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int e^{i\mathbf{k}x} \delta(k^2) \epsilon(k^0) dk.$$

Квантование (2), очевидно, не обеспечивает положительности среднего значения энергии. Мы пока оставим этот вопрос открытым и займемся им позднее вместе с формулировкой дополнительного условия Лоренца.

Квантование (2) позволяет рассматривать операторы  $a_n^\pm$  как операторы рождения и уничтожения четырех независимых сортов фотонов: двух поперечных, «продольных» и «временных». Однако при таком квантовании возникает следующая трудность. Компонента  $a_0$  удовлетворяет соотношению

$$[a_0^-(\mathbf{k}), a_0^+(\mathbf{k}')]_- = -\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

сравнивая которое с (10.14), видим, что операторы рождения и уничтожения «временных» фотонов как бы поменялись местами, что обязано отрицательному знаку члена  $a_0^+ a_0^-$  в выражении (1).

Такое положение, однако, несовместимо с предположением о вещественности поля или положительности метрики. Действительно, вычисляя для этой формулы вакуумное среднее, получаем с учетом (9.36)

$$\Phi_0^* [a_0^-(\mathbf{k}), a_0^+(\mathbf{k}')]_- \Phi_0 = \Phi_0^* a_0^- (\mathbf{k}) a_0^+ (\mathbf{k}') \Phi_0 = -\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Умножая левую часть на  $f^*(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}')$  и интегрируя по  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ , получаем, с учетом того, что  $(a_0^+)^* = a_0^-$ :

$$\int d\mathbf{k} \Phi_0^* a_0^- (\mathbf{k}) f^*(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}' f(\mathbf{k}') a_0^+ (\mathbf{k}') \Phi_0 = \Phi_0^* \left| \int a_0^+ (\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right|^2 \Phi_0 > 0.$$

Производя те же самые операции в правой части, приходим к отрицательному выражению

$$-\int \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') f^*(\mathbf{k}') f(\mathbf{k}') d\mathbf{k}' d\mathbf{k} = -\int |f(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} < 0$$

и, следовательно, к противоречию.

**12.2. Индефинитная метрика.** Чтобы ликвидировать указанную грудность, мы воспользуемся формальным приемом (Блейлер (1950), Гупта (1950)), основанным, в сущности, на том обстоятельстве, что соответствующие нулевой компоненте потенциала «временные фотоны» в действительности не существуют, а их возникновение в промежуточных рассуждениях связано с переходом от наблюдаемых величин (векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ) к ненаблюдаемому 4-потенциалу  $A$ , произведенным для придания теории релятивистской симметрии и ковариантности.

Мы будем теперь считать, что компонента  $A_0$  в отличие от остальных компонент антиэрмитова, т. е.

$$\dot{A}_n = -A^n$$

(это предположение эквивалентно переходу к эрмитовой  $A_4$ :

$$A_0 = iA_4).$$

Тогда получаем нормальные перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} [a_m^*(\mathbf{k}), a_n^+(\mathbf{k}')]_- &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{nm}, \\ [A_m^*(x), A_n(y)]_- &= \delta_{nm} \frac{1}{i} D_0(x - y). \end{aligned}$$

Чтобы сохранить самосопряженность оператора  $a_n$ , нам придется ввести *индефинитную метрику* в пространстве амплитуд состояния. Для этого введем эрмитов оператор  $\eta$ , наделенный свойствами

$$a_n = -a^n \eta, \quad \eta^2 = 1, \quad \eta \Phi_0 = \Phi_0, \quad (5)$$

т. е. перестановочный с  $a_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) и антиперестановочный с  $a_0$ . Заново определяя сопряженную амплитуду состояния

$$\dagger \Phi = \overset{*}{\Phi} \eta, \quad (6)$$

т. е. определяя среднее значение как

$$\langle f \rangle = \overset{*}{\Phi} \eta f \Phi = \dagger \Phi f \Phi, \quad (7)$$

получаем свойство самосопряженности оператора  $a_n$ :

$$(\dagger a_n \Phi)^* = (\overset{*}{\Phi} \eta a_n \Phi)^* = \overset{*}{\Phi} \overset{*}{a}_n \eta \Phi = \overset{*}{\Phi} \eta a_n \Phi = \dagger a_n \Phi.$$

Рассмотрим вопрос о дополнительном условии. При квантовании мы считали, что  $A_n$  независимы, следовательно, накладывать условие Лоренца на операторы  $A_n$  мы не можем. Легко видеть, что

наложить условие Лоренца на допустимые амплитуды состояний, т. е. потребовать, чтобы

$$\frac{\partial A_n(x)}{\partial x_n} \Phi = 0,$$

также невозможно, ибо такое условие противоречит, например, определению вакуума. В самом деле, полагая  $\Phi = \Phi_0$ , имеем:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) \Phi_0 = \left(\frac{\partial A^+}{\partial x}\right) \Phi_0 = 0.$$

Умножая слева на  $A_{\bar{k}}^-(y)$ , получаем:

$$\begin{aligned} A_{\bar{k}}^-(y) \frac{\partial A_n^+(x)}{\partial x_n} \Phi_0 &= \frac{\partial}{\partial x_n} (A_{\bar{k}}^-(y) A_n^+(x)) \Phi_0 = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_n} (A_n^+(x) A_{\bar{k}}^-(y)) \Phi_0 + i \frac{\partial}{\partial x_n} D_0^+(x-y) g^{nk} \Phi_0 = i \partial_k D_0^+(x-y) \Phi_0 \neq 0, \end{aligned}$$

т. е. противоречие.

Поэтому условие Лоренца мы сформулируем как условие для допустимых состояний, но в ослабленной форме:

$$\frac{\partial A_n^-(x)}{\partial x_n} \Phi \equiv \left(\frac{\partial A^-}{\partial x}\right) \Phi = 0, \quad (8)$$

а ему сопряженное —

$$\overset{\dagger}{\Phi} \left(\frac{\partial A^+}{\partial x}\right) = 0. \quad (9)$$

Эти условия обеспечивают выполнение условия Лоренца в среднем,

$$\left\langle \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) \right\rangle = \overset{\dagger}{\Phi} \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) \Phi = 0,$$

чего вполне достаточно для соответствия с классическим полем.

Перейдем к вопросу о положительности наблюдаемого значения плотности энергии. Для этого запишем дополнительные условия в импульсном представлении. Имеем, очевидно,

$$\begin{aligned} (k^0 a_0^- (\mathbf{k}) - |\mathbf{k}| a_3^- (\mathbf{k})) \Phi &= 0, \\ \overset{\dagger}{\Phi} (k^0 a_0^+ (\mathbf{k}) - |\mathbf{k}| a_3^+ (\mathbf{k})) &= 0, \end{aligned}$$

или с учетом того, что  $k^0 = |\mathbf{k}|$ ,

$$(a_0^- (\mathbf{k}) - a_3^- (\mathbf{k})) \Phi = 0, \quad (10)$$

$$\overset{\dagger}{\Phi} (a_0^+ (\mathbf{k}) - a_3^+ (\mathbf{k})) = 0. \quad (11)$$

Отсюда следует, что в допустимых состояниях полная энергия и импульс продольных и временных псевдофотонов равны нулю, так как

$$\langle a_3^+ a_3 - a_0^+ a_0 \rangle = \overset{\dagger}{\Phi} (a_3^+ a_3 - a_0^+ a_0) \Phi = \overset{\dagger}{\Phi} (a_3^+ - a_0^+) a_3 \Phi = 0.$$

Для вектора энергии-импульса получаем поэтому

$$\begin{aligned} \langle P^n \rangle &= \int d\mathbf{k} \cdot k^n \langle -a^{+m}(\mathbf{k}) a_m^-(\mathbf{k}) \rangle = \\ &= \int d\mathbf{k} \cdot k^n \langle a_1^+(\mathbf{k}) a_1^-(\mathbf{k}) + a_2^+(\mathbf{k}) a_2^-(\mathbf{k}) \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Положительность среднего значения энергии обеспечена. Покажем теперь, что вновь определенная норма (7) дает те же результаты для средних наблюдаемых величин, что и старая норма.

Для этого представим разложение по локальному реперу (5.16) в виде

$$\begin{aligned} A_n^-(\mathbf{k}) &= \sum_{\sigma=1,2} e_{n\sigma}^\sigma a_\sigma^-(\mathbf{k}) + \left( \frac{k_n}{|\mathbf{k}|} - \delta_n^0 \right) a_3^-(\mathbf{k}) + \delta_n^0 a_0^-(\mathbf{k}) = \\ &= A_n^{\text{tr},-}(\mathbf{k}) + k_n \Lambda(\mathbf{k}) + \delta_n^0 F^-(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (13)$$

причем  $F^-(\mathbf{k})\Phi = (a_0^-(\mathbf{k}) - a_3^-(\mathbf{k}))\Phi = 0$ , член  $k_n \Lambda$  имеет структуру 4-градиента и может быть исключен градиентным преобразованием, а  $A^{\text{tr}}$  является поперечной составляющей  $A$ . Поэтому можно считать, что

$$A_n^-(\mathbf{k})\Phi = A_n^{\text{tr},-}(\mathbf{k})\Phi, \quad \dagger \Phi A_n^+(\mathbf{k}) = \dagger \Phi A_n^{\text{tr},-}(\mathbf{k}),$$

и следовательно,

$$\dagger \Phi A_n \Phi = \dagger \Phi A_n^{\text{tr}} \Phi.$$

Нетрудно убедиться, что справедливо и более общее утверждение

$$\dagger \Phi K \Phi = \dagger \Phi K^{\text{tr}} \Phi, \quad (14)$$

где  $K$  — оператор вида

$$K = \sum_{\alpha} Z \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) A_{\alpha_1}(x_1) \dots A_{\alpha_s}(x_s),$$

$Z$  — полиномиальная функция, а

$$K^{\text{tr}} = \sum_{\alpha} Z \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) A_{\alpha_1}^{\text{tr}}(x_1) \dots A_{\alpha_s}^{\text{tr}}(x_s).$$

В самом деле, представляя  $A_n$  в виде (13) и отбрасывая градиентные члены, видим, что необходимо выполнить коммутации членов вида  $A^{\text{tr}}$  и  $F = a_0 - a_3$ . Однако  $F$  и  $A^{\text{tr}}$ ,  $F^+$  и  $F^-$  между собой коммутируют, а  $\dagger \Phi F^+ = F^- \Phi = 0$ . Остаются, следовательно, только коммутаторы от  $A^{\text{tr},-}$  и  $A^{\text{tr},+}$ . Итак, (14) доказано. Покажем теперь, что

$$\dagger \Phi K^{\text{tr}} \Phi = \dagger \Phi_{\text{tr}} K^{\text{tr}} \Phi_{\text{tr}}, \quad (15)$$

где  $\Phi_{\text{tr}}$  — амплитуда чисто фотонного состояния, т. е. состояния, не содержащего продольных и временных псевдофотонов. Действи-

тельно, амплитуда произвольного состояния может быть представлена в виде линейной комбинации чисто фотонного состояния и членов, содержащих различные числа псевдофотонов. В силу дополнительных условий последние члены могут содержать операторы  $a_0$  и  $a_3$  только в комбинации  $a_3 - a_0$ .

Поясним это на простом примере, легко поддающемся обобщению. Пусть амплитуда состояния, которое кроме поперечных содержит один временной и один продольный фотон, имеет вид

$$\Phi_{1,1} = \int dp \{c_0(p) a_0^{\dagger}(p) + c_3(p) a_3^{\dagger}(p)\} \Phi_{tr}.$$

Действуя на нее оператором  $F^-(k) = a_0^-(k) - a_3^-(k)$ , после несложных коммутаций с помощью (2) получаем

$$F^-(k) = -\{c_0(k) + c_3(k)\} \Phi_{tr}.$$

На основе (10) получаем отсюда  $c_0(k) = -c_3(k)$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_{tr} + \sum_n c_n \prod_{1 \leq i \leq n} (a_3^{\dagger}(k_j) - a_0^{\dagger}(k_j)) \Phi_{tr}, \\ \overset{*}{\Phi} &= \overset{*}{\Phi}_{tr} \left\{ 1 + \sum_n c_n \prod_{1 \leq i \leq n} (a_3^-(k_j) - a_0^-(k_j)) \right\}. \end{aligned}$$

Но так как комбинации

$$F^{\pm} = a_3^{\pm} - a_0^{\pm}$$

коммутируют с  $K^{tr}$  и друг с другом, то

$$\begin{aligned} \overset{\dagger}{\Phi} K^{tr} \Phi &= \overset{\dagger}{\Phi}_{tr} \left\{ 1 + \sum_n c_n \prod_i \tilde{F}^-(k_j) \right\} K^{tr} \left\{ 1 + \sum_m c_m \prod_i \tilde{F}^+(k_i) \right\} \Phi_{tr} = \\ &= \overset{\dagger}{\Phi}_{tr} \left\{ 1 + \sum_m c_m \prod_i \tilde{F}^+(k_i) \right\} K^{tr} \left\{ 1 + \sum_n c_n \prod_i \tilde{F}^-(k_j) \right\} \Phi_{tr} = \\ &= \overset{\dagger}{\Phi}_{tr} K^{tr} \Phi_{tr} = \overset{*}{\Phi}_{tr} \eta K^{tr} \Phi_{tr} = \overset{*}{\Phi}_{tr} K^{tr} \eta \Phi_{tr} = \overset{*}{\Phi}_{tr} K^{tr} \Phi_{tr}, \end{aligned}$$

поскольку

$$\overset{\dagger}{\Phi}_{tr} a_{3,0}^{\dagger} = 0, \quad a_{3,0}^- \Phi_{tr} = 0$$

и

$$K^{tr} \eta = \eta K^{tr}, \quad \eta \Phi_{tr} = \Phi_{tr}.$$

Итак, установлено, что среднее по индефинитной метрике от  $K$  равно обычно среднему от  $K^{tr}$ .

Заключаем, что пользование индефинитной метрикой при вычислении реальных наблюдаемых величин не может привести к каким-либо парадоксальным результатам вроде «отрицательных вероятностей».

В дальнейшем для удобства мы будем всегда применять вместо  $\overset{\dagger}{\Phi}$  обычное обозначение  $\overset{*}{\Phi}$ .



**12.3. Запись основных величин.** Приведем в заключение сводку записей основных величин квантованного электромагнитного поля: лагранжиан

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2} : \frac{\partial A_m}{\partial x_n} \frac{\partial A^m}{\partial x^n} :, \quad (16)$$

уравнения поля

$$\square A_n = 0, \quad (17)$$

дополнительное условие Лоренца

$$\left(\frac{\partial A^-}{\partial x}\right) \Phi \equiv \frac{\partial A_n^-}{\partial x_n} \Phi = 0, \quad (8)$$

общее выражение оператора 4-вектора энергии-импульса

$$P^n = \int d\mathbf{k} \cdot k^n (-a_n^\dagger(\mathbf{k}) a^{-n}(\mathbf{k})) \quad (18)$$

и его среднее значение по допустимым состояниям

$$\langle P^n \rangle = \Phi^* \int d\mathbf{k} \cdot k^n \sum_{\nu=1,2} a_\nu^\dagger(\mathbf{k}) a_{\bar{\nu}}^-(\mathbf{k}) \Phi, \quad (12)$$

коммутатор функций поля

$$[A_m(x), A_n(y)]_- = ig^{mn} D_0(x-y), \quad (4)$$

вектор спинового момента

$$\mathbf{S} = i \int d\mathbf{k} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} e^\alpha(\mathbf{k}) a_\beta^\dagger(\mathbf{k}) a_\gamma^-(\mathbf{k}). \quad (19)$$

## § 13. Спинорное поле

**13.1. Квантование по Ферми—Дираку и перестановочные функции.** Из структуры 4-вектора энергии-импульса спинорного поля

$$P^n = \int d\mathbf{k} \cdot k^n \sum_{\nu=1,2} (a_\nu^\dagger(\mathbf{k}) a_{\bar{\nu}}^-(\mathbf{k}) - a_{\bar{\nu}}^*(\mathbf{k}) a_\nu^+(\mathbf{k})) \quad (7.34)$$

видно, что квантованию могут быть подвергнуты независимые амплитуды  $a_\nu$ .

Как уже указывалось, требование положительности среднего значения оператора энергии  $P^0$  приводит к тому, что спинорное поле должно быть проквантовано по Ферми—Дираку. Поэтому фурье-амплитуды спинорного поля  $a_\nu(\mathbf{k})$  следует считать операторами, удовлетворяющими перестановочным соотношениям Ферми—Дирака

$$\left. \begin{aligned} [a_{\bar{\nu}}^-(\mathbf{k}), a_\mu^+(\mathbf{k}') ]_+ &= \delta_{\nu\mu} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [a_{\bar{\nu}}^-(\mathbf{k}), a_\mu^*(\mathbf{k}') ]_+ &= \delta_{\nu\mu} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(все остальные антикоммутаторы равны нулю).

Перестановочные соотношения для операторов  $\psi(x)$  получим отсюда с помощью формул (7.5), (7.13), (7.14), (7.20), (7.21). Имеем

( $\alpha, \beta$  — спинорные индексы):

$$\begin{aligned} [\psi_{\alpha}^{-}(x), \psi_{\beta}^{+}(y)]_{+} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \int dt e^{i(y-kx)} [\psi_{\alpha}^{-}(\mathbf{k}), \psi_{\beta}^{+}(t)]_{+} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \int dt e^{i(y-kx)} \sum_{\nu, \mu} v_{\alpha}^{\nu} \cdot -(\mathbf{k}) \bar{v}_{\beta}^{\mu} \cdot + (t) [a_{\nu}^{-}(\mathbf{k}), a_{\mu}^{+}(t)]_{+} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} e^{ik(y-x)} \sum_{\nu} v_{\alpha}^{\nu} \cdot -(\mathbf{k}) \bar{v}_{\beta}^{\nu} \cdot + (\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} e^{ik(y-x)} \frac{(\hat{k} + m)_{\alpha\beta}}{2k^0} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} (\hat{k} + m)_{\alpha\beta} \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) e^{ik(y-x)} = \\ &= \left( i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} + m \right)_{\alpha\beta} iD^{+}(y-x) \end{aligned}$$

или, по свойству симметрии  $D^{\pm}$ -функций (11.2а),

$$[\psi^{-}(x), \psi^{+}(y)]_{+} = \left( i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} + m \right) \frac{1}{i} D^{-}(x-y). \quad (2)$$

Аналогично этому можно показать, что

$$[\psi^{+}(x), \bar{\psi}^{-}(y)]_{+} = \left( i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} + m \right) \frac{1}{i} D^{+}(x-y). \quad (3)$$

Вводя обозначение

$$S_{\alpha\beta}^{\pm}(x) = \left( i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} + m \right)_{\alpha\beta} D^{\pm}(x),$$

получаем из (2) и (3):

$$[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_{+} = \frac{1}{i} S(x-y), \quad (4)$$

где

$$S(x) = \left( i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} + m \right) D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{ikx} \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k^0) (\hat{k} - m) dk. \quad (5)$$

Перестановочные соотношения (2)—(4) совместны с уравнениями поля, так как

$$\begin{aligned} \left( i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - m \right) S(x-y) &= \left( i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - m \right) \left( i\gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} + m \right) D(x-y) = \\ &= (\square - m^2) D(x-y) = 0. \end{aligned}$$

Для записи перестановочных соотношений (1) в явно ковариантной форме с помощью формул (7.6) перейдем от  $\psi^{\pm}(k)$  к функциям  $\psi(\pm k)$ , которые представим в виде

$$\psi_{\nu}(\pm k) = \sum_{\alpha} a_{\nu}(\pm k) v_{\alpha}^{\nu}(\pm k) \quad (k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}).$$

Для этого воспользуемся уравнениями (7.13), (7.14) и определениями

$$\begin{aligned} a_{\nu}^{\pm}(\mathbf{k}) &= \frac{a_{\nu}^{\pm}(k)}{\sqrt{2k^0}} = \frac{a_{\nu}(\pm k)}{\sqrt{2k^0}}, \quad v_{\alpha}^{\nu, \pm}(\mathbf{k}) = \frac{v_{\alpha}^{\nu, \pm}(k)}{\sqrt{2k^0}} = \frac{v_{\alpha}^{\nu}(\pm k)}{\sqrt{2k^0}}, \\ k^0 &= \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}. \end{aligned}$$

Операторы  $a_\nu(k)$  подчиняются перестановочным соотношениям, аналогичным соотношениям для ковариантных операторов скалярного поля (10.23):

$$\delta(k^2 - m^2)\delta(k'^2 - m^2)[a_\nu^*(k), a_\mu^+(k')]_+ = \delta_{\mu\nu}\delta(k - k')\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0),$$

$$\delta(k^2 - m^2)\delta(k'^2 - m^2)[a_\nu^-(k), a_\mu^+(k')]_+ = \delta_{\mu\nu}\delta(k - k')\delta(k^2 - m^2)\theta(-k^0).$$

Переходя в этих выражениях к  $a_\nu(\pm k)$ , имеем:

$$\delta(k^2 - m^2)\delta(k'^2 - m^2)[a_\nu^*(k), a_\mu^-(k')]_+ = \delta_{\mu\nu}\delta(k + k')\delta(k^2 - m^2) \quad (6)$$

**13.2. Динамические переменные.** Определяя лагранжиан спинорного поля с помощью нормального произведения

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} : \left( \bar{\psi}(x) \gamma^n \frac{\partial \psi}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^n} \gamma^n \psi(x) \right) : - m : \psi(x) \psi(x) :, \quad (7)$$

получаем следующие выражения для динамических переменных: тензор энергии-импульса

$$T^{lk} = \frac{i}{2} : \left( \psi \gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x_l} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_l} \gamma^k \psi \right) :,$$

тензор плотности спина

$$S^{lm, k} = \frac{1}{4} : \bar{\psi}(x) \gamma^k \sigma^{ml} \psi(x) : + \frac{1}{4} : \bar{\psi}(x) \sigma^{ml} \gamma^k \psi(x) :,$$

вектор тока

$$J^k(x) = : \psi(x) \gamma^k \psi(x) :.$$

В результате перехода к импульсному представлению по формулам

$$\psi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{\pm ikx} \sum_\nu a_\nu^\pm(k) v^{\nu, \pm}(k), \quad (7.32)$$

$$\bar{\psi}^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{\pm ikx} \sum_\nu a_\nu^{\pm*}(k) \bar{v}^{\nu, \pm}(k) \quad (7.33)$$

соответствующие интегралы движения согласно (7.34), (7.42) и (7.43) примут вид:

4-вектор энергии-импульса

$$P^n = \int dk \cdot k^n \sum_\nu (a_\nu^*(k) a_\nu^-(k) + a_\nu^+(k) a_\nu^*(k)); \quad (8)$$

заряд

$$Q = \int dk \sum_\nu (a_\nu^*(k) a_\nu^-(k) - a_\nu^+(k) a_\nu^*(k)); \quad (9)$$

проекция спина на направление движения

$$S_3 \sim \frac{1}{2} (a_1^*(k) a_1^-(k) - a_2^*(k) a_2^-(k) - a_1^+(k) a_1^*(k) + a_2^+(k) a_2^*(k)). \quad (10)$$

Из выражений (8)—(10) вытекает, что операторы  $a_{\nu}^{\dagger}(\mathbf{k})$  и  $a_{\nu}(\mathbf{k})$  суть соответственно операторы рождения и уничтожения частиц с импульсом  $\mathbf{k}$ , массой  $m$  ( $k^2 = m^2$ ), зарядом  $+1$  и проекцией спина на ось  $z$ , равной  $1/2$  ( $\nu = 1$ ) или  $-1/2$  ( $\nu = 2$ ).

Операторы  $a_{\nu}^{\dagger}(\mathbf{k})$  и  $a_{\nu}^*(\mathbf{k})$  соответствуют частицам, отличающимся от только что описанных знаком заряда ( $-1$ ) и знаком спина (т. е.  $1/2$  ( $\nu = 2$ ) и  $-1/2$  ( $\nu = 1$ )) — т. е. античастицами.

**13.3. Зарядовое сопряжение.** Введем операцию зарядового сопряжения спинорного поля. Если обратиться к ранее рассмотренным полям, описывающим заряженные частицы, т. е. к комплексному скалярному и комплексному векторному полям, то из структуры динамических переменных и перестановочных соотношений следует, что преобразование

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \overset{\dagger}{\varphi}(x), \quad \overset{*}{\varphi}(x) \rightarrow \overset{*}{\varphi}'(x) = \varphi(x) \quad (11)$$

к новым волновым функциям  $\varphi'(x)$ ,  $\overset{*}{\varphi}'(x)$  сохраняет выражения всех физических величин, кроме тока, неизменными, а у 4-вектора тока меняет знак. Таким образом, преобразование (11) соответствует переходу к частицам со знаками заряда, противоположными по отношению к первоначальным частицам.

Преобразование типа (11) называется поэтому *преобразованием сопряжения заряда*. Зарядовое сопряжение спинорного поля сложнее преобразования (11) из-за матричного характера (многокомпонентности) спинорных волновых функций; это есть матричное преобразование следующего вида:

$$\psi^c(x) = C\psi(x), \quad \psi^c(x) = C^{-1}\psi(x) = \psi(x) C^{-1}. \quad (12)$$

Для совместности (12) нужно потребовать

$$C\gamma_0 C^{-1} = \gamma_0 \quad (13)$$

Сокращенная запись (12) эквивалентна следующей записи в компонентах:

$$\psi_{\alpha}^c = \sum_{\beta} C_{\alpha\beta} \bar{\psi}_{\beta}, \quad \psi_{\alpha}^c = \sum_{\beta} C_{\alpha\beta}^{-1} \psi_{\beta} = \sum_{\beta} \psi_{\beta} (C^{-1})_{\beta\alpha},$$

так как, по определению транспонированной матрицы, имеем всегда:

$$(C)_{\alpha\beta} = (C^T)_{\beta\alpha}.$$

Преобразование, обратное (12), есть соответственно

$$\psi(x) = C\psi^c(x), \quad \psi(x) = C^{-1}\psi^c(x) = \psi^c(x) C^{-1}. \quad (14)$$

Мы видим, таким образом, что определенное по (12) зарядовое сопряжение, кроме очевидного свойства тождественности двукратного

преобразования, обладает еще свойством «зеркальной» симметрии, т. е. совпадает по форме с обратным.

Конкретный вид матриц  $C$  определим, потребовав, чтобы лагранжиан свободного поля, а следовательно, и 4-вектор энергии-импульса не меняли своего вида, а 4-вектор тока менял бы знак, т. е. чтобы имели место соотношения

$$\mathcal{L}(\psi) = \mathcal{L}(\psi^c), \quad T(\psi) = T(\psi^c) \quad \text{и} \quad J^k(\psi) = -J^k(\psi^c). \quad (15)$$

Для этого будет достаточно потребовать, чтобы выполнялись два соотношения:

$$:\bar{\psi}_1(x) \gamma^k \psi_2(x) : = -:\bar{\psi}_2^c(x) \gamma^k \bar{\psi}_1^c(x) : \quad (16)$$

и

$$:\bar{\psi}(x) \psi(x) : = :\bar{\psi}^c(x) \psi^c(x) :, \quad (17)$$

причем  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  равны либо самой  $\psi$ , либо ее производным  $\partial\psi/\partial x^k$ . Во всяком случае,

$$\psi_i = C\bar{\psi}_i^c(x), \quad \bar{\psi}_i = \psi_i^c C^{-1} \quad (i = 1, 2). \quad (18)$$

Действительно, полагая один раз

$$\psi_1(x) = \psi(x), \quad \psi_2(x) = \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

а другой —

$$\psi_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \psi_2 = \psi,$$

получаем из (16)

$$\begin{aligned} :\bar{\psi}(x) \gamma^k \frac{\partial\psi}{\partial x^k} : &= -:\frac{\partial\bar{\psi}^c(x)}{\partial x^k} \gamma^k \psi^c(x) :, \\ :\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^k} \gamma^k \psi(x) : &= -:\bar{\psi}^c(x) \gamma^k \frac{\partial\psi^c}{\partial x^k} :, \end{aligned}$$

что в совокупности с (17) дает:

$$\mathcal{L}(\psi) = \mathcal{L}(\psi^c) \quad \text{и} \quad T(\psi) = T(\psi^c).$$

Полагая в (16)

$$\psi_1 = \psi \quad \text{и} \quad \psi_2 = \psi,$$

получаем также

$$J(\psi) = -J(\psi^c).$$

Итак, рассмотрим ограничения, налагаемые на матрицу  $C$  условиями (16) и (17).

Подставляя (18) в (16), имеем:

$$:\bar{\psi}_1(x) \gamma^k \psi_2(x) : = :\psi_1^c(x) C^{-1} \gamma^k C \bar{\psi}_2^c(x) :.$$

Учитывая антикоммутативность квантованных спиноров  $\psi^c$  и  $\bar{\psi}^c$ , получаем отсюда выражение

$$:\bar{\psi}(x) \gamma^k \psi_2(x) : = -:\bar{\psi}_2^c(x) C \gamma^k C^{-1} \psi_1^c(x) :,$$

сравнивая которое с (16), находим первое условие, налагаемое на матрицу  $C$ :

$$C^T \gamma^k C^{-1} = \gamma^k$$

или, в транспонированной форме,

$$C^{-1} \gamma^k C = \gamma^k. \quad (19)$$

Аналогичным образом, подставляя (18) в (17), имеем:

$$:\bar{\psi}(x)\psi(x): = :\psi^c(x) C^{-1} C \bar{\psi}^c(x): = - : \bar{\psi}^c(x) C C^{-1} \psi^c(x) :,$$

откуда находим второе условие для матрицы  $C$ :

$$C C^{-1} = -1$$

или

$$C^T = -C. \quad (20)$$

Из (19), (20) и (13) вытекает унитарность матрицы  $C$ :

$$C C^\dagger = 1. \quad (21)$$

Используя (20), можем записать (19) в виде

$$C^{-1} \gamma^k C = -\gamma^k. \quad (22)$$

Из уравнения (22) можно определить вид матрицы  $C$  в используемом нами представлении матриц Дирака  $\gamma^k$  (6.18). В этом представлении

$$\gamma^0 = \gamma^0, \quad \gamma^1 = -\gamma^1, \quad \gamma^2 = \gamma^2, \quad \gamma^3 = -\gamma^3.$$

Заметим теперь, что уравнение (22), будучи записано в виде

$$C^{-1} \gamma^k C = \pm \gamma^k \quad \left( \begin{array}{l} + \text{ для } k=1, 3, \\ - \text{ для } k=0, 2, \end{array} \right)$$

совпадает с уравнением (6.26), определяющим вид матрицы  $\Lambda$  для преобразования отражения осей  $x^0$  и  $x^2$ . Матрица  $C$  поэтому в представлении (6.18) может быть выбрана равной матрице  $\Lambda$  указанного преобразования, т. е. (см. (6.33))

$$C = \Lambda_{02}(-i\pi) = e^{\frac{i\pi}{2} \gamma^0 \gamma^2} = i \gamma^0 \gamma^2 = i \alpha_2. \quad (23)$$

В представлении (6.18)  $\alpha_2$  имеет вид

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Свойства (13) и (21), таким образом, тоже удовлетворяются.

Как указывалось, конкретный вид матрицы  $C$  зависит от представления матриц Дирака. При переходе от представления (6.18) к какому-либо иному  $\gamma'^k$  по формулам

$$\gamma'^k = O\gamma^k O^{-1}, \quad (24)$$

новую матрицу  $C'$  зарядового преобразования получим из соотношения

$$C' = OCO^{\top}, \quad (25)$$

в справедливости которого легко убедиться подстановкой выражений (24), (25) в (19) и (21).

**13.4. Квантованное нейтринное поле.** Лагранжиан нейтринного поля запишем в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= : \frac{i}{2} \left( \bar{\nu}(x) \gamma^n \frac{\partial \nu}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial x^n} \gamma^n \nu(x) \right) : = \\ &= \frac{i}{4} : \left( \bar{\psi}(x) (1 + \gamma^5) \gamma^n \frac{\partial \psi}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^n} \gamma^n (1 - \gamma^5) \psi(x) \right) :. \end{aligned} \quad (26)$$

Напомним здесь свойства нейтринного спинора из § 7.4:

$$\nu(x) = P_- \psi(x) = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi(x), \quad P_+ \nu(x) = \frac{1 + \gamma^5}{2} \nu(x) = 0. \quad (27)$$

Выражения для тензора энергии-импульса  $T^{ik}$  и тензора спина  $S^{im,k}$  в конфигурационном представлении получаются из формул (7.28), (7.31) подстановкой  $\nu$  вместо  $\psi$ . В импульсном представлении формула для  $P^l$  получается из (7.34) и (12.10) опусканием суммирования по спиновому индексу:

$$P^l = \int d\mathbf{p} \cdot p^l \left( \hat{a}_{-1}^*(\mathbf{p}) \hat{a}_{-1}(\mathbf{p}) + \hat{a}_{-1}^+(\mathbf{p}) \hat{a}_{-1}^-(\mathbf{p}) \right). \quad (28)$$

Нижний индекс  $(-1)$  соответствует отрицательной спиральности.

Отдельно рассмотрим спин нейтринного поля. Для этого будем исходить из выражения вида (7.40) для плотности вектора спина:

$$\frac{1}{2} : \left\{ \hat{a}_{-1}^*(\mathbf{p}) \hat{a}_{-1}(\mathbf{p}) \hat{v}^*(\mathbf{p}) \sigma_3 v^-(\mathbf{p}) + \hat{a}_{-1}^+(\mathbf{p}) \hat{a}_{-1}^-(\mathbf{p}) \hat{v}^-(\mathbf{p}) \sigma_3 v^+(\mathbf{p}) \right\} :, \quad (29)$$

справедливого в системе отсчета  $p_1 = p_2 = 0$ , т. е. когда ось  $x^3$  направлена по импульсу. В этой системе нормированные спиноры, удовлетворяющие уравнениям

$$\hat{p}v^{\pm}(\mathbf{p}) = \hat{v}^{\pm}(\mathbf{p})\hat{p} = 0, \quad p^0 = \pm |\mathbf{p}|$$

и дополнительным условиям

$$(1 + \gamma^5)v^{\pm}(\mathbf{p}) = \hat{v}^{\pm}(\mathbf{p})(1 + \gamma^5) = 0, \quad (30)$$

могут быть выбраны в виде (имеется в виду представление (6.18) матриц Дирака)

$$v^+(\mathbf{p}) = v^-(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} w(\mathbf{p}) \\ w(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = v(\mathbf{p}), \quad \bar{v}^*(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{w}^*, \bar{w}^*),$$

где  $w(\mathbf{p}) = \Phi_{\frac{1}{2}}^{\pm}(\mathbf{p})$  — двухкомпонентные спиноры, удовлетворяющие уравнению Вейля (7.50)

$$(p^0 + \sigma_3 p^3) w(\mathbf{p}) = 0,$$

имеют вид

$$w(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + p^3/p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь мы учли, что для безмассового нейтрино  $p^3 = p^0$ . Очевидно также, что

$$\bar{w}^*(\mathbf{p}) = (0, 1),$$

поэтому

$$\bar{v}^{\pm}(\mathbf{p}) \sigma_3 v^{\mp}(\mathbf{p}) = -1.$$

Подставляя этот результат в (29), находим

$$S_3 \sim -\frac{1}{2} \bar{a}_{-1}^*(\mathbf{p}) a_{-1}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} a_{-1}^+(\mathbf{p}) \bar{a}_{-1}(\mathbf{p}). \quad (31)$$

Первый член этого выражения соответствует левовинтовому нейтрино (с отрицательной спиральностью), а второй — правовинтовому антинейтрино. Спиральность антинейтрино равна  $+1$ .

Выражение (31) соответствует формуле (10) при  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = a_{-1}$ . Если бы вместо функции  $v = \psi_{-}$  мы рассмотрели функцию  $\psi_{+}$ , то получили бы аналог формулы (10) при  $a_2 = 0$ , описывающий частицы с положительной спиральностью и античастицы с отрицательной спиральностью.

Как видно, благодаря условию (30) количество состояний безмассового фермиона в два раза меньше, чем для фермиона с массой: два у частицы и два у античастицы. Путем простого формального приема можно теперь добиться того, что частица будет иметь четыре состояния, а переход к античастице не добавляет новых степеней свободы, т. е. античастица будет тождественна частице.

Такое представление безмассового спинорного поля называется представлением Майораны. Спинор Майораны  $\chi$  определяется соотношением

$$\chi^c = \chi, \quad (32)$$

которое на основании (12) можно переписать в виде

$$C\bar{\chi} = \chi. \quad (33)$$



Покажем теперь, что ток майорановских спиноров тождественно равен нулю. В самом деле, с помощью (32), (12) и (20) он может быть преобразован к виду

$$\dot{\chi}\gamma^n\chi = \chi^c\gamma^n\chi^c = -\chi C^{-1}\gamma^n C\bar{\chi} = \dots$$

Используя затем (22) и переходя к обратному порядку сомножителей с учетом статистики Ферми, получаем

$$\dots = \overset{\top}{\chi}\gamma^n\bar{\chi} = -\bar{\chi}\gamma^n\chi,$$

т. е.

$$\bar{\chi}\gamma^n\chi = 0. \quad (34)$$

Таким образом майорановские частицы можно назвать истинно нейтральными.

Если связать майорановский спинор  $\chi$  с использованным выше спинором  $\nu$  соотношением

$$\chi = \frac{\nu + \nu^c}{2}, \quad (35)$$

то лагранжиан (26) примет вид

$$\mathcal{L}(x) = : \frac{i}{2} (\bar{\chi}(x) \gamma^n \chi_{;n}(x) - \bar{\chi}_{;n}(x) \gamma^n \chi(x)) :. \quad (36)$$

Не составляет труда убедиться, что благодаря свойству (33) уравнения движения для  $\chi$  и  $\bar{\chi}$  оказываются тождественными.

## § 14. CPT-теорема

Заключая рассмотрение квантованных свободных полей, установим одно из важнейших свойств локальной квантовой теории поля — свойство инвариантности относительно произведения трех дискретных симметричных преобразований: зарядового сопряжения  $C$ , пространственного отражения  $P$  и обращения оси времени  $T$ . Эти преобразования рассматривались выше (см., например, §§ 6.4, 10.2, 13.3) чисто алгебраически. Нам потребуется их операторная формулировка.

**14.1. Зарядовое сопряжение в квантованном случае.** Подобно тому как преобразования группы Лоренца  $L$  ставятся в соответствие унитарные операторы  $U_L$ , преобразующие векторы состояния и операторы полей согласно соотношениям (9.12) и (9.15), преобразованию  $\bar{C}$  также можно сопоставить унитарный оператор  $U_C$ . Для комплексного скалярного поля закон преобразования имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\rightarrow \varphi_C(x) = U_C^{-1} \varphi(x) U_C = \eta_\varphi(C) \varphi^*(x), \\ \varphi^*(x) &\rightarrow \varphi_C^*(x) = U_C^{-1} \varphi^*(x) U_C = \eta_\varphi^*(C) \varphi(x), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\eta_\varphi$ ,  $\eta_\varphi^*$  — числовые множители.

В силу тождественности двукратного преобразования

$$U_C^2 = 1, \quad (2)$$

вследствие чего унитарный оператор  $U_C$  является эрмитовым.

Из (2) вытекает также, что

$$|\eta_\varphi(C)|^2 = 1.$$

Если поле  $\varphi$  вещественно, то

$$\varphi_C(x) = U_C^{-1} \varphi(x) U_C = \eta_\varphi(C) \varphi(x) \quad (3)$$

и фазовый множитель  $\eta_\varphi$  веществен и

$$\eta_\varphi(C) = \pm 1.$$

Его можно также представить как собственное значение оператора  $U_C$  для одночастичного состояния

$$\Phi_1(x) = \varphi(x) \Phi_0.$$

В самом деле, действуя вытекающим из (3) операторным равенством

$$U_C \varphi(x) = \eta_\varphi(C) \varphi(x) U_C$$

на амплитуду вакуума  $\Phi_0$ , с учетом того, что  $U_C \Phi_0 = \Phi_0$ , получаем

$$U_C \Phi_1(x) = \eta_\varphi(C) \Phi_1(x). \quad (4)$$

В случае, когда  $\eta_\varphi(C) = 1$ , поле называют *зарядово-четным*, а при  $\eta_\varphi(C) = -1$  — *зарядово-нечетным*. Квантовое число  $\eta_\varphi$  называют *зарядовой четностью нейтральных частиц*, описываемых полем  $\varphi$ .

Аналогичные соотношения можно написать для векторного и электромагнитного полей. Как было показано выше, 4-вектор тока заряженных частиц при зарядовом сопряжении изменяет знак. Поэтому из требования инвариантности лагранжиана электромагнитного взаимодействия относительно зарядового сопряжения вытекает, что электромагнитное поле зарядово-нечётно.

Оператор  $U_C$  для спинорного поля определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi_C(x) = U_C^{-1} \psi(x) U_C = \eta_\psi(C) C \psi^T, \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}_C(x) = U_C^{-1} \bar{\psi}(x) U_C = -\eta_\psi(C) \psi^T C^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пользуясь соотношениями (1) — (5) и записью операторов полей через операторы уничтожения и рождения частиц, нетрудно найти закон преобразования состояний с заданным числом частиц. Ясно, что под действием преобразования (1), (5) частицы заменяются на античастицы, а вектор состояния умножается на фазовый множитель, равный произведению фазовых множителей  $\eta_i(C)$  для каждой из частиц, содержащихся в рассматриваемом состоянии.

Единственное исключение из этого общего правила связано с нейтрино. Дело в том, что оператор  $U_C$ , определенный согласно (5), переводит левовинтовое нейтрино (т. е. нейтринную функцию  $\nu(x)$ ,

удовлетворяющую дополнительному условию (7.52)) в левовинтовое состояние, не удовлетворяющее условию (7.54). Для того чтобы из левовинтового нейтрино получить правовинтовое антинейтрино, кроме  $S$ -преобразования следует применить  $P$ -преобразование.

**14.2.  $P$ -преобразование.** Определим теперь унитарные операторы  $U_P$ , соответствующие отражению трех пространственных осей. Для бесспинового поля оператор  $U_P$  определяется условием

$$\varphi(x^0, \mathbf{x}) \rightarrow \varphi_P(x^0, \mathbf{x}) = U_P^{-1} \varphi(x^0, \mathbf{x}) U_P = \eta_\varphi(P) \varphi(x^0, -\mathbf{x}). \quad (6)$$

В силу условия  $U_P^2 = 1$  числовой множитель  $\eta_\varphi(P)$  равен  $+1$  (поле  $\varphi$  в этом случае является скалярным) или  $-1$  (поле  $\varphi$  — псевдоскалярно). Он называется *внутренней четностью* (или просто *четностью*) частиц, описываемых полем  $\varphi$ . Состояние одной частицы с импульсом  $\mathbf{k}$  переходит под действием оператора  $U_P$  в состояние той же частицы с импульсом  $-\mathbf{k}$  и умножается на  $\eta_\varphi(P)$ . Внутренняя четность состояния, содержащего несколько частиц, равна, очевидно, произведению внутренних четностей каждой из частиц. Аналогичным образом определяются операторы  $U_P$  для векторного и электромагнитного полей

$$\begin{aligned} U^n(x^0, \mathbf{x}) &\rightarrow U_P^n(x^0, \mathbf{x}) = U_P^{-1} U^n(x^0, \mathbf{x}) U_P = \eta_U(P) U_n(x^0, -\mathbf{x}), \quad (7) \\ A^n(x^0, \mathbf{x}) &\rightarrow A_P^n(x) = U_P^{-1} A^n(x) U_P = \eta_A(P) A_n(x^0, -\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Из инвариантности электромагнитного взаимодействия относительно  $P$ -преобразования очевидно следует, что  $\eta_A(P) = 1$ .

Унитарный оператор  $U_P$  для спинорного поля, как следует из (6.34), определяется соотношением

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi_P(x) = U_P^{-1} \psi(x) U_P = \eta_\psi(P) \gamma^0 \psi(x^0, -\mathbf{x}), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}_P(x) = U_P^{-1} \bar{\psi}(x) U_P = \eta_\psi^*(P) \bar{\psi}(x^0, -\mathbf{x}) \gamma^0. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что вследствие двузначности спинорного представления двукратное отражение пространственных осей, вообще говоря, может изменить знак спинора  $\psi$ . Действительно, двукратное  $P$ -преобразование можно записать не только в виде тождественного преобразования, но и, например, как вращение на угол  $2\pi$  плоскости  $x^1x^2$  вокруг оси  $x^3$ , а при таком вращении пространства спинор  $\psi$ , согласно (6.31), меняет знак. Поэтому, в отличие от случая скалярного и векторного полей, для спинорного поля  $\eta_\psi^2(P) = +1$  или  $-1$ , т. е.  $\eta_\psi(P) = \pm 1$  или  $\pm i$ . В дальнейшем мы, однако, условимся выбирать для спинорных полей значения  $\eta_\psi(P) = \pm 1$ . При таком выборе оператор  $U_P$  не только унитарен, но и эрмитов, так как  $U_P^2 = 1$ . Нетрудно проверить, что при таком выборе  $\eta_\psi$  поля  $\psi$  и  $\psi_C$  преобразуются неодинаково. Действительно:

$$\begin{aligned} \psi_C \rightarrow (\psi_C)_P &= U_P^{-1} \psi_C U_P = \eta_\psi(C) \eta_\psi(P) \psi \gamma^0 C^T = \\ &= -\eta_\psi(P) \eta_\psi(C) \bar{\psi} C^T \gamma^0 = -\eta_\psi(P) \gamma^0 \psi_C, \end{aligned}$$

откуда следует, что четности фермиона и антифермиона противоположны (для проверки этого утверждения достаточно получить из (4) закон преобразования одночастичного состояния).

Теперь мы можем предоставить читателю в качестве упражнения проверить, что преобразование  $CP$  переводит состояния левовинтового нейтрино в состояния правовинтового антинейтрино. По этой причине лагранжиан нейтринного поля инвариантен при  $C$ -преобразовании и  $P$ -преобразовании, но инвариантен при  $CP$ -преобразовании.

**14.3. Обращение времени.** В отличие от преобразований  $C$ ,  $P$  и  $CP$ , операцию обращения времени в пространстве состояний можно реализовать лишь с помощью *антиунитарного* оператора  $U_T$  (Вигнер (1959)). Антиунитарный оператор обращения времени определяется соотношением (сравни с определением унитарного оператора (9.9))

$$(U_T \Phi_1)^* (U_T \Phi_2) = \Phi_2^* \Phi_1. \quad (9)$$

Из (9) вытекает также, что

$$U_T (a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2) = a_1^* U_T \Phi_1 + a_2^* U_T \Phi_2 = a_1^* \Phi_1^* + a_2^* \Phi_2^* \quad (10)$$

и

$$U_T^\dagger U_T = 1. \quad (11)$$

Таким образом, антиунитарный оператор, как и унитарный, сохраняет норму. Условие совместности (9.15) для антиунитарного преобразования несколько изменяет форму. Действительно, рассмотрим матричный элемент некоторого оператора  $A$  между состояниями  $\Phi_1' = U_T \Phi_1$  и  $\Phi_2' = U_T \Phi_2$  и выразим его через матричный элемент преобразованного оператора  $A'$  между состояниями  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . Используя (10) и (11), получим

$$\begin{aligned} \Phi_2'^* A \Phi_1' &= (U_T \Phi_2)^* A U_T \Phi_1 = (U_T \Phi_2)^* U_T (U_T^{-1} A U_T) \Phi_1 = \\ &= \Phi_1^* (U_T^{-1} A U_T)^\dagger \Phi_2 \equiv \Phi_1^* A' \Phi_2. \end{aligned}$$

Таким образом, преобразование оператора  $A$  имеет вид

$$A' = (U_T^{-1} A U_T)^\dagger \quad (12)$$

и при взятии матричных элементов начальное и конечное состояния меняются местами. Инвариантность оператора  $A$  относительно  $T$ -преобразования поэтому означает, что

$$U_T^{-1} A U_T = A^\dagger.$$

Это условие сводится к условию коммутативности операторов  $U_T$  и  $A$  лишь в том случае, когда оператор  $A$  эрмитов, т. е.  $A^\dagger = A$ .

Учитывая антиунитарный характер оператора  $U_T$ , преобразование  $T$  для скалярного поля запишем в виде

$$\varphi(x^0, \mathbf{x}) \rightarrow \varphi_T(x^0, \mathbf{x}) = [U_T^{-1} \varphi(x_0, \mathbf{x}) U_T]^\dagger = \eta_\varphi(T) \varphi(-x^0, \mathbf{x}). \quad (13)$$

Аналогично для векторного поля:

$$U^n(x^0, \mathbf{x}) \rightarrow U_T^n(x^0, \mathbf{x}) = \eta_U(T) \overset{\dagger}{U}_n(-x^0, \mathbf{x}). \quad (14)$$

$T$ -преобразование спинорного поля ищем в виде

$$\psi_T(x^0, \mathbf{x}) = [U_T^{-1} \psi(x) U_T]^\dagger = \eta_\psi(T) \bar{\psi}(-x^0, \mathbf{x}) T, \quad (15)$$

где, как и в случае  $P$ - и  $C$ -преобразований, положим

$$\overset{\dagger}{T} = T^{-1}, \quad |\eta_\psi(T)|^2 = 1.$$

Без ограничения общности мы можем положить  $\gamma^0 T \gamma^0 = \lambda T$ . Тогда поле  $\bar{\psi}$  преобразуется следующим образом:

$$\bar{\psi}_T(x^0, \mathbf{x}) = [U_T^{-1} \bar{\psi}(x^0, \mathbf{x}) U_T]^\dagger = \lambda \eta_\psi^*(T) T^{-1} \bar{\psi}(-x^0, \mathbf{x}).$$

Свойства матрицы  $T$  устанавливаются из условия инвариантности лагранжиана свободного спинорного поля [ $x' = (-x^0, \mathbf{x})$ ]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x') \rightarrow \mathcal{L}_T(x') &= (U_T^{-1} \mathcal{L}(x') U_T)^\dagger = \frac{i}{2} \left( U_T^{-1} \bar{\psi}(x') \gamma^n \frac{\partial \psi}{\partial x'^n} U_T \right)^\dagger - \\ &- \frac{i}{2} \left( U_T^{-1} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x'_n} \gamma_n \psi(x') U_T \right)^\dagger - m (U_T^{-1} \bar{\psi}(x') \psi(x') U_T)^\dagger = \\ &= \left( U_T^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x'_n} U_T \right)^\dagger \frac{i}{2} \gamma_n (U_T^{-1} \bar{\psi}(x') U_T)^\dagger - \\ &- \frac{i}{2} (U_T^{-1} \bar{\psi}(x') U_T)^\dagger \gamma_n^\top \left( U_T^{-1} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x'_n} U_T \right)^\dagger - \\ &- m (U_T^{-1} \bar{\psi}(x') U_T)^\dagger (U_T^{-1} \bar{\psi}(x') U_T)^\dagger = \mathcal{L}(x). \end{aligned}$$

Последний член, очевидно, равен  $-m \bar{\psi} T \lambda T^{-1} \psi$ , откуда следует, что  $\lambda = 1$ . Учитывая, что  $x'^n = -x_n$ , два первые члена можно представить в форме

$$-\frac{i}{2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x'^n} T g^{nm} \gamma^m T^{-1} \psi(x) + \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) T g^{nm} \gamma^m T^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x^n}.$$

Чтобы обеспечить инвариантность этих членов при  $T$ -преобразовании, достаточно потребовать выполнения условия

$$T g^{nm} \gamma^m T^{-1} = \gamma^n.$$

(При  $n = 0$  это условие опять дает  $\lambda = 1$ .) Дополнительно на матрицу  $T$  обычно налагают условие

$$T^\top = -T.$$

Подчеркнем, что при выполнении проведенных выше преобразований можно считать, что операция эрмитова сопряжения, обозначаемая символом  $( )^*$ , *не действует* на комплексные числа  $i$ ,  $\gamma_{\alpha\beta}^n$ , ... и т. п. Это обстоятельство связано с тем, что для антиунитарного

оператора  $U_T$  при любом комплексном  $\lambda$  выполняется равенство

$$(U_T^{-1} \lambda A U_T)^* = (\lambda^* U_T^{-1} A U_T)^* = \lambda (U_T^{-1} A U_T)^*.$$

**14.4. CPT-теорема.** Покажем теперь, каким образом используются выведенные выше правила при построении лагранжианов, инвариантных относительно совокупности преобразований  $S$ ,  $P$  и  $T$  (см. Граверт, Людерс, Рольник (1959)). Читатель без труда убедится самостоятельно, что лагранжианы свободных полей инвариантны относительно каждой из этих операций в отдельности (исключая отмеченный выше случай свободного нейтринного поля). Поэтому для иллюстрации рассмотрим лагранжиан взаимодействия двух спинорных и одного бесспинового полей

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & g \bar{\psi}_1 \psi_2 \varphi + g' \bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2 \varphi + f \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 \varphi_{, \mu} + f' \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \psi_2 \varphi_{, \mu} + \\ & + g \bar{\psi}_2 \psi_1 \varphi + g' \bar{\psi}_2 \gamma_5 \psi_1 \varphi + f \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1 \varphi_{, \mu} + f' \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \gamma^5 \psi_1 \varphi_{, \mu}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для упрощения изложения запишем  $\mathcal{L}$  в виде  $\mathcal{L}(g, g', f, f')$  и будем считать все фазовые множители  $\eta$  вещественными, положив  $\eta_\varphi(\dots) = \eta_0(\dots)$ ,  $\eta_{\psi_i}(\dots) = \eta_i(\dots)$ . Используя выписанные выше соотношения для преобразования  $P$ , нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x') \rightarrow \mathcal{L}_P(x') &= \eta_1(P) \mathcal{L}(g, -g', f, -f'), \\ \eta_1(P) &= \eta_0(P) \eta_1(P) \eta_2(P). \end{aligned}$$

Таким образом, лагранжиан инвариантен относительно преобразования  $P$ , если  $g' = f' = 0$  при  $\eta(P) = +1$ , или если  $g = f = 0$  при  $\eta(P) = -1$ . Если  $P$ -четности полей  $\psi_1$  и  $\psi_2$  одинаковы, т. е.  $\eta_1(P) = \eta_2(P)$ , то лагранжиан инвариантен для псевдоскалярного поля  $\varphi$  ( $\eta_0(P) = -1$ ) при  $g = f = 0$ , а для скалярного ( $\eta_0(P) = +1$ ) — при  $g' = f' = 0$ .

Для того чтобы найти правильный закон преобразования лагранжиана  $\mathcal{L}$  при преобразовании  $S$ , необходимо учитывать антикоммутативность спинорных полей под знаком нормального произведения, которое всегда подразумевается при написании лагранжианов в квантовой теории. Например,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1 \psi_2 \varphi \rightarrow U_C^{-1} \bar{\psi}_1 \psi_2 \varphi U_C &= -\eta(C) \bar{\psi}_1^T C^{-1} C \bar{\psi}_2^T \varphi^* = \eta(C) \bar{\psi}_2 \psi_1 \varphi^*, \\ \eta(C) &= \eta_0(C) \eta_1(C) \eta_2(C). \end{aligned}$$

Для получения последнего равенства здесь была использована антикоммутативность спиноров  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Выполняя аналогичные преобразования для всех членов лагранжиана, получим

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_C = \eta(C) \mathcal{L}(g^*, -g^*, f^*, -f^*),$$

откуда легко найти условия инвариантности относительно зарядового сопряжения.

Рассмотрим, наконец,  $T$ -преобразование. Пользуясь формулами, приведенными выше, находим, что

$$\mathcal{L}(x') \rightarrow \mathcal{L}_T(x') = \eta(\bar{T}) \mathcal{L}(g^*, g^*, f^*, f^*).$$

Выполнив теперь последовательно все три преобразования, получим

$$\mathcal{L}(x') \rightarrow \mathcal{L}_\Theta(x') = \eta(\Theta) \mathcal{L}(g, g', f, f'), \quad \eta(\Theta) = \eta(P) \eta(C) \eta(T),$$

где  $\Theta = P \cdot C \cdot T$ . Пользуясь произволом в определении фазового множителя  $\eta(T)$ , мы всегда можем выбрать его таким образом, что  $\eta(\Theta) = 1$ . Отсюда следует, что лагранжиан (16), о котором мы предполагали лишь, что он эрмитов и инвариантен при собственных преобразованиях Лоренца, оказывается инвариантным и относительно преобразования  $PCT$  ( $CPT$ ,  $TCP$  и т. д.). Этот результат составляет сущность  $CPT$ -теоремы Людерса — Паули (подробнее см. Паули (1955), Граверт, Людерс, Рольник (1959)). Проведенные выше рассуждения легко обобщаются на случай произвольного эрмитова лагранжиана, представленного в виде полинома конечной степени по полям и их производным (не выше конечного порядка), преобразующимся по неприводимым представлениям собственной группы Лоренца.

В проведенном рассуждении требование локальности взаимодействия играло существенную роль. В рамках аксиоматической формулировки квантовой теории поля это требование удастся несколько ослабить. Доказательство  $CPT$ -теоремы в аксиоматическом подходе было дано Р. Йостом (см. Йост (1965); Стритер, Вайтман (1964); Боголюбов, Логунов, Тодоров (1969)). При этом также предполагается, что лагранжиан записан в виде нормального произведения и что имеет место связь между спином и статистикой: поля с целым спином коммутируют между собой и с другими полями, а поля с полуцелым спином антикоммутируют друг с другом, но коммутируют с полями целого спина.

## СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

## § 15. Функции Грина

При квантовании свободных волновых полей нам встретились: перестановочная функция Паули — Йордана скалярного поля  $D$ , ее частотные части  $D^\pm$ , а также соответствующие функции для электромагнитного  $D_0$ , спинорного  $S$  и векторного  $D_{ln}$  полей, связанные с  $D$  дифференциальными соотношениями

$$\begin{aligned} D_0(x) &= D(x)|_{m=0}, & S_{\alpha\beta}(x) &= (i\hat{\partial} + m)_{\alpha\beta} D(x), \\ D_{ln}(x) &= \left( g_{ln} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^n} \right) D(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Перечисленные функции являются решениями однородных уравнений соответствующих полей и релятивистски инвариантным образом разбиваются на сумму своих частотных частей, каждая из которых по отдельности также удовлетворяет соответствующему однородному уравнению.

В теории взаимодействующих полей важную роль играют решения соответствующих неоднородных уравнений поля с точечными источниками, т. е. функции Грина. Мы имеем здесь в виду известные из классической теории взаимодействующих полей запаздывающую и опережающую функции Грина, а также возникающую в квантовой теории взаимодействующих полей так называемую причинную функцию Грина.

Подобно перестановочным функциям, перечисленные функции Грина различных полей выражаются через соответствующие функции Грина скалярного поля дифференциальными соотношениями. Поэтому мы начнем с рассмотрения функций Грина для скалярного поля.

**15.1 Функции Грина скалярного поля.** Функцию Грина скалярного поля  $G$  определим как решение неоднородного уравнения Клейна — Гордона

$$(\square_x - m^2) G(x) = -\delta(x). \quad (2)$$

Здесь и ниже знак перед  $\delta$ -функцией в правой части уравнений для функций Грина для определенности будем полагать равным знаку перед массовым членом в левой части.



С помощью фурье-преобразования получаем для  $G$  следующее формальное выражение:

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{m^2 - k^2} dk; \quad \tilde{G}(k) = \frac{1}{m^2 - k^2}. \quad (3)$$

Это выражение является неопределенным, поскольку не заданы правила обхода полюсов  $k^2 = m^2$ . Неопределенность отражает тот факт, что полное решение уравнения (2) представляется в виде суммы частного решения неоднородного уравнения и решений  $D^+$  и  $D^-$  однородного уравнения, взятых с произвольными коэффициентами. Задание правил обхода двух полюсов при  $k^2 = m^2$  или наложение на  $G(x)$  граничных условий однозначно определяет эти коэффициенты.

Покажем это для запаздывающей функции Грина, удовлетворяющей граничному условию

$$D^{\text{ret}}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x^0 < 0. \quad (4)$$

Чтобы представить  $D^{\text{ret}}$  в виде, близком к (3), заметим, что при умножении этой функции на  $\exp(-\varepsilon x^0)$ , где  $\varepsilon > 0$ , в силу (4) она не приобретает каких-либо дополнительных особенностей

$$D^{\text{ret}}(x) e^{-\varepsilon x^0} = G_\varepsilon(x), \quad (5)$$

вследствие чего ее можно представить как предел

$$D^{\text{ret}}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} G_\varepsilon(x). \quad (6)$$

Согласно определению (5) функция  $G_\varepsilon$  удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \Delta - \left( \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \right)^2 - m^2 \right\} G_\varepsilon(x) = -\delta(x)$$

и потому в импульсном представлении в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  принимает вид

$$\frac{1}{m^2 - (k^0 + i\varepsilon)^2 + k^2} \rightarrow \frac{1}{m^2 - k^2 - 2i\varepsilon k^0}.$$

Таким образом, в соответствии с (6) запаздывающая функция Грина может быть представлена в виде

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{m^2 - k^2 - 2i\varepsilon k^0} dk. \quad (7)$$

Не составляет труда убедиться, что выражение (7) удовлетворяет условию (4). Для этого достаточно выполнить в явном виде интегрирование по переменной  $k^0$  с помощью теории вычетов. Бесконечно малая добавка  $2i\varepsilon k^0$  в знаменателе (7) указывает, что оба полюса в комплексной плоскости переменной  $k^0$  должны быть обойдены сверху (рис. 2). Поэтому при  $x^0 < 0$ , когда контур интегрирования

может быть замкнут в верхней полуплоскости полуокружностью большого радиуса, внутри него не оказывается полюсов, и мы получаем (4). В случае  $x^0 > 0$  контур интегрирования замыкается в нижней полуплоскости. Вычисляя вычеты, находим в этом случае:

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int \frac{e^{ik^0 x^0} - e^{-ik^0 x^0}}{2k^0} \Big|_{k^0 = \sqrt{k^2 + m^2}} e^{-ikx} dk = D(x).$$

Поэтому

$$D^{\text{ret}}(x) = \theta(x^0) D(x) \quad (8)$$

Аналогичным образом можно показать, что опережающая функция Грина, определяемая условием

$$D^{\text{adv}}(x) = 0 \quad \text{при } x^0 > 0$$

и удовлетворяющая уравнению (2), имеет вид

$$\begin{aligned} D^{\text{adv}}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx} dk}{m^2 - k^2 + 2ieik^0} = \\ &= -\theta(-x^0) D(x) \end{aligned} \quad (9)$$

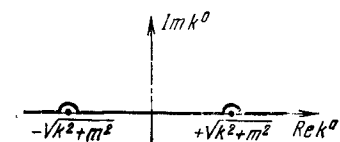


Рис. 2. Путь интегрирования для функции  $D^{\text{ret}}$  в комплексной плоскости  $k^0$ .

**15.2. Причинная функция Грина скалярного поля.** В квантовой теории поля исключительно важную роль играет *причинная функция Грина*  $D^c(x - y)$  (\*), описывающая, как говорят, *причинную связь* процессов рождения и уничтожения частиц в различных точках пространства-времени  $x$  и  $y$ . Мы установим конкретный вид функции  $D^c$ , ограничиваясь для начала случаем скалярного поля.

Процесс рождения скалярной частицы в точке  $x$  и ее последующего уничтожения в точке  $y$  описывается матричным элементом

$$\Phi_1(y) \Phi_1(x) = \Phi_0 \Phi^-(y) \Phi^+(x) \Phi_0 = \frac{1}{i} D^-(y - x) = i D^+(x - y). \quad (10)$$

При этом, очевидно, следует считать, что  $y^0 > x^0$ . Напротив, при  $x^0 > y^0$  частица рождается в точке  $y$  и уничтожается в точке  $x$ . Этому процессу соответствует выражение

$$\Phi_1(x) \Phi_1(y) = \frac{1}{i} D^-(x - y). \quad (11)$$

Таким образом, причинная функция  $D^c(x - y)$  при  $x^0 > y^0$  должна быть пропорциональна функции  $D^-(x - y)$ , а при  $x^0 < y^0$  — функции  $D^+(x - y)$ . Для установления вида этой функции воспользуемся отмеченным выше обстоятельством, что любое решение уравнения (2) может быть представлено в виде суммы его частного решения и линейной комбинации решений однородного уравнения. Вы-

\* Впервые введенная, по-видимому, Ривье и Штокельбергом (1948).

бирая, например, в качестве такого частного решения запаздывающую функцию Грина, получим формулу для любого решения уравнения (2) в следующем виде:

$$G(x) = D^{\text{ret}}(x) + a_1 D^+(x) + a_2 D^-(x),$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — некоторые произвольные численные коэффициенты. Полагая здесь  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 0$ , приходим к выражению

$$D^{\text{ret}}(x-y) - D^+(x-y) - \theta(x^0 - y^0) D^-(x-y) - \theta(y^0 - x^0) D^+(x-y),$$

которое удовлетворяет всем предъявляемым к  $D^c$  условиям.

Чтобы получить для причинной функции

$$D^c(x) = \theta(x^0) D^-(x) - \theta(-x^0) D^+(x) \quad (12)$$

выражение в импульсном представлении, заметим, что разность  $D^{\text{ret}} - D^+$  может быть там представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2 - k^2 - 2i\epsilon k^0} + 2\pi i \theta(-k^0) \delta(k^2 - m^2) &= \\ &= \frac{\mathcal{P}}{m^2 - k^2} + (2\theta(-k^0) + \epsilon(k^0)) \pi i \delta(k^2 - m^2) = \\ &= \frac{\mathcal{E}\mathcal{P}}{m^2 - k^2} + i\pi \delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon}, \end{aligned}$$

что дает:

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ikx}}{m^2 - k^2 - i\epsilon} dk \quad (13)$$

Причинная функция  $D^c$  может быть непосредственно выражена через матричные элементы типа (10), (11). Введем для этого хронологическое произведение (иначе  $T$ -произведение) двух операторов поля  $T(u(x), u(y))$ , равное произведению этих операторов в порядке справа налево, соответствующем возрастанию временных аргументов с учетом общего знака, который может меняться в том случае, если операторы квантованы по Ферми — Дираку, т. е. \*)

$$T(u(x)u(y)) = \begin{cases} u(x)u(y) & \text{при } x^0 > y^0, \\ \pm u(y)u(x) & \text{при } x^0 < y^0 \end{cases} \quad (14)$$

(+ для бозе-операторов, — для ферми-операторов).

Вычисляя матричный элемент (14) по состоянию вакуума для рассматриваемого скалярного поля с помощью (10) и (11), получаем:

$$\Phi_0^*(T(\varphi(x)\varphi(y))\Phi_0 = \begin{cases} \Phi_0^*\varphi(x)\varphi(y)\Phi_0 = \frac{1}{i} D^-(x-y) & \text{при } x^0 > y^0, \\ \Phi_0^*\varphi(y)\varphi(x)\Phi_0 = iD^+(x-y) & \text{при } x^0 < y^0 \end{cases}$$

Таким образом,

$$D^c(x-y) = i\Phi_0^* T(\varphi(x)\varphi(y))\Phi_0 = i\langle T\varphi(x)\varphi(y) \rangle_0. \quad (15)$$

**15.3. Причинные функции Грина различных полей.** Из (13) следует, что для того, чтобы функция вида (3) обладала свойством «причинности», достаточно считать, что квадрат массы в знаменателе ее импульсного представления содержит бесконечно малую отрицательную мнимую добавку.

Вспоминая теперь, что согласно (1) перестановочные функции электромагнитного, спинорного и векторного полей отличаются от функции Паули — Йордана лишь дифференциальными операторами, положим, *по определению*, что причинные функции указанных полей отличаются от  $D^c$  теми же операторами, т. е.

$$D_0^c(x) = D^c(x)|_{m=0} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\epsilon} dk, \quad (16)$$

$$S_{\alpha\beta}^c(x) = (i\hat{\partial} + m)_{\alpha\beta} D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{(m + \hat{p})_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} e^{-ipx} dp, \quad (17)$$

$$D_{nl}^c(x) = \left( g_{nl} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x^n \partial x^l} \right) D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\left( g_{nl} - \frac{k_n k_l}{m^2} \right)}{m^2 - k^2 - i\epsilon} e^{-ikx} dk. \quad (18)$$

Определенные таким способом причинные функции могут быть подобно функции  $D^c$  выражены через вакуумные средние от хронологических произведений операторов соответствующих полей:

$$-D_{mn}^c(x-y) = i\hat{\Phi}_0 T(U_m(x) U_n(y)) \Phi_0, \quad (19)$$

$$-g^{mn} D_0^c(x-y) = i\hat{\Phi}_0 T(A_m(x) A_n(y)) \Phi_0, \quad (20)$$

$$S_{\alpha\beta}^c(x-y) = i\hat{\Phi}_0 T(\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)) \Phi_0. \quad (21)$$

Формулы (19), (20) являются очевидными следствиями соотношений (1), а для доказательства (21) воспользуемся антикоммутаторами спинорного поля (13.2), (13.3). Этим путем получаем:

$$i(\hat{\Phi}_0 T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) \Phi_0) = \begin{cases} i(\hat{\Phi}_0 \psi^-(x) \bar{\psi}^+(y) \Phi_0) = (i\hat{\partial} + m) D^-(x-y) & \text{при } x_0 > y_0, \\ i(\hat{\Phi}_0 \bar{\psi}^-(y) \psi^+(x) \Phi_0) = -(i\hat{\partial} + m) D^+(x-y) & \text{при } x_0 < y_0, \end{cases}$$

что ввиду (17) эквивалентно (21).

Ясно также, что, заменяя в знаменателях (16) — (18)  $i\epsilon$  на  $2i\epsilon k^0$ , мы получим выражения, которые обращаются в нуль при  $x^0 < y^0$  и поэтому представляют запаздывающие функции Грина соответствующих полей.

Отметим, что при выражении функций Грина различных полей через перестановочные функции с помощью соотношений типа (8), (9), (12) следует соблюдать известную осторожность. Так, например, причинную функцию векторного

поля по аналогии с (12) можно было бы записать в виде

$$\theta(x^0) D_{mn}^-(x) - \theta(-x^0) D_{mn}^+(x), \quad (22)$$

где

$$D_{ln}^\pm(x) = \frac{\pm 1}{(2\pi)^3 i} \int e^{ikx^0} (\pm k^0) \delta(k^2 - m^2) \left( g^{ln} - \frac{k_l k_n}{m^2} \right) dk.$$

Однако прямое вычисление выражения (22), которое выполняется просто посредством интегрального представления  $\theta$ -функции:

$$\theta(\pm x^0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix^0 \tau}}{\varepsilon \pm i\tau} d\tau,$$

приводит к выражению

$$D_{ln}^c(x) = \frac{\delta_{ln} \delta_{n0}}{m^2} \delta(x),$$

отличающемся от  $D_{ln}^c(x)$  в окрестности точки  $x = 0$ . Такой результат является следствием фактической неопределенности выражения (22) в бесконечно малой окрестности точки  $x = 0$ .

Эту неопределенность в причинной функции можно особенно легко заметить, представив ее в форме

$$i\Phi_0^* T(U_l(x) U_n(y)) \Phi_0. \quad (23)$$

Действительно, выражение (23) в соответствии с (14) однозначно определено при  $x^0 < y^0$  и при  $y^0 < x^0$ . Ясен также его смысл при  $(x - y)^2 = -(x - y)^2 \neq 0$ , поскольку при этом (23) можно записать либо в форме

$$i\Phi_0^* U_l(x) U_n(y) \Phi_0,$$

либо в форме

$$i\Phi_0^* U_n(y) U_l(x) \Phi_0$$

ввиду того, что при  $(x - y)^2 < 0$  (см. анализ свойств  $D$ - и  $D^c$ -функций в § 16) операторы  $U(x)$  и  $U(y)$  коммутируют:

$$[U_l(x), U_n(y)]_- = \frac{1}{i} D_{ln}(x - y) \Big|_{(x - y)^2 < 0} = 0,$$

и обе формы равны друг другу. Однако смысл выражения (14) при совпадении аргументов ( $x = y$ ) совершенно неясен. Отсюда вытекает, что  $T$ -произведение не определено в точке  $x = y$  и что, используя различные способы его построения, можно получить выражения, отличающиеся друг от друга на члены, пропорциональные  $\delta(x - y)$  и ее производным.

С этим обстоятельством мы еще встретимся в теории взаимодействующих полей (глава IV), где оно будет рассмотрено более детально. Пока же для устранения каких-либо неопределенностей мы условимся определить хронологические произведения операторов поля не выражениями типа (22), а с помощью формул типа (16) — (18), в виде функций Грина неоднородных уравнений соответствующих полей:

$$\square D_0^c(x) = -\delta(x),$$

$$(i\hat{\partial} - m) S^c(x) = -\delta(x),$$

$$(\square - m^2) D_{nl}^c(x) = -\left( g^{nl} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x^n \partial x^l} \right) \delta(x).$$

Вид правой части последнего уравнения обусловлен требованием совместности причинной функции векторного поля с дополнительным условием

$$\frac{\partial U_n}{\partial x_n} = 0.$$

Аналогичные соотношения между перестановочными и причинными функциями могут быть установлены и для произвольного поля. Для их вывода удобно исходить из уравнений поля, записанных в форме Кеммера (см. § 4.4):

$$\left( i\Gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - m \right) u(x) = 0.$$

Составляя обычным образом лагранжиан и с его помощью затем 4-вектор энергии-импульса, можно получить методом, указанным в § 10, перестановочные функции поля  $\Delta_{\alpha\beta}$ . Для  $\Delta_{\alpha\beta}(x)$  получится выражение вида

$$\Delta_{\alpha\beta}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int P_{\alpha\beta}(k) e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k^0) dk = P_{\alpha\beta} \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right) D(x), \quad (24)$$

где  $P_{\alpha\beta}(k)$  — некоторый полином по компонентам  $k$ .

Повторяя рассуждения данного параграфа, выражение для причинной функции  $\Delta_{\alpha\beta}^c$  получим в форме

$$\Delta_{\alpha\beta}^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{P_{\alpha\beta}(k) e^{-ikx} dk}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} = P_{\alpha\beta} \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right) D^c(x) \quad (25)$$

с тем же самым полиномом  $P_{\alpha\beta}$ .

В связи с неопределенностью при совпадении аргументов возникает возможность различных вариантов определения операции хронологического упорядочения от производных полей. Во-первых, производные можно перенести в коэффициентные функции и упорядочивать полевые функции до дифференцирования. Во-вторых, можно сначала перенести производные на поля, а затем упорядочивать произведение производных от полей. Первая операция часто называется *виковым* хронологическим произведением и обозначается символом  $T_W$ . Вторая операция именуется *дайсоновым* хронологическим произведением и обозначается через  $T_D$ . Различие между  $T_W$  и  $T_D$  явно выступает в процессе приведения хронологического произведения к нормальной форме и сказывается на хронологических спариваниях, входящих в коэффициентные функции. В случае  $T_W$  «основным» спариванием является функция  $-iD^c(x-y)$ , которая дифференцируется целиком, т. е. например,

$$\begin{aligned} \langle T_W(\varphi; n(x) \varphi; m(y)) \rangle_0 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^n \partial y^m} \frac{1}{i} D^c(x-y) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{k^n k^m}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} dk. \end{aligned} \quad (26)$$

Во втором случае используется представление (12) для  $D^c$  через частотные функции  $D^\pm$ , которые и дифференцируются:

$$\begin{aligned} \langle T_D(\varphi; n(x) \varphi; m(y)) \rangle_0 &\equiv \\ &\equiv \theta(x^0 - y^0) \langle \varphi; n(x) \varphi; m(y) \rangle_0 + \theta(y^0 - x^0) \langle \varphi; m(y) \varphi; n(x) \rangle_0 = \\ &= \theta(x^0 - y^0) \frac{\partial^2}{\partial x^n \partial y^m} \frac{1}{i} D^-(x - y) + \theta(y^0 - x^0) \frac{\partial^2}{\partial x^n \partial y^m} i D^+(x - y) = \\ &= \langle T_W(\varphi; n(x) \varphi; m(y)) \rangle_0 - i \delta_{n0} \delta_{m0} \delta(x - y). \end{aligned} \quad (27)$$

## § 16. Особенности функций Грина и регуляризация

**16.1. Вычисление  $D^+$ - и  $D^-$ -функций.** Займемся исследованием особенностей перестановочных функций и функций Грина. В предыдущем параграфе было установлено, что все эти функции могут быть выражены через частотные части функции Паули — Йордана. Поэтому мы начнем с вычисления интегралов

$$D^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int e^{ikx} \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) dk, \quad (1)$$

$$D^-(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) dk. \quad (2)$$

Выполняя в (1), (2) интеграцию по  $k^0$  и по угловым переменным в пространстве  $\mathbf{k}$ , представим эти выражения в виде

$$D^+(x) = \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} f(x), \quad D^-(x) = \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \overset{*}{f}(x), \quad (3)$$

где

$$f(x) = f(x^0, r) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(k^0 x^0 + kr)}}{k^0} dk, \quad (4)$$

$$k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad k = \sqrt{\mathbf{k}^2}, \quad r = \sqrt{x^2},$$

а  $\overset{*}{f}(x)$  — функция, комплексно-сопряженная с  $f(x)$ . Таким образом, задача определения  $D^+$  и  $D^-$  сведется к вычислению одного интеграла (4). Производя в нем замену переменных

$$k = m \operatorname{sh} \varphi, \quad k^0 = m \operatorname{ch} \varphi, \quad (5)$$

получаем:

$$f(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{im(x^0 \operatorname{ch} \varphi + r \operatorname{sh} \varphi)}. \quad (6)$$

Здесь следует различать четыре случая:

- 1)  $x^0 > 0, \quad x^0 > r,$     2)  $x^0 > 0, \quad x^0 < r,$
- 3)  $x^0 < 0, \quad |x^0| > r,$     4)  $x^0 < 0, \quad |x^0| < r.$

Подставляя соответственно

- 1)  $x^0 = \sqrt{\lambda} \operatorname{ch} \varphi_0, \quad r = \sqrt{\lambda} \operatorname{sh} \varphi_0,$
- 2)  $x^0 = \sqrt{-\lambda} \operatorname{sh} \varphi_0, \quad r = \sqrt{-\lambda} \operatorname{ch} \varphi_0,$
- 3)  $x^0 = -\sqrt{\lambda} \operatorname{ch} \varphi_0, \quad r = \sqrt{\lambda} \operatorname{sh} \varphi_0,$
- 4)  $x^0 = -\sqrt{-\lambda} \operatorname{sh} \varphi_0, \quad r = \sqrt{-\lambda} \operatorname{ch} \varphi_0$

(здесь введено обозначение  $\lambda = x^2 = (x^0)^2 - r^2$ ) и используя известные интегральные представления цилиндрических функций находим:

$$1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{im\sqrt{\lambda} \operatorname{ch}(\varphi + \varphi_0)} = \frac{1}{2} H_0^{(1)}(m\sqrt{\lambda}) = \\ = \frac{1}{2} J_0(m\sqrt{\lambda}) + \frac{i}{2} N_0(m\sqrt{\lambda}),$$

$$2) \quad \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{im\sqrt{-\lambda} \operatorname{sh}(\varphi + \varphi_0)} = \frac{i}{\pi} K_0(m\sqrt{-\lambda}),$$

$$3) \quad \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{-im\sqrt{\lambda} \operatorname{ch}(\varphi - \varphi_0)} = \frac{1}{2} H_0^{(2)}(m\sqrt{\lambda}) = \\ = \frac{1}{2} J_0(m\sqrt{\lambda}) - \frac{i}{2} N_0(m\sqrt{\lambda}),$$

$$4) \quad \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{-im\sqrt{-\lambda} \operatorname{sh}(\varphi - \varphi_0)} = \frac{i}{\pi} K_0(m\sqrt{-\lambda}),$$

откуда следует:

$$f(x) = \varphi(x^0, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2i} N_0(m\sqrt{\lambda}) - \frac{1}{2} \varepsilon(x^0) J_0(m\sqrt{\lambda}) & \text{при } \lambda > 0, \\ \frac{i}{\pi} K_0(m\sqrt{-\lambda}) & \text{при } \lambda < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $J_\nu(z)$  — функции Бесселя первого рода,  $N_\nu(z)$  — функции Неймана (функции Бесселя второго рода, обозначаемые иногда через  $Y_\nu(z)$ ),  $K_\nu(z)$  — функции Ханкеля (функции Бесселя третьего рода) от мнимого аргумента

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi}{2} \nu i} H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{\pi i^{\nu+1}}{2} [J_\nu(iz) + iN_\nu(iz)].$$

При малых значениях аргумента

$$J_\nu(z) \sim \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}, \quad N_\nu(z) \sim \frac{2}{\pi} \ln z \cdot J_\nu(z), \\ K_\nu(z) \sim (-1)^{\nu+1} \ln z \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}, \quad (8)$$



тогда как при больших действительных  $z$

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right), \quad N_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right),$$

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}. \quad (9)$$

Заменяя в (3) дифференцирование по  $r$  дифференцированием по  $\lambda$  с учетом скачка функции  $j$  в точке  $\lambda = 0$  (ср. (7)), получаем из (3) следующие выражения для  $D^+$  и  $D^-$ :

$$D^+(x) = \frac{1}{4\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{mi}{8\pi \sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) [N_1(m\sqrt{\lambda}) - i\varepsilon(x^0) J_1(m\sqrt{\lambda})] -$$

$$- \theta(-\lambda) \frac{mi}{4\pi^2 \sqrt{-\lambda}} K_1(m\sqrt{-\lambda}), \quad (10)$$

$$D^-(x) = \frac{1}{4\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \theta(\lambda) \varepsilon(x^0) \frac{m}{8\pi \sqrt{\lambda}} J_1(m\sqrt{\lambda}) +$$

$$+ \frac{mi}{8\pi \sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) N_1(m\sqrt{\lambda}) + \theta(-\lambda) \frac{mi}{4\pi^2 \sqrt{-\lambda}} K_1(m\sqrt{-\lambda}). \quad (11)$$

Формулы (10), (11) являются исходными при исследовании особенностей всех интересующих нас функций.

**16.2. Явный вид и особенности функций  $D(x)$  и  $D^c(x)$ .** Складывая (10) и (11), получаем выражение для функции Паули — Йордана в виде

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{m}{4\pi \sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) \varepsilon(x^0) J_1(m\sqrt{\lambda}). \quad (12)$$

Отсюда следует, что функция Паули — Йордана обладает чрезвычайно важным свойством: она обращается в нуль вне светового конуса (при  $\lambda < 0$ ). Поэтому обращаются в нуль все (анти)коммутаторы полевых операторов, аргументы которых разделены пространственно-подобным интервалом. Физически этому соответствует независимость событий, разделенных пространственно-подобным интервалом, так как скорость распространения сигнала не может быть больше скорости света.

Для получения причинной функции образуем из формул (10) и (11) комбинацию

$$\theta(x^0) D^-(x) - \theta(-x^0) D^+(x).$$

Это дает:

$$D^c(x) = \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) - \frac{m}{8\pi \sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) \{J_1(m\sqrt{\lambda}) - iN_1(m\sqrt{\lambda})\} +$$

$$+ \frac{mi}{4\pi^2 \sqrt{-\lambda}} \theta(-\lambda) K_1(m\sqrt{-\lambda}). \quad (13)$$

Последняя формула может быть также записана в более компактном виде

$$D^c(x) = \frac{mi}{4\pi^2} \frac{K_1(m\sqrt{-\lambda + i\varepsilon})}{\sqrt{-\lambda + i\varepsilon}}. \quad (14)$$

Здесь

$$\sqrt{-\lambda + i\varepsilon} = i\sqrt{\lambda} \quad \text{при } \lambda > 0.$$

Наконец, для запаздывающей функции  $D^{\text{ret}}$  находим с помощью (15.8) и (12)

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{\theta(x^0)}{2\pi} \left\{ \delta(\lambda) - \frac{m}{2\sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) J_1(m\sqrt{\lambda}) \right\}. \quad (15)$$

Теперь видно, что  $D^{\text{ret}}$  равна нулю всюду, кроме светового конуса, направленного в будущее.

Обратимся к рассмотрению особенностей перестановочных функций и функций Грина. Из (10), (11), (13) — (15) вытекает, что все особенности рассматриваемых функций расположены только на световом конусе (при  $\lambda = 0$ ), так как на пространственной и временной бесконечностях эти функции согласно (9) убывают, как  $|\lambda|^{-3/4} \exp(-m\sqrt{|\lambda|})$  и  $\lambda^{-3/4}$  соответственно.

Для выяснения свойств регулярности исследуем поэтому поведение рассматриваемых функций в окрестности светового конуса. Воспользовавшись для этого (8), найдем:

$$D^\pm(x) = \frac{1}{4\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) \pm \frac{i}{4\pi^2\lambda} \mp \frac{im^2}{8\pi^2} \ln \frac{m|\lambda|^{1/2}}{2} - \\ - \frac{m^2}{16\pi} \varepsilon(x^0) \theta(\lambda) + O(\sqrt{|\lambda|} \ln|\lambda|), \quad (16)$$

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{m^2}{8\pi} \varepsilon(x^0) \theta(\lambda) + O(\lambda), \quad (17)$$

$$D^c(x) = \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) + \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{\lambda} - \frac{m^2}{16\pi} \theta(\lambda) + \frac{im^2}{8\pi^2} \ln \frac{m|\lambda|^{1/2}}{2} + \\ + O(\sqrt{|\lambda|} \ln|\lambda|), \quad (18)$$

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{2\pi} \theta(x^0) \delta(\lambda) - \frac{m^2}{8\pi} \theta(x^0) \theta(\lambda) + \theta(x^0) \theta(\lambda) O(\lambda). \quad (19)$$

Выражения (16) — (19) имеют на световом конусе особенности четырех типов: полюс  $1/\lambda$ ,  $\ln|\lambda|$ ,  $\delta$ -функцию  $\delta(\lambda)$  и скачок  $\theta(\lambda)$ . Множители  $\varepsilon(x^0)$  и  $\theta(x^0)$  в отдельных членах (16), (17), (19) не создают дополнительных особенностей вне светового конуса, так как благодаря стоящим при них факторам  $\delta(\lambda)$  и  $\theta(\lambda)$  скачки  $\varepsilon(x^0)$  и  $\theta(x^0)$  проявляются лишь в начале координат, т. е. опять-таки на световом конусе.

Таким образом, рассматриваемые перестановочные функции и функции Грина квантованных волновых полей являются *сингуляр-*

ными функциями, содержащими довольно сильные особенности на световом конусе.

**16.3. Регуляризация Паули — Вилларса.** Как будет установлено позже (глава IV), в теории взаимодействующих полей нам придется иметь дело с выражениями, содержащими произведения различного числа рассматриваемых сингулярных функций. В отдельных случаях (см. также § 18) особенности различных функций, входящих в такие произведения, будут накладываться друг на друга, приводя при этом к бессмысленным неинтегрируемым выражениям. Ниже (главы V и VI) будет указана методика выделения отдельных сингулярностей из таких выражений. При этом, чтобы в промежуточных рассуждениях не иметь дела с актуальными бесконечностями, окажется удобным использовать в них вместо самих сингулярных функций некоторые *регулярные приближения* к ним, а предельный переход, снимающий регулярность, осуществлять лишь в окончательных выражениях.

Основываясь на проведенном анализе особенностей перестановочных функций и функций Грина, мы сформулируем сейчас способ построения таких приближений к этим функциям, что вместе со своими производными до любого заданного порядка включительно они не будут иметь особенностей на световом конусе. В качестве примера подобной процедуры может быть указана так называемая *регуляризация Фейнмана* (1948 б) *причинной функции Грина фотона*, которая состоит в замене

$$D_0^c(k) = -\frac{1}{k^2}$$

на

$$\text{reg}_F D_0^c(k) = D_0^c(k) - D_M^c(k) = -\frac{1}{k^2} - \frac{1}{M^2 - k^2} = -\frac{M^2}{k^2(M^2 - k^2)},$$

где  $M^2$  — квадрат некоторой «вспомогательной массы», что, как видно, эквивалентно введению множителя

$$\frac{M^2}{M^2 - k^2}.$$

С помощью (18) нетрудно убедиться, что функция  $\text{reg}_F D_0^c$  в отличие от  $D_0^c$  не содержит на световом конусе самых сильных особенностей  $\delta(\lambda)$  и  $\lambda^{-1}$ . С другой стороны,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \text{reg}_F D_0^c(k) = D_0^c(k).$$

Заметим теперь, что согласно формулам (3) и (7) рассматриваемые сингулярные функции могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(m^2 \lambda) = m^2 f_2(m^2 \lambda). \quad (20)$$

Последнее утверждение справедливо с точностью до множителей  $\varepsilon(x^0)$  и  $\theta(x^0)$ , содержащихся в отдельных членах указанных функций. Подчеркнем, однако, что нашей целью является построение таких комбинаций перестановочных функций и функций Грина, которые на световом конусе имели бы достаточное количество регулярных производных по  $\lambda$  (или, что эквивалентно, по компонентам  $x^k$ ). Особенности, соответствующие  $\varepsilon(x^0)$  и  $\theta(x^0)$ , как было отмечено, благодаря множителям  $\delta(\lambda)$  и  $\theta(\lambda)$  проявляются лишь на световом конусе и потому будут погашаться нулем по  $\lambda$  достаточно высокой степени одновременно с особенностями по переменной  $\lambda$ . Поэтому при анализе особенностей рассматриваемых сингулярных функций мы вправе исходить из формулы (20).

Из этой формулы непосредственно вытекает, что особенности  $1/\lambda$  и  $\delta(\lambda)$  всегда входят с коэффициентами, не зависящими от массы, а особенности  $\ln|\lambda|$  и  $\theta(\lambda)$  — с коэффициентами, пропорциональными  $m^2$ . Следовательно, взяв линейную комбинацию нескольких функций  $\Delta$  (символом  $\Delta$  обозначим здесь любую из рассматриваемых функций  $D^+$ ,  $D^-$ ,  $D$ ,  $D^c$ ,  $D^{\text{ret}}$ , ...), соответствующих полям с различными массами  $M_i$ :

$$c_1 \Delta_{M_1}(x) + c_2 \Delta_{M_2}(x) + \dots + c_k \Delta_{M_k}(x),$$

коэффициенты которой удовлетворяют условиям

$$c_1 + c_2 + \dots + c_k = 0, \quad c_1 M_1^2 + c_2 M_2^2 + c_k M_k^2 = 0,$$

мы получим выражение, не содержащее особенностей на световом конусе.

Для того чтобы прийти к выражению, непрерывному вместе со всеми своими производными до  $(n-1)$ -го порядка включительно, подчиним коэффициенты  $c_i$   $(n+1)$ -му условию:

$$\sum_i c_i = 0, \quad \sum_i c_i M_i^2 = 0, \quad \dots, \quad \sum_i c_i M_i^{2n} = 0.$$

Очевидно, минимальное необходимое число масс при этом не превышает  $n+2$ .

В результате мы получим выражение, которое в окрестности точки  $\lambda=0$  имеет вид полинома по  $\lambda$  с коэффициентами, содержащими  $\ln M_i$ , и является непрерывным вместе со своими  $(n-1)$  производными.

Заметим еще, что в практических вычислениях (см. главу V) вместо полного устранения особенностей сингулярных функций оказывается достаточным сводить эти особенности к интегрируемому типу, что приводит к уменьшению количества необходимых вспомогательных масс.

В описываемом приеме одну из вспомогательных масс  $M$  выбирают равной основной массе поля  $m$ , а соответствующий коэффициент  $c$  полагают равным единице. Таким путем данной сингулярной функции поля  $\Delta(x)$  с массой  $m$  сопоставляется функция, непрерыв-

ная вместе со всеми своими производными до  $(n - 2)$ -го порядка включительно:

$$\text{reg} \{ \Delta_m(x) \} = \Delta_m(x) + \sum_{i=1}^n c_i \Delta_{M_i}(x). \quad (21)$$

Эта функция содержит  $n$  вспомогательных масс  $M_1, \dots, M_n$ , и ее  $n$  коэффициентов подчинены  $n$  условиям

$$1 + \sum_{i=1}^n c_i = 0, \quad m^2 + \sum_{i=1}^n c_i M_i^2 = 0, \quad \dots, \quad m^{2n-2} + \sum_{i=1}^n c_i M_i^{2n-2} = 0. \quad (22)$$

Как будет показано в § 18, «компенсирующие» массы  $M_i$  могут быть выбраны таким образом, что при некотором определенном способе одновременного стремления их величин к бесконечности коэффициенты  $c_i$  останутся конечными. Тогда при больших, но конечных массах мы приходим к положению, при котором в силу упоминавшихся асимптотических свойств (9) цилиндрических функций значения вспомогательных функций  $\Delta_{M_i}$  окажутся исчезающе малыми всюду, кроме малой окрестности световых конусов.

При этом в силу конечности коэффициентов  $c_i$  регуляризованная функция  $\text{reg} \{ \Delta \}$  будет практически отличаться от функции  $\Delta$  лишь в малой окрестности световых конусов, где  $\text{reg} \{ \Delta(x) \}$  в отличие от  $\Delta(x)$  будет непрерывной вместе с некоторым числом своих производных. При увеличении значений вспомогательных масс  $M_i$  окрестность световых конусов, в которых разность  $\text{reg} \{ \Delta \} - \Delta$  отлична от нуля, уменьшается, а конечные значения  $\text{reg} \{ \Delta(x) \}$  и ее производных увеличиваются. В пределе  $M_i \rightarrow \infty$  функция  $\text{reg} \{ \Delta \}$  перестает отличаться от  $\Delta$ .

Изложенный формальный прием устранения особенностей из сингулярных функций поля с помощью введения вспомогательных масс является одним из вариантов метода, известного под названием *регуляризации Паули — Вилларса* (1949). Этот прием эквивалентен введению дополнительных полей с массами, компенсирующих сингулярности в функциях основного поля.

Отметим еще, что регуляризация сингулярных перестановочных и причинных функций

$$\Delta(x) \rightarrow \text{reg} \Delta(x) \quad (23)$$

не является самоцелью. Она представляет лишь этап на пути к получению регуляризованных произведений

$$\prod_{r \neq s} \Delta(x_r - x_s) \rightarrow \text{reg} \prod \Delta(x_r - x_s). \quad (24)$$

Поэтому возможны регуляризации, при которых модификации подвергается непосредственно произведение (24), а этап (23) вообще отсутствует. К таким регуляризациям относится регуляризация

обрезанием в импульсном пространстве (см. напр. Ахиезер, Берестецкий (1981) — § 3.7 и Приложение, а также Боголюбов и Ширков (1980) — § 23 и Дополнение VI) и так наз. размерная регуляризация, предложенная т'Хоофтом и Вельтманом (1972). В отличие от регуляризации обрезанием и простого варианта регуляризации Паули—Вилларса регуляризация т'Хоофта—Вельтмана сохраняет трансформационные свойства произведений (24) по отношению к широкому классу преобразований, включая неабелевы калибровочные преобразования.

**16.4. Размерная регуляризация.** Эту регуляризацию формулируют в импульсном представлении. При этом используют определение произведения сингулярных функций через соответствующие фурье-образы. Например, если

$$\Delta(x) = (2\pi)^{-4} \int dpe^{-ipx} \tilde{\Delta}(p),$$

то

$$\Delta^2(x) = (2\pi)^{-4} \int dpe^{-ipx} I(p),$$

где  $I$  формально определяется интегралом типа свертки

$$I(p) = (2\pi)^{-4} \int dq \tilde{\Delta}(p-q) \tilde{\Delta}(q) \quad (25)$$

по 4-импульсному многообразию.

Взяв для примера причинную функцию скалярного поля  $\tilde{\Delta}(p) \sim (m^2 - p^2)^{-1}$ , убеждаемся, что интеграл (25) не существует из-за ультрафиолетовой расходимости в области больших значений  $q$ . Эта расходимость является отражением сингулярности произведения  $\Delta^2(x)$  на световом конусе.

Размерная регуляризация состоит в том, что интеграл  $\int dq$  по 4-мерному многообразию виртуальных импульсов заменяют на символ, формально соответствующий интегралу по пространству нецелого числа

$$n = 4 - 2\delta < 4$$

измерений. При этом  $\delta$  считают малой положительной величиной ( $\delta \rightarrow +0$ ). Наиболее просто размерная регуляризация формулируется в евклидовом случае, когда 4-мерное импульсное пространство можно считать евклидовым. (Для этого следует перейти от действительной нулевой компоненты к чисто мнимой  $p_0 \rightarrow ip_4$ , т. е. провести операцию поворота контура интегрирования по  $p_0$  на 90 градусов.) Тогда основной анзац размерной регуляризации состоит в замене

$$\int (d^4q)_E = \int_{\mathfrak{R}(4)} d\Omega \int_0^\infty q^3 dq \rightarrow \int d^n q \equiv \mu^{2\delta} \int_{\mathfrak{R}(4)} d\Omega \int_0^\infty q^{3-2\delta} dq, \quad (26)$$

причем объем единичной сферы в  $n$ -мерном пространстве интерполируется с помощью гамма-функции Эйлера  $\Omega(n) = 2\pi^{n/2}\Gamma(n/2)$ , а зависимость от параметра  $\mu$ , имеющего размерность массы, выводится из соображений сохранения общей размерности интеграла.

Снятие размерной регуляризации достигается переходом к пределу при  $\delta = 0$ . Для более детального ознакомления с техникой размерной регуляризации мы отсылаем читателя к § 23.3 и Дополнению VI.3 учебника Боголюбова, Ширкова (1980).

## § 17. Приведение к нормальной форме

**17.1. Коэффициентные функции операторных выражений.** Прежде чем перейти к изложению теории взаимодействующих полей, необходимо предварительно ознакомиться с рядом свойств, в основном алгебраического характера, которыми обладают операторные выражения, построенные из квантованных волновых функций свободных полей.

Возьмем типичное операторное выражение, зависящее от значений положительно- и отрицательно-частотных частей таких функций в ряде пространственно-временных точек  $x_1, \dots, x_n$  и представленное в нормальной форме:

$$A(x_1, \dots, x_n) = \sum K_{\dots\alpha\dots\beta\dots}(x_1, \dots, x_n) \dots u_{\alpha}^+(x_r) \dots u_{\beta}^-(x_s) \dots \quad (1)$$

Здесь  $\dots u_{\alpha}(x) \dots$  — компоненты волновых функций или их частные производные,  $K_{\dots\alpha\dots\beta\dots}(x_1, \dots, x_n)$  — некоторые  $c$ -функции переменных  $x_1, \dots, x_n$ , обладающие ввиду однородности пространства-времени свойством трансляционной инвариантности:

$$K_{\dots\alpha\dots\beta\dots}(x_1 + a, \dots, x_n + a) = K_{\dots\alpha\dots\beta\dots}(x_1, \dots, x_n). \quad (2)$$

Эти функции мы условимся называть *коэффициентными функциями* данного операторного выражения (1). Из-за сингулярности перестановочных соотношений они будут, вообще говоря, сингулярными, и вопрос об их математической природе будет специально рассмотрен ниже. Пока же заметим, что через них нетрудно выразить непосредственно матричные элементы оператора  $A(x_1, \dots, x_n)$  по всевозможным состояниям

$$\Phi_{\dots\nu\dots\rho\dots} = \dots u_{\nu}^+(p) \dots \Phi_0, \quad (3)$$

соответствующим наличию данных сортов частиц с заданными импульсами  $p_1, \dots, p_j$ . Для этого требуется лишь построить матричные элементы типа

$$\begin{aligned} & \Phi_{\dots\nu\dots\rho\dots}^* \dots u_{\alpha}^+(x_r) \dots u_{\beta}^-(x_s) \dots \Phi_{\dots\nu'\dots\rho'\dots} = \\ & = \int e^{i(\sum x_r k_r - \sum x_s k_s)} \Phi_0^* \dots u_{\nu}^-(p) \dots u_{\alpha}^+(k_r) \dots u_{\beta}^-(k_s) \dots u_{\nu'}^+(p') \dots \Phi_0 \times \\ & \quad \times \left( \prod \delta(k_r^2 - m_{\alpha}^2) dk_r \right) \left( \prod \delta(k_s^2 - m_{\beta}^2) dk_s \right), \quad (4) \end{aligned}$$

что нетрудно выполнить с помощью перестановочных соотношений, записанных в форме

$$\delta(k^2 - m^2) \{u_\alpha^+(k), u_\beta^-(p)\} = \delta(k - p) P_{\alpha\beta}(k) \quad (p^0 = \sqrt{p^2 + m^2}), \quad (5)$$

где  $P_{\alpha\beta}(k)$  — полиномы по компонентам  $k$ .

В самом деле, будем переставлять операторы рождения  $u_\alpha^+(k_r)$  налево, а операторы уничтожения  $u_\beta^-(k_s)$  направо до тех пор, пока они «погасятся» соответственно с  $\dots u_{\bar{\gamma}}^-(p)\dots$ ,  $\dots u_{\bar{\gamma}'}^-(p')\dots$  или дадут нуль, подействовав на амплитуду состояния вакуума. Как видно, отличный от нуля результат получится, лишь когда все  $u_\alpha^+(k_r)$  погасятся с  $u_{\bar{\gamma}}^-(p)$ , а все  $u_\beta^-(k_s)$  — с  $u_{\bar{\gamma}'}^-(p')$ .

Возникшие при «погашении»  $\delta$ -функции снимут интеграцию по переменным  $k_r$ , сделав их равными  $\dots p' \dots$ . Оставшиеся свободными  $\dots u_{\bar{\gamma}}^-(p_\alpha)\dots$ ,  $\dots u_{\bar{\gamma}'}^-(p'_\alpha)\dots$  должны также взаимно погаситься, ввиду чего появятся множители типа

$$\theta(p_\omega^0) \delta(p_\omega^0 - m_\gamma^2) \delta(p_\omega - p'_\omega). \quad (6)$$

В результате этих элементарных операций получим для матричных элементов (4) выражения вида

$$\sum P \dots \overset{\alpha}{\gamma} \dots \overset{\beta}{\gamma'} \dots (\dots p \dots p' \dots) e^{i(\sum p_\nu x_\nu - \sum p'_\lambda x_\lambda)} \quad (7)$$

или

$$\sum Z \dots \overset{\alpha}{\gamma} \dots \overset{\beta}{\gamma'} \dots (\dots p' \dots p \dots) e^{i(\sum p_\nu x_\nu - \sum p'_\lambda x_\lambda)} \times \\ \times \prod \{\theta(p_\omega^0) \delta(p_\omega^0 - m_\gamma^2) \delta(p_\omega - p'_\omega)\}, \quad (8)$$

в которых  $P \dots \overset{\alpha}{\gamma} \dots \overset{\beta}{\gamma'} \dots$ ,  $Z \dots \overset{\alpha}{\gamma} \dots \overset{\beta}{\gamma'} \dots$  являются полиномами из компонент  $\dots p \dots p' \dots$ . Выражение (7) будем иметь в случае, когда все  $u_{\bar{\gamma}}^+$ ,  $u_{\bar{\gamma}'}^+$  скомпенсируются с  $u_\alpha^+$ ,  $u_\beta^+$ ; в противном случае придем к выражению (8).

Таким образом, на основании (1) найдем окончательно:

$$\Phi_{\dots \gamma \dots p \dots}^* A(x_1, \dots, x_n) \Phi_{\dots \gamma' \dots p' \dots} = \\ = \sum P \dots \overset{\alpha}{\gamma} \dots \overset{\beta}{\gamma'} \dots (\dots p \dots p' \dots) K_{\dots \alpha \dots \beta \dots}(x_1, \dots, x_n) \times \\ \times e^{i(\sum p_\nu x_\nu - \sum p'_\lambda x_\lambda)} + \\ + \sum Z \dots \overset{\alpha}{\gamma} \dots \overset{\beta}{\gamma'} \dots (\dots p \dots p' \dots) K'_{\dots \alpha \dots \beta \dots}(x_1, \dots, x_n) \times \\ \times e^{i(\sum p_\nu x_\nu - \sum p'_\lambda x_\lambda)} \times \\ \times \prod \{\theta(p_\omega^0) \delta(p_\omega^0 - m_\gamma^2) \delta(p_\omega - p'_\omega)\}. \quad (9)$$

Ввиду очевидного удобства нормальной формы представления операторных выражений хотя бы, например, для определения их матричных элементов приобретает интерес вопрос о соответствующей методике приведения. Ясно, что для приведения к нормальной форме операторных выражений, полиномиально зависящих от вол-



новых функций, достаточно уметь приводить произведения типа  $A_1(x_1) \dots A_n(x_n)$ , в которых  $A_j(x)$  будут «линейными операторами», т. е. линейными комбинациями соответствующих  $u_j^+(x)$ ,  $u_j^-(x)$ .

В каждом данном случае непосредственное преобразование такого произведения не представляет принципиальных затруднений. Для этого совершенно достаточно последовательно перемещать  $u^+$  налево, а  $u^-$  направо и при каждой «передвижке» использовать перестановочные соотношения. Тем не менее, ввиду большого числа получающихся при этом членов уже при сравнительно малых  $n$  целесообразно иметь рецептуру для возможно более автоматического выполнения операции приведения к нормальной форме.

Такая рецептура вытекает из одной важной теоремы, установленной Виком (1950), к формулировке которой мы сейчас и перейдем.

**17.2. Теорема Вика для обычных произведений.** Рассмотрим прежде всего случай  $n = 2$ , когда мы имеем произведение двух линейных операторов  $A_1(x_1) A_2(x_2)$ . В этом случае для приведения к нормальной форме, очевидно, достаточна одна передвижка операторов  $u^-(x_1)$ ,  $u^+(x_2)$ , и потому в результате получатся члены с «правильным порядком» следования положительно- и отрицательно-частотных частей волновых функций и член от перестановочных функций, уже не включающий операторных выражений.

Таким образом, рассматриваемое произведение может отличаться от нормального произведения

$$:A_1(x_1) A_2(x_2):$$

лишь на  $c$ -выражение, которое будем называть *спариванием* и обозначать с помощью скобок снизу:

$$A_1(x_1) A_2(x_2) = :A_1(x_1) A_2(x_2): + \underbrace{A_1(x_1) A_2(x_2)}_c. \quad (10)$$

Поскольку вакуумное среднее от нормального произведения всегда равно нулю, мы можем также определить спаривание как вакуумное среднее от обычного произведения:

$$\underbrace{A_1(x_1) A_2(x_2)}_c = \overset{*}{\Phi}_0 A_1(x_1) A_2(x_2) \Phi_0 \equiv \langle A_1(x_1) A_2(x_2) \rangle_0. \quad (11)$$

Рассмотрим в качестве примера вещественное скалярное поле. Исходя из перестановочных соотношений

$$\varphi(x) \varphi(y) - \varphi(y) \varphi(x) = -iD(x-y),$$

имеем, как обычно,

$$\varphi^-(x) \varphi^+(y) = \varphi^+(y) \varphi^-(x) - iD^-(x-y),$$

ввиду чего получим:

$$\begin{aligned} \varphi(x) \varphi(y) &= (\varphi^+(x) + \varphi^-(x)) (\varphi^+(y) + \varphi^-(y)) = \\ &= \varphi^+(x) \varphi^+(y) + \varphi^+(y) \varphi^-(x) + \varphi^+(x) \varphi^-(y) + \varphi^-(x) \varphi^-(y) - iD^-(x-y) \end{aligned}$$

или, по определению нормального произведения,

$$\varphi(x)\varphi(y) = : \varphi(x)\varphi(y) : - iD^-(x-y).$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \underline{\varphi(x)\varphi(y)} &= \langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle_0 = -iD^-(x-y), \\ \underline{\varphi^+(x)\varphi^-(y)} &= 0, \quad \underline{\varphi^-(x)\varphi^+(y)} = -iD^-(x-y). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Аналогично для случая электромагнитного поля найдем:

$$\underline{A_n(x)A_m(y)} = \langle A_n(x)A_m(y) \rangle_0 = ig^{nm}D_0(x-y). \quad (13)$$

Рассмотрим еще поле фермионов, для которого

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x)\psi_\beta(y) + \bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x) &= -iS_{\alpha\beta}(x-y), \\ \psi_\alpha^-(x)\bar{\psi}_\beta^+(y) &= -\bar{\psi}_\beta^+(y)\psi_\alpha^-(x) - iS_{\alpha\beta}^-(x-y). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi(x)\psi(y) &= \\ &= \psi^+(x)\bar{\psi}^+(y) - \bar{\psi}^+(y)\psi^-(x) + \psi^+(x)\bar{\psi}^-(y) + \psi^-(x)\bar{\psi}^-(y) - iS^-(x-y) \end{aligned}$$

или

$$\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) = : \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) : - iS_{\alpha\beta}^-(x-y),$$

и потому

$$\underline{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} = -iS_{\alpha\beta}^-(x-y). \quad (14)$$

Таким же образом можем убедиться, что

$$\underline{\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y)} = -iS_{\beta\alpha}^+(y-x). \quad (15)$$

Ввиду того, что  $\psi(x)$  всегда антикоммутирует с  $\psi(y)$ , а  $\bar{\psi}(x) - \bar{\psi}(y)$ , получим, кроме того,

$$\underline{\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)} = 0, \quad \underline{\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} = 0. \quad (16)$$

Чтобы сформулировать теорему Вика, необходимо ввести еще понятие *нормального произведения со спариваниями*.

Как уже говорилось в § 10, нормальное произведение  $:A_1(x_1)\dots A_n(x_n):$  можно определить как результат приведения к нормальной форме обычного произведения  $A_1(x_1)\dots A_n(x_n)$ , если в *процессе приведения* считать квантованные волновые функции точно коммутирующими или антикоммутирующими, приписывая нулевое значение всем появляющимся перестановочным функциям. Отсюда непосредственно следует, что при перемене мест сомножителей под знаком нормального произведения может изменяться только его знак:

$$:A_{i_1}(x_{i_1})\dots A_{i_n}(x_{i_n}): = \eta :A_1(x_1)\dots A_n(x_n): \quad (\eta = (-1)^p),$$

где  $p$  — четность перестановки, которой подвергались между собой ферми-операторы при переходе от первоначального порядка следования сомножителей  $-1, \dots, n$  к порядку  $i_1, \dots, i_n$ .

Ясно, что по отношению к каждому своему сомножителю нормальное произведение обладает свойством линейности:

$$: A_1(x_1) \dots (aA'_j(x_j) + bA''_j(x_j)) \dots A_n(x_n) := \\ = a : A_1(x_1) \dots A'_j(x_j) \dots A_n(x_n) : + b : A_1(x_1) \dots A''_j(x_j) \dots A_n(x_n) :,$$

где  $a$  и  $b$  — произвольные комплексные  $c$ -числа.

Введем теперь нормальное произведение со спариванием, положив, по определению,

$$: A_1(x_1) \dots \underbrace{A_j(x_j) \dots A_k(x_k)} \dots A_n(x_n) := \underbrace{\eta A_j(x_j) A_k(x_k)} : A_1(x_1) \dots \\ \dots A_{j-1}(x_{j-1}) A_{j+1}(x_{j+1}) \dots A_{k-1}(x_{k-1}) A_{k+1}(x_{k+1}) \dots A_n(x_n) : (\eta = (-1)^p),$$

где  $p$  — четность ферми-перестановок при переходе от порядка

$$1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, k-1, k, k+1, \dots, n$$

к порядку

$$j, k, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, k-1, k+1, \dots, n.$$

Совершенно аналогично определим и нормальное произведение с любым числом спариваний: например,

$$: A_1(x_1) \underbrace{A_2(x_2) A_3(x_3) A_4(x_4) \dots A_{n-1}(x_{n-1}) A_n(x_n)} :$$

будем считать равным произведению всех спариваний с нормальным произведением оставшихся неспаренными операторов и с числом  $\eta = (-1)^p$ :

$$\eta \underbrace{A_1 A_3 A_2 A_{n-1}} \dots : A_4 \dots A_n :,$$

где  $p$  — четность перестановок, которым подвергаются ферми-операторы в процессе вынесения спариваний за знак нормального произведения.

Так, например,

$$: \underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) \psi_\gamma(x_3) \psi_\delta(x_4)} := - \bar{\psi}_\alpha(x_1) \psi_\gamma(x_3) \bar{\psi}_\beta(x_2) \psi_\delta(x_4) = \\ = S_{\gamma\alpha}^+(x_3 - x_1) S_{\delta\beta}^+(x_4 - x_2)$$

Из этого определения вытекает сразу же, что нормальное произведение со спариваниями обладает свойством линейности по отношению к своим сомножителям и что при их перестановке под знаком такого произведения без изменения спариваний и без изменения порядка следования спаренных операторов внутри данной пары оно умножается на  $\eta = (-1)^p$ .

Мы можем теперь дать простую формулировку *теоремы Вика*. Согласно этой теореме «обычное произведение линейных операторов равняется сумме всех соответствующих нормальных произведений со всевозможными спариваниями, включая и нормальное произведение без спариваний»:

$$A_1 \dots A_n = : A_1 \dots A_n : + \underbrace{A_1 A_2 \dots A_n}_{\text{нормальное произведение}} + \dots + \underbrace{A_1 \dots A_{n-1} A_n}_{\text{нормальное произведение}} + \dots + \underbrace{A_1 \dots A_n}_{\text{нормальное произведение}} + \dots \quad (17)$$

Для доказательства нам понадобится следующая лемма: если  $A_1, \dots, A_n, B$  — линейные операторы, то

$$: A_1 \dots A_n : B = : A_1 \dots A_n B : + \sum_{(1 \leq k \leq n)} : A_1 \dots \underbrace{A_k \dots A_n}_{\text{нормальное произведение}} B : \quad (18)$$

Заметим, что справедливость этой леммы будет полностью установлена, как только мы докажем ее для частного случая, когда каждый из операторов  $A_j, B$  является или оператором рождения, или оператором уничтожения. Действительно, в общем случае каждый из этих операторов мы можем представить в виде суммы операторов рождения и уничтожения. Воспользовавшись свойством линейности рассматриваемых произведений по отношению к своим сомножителям, мы представим их в виде сумм произведений операторов рождения и уничтожения, т. е. произведений, соответствующих вышеупомянутому частному случаю. Поэтому из правильности леммы в этом случае вытекает ее правильность и для общего случая.

Заметим еще, что случай, когда  $B$  есть оператор уничтожения, тривиален. В самом деле, тогда в выражении

$$: A_1 \dots A_n : B$$

оператор  $B$  стоит уже на «правильном» месте, так что это выражение будет равно

$$: A_1 \dots A_n B :$$

Кроме того, поскольку  $B$  есть оператор уничтожения, то  $\underbrace{A_k B}_{\text{нормальное произведение}} = 0$ .

Таким образом, остается рассмотреть лишь случай, когда  $B$  является оператором рождения. Но тогда, если некоторые из операторов  $A_j$  являются операторами рождения, мы можем вынести их слева за знаки нормальных произведений; их спаривания с  $B$  равны нулю, так что под знаками нормальных произведений среди  $A_j$  сохраняются только операторы уничтожения. Поэтому для доказательства сформулированной выше леммы остается доказать ее лишь в случае, когда все  $A_j$  являются операторами уничтожения, а  $B$  — оператором рождения.

Поскольку при  $n = 1$  справедливость этой леммы непосредственно вытекает из определения спаривания

$$A_1 B = : A_1 B : + \underbrace{A_1 B}_{\text{нормальное произведение}},$$

мы можем воспользоваться для ее доказательства методом индукции.

Пусть лемма справедлива для некоторого числа  $n$  операторов  $A_j$ . Тогда, умножая равенство (18) слева на некоторый оператор уничтожения  $A_0$ , получим:

$$A_0 : A_1 \dots A_n : B = A_0 : A_1 \dots A_n B : + \sum_{(1 \leq k \leq n)} A_0 : A_1 \dots \underbrace{A_k \dots A_n}_{\text{нормальное произведение}} B : \quad (19)$$

Но входящий в выражение  $: \underbrace{A_1 \dots A_k \dots A_n}_{\text{нормальное произведение}} B :$  единственный оператор рождения  $B$

спарен, и потому оно равно  $c$ -числу, умноженному на нормальное произведение одних операторов уничтожения. С другой стороны, нормальное произведение

одних операторов уничтожения совпадает с их обычным произведением. Поэтому

$$A_0 : A_1 \dots \underbrace{A_k \dots A_n} B := : A_0 A_1 \dots \underbrace{A_k \dots A_n} B :. \quad (20)$$

Перейдем теперь к анализу первого члена в правой части равенства (19).  
Имеем:

$$: A_1 \dots A_n B : = (-1)^p : B A_1 \dots A_n := (-1)^p B : A_1 \dots A_n :,$$

где  $p$  — четность ферми-перестановок при переводе  $B$  из крайнего правого в крайнее левое положение. Отсюда находим:

$$\begin{aligned} A_0 : A_1 \dots A_n B &:= (-1)^p A_0 B : A_1 \dots A_n := \\ &= (-1)^p : A_0 B : A_1 \dots A_n : + (-1)^p \underbrace{A_0 B : A_1 \dots A_n} := \\ &= (-1)^p : A_0 B : A_1 \dots A_n : + (-1)^p : A_0 B A_1 \dots A_n := \\ &= (-1)^{p+p'} : B A_0 : A_1 \dots A_n : + : A_0 A_1 \dots A_n B :, \end{aligned}$$

где  $p'$  — четность ферми-перестановок при перемене мест  $A_0, B$ .

С другой стороны, поскольку  $B$  есть оператор рождения, а все остальные — операторы уничтожения, то

$$\begin{aligned} (-1)^{p+p'} : B A_0 : A_1 \dots A_n &:= (-1)^{p+p'} : B A_0 A_1 \dots A_n := \\ &= (-1)^p : A_0 B A_1 \dots A_n := : A_0 A_1 \dots A_n B :. \end{aligned}$$

Имеем, следовательно,

$$A_0 : A_1 \dots A_n B := : A_0 A_1 \dots A_n B : + : \underbrace{A_0 A_1 \dots A_n} B :,$$

откуда получим ввиду (20) и (19)

$$: A_0 A_1 \dots A_n : B := : A_0 A_1 \dots A_n B : + \sum_{(0 \leq k \leq n)} : A_0 A_1 \dots \underbrace{A_k \dots A_n} B :.$$

Таким образом, предполагая справедливость равенства (18) для случая, когда число операторов  $A$  равно  $n$ , мы установили его правильность и для случая, когда это число равняется  $n+1$ . Доказательство леммы тем самым закончено.

Заметим еще, что эта лемма непосредственно обобщается и на случай нормальных произведений с любым числом спариваний. В самом деле, поскольку нормальное произведение со спариваниями всегда равно произведению спариваний на  $(-1)^p$  и на нормальное произведение операторов, оставшихся неспаренными, мы видим, что в равенстве (18) можно взять вместо «чистого» нормального произведения операторов  $A$  их нормальное произведение с произвольным числом спариваний.

Теперь приступим к доказательству самой теоремы Вика. Ясно, что эта теорема правильна для  $n = 2$ . Воспользуемся поэтому методом индукции. Предположим, что равенство (17), выражающее теорему Вика, верно для случая произведения  $n$  операторов  $A$ , и докажем его в случае произведения  $n+1$  линейных операторов. Умножим для этого равенство (17) справа на некоторый линейный оператор  $A_{n+1}$ . Мы выразим тогда обычное произведение операторов  $A_1, \dots, A_{n+1}$  в виде суммы всех нормальных произведений операторов  $A_1, \dots, A_n$  со всевозможными спариваниями между ними, умноженных справа, в обычном смысле, на  $A_{n+1}$ . (Подчеркнем, что в число членов со всевозможными спариваниями включен также член с нулевым числом спариваний.)

Но по доказанной обобщенной лемме нормальное произведение операторов  $A_1, \dots, A_n$  с любым данным числом спариваний между ними, умноженное справа в обычном смысле на  $A_{n+1}$ , равно сумме нормальных произведений операторов  $A_1, \dots, A_{n+1}$ , в которой, кроме имевшихся уже спариваний между  $A_1, \dots, A_n$ , учитываются еще возможные (в том числе и нулевое) \*) спаривания свободных  $A_1, \dots, A_n$  с  $A_{n+1}$ . Тем самым мы убеждаемся, что обычное произведение  $n+1$  линейных операторов  $A_1, \dots, A_{n+1}$  представляется суммой их нормальных произведений со всевозможными спариваниями. Доказательство теоремы Вика, таким образом, закончено.

\*) То есть член без спариваний  $A_1, \dots, A_n$  с  $A_{n+1}$ .

Нетрудно видеть, что эта теорема приложима и к случаю, когда некоторые из сомножителей входят со знаками нормальных произведений

$$: A_1 \dots A_{k_1} :: : A_{k_1+1} \dots A_{k_2} :: \dots :: A_{k_p} \dots A_n :: \quad (21)$$

В этом случае теорема Вика доказывается точно так же, как и для «чистого» произведения  $A_1 \dots A_n$ , с тем очевидным отличием, что теперь не надо принимать во внимание спариваний между множителями, принадлежащими в (21) к одному и тому же нормальному произведению. Например, не должны учитываться спаривания между  $A_1, \dots, A_{k_1}$ , спаривания между  $A_{k_1+1} \dots A_{k_2}$  и т. д.

Чтобы проиллюстрировать приложение теоремы Вика в ее общей форме, рассмотрим произведения токов спинорного поля

$$\begin{aligned} : \bar{\psi}(x) \gamma^k \psi(x) :: : \bar{\psi}(y) \gamma^l \psi(y) : &= \\ = \sum_{(\sigma, \sigma', \tau, \tau')} : \bar{\psi}_\sigma(x) \gamma_{\sigma\sigma'}^k \psi_{\sigma'}(x) :: : \bar{\psi}_\tau(y) \gamma_{\tau\tau'}^l \psi_{\tau'}(y) :: & \quad (22) \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} : \bar{\psi}_\sigma(x) \gamma_{\sigma\sigma'}^k \psi_{\sigma'}(x) :: : \bar{\psi}_\tau(y) \gamma_{\tau\tau'}^l \psi_{\tau'}(y) : &= \\ = : \bar{\psi}_\sigma(x) \gamma_{\sigma\sigma'}^k \psi_{\sigma'}(x) \psi_\tau(y) \gamma_{\tau\tau'}^l \psi_{\tau'}(y) : + \\ + : \bar{\psi}_\sigma(x) \psi_{\tau'}(y) \gamma_{\sigma\sigma'}^k \gamma_{\tau\tau'}^l : \psi_{\sigma'}(x) \bar{\psi}_\tau(y) : + \\ + : \psi_{\sigma'}(x) \bar{\psi}_\tau(y) \gamma_{\sigma\sigma'}^k \gamma_{\tau\tau'}^l : \bar{\psi}_\sigma(x) \psi_{\tau'}(y) : + \\ + : \psi_{\sigma'}(x) \bar{\psi}_\tau(y) \bar{\psi}_\sigma(x) \psi_{\tau'}(y) \gamma_{\sigma\sigma'}^k \gamma_{\tau\tau'}^l, \end{aligned}$$

откуда на основании формул для спариваний (14), (15) найдем:

$$\begin{aligned} : \bar{\psi}_\sigma(x) \gamma_{\sigma\sigma'}^k \psi_{\sigma'}(x) :: : \bar{\psi}_\tau(y) \gamma_{\tau\tau'}^l \psi_{\tau'}(y) : &= \\ = : \bar{\psi}_\sigma(x) \gamma_{\sigma\sigma'}^k \psi_{\sigma'}(x) \psi_\tau(y) \gamma_{\tau\tau'}^l \psi_{\tau'}(y) : + \\ + i : \bar{\psi}_\tau(y) \gamma_{\tau\tau'}^l S_{\tau\sigma}^+(y-x) \gamma_{\sigma\sigma'}^k \psi_{\sigma'}(x) : - \\ - i : \bar{\psi}_\sigma(x) \gamma_{\sigma\sigma'}^k S_{\sigma\tau}^-(x-y) \gamma_{\tau\tau'}^l \psi_{\tau'}(y) : + \gamma_{\sigma\sigma'}^k S_{\sigma\tau}^-(x-y) \gamma_{\tau\tau'}^l S_{\tau\sigma}^+(y-x). \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (22) и выполнив суммирование по спинорным индексам, получим окончательно:

$$\begin{aligned} : \bar{\psi}(x) \gamma^k \psi(x) :: : \bar{\psi}(y) \gamma^l \psi(y) : &= \\ = : \bar{\psi}(x) \gamma^k \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^l \psi(y) : + i : \bar{\psi}(y) \gamma^l S^+(y-x) \gamma^k \psi(x) : - \\ - i : \bar{\psi}(x) \gamma^k S^-(x-y) \gamma^l \psi(y) : + \text{Sp} \{ \gamma^k S^-(x-y) \gamma^l S^+(y-x) \}. \end{aligned}$$

Из этого выражения следует также формула для коммутатора свободных токов:

$$\begin{aligned} [J^k(x), J^l(y)] &= \\ = i \{ : \bar{\psi}(y) \gamma^l S(y-x) \gamma^k \psi(x) : - : \bar{\psi}(x) \gamma^k S(x-y) \gamma^l \psi(y) : \} + \\ + \text{Sp} \{ \gamma^k S^-(x-y) \gamma^l S^+(y-x) - \gamma^k S^+(x-y) \gamma^l S^-(y-x) \}. \quad (23) \end{aligned}$$

С помощью теоремы Вика мы получаем возможность почти автоматически приводить обычные произведения операторов к сумме нормальных произведений, умноженных на  $c$ -числа. На этом этапе и следует заканчивать приведение к нормальной форме, поскольку записывать сами нормальные произведения в раскрытой нормальной форме, вообще говоря, нецелесообразно. Именно, предствление операторов с помощью линейных комбинаций из нормальных произведений можно рассматривать как наиболее удобный способ записи их представления в нормальной форме. Например, короче написать

$$: \bar{\psi}(x) \psi(x) :,$$

нежели в развернутом виде

$$\bar{\psi}^+(x) \psi^+(x) + \bar{\psi}^+(x) \psi^-(x) - \psi^+(x) \bar{\psi}^-(x) + \bar{\psi}^-(x) \psi^-(x),$$

не говоря уже о случаях произведений большого числа сомножителей.

Вычисления же с нормальными произведениями, как мы видели, производятся весьма просто. Пусть, например, требуется определить матричный элемент типа

$$\begin{aligned} & \Phi_{\dots \nu \dots \rho \dots} : A_1(x_1) \dots A_n(x_n) : \Phi_{\dots \nu' \dots \rho'} = \\ & = \Phi_0 \dots u_{\bar{\nu}}(p) \dots : A_1(x_1) \dots A_n(x_n) : \dots u_{\nu'}^+(p') \dots \langle 1 \rangle_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим, что согласно теореме Вика произведение

$$\begin{aligned} & \dots u_{\bar{\nu}}(p) \dots : A_1(x_1) \dots A_n(x_n) : \dots u_{\nu'}^+(p') \dots = \\ & = : \dots u_{\bar{\nu}}(p) \dots : A_1(x_1) \dots A_n(x_n) : \dots u_{\nu'}^+(p') \dots : \end{aligned}$$

равно сумме соответствующих нормальных произведений со всевозможными спариваниями:  $u_{\bar{\nu}}(p)$  с  $A_j(x_j)$ ,  $A_j(x_j)$  с  $u_{\nu'}^+(p')$  и  $u_{\bar{\nu}}(p)$  с  $u_{\nu'}^+(p')$ . С другой стороны, вакуумное среднее такого нормального произведения, в котором содержится хотя бы один неспаренный оператор, равно нулю. Мы видим поэтому, что матричный элемент (24) состоит из суммы только тех нормальных произведений, в которых спарены все операторы. Он будет представляться, следовательно, суммой членов типа

$$(-1)^p \prod \{ \underbrace{u_{\bar{\nu}_\alpha}(p_\alpha) A_j(x_j)} \} \prod \{ \underbrace{A_j(x_j) u_{\nu'_\beta}^+(p'_\beta)} \} \prod \{ \underbrace{u_{\bar{\nu}_\sigma}(p_\sigma) u_{\nu'_\tau}^+(p'_\tau)} \}.$$

**17.3. Некоторые определения.** До сих пор мы рассматривали операторные функции точек  $x_1, \dots, x_n$ , выражавшиеся через положительно- и отрицательно-частотные части квантованных функций поля. Важное значение имеет более специальный тип операторных функций, в которые квантованные функции поля входят, так сказать, «в целом» под знаком нормальных произведений:

$$A(x_1, \dots, x_n) = \sum K_{\dots \alpha} \dots (x_1, \dots, x_n) : \dots u_\alpha(x_j) \dots \langle 1 \rangle. \quad (25)$$

Если фермиевские функции поля входят сюда лишь в четных комбинациях, то такую сумму будем называть *полилокальным оператором*. Из данного определения и теоремы Вика сразу же следует, что перемножение нескольких полилокальных операторов дает опять полилокальный оператор.

Полилокальные операторы обладают следующим важным свойством:

$$[A_1(x_1, \dots, x_n), A_2(y_1, \dots, y_m)] = 0, \quad (26)$$

если каждая из  $x_j$  пространственно-подобна любой  $y_i$ .

Действительно, поскольку функция Паули — Йордана обращается в нуль вне светового конуса:

$$\{u_\alpha(x_j), u_\beta(y_i)\}_\pm = 0 \quad (x_j \sim y_i),$$

на основании теоремы Вика имеем:

$$:\dots u_\alpha(x_j) \dots : : \dots u_\beta(y_i) \dots : = : \dots u_\alpha(x_j) \dots u_\beta(y_i) \dots :. \quad (27)$$

Но благодаря указанной четности комбинаций функций поля мы можем в левой стороне (27) поставить  $\dots u_\beta(y_i) \dots$  слева от  $\dots u_\alpha(x_j) \dots$ , не вызвав при этом перемены знака. Получим, следовательно,

$$[: \dots u_\alpha(x_j) \dots :, : \dots u_\beta(y_i) \dots :] = 0$$

при

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_m),$$

откуда вытекает справедливость (26).

Рассмотрим случай  $n = 1$ . При этом полилокальный оператор зависит только от поведения функций поля (под функциями поля в данном случае мы подразумеваем также и их производные) в одной точке  $x$ , ввиду чего мы будем называть его *локальным оператором*.

В силу (26) для двух локальных операторов имеем:

$$[\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)] = 0 \quad (x \sim y). \quad (28)$$

Заметим, что и при  $n > 1$  может существовать положение, когда полилокальный оператор фактически зависит от поведения полевых функций лишь в одной точке. Пусть, в самом деле, все коэффициентные функции суммы (25) обращаются в нуль при всех  $x_1, \dots, x_n$ , за исключением удовлетворяющих равенству

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

Ясно, что в таком случае  $K$  могут быть построены лишь из выражения

$$\delta(x_1 - x_2) \dots \delta(x_1 - x_n)$$

и его частных производных. Так как коэффициентные функции, по определению, должны обладать свойством трансляционной инвари-



антности, то общее выражение для них в рассматриваемом случае будет

$$z \left( \dots \frac{\partial}{\partial x} \dots \right) \delta(x_1 - x_2) \dots \delta(x_1 - x_n),$$

где  $z \left( \dots \frac{\partial}{\partial x} \dots \right)$  — некоторый полином по  $\partial/\partial x_j^\alpha$  с постоянными коэффициентами. Полилокальный оператор с коэффициентными функциями этого типа мы будем называть *квазилокальным*. Как видно, интеграция квазилокального оператора по всем точкам  $x_1, \dots, x_n$ , кроме одной, приводит к обычному локальному оператору.

## § 18. Коэффициентные функции

**18.1. Несобственная природа сингулярных функций.** Обсудим вопрос структуры коэффициентных функций, возникающих при выполнении операции умножения операторных выражений. Заметим, что в соответствии с теоремой Вика коэффициентные функции, получающиеся при раскрытии произведений линейных операторов  $A_1(x_1) \dots A_n(x_n)$ , имеют вид

$$\prod_{(r < s)} D_{\alpha\beta}^-(x_r - x_s), \quad (1)$$

где  $D_{\alpha\beta}$  — перестановочные функции.

Произведение

$$A_1(x_1, \dots, x_n) A_2(y_1, \dots, y_m)$$

двух каких-либо операторов, принадлежащих к рассматриваемому типу (17.1)

$$A_1(x_1, \dots, x_n) = \sum K_{\dots \alpha \dots \beta \dots}(x_1, \dots, x_n) \dots u_{\alpha}^+(x_r) \dots u_{\beta}^-(x_s) \dots,$$

$$A_2(y_1, \dots, y_m) = \sum Q_{\dots \sigma \dots \tau \dots}(y_1, \dots, y_m) \dots u_{\sigma}^+(y_i) \dots u_{\tau}^-(y_j) \dots,$$

принадлежит к тому же типу, и его коэффициентные функции представляются выражениями вида

$$K(x_1, \dots, x_n) Q(y_1, \dots, y_m) \prod D_{\beta\sigma}^-(x_s - y_i). \quad (2)$$

Следует заметить, однако, что функция  $D^-(x)$  и, тем более, функции

$$D_{\beta\sigma}^-(x) = P_{\beta\sigma}(i\partial) D^-(x)$$

обладают высокой степенью сингулярности на световом конусе, и поэтому могут возникнуть серьезные сомнения в реальном смысле выражений вида (1), (2), включающих произведения этих функций в большом количестве.

В связи с этим целесообразно обсудить сейчас более общий вопрос о том, какие условия следует наложить на коэффициентные функции операторных выражений рассматриваемого типа (17.1), чтобы этим выражениям можно было придать определенный смысл, или, как говорят, чтобы в них не содержались «расходимости».

Ясно, прежде всего, что мы не можем требовать, чтобы коэффициентные функции  $K(x_1, \dots, x_n)$  являлись функциями в общепринятом в математике смысле, так как тогда мы должны были бы вообще исключить из рассмотрения такие «сингулярные», или «несобственные», функции, как  $\delta(x)$ ,  $D(x)$  и т. п., с которыми постоянно приходится иметь дело в релятивистской квантовой механике. Естественно поэтому считать, что  $K(x_1, \dots, x_n)$  определены именно как *несобственные*, т. е. *обобщенные функции*.

Попытаемся изложить содержание, которое обычно вкладывается в это понятие в работах по квантовой механике, но, как правило, отчетливо не формулируется. В отличие от обычных функций сингулярные или несобственные функции определяются не заданием их значений для всех значений аргументов (для некоторого множества значений аргументов эти функции могут быть бесконечными или вообще неопределенными), а заданием правил интегриации произведений их с достаточно регулярными функциями. Например  $\delta$ -функция характеризуется правилами интегриации ее с непрерывными функциями, производные  $\delta$ -функции — правилами интегриации их с соответственно дифференцируемыми функциями, и т. п.

Иначе говоря, несобственная функция определяется заданием соответствующего линейного функционала в подходящем «линейном пространстве» достаточно регулярных функций. Такая функциональная точка зрения проводилась в работах Соболева (1936) и Шварца (1950) по созданию новой математической теории, так называемой «теории распределений».

Мы, разумеется, не можем вдаваться здесь в сколько-нибудь полное изложение общей теории несобственных функций и потому ограничимся лишь основными формулировками, относящимися только к тем свойствам специальных коэффициентных функций, которые непосредственно потребуются нам в дальнейшем.

Сформулируем определение коэффициентных функций  $K(x_1, \dots, x_n)$ . В соответствии с принятой точкой зрения будем считать  $K(x_1, \dots, x_n)$  заданной и интегрируемой, если в некотором данном линейном пространстве  $L$  функций  $F(x_1, \dots, x_n)$ , достаточно гладких и достаточно быстро убывающих на бесконечности, определен линейный функционал, который мы условимся символически изображать в виде

$$\int K(x_1, \dots, x_n) F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (3)$$

Уточним это определение. Введем класс  $C(q, r, n)$  функций  $F(x_1, \dots, x_n)$ , непрерывных со всеми своими частными производными до  $q$ -го порядка включительно, для которых все произведения

$$\left. \begin{aligned} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^p F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & (s = 0, 1, \dots, r), \\ & (p = 0, 1, \dots, q), \\ & (\beta, \alpha = 0, 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4)$$

ограничены. В качестве пространства  $L$  будет приниматься линейное пространство, образованное функциями этого класса при каких-либо данных  $q, r$ .

Таким образом, основное требование, которое всегда будет предъявляться к коэффициентным функциям, состоит в том, чтобы интеграл (3) был определен как линейный функционал в линейном пространстве  $C(q, r, n)$ , хотя бы лишь при достаточно больших  $q, r$ . В дальнейшем мы будем называть это требование *условием интегрируемости*.

Обычно построение коэффициентных функций удобно проводить с помощью несобственного предельного перехода. Сходящейся в несобственном смысле назовем здесь такую последовательность

$$K_M(x_1, \dots, x_n) \quad (M \rightarrow \infty), \quad (5)$$

для которой соответствующая последовательность интегралов

$$\int K_M(x_1, \dots, x_n) F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

сходится в обычном смысле для каждой функции  $F(x_1, \dots, x_n)$  из некоторого фиксированного класса  $C(q, r, n)$ . При этом, конечно, предполагается, что все функции (5) интегрируемы в данном  $C(q, r, n)$ . Для обозначения несобственной сходимости будут применяться обычные символы  $\rightarrow, \lim$ .

Так как

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int K_M(x_1, \dots, x_n) F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

также будет линейным функционалом в  $C(q, r, n)$ , то, уславливаясь представлять его символически в виде

$$\int \lim_{M \rightarrow \infty} K_M(x_1, \dots, x_n) F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

мы определяем тем самым несобственный предел

$$\lim_{M \rightarrow \infty} K_M(x_1, \dots, x_n)$$

как интегрируемую несобственную функцию. В силу этого определения

$$\begin{aligned} \int \lim_{M \rightarrow \infty} K_M(x_1, \dots, x_n) F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int K_M(x_1, \dots, x_n) F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

для всякой функции  $F(x_1, \dots, x_n)$  из класса  $C(q, r, n)$  с достаточно высокими значениями показателей  $q, r$ .

Следует подчеркнуть, что несобственный предельный переход, в сущности, постоянно используется при рассмотрении сингулярных функций в квантовой механике, хотя, как правило, внимание на его отличие от предельного перехода в обычном смысле не обра-

щается. Так, например, когда говорят, что  $\delta(t)$  есть предел функции

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |t| > \epsilon, \\ \frac{1}{2\epsilon} & \text{при } |t| \leq \epsilon \end{cases}$$

для  $\epsilon \rightarrow +0$ , то понятию предела здесь, очевидно, придается именно несобственный смысл. Точно так же несобственным будет и предельный переход при  $\epsilon \rightarrow +0$  в выражении

$$\frac{P_{\alpha\beta}(p)}{m^2 - p^2 - i\epsilon}$$

для фурье-образа функции  $D_{\alpha\beta}^c$ .

Разберем сейчас с этой точки зрения вопрос аппроксимации основных сингулярных функций  $D_{\alpha\beta}^+$ ,  $D_{\alpha\beta}^c$  с помощью регуляризованных выражений. Возьмем, например, функцию  $D_{\alpha\beta}^-(x)$ , определяемую формальным соотношением

$$D_{\alpha\beta}^-(x) = P_{\alpha\beta} \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right) D^-(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx} P_{\alpha\beta}(k) \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) dk. \quad (6)$$

Выясним, прежде всего, какой смысл следует придавать фигурирующим здесь интегралам с бесконечными пределами. Как известно, обычный интеграл, взятый по бесконечной области, определяется как предел интегралов с конечными областями интеграции, неограниченно расширяющимися и в пределе охватывающими всю данную бесконечную область. Естественно поэтому интеграл типа

$$K(x) = \int e^{-ikx} P(k) \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) dk \quad (7)$$

с полиномиальной  $P(k)$  определять как *несобственный* предел интеграла

$$K_G(x) = \int_G e^{-ikx} P(k) \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) dk$$

при неограниченном расширении области  $G$ .

Можно показать, что такой предел действительно существует. Возьмем последовательность областей  $G_n$  такую, что размеры четырехмерного куба

$$-L_n \leq k^\alpha \leq L_n \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3),$$

целиком содержащегося внутри  $G_n$ , стремятся к  $\infty$  вместе с  $n$ , и рассмотрим интеграл

$$\int K_G(x) F(x) dx$$

для функции  $F(x)$  из некоторого класса  $C(q, r, 1)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \int K_G(x) F(x) dx &= \int_G \tilde{F}(k) P(k) \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) dk = \\ &= \int \theta(k; G) \tilde{F}(k) P(k) \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) dk, \\ \tilde{F}(k) &= \int F(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned}$$

где

$$\theta(k; G) = \begin{cases} 1 & \text{при } k \in G, \\ 0 & \text{при } k \notin G. \end{cases}$$

Переходя к трехмерному интегралу, найдем:

$$\int K_G(x) F(x) dx = \int \theta(k^0, k, G) F(k^0, k) P(k^0, k) \frac{dk}{2k^0} \quad (k^0 = \sqrt{k^2 + m^2}). \quad (8)$$

Оценим теперь порядок убывания  $\tilde{F}(k)$  на бесконечности. Пусть  $F(x)$  принадлежит классу  $C(q, 5, 1)$ . Тогда выражения

$$|F(x)|, \quad \left| \frac{\partial^p F(x)}{(\partial x^\alpha)^p} \right|, \quad \left( \sum_\alpha |x^\alpha| \right)^5 |F(x)|, \quad \left( \sum_\alpha |x^\alpha| \right)^5 \left| \frac{\partial^p F(x)}{(\partial x^\beta)^p} \right|$$

( $p = 1, \dots, q$ )

являются ограниченными, так что

$$\int |F(x)| dx < \infty, \quad \int \left| \frac{\partial^p F(x)}{(\partial x^\beta)^p} \right| dx < \infty.$$

Теперь ясно, что  $\tilde{F}(k)$  будет непрерывна и ограничена:

$$|\tilde{F}(k)| \leq \int |F(x)| dx.$$

Имеем далее, интегрируя по частям,

$$\tilde{F}(k) = \left( \frac{1}{ik^\alpha} \right)^q \int \frac{\partial^q F(x)}{(\partial x^\alpha)^q} e^{-ikx} dx,$$

откуда

$$|k^\alpha|^q |\tilde{F}(k)| \leq \int \left| \frac{\partial^q F(x)}{(\partial x^\alpha)^q} \right| dx \leq \sum_\alpha \int \left| \frac{\partial^q F(x)}{(\partial x^\alpha)^q} \right| dx = \text{const} = C$$

и

$$\left( \sum_\alpha |k^\alpha| \right)^q |\tilde{F}(k)| \leq 4^{q-1} \sum |k^\alpha|^q |\tilde{F}(k)| \leq 4^q C \quad (9)$$

Пусть  $\nu$  обозначает степень полинома  $P(k)$ . Видим, что выражение  $\tilde{F}(k) P(k)$ , являющееся непрерывной функцией  $k$ , убывает при  $|k| \rightarrow \infty$  не медленнее, чем

$$\frac{\text{const}}{|k|^{q-\nu}}.$$

Поэтому

$$\int |\tilde{F}(k^0, k) P(k^0, k)| \frac{dk}{k^0} < \infty$$

для любой функции  $F(x)$  из класса  $C(q, 5, 1)$  при  $q = \nu + 3$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| \int \theta(k^0, k; G_n) \tilde{F}(k^0, k) P(k^0, k) \frac{dk}{k^0} - \int \tilde{F}(k^0, k) P(k^0, k) \frac{dk}{k^0} \right| = \\ & = \left| \int \{ \theta(k^0, k; G_n) - 1 \} \tilde{F}(k^0, k) P(k^0, k) \frac{dk}{k^0} \right| \leq \\ & \leq \int |\tilde{F}(k^0, k) P(k^0, k)| \frac{dk}{k^0} \Big|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (\dots |k^\alpha| \geq L_n \dots). \end{aligned}$$

Мы можем утверждать теперь на основании (8), что для всякой функции  $F(x)$  класса  $C(\nu+3, 5, 1)$

$$\int K_{G_n}(x) F(x) dx \rightarrow \int \tilde{F}(k^0, k) P(k^0, k) \frac{dk}{2k^0}.$$

Тем самым доказано существование несобственного предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{G_n}(x) = K(x),$$

для которого

$$\int K(x) F(x) dx = \int \tilde{F}(k^0, k) P(k^0, k) \frac{dk}{2k^0}.$$

Этот несобственный предел, не зависящий, очевидно, от специального выбора последовательности расширяющихся областей  $G_n$ , мы и примем за определение интеграла (7).

Таким образом, соотношение (6) действительно определяет интегрируемую несобственную функцию  $D_{\alpha\beta}^-(x)$ , причем

$$\int D_{\alpha\beta}^-(x) F(x) dx = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \tilde{F}(k^0, k) P_{\alpha\beta}(k^0, k) \frac{dk}{2k^0}. \quad (10)$$

Как только что установлено,  $D_{\alpha\beta}^-(x)$  является несобственным пределом последовательности функций

$$\frac{i}{(2\pi)^3} \int_{G_n} e^{-ikx} P_{\alpha\beta}(k) \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) dk, \quad (11)$$

являющихся, как легко видеть, регулярными и аналитическими.

Подобная аппроксимация, однако, в ряде случаев может оказаться недостаточно удобной. Дело в том, что выражения (11) не ковариантны, поскольку при лоренцовых преобразованиях область интеграции меняется.

**18.2. Некоторые свойства регуляризации Паули — Вилларса.** Чтобы аппроксимировать  $D_{\alpha\beta}^-(x)$ , разумеется, в несобственном смысле, с помощью непрерывных и вместе с тем ковариантных функций, воспользуемся регуляризацией типа Паули — Вилларса, о которой говорилось в § 16. Положим

$$\left. \begin{aligned} \text{reg}(D_{\alpha\beta}^-(x)) &= P_{\alpha\beta} \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right) \text{reg}(D^-(x)), \\ \text{reg}(D^-(x)) &= D^-(x) + \sum_{(1 \leq l \leq l)} c_l D_{M_l}^-(x), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $D_{M_l}^-(x)$  — отрицательно-частотная часть функции Паули с массой  $M_l$ , а числа  $c_l$  определяются из уравнений

$$\left. \begin{aligned} 1 + \sum_{1 \leq l \leq l} c_l &= 0, \\ m^2 + \sum_l M_l^2 c_l &= 0, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \\ m^2 (l-1) + \sum_l M_l^2 (l-1) c_l &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Так как  $\text{reg}(D^-(x))$  непрерывна и обладает непрерывными частными производными до  $(l - 2)$ -го порядка включительно, мы видим, что при  $l > \nu + 2$  ( $\nu$  — степень полинома  $P_{\alpha\beta}$ ) функции  $\text{reg}(D_{\alpha\beta}^-(x))$  будут непрерывными.

Покажем, что массы  $M$  можно всегда выбрать таким образом, чтобы при  $M \rightarrow \infty$  коэффициенты  $c_j$  оставались ограниченными. Подчеркнем, что, когда мы рассматриваем предельный переход  $M \rightarrow \infty$ , число  $l$  всегда считается фиксированным. Возьмем какие-либо фиксированные различные числа  $m_j$ . Тогда определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ m_1^2 & \dots & m_l^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_1^{2(l-1)} & \dots & m_l^{2(l-1)} \end{vmatrix}$$

будет отличен от нуля, и потому уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{(1 \leq j \leq l)} a_j^{(\nu)} &= \delta_{0\nu}, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ \sum_{(1 \leq j \leq l)} a_j^{(\nu)} m_j^{2(l-1)} &= \delta_{l-1, \nu} \quad (\nu = 0, \dots, l-1), \end{aligned}$$

в которых  $\delta_{ij}$  обозначают элементы единичной матрицы, будут иметь конечные решения  $a_j^{(\nu)}$ . Положим

$$M_j = M m_j. \tag{14}$$

Для такой системы масс из уравнений (13) найдем:

$$c_j = - \sum_{(0 \leq \nu \leq l-1)} a_j^{(\nu)} \left(\frac{m}{M}\right)^{2\nu}.$$

Эти  $c_j$ , очевидно, будут равномерно ограничены при  $M \rightarrow \infty$ . Указанный специальный выбор (14) масс  $M_j$  не является обязательным; для дальнейшего нам необходимо лишь, чтобы

$$|c_j| \leq \text{const.} \quad M \rightarrow \infty$$

Мы можем теперь доказать справедливость соотношения

$$\text{reg}(D_{\alpha\beta}^-(x)) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} D_{\alpha\beta}^-(x); \tag{15}$$

для этого достаточно показать, что для любой функции из класса  $C(\nu + 3, 5, 1)$  имеет место предельное соотношение

$$\int F(x) \text{reg}(D_{\alpha\beta}^-(x)) dx \Rightarrow \int F(x) D_{\alpha\beta}^-(x) dx.$$

Имеем:

$$\int F(x) \operatorname{reg} (D_{\alpha\beta}^-(x)) dx - \int F(x) D_{\alpha\beta}^-(x) dx = \\ = \sum_{1 \leq j \leq i} c_j \int F(x) P_{\alpha\beta} \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right) D_{M_j}^-(x) dx.$$

и потому ввиду ограниченности  $c_j$  положение (15) будет доказано, как только мы установим, что

$$\int F(x) \left\{ P_{\alpha\beta} \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right) D_{M_j}^-(x) \right\} dx \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$

Но на основании (10) этот интеграл равен

$$\frac{i}{(2\pi)^3} \int \tilde{F}(\sqrt{k^2 + M_j^2}, k) P_{\alpha\beta}(\sqrt{k^2 + M_j^2}, k) \frac{dk}{2\sqrt{k^2 + M_j^2}}. \quad (16)$$

С другой стороны, в силу неравенств (9) при  $q = \nu + 3$  получим:

$$|\tilde{F}(k) P_{\alpha\beta}(k)| \leq \frac{Q}{\left( \sum_{\alpha} |k^{\alpha}| \right)^3} \leq \frac{Q}{(k^0)^3} \quad (Q = \text{const}).$$

Поэтому по абсолютной величине интеграл (16) будет меньше, чем

$$\frac{Q}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{(k^2 + M_j^2)^2} = \frac{Q}{(2\pi)^3 M_j^3} \int \frac{dp}{(p^2 + 1)^2} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$

Итак, действительно, функции  $D_{\alpha\beta}^-(x)$  аппроксимируются в несобственном смысле непрерывными функциями

$$\operatorname{reg} \{ D_{\alpha\beta}^-(x) \}, \quad M \rightarrow \infty,$$

обладающими, очевидно, требуемыми свойствами ковариантности.

Мы рассмотрели только функции  $D_{\alpha\beta}^-(x)$ . Нетрудно заметить, однако, что все изложенные рассуждения могут быть непосредственно перенесены и на функции  $D_{\alpha\beta}^+(x)$ ,  $D_{\alpha\beta}^c(x)$ .

## § 19. Умножение операторных выражений

**19.1. Умножение сингулярных функций.** Перейдем к исследованию основного вопроса об определении произведений спариваний (18.1) с помощью теоремы Вика. Подчеркнем, что необходимость специального определения произведений вообще типична для несобственных функций. Дело в том, что несобственная функция задается установлением правил ее интеграции лишь с достаточно регулярными функциями, а из таких правил рецептура интеграции произведения *нескольких* сингулярных функций непосредственно не вытекает. Мы можем, однако, воспользоваться здесь методом несобственного предельного перехода и определить исследуемое выражение (18.1) с помощью сходящейся последовательности регулярных функций. Чтобы построить такую последовательность наиболее



естественным путем, обратимся сперва к чисто формальному приему, типичному для теории поля. Будем исходить из представлений (18.6) и положим:

$$\prod_{(r < s)} D_{\alpha_r \beta_s}^-(x_r - x_s) = \prod_{(r < s)} \left\{ \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ik(x_r - x_s)} P_{\alpha\beta}(k) \theta(k^0) \delta(k^2 - m_{\alpha\beta}^2) dk \right\}.$$

Перемножая формально интегралы, найдем:

$$\prod_{(r < s)} D_{\alpha_r \beta_s}^-(x_r - x_s) = \left( \frac{i}{(2\pi)^3} \right)^N \int \exp \left[ i \sum_{(r < s)} \lambda_{\alpha_r \beta_s} (x_s - x_r) \right] \times \prod_{(r < s)} \{ P_{\alpha\beta}(\lambda_{\alpha\beta}) \theta(\lambda_{\alpha\beta}^0) \delta(\lambda_{\alpha\beta}^2 - m_{\alpha\beta}^2) d\lambda_{\alpha\beta} \} = \int e^{i \sum k_r x_r} \Delta(k_1, \dots, k_n) dk_1 \dots dk_n, \quad (1)$$

где  $N$  — число множителей в рассматриваемом произведении, а

$$\Delta(k_1, \dots, k_n) = \left( \frac{i}{(2\pi)^3} \right)^N \int \prod_r \delta \left( k_r + \sum_{(s < r)} \lambda_{\alpha_s \beta_r} - \sum_{(r < s)} \lambda_{\alpha_r \beta_s} \right) \times \prod_{(r < s)} \{ P_{\alpha\beta}(\lambda_{\alpha\beta}) \theta(\lambda_{\alpha\beta}^0) \delta(\lambda_{\alpha\beta}^2 - m_{\alpha\beta}^2) d\lambda_{\alpha\beta} \}. \quad (2)$$

Можно показать, что область интегрирования в (2) конечна. Поэтому оказывается возможным строго определить рассматриваемые произведения (18.1) в виде несобственных пределов последовательности соответствующих регулярных аналитических функций. Выбирая в качестве таких аналитических функций произведения  $\text{reg} \{D^-(x)\}$ , получим:

$$\prod \{ \text{reg} (D^-(x_r - x_s)) \} \rightarrow \prod D^-(x_r - x_s). \quad (3)$$

В самом деле, интеграция в (2) совершается лишь по области, в которой

$$\left. \begin{aligned} k_r &= \sum_{(r < s)} \lambda_{\alpha_r \beta_s} - \sum_{(s < r)} \lambda_{\alpha_s \beta_r}, \\ \lambda_{\alpha\beta}^0 &> 0, \quad (\lambda_{\alpha\beta})^2 < (\lambda_{\alpha\beta}^0)^2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Поэтому, в частности

$$\begin{aligned} k_1^0 &= \sum_{(s > 1)} \lambda_{\alpha_1 \beta_s}^0, \\ k_2^0 &= \sum_{(s > 2)} \lambda_{\alpha_2 \beta_s}^0 - \sum_{(s < 2)} \lambda_{\alpha_s \beta_2}^0, \\ k_3^0 &= \sum_{(s > 3)} \lambda_{\alpha_3 \beta_s}^0 - \sum_{(s < 3)} \lambda_{\alpha_s \beta_3}^0, \\ &\dots \end{aligned}$$

откуда ввиду положительности  $\lambda_{\alpha\beta}^0$  найдем последовательно

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha_1\beta_s}^0 &\leq k_1^0, \\ \sum_{(s>2)} \lambda_{\alpha_2\beta_s}^0 &= k_2^0 + \lambda_{\alpha_1\beta_2}^0 \leq k_2^0 + k_1^0, \\ \sum_{(s>3)} \lambda_{\alpha_3\beta_s}^0 &= k_3^0 + \lambda_{\alpha_1\beta_3}^0 + \lambda_{\alpha_2\beta_3}^0 \leq k_3^0 + k_1^0 + (k_2^0 + k_1^0), \\ &\dots \\ \sum_{(s>r)} \lambda_{\alpha_r\beta_s}^0 &\leq k_r^0 + k_{r-1}^0 + 2k_{r-2}^0 + 2^2k_{r-3}^0 + \dots + 2^{r-2}k_1^0, \\ &\dots \end{aligned}$$

так что во всяком случае

$$0 \leq \lambda_{\alpha\beta}^0 \leq 2^{n-2} (|k_1^0| + \dots + |k_n^0|) \quad (5)$$

и, следовательно,

$$|\lambda_{\alpha\beta}|^2 \leq 2^{2(n-2)} (|k_1^0| + \dots + |k_n^0|)^2.$$

Конечность области интеграции в (2) обуславливает отсутствие расходимостей и возможность строгого определения рассматриваемого выражения (18.1) как несобственного предела последовательности регулярных аналитических функций

$$K(x_1, \dots, x_n | \Gamma_\omega) = \int_{\Gamma_\omega} e^{i \sum k_r x_r} \Delta(k_1, \dots, k_n) dk_1 \dots dk_n \quad (6)$$

при неограниченном расширении области  $\Gamma_\omega$   $4n$ -мерного пространства точек  $k_1, \dots, k_n$ , охватывающей в пределе все это пространство.

Чтобы обосновать это утверждение, докажем существование такого предела и его независимость от специального выбора последовательностей областей  $\Gamma_\omega$ . Как всегда, рассмотрим для этого соответствующую последовательность функционалов

$$\int K(x_1, \dots, x_n | \Gamma_\omega) F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (7)$$

в линейном пространстве  $C(q, r, n)$  при фиксированных, достаточно больших значениях  $q, r$ . Требуется оценить порядок убывания на бесконечности фурье-образа функции  $F$

$$\tilde{F}(k_1, \dots, k_n) = \int e^{i \sum k_r x_r} F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Дословно повторяя произведенные рассуждения в рассматриваемом случае  $n > 1$ , нетрудно убедиться, что если  $F(x_1, \dots, x_n)$  принадлежит классу  $C(q, 4n+1, n)$ , то  $\tilde{F}(k_1, \dots, k_n)$  будет непрерывной функцией, удовлетворяющей неравенству

$$|\tilde{F}(k_1, \dots, k_n)| \leq \frac{A}{(\sum |k_j^\alpha|)^q} \quad (A = \text{const}). \quad (8)$$

Подставляя теперь (6) в (7) и вводя функцию

$$\theta(k_1, \dots, k_n | \Gamma_\omega) = \begin{cases} 1 & \text{в области } \Gamma_\omega, \\ 0 & \text{вне области } \Gamma_\omega, \end{cases}$$

получим:

$$\begin{aligned} & \int K(x_1, \dots, x_n | \Gamma_\omega) F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ & = \int_{\Gamma_\omega} \tilde{F}(k_1, \dots, k_n) \Delta(k_1, \dots, k_n) dk_1 \dots dk_n = \\ & = \int \theta(k_1, \dots, k_n | \Gamma_\omega) \tilde{F}(k_1, \dots, k_n) \Delta(k_1, \dots, k_n) dk_1 \dots dk_n = \\ & = \frac{i^N}{(2\pi)^{3N}} \int \theta(k_1(\lambda), \dots, k_n(\lambda) | \Gamma_\omega) \tilde{F}(k_1(\lambda), \dots, k_n(\lambda)) \times \\ & \quad \times \prod_{(r < s)} \{P_{\alpha\beta}(\lambda_{\alpha\beta}) \theta(\lambda_{\alpha\beta}^0) \delta(\lambda_{\alpha\beta}^2 - m_{\alpha\beta}^2) d\lambda_{\alpha\beta}\}, \end{aligned}$$

где

$$k_r(\lambda) = \sum_{(r < s)} \lambda_{\alpha_r \beta_s} - \sum_{(s < r)} \lambda_{\alpha_s \beta_r}.$$

Поскольку область  $\Gamma_\omega$  неограниченно расширяется и в пределе охватывает все  $4n$ -мерное пространство, мы можем утверждать, что для точек вне  $\Gamma_\omega$

$$\sum_{(\alpha, r)} |k_r^\alpha| \geq L_\omega \rightarrow \infty.$$

Таким образом, при тех  $\lambda$ , для которых

$$1 - \theta(k_1(\lambda), \dots, k_n(\lambda) | \Gamma_\omega) \neq 0,$$

будем иметь:

$$2 \sum |\lambda_{\alpha_r \beta_s}^\gamma| \geq \sum |k_r^\gamma| \geq L_\omega.$$

Заметив это, найдем:

$$\begin{aligned} & \left| \int K(x_1, \dots, x_n | \Gamma_\omega) F(x_1, \dots, x_n) dx - \frac{i^N}{(2\pi)^{3N}} \int \tilde{F}(k_1(\lambda), \dots, k_n(\lambda)) \times \right. \\ & \quad \left. \times \prod_{(r < s)} \{P_{\alpha\beta}(\lambda_{\alpha\beta}) \theta(\lambda_{\alpha\beta}^0) \delta(\lambda_{\alpha\beta}^2 - m_{\alpha\beta}^2) d\lambda_{\alpha\beta}\} \right| \leq \varepsilon_\omega, \quad (9) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_\omega = (2\pi)^{-3N} & \left| \int_{G_\omega} \tilde{F}(\dots k_j(\lambda) \dots) \times \right. \\ & \quad \left. \times \prod_{(r < s)} |P_{\alpha\beta}(\lambda_{\alpha\beta})| \theta(\lambda_{\alpha\beta}^0) \delta(\lambda_{\alpha\beta}^2 - m_{\alpha\beta}^2) d\lambda_{\alpha\beta} \right|. \quad (10) \end{aligned}$$

(Здесь  $G_\omega$  обозначает область, ограниченную условием  $\sum |\lambda_{\alpha\beta}^\gamma| \geq \frac{1}{2} L_\omega$ .)

Воспользовавшись тем, что из (4) вытекают неравенства (5), получаем, что под знаком интеграла (10)

$$\begin{aligned} (\lambda_{\alpha\beta}^0)^2 & \leq 2^{2(n-2)} \left( \sum |k_j^0(\lambda)| \right)^2, \\ \sum (\lambda_{\alpha\beta}^0)^2 & \leq 2^{2(n-2)} N \left( \sum |k_j^0(\lambda)| \right)^2, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sum |k_j^0(\lambda)| \geq 2^{-(n-2)} N^{-1/2} \sqrt{\sum |\lambda_{\alpha\beta}^0|^2}.$$

Отсюда на основании (8) найдем:

$$|\tilde{F}(\dots k_j(\lambda) \dots)| \leq \frac{A [2^{n-2} \sqrt{N}]^q}{\left( \sum |\lambda_{\alpha\beta}^0|^2 \right)^{q/2}},$$

и потому под знаком рассматриваемого интеграла (10)

$$\left| \tilde{F}(\dots k_j(\lambda) \dots) \prod P_{\alpha\beta}(\lambda_{\alpha\beta}) \right| \leq \frac{B}{\left( \sum |\lambda_{\alpha\beta}^0|^2 \right)^{\frac{q-\nu}{2}}}, \quad (11)$$

где  $\nu$  — сумма степеней всех полиномов  $P_{\alpha\beta}$  и  $B = \text{const}$ . Теперь ясно, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_\omega &\leq (2\pi)^{-3N} B \int_{G_\omega} \frac{\prod \{ \theta(\lambda_{\alpha\beta}^0) \delta(\lambda_{\alpha\beta}^2 - m_{\alpha\beta}^2) d\lambda_{\alpha\beta} \}}{\left( \sum |\lambda_{\alpha\beta}^0|^2 \right)^{\frac{q-\nu}{2}}} = \\ &= \frac{(2\pi)^{-3N} B}{2^N} \int_{G_\omega} \frac{\dots d\lambda_{\alpha\beta} \dots}{\left\{ \prod \sqrt{m_{\alpha\beta}^2 + \lambda_{\alpha\beta}^2} \right\} \left\{ \sum (m_{\alpha\beta}^2 + \lambda_{\alpha\beta}^2) \right\}^{\frac{q-\nu}{2}}}. \end{aligned}$$

Поэтому, если взять

$$q = \nu + 2N + 1,$$

то интеграл в правой части этого неравенства будет абсолютно сходящимся и  $\varepsilon_\omega \rightarrow 0$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . Итак, для любой функции  $F(x_1, \dots, x_n)$  из класса  $C(\nu + 2N + 1, 4n + 1, n)$  выражение в левой части (9) стремится к нулю.

Мы можем, следовательно, утверждать, что последовательность регулярных аналитических функций (6) является сходящейся (в несобственном смысле), причем

$$\begin{aligned} &\int \left\{ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\omega} e^{i \sum k_r x_r} \Delta(k_1, \dots, k_n) dk_1 \dots dk_n \right\} F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \frac{i^N}{(2\pi)^{3N}} \int \tilde{F}(\dots k_j(\lambda) \dots) \prod_{(r < s)} \{ P_{\alpha\beta}(\lambda_{\alpha\beta}) \theta(\lambda_{\alpha\beta}^0) \delta(\lambda_{\alpha\beta}^2 - m_{\alpha\beta}^2) d\lambda_{\alpha\beta} \}. \quad (12) \end{aligned}$$

Поскольку правая часть этого равенства не зависит от специального выбора последовательности областей  $\Gamma_\omega$ , мы видим тем самым, что от него не зависит и

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\omega} e^{i \sum k_r x_r} \Delta(k_1, \dots, k_n) dk_1 \dots dk_n.$$

Таким образом, соотношение (1) действительно определяет выражение

$$\prod_{(r < s)} D_{\alpha_r \beta_s}^-(x_r - x_s)$$

как интегрируемую несобственную функцию, для которой ввиду (12)

$$\begin{aligned} &\int \left\{ \prod_{(r < s)} D_{\alpha_r \beta_s}^-(x_r - x_s) \right\} F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \frac{i^N}{(2\pi)^{3N}} \int \tilde{F}(\dots k_j(\lambda) \dots) \prod_{(r < s)} \{ P_{\alpha\beta}(\lambda_{\alpha\beta}) \theta(\lambda_{\alpha\beta}^0) \delta(\lambda_{\alpha\beta}^2 - m_{\alpha\beta}^2) d\lambda_{\alpha\beta} \}. \quad (13) \end{aligned}$$

Исследуемое произведение сингулярных функций  $D_{\alpha\beta}^-$  может быть также аппроксимировано с помощью соответствующих произведений регуляризованных функций  $\text{reg} \{ D_{\alpha\beta}^- \}$

$$\prod_{(r < s)} \text{reg} (D_{\alpha_r \beta_s}^-(x_r - x_s)) \rightarrow \prod_{(r < s)} D_{\alpha_r \beta_s}^-(x_r - x_s).$$

Установим для этого, что для всякой  $F(x_1, \dots, x_n)$  из класса  $C(v + 2N + 1, 4n + 1, n)$  справедливо предельное соотношение

$$\int F(x_1, \dots, x_n) \left\{ \prod_{(r < s)} \text{reg } D_{\alpha_r \beta_s}^- (x_r - x_s) \right\} dx_1 \dots dx_n - \\ - \int F(x_1, \dots, x_n) \left\{ \prod_{(r < s)} D_{\alpha_r \beta_s}^- (x_r - x_s) \right\} dx_1 \dots dx_n \rightarrow 0 \quad \text{при } M \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Согласно определению регуляризованных функций (18.12) разность (14) равна сумме произведений коэффициентов  $c_j$  с интегралами, получающимися из интеграла в правой части (13) заменой масс  $m$  на массы  $M$ . Поскольку все  $c_j$  ограничены при  $M \rightarrow \infty$ , соотношение (14) будет доказано, как только мы покажем, что такие интегралы стремятся к нулю. Воспользовавшись для этого оценкой (11), найдем, что по абсолютной величине они будут меньше, чем

$$(2\pi)^{-3N_2 - N_B} \int \left\{ \dots + m_{\alpha\beta}^2 + \dots + M_j^2 + \dots + \sum \lambda_{\alpha\beta}^2 \right\}^{-\frac{2N+1}{2}} \prod \left( \frac{d\lambda_{\alpha\beta}}{|\lambda_{\alpha\beta}|} \right).$$

Но благодаря присутствию масс  $M_j$  в знаменателе подынтегрального выражения этот интеграл стремится к нулю при  $M \rightarrow \infty$ , и соотношение (3) тем самым доказано.

Приведенные рассуждения распространяются и на общий случай коэффициентных функций, получающихся в результате умножения двух операторных функций типа (17.1) с различными аргументами, и соответствующие выражения

$$K(x_1, \dots, x_n) Q(y_1, \dots, y_m) \prod D_{\beta\sigma}^-(x_s - y_j)$$

(в которых  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  — независимые аргументы, а  $K$  и  $Q$  — интегрируемые, трансляционно-инвариантные коэффициентные функции) могут быть определены как интегрируемые несобственные функции.

Для выражений этого вида можно доказать следующую общую теорему:

Если  $K_M(x_1, \dots, x_n)$ ,  $Q_M(y_1, \dots, y_m)$  являются трансляционно-инвариантными коэффициентными функциями и в несобственном смысле:

$$\left. \begin{aligned} K_M(x_1, \dots, x_n) &\xrightarrow{M \rightarrow \infty} K(x_1, \dots, x_n); \\ Q_M(y_1, \dots, y_m) &\xrightarrow{M \rightarrow \infty} Q(y_1, \dots, y_m), \end{aligned} \right\}$$

а аргументы  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  независимы, то

$$K_M(x_1, \dots, x_n) Q_M(y_1, \dots, y_m) \prod \text{reg } D_{\beta\sigma}^-(x_s - y_j) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \\ \xrightarrow{M \rightarrow \infty} K(x_1, \dots, x_n) Q(y_1, \dots, y_m) \prod D_{\beta\sigma}^-(x_s - y_j). \quad (15)$$

Доказательство этой теоремы построено на том же принципе, как и доказательство предельного соотношения (14).

По существу, оба эти доказательства основаны на том простом обстоятельстве, что из ограниченности суммы отрицательных частот вытекает и ограниченность каждой отдельной частоты. Мы рас-

сма тривали сначала произведение одних только отрицательно-частотных частей  $D$ -функций; поэтому весь проведенный анализ тривиально переносится и на случай, когда вместо  $D^-$  стоят одни  $D^+$ .

Предоставляем читателю в виде упражнения доказать следующие формулы для произведений  $D$ - и  $S$ -функций одинаковой частотности:

$$\begin{aligned}
 D^-(x) D^+(-x) &= -[D^-(x)]^2 = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ipx} \frac{\theta(p^0)}{8\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \theta(p^2 - 4m^2) dp, \\
 \text{Sp}[\gamma^5 S^-(x) \gamma^5 S^+(-x)] &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ipx} \theta(p^0) f(p^2) dp, \\
 f(p^2) &= \frac{\theta(p^2 - 4m^2)}{4\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} p^2, \\
 \text{Sp}[\gamma^m S^-(x) \gamma^n S^+(-x)] &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ipx} \theta(p^0) f^{mn}(p) dp, \\
 f^{mn}(p) &= \frac{\theta(p^2 - 4m^2)}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \frac{p^2 + 2m^2}{3} \left( g^{mn} - \frac{p^m p^n}{p^2} \right).
 \end{aligned}$$

Совершенно иное положение получится, если мы будем рассматривать вместо (18.1) произведения, например, типа

$$\prod_{(r < s)} D_{\alpha_r \beta_s}^c(x_r - x_s), \quad (16)$$

так как в  $D^c(x)$  присутствуют и положительно- и отрицательно-частотные компоненты. Можно показать, что, несмотря на слабость условия интегрируемости (§ 18.1), в котором требуется существование интеграла от произведения рассматриваемой сингулярной функции лишь с функциями из класса  $C(q, r, n)$  со сколь угодно высокими показателями  $q, r$ , произведение (16) не является определенной интегрируемой функцией и несобственное предельное соотношение типа (14) здесь не имеет места.

**19.2. Некоторые свойства сингулярных функций.** Остановимся кратко на свойствах непрерывности, дифференцируемости и т. п. для сингулярных функций в некоторых областях значений их аргументов. Поскольку мы определяем сингулярную функцию лишь как символическое «ядро» данного линейного функционала, она вообще может не иметь определенных значений, где бы то ни было. Однако в ряде важных случаев сингулярные функции имеют определенные конечные значения и обладают различными свойствами регулярности в соответствующих областях значений их аргументов. Так, например,  $\delta(x) = 0$  для  $x \neq 0$ , функции  $D^\pm(x)$ ,  $D^c(x)$  непрерывны вне светового конуса и т. п.

Поэтому целесообразно дать следующее математическое определение:

Пусть  $K(x_1, \dots, x_n)$  — будет несобственной функцией, интегрируемой в некотором классе  $C(q, r, n)$ , а  $f(x_1, \dots, x_n)$  — обычной функцией, непрерывной в некоторой области  $O$  (пространства то-

чек  $x_1, \dots, x_n$ ); будем говорить тогда, что

$$K(x_1, \dots, x_n) = \delta(x_1, \dots, x_n)$$

в области  $O$  и что  $K$  непрерывна в этой области, если

$$\int \{K(x_1, \dots, x_n) - \delta(x_1, \dots, x_n)\} F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 0$$

для всякой функции  $F$  из класса  $C(q, r, n)$ , обращающейся вне  $O$  в нуль со всеми своими частными производными до  $q$ -го порядка включительно.

В этом же смысле условимся понимать и другие свойства регулярности несобственных функций в данной области. Аналогично можно ввести также понятие несобственной сходимости в определенной области значений аргументов. Последовательность несобственных функций  $K_M(x_1, \dots, x_n)$ , интегрируемых в некотором фиксированном классе  $C(q, r, n)$ , будем называть сходящейся в несобственном смысле в области  $O$ , если последовательность интегралов

$$\int K_M(x_1, \dots, x_n) F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

сходится для всякой функции  $F$  из  $C(q, r, n)$ , обращающейся в нуль вне  $O$  со всеми своими частными производными до  $q$ -го порядка включительно.

С помощью введенных определений способы обращения с обычными функциями можно в значительной мере распространить и на несобственные функции. Этими способами можно пользоваться для исследования тех часто встречающихся в квантовой теории поля случаев, когда чисто формальные операции с несобственными функциями приводят к выражениям, не имеющим определенного смысла, например содержащим «расходимости».

**19.3. Умножение операторных функций.** Перейдем к рассмотрению операторных выражений, представляемых конечными суммами вида (17.1). Отметим, прежде всего, что наличие предельных соотношений (3) позволяет устранить одно возможное возражение против изложенного выше доказательства теоремы Вика, основанное на том, что в процессе этого доказательства производилось перемножение сингулярных функций. Доказательство теоремы Вика, вполне свободное от такого недостатка, весьма просто проводится, например, по следующей схеме. Рассматриваем сперва фиктивный случай, когда полевые функции удовлетворяют перестановочным соотношениям, в которых  $D_{\alpha\beta}$  заменены на гег  $D_{\alpha\beta}$ , и проводим для него доказательство теоремы Вика точно в той форме, в какой оно излагалось выше. Ввиду непрерывности регуляризованных функций такое доказательство будет вполне строгим. Для перехода к реальному случаю достаточно выполнить предельный переход  $M \rightarrow \infty$ , снимающий регуляризацию.

Таким же образом, с помощью более общих предельных соотношений (15) нетрудно обосновать законность перемножения двух

интегрируемых операторных функций

$$A_1(x_1, \dots, x_n) A_2(y_1, \dots, y_m) \quad (17)$$

с независимыми аргументами.

Интегрируемыми мы называем операторные выражения, представляемые конечными суммами типа (17.1), в которых все коэффициентные функции удовлетворяют требованию интегрируемости.

Для установления того, что произведение (17) является интегрируемой операторной функцией аргументов  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ , вновь рассмотрим фиктивный случай регуляризованных перестановочных соотношений и, кроме того, заменим все коэффициентные функции  $K, Q$  операторов  $A_1, A_2$  некоторыми непрерывными функциями  $K_M, Q_M$ , обеспечив лишь несобственные предельные соотношения

$$K_M \rightarrow K, \quad Q_M \rightarrow Q \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty.$$

Тогда, приводя произведение регуляризованных таким образом операторных функций к нормальной форме, получим коэффициентные функции вида

$$\sum K_M(x_1, \dots, x_n) Q_M(y_1, \dots, y_m) \prod \text{reg} \{D_{\alpha\beta}^-(x_s - y_j)\},$$

которые в силу (15) образуют (при  $M \rightarrow \infty$ ) последовательность, сходящуюся в несобственном смысле. Мы можем поэтому перейти здесь к пределу, снимающему регуляризацию, и определить коэффициентные функции произведения (17) как интегрируемые сингулярные функции. Доказанная теорема, что произведение двух (а следовательно, и любого числа) интегрируемых операторных функций с независимыми аргументами является также интегрируемой операторной функцией, окажется весьма полезной.

Рассмотрим теперь некоторую интегрируемую операторную функцию  $A(x_1, \dots, x_n)$  и возьмем интеграл

$$\int A(x_1, \dots, x_n) F_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (18)$$

в котором  $F(x_1, \dots, x_n)$  будет произвольной функцией из класса  $C(\infty, \infty, n)$ . Построим характеризующие этот операторный интеграл матричные элементы

$$\Phi_{\dots \gamma \dots \rho \dots}^* \int A(x_1, \dots, x_n) F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \Phi_{\dots \gamma' \dots \rho' \dots} \quad (19)$$

по всевозможным состояниям

$$\Phi_{\dots \gamma \dots \rho \dots} = \dots u_{\gamma}^{\dagger}(\rho) \dots \Phi_0,$$



соответствующим наличию данных сортов частиц с данными импульсами. На основании (17.9) найдем для них следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \sum P \dots \alpha \dots \beta \dots \gamma \dots \gamma' \dots (\dots p \dots p' \dots) \int K \dots \alpha \dots \beta \dots (x_1, \dots, x_n) \times \\ & \quad \times e^{i(\sum p_\nu x_\nu - \sum p'_\lambda x_\lambda)} F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n + \\ & + \sum Z \dots \alpha \dots \beta \dots \gamma \dots \gamma' \dots (\dots p \dots p' \dots) \prod \{\theta(p_\omega^0) \gamma(p_\omega^2 - m_\gamma^2) \delta(p_\omega - p'_\omega)\} \times \\ & \quad \times \int K' \dots \alpha \dots \beta \dots (x_1, \dots, x_n) e^{i(\sum p_\nu x_\nu - \sum p'_\lambda x_\lambda)} F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

где, как об этом уже говорилось ранее,  $P$  и  $Z$  являются полиномами из компонент  $p$ . Укажем также, что  $\delta$ -функции во второй сумме учитывают возможность совпадения импульсов  $p$ ,  $p'$  для частиц одного и того же сорта. Второй суммы, следовательно, не будет, если матричный элемент берется по состояниям с различными импульсами одинаковых частиц; в этом случае

$$\begin{aligned} & \Phi \dots \gamma \dots p \dots \int A(x_1, \dots, x_n) F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \Phi \dots \gamma' \dots p' \dots = \\ & = \sum P \dots \alpha \dots \beta \dots \gamma \dots \gamma' \dots (\dots p \dots p' \dots) \int K \dots \alpha \dots \beta \dots (x_1, \dots, x_n) \times \\ & \quad \times e^{i(\sum p_\nu x_\nu - \sum p'_\lambda x_\lambda)} F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Так как функция  $F$  принадлежит к классу  $C(\infty, \infty, n)$ , то к этому же классу принадлежит и функция

$$e^{i(\sum p_\nu x_\nu - \sum p'_\lambda x_\lambda)} F(x_1, \dots, x_n).$$

Поэтому на основании интегрируемости коэффициентных функций  $K$  интегралы

$$\int K \dots \alpha \dots \beta \dots (x_1, \dots, x_n) e^{i(\sum p_\nu x_\nu - \sum p'_\lambda x_\lambda)} \times F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (20)$$

оказываются конечными. Более того, поскольку дифференцирование их по  $p$  соответствует умножению  $F$  на компоненты  $x$ , а умножение  $F$  на любой полином из этих компонент не выводит ее из класса  $C(\infty, \infty, n)$ , то интегралы (20) являются непрерывными функциями импульсов  $\dots p \dots p' \dots$ , обладающими непрерывными частными производными любого порядка.

Итак, мы видим, что рассматриваемые матричные элементы (19) являются линейными комбинациями членов типа

$$f(\dots p \dots p' \dots), f(\dots p \dots p' \dots) \prod \{\theta(p_\omega^0) \delta(p_\omega^2 - m_\gamma^2) \delta(p_\omega - p'_\omega)\},$$

в которых  $f(\dots p \dots p' \dots)$  непрерывны со всеми своими частными производными по  $\dots p \dots p' \dots$ . В частности, в области неодинаковых импульсов  $\dots p \dots p' \dots$  одинаковых частиц этими свойствами «гладкости» будут обладать и сами матричные элементы. Операторные интегралы (18) могут поэтому считаться сходящимися.

В том же смысле сходящимися будут и интегралы типа

$$\int A(x_1, \dots, x_n) F(x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \quad (21)$$

с одной «невыполненной интеграцией».

Действительно, в данном случае единственное отличие будет состоять в том, что вместо интегралов (20) в матричных элементах появятся интегралы

$$\int K \dots \alpha \dots \beta \dots (x, x_2, \dots, x_n) \varphi(x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n, \\ \varphi(x_2, \dots, x_n) = \exp \left[ i \left( \sum p_\nu x_\nu - \sum p'_\lambda x'_\lambda \right) \right] F(x_2, \dots, x_n), \quad (22)$$

которые благодаря трансляционной инвариантности коэффициентных функций элементарно приводятся к виду (20).

В самом деле, в силу этого свойства имеем:

$$\int K(x, x_2, \dots, x_n) \varphi(x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \\ = \int K(x + \xi, x_2 + \xi, \dots, x_n + \xi) \varphi(x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n.$$

Умножим обе части полученного равенства на какую-либо функцию  $\varphi(\xi)$  из класса  $C(\infty, \infty, 1)$ , для которой

$$\int \varphi(\xi) d\xi = 1,$$

и проинтегрируем по  $\xi$ . Найдем:

$$\int K(x, x_2, \dots, x_n) \varphi(x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \\ = \int K(x + \xi, x_2 + \xi, \dots, x_n + \xi) \varphi(\xi) \varphi(x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n d\xi.$$

Выполним замену переменных

$$x + \xi \rightarrow x_1, \quad x_2 + \xi \rightarrow x_2, \quad \dots, \quad x_n + \xi \rightarrow x_n.$$

Тогда

$$\xi \rightarrow x_1 - x, \quad x_2 \rightarrow x_2 - x_1 + x, \quad \dots, \quad x_n \rightarrow x_n - x_1 + x,$$

и мы получим:

$$\int K(x, x_2, \dots, x_n) \varphi(x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \\ = \int K(x_1, x_2, \dots, x_n) \varphi'(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

где

$$\varphi'(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_1 - x) \varphi(x_2 - x_1 + x, \dots, x_n - x_1 + x),$$

что и приводит интегралы (22) к типу (20).

Показав сходимости операторных интегралов вида (18) и (21), отметим все же, что благодаря нашему условию интегрируемости класс операторных интегралов с гарантированной сходимостью оказывается несколько узким. Так, в этот класс не входят интегралы

$$\int A(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

взятые по всему бесконечному пространству точек  $x_1, \dots, x_n$ , поскольку они соответствуют функции  $F = 1$ , не убывающей на бесконечности.

Матричные элементы операторных интегралов данного вида нуждаются в специальном определении посредством предельного перехода, исходя из соответствующей последовательности функций класса  $C(\infty, \infty, n)$ , которая приближается к 1 в расширяющейся области, охватывающей в пределе все пространство интеграции.

## МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

## § 20. Основные понятия теории взаимодействующих полей

20.1. Введение. При рассмотрении задачи взаимодействия в квантовой механике обычно исходят из уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H \psi(t), \quad (9.2)$$

в котором полный гамильтониан системы  $H$  представляют в виде суммы гамильтониана свободного движения  $H_0$  и гамильтониана взаимодействия  $H_1$ :

$$H = H_0 + H_1. \quad (1)$$

Поскольку, как правило, получить точное решение уравнения Шредингера (9.2) оказывается невозможным, обычно используют метод теории возмущений. При этом в исходном приближении пренебрегают членом взаимодействия, получая точно решаемую задачу

$$i \frac{\partial \psi_0(t)}{\partial t} = H_0 \psi_0(t). \quad (2)$$

В теории квантовых полей, как и в квантовой механике, точные решения удается получить лишь в ряде простых моделей (см., например, Швебер (1961), гл. 7, Боголюбов и Ширков (1980), гл. 3). Поэтому здесь также обычно прибегают к теории возмущений, основанной на исходном приближении невзаимодействующих частиц. При этом приходится вводить в рассмотрение соответствующие идеализированные свободные поля и рассматривать взаимодействие как некоторый дополнительный фактор, мало изменяющий свойства динамической системы, фактор, который может «включаться» и «выключаться». На первый взгляд такая постановка вопроса как будто бы не вызывает особых возражений. Действительно, элементарные частицы интенсивно взаимодействуют лишь при достаточном их сближении (в процессах столкновений). Поэтому кажется естественным, что на больших расстояниях взаимодействие между полями несущественно, и в определенном приближении можно пренебречь им и рассматривать реальные частицы как свободные.

Однако (как, например, хорошо известно из классической электродинамики) даже свободные частицы взаимодействуют с создаваемыми

мыми ими полями. В квантовом случае этой ситуации соответствует взаимодействие частиц с вакуумом (например, явление поляризации вакуума — см. §§ 27, 41), как со своего рода физической средой, в которой эти частицы движутся. Несмотря на возможную слабость взаимодействия, благодаря малости размеров частиц, эффекты взаимодействия оказываются большими (в пределе точечных частиц — бесконечными).

Поэтому использование концепции «голых» (т. е. невзаимодействующих даже с вакуумом) частиц оказывается неудовлетворительным, и представляется весьма желательным с самого начала иметь дело с реальными взаимодействующими частицами, не вводя искусственного представления о фиктивных свободных полях. Такая программа в известной степени реализуется в так называемом аксиоматическом построении теории квантованных полей.

Отметим в этой связи, что обращение к теории возмущений молчаливо предполагает возможность использования разложений в ряд по степеням константы (или констант) взаимодействия. Такое предположение фактически содержит две гипотезы:

а) Существование предела слабой связи у физически содержательных решений уравнений квантовой теории поля. Решения, обладающие таким пределом, назовем *адиабатическими*.

б) Аналитичность или достаточно слабую неаналитичность в окрестности нуля по константе связи у адиабатического решения.

Использование этих гипотез исторически основывается на опыте квантовой электродинамики, т. е. квантовополевой модели, описывающей взаимодействие электрически заряженных частиц с электромагнитным полем на основе механизма, изложенного в § 8.2. В этой модели константой связи является электрический заряд  $e$ , а параметр разложения теории возмущений пропорционален постоянной тонкой структуры  $\alpha$ , которая в принятой здесь системе единиц равна  $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$ .

Фактический параметр разложения квантовой электродинамики оказывается величиной порядка  $10^{-3}$  [ $\alpha/\pi \simeq 1/430$  — см. ниже (41.40), (50.9)], вследствие чего высшие члены теории возмущений здесь оказываются численно весьма малыми поправками к основным выражениям, получаемым из первых отличных от нуля вкладов (подобных рассмотренным ниже в § 26).

Такие выражения, вычисленные еще в конце 20-х годов, оказались весьма близкими к соответствующим опытным данным, вследствие чего возможность использования разложений теории возмущений в квантовой электродинамике с самого начала не вызывала сомнений.

Иными словами, гипотеза а) в квантовой электродинамике всегда представлялась вполне естественной. Сходное положение в целом имело место и в четырехфермионной теории слабых взаимодействий. Ввиду этого гипотеза а) (а с нею вместе и неявным образом гипотеза б) ) фактически принималась справедливой в совре-

менной квантовой теории поля, несмотря на многолетние бесплодные попытки получить хотя бы грубое количественное описание опытных данных по сильным взаимодействиям адронов на основе различных вариантов моделей взаимодействия мезонных и барионных полей, подобных упомянутому в § 8.1 (см. также ниже §§ 32, 36).

С современной точки зрения использование этих гипотез в квантовой теории поля в общем случае не является обоснованным. Как можно показать, исходя из весьма общих соображений (см., например, Дайсон (1953)), в начале координат — в комплексной плоскости константы связи — квантовополевые амплитуды имеют существенно особую точку. Вследствие этого они и также вероятности переходов в общем случае содержат вклады, не разлагаемые в ряды по степеням константы связи (непертурбативные вклады), а степенные разложения теории возмущений не имеют области сходимости и представляют собой асимптотические ряды в смысле Пуанкаре.

В квантовой электродинамике и современной перенормируемой теории слабых взаимодействий (объединенных в единой модели Салама — Вайнберга — Глешоу) в силу уже отмеченной чрезвычайной малости параметра разложения непертурбативные вклады оказываются пренебрежимо малыми, а обрывки расходящихся степенных рядов, получаемых из низших порядков теории возмущений, представляют достаточно надежную основу для численных аппроксимаций. В то же время в современной кварк-глюонной калибровочной модели сильных взаимодействий — квантовой хромодинамике — реальный параметр разложения  $\alpha_s$  имеет численное значение порядка 0,1. Вследствие этого для широкого круга физических явлений непертурбативные вклады оказываются существенными, а обрывки степенных рядов, получаемых по перенормируемой теории возмущений, могут служить основой для численных оценок лишь при довольно специфических обстоятельствах.

Таким образом, метод теории возмущений, развиваемый в центральной части этой книги (главы IV, V, VI), является основой для квантовополевых расчетов широкого круга процессов электромагнитных и слабых взаимодействий, а также, в некоторых случаях, процессов сильных взаимодействий.

Цель нашего ближайшего изложения — построить последовательный аппарат теории возмущений для конструктивного вычисления матричных элементов и вероятностей переходов. В соответствии с вышесказанным мы прибегнем к процедуре, основанной на исходном приближении невзаимодействующих полей.

Полученный этим путем формализм будет в основном применен (главы VI, VII) к задачам спинорной электродинамики. В § 36 мы в общих чертах рассматриваем традиционные модели пион-нуклонного взаимодействия. Приложений к задачам квантовой хромодинамики и слабых взаимодействий в этой книге мы не рассматриваем вовсе.

**20.2. Представление взаимодействия.** В случае отсутствия взаимодействия система волновых полей описывается аналогом уравнения (2) для амплитуды состояния  $\Psi(t)$

$$i \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = H_0 \Psi(t). \quad (3)$$

Выполняя формальную квадратуру, получаем

$$\Psi(t) = e^{-iH_0 t} \Phi. \quad (4)$$

Постоянная амплитуда  $\Phi$  была введена в § 9. В случае взаимодействия выражение (4) уже не будет удовлетворять уравнению движения

$$i \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = (H_0 + H_1) \Psi(t). \quad (5)$$

Однако мы можем обобщить его, полагая, что  $\Phi$  зависит от времени:

$$\Psi(t) = e^{-iH_0 t} \Phi(t). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получаем:

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = e^{iH_0 t} H_1 e^{-iH_0 t} \Phi(t). \quad (7)$$

Обсудим смысл полученного уравнения. Плотность  $H_1(\mathbf{x})$  гамильтониана взаимодействия

$$H_1 = \int H_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

входящего в правые части (5) и (7), является полиномиальной функцией от операторов полей в представлении Шредингера:

$$\begin{aligned} H_1(\mathbf{x}) &= u_\alpha(\mathbf{x}) \dots u_\omega(\mathbf{x}) = \\ &= u_\alpha(0, \mathbf{x}) \dots u_\omega(0, \mathbf{x}) = u_\alpha(\mathbf{x}) \dots u_\omega(\mathbf{x})|_{x^0=0}. \end{aligned}$$

Но, согласно (9.28)

$$\begin{aligned} e^{iH_0 t} H_1(\mathbf{x}) e^{-iH_0 t} &= (e^{iH_0 t} u_\alpha(0, \mathbf{x}) e^{-iH_0 t}) \dots (e^{iH_0 t} u_\omega(0, \mathbf{x}) e^{-iH_0 t}) = \\ &= u_\alpha(\mathbf{x}) \dots u_\omega(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

где  $u_i(\mathbf{x}) = u_i(x^0, \mathbf{x})$  — операторы поля в гейзенберговском представлении относительно гамильтониана свободного движения.

Поэтому действие оператора  $e^{iH_0 t} \dots e^{-iH_0 t}$  сводится к замене операторных функций свободных полей шредингеровского представления  $u_i(\mathbf{x}) \equiv u_i(0, \mathbf{x})$  на операторные функции свободных полей в гейзенберговском представлении  $u_i(\mathbf{x})$ .

Для новой амплитуды состояния  $\Phi(t)$ , согласно (7), имеем теперь

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = H_1(t) \Phi(t), \quad (8)$$

причем пространственная плотность  $H_1(x)$  оператора

$$H_1(t) = \int H_1(t, x) dx = \int H_1(x) dx \quad (9)$$

зависит от свободных полей в гейзенберговском представлении. Такое представление уравнения Шредингера называется *представлением взаимодействия*.

Приводя к этому представлению среднее от динамического оператора  $B$ :

$$B_t = \overset{*}{\Psi}(t) B \Psi(t) = \overset{*}{\Phi}(t) e^{iH_0 t} B e^{-iH_0 t} \Phi(t),$$

видим, что оно может быть представлено как среднее по амплитудам  $\Phi(t)$  в представлении взаимодействия от операторного выражения

$$e^{iH_0 t} B e^{-iH_0 t} = B_{вз}(t), \quad (10)$$

которое естественно считать представлением взаимодействия для динамической переменной  $B$ .

Выполненное ранее преобразование для гамильтониана взаимодействия теперь можно записать в виде

$$e^{iH_0 t} H_1 e^{-iH_0 t} = H_{вз}(t). \quad (11)$$

Мы видим, таким образом, что в представлении взаимодействия операторные выражения динамических переменных должны рассматриваться как функции операторов поля в представлении Гейзенберга для свободных полей. Иначе говоря, операторы динамических переменных выражаются формами, зависящими от функций поля

$$u(t, x) = u(x),$$

удовлетворяющих однородным уравнениям свободных полей.

Основным недостатком всех указанных представлений уравнения Шредингера, в том числе и представления взаимодействия, является выделенная роль времени, а следовательно, явная нековариантность формулировки. Этот формальный недостаток теории был устранен в особой модификации представления взаимодействия, разработанной Томонага (1946) и Швингером (1948). В указанной модификации, вместо того чтобы иметь дело с поверхностями  $t = \text{const}$  четырехмерного пространства-времени, вводят более общий класс пространственно-подобных поверхностей  $\sigma$ . Подробнее мы остановимся на этом в главе VII.

20.3. Матрица рассеяния. Заметим, что уже с помощью уравнения (8) мы можем ввести в рассмотрение очень важную характеристику системы, так называемую *матрицу рассеяния*, или *S-матрицу*. Пусть мы изучаем процесс, в начале и в конце которого имеются лишь далеко отстоящие друг от друга частицы, которые можно считать свободными.

Чтобы вычислить амплитуду вероятности для происходящих в этом процессе рассеяний и взаимных превращений частиц, рассмотрим положение, при котором взаимодействие  $H_1(t)$  адиабатически включается в бесконечно удаленном прошлом и адиабатически выключается в бесконечно удаленном будущем. Обозначая амплитуду начального состояния через  $\Phi(-\infty)$ , а амплитуду конечного состояния через  $\Phi(\infty)$ , свяжем их соотношением

$$\Phi(\infty) = S\Phi(-\infty), \quad (12)$$

в котором оператор  $S$  называется оператором рассеяния или матрицей рассеяния. Квадраты соответствующих матричных элементов  $S$  определяют вероятности переходов и эффективные сечения возможных процессов рассеяния и взаимного превращения частиц.

Для получения расчетных формул можно было бы, отправляясь от уравнения (8), построить его решение методом последовательных приближений в виде разложения по степеням малости взаимодействия. Мы получим тогда связь между  $\Phi(-\infty)$  и  $\Phi(\infty)$  типа (12), причем оператор  $S$  запишется в виде разложения

$$S = 1 - i \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(t) dt + (-i)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(t) dt \int_{-\infty}^t H_1(t') dt' + \dots$$

Именно таким путем и проводилось исследование  $S$ -матрицы в большинстве основополагающих работ по квантовой теории поля (Томонага (1946); Швингер (1948); Паули, Вилларс (1949); Дайсон (1949а, б); Салам (1951)).

По нашему мнению, однако, более целесообразно исходить из схемы, предложенной Штюкельбергом (Штюкельберг, Ривье (1949); Штюкельберг, Грин (1951)), в которой непосредственно вводится обобщенная матрица рассеяния без обращения к гамильтонову формализму и уравнению Шредингера. Вместо них для конкретизации формы  $S$ -матрицы используются явно сформулированные физические условия, важную роль среди которых играет условие причинности. Самому Штюкельбергу не удалось получить достаточно ясной и общей формулировки условия причинности, в связи с чем его идеи не получили широкого распространения.

В развитие этих идей мы изложим ниже формулировку условия причинности для  $S$ -матрицы (Боголюбов, (1955)) и основанный на нем метод построения матрицы рассеяния в квантовой теории взаимодействующих полей.

При построении теории нам, как и в обычном изложении, придется пользоваться операциями «включения» и «выключения» взаимодействия. Чтобы математически описать эту операцию, введем функцию  $g(x)$  с значениями в интервале  $(0, 1)$ , характеризующую интенсивность включения взаимодействия. В областях, где  $g(x) = 0$ , взаимодействие отсутствует, где  $g(x) = 1$  — оно включено полностью и при  $0 < g(x) < 1$  взаимодействие включено лишь



частично. Заменяя действительный лагранжиан взаимодействия  $\mathcal{L}(x)$  произведением  $\mathcal{L}(x)g(x)$ , мы приходим к *взаимодействию, «включенному с интенсивностью  $g(x)$ »*.

Пусть теперь  $g(x)$  отлична от нуля лишь в некоторой конечной пространственно-временной области. В этом случае, в достаточно отдаленных прошлом и будущем, поля являются свободными, и потому начальное и конечное состояния динамической системы можно характеризовать обычными постоянными амплитудами состояния, введенными в главе II. Эти две величины  $\Phi(-\infty)$  и  $\Phi(\infty)$  будут связаны некоторым оператором  $S(g)$ , преобразующим  $\Phi(-\infty)$  в  $\Phi(\infty)$  и зависящим от поведения функции  $g(x)$ . Фиксируя амплитуду начального состояния  $\Phi(-\infty) = \Phi$ , мы можем рассматривать конечную амплитуду как функционал от  $g$ :

$$\Phi(\infty) = \Phi(g) = S(g)\Phi. \quad (13)$$

Согласно этому определению  $S(g)$  естественно интерпретировать как матрицу рассеяния для случая взаимодействия, включенного с интенсивностью  $g$ . Реальный случай, когда взаимодействие включено полностью во всем пространстве-времени, должен в данной схеме рассматриваться с помощью предельного перехода, при котором область, где  $g = 1$ , неограниченно расширяется и в пределе охватывает все пространство-время. В этом случае обычная матрица рассеяния  $S$  может быть определена в виде

$$S = S(1). \quad (14)$$

#### 20.4. Релятивистская ковариантность и унитарность $S$ -матрицы.

Сформулируем теперь ряд основных физических условий, которым должна удовлетворять матрица  $S$ . Важным физическим требованием, как всегда, является *условие релятивистской ковариантности*. Для его явной формулировки рассмотрим преобразование  $L$  из неоднородной группы Лоренца:

$$x \rightarrow x' = Lx. \quad (15)$$

При отсутствии взаимодействия в теории свободного поля закон преобразования амплитуды состояния, соответствующий преобразованию (15), согласно (9.12) имел вид

$$\Phi' = U_L \Phi. \quad (16)$$

Теперь же, когда  $\Phi = \Phi(g)$ , необходимо учесть также, что преобразованию (15) подвергается сама функция  $g(x)$ , которую можно рассматривать как некоторое «классическое поле»; так как область взаимодействия, описываемая функцией  $g$ , при преобразовании (15) остается неизменной, то переход в аргументе  $g$  к новым координатам дает:

$$g(x) \rightarrow Lg(x) = g(L^{-1}x). \quad (17)$$

Поэтому закон преобразования амплитуды  $\Phi(g)$  имеет вид:

$$\Phi(g) \rightarrow \Phi'(Lg) = U_L \Phi(g). \quad (18)$$

Из соображений релятивистской ковариантности нужно потребовать, чтобы закон преобразования (13) от начальной амплитуды к конечной не зависел от системы отсчета, т. е. чтобы

$$\Phi'(g) = S(g) \Phi'. \quad (19)$$

Внося сюда (16) и (18) со сдвинутым ( $Lg \rightarrow g$ ) аргументом, находим с учетом (13)

$$U_L S(L^{-1}g) \Phi = S(g) U_L \Phi. \quad (20)$$

Ввиду произвольности амплитуды начального состояния  $\Phi$  это выражение можно записать в операторной форме:

$$U_L S(L^{-1}g) = S(g) U_L,$$

или, сдвигая аргументы на  $L$ , умножая справа на  $U_L^{-1}$  и учитывая унитарность  $U_L$ :

$$S(Lg) = U_L S(g) U_L^{-1} = U_L S(g) \overset{\dagger}{U}_L. \quad (21)$$

Формула (21) и выражает *условие ковариантности оператора  $S(g)$* .

Сформулируем теперь другое общее обязательное требование — требование сохранения нормы волновых функций. Применительно к данному случаю мы должны потребовать

$$\overset{*}{\Phi}(g) \Phi(g) = \overset{*}{\Phi} \Phi,$$

откуда вытекает, что

$$S(g) \overset{\dagger}{S}(g) = \overset{\dagger}{S}(g) S(g) = 1, \quad (22)$$

т. е. оператор  $S(g)$  должен быть *унитарным*.

**20.5. Условие причинности.** Необходимо обеспечить также выполнение условия причинности, в соответствии с которым какое-либо событие, происшедшее в системе, может оказать влияние на ход эволюции системы лишь в будущем и не может оказать влияния на поведение системы в прошлом, во времена, предшествовавшие данному событию. Мы должны поэтому потребовать, чтобы изменение закона взаимодействия в какой-либо пространственно-временной области могло оказать влияние на эволюцию системы лишь в последующие моменты времени.

Чтобы сформулировать *условие причинности в явном виде*, рассмотрим сначала случай, когда область  $G$  пространства-времени, в которой функция  $g(x)$  отлична от нуля, распадается на две отдельные подобласти  $G_1$  и  $G_2$  такие, что все точки одной из них ( $G_1$ ) лежат в прошлом относительно некоторого момента времени  $t$ , а все точки другой ( $G_2$ ) — в будущем относительно  $t$ . Функция

$g(x)$  при этом может быть представлена в виде суммы двух функций

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x), \quad (23)$$

одна из которых ( $g_1$ ) отлична от нуля лишь в  $G_1$ , а вторая ( $g_2$ ) — лишь в  $G_2$ .

В момент времени  $t$  можно определить состояние, характеризующееся амплитудой  $\Phi_t$ , которая по соображениям причинности не должна зависеть от взаимодействия в области  $G_2$  и может быть поэтому представлена в виде

$$\Phi_t = S(g_1)\Phi, \quad (24)$$

где  $S(g_1)$  — матрица рассеяния для случая, когда взаимодействие включено с интенсивностью  $g_1(x)$ . Конечное состояние  $\Phi(g)$  может быть получено из  $\Phi_t$  с помощью оператора  $S(g_2)$ , описывающего взаимодействие в области  $G_2$ :

$$\Phi(g) = S(g_2)\Phi_t. \quad (25)$$

Сравнивая (23) — (25) с (13), находим, что

$$S(g_1 + g_2) = S(g_2)S(g_1) \text{ при } G_2 > G_1. \quad (26)$$

(Знак  $G_2 > G_1$  обозначает, что все точки области  $G_2$  расположены по времени позже всех точек области  $G_1$ .) Соотношение (26) является формулировкой принципа причинности для случая  $G_2 > G_1$ .

Рассмотрим, далее, два случая, которые отличаются друг от друга видом взаимодействия в области  $G_2$  и описываются одной и той же функцией в  $G_1$ , именно

$$g'(x) = g_2'(x) + g_1(x), \quad g''(x) = g_2''(x) + g_1(x).$$

Составляя выражение  $S(g'') \overset{\dagger}{S}(g')$ , убеждаемся, что оно не зависит от поведения функций  $g''$  и  $g'$  в области  $G_1$ , так как согласно (26)

$$\overset{\dagger}{S}(g_1 + g_2) = \overset{\dagger}{S}(g_1) \overset{\dagger}{S}(g_2),$$

и с учетом свойства унитарности матрицы  $S$  получаем:

$$S(g'') \overset{\dagger}{S}(g') = S(g_2'') S(g_1) \overset{\dagger}{S}(g_1) \overset{\dagger}{S}(g_2') = S(g_2'') \overset{\dagger}{S}(g_2').$$

Таким образом, произведение  $S(g'') \overset{\dagger}{S}(g')$  действительно не зависит от поведения функции  $g$  в области  $G_1$ . Это происходит потому, что содержащаяся в  $S(g'')$  зависимость от состояния системы до момента времени  $t$  уничтожается соответствующей частью оператора  $\overset{\dagger}{S}(g')$ .

Поэтому и в более общем случае мы примем следующую формулировку условия причинности:

«если имеются две функции  $g''(y)$  и  $g'(y)$ , совпадающие при  $y^0$ , меньшем некоторого  $t$ , то произведение  $S(g'') \dot{S}(g')$  не должно зависеть от состояния системы при  $y_0 < t$ ».

Для дальнейшего целесообразно сформулировать условие причинности в дифференциальной форме.

Нам придется часто пользоваться понятием функциональной производной, представляющим естественное обобщение понятия частной производной. Как известно, частная производная  $\partial f / \partial z_i$  некоторой функции  $n$  переменных  $z_1, \dots, z_n$  может быть определена как коэффициент при  $dz_i$  в сумме

$$df = \sum_{(1 \leq i \leq n)} A_i dz_i, \quad (27)$$

представляющей дифференциал этой функции.

Пусть теперь мы имеем некоторый функционал  $I(u)$ , вариация которого  $\delta I(u)$ , определяемая как главная часть приращения  $I(u + \delta u) - I(u)$ , может быть представлена интегралом вида

$$\delta I(u) = \int_G A(x, u) \delta u dx,$$

где  $A$  является функционалом  $u$ , зависящим от положения точки  $x$  в области  $G$ :

$$A = A(x, u),$$

подобно тому как в сумме (27)  $A_i$  был функцией  $z_1, \dots, z_n$ , зависящей от индекса  $i$ . Тогда по аналогии с вышеприведенным определением частной производной введем понятие функциональной производной  $\delta I(u) / \delta u(x)$  функционала  $I(u)$  по  $u$  в точке  $x$ , определив ее соотношением

$$\frac{\delta I(u)}{\delta u(x)} = A(x, u).$$

Таким же образом можно ввести и функциональные производные высших порядков, причем легко видеть, что функциональные производные обладают основными свойствами обычных производных.

Если положить

$$g'(y) = g(y) \text{ и } g''(y) = g(y) + \delta g(y),$$

где  $\delta g(y)$  — бесконечно малая вариация функции  $g(y)$ , отличная от нуля лишь при  $y^0 > t$ , то матрица  $S(g'')$  может быть представлена в виде

$$S(g'') = S(g) + \delta S(g), \quad (28)$$

причем

$$\delta S(g) = \int_{y^0 > t} \frac{\delta S}{\delta g(y)} \delta g(y) dy.$$

Теперь видно, что выражение

$$S(g'') \dot{S}(g') = S(g) \dot{S}(g) + \delta S(g) \dot{S}(g) = 1 + \delta S(g) \dot{S}(g)$$

не зависит от поведения функции  $g(x)$  при  $x^0 < t < y^0$ .

Переходя к вариационной производной, мы можем поэтому сформулировать условие причинности как условие независимости выражения

$$\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} \overset{\dagger}{S}(g) \quad (29)$$

от поведения функции  $g(x)$  в точке  $x$  при  $x < y$ . По соображениям ковариантности отсюда также следует, что оператор (29) не может зависеть от поведения функции  $g(x)$  и при  $x \sim y$  (запись  $x \sim y$  означает, что точки  $x$  и  $y$  разделены пространственно-подобным интервалом).

Условие причинности, очевидно, можно записать в виде

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \left( \frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} \overset{\dagger}{S}(g) \right) = 0 \quad \text{при } x \lesssim y. \quad (30)$$

Соотношение (30) представляет собой наиболее удобную для дальнейшего формулировку принципа причинности в дифференциальной форме.

Мы имеем, таким образом, условия релятивистской ковариантности (21), унитарности (22) и причинности (30), которые в совокупности представляют достаточное основание для построения  $S$ -матрицы. В § 21, используя эти условия и соображения соответствия, мы изложим способ явного определения коэффициентов разложения  $S(g)$  в функциональный ряд по  $g(x)$ . Отметим еще, что к этим условиям следовало бы добавить требование положительности энергии стационарных состояний. В теории свободных полей выполнение этого требования рассматривалось особо. Однако на данной стадии изложения мы еще не можем сформулировать это условие для теории взаимодействующих полей, так как ограничение рамками теории возмущений не позволяет рассматривать связанные состояния.

**20.6. «Классические поля» как функциональные аргументы.** Отметим в заключение, что в принятой нами схеме построения теории функция  $g$ , характеризующая степень включения взаимодействия, играет роль некоторого «классического поля», позволяющего рассматривать различные области в пространстве-времени.

Обычная матрица рассеяния (14), соответствующая взаимодействию квантовых волновых полей во всем пространстве-времени, не зависит от каких-либо обычных функций, и потому ее матричные элементы не содержат никаких функциональных зависимостей. Введение в лагранжиан взаимодействия какой-либо некантованной функции превращает  $S$ -матрицу и ее матричные элементы в функционалы. Вычисляя функциональные производные этих функционалов, можно ввести в рассмотрение пространственно-временные свойства различных величин, входящих в теорию (как это было только что продемонстрировано при формулировке условия причинности). При этом «классические поля» (типа  $g$ ) играют роль вспо-

могательных переменных в промежуточных рассуждениях и обычно исключаются из окончательных выражений соответствующим предельным процессом (например,  $g \rightarrow 1$ ).

Классическое поле  $g(x)$ , введенное выше в виде множителя к плотности лагранжиана взаимодействия (17), представляет удобное математическое средство формального разложения матрицы рассеяния по степеням взаимодействия, построение которого мы выполним в § 21.

Такой способ введения вспомогательного поля, разумеется, не является единственным. В некоторых случаях оказывается удобным ввести подобное поле более «физическим» образом, например в виде заданного внешнего поля  $u^{\text{ext}}(x)$  или заданного внешнего тока каких-либо частиц  $J^{\text{ext}}(x)$ . Так, при получении уравнений Швингера для функций Грина в спинорной электродинамике (глава VI) в лагранжиан взаимодействия \*)  $\mathcal{L}(x)$  вводится внешний некантованный электромагнитный потенциал  $A_n^{\text{ext}}(x)$ , в результате чего  $\mathcal{L}(x)$  принимает вид

$$\mathcal{L}(x) = e : \bar{\psi}(x) \gamma^n \psi(x) [A_n(x) + A_n^{\text{ext}}(x)] :.$$

Здесь классическое поле  $A^{\text{ext}}$  играет роль вспомогательного функционального аргумента, облегчающего анализ пространственно-временных свойств теории, причем в отличие от  $g(x)$  поле  $A^{\text{ext}}$  (точнее, его окончательное предельное значение) может иметь непосредственный физический смысл. Матрица рассеяния в этом случае оказывается функционалом от  $A^{\text{ext}}$ , и, повторяя без особых изменений рассуждение, приводящее к (30), можно получить для этого случая

$$\frac{\delta}{\delta A_n^{\text{ext}}(x)} \left[ \frac{\delta S(A^{\text{ext}})}{\delta A_m^{\text{ext}}(y)} \dot{S}(A^{\text{ext}}) \right] = 0 \text{ при } x \lesssim y. \quad (31)$$

Аналогично этому не представляет труда переформулировать условие причинности при любом другом способе введения классических полей.

## § 21. Лагранжиан взаимодействия и $S$ -матрица

**21.1. Разложение  $S$ -матрицы по степеням взаимодействия.** Приступим к построению матрицы рассеяния с помощью лагранжиана взаимодействия  $\mathcal{L}(x)$ . Будем искать  $S(g)$  в виде формального функционального разложения по степеням  $g(x)$ :

$$S(g) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (1)$$

\*) Всюду в дальнейшем под  $\mathcal{L}$  будет подразумеваться лагранжиан взаимодействия, который ранее обозначался  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$ .

в котором  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  являются операторными выражениями, зависящими от полных функций поля и их частных производных в точках  $x_1, \dots, x_n$ . Для обеспечения скалярного характера  $S_n$  будем также предполагать, что фермиевские операторы поля входят в  $S_n$  лишь в четных комбинациях. Иначе говоря, потребуем, чтобы  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  являлись полилокальными операторами в смысле, указанном в § 17. Следует подчеркнуть, что требование зависимости  $S_n$  от функций поля в целом, а не от положительно- и отрицательно-частотных частей по отдельности представляет собой особое физическое условие. При его выполнении имеет место соотношение

$$[S_n(x_1, \dots, x_n), S_m(y_1, \dots, y_m)] = 0, \quad (2)$$

когда все  $x_i$  пространственно-подобны всем  $y_i$ . Поэтому, если две функции  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$  локализованы в таких пространственно-временных областях  $G_1$  и  $G_2$ , что любая точка одной области пространственно-подобна всем точкам другой области, то  $S(g_1)$  будет коммутировать с  $S(g_2)$ . Этим, в сущности, выражается тот факт (также являющийся проявлением принципа причинности), что сигнал не может распространяться со скоростью, большей скорости света, и что процессы включения взаимодействия во взаимно пространственно-подобных областях  $G_1$  и  $G_2$  не интерферируют друг с другом. Мы предполагаем, что  $S_n$  является полилокальным оператором, именно для выполнения этого важного физического условия.

Чтобы обеспечить сходимость хотя бы некоторых членов разложения (1), положим, что  $S_n$  являются интегрируемыми операторными функциями. Действительно, тогда при достаточно гладких и достаточно быстро убывающих на бесконечности функциях  $g(x)$  отдельные интегралы в (1) будут сходиться. Разумеется, подобная сходимость не имеет отношения к сходимости всего ряда в целом. Как уже отмечалось в § 20.1, из-за отсутствия надлежащей аналитичности по константе связи (см. обзор Казакова, Ширкова (1980)) имеются основания считать, что этот ряд является расходящимся. В лучшем случае при малости взаимодействия можно надеяться, что, взяв некоторое небольшое число членов в разложении, мы получим приближение тем более точное, чем слабее взаимодействие. Иначе говоря, в некоторых случаях можно рассматривать ряд (1) как *источник асимптотических приближений*. Одним из таких случаев, важным в практическом отношении, является электродинамика.

Однако исследование формального разложения (1) представляет большой интерес и при заведомо не слабом взаимодействии (например, мезон-нуклонном), так как при этом можно довольно просто выяснить некоторые качественные и количественные свойства матрицы  $S(g)$ , с тем чтобы затем попытаться установить их на более строгой основе. Следовательно, изучение этого формального ряда должно иметь определенную эвристическую ценность, тем большую, что предпринимавшиеся до сих пор попытки выхода за рамки

теории возмущений привели пока лишь к ограниченным результатам. В дальнейшем (см. главы VIII и X) будет указан ряд соображений, с помощью которых, быть может, удастся построить теорию взаимодействующих полей, не прибегая к формальным разложениям такого рода.

Возвращаясь к выражению (1), видим, что без ограничения общности  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  можно считать симметричными функциями своих аргументов  $x_1, \dots, x_n$ , так как весовые функции  $g(x_1), \dots, g(x_n)$  входят симметричным образом.

**21.2. Условия ковариантности, унитарности и причинности для  $S_n$ .** Для определения конкретного вида функций  $S_n$  раскроем условия, которым удовлетворяет матрица  $S(g)$ .

Из условия релятивистской ковариантности для  $S(g)$  (20.21) имеем:

$$\int U_L S_n(x_1, \dots, x_n) \overset{\dagger}{U}_L g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ = \int S_n(x_1, \dots, x_n) g(L^{-1}x_1) \dots g(L^{-1}x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (3)$$

Производя в правой части замену переменных  $x \rightarrow Lx$ , получаем:

$$\int U_L S_n(x_1, \dots, x_n) \overset{\dagger}{U}_L g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ = \int S_n(Lx_1, \dots, Lx_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

откуда приходим к условию лоренцевой ковариантности для  $S_n$ :

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} U_L S_n(x_1, \dots, x_n) \overset{\dagger}{U}_L &= S_n(Lx_1, \dots, Lx_n) \\ S_n(x_1, \dots, x_n) &= \overset{\dagger}{U}_L S_n(Lx_1, \dots, Lx_n) U_L. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Для учета унитарности  $S$ -матрицы (20.22) умножим разложение (1) на сопряженное ему

$$\overset{\dagger}{S}(g) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int \overset{\dagger}{S}_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (5)$$

и, обозначив для симметричной формы записи

$$S_0 = 1,$$

получим:

$$1 = \sum_{(k, m \geq 0)} \frac{1}{k!m!} \int S_k(x_1, \dots, x_k) g(x_1) \dots g(x_k) dx_1 \dots dx_k \times \\ \times \int \overset{\dagger}{S}_m(x_{k+1}, \dots, x_{k+m}) g(x_{k+1}) \dots g(x_{k+m}) dx_{k+1} \dots dx_{k+m} = \\ = \sum_{(k, n)} \frac{1}{k!(n-k)!} \int S_k(x_1, \dots, x_k) \overset{\dagger}{S}_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_n) g(x_1) \dots \\ \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (6)$$



Собирая в (6) члены одинаковой «степени» по  $g(x)$ , при  $n = 0$  получаем тождество ( $1 = 1$ ), а при  $n > 0$  находим:

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k! (n-k)!} \int S_k(x_1, \dots, x_k) \overset{\dagger}{S}_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_n) g(x_1) \dots \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n = 0. \quad (7)$$

При произвольных  $g(x)$  отсюда еще нельзя сделать вывода о равенстве нулю выражения

$$\sum_k \frac{1}{k! (n-k)!} S_k(x_1, \dots, x_k) \overset{\dagger}{S}_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (8)$$

Этот вывод можно было бы сделать, если выражение (8) оказалось бы симметричным по всем аргументам  $x_1, \dots, x_n$ . В действительности же в каждом члене (8) симметрия существует лишь внутри двух групп аргументов:  $x_1, \dots, x_k$  и  $x_{k+1}, \dots, x_n$ . Для полной симметризации выражения типа (8) введем символ

$$P\left(\frac{x_1, \dots, x_k}{x_{k+1}, \dots, x_n}\right),$$

обозначающий сумму по всем  $\frac{n!}{k! (n-k)!}$  разбиениям совокупности точек  $x_1, \dots, x_n$  на две совокупности  $k$  и  $n - k$  точек. При этом перестановки внутри каждой из совокупностей не учитываются, так как функции  $S_k$  симметричны по своим аргументам. Например,

$$P\left(\frac{x_1}{x_2}\right) S_1(x_1) S_1(x_2) = S_1(x_1) S_1(x_2) + S_1(x_2) S_1(x_1),$$

$$P\left(\frac{x_1, x_2}{x_3}\right) S_2(x_1, x_2) S_1(x_3) = = S_2(x_1, x_2) S_1(x_3) + S_2(x_1, x_3) S_1(x_2) + S_2(x_2, x_3) S_1(x_1).$$

Для симметризации (7) перепишем его  $n!$  раз, меняя обозначения аргументов так, чтобы совокупность точек  $x_1, \dots, x_n$  устанавливалась в аргументах функций  $S_k$  и  $\overset{\dagger}{S}_{n-k}$  каждый раз по-новому. Складывая полученные соотношения, благодаря неизменности весового множителя  $g(x_1) \dots g(x_n)$  получим:

$$\sum_k \int P\left(\frac{x_1, \dots, x_k}{x_{k+1}, \dots, x_n}\right) S_k(x_1, \dots, x_k) \overset{\dagger}{S}_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_n) g(x_1) \dots \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n = 0,$$

откуда следует равенство нулю выражения

$$\sum_{0 \leq k \leq n} P\left(\frac{x_1, \dots, x_k}{x_{k+1}, \dots, x_n}\right) S_k(x_1, \dots, x_k) \overset{\dagger}{S}_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_n)$$

ввиду его симметричности по всем  $n$  аргументам. Вспоминая, что  $S_0 = 1$ , имеем отсюда:

$$S_n(x_1, \dots, x_n) + \overset{\dagger}{S}_n(x_1, \dots, x_n) + \\ + \sum_{(1 \leq k \leq n-1)} P\left(\frac{x_1, \dots, x_k}{x_{k+1}, \dots, x_n}\right) S_k(x_1, \dots, x_k) \overset{\dagger}{S}_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_n) = 0. \quad (9)$$

Обратимся теперь к условию причинности (20.30). Заметим, прежде всего, что удобнее иметь дело не с величиной

$$\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} \overset{\dagger}{S}(g),$$

которая в силу условия унитарности

$$\frac{\delta}{\delta g(y)} (S \overset{\dagger}{S}) = \frac{\delta S}{\delta g(y)} \overset{\dagger}{S} + S \frac{\delta \overset{\dagger}{S}}{\delta g(y)} = 0$$

антиэрмитова, а с очевидно эрмитовой величиной

$$H(y; g) = i \frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} \overset{\dagger}{S}(g). \quad (10)$$

Используя (1), находим:

$$H(y; g) = i \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \int S_{n+1}(y, x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n \times \\ \times \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \int \overset{\dagger}{S}_m(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) g(x_{n+1}) \dots g(x_{n+m}) dx_{n+1} \dots dx_{n+m} = \\ = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \int H_n(y, x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (11)$$

где введены величины

$$H_n(y, x_1, \dots, x_n) = \\ = i \sum_{0 \leq k \leq n} P\left(\frac{x_1, \dots, x_k}{x_{k+1}, \dots, x_n}\right) S_{k+1}(y, x_1, \dots, x_k) \overset{\dagger}{S}_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_n) = \\ = i S_{n+1}(y, x_1, \dots, x_n) + \\ + i \sum_{0 \leq k \leq n-1} P\left(\frac{x_1, \dots, x_k}{x_{k+1}, \dots, x_n}\right) S_{k+1}(y, x_1, \dots, x_k) \overset{\dagger}{S}_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_n), \quad (12)$$

симметричные по всем своим аргументам, за исключением первого. Вычисляя теперь функциональную производную  $\delta/\delta g(x)$  от выражения (11), получаем:

$$i \frac{\delta}{\delta g(x)} \left( \frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} \overset{\dagger}{S}(g) \right) = \\ = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \int H_n(y, x, x_1, \dots, x_{n-1}) g(x_1) \dots g(x_{n-1}) dx_1 \dots dx_{n-1},$$

откуда в силу условия причинности (20.30) и на основании симметричности функций  $H_n$  по всем аргументам, кроме первого, следует, что

$$H_n(y, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (13)$$

если хотя бы для одного  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ )  $y \gtrsim x_j$ .

**21.3. Определение явного вида  $S_1(x)$  и  $S_2(x, y)$ .** Из условий ковариантности, унитарности и причинности для матрицы  $S(g)$  в целом мы получили условия ковариантности, унитарности и причинности для функций  $S_n(x_1, \dots, x_n)$ . Покажем теперь, что совокупность этих условий (4), (9), (13) вместе с дополнительными соображениями, представляющими принцип соответствия, достаточна для определения явного вида функций  $S_n(x_1, \dots, x_n)$ .

При этом оказывается, что формулы (9) и (13), рассматриваемые как рекуррентные соотношения, позволяют определить любую функцию  $S_n$  через «предыдущие»  $S_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ), причем условие унитарности (9) служит для определения эрмитовой части функции  $S_n$ , а условие причинности (13) определяет антиэрмитову часть  $S_n$ . Поэтому построение функций  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  можно провести методом индукции, для чего, однако, необходимо иметь явное выражение  $S_1(x)$ . Эта функция может быть определена из соображений соответствия.

Итак, рассмотрим функцию  $S_1(x)$ . Условие причинности еще не может быть сформулировано для одной функции, но, как мы увидим ниже, из условия причинности при  $n = 1$  вытекает, что  $S_1(x)$  и  $S_1(y)$  должны коммутировать в пространственно-подобных точках:

$$[S_1(x), S_1(y)] = 0 \quad \text{при } x \sim y, \quad (14)$$

для чего, очевидно, достаточно, чтобы  $S_1(x)$  удовлетворяла условию локальности (в смысле определения, данного в § 17).

Записывая условие унитарности при  $n = 1$ , имеем:

$$S_1(x) + S_1^\dagger(x) = 0, \quad (15)$$

откуда следует, что  $S_1(x)$  может быть представлена в виде

$$S_1(x) = i\Lambda_1(x), \quad (16)$$

где  $\Lambda_1(x)$  — эрмитов оператор. Наконец, условие релятивистской ковариантности (4) дает:

$$S_1(x) = U_L^\dagger S_1(Lx) U_L. \quad (17)$$

Таким образом,  $\Lambda_1(x)$  должен быть эрмитовым релятивистски ковариантным оператором, удовлетворяющим условию локальности.

Свяжем теперь  $\Lambda_1(x)$  с лагранжианом взаимодействия  $\mathcal{L}(x)$ . Как известно, в классической теории взаимодействие учитывается с помощью добавления к лагранжиану свободных полей  $\mathcal{L}_0(x)$

лагранжиана взаимодействия  $\mathcal{L}(x)$ , и «уравнения движения» могут быть получены с помощью принципа стационарного действия. Рассмотрим действие  $A$  системы классических полей для случая, когда взаимодействие включено с интенсивностью  $g(x)$ . Имеем тогда:

$$A = \int \mathcal{L}_0(x) dx + \int \mathcal{L}(x) g(x) dx, \quad (18)$$

где в  $\mathcal{L}_0$  и  $\mathcal{L}$  стоят функции поля, удовлетворяющие соответствующим уравнениям движения. В частности, считая  $g(x)$  бесконечно малой первого порядка, видим, что эти функции поля будут отличаться от функций свободных полей также на бесконечно малые первого порядка. С другой стороны, поскольку уравнения свободных полей получаются из условия

$$\delta \int \mathcal{L}_0(x) dx = 0,$$

то, если под знаком первого интеграла (18) функции поля записаны с точностью до бесконечно малых первого порядка, это вызовет в значении интеграла  $\int \mathcal{L}_0 dx$  ошибку второго порядка малости.

Поэтому при включении взаимодействия с бесконечно малой интенсивностью  $g(x)$  действие в системе изменится на величину  $\int \mathcal{L}(x) g(x) dx$ , в которой  $\mathcal{L}(x)$  зависит от волновых функций свободного поля. Как известно, в квазиклассическом случае решение обычного уравнения Шредингера для волновой функции  $\psi$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$$

принимает вид  $\psi = \exp(iA)$ , где  $A$  — действие системы. Переходу от невозмущенного выражения

$$A_0 = \int \mathcal{L}_0(x) dx \quad (19)$$

к действию (18), очевидно, будет соответствовать преобразование волновой функции

$$\psi_0 = e^{iA_0} \rightarrow \psi = e^{iA} = e^{i \int \mathcal{L}(x) g(x) dx} \psi_0.$$

Таким образом, с учетом малости величины  $g$  этому переходу соответствует следующее преобразование волновой функции:

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi + \delta\psi, \quad \delta\psi = i \int \mathcal{L}(x) g(x) dx \psi.$$

Исходя из соображений *соответствия*, мы потребуем, чтобы закон преобразования вторично квантованной амплитуды состояния  $\Phi$  имел тот же самый вид, т. е. чтобы

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi + \delta\Phi, \quad \delta\Phi = i \int \mathcal{L}(x) g(x) dx \Phi.$$

Иначе говоря, мы полагаем, что при бесконечно малом  $g$  матрица  $S(g)$  будет иметь вид

$$S(g) = 1 + i \int \mathcal{L}(x) g(x) dx.$$

Сравнивая это выражение с (1), видим, что  $S_1(x)$  действительно имеет вид (16), где  $\Lambda_1(x)$  равно лагранжиану взаимодействия:

$$S_1(x) = i\mathcal{L}(x). \quad (20)$$

Из соотношений (14), (15), (17) теперь следует, что лагранжиан взаимодействия должен быть локальной, эрмитовой и релятивистски ковариантной комбинацией операторных функций поля. Заметим здесь, что, как легко показать, скалярные комбинации операторных функций, удовлетворяющих условию (9.23), автоматически приводят к удовлетворению условия релятивистской ковариантности, тогда как условия эрмитовости

$$\mathcal{L}^\dagger(x) = \mathcal{L}(x) \quad (21)$$

и локальности

$$[\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)] = 0 \quad \text{при } x \sim y \quad (22)$$

представляют собой дополнительные условия, ограничивающие выбор лагранжиана взаимодействия.

Перейдем теперь к определению  $S_2(x, y)$ . Из условия причинности (13) для  $n = 1$  получаем при  $x \gtrsim y$

$$H_1(x, y) = iS_2(x, y) + iS_1(x) \overset{\dagger}{S}_1(y) = 0,$$

откуда, принимая во внимание (15), находим:

$$S_2(x, y) = -\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) \quad \text{при } x \gtrsim y. \quad (23)$$

Ввиду симметричности  $S_2$  имеем также:

$$S_2(x, y) = S_2(y, x) = -\mathcal{L}(y) \mathcal{L}(x) \quad \text{при } y \gtrsim x. \quad (24)$$

Области определений (23), (24) перекрываются при  $x \sim y$ , что приводит к условию совместности в виде (14) или (22), представляющем собой условие локальности для  $S_1$  или  $\mathcal{L}$ .

Итак, определение функции  $S_2(x, y)$  имеет следующий вид:

$$S_2(x, y) = \begin{cases} -\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) & (x \gtrsim y), \\ -\mathcal{L}(y) \mathcal{L}(x) & (y \gtrsim x). \end{cases} \quad (25)$$

Путем эрмитова сопряжения получаем также с учетом (21)

$$\overset{\dagger}{S}_2(x, y) = \begin{cases} -\mathcal{L}(y) \mathcal{L}(x) & (x \gtrsim y), \\ -\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) & (y \gtrsim x). \end{cases} \quad (26)$$

Симметричность и полилокальность  $S_2(x, y)$  следуют из формы записи. Ясно, что (25) удовлетворяет условию ковариантности. Нетрудно убедиться также в выполнении условия унитарности.

В соответствии с (9) нужно проверить соотношение

$$S_2(x, y) + \overset{\dagger}{S}_2(x, y) + S_1(x) \overset{\dagger}{S}_1(y) + S_1(y) \overset{\dagger}{S}_1(x) = 0.$$

Его справедливость непосредственно следует из (20), (21), (25), (26). Действительно, имеем, например, при  $x \gtrsim y$

$$\begin{aligned} S_2(x, y) + \overset{\dagger}{S}_2(x, y) + S_1(x) \overset{\dagger}{S}_1(y) + S_1(y) \overset{\dagger}{S}_1(x) = \\ = -\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(y) \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(y) \mathcal{L}(x) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично убеждаемся в справедливости этого соотношения при  $y \gtrsim x$ . Таким образом, установлено, что выражение (25) удовлетворяет всем налагаемым на  $S_2$  требованиям.

**21.4. Хронологическое произведение локальных операторов.** Перед тем как приступить к дальнейшему построению функций  $S_k$  ( $k = 3, 4, \dots$ ), целесообразно ввести понятие *упорядоченного* или *хронологического произведения операторов*. Мы введем его пока лишь для локальных операторов. Хронологическое произведение ряда локальных операторов  $\Lambda_1(x_1), \dots, \Lambda_n(x_n)$  обозначается символом  $T(\Lambda_1(x_1) \dots \Lambda_n(x_n))$  и, по определению, равно обычному произведению этих операторов, взятых в определенном порядке, соответствующем убыванию временных компонент аргументов сомножителей слева направо, т. е.

$$T(\Lambda_1(x_1) \dots \Lambda_n(x_n)) = \Lambda_{i_1}(x_{i_1}) \Lambda_{i_2}(x_{i_2}) \dots \Lambda_{i_n}(x_{i_n}), \quad (27)$$

где последовательности  $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$  соответствует

$$x_{j_1}^0 \gtrsim x_{j_2}^0 \gtrsim \dots \gtrsim x_{j_n}^0.$$

Для краткости мы будем называть хронологическое произведение  $T$ -произведением.

Нам понадобится также понятие *антихронологического произведения*, соответствующего возрастанию временных компонент аргументов слева направо. Беря, например, эрмитово сопряжение от правой части (27), получим выражение

$$\overset{\dagger}{\Lambda}_{i_n}(x_{i_n}) \dots \overset{\dagger}{\Lambda}_{i_1}(x_{i_1}) \quad (x_{i_n}^0 \leq x_{i_{n-1}}^0 \leq \dots \leq x_{i_1}^0),$$

которое удобно назвать антихронологическим произведением (или  $\overset{\dagger}{T}$ -произведением) операторов  $\overset{\dagger}{\Lambda}_1(x_1), \dots, \overset{\dagger}{\Lambda}_n(x_n)$ . Положим поэтому

$$\begin{aligned} \overset{\dagger}{T}(\Lambda_1(x_1) \dots \Lambda_n(x_n)) = \Lambda_{i_1}(x_{i_1}) \Lambda_{i_2}(x_{i_2}) \dots \Lambda_{i_n}(x_{i_n}) \\ (x_{i_1}^0 \leq x_{i_2}^0 \leq \dots \leq x_{i_n}^0). \end{aligned} \quad (28)$$

Покажем, что определение  $T$ -произведения ковариантно, не смотря на выделенную роль времени. Для значения  $T$ -произведения существен хронологический порядок точек  $x_1, \dots, x_n$ , кото-

рый может меняться при переходе от одной лоренцевой системы отсчета к другой при лоренцевом повороте. На первый взгляд, такой переход может изменить значение  $T$ -произведения, однако легко убедиться, что этого не происходит. В самом деле, представим, что указанное преобразование совершается посредством большого числа малых преобразований, что всегда возможно ввиду непрерывного характера лоренцева поворота. Процесс изменения хронологического порядка точек  $x_1, \dots, x_n$  разобьется при этом на некоторое число этапов, в каждом из которых будет одновременно меняться временной порядок внутри некоторой группы  $x_j, \dots, x_k$  (двух или более) точек. Но хронологический порядок нескольких точек  $x_j, \dots, x_k$  может быть изменен лоренцевым поворотом лишь в случае взаимного пространственного подобия этих точек. Соответствующие операторы  $\Lambda_j(x_j), \dots, \Lambda_k(x_k)$  в силу свойства локальности в этом случае коммутируют между собой и порядок их несуществен. Поэтому на каждом этапе преобразования значение  $T$ -произведения не изменится, а следовательно, оно не изменится и вообще.

Нетрудно заметить также, что согласно определению (27) локальные операторы можно коммутировать под знаком  $T$ -произведения, не меняя его значения. Отсюда следует, в частности, что если все операторы  $\Lambda$  одинаковы, то  $T$ -произведение оказывается симметричной функцией своих аргументов.

Возвращаясь к (25), видим, что с помощью  $T$ -произведения  $S_2$  можно записать в виде

$$S_2(x, y) = -T(\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y)). \quad (29)$$

Соответственно (26) принимает вид

$$\dot{S}_2(x, y) = -\dot{T}(\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y)). \quad (30)$$

**21.5. Определение функций  $S_n$  при любом  $n$ .** Покажем теперь, что выражение

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T(\mathcal{L}(x_1)\dots\mathcal{L}(x_n)), \quad (31)$$

являющееся естественным обобщением формул (20) и (29), удовлетворяет всем налагаемым на  $S_n$  формальным условиям. Выполнение условий симметрии, ковариантности и полилокальности теперь очевидно, и проверки требуют лишь условия унитарности и причинности.

Ее удобнее провести, пользуясь не (31), а выражением для оператора  $S(g)$  в целом. Подставляя (31) в (1), получаем:

$$S(g) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n!} \int T(\mathcal{L}(x_1)\dots\mathcal{L}(x_n))g(x_1)\dots g(x_n) dx_1\dots dx_n. \quad (32)$$

Мы хотим рассмотреть сейчас некоторые свойства коэффициентов разложения (32). Однако подобно тому как в теории специаль-

ных функций нередко удобнее выводить взаимные свойства функций не из их конкретной структуры, а из некоторой общей производящей функции, в данном случае оказывается более простым проверить условие унитарности и причинности для ряда (32) в целом. С этой целью запишем (32) в несколько измененном виде:  $n$ -й член ряда представим в форме

$$\frac{i^n}{n!} T \left( \int \mathcal{L}(x_1) g(x_1) dx_1 \dots \int \mathcal{L}(x_n) g(x_n) dx_n \right) = \\ = \frac{i^n}{n!} T \left( \left\{ \int \mathcal{L}(x) g(x) dx \right\}^n \right). \quad (33)$$

Ряд (32) теперь можно формально просуммировать, вводя  $T$ -экспоненту (Фейнман (1951)):

$$S(g) = T \left\{ 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n!} \left[ \int \mathcal{L}(x) g(x) dx \right]^n \right\} = \\ = T \left( \exp i \int \mathcal{L}(x) g(x) dx \right). \quad (34)$$

Мы получили, таким образом, новое выражение матрицы рассеяния  $S(g)$ .

К важному понятию  $T$ -экспоненты можно подойти и с другой стороны. Разобьем область включения взаимодействия, описываемую функцией  $g(x)$ , пространственно-подобными поверхностями  $t = \text{const}$  на бесконечно большое число бесконечно тонких слоев  $\Delta_j$ . Имеем тогда:

$$T \left( \exp i \int \mathcal{L}(x) g(x) dx \right) = \\ = T \left( \exp i \sum_j \int_{\Delta_j} \mathcal{L}(x) g(x) dx \right) = T \left( \prod_j \exp i \int_{\Delta_j} \mathcal{L}(x) g(x) dx \right).$$

$T$ -экспоненту (34) поэтому естественно определить как предел  $T$ -произведения:

$$T \left( \exp i \int \mathcal{L}(x) g(x) dx \right) = \lim_{\Delta_j \rightarrow 0} T \left\{ \prod_j \left( 1 + i \int_{\Delta_j} \mathcal{L}(x) g(x) dx \right) \right\}. \quad (35)$$

С помощью представления (35) доказательство унитарности матрицы  $S(g)$  становится очевидным. В самом деле, правая часть (35) является обычным произведением

$$\prod_j \left( 1 + i \int_{\Delta_j} \mathcal{L}(x) g(x) dx \right),$$

взятым в надлежащем хронологическом порядке следования слоев  $\Delta$ . Но каждый сомножитель этого произведения при достаточно малых  $\Delta_j$  является унитарным с точностью до величин высшего порядка малости, поэтому является унитарным все произведение. Тем самым и доказана унитарность  $S(g)$ .



Перейдем теперь к проверке условия причинности. Вычисляя вариационную производную от  $S(g)$  в точке  $y$ , найдем:

$$-i \frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} = T \left( \mathcal{L}(y) \exp i \int \mathcal{L}(x) g(x) dx \right).$$

Разобьем четырехмерное пространство на две части  $G_+$  и  $G_-$  пространственно-подобной поверхностью  $x^0 = \text{const} = y^0$ , относительно которой  $G_+$  лежит в «будущем», а  $G_-$  — в «прошедшем». Имеем тогда:

$$\begin{aligned} -i \frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} &= T \left( \mathcal{L}(y) \exp i \int_{G_+} \mathcal{L}(x) g(x) dx \exp i \int_{G_-} \mathcal{L}(z) g(z) dz \right) = \\ &= T \left( \mathcal{L}(y) \exp i \int_{G_+} \mathcal{L}(x) g(x) dx \right) T \left( \exp i \int_{G_-} \mathcal{L}(z) g(z) dz \right). \end{aligned} \quad (36)$$

С другой стороны, получим совершенно аналогично

$$\begin{aligned} S(g) &= T \left( \exp \left[ i \int_{G_+} \mathcal{L}(x) g(x) dx + i \int_{G_-} \mathcal{L}(z) g(z) dz \right] \right) = \\ &= T \left( \exp i \int_{G_+} \mathcal{L}(x) g(x) dx \right) T \left( \exp i \int_{G_-} \mathcal{L}(z) g(z) dz \right), \end{aligned}$$

а также

$$\dagger S(g) = \left\{ T \left( \exp i \int_{G_-} \mathcal{L}(x) g(x) dx \right) \right\}^\dagger \left\{ T \left( \exp i \int_{G_+} \mathcal{L}(z) g(z) dz \right) \right\}^\dagger.$$

Отсюда, принимая во внимание свойство унитарности  $T \left( \exp i \int_{G_-} \mathcal{L}(x) g(x) dx \right)$ , получим на основании (36)

$$\begin{aligned} -i \frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} \dagger S(g) &= \\ &= T \left( \mathcal{L}(y) \exp i \int_{G_+} \mathcal{L}(z) g(z) dz \right) \left\{ T \left( \exp i \int_{G_+} \mathcal{L}(z) g(z) dz \right) \right\}^\dagger. \end{aligned}$$

Таким образом, произведение

$$-i \frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} \dagger S(g)$$

не зависит от поведения функции  $g(x)$  в области  $G_-$ , т. е. при  $x^0 < y^0$ . По соображениям ковариантности такое положение имеет место также и при  $x \sim y$ . Условие причинности, следовательно, удовлетворяется.

Приведенные доказательства причинности и унитарности оператора  $S(g)$  весьма просты и наглядны. Нужно, однако, отметить, что с чисто математической точки зрения они не являются вполне последовательными. В самом деле, в ходе рассуждений мы связали вопрос о выполнении элементарных соотношений (9) и (1) для произведения (31) с совершенно неясными вопросами о суммировании ряда (1) в целом, о предельных переходах и т. п.

Строго говоря, все эти элементы для доказательства совсем не требуются. Вместо того чтобы оперировать с  $T$ -экспонентой, мы можем ввести в рассмотрение « $T$ -экспоненту с точностью до заданной степени  $g$ », и тогда все вопросы суммирования ряда автоматически снимаются.

**21.6. Анализ произвола в функциях  $S_n$  и наиболее общий вид  $S(g)$ .** Мы убедились, что выражение

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T(\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)) \quad (31)$$

является допустимым в смысле удовлетворения всем наложенным на  $S_n$  условиям. Оказывается, однако, что *это выражение не является самым общим выражением*, удовлетворяющим указанным условиям. Рассмотрим поэтому вопрос о построении наиболее общего выражения для  $S_n(x_1, \dots, x_n)$ , удовлетворяющего условиям симметрии, ковариантности, причинности и унитарности, и тем самым полностью решим задачу построения оператора  $S(g)$ .

Исследуем для этого прежде всего процедуру определения функции  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  по заданным предыдущим функциям  $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ . Условием унитарности (9)  $S_n$  определяется через них с точностью до некоторого антиэрмитова оператора, который мы обозначим через  $i\Lambda_n(x_1, \dots, x_n)$ . Кроме того, величина  $\Lambda_n(x_1, \dots, x_n)$  должна быть симметричной функцией своих аргументов. Условие причинности (13) полностью определяет операторную функцию  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  через предыдущие функции в области определения своих аргументов, в которой  $x_1 \gtrsim x_j$  (хотя бы одного из  $j = 2, 3, \dots, n$ ).

Поэтому в указанной области антиэрмитов оператор  $i\Lambda_n(x_1, \dots, x_n)$  должен быть равен нулю. Из его симметричности по всем аргументам следует, что он равен нулю также, если хотя бы для одной пары аргументов  $x_i$  и  $x_j$

$$x_i \neq x_j,$$

и может, следовательно, отличаться от нуля лишь при совпадении всех аргументов:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

Таким образом, из условий причинности, унитарности и симметрии вытекает, что эрмитов оператор  $\Lambda_n(x_1, \dots, x_n)$  есть квазилокальный оператор в смысле, определенном в § 17, и его коэффициенты функции имеют вид

$$Z\left(\dots \frac{\partial}{\partial x_i} \dots\right) \delta(x_1 - x_2) \dots \delta(x_1 - x_n),$$

причем по соображениям трансляционной инвариантности  $Z$  не может зависеть от  $x_j$ .

Итак, установлено, что условия инвариантности, симметрии, унитарности и причинности определяют  $S_n$  по заданным  $S_1, S_2, \dots$

...,  $S_{n-1}$  с точностью до  $i\Lambda_n$ , где  $\Lambda_n(x_1, \dots, x_n)$  — эрмитов симметричный квазилокальный оператор, преобразующийся как скаляр. Поэтому, чтобы получить выражение для  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , необходимо, кроме локального оператора  $\mathcal{L}(x)$ , задать цепочку квазилокальных операторов

$$\Lambda_2(x_1, x_2), \dots, \Lambda_n(x_1, \dots, x_n).$$

Мы пришли к несколько странным на первый взгляд результатам. Для полного определения матрицы  $S(g)$  задание лагранжиана взаимодействия оказывается недостаточным и необходимо задать еще бесконечную цепочку квазилокальных операторов:

$$\Lambda_2(x_1, x_2), \Lambda_3(x_1, x_2, x_3), \dots, \Lambda_n(x_1, \dots, x_n) \dots \quad (37)$$

Для того чтобы уяснить это, подойдем к рассматриваемому вопросу с другой стороны. Исследуем выражение

$$T\left(\exp i \int \mathcal{L}(x; g) dx\right), \quad (38)$$

в котором «лагранжиан»  $\mathcal{L}(x; g)$  определяется соотношением

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x; g) = & \mathcal{L}(x)g(x) + \\ & + \sum_{v \geq 2} \frac{1}{v!} \int \Lambda_v(x, x_1, \dots, x_{v-1}) g(x) g(x_1) \dots g(x_{v-1}) dx_1 \dots dx_{v-1}. \end{aligned} \quad (39)$$

В силу квазилокального характера функций  $\Lambda_v$  все интегрирования в (39) снимаются и  $\mathcal{L}(x; g)$  фактически зависит от функций поля  $u(x)$  в точке  $x$ , являясь поэтому локальным оператором. Кроме операторов поля  $u(x)$  выражение  $\mathcal{L}(x; g)$  зависит также от функций  $g(x)$ , которые можно рассматривать как «классическое» поле. Следовательно, (38) удовлетворяет всем наложенным на  $S(g)$  условиям, в том числе условию соответствия (20), и может рассматриваться как выражение для матрицы рассеяния  $S(g)$ . Разлагая (38) в ряд по степеням  $g$ , мы получим выражения для  $S_n(x_1, \dots, x_n)$ , удовлетворяющие всем наложенным на них условиям. Имеем:

$$\begin{aligned} T\left(\exp i \int \mathcal{L}(x; g) dx\right) = \\ = 1 + \sum_{m \geq 1} \frac{i^m}{m!} \int T(\mathcal{L}(x_1; g) \dots \mathcal{L}(x_m; g)) dx_1 \dots dx_m. \end{aligned}$$

Подставляя сюда разложение (39), получаем:

$$\begin{aligned} T\left(\exp i \int \mathcal{L}(x; g) dx\right) = \\ = 1 + \sum_{\substack{m \geq 1 \\ (v_1 \geq 0, \dots, v_m \geq 0)}} \frac{i^m}{m!} \frac{1}{v_1! \dots v_m!} \int T(\Lambda_{v_1}(x_1, \dots, x_{v_1}) \dots \\ \dots \Lambda_{v_m}(x_{v_1 + \dots + v_{m-1} + 1}, \dots, x_{v_1 + \dots + v_m})) g(x_1) \dots \\ \dots g(x_{v_1 + \dots + v_m}) dx_1 \dots dx_{v_1 + \dots + v_m}, \end{aligned}$$

где мы положили в соответствии с (16) и (20)  $\mathcal{L}(x) = \Lambda_1(x)$ . Символом

$$T(\Lambda_{v_1}(x_1, \dots, x_{v_1}) \dots \Lambda_{v_s}(x_{\lambda+1}, \dots, x_{\lambda+v_s}))$$

обозначено произведение операторов  $\Lambda_{v_1}, \dots, \Lambda_{v_s}$ , взятых в хронологическом порядке временных аргументов. Множественность аргументов у каждого из  $\Lambda_v$  не должна нас смущать, так как, по определению,  $\Lambda_v$  отличен от нуля лишь при совпадении своих аргументов.

Перестроим теперь этот ряд по степеням  $g(x)$ , выделив члены, в которые  $g(x)$  входит в  $n$ -й степени и которые содержат  $n$  интеграций:

$$\begin{aligned} T\left(\exp i \int \mathcal{L}(x; g) dx\right) &= \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ \sum v_i = n}} \frac{i^m}{m!} \frac{1}{v_1! \dots v_m!} \int T(\Lambda_{v_1}(x_1, \dots, x_{v_1}) \dots \\ &\dots \Lambda_{v_m}(x_{v_1+\dots+v_{m-1}+1}, \dots, x_n)) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Последнее разложение отличается от разложения (1) еще несимметричным характером коэффициентов при «степенях» функции  $g(x)$ . Для их симметризации, пользуясь симметрией весового множителя  $g(x_1) \dots g(x_n)$  при каждом данном  $n$  и симметрией функций  $\Lambda_v$ , произведем  $n!/(v_1! \dots v_m!)$  раз замену обозначений переменных  $x_1, \dots, x_n$  так, чтобы сумма всех полученных выражений с учетом симметрии  $\Lambda_v$  стала симметричной функцией всех аргументов  $x_1, \dots, x_n$ . Разделив результат на число  $n!/(v_1! \dots v_m!)$ , мы приходим к выражению

$$\begin{aligned} T\left(\exp i \int \mathcal{L}(x; g) dx\right) &= \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ \sum v_i = n}} \frac{i^m}{n!m!} \int P(x_1, \dots, x_{v_1} | x_{v_1+1} \dots | \dots, x_n) \times \\ &\times T(\Lambda_{v_1}(x_1, \dots, x_{v_1}) \dots \Lambda_{v_m}(\dots, x_n)) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

где  $P(x_1, \dots, x_{v_1} | x_{v_1+1} \dots | \dots, x_n)$  — оператор симметризации по произвольным разбиениям совокупности  $n$  точек на  $n!/(v_1! \dots v_m!)$  всевозможных разбиений по  $v_1, v_2, \dots, v_m$  точек ( $\sum v_i = n$ ). Этот оператор является естественным обобщением введенного выше оператора

$$P\left(\frac{x_1, \dots, x_v}{x_{v+1}, \dots, x_n}\right) = P(x_1, \dots, x_v | x_{v+1}, \dots, x_n).$$

Итак, матрица (38) представлена в виде (1), где коэффициенты  $S_n$  имеют вид

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\left( \substack{1 \leq m \leq n \\ \sum v_i = n} \right)} \frac{i^m}{m!} P(x_1, \dots, x_{v_1} | x_{v_1+1}, \dots | \dots, x_n) \times \\ \times T(\Lambda_{v_1}(x_1, \dots, x_{v_1}) \dots \Lambda_{v_m}(\dots x_n)). \quad (40)$$

Среди членов, возникающих в сумме, имеются одинаковые члены, соответствующие эквивалентным разбиениям, т. е. разбиениям, содержащим группы одинаковых значений индексов  $v$ :

$$v_{\alpha_1} = \dots = v_{\alpha_k}; \quad v_{\beta_1} = \dots = v_{\beta_q}; \quad \dots; \quad v_{\gamma_1} = \dots = v_{\gamma_p}.$$

Таких членов, отличающихся до симметризации лишь значениями аргументов, оказывается  $m!/(k! q! \dots p!)$ . В результате симметризации все эти члены становятся тождественными. При этом симметризация внутри групп типа  $v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_k}$  приводит лишь к появлению множителя  $k! q! \dots p!$ . Соответствующие члены являются симметричными до применения оператора  $P$  в силу перестановочности функций  $\Lambda_{v_{\alpha_1}}, \dots, \Lambda_{v_{\alpha_k}}$  под знаком хронологического произведения. Операцию симметризации по всем разбиениям, кроме эквивалентных, будем обозначать символом  $P'$ . Вспоминая, что  $\Lambda_1(x) = \mathcal{L}(x)$ , запишем формулу (40) для  $S_n$  в виде

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T(\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)) + \\ + \sum_{\left( \substack{2 \leq m \leq n-1 \\ \sum v_i = n} \right)} i^m P'(x_1, \dots, x_{v_1} | x_{v_1+1} \dots | \dots, x_n) \times \\ \times T[\Lambda_{v_1}(x_1, \dots, x_{v_1}) \dots \Lambda_{v_m}(\dots x_n)] + i \Lambda_n(x_1, \dots, x_n). \quad (41)$$

Здесь, например, первый член соответствует  $m! = n!$  эквивалентным членам, так как содержит группу одинаковых индексов  $v_1 = \dots = v_m = 1$ .

Рассмотрим несколько простых случаев формулы (40).

При  $n = 3$  получаем

$$S_3(1, 2, 3) = i^3 T(\mathcal{L}(1) \mathcal{L}(2) \mathcal{L}(3)) + i^2 T\{\mathcal{L}(1) \Lambda_2(2, 3) + \\ + \mathcal{L}(2) \Lambda_2(1, 3) + \mathcal{L}(3) \Lambda_2(1, 2)\} + i \Lambda_3(1, 2, 3). \quad (42a)$$

При  $n = 4$  имеем соответственно

$$S_4(1, 2, 3, 4) = i^4 T(\mathcal{L}(1) \mathcal{L}(2) \mathcal{L}(3) \mathcal{L}(4)) + \\ + i^3 T\{\mathcal{L}(1) \mathcal{L}(2) \Lambda_2(3, 4) + \mathcal{L}(1) \mathcal{L}(3) \Lambda_2(2, 4) + \\ + \mathcal{L}(1) \mathcal{L}(4) \Lambda_2(2, 3) + \mathcal{L}(3) \mathcal{L}(4) \Lambda_2(1, 2) + \mathcal{L}(2) \mathcal{L}(4) \Lambda_2(1, 3) + \\ + \mathcal{L}(2) \mathcal{L}(3) \Lambda_2(1, 4)\} + i^2 T[\Lambda_2(1, 2) \Lambda_2(3, 4) + \\ + \Lambda_2(1, 3) \Lambda_2(2, 4) + \Lambda_2(1, 4) \Lambda_2(2, 3)] + i^2 T\{\mathcal{L}(1) \Lambda_3(2, 3, 4) + \\ + \mathcal{L}(2) \Lambda_3(1, 3, 4) + \mathcal{L}(3) \Lambda_3(1, 2, 4) + \\ + \mathcal{L}(4) \Lambda_3(1, 2, 3)\} + i \Lambda_4(1, 2, 3, 4). \quad (42b)$$

Мы видим отсюда, что каждая последующая функция  $S_n$  выражается через предыдущие  $S_v$ ,  $v \leq n - 1$  (точнее, через хронологические произведения  $\Lambda_v$ ) с точностью до симметричного антиэрмитового квазилокального оператора  $i\Lambda_n(x_1, \dots, x_n)$ . Выражение (41) является наиболее общим выражением для  $S_n$ , а

$$S(g) = T \left( \exp i \int \mathcal{L}(x; g) dx \right),$$

где  $\mathcal{L}(x; g)$  определяется разложением (21.39) — наиболее общим выражением для матрицы рассеяния. Таким образом, цепочка квазилокальных операторов (37), которую необходимо задать для полного определения матрицы рассеяния  $S(g)$ , может быть включена в «лагранжиан» взаимодействия.

Возникает вопрос о физическом смысле линейной комбинации (39)  $\mathcal{L}(x; g(x))$  и интегралов от квазилокальных операторов, играющей роль наиболее полного возможного лагранжиана. Структура и взаимосвязь выражений (39) и (41), содержащих произвольные квазилокальные операторы  $\Lambda_n$ , обусловлены чисто математическим свойством разложений теории возмущений в целом, замеченным еще Пуанкаре.

Для иллюстрации указанного свойства рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(x)}{dx} = \varepsilon y(x), \quad (43)$$

решение которого  $y(x)$  содержит одну произвольную константу  $C$ :

$$y(x) = Ce^{\varepsilon x}.$$

Считая  $\varepsilon$  малым параметром, будем решать уравнение (43) методом последовательных приближений. В каждом из приближений после интегриации мы будем получать произвольную константу соответствующего порядка малости по  $\varepsilon$ . Поэтому при решении уравнения (43) методом теории возмущений вместо одной произвольной постоянной  $C$  мы получим бесконечный набор произвольных постоянных, имеющих различный порядок малости по  $\varepsilon$ :

$$C_0, \varepsilon C_1, \dots, \varepsilon^n C_n, \dots$$

По существу это эквивалентно разложению константы  $C$  в ряд по степеням  $\varepsilon$ , т. е.

$$C = C_0 + \varepsilon C_1 + \dots + \varepsilon^n C_n + \dots$$

Точно таким же образом в наших рассуждениях была использована нефизическая операция «включения» взаимодействия. При этом получилось, что часть лагранжиана «включилась» в первом приближении, часть — во втором, часть — в  $n$ -м, и лагранжиан взаимодействия оказался разбитым на цепочку отдельных частей. Физический смысл, однако, имеет лишь положение, когда взаимодействие включено полностью. При этом функция  $g(x) = 1$ , и

выражение (39) принимает вид

$$\mathcal{L}(x; 1) = \mathcal{L}(x) + \sum_{v \geq 2} \frac{1}{v!} \int \Lambda_v(x, x_1, \dots, x_{v-1}) dx_1 \dots dx_{v-1}, \quad (44)$$

$$S(1) = S = T(\exp i \int \mathcal{L}(x; 1) dx). \quad (45)$$

Следовательно, реальная матрица рассеяния  $S(1)$  полностью характеризуется эрмитовым лагранжианом взаимодействия системы  $\mathcal{L}(x; 1)$ , который в теории возмущений иногда представляется в виде ряда.

При обычном изложении теории поля на основе уравнения Шредингера представление для матрицы рассеяния получается в виде

$$T(\exp[-i \int H(x) dx]), \quad (46)$$

где  $H(x)$  — плотность гамильтониана взаимодействия. Однако  $H(x)$  совпадает с  $-\mathcal{L}$ , а  $T$ -произведения в формулах (45) и (46) имеют одинаковый смысл лишь в особенно простых случаях, когда  $\mathcal{L}$  не зависит от производных функций поля. При наличии же производных в (45) подразумевается виково, а в (46) — дайсоново  $T$ -произведение, на различие между которыми указывалось в § 15.3. В частности, дайсоново  $T$ -произведение, упорядочение в котором проводится с помощью явных  $\theta$ -функций, нековариантно, и  $H$  содержит, кроме  $-\mathcal{L}$ , также некоторые нековариантные члены. Подчеркнем, что (45) и (46) относятся к одной и той же  $S$ -матрице, и переход от одного типа  $T$ -произведения к другому позволяет преобразовать одну из этих формул к другой (см. Суханов (1961), Павлов, Тавлуев (1971)).

## § 22. Раскрытие хронологических произведений

**22.1. Хронологическое спаривание.** Обладая явным выражением для матрицы рассеяния, мы можем приступить к вычислению ее матричных элементов по различным состояниям. В процессе этого вычисления нам придется приводить члены матрицы к нормальной форме, т. е. к форме, в которой все операторы уничтожения в отдельных слагаемых стоят справа, а операторы рождения — слева.

Получим поэтому представление  $T$ -произведений локальных операторов  $\mathcal{L}(x)$  через нормальные произведения соответствующих операторов поля. Для этого удобно распространить понятие  $T$ -произведения на случай общей системы линейных операторов, определенных в § 17.

Определим хронологическое, или упорядоченное, произведение линейных операторов  $A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)$

$$T(A_1(x_1) \dots A_n(x_n))$$

как их обычное произведение в хронологическом порядке, умноженное на  $\eta = (-1)^p$ , где  $p$  — четность ферми-перестановок при

переходе от порядка  $1, \dots, n$  к хронологическому порядку, т. е.

$$T(A_1(x_1) \dots A_n(x_n)) = \eta A_{j_1}(x_{j_1}) \dots A_{j_n}(x_{j_n}) \quad (1)$$

$$(x_{j_1}^0 \geq x_{j_2}^0 \geq \dots \geq x_{j_n}^0),$$

где  $p$  — четность перестановки ферми-операторов при переходе от порядка  $(1, 2, \dots, n)$  к порядку  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ .

Рецепт раскрытия таких произведений дает *теорема Вика для  $T$ -произведений*, являющаяся аналогом теоремы Вика для обычных произведений. Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, введем важное понятие *хронологического спаривания операторов*.

Рассмотрим с этой целью (1) для случая двух операторов поля:

$$T(u_1(x_1) u_2(x_2)) = \begin{cases} u_1(x_1) u_2(x_2) & (x_1^0 > x_2^0), \\ \eta u_2(x_2) u_1(x_1) & (x_2^0 > x_1^0). \end{cases}$$

Это выражение в соответствии с определением обычного спаривания

$$u_1(x_1) u_2(x_2) = :u_1(x_1) u_2(x_2): + \overline{u_1(x_1) u_2(x_2)}$$

может быть преобразовано к виду

$$T(u_1(x_1) u_2(x_2)) = \begin{cases} :u_1(x_1) u_2(x_2): + \overline{u_1(x_1) u_2(x_2)} & (x_1^0 > x_2^0), \\ \eta :u_2(x_2) u_1(x_1): + \eta \overline{u_2(x_2) u_1(x_1)} = \\ = :u_1(x_1) u_2(x_2): + \eta \overline{u_2(x_2) u_1(x_1)} & (x_2^0 > x_1^0). \end{cases} \quad (2)$$

Отсюда видно, что в любом случае  $T(u_1(x_1) u_2(x_2))$  отличается от  $:u_1(x_1) u_2(x_2):$  на  $c$ -число, которое мы назовем *хронологическим спариванием*,  $u_1(x_1) u_2(x_2)$ , т. е., по определению,

$$T(u_1(x_1) u_2(x_2)) = :u_1(x_1) u_2(x_2): + \overline{u_1(x_1) u_2(x_2)} \quad (3)$$

и

$$\overline{u_1(x_1) u_2(x_2)} = \begin{cases} \overline{u_1(x_1) u_2(x_2)} & \text{при } x_1^0 > x_2^0, \\ \eta \overline{u_2(x_2) u_1(x_1)} & \text{при } x_2^0 > x_1^0. \end{cases} \quad (4)$$

Отметим, прежде всего, важную особенность хронологического спаривания. *Под знаком хронологического спаривания можно изменять порядок сомножителей*, точно так же как и под знаком нормального произведения:

$$\overline{u_1(x_1) u_2(x_2)} = \eta \overline{u_2(x_2) u_1(x_1)},$$

что непосредственно следует из (4).

Определим хронологические спаривания для операторов основных волновых полей. Заметим для этого, что, вычисляя вакуумное среднее  $\Phi_0 \dots \Phi_0 = \langle \dots \rangle_0$  от (3) с учетом основного свойства нормаль-



ного произведения и нормированности амплитуды вакуума, мы получим

$$\langle T(u_1(x_1) u_2(x_2)) \rangle_0 = \overline{u_1(x_1) u_2(x_2)}, \quad (5)$$

т. е. что хронологическое спаривание двух операторов поля равно вакуумному среднему от хронологического произведения этих операторов. С другой стороны, в § 15 было установлено, что такие вакуумные ожидания с точностью до множителя  $i$  равны причинным функциям Грина соответствующих полей. Воспользовавшись полученными в этом параграфе формулами, находим:

для скалярного поля

$$\overline{\varphi(x) \varphi(y)} = \langle T(\varphi(x) \varphi(y)) \rangle_0 = \frac{1}{i} D^c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{e^{ik(x-y)}}{m^2 - k^2 - i\epsilon} dk, \quad (6)$$

для электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \overline{A_i(x) A_n(y)} &= \langle T(A_i(x) A_n(y)) \rangle_0 = \\ &= i g^{ln} D_0^c(x-y) = \frac{g^{ln}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon} dk, \end{aligned} \quad (7)$$

для векторного поля

$$\begin{aligned} \overline{U_n(x) U_l(y)} &= \langle T(U_n(x) U_l(y)) \rangle_0 = \\ &= i D_{nl}^c(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{(g^{nl} - \frac{k_n k_l}{m^2})}{m^2 - k^2 - i\epsilon} e^{ik(x-y)} dk, \end{aligned} \quad (8)$$

для спинорного поля

$$\begin{aligned} \overline{\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)} &= \langle T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)) \rangle_0 = \\ &= \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}^c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{(m - \hat{p})_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} e^{ip(x-y)} dp. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, однако, что соотношения, приводящие к (6) — (9), были установлены в § 15 лишь для  $x^0 > y^0$  и  $x^0 < y^0$ . Из доказанного в § 21 свойства ковариантности  $T$ -произведений вытекает также, что эти соотношения имеют место и при  $x \sim y$ . Таким образом, (6) — (9) можно считать справедливыми всюду при  $x \neq y$ .

Правила же интегрирования этих выражений в бесконечно малой окрестности точки  $x = y$  можно фиксировать произвольно. Так, например, можно добавить к правой части каждого из них любую коэффициентную функцию квазилокального оператора

$$P(i\partial) \delta(x-y),$$

где  $P(i\partial)$  — какой-либо полином по  $\partial/\partial x^\alpha$ . Эта необходимость дополнительного определения спаривания в бесконечно малой окрестности точки  $x = y$  является частным следствием произвола, содержащегося в  $T$ -произведении. В самом деле,  $T$ -произведения

заданы формальным «определением» (21.27) и (2) лишь при несовпадающих значениях своих аргументов. Необходимо поэтому доопределить их в бесконечно малых окрестностях соответствующих точек совпадения аргументов, задав правила интеграции их коэффициентных функций, т. е., иначе говоря, следует определить коэффициентные функции  $T$ -произведений как интегрируемые не собственные функции.

Таким образом, мы приходим к выводу о необходимости не только выбора лагранжиана взаимодействия, но и одновременного доопределения  $T$ -произведений.

Следует, однако, отметить, что влияние изменения  $T$ -произведения на  $S(g)$  можно учесть изменением лагранжиана  $\mathcal{L}(x)$ . Действительно, при изменении  $T$ -произведений функций поля мы тем самым вводим в  $T$ -произведения лагранжианов взаимодействия различные квазилокальные операторы, что, как было показано в предыдущем параграфе, сводится к добавлению некоторых выражений к лагранжиану взаимодействия.

Следовательно, для получения матричных элементов матрицы рассеяния  $S(g)$ , определяющих собой структуру физических процессов, необходимо одновременно задать лагранжиан взаимодействия и правила интеграции  $T$ -произведений. Если правила интеграции  $T$ -произведений уже фиксированы, то лагранжиан взаимодействия  $\mathcal{L}(x)$  необходимо выбрать применительно к этим правилам.

Зависимость формы лагранжиана от некоторых дополнительных обстоятельств отнюдь не является специфической особенностью квантовой теории поля. В классической физике, например, для фиксирования формы лагранжиана необходимо прежде выбрать независимые динамические переменные (ср. обычную трактовку скалярного поля (§ 3) и в формализме Кеммера (§ 4.4)).

Итак, необходимо сначала доопределить все спаривания, а также и их произведения, чтобы последние оказались интегрируемыми функциями. Тем самым  $T$ -произведения будут полностью заданными, и окажется возможным фиксировать лагранжиан.

Эти вопросы, связанные с задачей регуляризации  $S$ -матрицы, будут освещены подробно в следующей главе. Здесь же мы ограничимся доопределением спариваний функций поля. Условимся считать, что если при  $x \neq y$  спаривание совпадает с некоторой функцией Грина

$$\Delta_{\alpha\beta}^c(x-y) = P_{\alpha\beta}(i\partial) D^c(x-y),$$

то оно совпадает с этой функцией и в бесконечно малой окрестности точки  $x = y$ . В частности, будем считать, что выражения (6) — (9) справедливы и в бесконечно малой окрестности точки  $x = y$ . Другими словами, в рамках терминологии, введенной в § 15.3, мы определяем хронологические спаривания как вакуумные средние от виковых хронологических произведений  $T_{\psi}$ .

Рассмотрим также общий случай, когда поле описывается системой уравнений первого порядка. Как мы видели в § 15, функции поля удовлетворяют тогда перестановочным соотношениям

$$[u_\alpha(x), u_\beta^*(y)] = \frac{1}{i} \Delta_{\alpha\beta}(x-y) = \frac{1}{i} P_{\alpha\beta}(i\partial) D(x-y),$$

$$[u_\alpha^+(x), u_\beta^-(y)] = \frac{1}{i} \Delta_{\alpha\beta}^+(x-y) = \frac{1}{i} P_{\alpha\beta}(i\partial) D^\pm(x-y).$$

Поэтому, вычисляя обычное спаривание, получаем:

$$\overline{u_\alpha(x) u_\beta^*(y)} = \frac{1}{i} \Delta_{\alpha\beta}^-(x-y),$$

откуда стандартным путем находим для хронологического спаривания

$$\overline{u_\alpha(x) u_\beta^*(y)} = \begin{cases} -i \Delta_{\alpha\beta}^-(x-y) & (x^0 > y^0), \\ i \Delta_{\alpha\beta}^+(x-y) & (y^0 > x^0), \end{cases}$$

что при  $x \neq y$  совпадает с

$$\frac{1}{i} \Delta_{\alpha\beta}^c(x-y) = \frac{1}{i} P_{\alpha\beta}(i\partial) D^c(x-y).$$

Мы положим поэтому, что при любых  $x$  и  $y$

$$\overline{u_\alpha(x) u_\beta^*(y)} = \frac{1}{i} \Delta_{\alpha\beta}^c(x-y). \tag{10}$$

В ряде случаев в лагранжиан взаимодействия могут входить производные функций поля. Целесообразно поэтому ввести здесь полное определение их спариваний. Замечая, что при  $x^0 \geq y^0$

$$\frac{\overline{\partial^k u_\alpha(x) \partial^q u_\beta^*(y)}}{(\partial x^0)^{k_0} \dots (\partial x^3)^{k_3} (\partial y^0)^{q_0} \dots (\partial y^3)^{q_3}} = \frac{\partial^k}{(\partial x^0)^{k_0} \dots (\partial x^3)^{k_3}} \frac{\partial^q}{(\partial y^0)^{q_0} \dots (\partial y^3)^{q_3}} \overline{u_\alpha(x) u_\beta^*(y)}, \tag{11}$$

мы положим, по определению, что (11) справедливо при любых  $x$  и  $y$ .

Заметим, что формулы (10) и (11) определяют спаривания для викового  $T$ -произведения (ср. § 15.3). Соответствующие формулы для дайсонова варианта имеют вид

$$\overline{i u_\alpha(x) u_\beta^*(y)} = \theta(x-y) \Delta_{\alpha\beta}^-(x-y) + \theta(y-x) \Delta_{\beta\alpha}^-(y-x),$$

$$i \frac{\overline{\partial^k u_\alpha(x) \partial^q u_\beta^*(y)}}{(\partial x_0)^{k_0} \dots (\partial x_3)^{k_3} (\partial y_0)^{q_0} \dots (\partial y_3)^{q_3}} = \theta(x-y) \frac{\partial^k}{(\partial x_0)^{k_0} \dots (\partial x_3)^{k_3}} \times$$

$$\times \frac{\partial^q}{(\partial y_0)^{q_0} \dots (\partial y_3)^{q_3}} \Delta_{\alpha\beta}^-(x-y) + \theta(y-x) \frac{\partial^{k+q}}{(\partial x_0)^{k_0} \dots (\partial y_3)^{q_3}} \Delta_{\alpha\beta}^-(y-x).$$

Отметим еще некоторые особенности хронологических спариваний и  $T$ -произведений.

Как нетрудно убедиться, операторы свободных полей, входящие в нормальные произведения и обычные спаривания, остаются «свободными» в том смысле, что под действием дифференциальных операторов уравнений свободных полей указанные выражения обращаются в нуль. Так, для скалярного поля

$$(\square_x - m^2) : \varphi(x) \varphi(y) := 0, \quad (12)$$

$$(\square_x - m^2) \overline{\varphi(x) \varphi(y)} = 0. \quad (13)$$

Казалось бы, это свойство должно сохраняться и для хронологического спаривания, определенного в (4) через обычные спаривания, а, следовательно, и для  $T$ -произведения. Однако в действительности (из-за невыполнимости определения (4) в точке  $x = y$ ) такое положение не имеет места. В самом деле, как было только что показано, хронологические спаривания выражаются через причинные функции Грина, удовлетворяющие неоднородным уравнениям полей. Так, для скалярного поля в соответствии с (5) имеем:

$$(\square_x - m^2) \overline{\varphi(x) \varphi(y)} = i\delta(x - y). \quad (14)$$

То же самое относится, следовательно, и к  $T$ -произведениям. В частности, для скалярного поля, с помощью (3), (12) и (14) находим:

$$(\square_x - m^2) T(\varphi(x) \varphi(y)) = i\delta(x - y). \quad (15)$$

Таким образом, операторы полей в представлении взаимодействия под знаком  $T$ -произведения следует рассматривать как не удовлетворяющие однородным уравнениям поля.

**22.2. Теорема Вика для хронологических произведений.** Теорема Вика для хронологических произведений состоит в утверждении, что  $T$ -произведение  $n$  линейных операторов равно сумме их нормальных произведений со всеми возможными хронологическими спариваниями (включая член без спариваний).

Доказательство сводится практически к доказательству теоремы Вика для обычных произведений. В самом деле, согласно определению (1)  $T$ -произведение равно некоторому обычному произведению

$$T(A_1(x_1) \dots A_n(x_n)) = \eta A_{j_1}(x_{j_1}) \dots A_{j_n}(x_{j_n}).$$

Применяя к этому произведению теорему Вика, видим, что оно равно сумме нормальных произведений операторов  $A_{j_1}(x_{j_1}), \dots, A_{j_n}(x_{j_n})$  со всеми возможными обычными спариваниями. Но так как порядок следования  $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$  является хронологически правильным, то обычные спаривания совпадают с хронологическими, т. е.  $T(A_1(x_1), \dots, A_n(x_n))$  равно умноженной на  $\eta$  сумме нормальных произведений операторов  $A_{j_1}(x_{j_1}), \dots, A_{j_n}(x_{j_n})$  со всеми возможными хронологическими спариваниями.

Как уже отмечалось, под знаком хронологического спаривания, как и под знаком нормального произведения, линейные операторы можно переставлять (с учетом изменения знака). Тем самым под знаком нормальных произведений со всевозможными хронологическими спариваниями можно восстановить нормальный порядок сомножителей 1, 2, ...,  $n$ , опустив одновременно множитель  $\eta$ . Теорема доказана.

Введем теперь в рассмотрение  $T$ -произведение нескольких нормальных произведений линейных операторов поля  $A_i(x) \dots D_j(z)$

$$T (: A_1(x) A_2(x) \dots A_n(x) : \dots : D_1(z) \dots D_m(z) :). \quad (16)$$

Именно такие  $T$ -произведения необходимы для раскрытия  $T$ -произведений локальных операторов, так как, по определению, локальный оператор  $\mathcal{L}(x)$  представляется линейной комбинацией членов типа

$$: A_1(x) A_2(x) \dots A_n(x) :.$$

Для  $T$ -произведений вида (16) формулировка теоремы Вика имеет лишь ту особенность, что не должны учитываться взаимные хронологические спаривания операторов, входящих в одно и то же нормальное произведение.

В качестве примера приведем к нормальной форме  $T$ -произведение двух операторов тока спинорного поля

$$J^m(x) = : \bar{\psi}(x) \gamma^m \psi(x) : \quad \text{и} \quad J^n(y) = : \bar{\psi}(y) \gamma^n \psi(y) :.$$

Используя теорему Вика с учетом равенства нулю спариваний  $\overline{\psi(x)\psi(y)}$  и  $\overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)}$  и не учитывая спариваний  $\overline{\psi(x)\bar{\psi}(x)}$  и  $\overline{\psi(y)\bar{\psi}(y)}$ , получаем:

$$\begin{aligned} T(J^m(x), J^n(y)) &= T (: \bar{\psi}(x) \gamma^m \psi(x) :, : \bar{\psi}(y) \gamma^n \psi(y) :) = \\ &= : \bar{\psi}(x) \gamma^m \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^n \psi(y) : + : \overline{\bar{\psi}(x) \gamma^m \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^n \psi(y)} : + \\ &\quad + : \bar{\psi}(x) \gamma^m \overline{\bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y) \gamma^n \psi(y)} : + : \overline{\bar{\psi}(x) \gamma^m \overline{\bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y) \gamma^n \psi(y)}} :. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что согласно (9)

$$\overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} = \frac{1}{i} S^c(x-y)$$

и

$$\overline{\bar{\psi}(x)\psi(y)} = -\overline{\bar{\psi}(y)\psi(x)} = i S^c(y-x),$$

с учетом суммирования по спинорным индексам получаем окончательно:

$$\begin{aligned} T(J^m(x), J^n(y)) &= : J^m(x) J^n(y) : - i : \bar{\psi}(y) \gamma^n S^c(y-x) \gamma^m \psi(x) : - \\ &- i : \bar{\psi}(x) \gamma^m S^c(x-y) \gamma^n \psi(y) : + \text{Sp}(S^c(x-y) \gamma^n S^c(y-x) \gamma^m). \quad (17) \end{aligned}$$

Отметим в заключение, что, отправляясь от (16), можно также определить  $T$ -произведение нормальных произведений более общего вида

$$T (: A_1(x_1) \dots A_n(x_n) : \dots : D_1(z_1) \dots D_m(z_m) :). \quad (18)$$

как сумму нормальных произведений операторов

$$A_1(x_1) \dots D_m(z_m)$$

со всеми возможными спариваниями, исключая взаимные спаривания операторов, стоящих в одном и том же нормальном произведении.

Основываясь на таком определении  $T$ -произведения, можно ввести  $T$ -произведение полилокальных операторов

$$T(A(x_1, \dots, x_n) \dots D(z_1, \dots, z_m)), \quad (19)$$

представляя его линейной комбинацией выражений типа (18). Прямое определение  $T$ -произведения (19) по хронологическому признаку в данном случае неудобно из-за множественности аргументов у операторов  $A, \dots, D$ .

Отсюда видно, что, в сущности,  $T$ -произведение представляет собой новую алгебраическую операцию, которая может быть введена и независимо от обычных произведений.

С математической точки зрения  $T$ -произведение особенно привлекательно тем, что в отличие от обычных произведений под знаком  $T$ -произведения можно переставлять операторы так, как если бы они точно коммутировали или антикоммутировали.

## § 23. Приведение $S$ -матрицы к нормальной форме

**23.1. Структура коэффициентов матрицы рассеяния.** Обратимся теперь к разработке удобной рецептуры приведения к нормальной форме  $T$ -произведений лагранжианов, определяющих операторные выражения  $S_n(x_1, \dots, x_n)$ , входящие в матрицу рассеяния. Для большей наглядности удобно начать изложение с какого-либо конкретного случая. Рассмотрим поэтому взаимодействие электромагнитного и спинорного электрон-позитронного полей. Мы будем считать в соответствии с установившейся традицией, что электроны являются основными частицами спинорного поля, а позитроны — античастицами. Поэтому операторы спинорного поля  $\hat{a}^{v,+}$  и  $\hat{a}^{v,-}$  (см. § 13) описывают рождение и уничтожение электронов, а операторы  $\hat{a}^{v,+}$  и  $\hat{a}^{v,-}$  — соответственно позитронов. Разумеется, ввиду полной симметрии нашего изложения можно было бы считать основными частицами позитроны, а электроны — античастицами. При этом роли операторов  $\hat{a}^{v,+}$ ,  $\hat{a}^{v,-}$  и  $\hat{a}^{v,+}$ ,  $\hat{a}^{v,-}$  поменялись бы местами и нужно было бы лишь изменить знак электрического тока, имеющего в принятой нами обычной форме вид

$$j^m(x) = -eJ^m(x) = -e : \bar{\psi}(x) \gamma^m \psi(x) :. \quad (1)$$

Здесь  $e$  — величина электрического заряда электрона, умноженная на  $\sqrt{4\pi}$  и равная

$$e = \sqrt{\frac{4\pi}{137}} \quad (2)$$

в употребляемой нами натуральной системе единиц \*).

\*) Более точное значение постоянной тонкой структуры приводится в § 41.2.

Лагранжиан взаимодействия электромагнитного и электрон-позитронного полей согласно (8.15) имеет вид

$$\mathcal{L}(x) = - :j^n(x) A_n(x) : = e : \bar{\psi}(x) \gamma^n \psi(x) A_n(x) :. \quad (3)$$

Принимая во внимание элементарные хронологические спаривания (22.7) и (22.9)

$$\begin{aligned} \overline{A_m(x) A_n(y)} &= ig^{mn} D_0^c(x-y), \\ \overline{\psi_\sigma(x) \bar{\psi}_\rho(y)} &= - \overline{\bar{\psi}_\rho(y) \psi_\sigma(x)} = \frac{1}{i} S_{\sigma\rho}^c(x-y), \end{aligned}$$

рассмотрим процесс приведения к нормальной форме отдельных членов S-матрицы

$$\begin{aligned} S(1) &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \\ S_n(x_1, \dots, x_n) &= i^n T(\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)), \end{aligned} \quad (21.31)$$

зависящих от лагранжиана (3). Член первого порядка уже записан в нормальной форме:

$$S_1(x) = i\mathcal{L}(x) = ie : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) :. \quad (4)$$

Во втором порядке получаем:

$$S_2(x, y) = i^2 T(\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y)) = -e^2 T(:J^m(x) A_m(x) : : J^n(y) A_n(y) :).$$

Ввиду взаимной коммутативности операторов электромагнитного и электрон-позитронного полей входящее сюда T-произведение может быть представлено в виде произведения двух T-произведений:

$$T(J^m(x) J^n(y)) T(A_m(x) A_n(y)).$$

Первый сомножитель  $TJ^m(x) J^n(y)$  был нами раскрыт в предыдущем параграфе (22.17), а второй раскрывается элементарно с помощью формулы (22.3) и спаривания электромагнитного поля (22.7). Получаем поэтому

$$\begin{aligned} S_2(x, y) &= -e^2 (:A_m(x) A_n(y) : + ig^{mn} D_0^c(x-y)) \times \\ &\times \{ :J^m(x) J^n(y) : - i : \bar{\psi}(y) \gamma^n S^c(y-x) \gamma^m \psi(x) : - \\ &- i : \bar{\psi}(x) \gamma^m S^c(x-y) \gamma^n \psi(y) : + \text{Sp}(S^c(x-y) \gamma^n S^c(y-x) \gamma^m) \} = \\ &= -e^2 \{ :J^m(x) A_m(x) J^n(y) A_n(y) : + i : J_n(x) J^n(y) : D_0^c(x-y) - \\ &- i : \bar{\psi}(y) \gamma^n A_n(y) S^c(y-x) \gamma^m A_m(x) \psi(x) : - \\ &- i : \bar{\psi}(x) \gamma^m A_m(x) S^c(x-y) \gamma^n A_n(y) \psi(y) : + \\ &+ : \bar{\psi}(y) \gamma_m S^c(y-x) D_0^c(x-y) \gamma^m \psi(x) : + \\ &+ : \bar{\psi}(x) \gamma^m S^c(x-y) D_0^c(x-y) \gamma_m \psi(y) : + \\ &+ \text{Sp} : S^c(x-y) \gamma^n A_n(y) S^c(y-x) \gamma^m A_m(x) : + \\ &+ i D_0^c(x-y) \text{Sp}(S^c(x-y) \gamma^n S^c(y-x) \gamma_n) \}. \end{aligned} \quad (5)$$

В выражениях (4), (5) принят порядок записи матричных операторов, при котором под знаком нормального произведения операторные спиноры  $\bar{\psi}$  и  $\psi$  всегда располагаются по определенному принципу. Согласно (3) в каждый  $\mathcal{L}$  входит по одному спинору  $\bar{\psi}$  и  $\psi$ . Под знаком  $T$ -произведения в члене  $n$ -го порядка стоит поэтому  $n$  операторов  $\bar{\psi}$  и  $n$  операторов  $\psi$ . В процессе приведения  $T$ -произведения к нормальному виду некоторые пары операторов  $\bar{\psi}(x_i)\psi(x_j)$  заменяются соответствующими спариваниями. Таким образом, после приведения отдельных членов  $T$ -произведения к нормальному виду в каждом из членов полученного выражения (например, в членах (5)) остается равное число операторов  $\bar{\psi}$  и  $\psi$ . При этом каждому  $\bar{\psi}(x_k)$  можно сопоставить определенный  $\psi(x_{j_k})$ , проследив цепочку аргументов спариваний

$$\overline{\psi(x_k)\bar{\psi}(x_{i_k})}, \overline{\psi(x_{i_k})\bar{\psi}(x_{i_k})}, \dots, \overline{\psi(x_{m_k})\bar{\psi}(x_{j_k})}. \quad (6)$$

Свободные операторы  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , входящие в нормальные произведения, могут поэтому всегда быть разбиты на пары с совпадающими аргументами (в том случае, если оба оператора  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  из какого-либо  $\mathcal{L}(x)$  не подвергались спариваниям) или с аргументами, связанными цепочкой аргументов соответствующих  $S^c$ -функций.

Мы условимся записывать свободные операторы таким образом, чтобы операторы, образующие пары, находились рядом (между ними могут стоять только  $s$ -функции), причем чтобы внутри пар  $\bar{\psi}(x_k)$  всегда стояло слева от  $\psi(x_{j_k})$ , т. е. в виде

$$:\bar{\psi}(x_1)\psi(x_{j_1})\bar{\psi}(x_2)\psi(x_{j_2})\dots\bar{\psi}(x_k)\psi(x_{j_k}):. \quad (7)$$

Перестановки пар между собой не меняют значения нормального произведения, и потому порядок пар безразличен. Все члены в (4) и (5) были записаны в форме (7). В дальнейшем мы всегда будем придерживаться такого способа записи; это позволит просто вывести правило определения знака перед произвольным членом после раскрытия  $T$ -произведения вида (21.31).

Выражения с той же структурой, что и (5), могут быть без труда получены и для членов высших порядков. Пользуясь теоремой Вика для  $T$ -произведений, можно сразу найти, что коэффициент  $S_n$  (с точностью до  $i^n$ ) равен сумме нормальных произведений лагранжианов  $\mathcal{L}(x_1), \dots, \mathcal{L}(x_n)$  со всеми возможными спариваниями. С помощью этой теоремы можно также сформулировать правила для автоматической записи элементов матрицы рассеяния в нормальной форме, а следовательно, и матричных элементов.

**23.2. Диаграммы Фейнмана и правила соответствия.** Для осуществления подобной записи элементам  $S$ -матрицы ставятся в соответствие графические схемы, введенные впервые Фейнманом (1949а, б), которые мы будем именовать *диаграммами Фейнмана*.

Чтобы ввести диаграммы Фейнмана, необходимо установить определенные правила соответствия. Как мы выяснили, оператор-



ные функции  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  в соответствии с теоремой Вика представляются в виде суммы членов, каждый из которых является произведением некоторого числа спариваний операторов электромагнитного поля  $\overline{A(x)A(y)}$  и спинорного поля  $\overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)}$  с нормальным произведением свободных операторов  $\bar{\psi}, \psi, A$  и некоторым числом матриц  $\gamma^n$ .

Очевидно, для графического описания членов матрицы рассеяния в рассматриваемом нами случае (3) достаточно задать графическое изображение двух спариваний

$$\overline{A_m(x_i)A_n(x_j)}, \quad \overline{\psi(x_k)\bar{\psi}(x_l)},$$

и трех свободных операторов

$$\psi(x_i), \quad \bar{\psi}(x_j), \quad A_n(x_k)$$

и вершинного фактора  $e\gamma^n$ .

Условимся поэтому спаривание

$$\overline{A_m(x_i)A_n(x_j)} = \overline{A_n(x_j)A_m(x_i)} = ig^{mn}D_0^c(x_i - x_j),$$

симметричное по своим аргументам  $x_i$  и  $x_j$  изображать на диаграмме волнистой линией, соединяющей точки  $x_i$  и  $x_j$ :



эту линию можно считать изображением движения фотона между точками  $x_i$  и  $x_j$ .

Несимметричному спариванию

$$\overline{\psi(x_k)\bar{\psi}(x_l)} = \frac{1}{i} S^c(x_k - x_l)$$

сопоставим на диаграмме направленную линию, соединяющую точки  $x_k$  и  $x_l$ . Направление линии целесообразно выбрать по соображениям наглядности. Как мы уже условились считать, оператор  $\psi(x)$  описывает рождение позитрона и уничтожение электрона в точке  $x$ , а оператор  $\bar{\psi}(y)$  описывает рождение электрона и уничтожение позитрона в точке  $y$ . Другими словами, оператор  $\psi(x)$  как бы соответствует вхождению электрона в точку  $x$ , а  $\bar{\psi}(x)$  — выходу электрона из этой точки (и наоборот, по отношению к позитрону).

Поскольку основными частицами спинорного поля  $\psi$  считаются электроны, естественно спариванию  $\overline{\psi(x_k)\bar{\psi}(x_l)}$  сопоставить на диаграмме линию, направленную из точки  $x_l$  в точку  $x_k$ , т. е.



Введенные таким образом направленные линии можно считать изображением движения электрона между точками диаграммы  $x_i$  и  $x_k$  (или изображением движения позитрона от точки  $x_k$  к точке  $x_i$ ).

Свободным операторам  $A(x)$ ,  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  сопоставим линии, соединяющие точку  $x$  с краем диаграммы. При этом оператору  $A_m(x)$  соответствует волнистая ненаправленная (фотонная) линия:



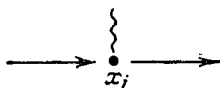
оператору  $\psi(x)$  — направленная (электронная) линия, входящая в точку  $x$ :



а оператору  $\bar{\psi}(x)$  — направленная (электронная) линия, выходящая из точки  $x$ :



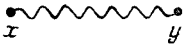
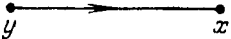


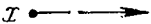
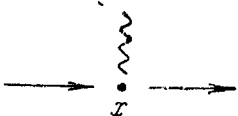
Матрице Дирака  $\gamma^k$  из лагранжиана  $\mathcal{L}(x_i)$ , умноженной на константу взаимодействия  $e$  (см. (3)) и на фактор  $i$ , сопоставим на диаграмме точку  $x_i$ , в которой сходятся одна фотонная линия, одна входящая и одна выходящая электронные линии:



Такие точки будем называть *узлами* (или *вершинами*) диаграммы. В таблице I приведена сводка правил соответствия между сомножителями членов операторных функций  $S_n$  и элементами диаграмм Фейнмана.

Правила соответствия установлены так, что диаграмма, соответствующая одному из членов в нормальной форме, через который выражается операторная функция  $S_n(x_1, \dots, x_n)$ , состоит из  $n$  узлов и некоторого количества внутренних и внешних фотонных и электронных линий. В силу локального характера лагранжиана взаимодействия (3) в каждый узел входит и выходит одна электронная линия. Таким образом, электронные линии всей диаграммы непрерывны в узлах и образуют либо замкнутые фигуры, либо незамкнутые ломаные линии, начинающиеся и оканчивающиеся на краях диаграммы. При этом цепочке аргументов спариваний (6)

## Правила соответствия

№ п/п	Множитель в матрице рассеяния	Элемент диаграммы Фейнмана
1	Спаривание операторов электромагнитного поля $\overline{A_n(x)} A_m(y) = ig^{mn} D_0^c(x-y)$	Внутренняя фотонная линия 
2	Спаривание операторов спинорного поля $\overline{\Psi_\alpha(x)} \Psi_\beta(y) = \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}^c(x-y)$	Внутренняя электронная линия 
3	Свободный оператор $A_m(x)$ под знаком нормального произведения	Внешняя фотонная линия 
4	Свободный оператор $\psi(x)$ под знаком нормального произведения	Внешняя входящая электронная линия 
5	Свободный оператор $\bar{\psi}(x)$ под знаком нормального произведения	Внешняя выходящая электронная линия 
6	Матрица Дирака $\gamma^R$ из лагранжиана $\mathcal{L}(x)$ , умноженная на $ie$ : $ie\gamma^R$	Узел (вершина) 

соответствует последовательность узлов отдельных электронных линий диаграммы, а парам свободных операторов  $\bar{\psi}(x_i)\psi(x_j)$  под знаком нормального произведения — начало  $(x_j)$  и конец  $(x_i)$  отдельных незамкнутых электронных линий. Характерной особенностью правил соответствия является также то обстоятельство, что коэффициентным функциям  $K_i(x_1, \dots, x_n)$  операторных выражений  $S_n(x_1, \dots, x_n)$ :

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_i K_i(x_1, \dots, x_n): \dots A(x_j) \dots \bar{\psi}(x_k) \dots \psi(x_l) \dots:,$$

целиком состоящим из хронологических спариваний операторов  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  и  $A$ , соответствуют внутренние линии диаграммы, а свободным операторам под знаком нормального произведения — ее внешние линии.

В качестве примера рассмотрим один из членов второго порядка, входящий в выражение (5) для  $S_2(x, y)$ ,

$$\begin{aligned} i^2 e^2 : \overbrace{\bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y) \hat{A}(y) \psi(y)} : &= \\ &= e^2 \text{Sp} \{ i : S^c(y-x) \hat{A}(x) i S^c(x-y) \hat{A}(y) : \} = \\ &= -e^2 \text{Sp} \{ : S^c(y-x) \hat{A}(x) S^c(x-y) \hat{A}(y) : \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя правила соответствия, получаем соответствующую диаграмму Фейнмана (рис. 3) (так называемую «диаграмму собственной энергии фотона»; подробнее см. в § 27).

Вторым примером рассмотрим один из членов третьего порядка, входящий в  $S_3(x, y, z)$ ,

$$\begin{aligned} (ie)^3 : \overbrace{\bar{\psi}(x) \gamma^m \hat{A}_m(x) \bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y) \hat{A}(y) \bar{\psi}(y) \bar{\psi}(z) \gamma^n \hat{A}_n(z) \psi(z)} : &= \\ &= -e^3 D_0^c(x-z) : \bar{\psi}(x) \gamma^n S^c(x-y) \hat{A}(y) S^c(y-z) \gamma_n \psi(z) :. \end{aligned} \quad (9)$$

Правила соответствия в этом случае приводят нас к диаграмме, изображенной на рис. 4.

Из рассмотрения простейших диаграмм (рис. 3 и 4) видно, что движение по направлению электронной линии в точности соответствует порядку матричных элементов справа налево в соответствующем члене  $S$ -матрицы. Например, во втором случае, представляя диаграмму рис. 4 в виде рис. 5, получаем в точности тот же порядок некоммутирующих матричных сомножителей

$$\bar{\psi}(x) \gamma^m S^c(x-y) \hat{A}(y) S^c(y-z) \gamma^n \psi(z),$$

что и в (9).

Отметим, что построение по сформулированным правилам нормальных произведений со спариваниями, соответствующих различным диаграммам, может привести к ошибке в знаке. Поэтому установленные выше правила соответствия должны быть дополнены *правилом знаков*.

С этой целью заметим, что ошибка в знаке происходит лишь в выражениях, соответствующих замкнутым электронным циклам. В самом деле, по правилам соответствия диаграмма рис. 3 соответствует выражению

$$(ie)^2 \overline{\psi(x)} \overline{\psi(y)} \psi(y) \psi(x),$$



Рис. 3. Диаграмма собственной энергии фотона.

которое отличается знаком от (8). Ясно также, что и в более общем случае такое отличие в знаке будет иметь место для любой группы спариваний, соответствующей каждому из замкнутых циклов диаграммы, независимо от порядка этих циклов. Отсюда вытекает, что выражение, полученное по правилам соответствия, должно быть дополнительно умножено на

$$\eta = (-1)^l, \tag{10}$$

где  $l$  — число замкнутых циклов в рассматриваемой диаграмме.

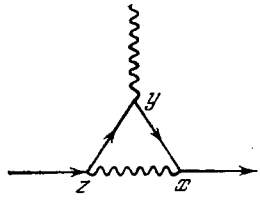


Рис. 4. Вершинная диаграмма третьего порядка.

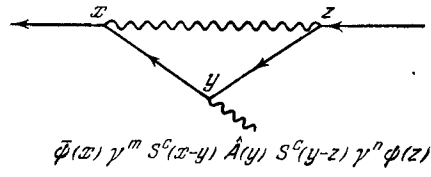


Рис. 5.

**23.3. Примеры.** Проиллюстрируем на примерах приложение правил соответствия вместе с правилом знаков (10). Построим член операторной функции четвертого порядка  $S_4(x, y, z, t)$ , соответствующий диаграмме рис. 6. Следуя вдоль электронного цикла от точки  $x$ , получаем матричные множители

$$\begin{aligned} x & \xleftarrow{ie\gamma^t} t & \xleftarrow{ie\gamma^k} z & \xleftarrow{ie\gamma^n} y & \xleftarrow{ie\gamma^m} x \\ \frac{1}{i} S^c(x-t) &= \frac{1}{i} S^c(t-z) = \frac{1}{i} S^c(z-y) = \frac{1}{i} S^c(y-x) = \tag{11} \\ &= \overline{\psi(x)} \psi(t); &= \overline{\psi(t)} \psi(z); &= \overline{\psi(z)} \psi(y); &= \overline{\psi(y)} \psi(x). \end{aligned}$$

Умножая произведение (11) на фотонные множители

$$A_n(z), ig^{mk} D_0^c(y-t), A_l(x)$$

и на

$$\eta = (-1)^1 = -1,$$

получаем, выполняя суммирование по спинорным индексам и индексам поляризации электромагнитного поля ( $k, l, m, n$ ):

$$\begin{aligned} -ie^4 \text{Sp} [ : (S^c(x-t) \gamma_n D_0^c(t-y) S^c(t-z) \hat{A}(z) S^c(z-y) \gamma^n S^c(y-x) A(x)) : ] = \\ = -e^4 \text{Sp} [ : \overline{\psi(x)} \psi(t) \gamma^k A_n(t) \psi(t) \overline{\psi(z)} \hat{A}(z) \psi(z) \overline{\psi(y)} \gamma^n A_n(y) \psi(y) \overline{\psi(x)} \hat{A}(x) : ] = \\ = i^4 e^4 : (\overline{\psi(t)} \gamma^k A_n(t) \psi(t) \overline{\psi(z)} \hat{A}(z) \psi(z) \overline{\psi(y)} \gamma^n A_n(y) \psi(y) \overline{\psi(x)} \hat{A}(x) \psi(x)) : , \end{aligned}$$

т. е. один из членов разложения функции

$$S_4(x, y, z, t) = i^4 T(\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) \mathcal{L}(z) \mathcal{L}(t))$$

на нормальные произведения с хронологическими спариваниями.

В качестве второго примера построим член операторной функции пятого порядка  $S_5(x, y, z, t, u)$ , соответствующий диаграмме с двумя электронными циклами рис. 7.

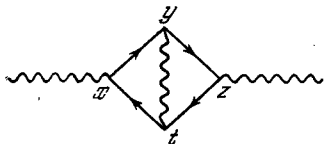


Рис. 6.

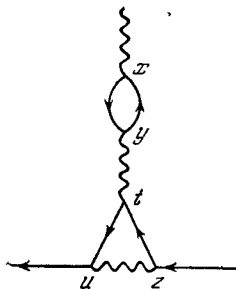


Рис. 7.

Выпишем последовательно матричные множители, соответствующие замкнутому циклу

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \text{---} & \bullet \\ ie\gamma^l & & ie\gamma^k \end{array} \quad \frac{1}{i} S^c(y-x) \quad \frac{1}{i} S^c(x-y)$$

и незамкнутому циклу

$$\begin{array}{ccccccc} \text{---} & & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \text{---} \\ & & ie\gamma^p; & & ie\gamma^m; & & ie\gamma^n; & & \\ \bar{\psi}(u); & & \frac{1}{i} S^c(u-t); & & \frac{1}{i} S^c(t-z); & & \psi(z) & & \end{array}$$

Умножая их на фотонные множители

$$\begin{array}{ccc} \overset{x}{\text{---}} \bullet & \overset{y}{\text{---}} \bullet \text{---} \bullet \overset{t}{\text{---}} & \bullet \overset{z}{\text{---}} \bullet \text{---} \bullet \overset{u}{\text{---}} \\ A_k(x); & ig^l m D_0^c(y-t); & ig^n p D_0^c(z-u) \end{array}$$

и на

$$\eta = (-1)^1 = -1,$$

получаем, выполнив суммирование по индексам поляризации ( $k, l, n, m, p$ ) и спинорным индексам, выражение

$$\begin{aligned} & -(ie)^5 : \text{Sp} \left( \gamma_m \frac{1}{i} S^c(y-x) \hat{A}(x) \frac{1}{i} S^c(x-y) iD_0^c(y-t) \times \right. \\ & \quad \left. \times \bar{\psi}(u) \gamma_n \frac{1}{i} S^c(u-t) \gamma^m \frac{1}{i} S^c(t-z) iD_0^c(z-u) \gamma^n \psi(z) \right) : = \\ & = -(ie)^5 : \text{Sp} \left( \overbrace{\gamma^l \psi(y) \bar{\psi}(x)} \hat{A}(x) \overbrace{\psi(x) \bar{\psi}(y)} \overbrace{A_l(y) A_m(t)} \times \right. \\ & \quad \left. \times \overbrace{\bar{\psi}(u) \gamma^p \psi(u)} \overbrace{\bar{\psi}(t) \gamma^m \psi(t)} \overbrace{\bar{\psi}(z) A_n(z) A_p(u)} \gamma^n \psi(z) \right) : , \end{aligned}$$

представляющее один из членов разложения функции

$$S_5(x, y, z, t, u) = i^5 T(\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) \mathcal{L}(z) \mathcal{L}(t) \mathcal{L}(u))$$

на нормальные произведения с хронологическими спариваниями.

**23.4. Заключительные замечания.** Мы убедились, таким образом, что правила соответствия в совокупности с правилом знаков действительно позволяют автоматически записать члены функций  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  в нормальной форме. Очевидно, для получения полного выражения операторной функции  $n$ -го порядка  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  необходимо в силу теоремы Вика выписать нормальные произведения, соответствующие всем возможным диаграммам  $n$ -го порядка, содержащим  $n$  узлов. Например, при  $n = 2$  надо выписать члены, соответствующие диаграммам (рис. 8), исчерпывающим возможные диаграммы второго порядка. Соответствующие нормальные произведения дают в сумме выражение (5) для  $S_2(x, y)$

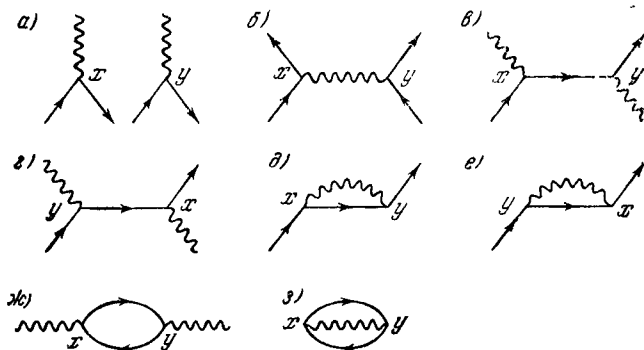


Рис. 8.

Мы провели здесь подробный анализ структуры членов  $S$ -матрицы, зависящей от лагранжиана взаимодействия электромагнитного и электрон-позитронного полей (3). Совершенно ясно, что изложенная методика построения членов  $S$ -матрицы с помощью диаграмм Фейнмана без труда может быть применена к любому другому локальному взаимодействию. При этом правила соответствия, разумеется, должны быть дополнены соответствующим образом. Например, лагранжиан псевдоскалярного взаимодействия нуклонного спинорного и псевдоскалярного мезонного полей имеет вид

$$\mathcal{L}(x) = ig : \bar{\Psi}(x) \gamma^5 \tau \Psi(x) \varphi(x) :. \quad (12)$$

Правила соответствия для этого лагранжиана вполне аналогичны правилам, приведенным в таблице I. Роль спиноров  $\psi$  здесь играют нуклонные спиноры  $\Psi$ , потенциал  $A$  заменяется на  $\varphi$ , а матрицы

$e\gamma^{\mu}$  — на  $ig\gamma^{\mu}\tau_i$ . В каждой вершине соответствующих диаграмм будет сходиться одна мезонная и две нуклонные линии.

При рассмотрении  $\beta$ -процессов используются лагранжианы типа (8.32):

$$\mathcal{L}(x) = G : \bar{\Psi}(x) O \Psi(x) \psi(x) O \nu(x) :, \quad (13)$$

содержащие три вида спинорных полей: нуклонное  $\Psi$ , электрон-позитронное  $\psi$  и нейтринное  $\nu$ . В этом случае должны быть сформулированы правила соответствия для операторов  $\Psi, \bar{\Psi}, \psi, \bar{\psi}, \nu, \bar{\nu}$  и их взаимных спариваний. В узлах соответствующих диаграмм будут встречаться уже четыре линии: две нуклонные, одна электронная и одна нейтринная. Свойством непрерывности здесь будут обладать по отдельности нуклонные и лептонные линии диаграммы.

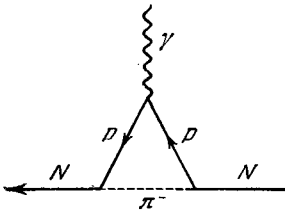


Рис. 9.

Представляют также интерес сложные процессы, в которых комбинируются взаимодействия различной природы. В рамках модели (12) магнитный момент электронейтрального нейтрона можно представить в форме результата многостепенного процесса взаимодействия нейтрона с электромагнитным полем следующего типа. Сначала нейтрон виртуально превращается в  $\pi^-$ -мезон и протон, затем одна из заряженных частиц ( $\pi^-$  или  $p$ ) взаимодействует с электромагнитным полем и, наконец,  $\pi^-$ -мезон и протон превращаются в нейтрон. Процесс может быть наглядно представлен в виде диаграммы, изображенной на рис. 9. Соответствующий член  $S$ -матрицы отвечает, очевидно,  $T$ -произведению двух лагранжианов  $\mathcal{L}_{\text{мес}}$  вида (12) и одному лагранжиану  $\mathcal{L}_{\text{в.д}}$  вида (3)

$$T(\mathcal{L}_{\text{мес}}(x) \mathcal{L}_{\text{в.д}}(y) \mathcal{L}_{\text{мес}}(z)).$$

Правила соответствия для таких диаграмм и членов  $S$ -матрицы представляются суммой правил соответствия для лагранжианов (3) и (12).

Мы видим, таким образом, что изображение членов  $S$ -матрицы с помощью диаграмм Фейнмана является универсальным приемом, пригодным для любых локальных лагранжианов взаимодействия, который позволяет автоматически получать члены разложения  $S$ -матрицы, соответствующие любым интересующим нас процессам.

## § 24. Правила Фейнмана для вычисления матричных элементов матрицы рассеяния

### 24.1. Переход к импульсному представлению.

Рассмотрим процесс вычисления матричных элементов матрицы рассеяния, занимающий центральное место в расчетах эффективных сечений различных процессов рассеяния и взаимного превращения частиц.



Вычисление матричных элементов наиболее удобно проводить в импульсном представлении, так как в этом представлении операторы поля  $u(x)$  и причинные функции  $\Delta^c(x-y)$  имеют простую структуру:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ikhx} \delta(k^2 - m^2) u(k) dk, \quad \Delta^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ikx} \Delta(k) dk,$$

$$u(k) = \sum_{\sigma} v^{\sigma}(k) a_{\sigma}(k), \quad \Delta(k) = \frac{P(k)}{m^2 - k^2 - i\epsilon}.$$

Запишем  $S$ -матрицу в импульсном представлении. Член  $n$ -го порядка матрицы рассеяния после приведения к нормальной форме выражается согласно теореме Вика суммой членов вида

$$\int dx_1 \dots \int dx_n K \dots \alpha \dots \beta \dots (x_1, \dots, x_n) \dots u_{\alpha}(x_j) \dots \overset{*}{u}_{\beta}(x_i) \dots \dots \quad (1)$$

При этом коэффициентные функции  $K \dots \alpha \dots \beta \dots (x_1, \dots, x_n)$  соответствуют внутренним линиям фейнмановских диаграмм и являются многократными произведениями спариваний входящих в рассмотрение полевых функций. Нормальное произведение

$$\dots u_{\alpha}(x_j) \dots \overset{*}{u}_{\beta}(x_i) \dots \quad (2)$$

содержит свободные операторы, соответствующие внешним линиям диаграммы.

Для определенности опять ограничимся случаем взаимодействия электромагнитного и электрон-позитронного спинорного полей, описываемым лагранжианом

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x) A(x) \psi(x); \quad (23.3)$$

В этом случае коэффициентные функции являются произведениями спариваний электромагнитного поля

$$\left. \begin{aligned} \overline{A_m(x)} A_n(y) &= ig^{mn} D_0^c(x-y), \\ D_0^c(x-y) &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon} dk \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и спариваний электрон-позитронного поля

$$\left. \begin{aligned} \overline{\psi_{\alpha}(x)} \psi_{\beta}(y) &= \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}^c(x-y), \\ S_{\alpha\beta}^c(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip(x-y)} \frac{(m + \hat{p})_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} dp, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

а нормальные произведения (2) содержат операторные функции электромагнитного и электрон-позитронного полей, обладающих

импульсными разложениями

$$\left. \begin{aligned} A_m(x) &= A_m^+(x) + A_m^-(x), \\ A_m^\pm(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{\pm ikx} \delta(k^2) A_m^\pm(k) dk, \\ A_m^\pm(k) &= \sum_{\nu=0, 1, 2, 3} e_m^\nu a_\nu^\pm(k); \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= \psi^+(x) + \psi^-(x), \\ \psi_\sigma^\pm(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{\pm ipx} \delta(p^2 - m^2) \psi_\sigma^\pm(p) dp, \\ \psi_\sigma^\pm(p) &= \sum_{\nu=1} v_\sigma^{\nu, \pm}(p) a_\nu^\pm(p); \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x), \\ \bar{\psi}_\sigma^\pm(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{\pm ipx} \delta(p^2 - m^2) \bar{\psi}_\sigma^\pm(p) dp, \\ \bar{\psi}_\sigma^\pm(p) &= \sum_{\nu=1} \bar{v}_\sigma^{\nu, \pm}(p) \bar{a}_\nu^\pm(p). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Подставляя выражения (3) — (7) в (1), видим, что интеграция по переменным  $x_1, \dots, x_n$  сводится теперь к вычислению независимых интегралов вида

$$\int dx_j e^{ix_j(p_1 - p_2 + k)} = (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 + k). \quad (8)$$

Можно было бы установить правила соответствия для построения элементов  $S$ -матрицы в импульсном представлении уже теперь. Однако удобнее рассмотреть процесс вычисления матричных элементов от членов  $S$ -матрицы и сформулировать прямо правила соответствия для построения матричных элементов. Эти правила впервые были предложены Фейнманом (1949а, б) и известны как *правила Фейнмана*.

**24.2. Вычисление матричных элементов.** Рассмотрим матричные элементы нормальных произведений (2) между различными состояниями, содержащими частицы с определенными импульсами. Как было установлено в § 9, амплитуда состояния, содержащего  $n$  частиц различного сорта с определенными значениями импульсов, представляется выражением вида

$$\begin{aligned} \Phi_{\dots k \dots} &= a_1(k_1) a_2^+(k_2) \dots a_n^+(k_n) \Phi_0 = \\ &= \int dk_1^0 \sqrt{2k_1^0} \delta(k_1^2 - m_1^2) a_1(k_1) \dots \int dk_n^0 \sqrt{2k_n^0} \delta(k_n^2 - m_n^2) a_n^+(k_n) \Phi_0. \end{aligned} \quad (9)$$

При вычислении матричного элемента

$$\Phi_{\dots k' \dots}^* \dots u_\alpha(x_j) \dots u_\beta(x_i) \dots \Phi_{\dots k \dots} \quad (10)$$

операторы рождения  $u^+$  и  $u^{*+}$  надо коммутировать с операторами уничтожения  $a_i^-$  из амплитуды  $\Phi^* \dots k' \dots$ , а операторы  $u^-$  и  $u^{*-}$  — с операторами  $a_i^+$  из амплитуды  $\Phi \dots k \dots$  до тех пор, пока один из них не подействует на  $\Phi_0$  или  $\Phi_0^*$ , что дает нуль.

Процесс вычисления таких матричных элементов был подробно разобран в начале § 17. Там было установлено, что матричный элемент (10) оказывается отличным от нуля, если для каждого оператора

$$u(x) = u^+(x) + u^-(x)$$

из нормального произведения найдется оператор  $a^+$  в  $\Phi$  или  $a^*$  в  $\Phi^*$  того же поля, который «погасит» оператор  $u$  в результате коммутации с ним. Таким образом, (10) будет отличен от нуля в случае, когда сумма числа частиц каждого поля в начальном состоянии  $\Phi \dots k \dots$  и конечном состоянии  $\Phi \dots k' \dots$  в точности равна числу операторных функций данного поля в нормальном произведении (2). Матричный элемент (10) окажется отличным от нуля также в случае, если, кроме операторов, «гасящих» нормальное произведение, в  $\Phi^* \dots k' \dots$  и  $\Phi \dots k \dots$  содержатся операторы, гасящие друг друга. При этом полное число частиц в состояниях  $\Phi^* \dots k' \dots$  и  $\Phi \dots k \dots$  превышает число операторов в (2) на некоторое четное число. Однако такие матричные элементы отличны от нуля лишь тогда, когда импульсы указанных «лишних» частиц в состояниях  $\Phi^* \dots k' \dots$  и  $\Phi \dots k \dots$  совпадают.

Ограничиваясь случаем, когда ни для одной частицы импульс в начальном состоянии не равен импульсу в конечном состоянии, приходим к выводу, что матричный элемент (10) представляется в виде произведения результатов коммутации операторов

$$u^-(x_j) \text{ с } \int \theta(k^0) a_0^+(k) \delta(k^2 - m^2) \sqrt{2k^0} dk^0 = a_0^+(k)$$

и

$$u^+(x_i) \text{ с } \int \theta(k^0) a_0^-(k) \delta(k^2 - m^2) \sqrt{2k^0} dk^0 = a_0^-(k),$$

вычисляя которые с помощью перестановочных соотношений, записанных в виде

$$\delta(p^2 - m^2) \delta(k^2 - m^2) \{a_0^-(p), a_0^+(k)\} = \delta_{\sigma_0} \delta(p - k) \delta(k^2 - m^2),$$

находим:

$$\begin{aligned}
 \{u^-(x_j), \hat{a}_0^+(k)\} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk^0 \theta(k^0) \sqrt{2k^0} \int dp e^{-ipx_j} \sum_{\sigma} v^{\sigma,-}(p) \times \\
 &\times \{a_0^-(p), \hat{a}_0^+(k)\} \delta(k^2 - m^2) \delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \times \\
 &\times \int dk^0 \theta(k^0) \sqrt{2k^0} \int dp e^{-ipx_j} \sum_{\sigma} v^{\sigma,-}(p) \delta(p - k) \delta(k^2 - m^2) \delta_{\sigma 0} = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk^0 \theta(k^0) \sqrt{2k^0} \delta(k^2 - m^2) e^{-ikx_j} v^{0,-}(k) = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} v^{0,-}(k) e^{-ikx_j}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

где

$$v^{0,-}(k) = \frac{v^{0,-}(k)}{\sqrt{2k^0}} \Big|_{k^0 = \sqrt{k^2 + m^2}},$$

а также, подобной выкладкой,

$$\{\hat{a}_0^-(k), u^+(x_i)\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} v^{0,+}(k) e^{ikx_i}. \quad (12)$$

Таким образом, после выполнения коммутаций матричный элемент (10) действительно выражается в виде произведения

$$\prod_{(k)} \frac{v^-(k)}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ikx_j} \prod_{(k')} \frac{v^+(k')}{(2\pi)^{3/2}} e^{ik'x_i}, \quad (13)$$

причем множители  $(2\pi)^{-3/2} e^{-ikx} v^-(k)$  соответствуют частицам начального состояния, а множители  $(2\pi)^{-3/2} e^{ik'x} v^+(k')$  — частицам конечного состояния.

Обсудим полученные результаты с точки зрения их соответствия фейнмановским диаграммам. Наиболее важным является тот факт, что каждой внешней линии диаграммы с точки зрения структуры матричных элементов соответствует реальная частица в начальном или конечном состоянии. Это обстоятельство и позволяет считать фейнмановские диаграммы схематическими изображениями реально происходящих процессов взаимодействия элементарных частиц. Тип процессов при этом определяется структурой узлов диаграммы, которая в свою очередь зависит от лагранжиана взаимодействия.

Узлы лагранжиана спинорной электродинамики  $e\bar{\psi}\hat{A}\psi$  могут, очевидно, рассматриваться как схематические изображения процессов поглощения или испускания фотона позитроном или электроном и процессов рождения и аннигиляции пары электрон — позитрон с поглощением или испусканием фотона, т. е. процессов типов, представленных на рис. 1 (см. стр. 90).

Узлы лагранжиана  $\beta$ -взаимодействий описывают акты взаимодействия, в которых участвует одновременно четыре частицы: два нуклона, электрон (позитрон) и нейтрино.

Возникающие при переходе к импульсному представлению (8)  $\delta$ -функции типа  $\delta(p - p' + k...)$  выражают, очевидно, закон сохранения энергии-импульса взаимодействующих частиц в каждом из отдельных актов. Складывая аргументы всех этих функций, мы получаем условие

$$\Sigma p - \Sigma p' = 0, \quad (14)$$

выражающее закон сохранения полного 4-вектора энергии-импульса для всех реальных частиц, участвующих в рассматриваемом процессе.

Для формулировки конкретных правил соответствия между матричными элементами и фейнмановскими диаграммами вернемся к случаю спинорной электродинамики (23.3). Нетрудно убедиться, что электрону в начальном состоянии с импульсом  $p$  соответствует результат коммутации  $\psi(x)$  с  $a_v^*(p)$ , равный

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u^v - (p) e^{-ipx}.$$

Позитрону с импульсом  $p$  соответствует фактор

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \bar{v}^v - (p) e^{-ipx},$$

электрону в конечном состоянии — фактор

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \bar{v}^v + (p) e^{ipx},$$

позитрону в конечном состоянии — фактор

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u^v + (p) e^{ipx},$$

фотону в начальном состоянии с импульсом  $k$  и поляризацией  $e_n$  соответствует результат коммутации  $A_m(x)$  с  $a_n^+(k)$ , равный

$$-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{g^{nl} e_m^l}{\sqrt{2k^0}} e^{-ikx} = \frac{e_m^n}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k^0}} e^{-ikx}$$

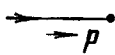
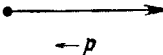
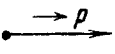
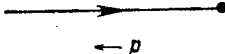
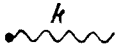
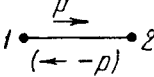
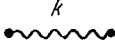
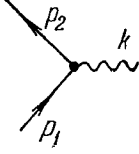
и, наконец, фотону в конечном состоянии — фактор

$$-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{g^{nl} e_m^l}{\sqrt{2k^0}} e^{ikx} = \frac{e_m^n}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k^0}} e^{ikx}.$$

Мы видим отсюда, что частицам, входящим в точку  $x$  с импульсом  $k$ , всегда соответствует отрицательно-частотная экспонента  $\exp(-ikx)$ , а частицам, выходящим из точки  $x$ , — фактор  $\exp(ikx)$ . Поэтому удобно условиться сохранить такое соответствие и для внутренних линий диаграммы.

Согласно представлению (4) будем поэтому считать, что спаривание  $\overline{\psi(x)} \psi(y)$  описывает электрон с 4-импульсом  $p$ , выходящий

**Правила соответствия для матричных элементов  
в импульсном представлении  
(без учета правила знаков и свойств симметрии)**

№ п/п	Частица и ее состояние	Фактор в матричном элементе	Элемент диаграммы
1	Электрон в начальном состоянии с импульсом $p$	$\frac{v^{\nu, -}(p)}{(2\pi)^{3/2}}$	
2	Позитрон в начальном состоянии с импульсом $p$	$\frac{\bar{v}^{\nu, -}(p)}{(2\pi)^{3/2}}$	
3	Электрон в конечном состоянии с импульсом $p$	$\frac{\bar{v}^{\nu, +}(p)}{(2\pi)^{3/2}}$	
4	Позитрон в конечном состоянии с импульсом $p$	$\frac{v^{\nu, +}(p)}{(2\pi)^{3/2}}$	
5	Фотон в начальном или конечном состоянии с поляризацией $e_n$ и импульсом $k$	$\frac{e_n^{\nu}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k^0}} \quad (n \neq 0)$	
6	Движение электрона из 1 в 2 (или позитрона — из 2 в 1)	$\frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{m + \hat{p}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} dp$	
7	Движение фотона между вершинами с индексами суммирования $m$ и $n$	$\frac{g^{mn}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{1}{k^2 + i\epsilon} dk$	
8	Узел с индексом суммирования $m$ , в который входят электронная линия $p_1$ и фотонная линия $k$ и выходит электронная линия $p_2$	$ie\gamma^m (2\pi)^4 \delta(p_2 - p_1 - k)$	

из точки  $y$  и входящий в точку  $x$ :

$$\overline{\psi(x)} \bar{\psi}(y) \sim \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \quad (15)$$

$x$   $y$

Отметим, что спаривание и диаграмма (15) одновременно описывают позитрон с 4-импульсом ( $-p$ ), движущийся в обратном направлении.

Выполняя интеграцию по переменным  $x_1, \dots, x_n$  с учетом (8), приходим к правилам соответствия, приведенным в таблице II.

**24.3. Учет свойств симметрии.** При составлении матричных элементов в импульсном представлении необходимо также учитывать свойства симметрии коэффициентов  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  матрицы рассеяния. Например, симметрия коэффициента  $S_2(x_1, x_2)$  по аргументам  $x_1$  и  $x_2$  приводит к тому, что диаграммам типа комптоновского рассеяния (рис. 8, *в*, *г*) в  $x$ -представлении соответствуют два члена в  $S_2(x_1, x_2)$ :

$$: \bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \overline{\psi(x_1)} \bar{\psi}(x_2) \hat{A}(x_2) \psi(x_2) :$$

и

$$\begin{aligned} : \overline{\psi(x_1) \hat{A}(x_1) \psi(x_1)} \bar{\psi}(x_2) \hat{A}(x_2) \psi(x_2) : &= \\ &= : \bar{\psi}(x_2) \hat{A}(x_2) \overline{\psi(x_2)} \bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \psi(x_1) : , \end{aligned}$$

интеграция которых по  $x_1$  и  $x_2$  приводит к совпадающим выражениям.

В общем случае свойство симметрии  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  относительно любых перестановок аргументов приводит к компенсации множителя  $(n!)^{-1}$  при переходе к импульсному представлению. Необходимо также иметь в виду, что свойства симметрии лагранжиана, а также рассматриваемых диаграмм могут приводить к появлению дополнительных численных множителей. В качестве примера рассмотрим простейшую диаграмму рассеяния (см. рис. 10) в модельной теории с лагранжианом

$$\mathcal{L}(x) = \frac{\lambda}{3!} : \varphi^3(x) :, \quad (16)$$

где  $\varphi$  — скалярное поле (подробнее об этой модели см. в § 36).

Матричный элемент второго порядка теории возмущений

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\langle a^-(\mathbf{p}') a^-(\mathbf{k}') \left| \frac{1}{2!} \int S_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right| a^+(\mathbf{p}) a^+(\mathbf{k}) \right\rangle = \\ &= \frac{\lambda^2}{2! (3!)^2} \int dx_1 dx_2 \langle a^-(\mathbf{p}') a^-(\mathbf{k}') | T(\varphi^3(x_1) \varphi^3(x_2)) | a^+(\mathbf{p}) a^+(\mathbf{k}) \rangle \quad (17) \end{aligned}$$

вычислим с помощью теоремы Вика. Применяя теорему Вика относительно крайнего левого оператора, получаем с учетом того, что аргументы  $x_1$  и  $x_2$  — немые:

$$6 \frac{\lambda^2}{2! (3!)^2} \int dx_1 dx_2 \overline{a^-(\mathbf{p}')} \varphi(x_1) \langle a^-(\mathbf{k}') T(\varphi^2(x_1) \varphi^3(x_2)) a^+(\mathbf{p}) a^+(\mathbf{k}) \rangle.$$

Коэффициент 6 здесь соответствует шести возможным вариантам спаривания оператора  $a^-(p')$  с операторами  $\varphi(x_1)$ ,  $\varphi(x_2)$  из  $S_2(x_1, x_2)$ . Применяя повторно теорему Вика относительно  $a^-(k')$  и т. д. с учетом топологии диаграммы рис. 10, получаем последовательно:

$$\begin{aligned} M_2 &= 6 \cdot 2 \frac{\lambda^2}{2! (3!)^2} \int dx_1 dx_2 \underline{a^-(p')} \varphi(x_1) \underline{a^-(k')} \varphi(x_1) \times \\ &\quad \times \langle T(\varphi(x_1) \varphi^3(x_2) a^+(p) a^+(k')) \rangle = \\ &= 6 \cdot 2 \cdot 3 \frac{\lambda^2}{2! (3!)^2} \int dx_1 dx_2 \underline{a^-(p')} \varphi(x_1) \underline{a^-(k')} \varphi(x_1) \overline{\varphi(x_1) \varphi(x_2)} \times \\ &\quad \times \langle \varphi^2(x_2) a^+(p) a^+(k) \rangle = \\ &= \lambda^2 \int dx_1 dx_2 \underline{a^-(p')} \varphi(x_1) \underline{a^-(k')} \varphi(x_1) \overline{\varphi(x_1) \varphi(x_2)} \underline{\varphi(x_2) a^+(p)} \underline{\varphi(x_2) a^+(k)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, симметрия лагранжиана взаимодействия (16) относительно всех трех входящих в него операторов  $\varphi$  приводит

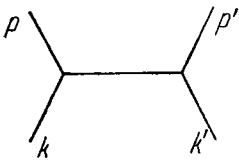


Рис. 10. Диаграмма рассеяния второго порядка в модельной теории  $\varphi^3$ .

к эффективной компенсации множителя  $3! = 6$ , стоящего в знаменателе константы связи. Отметим еще, что в случае, когда в начальном и (или) конечном состоянии находится  $N$  квантов одного и того же поля (несколько фотонов, электронов, мезонов и т. п.), соответствующая нормированная амплитуда содержит дополнительные нормировочные множители типа  $(N!)^{-1/2}$ , которые также необходимо принимать во внимание.

Разумеется, можно формализовать рассмотренные свойства симметрии и сформулировать соответствующие дополнения к правилам Фейнмана, приведенным в таблице II.

Однако, как показывает практика, целесообразно использовать правила соответствия для построения матричных элементов с точностью до численного множителя и знака. Вычисление же численного множителя и знака целесообразнее производить с помощью теоремы Вика.

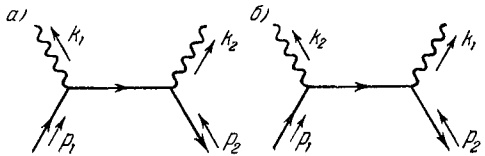


Рис. 11.

Отметим, что введенные фейнмановские диаграммы фактически описывают одновременно несколько процессов.

Так, диаграмма (рис. 11, а) описывает, во-первых, процесс, в котором электрон  $p_1$  сначала испускает фотон  $k_1$ , а затем аннигилирует с позитроном  $p_2$ , испуская фотон  $k_2$ . Кроме того, та же диаграмма описывает процесс, в котором сначала позитрон  $p_2$  испускает фотон  $k_2$ , а затем аннигилирует с электроном  $p_1$ ,



испуская фотон  $k_1$ . В первом случае внутренняя электронная линия соответствует движению электрона в ее направлении, во втором — движению позитрона в противоположном направлении.

В общем случае можно считать, что каждая внутренняя электронная линия описывает либо электрон с 4-импульсом  $p$  (при  $p^0 > 0$ ), либо позитрон с 4-импульсом  $-p$  (при  $p^0 < 0$ ), а каждая внутренняя фотонная линия описывает фотоны, движущиеся в одном из двух возможных направлений, поскольку вся картина движения частиц в целом не противоречит законам сохранения энергии-импульса

$$p - p' \pm k = 0,$$

вытекающим из строения вершинных частей матричного элемента. При этом положительно-частотная часть причинной функции  $\Delta^c$  описывает движение в одном направлении, а отрицательно-частотная часть — в противоположном направлении.

Частицы, появляющиеся при таком способе описания лишь в промежуточных состояниях (как, например, фотон в диаграмме типа рис. 8, б), называются *виртуальными*. Промежуточные состояния реальных частиц, как, например, состояние электрона  $p_1 - k_1$  (или позитрона  $p_2 - k_2 = -(p_1 - k_1)$ ) на диаграмме рис. 11, а соответственно называются *виртуальными состояниями*.

Виртуальные состояния реальных частиц и состояния виртуальных частиц отличаются от состояний реальных частиц тем, что в этих состояниях энергия и импульс не зависят друг от друга, т. е. в виртуальных состояниях не выполняется соотношение

$$p^2 - m^2 = 0.$$

**24.4. Рассеяние внешними полями.** Обратимся к структуре матричных элементов для процессов рассеяния частиц внешними классическими полями. Такие поля описываются некантованным потенциалом  $u^{\text{ext}}(x)$ , являющимся заданной функцией пространственных координат  $x$  и времени  $x^0$ . Например, внешнее классическое электромагнитное поле описывается потенциалом  $A_n^{\text{ext}}(x)$ . Полный лагранжиан взаимодействия для рассматриваемой нами спинорной электродинамики имеет теперь вид

$$\mathcal{L}(x) = -j^n(x)(A_n(x) + A_n^{\text{ext}}(x)). \quad (19)$$

Соответственно в матрице рассеяния появятся члены, содержащие некантованное поле  $A^{\text{ext}}$ . В матричные элементы войдут импульсные представления внешнего потенциала

$$A_n^{\text{ext}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{iqx} A_n^{\text{ext}}(q) dq, \quad (20)$$

которые ввиду своей неоператорной природы не должны коммутироваться с фотонными операторами амплитуд состояния и не связаны с реальными частицами, изображаемыми внешними линиями диаграмм.

Мы условимся поэтому ставить в соответствие фактору

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int A^{\text{ext}}(k) dk \quad (21)$$

волнистую линию, выходящую из вершины диаграммы, соответствующей члену лагранжиана  $j^n(x) A_n^{\text{ext}}(x)$ , и заканчивающуюся в заштрихованном кружке, которым будет символически обозначаться рассеивающий центр (рис. 12).

Изображение взаимодействия с классическим полем в виде виртуального фотона, которым взаимодействующая частица (здесь электрон) обменивается с источником классического поля, соответствует физической природе явления. Классическое поле отличается от квантованного поля лишь тем, что оно фиксировано и процессы взаимодействия на нем не сказываются. Это поле можно рассматривать как предел среднего значения некоторого обычного квантованного поля при бесконечном увеличении его интенсивности. Взаимодействие с таким полем и в пределе фактически осуществляется виртуальными фотонами, процесс распространения которых в предельном случае описывается не причинной фотонной функцией  $D_0^c$ , а заданным потенциалом  $A^{\text{ext}}$ .

Интегрируя по переменным  $x_i$  при переходе к импульсному представлению, мы получаем в результате интегрирования выражения

$$j^n(x_k) A_n^{\text{ext}}(x_k) \quad (22)$$

по переменной  $x_k$  множитель  $\delta(p_1 - p_2 + q)$ , соответствующий передаче части энергии и импульса виртуальному фотону. Таким образом, закон сохранения энергии-импульса реальных частиц (14) в процессах рассеяния классическим полем не выполняется.

Рассмотрим важный частный случай рассеяния *статическим* классическим полем

$$A_n^{\text{ext}}(x) = a_n(x),$$

$$a_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-iqx} \varphi_n(q) dq. \quad (23)$$

В разложении статического потенциала отсутствует переменная  $q^0$ , поэтому виртуальные фотоны, описывающие взаимодействие со стационарным полем, имеют энергию  $q^0 = 0$  и переносят лишь импульс. Интегрируя (22) по  $x$ , мы получаем  $\delta$ -функцию

$$\delta(p - p' + q) = \delta(p^0 - p'^0) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' + \mathbf{q}),$$

выражающую закон сохранения энергии ( $p^0 = p'^0$ ) и закон передачи импульса ( $\mathbf{p}' - \mathbf{p} = \mathbf{q}$ ). Второй множитель  $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' + \mathbf{q})$ , однако, снимается затем интегрированием по  $\mathbf{q}$ . В соответствии

с этим полный закон сохранения (14) уже не будет иметь места и заменится законом сохранения одной энергии

$$\sum p^0 - \sum p'^0 = 0. \quad (24)$$

**24.5. Общая структура матричных элементов.** Рассмотрим в общих чертах структуру матричных элементов матрицы рассеяния

$$S = S(1),$$

определенной в § 20 в виде предела матрицы  $S(g)$  при неограниченном расширении области, в которой  $g(x) = 1$ , на все пространство-время.

Для этого необходимо исследовать также структуру матричных элементов матрицы  $S(g)$

$$\Phi_{\dots p'}^* \dots S(g) \Phi_{\dots p} \dots \quad (25)$$

и особенности предельного перехода  $g(x) \rightarrow 1$ .

Из структуры матрицы  $S(g)$ , представленной в виде

$$S(g) = T \left( \exp i \int \mathcal{L}(x; g) dx \right), \quad (21.38)$$

следует, что матричные элементы (25) отличаются от уже исследованных матричных элементов

$$\Phi_{\dots p'}^* \dots S(1) \Phi_{\dots p} \dots$$

только наличием дополнительного множителя  $g(x)$  в лагранжиане взаимодействия  $\mathcal{L}(x)$ . Поэтому  $g(x)$  условно можно считать некото-

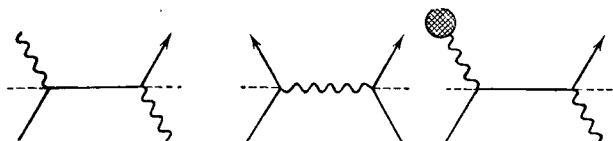


Рис. 13.

рым классическим внешним полем, взаимодействие с которым происходит в каждом узле диаграммы Фейнмана. Фурье-образу  $g$ -поля

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ikx} g(x) dx \quad (26)$$

на диаграммах можно сопоставить некоторую линию наподобие изображенной на рис. 13, выходящую из каждого узла, но не выходящую за пределы диаграммы. Эту линию можно изображать, например, пунктиром (рис. 13). Кроме того, введение функции  $g(x)$  в лагранжиан, очевидно, нарушает закон сохранения энергии-импульса в каждом узле, а следовательно, и по всей диаграмме в целом.

С помощью теоремы Вика матричный элемент (25) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{\dots p' \dots}^* S(g) \Phi_{\dots p \dots} &= \sum_{(n, I_n)} \int K_{j_n}(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots \\ &\dots g(x_n) \Phi_{\dots p' \dots}^* \dots u_\alpha(x_j) \dots : \Phi_{\dots p \dots} dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (27)$$

Матричные элементы в правой части после выполнения коммутаций дают:

$$\begin{aligned} \Phi_{\dots p' \dots}^* \dots u_\alpha(x_j) \dots : \Phi_{\dots p \dots} &= \\ &= \sum A(\dots p' \dots p \dots) \exp \{i(p'_i x_{i_1} + \dots + p'_s x_{i_s} - p_1 x_{i_1} - \dots - p_r x_{i_r})\} \\ &\quad (i, j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (28)$$

Благодаря трансляционной инвариантности коэффициентных функций  $K(x_1, \dots, x_n)$  их импульсное представление содержит  $\delta$ -функцию:

$$K(x_1, \dots, x_n) = \int \delta\left(\sum k_j\right) Q(k_1, \dots, k_n) e^{i \sum k_j x_j} dk_1 \dots dk_n.$$

Используя также соотношение (26), получаем отсюда:

$$\begin{aligned} K(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) &= \\ &= \int \delta\left(\sum k_j\right) Q(k_1, \dots, k_n) \tilde{g}(k'_1) \dots \tilde{g}(k'_n) e^{i \sum (k_j + k'_j) x_j} dk \dots dk' \dots = \\ &= \int K_g(k_1, \dots, k_n) e^{i \sum k_j x_j} dk \dots, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} K_g(k_1, \dots, k_n) &= \\ &= \int \delta\left(\sum k_j - \sum k'_j\right) Q(k_1 - k'_1, \dots, k_n - k'_n) \tilde{g}(k'_1) \dots \tilde{g}(k'_n) \dots dk' \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя (28) и (29) в (27), получаем:

$$\Phi_{\dots p' \dots}^* S(g) \Phi_{\dots p \dots} = \sum A(\dots p' \dots p \dots) K_g(\dots k \dots) (2\pi)^{4n}, \quad (31)$$

где каждое  $k$  равно либо одному из  $p'$  или из  $p$ , либо разности  $p$  и  $p'$ , либо, наконец, нулю. Во всяком случае,

$$\sum k = \sum p - \sum p'.$$

Как уже упоминалось, функция  $g(x)$  есть функция области 4-пространства, в котором происходит взаимодействие. Считая, что процесс происходит в объеме  $V$  и в интервале времени  $T$ , получаем, что

$$g(x) = 1 \quad \text{при } x \in V, \quad x^0 \in T$$

и достаточно быстро спадает к нулю около границ этой области. Увеличивая неограниченно размеры областей  $V$  и  $T$ , мы приходим в пределе к положению, когда взаимодействие включается в беско-

нечно удаленном прошлом, выключается в бесконечно удаленном будущем и распространено на все пространство. С помощью такого предельного перехода обычно и определяется матрица рассеяния  $S(1)$ .

Фурье-образ  $\tilde{g}(k)$  при этом стремится к величине, пропорциональной  $\delta(k)$ . Чтобы найти коэффициент пропорциональности, заметим, что

$$\int \tilde{g}(k) dk = g(0) = 1,$$

и потому имеем приближенно

$$\tilde{g}(k) \approx \delta(k). \quad (32)$$

Выполняя теперь интеграции в (30), находим, используя (32),

$$\begin{aligned} K_g(k_1, \dots, k_n) &= \\ &= \int Q(k'_2 + \dots + k'_n - k_2 - \dots - k_n, k_2 - k'_2, \dots, k_n - k'_n) \times \\ &\quad \times \tilde{g}(\sum k_j - \sum k'_j + k'_1) \tilde{g}(k'_2) \dots \tilde{g}(k'_n) dk'_2 \dots dk'_n \approx \\ &\quad \approx \tilde{g}(\sum k_j) Q(-k_2 - \dots - k_n, \dots, k_2, \dots, k_n) \approx \\ &\quad \approx \tilde{g}(\sum k_j) Q(k_1, \dots, k_n). \end{aligned} \quad (33)$$

Для выполнения этой интеграции важно, чтобы функция  $Q$  была непрерывна около точки  $(k_1, \dots, k_n)$ .

Подставляя (33) в (31), получаем теперь:

$$\Phi_{\dots p' \dots}^* S(g) \Phi_{\dots p \dots} \approx \tilde{g}(\sum p - \sum p') F(p', p), \quad (34)$$

а потому ввиду (32)

$$\Phi_{\dots p' \dots}^* S(1) \Phi_{\dots p \dots} = \delta(\sum p - \sum p') F(p', p). \quad (35)$$

При определении вероятностей процессов рассеяния приходится вычислять квадраты матричных элементов типа

$$|\Phi_{\dots p' \dots}^* S \Phi_{\dots p \dots}|^2, \quad (36)$$

которые естественно определить как асимптотические при  $V \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow \infty$  формы выражений

$$|\Phi_{\dots p' \dots}^* S(g) \Phi_{\dots p \dots}|^2 \approx |\tilde{g}(\sum p - \sum p')|^2 |F(p', p)|^2.$$

Выражение  $|\tilde{g}(k)|^2$  в пределе (32) формально стремится к  $\delta^2(k)$ . Здесь, однако, следует воспользоваться тем (известным из квантовой механики) обстоятельством, что нас будет интересовать вероятность процесса, *отнесенная к единичному интервалу времени и единичному объему*.

Поэтому согласно (26) находим приближенно

$$\begin{aligned} |\tilde{g}(k)|^2 &= \\ &= \tilde{g}(k) \tilde{g}(k) \approx \delta(k) \tilde{g}(0) = \delta(k) \frac{1}{(2\pi)^4} \int g(x) dx \Big|_{g(x) \rightarrow 1} \rightarrow \delta(k) \frac{VT}{(2\pi)^4}. \end{aligned}$$

Для интересующего нас квадрата матричного элемента (36) получаем теперь предельное выражение в виде

$$|\Phi_{\dots p' \dots}^* S(1) \Phi_{\dots p \dots}|^2 = \frac{VT}{(2\pi)^4} \delta(\sum p - \sum p') |F(p', p)|^2. \quad (37)$$

Аналогичную выкладку можно провести при рассеянии частиц классическим стационарным полем типа (23). В этом случае, как было установлено, импульс не сохраняется, а сохраняется лишь энергия и вместо (35) и (37) получим:

$$\Phi_{\dots p' \dots}^* S(1) \Phi_{\dots p \dots} = \delta(\sum p^0 - \sum p'^0) F(p', p), \quad (38)$$

$$|\Phi_{\dots p' \dots}^* S(1) \Phi_{\dots p \dots}|^2 = \frac{T}{2\pi} \delta(\sum p^0 - \sum p'^0) |F(p', p)|^2. \quad (39)$$

## § 25. Вероятности процессов рассеяния и эффективные сечения

**25.1. Нормировка амплитуды состояния.** Установим связь между матричными элементами  $S$ -матрицы и вероятностями процессов рассеяния. Рассмотрим вначале случай, когда взаимодействие включено с интенсивностью  $g(x)$ , локализованной в конечной пространственно-временной области, и поставим обычную задачу теории рассеяния, когда до включения взаимодействия имеется  $s$  потоков частиц с точно определенными импульсами  $p_1, \dots, p_s$  и внутренними квантовыми числами  $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ , характеризующими массу, заряд и спин, и требуется найти среднее число частиц, рассеянных с импульсами, лежащими в бесконечно малых областях  $dp'_1, \dots, dp'_r$ , и с внутренними квантовыми числами  $\sigma'_1, \dots, \sigma'_r$ .

Ясно, прежде всего, что, как и в аналогичных задачах обычной квантовой механики, мы имеем здесь дело с ненормированными амплитудами состояний и должны воспользоваться нормировкой на единицу объема. Чтобы определить амплитуду состояния с такой нормировкой, естественно обратиться к предельному переходу, рассматривая последовательность амплитуд состояний с неограниченно возрастающей обычной нормой.

Получим эту амплитуду сначала для случая одной частицы. Возьмем амплитуду одночастичного состояния

$$\Phi_1 = \int \chi_\sigma(p) a_\sigma^+(p) dp \Phi_0 \quad (1)$$

и заметим, что ее норма равна

$$\Phi_1^* \Phi_1 = \int |\chi_\sigma(p)|^2 dp = N. \quad (2)$$

Поэтому, полагая  $N = 1$ , можем считать, что выражение

$$|\chi_\sigma(p)|^2 dp$$

дает вероятность того, что частица, характеризуемая внутренним квантовым числом  $\sigma$ , обладает импульсом в интервале  $dp$  около

среднего значения  $p$ . Сама функция  $\chi(p)$  является, таким образом, волновой функцией частицы в импульсном представлении. Поэтому ее фурье-образ

$$\varphi_{\sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipx} \chi_{\sigma}(p) dp \quad (3)$$

есть волновая функция в конфигурационном представлении с нормой, равной

$$\int |\varphi_{\sigma}(x)|^2 dx = \int |\chi_{\sigma}(p)|^2 dp = N.$$

При  $N = 1$  величину

$$|\varphi(x)|^2 dx \quad (4)$$

можно интерпретировать как вероятность в конфигурационном пространстве. Полагая  $N$  равным числу частиц, много большему единицы, находим, что эта величина дает среднее число частиц в бесконечно малом элементе объема  $dx$ .

Увеличивая теперь неограниченно норму  $N$  так, чтобы при этом  $\chi_{\sigma}(p)$  стремилось к выражению

$$(2\pi)^{3/2} \delta(p - p_0), \quad (5)$$

мы будем получать волновой пакет со все более фиксированным импульсом. Из (3) находим, что

$$|\varphi_{\sigma}(x)| \rightarrow 1,$$

а потому также

$$|\varphi_{\sigma}(x)|^2 \rightarrow 1, \quad (6)$$

и в пределе на единицу объема будет приходиться одна частица.

Переходя в (1) к пределу, получаем выражение для амплитуды одночастичного состояния, нормированной на единицу объема:

$$\Phi_1 = (2\pi)^{3/2} a_{\sigma}^+(p) \Phi_0. \quad (7)$$

В случае нескольких сортов частиц вместо (1) следует рассмотреть выражение

$$\Phi_s = \int \chi_{\sigma_1}(p_1) a_{\sigma_1}^+(p_1) dp_1 \dots \int \chi_{\sigma_s}(p_s) a_{\sigma_s}^+(p_s) dp_s \Phi_0, \quad (8)$$

где все  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) различны. Норма такой амплитуды представится, очевидно, произведением норм  $s$  одночастичных состояний:

$$\Phi_s^* \Phi_s = \prod_{1 \leq i \leq s} \int |\chi_{\sigma_i}(p_i)|^2 dp_i = \prod_i N_i. \quad (9)$$

Повторяя только что проведенное рассуждение отдельно для каждого из сомножителей (8) и (9), приходим к выводу, что амплитуда многочастичного состояния, нормированная для каждой на

ходящейся в этом состоянии частицы на единицу объема, имеет вид

$$\Phi_s = (2\pi)^{\frac{3s}{2}} a_{\sigma_1}^{\dagger}(\mathbf{p}_1) a_{\sigma_2}^{\dagger}(\mathbf{p}_2) \dots a_{\sigma_s}^{\dagger}(\mathbf{p}_s) \Phi_0. \quad (10)$$

**25.2. Вычисление вероятностей переходов.** Возвращаясь к поставленной в начале параграфа задаче, видим, что в результате взаимодействия система перейдет из состояния (10) в состояние, описываемое амплитудой,

$$S(g) (2\pi)^{\frac{3s}{2}} \Phi_{p_1\sigma_1 \dots p_s\sigma_s},$$

где

$$\Phi_{p_1\sigma_1 \dots p_s\sigma_s} \equiv a_{\sigma_1}^{\dagger}(\mathbf{p}_1) \dots a_{\sigma_s}^{\dagger}(\mathbf{p}_s) \Phi_0, \quad (11)$$

и потому среднее число частиц, которое окажется в конечном состоянии, описываемом нормируемой амплитудой  $\Phi_{\alpha}$ , согласно общему правилу квантовой механики равно

$$(2\pi)^{3s} \frac{|\Phi_{\alpha}^* S(g) \Phi_{p_1\sigma_1 \dots p_s\sigma_s}|^2}{\Phi_{\alpha}^* \Phi_{\alpha}}. \quad (12)$$

Здесь предполагается в связи с выбором нормировки, что в начальном состоянии средние числа частиц на единицу объема равны единице. Если же эти числа равны соответственно  $n_1, \dots, n_s$ , то выражение (12) следует заменить на

$$n_1 n_2 \dots n_s (2\pi)^{3s} \frac{|\Phi_{\alpha}^* S(g) \Phi_{p_1\sigma_1 \dots p_s\sigma_s}|^2}{\Phi_{\alpha}^* \Phi_{\alpha}}. \quad (13)$$

Нас интересует сейчас число частиц, рассеянных в интервалы импульсов  $\Delta p'_1, \dots, \Delta p'_r$  около средних значений  $p'_1, \dots, p'_r$ . При этом мы будем полагать, как это было оговорено в § 24.2, что каждая частица в начальном и конечном состоянии имеет различные значения импульса. В эксперименте это соответствует отнесению частиц с неизменившимся импульсом к основному первичному пучку, а рассеянными считаются частицы, изменившие свой импульс.

Амплитуду конечного состояния  $\Phi_{\alpha}$  возьмем поэтому в виде

$$\Phi_{\alpha} = (2\pi)^{\frac{3r}{2}} \int_G \Phi_{k_1\sigma_1 \dots k_r\sigma_r} dk_1 \dots dk_r,$$

где область  $G$  равна произведению объемов  $\Delta p'_1 \dots \Delta p'_r$ . Вычисляя норму  $\Phi_{\alpha}$ , находим теперь

$$\Phi_{\alpha}^* \Phi_{\alpha} = (2\pi)^{3r} \Delta p'_1 \dots \Delta p'_r,$$



а вместо (13) получаем выражение

$$\frac{n_1 \dots n_s (2\pi)^{3s}}{\Delta p'_1 \dots \Delta p'_r} \int_G dk_1 \dots dk_r (\overset{*}{\Phi}_{k_1 \sigma_1 \dots k_r \sigma_r} S(g) \Phi_{p_1 \sigma_1 \dots p_s \sigma_s})^* \times \\ \times \int_G dk'_1 \dots dk'_r (\overset{*}{\Phi}_{k'_1 \sigma_1 \dots k'_r \sigma_r} S(g) \Phi_{p_1 \sigma_1 \dots p_s \sigma_s}),$$

равное, по определению области  $G$ ,

$$n_1 \dots n_s (2\pi)^{3s} |\overset{*}{\Phi}_{\dots p' \dots} S(g) \Phi_{\dots p \dots}|^2 \Delta p'_1 \dots \Delta p'_r, \quad (14)$$

где обозначение  $\Phi_{p_1 \sigma_1 \dots p_r \sigma_r}$  заменено для краткости на  $\Phi_{\dots p \dots}$

Структура квадратов матричных элементов типа

$$|\overset{*}{\Phi}_{\dots p' \dots} S(g) \Phi_{\dots p \dots}|^2$$

и предельный переход  $g(x) \rightarrow 1$  были исследованы в § 24. Подставляя выражение (24.37) в (14) и деля на  $VT$ , получаем число частиц, рассеянных в интервал  $dp'_1, \dots, dp'_r$  в единицу времени и объема:

$$(2\pi)^{3s-4} n_1 \dots n_s |F(p', p)|^2 \delta(\Sigma p - \Sigma p') dp'_1 \dots dp'_r. \quad (15)$$

Используя формулу (24.39), находим также соответствующее выражение при рассеянии стационарным классическим полем в единицу времени в виде

$$(2\pi)^{3s-1} n_1 \dots n_s |F(p', p)|^2 \delta(\Sigma p^0 - \Sigma p'^0) dp'_1 \dots dp'_r. \quad (16)$$

Вновь подчеркнем, что полученные выражения (15), (16) имеют смысл лишь при условии *непрерывности* функции  $F(p', p)$  в окрестности данных значений импульсов  $p', p$ . В конкретных же вычислениях мы получаем выражение для  $F(p', p)$  в виде суммы нескольких членов, соответствующих разложению теории возмущений. Поэтому появление особенностей в  $F(p', p)$  может приводить к неприменимости теории возмущений.

Итак, чтобы определить число рассеянных частиц или соответствующие вероятности, необходимо вычислить сначала матричный элемент (24.35) (или (24.38)) и полученную функцию  $F(p', p)$ , стоящую множителем при  $\delta$ -функции, подставить в (15) (или (16)). При этом результат будет иметь смысл лишь при непрерывности  $F(p', p)$  возле данных значений своих аргументов.

Отметим, что в связи с введенной в § 25.2 нормировкой векторов состояний оказывается удобным изменить нормировку матричного элемента  $F$ . Положим вместо (24.35)

$$\overset{*}{\Phi}_{p_1 \sigma_1 \dots p_s \sigma_s} S(1) \Phi_{q_1 \nu_1 \dots q_r \nu_r} = \frac{i (2\pi)^{4 - \frac{3}{2}(s+r)} \delta^4(\Sigma p - \Sigma q)}{\left\{ \prod_i (2p_i^0) \prod_k (2q_k^0) \right\}^{1/2}} M(p, q). \quad (17)$$

Изменение степени множителя  $2\pi$  соответствует разнице между (10) и (11), а введенный знаменатель учитывает структуру импульс-

ного представления (бесспиновых) функций поля. Введенная таким образом амплитуда имеет импульсную размерность, равную  $4-r-s$ , и в простейших случаях оказывается лоренц-инвариантной величиной.

Формула (15) принимает вид

$$(2\pi)^4 n_1 \dots n_s \frac{|M(p, q)|^2 \delta\left(\sum_k p_k - \sum_l q_l\right)}{\prod_k (2q_k^0)} \prod_i \frac{dp_i}{2p_i^0 (2\pi)^3}, \quad (18)$$

**25.3. Рассеяние двух частиц.** Рассмотрим конкретный случай рассеяния двух частиц ( $r = s = 2$ ). Левая часть выражения (17) при этом отлична от нуля в отсутствии взаимодействия при  $S = 1$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_0 a_1^-(p') a_2^-(q') a_2^+(q) a_1^+(p) \Phi_0 = \\ = \delta(p' - p) \delta(q - q') \pm \delta_{12} \delta(p' - q) \delta(q' - p). \end{aligned}$$

Второй член здесь отличен от нуля только в том случае, если все квантовые числа двух частиц совпадают, т.е. частицы тождественны. Верхний знак перед ним соответствует бозонам, нижний — фермионам.

Для того чтобы иметь дело с чистым эффектом взаимодействия. «диагональный» матричный элемент вычитают из полного, т.е. рассматривают выражение

$$\Phi_{\dots p' \dots (S-1)} \Phi_{\dots p \dots}, \quad (19)$$

которое не отличается от исходного при  $p'_i \neq p_i$ . В соответствии с (24.35) положим, одновременно несколько изменив нормировку,

$$\begin{aligned} \Phi_0 a_1^-(p') a_2^-(q') [S-1] a_2^+(q) a_1^+(p) \Phi_0 = \\ = \frac{i\delta^4(p' + q' - p - q)}{2\pi \sqrt{q^0 q'^0 p^0 p'^0}} f(p', q'; p, q) \end{aligned} \quad (20)$$

Введенная здесь функция  $f$  представляет собой *амплитуду рассеяния* в релятивистском случае. Множитель нормировки в правой части (20) соответствует случаю рассеяния бесспиновых частиц. Как нетрудно убедиться, релятивистская амплитуда  $f$  является безразмерной функцией. Можно показать, что она является также лоренц-инвариантной функцией (этим определяется наличие множителя  $(q^0 q'^0 p^0 p'^0)^{-1/2}$ ). Наконец числовая нормировка выбирается с учетом удобства связи с эффективным сечением (см. ниже).

Для рассеяния бозона (оператор рождения  $a_n^+(k)$ ) на фермионе (оператор рождения  $b_\mu^+(p)$ ) амплитуда рассеяния обычно вводится несколько иным образом:

$$\begin{aligned} \Phi_0 a_m^-(k') b_\mu^-(p') (S-1) a_n^+(k) b_\nu^+(p) \Phi_0 = \\ = \frac{i\delta(k' + p' - k - p)}{2\pi \sqrt{k_0 k'_0}} f_{n\nu, m\mu}(k, p; k', p'). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь  $n(m)$  — совокупность поляризационных и изотопических индексов бозонов, а  $\nu(\mu)$  — спиновых и изотопических индексов фермиона. Представление (21) применимо, например, для рассеяния света на электронах (комптоновское рассеяние) или для пион-нуклонного рассеяния. Матричная амплитуда рассеяния  $f_{\nu, \mu}$  имеет размерность  $[m^{-1}] = \text{см}$  и может быть обезразмерена введением соответствующей массы. Этого, однако, обычно не делают из традиционных соображений соответствия ее нерелятивистского предела с размерной квантовомеханической амплитудой рассеяния.

**25.4. Эффективные сечения рассеяния.** Для случая  $r = s = 2$  замена  $F$  на амплитуду  $f_{\nu, \mu}$ , введенную согласно (21), дает вместо (15) выражение

$$\frac{n_1 n_2}{k_0 k'_0} |f_{\nu, \mu}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{k}', \mathbf{p}')|^2 \delta(p + k - p' - k') dk' dp',$$

размерность которого в используемой нами системе единиц равна  $\text{см}^{-4}$ . Используя трехмерную  $\delta$ -функцию на снятие интегрирования по  $p'$ , получаем:

$$\frac{n_1 n_2}{k_0 k'_0} |f|^2 \delta(p_0 + k_0 - p'_0 - k'_0) dk', \quad (22)$$

причем в аргументах  $\delta$  положено  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ .

Выражение (22), представляющее собой число частиц (в данном случае бозонов), рассеянных в интервал импульсов  $dk'$  в единичном объеме в единицу времени, обычно представляют в виде произведения

$$n_1 n_2 v(\mathbf{k}) d\sigma,$$

где  $v(\mathbf{k})$  — модуль скорости налетающего бозона в л. с. к. (равный единице для фотона и  $|\mathbf{k}|/k_0$  для частиц с конечной массой покоя). Множитель  $d\sigma$ , имеющий размерность площади ( $\text{см}^2$ ), пропорционален элементу телесного угла бозона после рассеяния и называется *дифференциальным эффективным поперечным сечением*. Это сечение согласно (22) может быть представлено в виде

$$d\sigma = \frac{|f|^2 \delta(p_0 + k_0 - p'_0 - k'_0) dk'}{k'_0 |\mathbf{k}'|} = |f|^2 \delta(p_0 + k_0 - p'_0 - k'_0) \frac{|\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| d\Omega'}{k'_0 |\mathbf{k}'|}.$$

Чтобы избавиться здесь от  $\delta$ -функции, воспользуемся тем, что в силу соотношения  $(k'_0)^2 - m^2 = (\mathbf{k}')^2$

$$|\mathbf{k}'| d|\mathbf{k}'| = k'_0 dk'_0,$$

и интеграцию  $dk'_0$  можно снять при помощи оставшейся  $\delta$ -функции. При этом, однако, следует принять во внимание, что энергии  $p_0$ ,  $k_0$ ,  $p'_0$  и  $k'_0$ , входящие в ее аргумент, в силу закона сохранения 3-импульса  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{k}'$  суть зависимые функции. Поэтому, обозначая

$$p'_0 + k'_0 - p_0 - k_0 = \psi(k'_0),$$

получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{|k'|}{|k| |\varphi'(k'_0)|} |f_{nv, m\mu}(k, p; k', p')|^2. \quad (23)$$

Интегрируя дифференциальное сечение (23) по полному телесному углу  $\Omega$ , получаем полное эффективное поперечное сечение

$$\sigma = \frac{1}{|k|} \int_{\Omega} \frac{|k'|}{|\varphi'(k'_0)|} |f_{nv, m\mu}(k, p; k', p')|^2. \quad (24)$$

В лабораторной системе координат (при  $p = 0$ )

$$\varphi'(k'_0) = \frac{k_0 k'_0 M - \mu^2 p'_0}{|k'|^2 p'_0}, \quad (25)$$

где  $\mu$  — масса бозона, а  $M$  — масса фермиона. Поэтому, например в статическом пределе пион-нуклонного рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = |f|^2. \quad (26)$$

Формула (26) по форме совпадает с соответствующей формулой нерелятивистской квантовой механики. Этим и объясняется выбор нормировки в (21).

Отметим еще, что, как правило, при вычислении полных сечений не интересуются спиновыми индексами конечного состояния и проводят по ним суммирование. Если же и начальные индексы не выделены в эксперименте (например, рассеяние неполяризованного пучка на неполяризованной мишени), то по ним проводят усреднение. Обозначая эти операции суммирования и усреднения символом  $\Sigma_{\sigma}$ , получим для дифференциального сечения следующее выражение:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{(2\pi)^2 |k'| |k'_0|}{v(k) |\varphi'(k'_0)|} \sum_{\sigma} |F(k, p; k', p')|^2 d\Omega' = \\ &= \frac{|k'|}{|k| |\varphi'(k'_0)|} \sum_{\sigma(m, \mu)} |f_{nv, m\mu}(k, p; k', p')|^2 d\Omega'. \end{aligned} \quad (27)$$

Подобным образом из общих формул (15) и (16) могут быть найдены выражения для вероятностей и сечений других возможных процессов. Получим еще формулу для рассеяния частицы с импульсом  $p_1$  стационарным внешним полем. Рассмотрим для конкретности случай, когда частица, рассеявшись на потенциале, рождает еще одну частицу  $k$ , т. е. процесс типа тормозного излучения. Полагая в (16)  $s = 1$ ,  $r = 2$ , получаем выражение

$$(2\pi)^2 n_1 |F(p', p)|^2 \delta(E_1 - E'_1 - E_k) dp'_1 dk, \quad (28)$$

имеющее в используемой нами системе единиц размерность  $[T^{-1}] = = \text{см}^{-1}$ ; представляя его в виде  $n_1 v_1 d\sigma_1$ , находим, выполнив интеграцию по  $dE'_1$ , а также суммирование и усреднение по спиновым ин-

лексам, дифференциальное эффективное сечение

$$d\sigma_1 = \frac{(2\pi)^2}{v_1} |F(p', p)|^2 p'_1 E'_1 d\Omega'_1 dk |_{E_1 - E'_1 - E_k = 0}. \quad (29)$$

**25.5. Двухчастичный распад.** Допустим теперь, что в начальном состоянии находится одна частица ( $s = 1$ ) массы  $M$ , а в конечном — две частицы ( $r = 2$ ) с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Этот случай соответствует двухчастичному распаду частицы  $M$ , который кинематически возможен при

$$M > m_1 + m_2. \quad (30)$$

Согласно формуле (18) среднее число частиц в конечном состоянии, попадающих в интервалы  $d\mathbf{p}_1, d\mathbf{p}_2$  в единицу времени и единицу объема, будет

$$\frac{n}{32\pi^2 q_0} |M(p_1, p_2; q)|^2 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2) \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{p_1^0 p_2^0}.$$

Перейдем в систему покоя начальной частицы:

$$q = (M, 0), \quad p_1 = (E_1, \mathbf{p}), \quad p_2 = (E_2, -\mathbf{p}); \quad E_i = \sqrt{m_i^2 + \mathbf{p}^2}.$$

После интегрирования по  $d\mathbf{p}_2$  получаем

$$\frac{|M(\dots)|^2}{32\pi^2 M E_1 E_2} \delta(M - E_1 - E_2) d\mathbf{p}. \quad (31)$$

С помощью остающейся  $\delta$ -функции снимаем интегрирование по  $|\mathbf{p}|$ :

$$\begin{aligned} \delta(M - E_1 - E_2) &= \frac{2E_1 E_2}{M} \delta(\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}_*^2), \\ 4\mathbf{p}_*^2 &= M^2 - 2(m_1^2 + m_2^2) + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{M^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Выполняя интегрирование по  $|\mathbf{p}|$ , имеем

$$\frac{p_*}{32\pi^2 M^2} |M(p_*, \Omega)|^2 d\Omega.$$

Интегрируя это выражение по телесному углу, получаем полную вероятность двухчастичного распада в единицу времени

$$\omega = \frac{p_*}{32\pi^2 M^2} \int |M(p_*, \Omega)|^2 d\Omega. \quad (33)$$

Величина  $\omega$  имеет размерность массы (в обычной системе единиц —  $\text{сек}^{-1}$ ) и совпадает с энергетической шириной

$$\omega = \Gamma. \quad (34)$$

В случае, если существует несколько каналов распада, полная ширина складывается из суммы выражений вида (33)

$$\Gamma_{\text{tot}} = \sum_i \Gamma_i, \quad (35)$$

а время жизни исходной частицы  $\tau$  определяется соотношением

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{\text{tot}}} \left( = \frac{\hbar}{\Gamma_{\text{tot}}} \right). \quad (36)$$

## § 26. Примеры расчета процессов второго порядка

В качестве примеров приложения методики, изложенной в § 25, вычислим в первом исчезающем приближении сечения комптоновского рассеяния, двухфотонной аннигиляции электрон-позитронной пары и тормозного излучения электрона в поле ядра. Так как получающиеся формулы хорошо известны, мы не будем вдаваться в их обсуждение.

**26.1. Комптоновское рассеяние.** Вычислим сечение рассеяния фотона на свободном электроне. Начальное состояние содержит фотон с импульсом  $k_1$  энергией  $k_1 = |\mathbf{k}_1|$  и электрон с 4-импульсом  $p_1$ . Будем считать, не утрачивая общности, что электрон покоится, т. е. что  $p_1 = 0$ ,  $p_1^0 = m$ . В конечном состоянии присутствуют рассеянный фотон с импульсом  $k_2$  и энергией  $k_2 = |\mathbf{k}_2|$  и электрон, получивший импульс отдачи  $p_2 = k_1 - k_2$  с энергией

$$p_2^0 = E_2 = \sqrt{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 + m^2} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_2|\cos\theta + m^2},$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $k_1$  и  $k_2$ , т. е. угол рассеяния фотона.

Дифференциальное эффективное сечение рассматриваемого процесса согласно общей формуле (25.27) равно

$$d\sigma = (2\pi)^2 \frac{k_2^2}{|\Phi'(k_2)|} \sum_{\sigma} |F(p', p)|^2 d\Omega = (2\pi)^2 \frac{k_2^2 E_2}{k_1 m} \sum_{\sigma} |F(p', p)|^2 d\Omega. \quad (1)$$

Матричный элемент  $F(p', p)$  определяется по формуле (24.35). Для его вычисления ограничимся возможными диаграммами второго порядка, изображенными на рис. 14. Соответствующие им матричные элементы получаем по правилам соответствия, сформулированным в § 24.

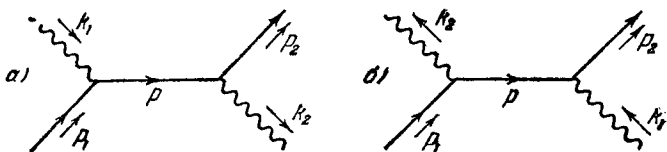


Рис. 14.

Запишем подробно матричный элемент для диаграммы (рис. 14, а). Сопоставим внешней линии электрона, выходящего из вершины 2 с 4-импульсом  $p_2$ , фактор

$$(2\pi)^{-3/2} \bar{u}(p_2),$$

а внешней линии фотона, выходящего из вершины 2 с импульсом  $k_2$ , — фактор

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e_m^2}{\sqrt{2k_2}} \quad (m \neq 0).$$

Поскольку этой вершине соответствует фактор

$$ie\gamma^n (2\pi)^4 \delta(p - k_2 - p_2),$$

то произведение двух последних факторов равно

$$\delta(p - k_2 - p_2) \frac{ie}{\sqrt{2k_2}} (2\pi)^{3/2} \sum_{\alpha=1, 2, 3} e_2^\alpha \gamma^\alpha = -\delta(p - k_2 - p_2) \frac{ie (2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2k_2}} \hat{\epsilon}_2.$$

Внутренней электронной линии соответствует фактор

$$\frac{1}{(2\pi)^4 i} \frac{m + \hat{p}}{m^2 - p^2 - i\epsilon},$$

вершине  $I$  вместе с внешней фотонной линией  $k_1$  —

$$\delta(p_1 + k_1 - p) \frac{ie (2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2k_1}} \hat{\epsilon}_1,$$

и, наконец, внешней электронной линии  $p_1$  —

$$(2\pi)^{-3/2} v^{v'} \cdot - (p_1).$$

Перемножая все приведенные факторы в последовательности, соответствующей движению вдоль электронной линии, и интегрируя по  $p$ , получаем выражение

$$\delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) F_a(p, k),$$

где

$$F_a(p, k) = \frac{e^2}{8\pi^2 i} \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2}} \bar{v}^v \cdot + (p_2) \hat{\epsilon}_2 \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m}{(p_1 + k_1)^2 - m^2} \hat{\epsilon}_1 v^{v'} \cdot - (p_1).$$

Диаграмма рис. 14, б дает аналогичный член

$$F_b(p, k) = \frac{e^2}{8\pi^2 i} \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2}} \bar{v}^v \cdot + (p_2) \hat{\epsilon}_1 \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \hat{\epsilon}_2 v^{v'} \cdot - (p_1).$$

Замечая, что

$$(p_1 + k_1)^2 - m^2 = 2(p_1 k_1) = 2mk_1, \quad (p_1 - k_2)^2 - m^2 = -2(p_1 k_2) = -2mk_2,$$

получаем, складывая  $F_a$  и  $F_b$ ,

$$F(p, k) = \frac{e^2}{16\pi^2 i} \frac{1}{m (k_1 k_2)^{3/2}} \bar{v}^v \cdot + (p_2) M v^{v'} \cdot - (p_1), \quad (2)$$

причем

$$M = k_2 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m) \hat{\epsilon}_1 - k_1 \hat{\epsilon}_1 (\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m) \hat{\epsilon}_2.$$

При вычислении  $\sum_{\sigma} |F|^2$  отметим, что по начальному спиновому индексу  $v'$  необходимо усреднить, а по конечному  $v$  — просуммировать. Поэтому с помощью соотношений (7.20) и (7.21) находим:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} |F|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{v, v'} FF^* = \frac{e^4}{2(4\pi)^4 m^2 (k_1 k_2)^3} \sum_{vv'} \bar{v}^v \cdot + (p_2) M v^{v'} \cdot - (p_1) \times \\ &\times \bar{v}^{v'} \cdot + (p_1) \bar{M} v^{v'} \cdot - (p_2) = \frac{e^4}{8(4\pi)^4 E_2 (mk_1 k_2)^3} \text{Sp } A, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$A = (\hat{p}_2 + m) M (\hat{p}_1 + m) M, \quad (4)$$

Так как 4-векторы  $k$ ,  $p$  и  $e$  действительны,  $\gamma^0$  эрмитова, а  $\gamma$  антиэрмитова, то, если  $M = \sum_i c_i \hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_i$ , имеем

$$M = \sum^* c_i \hat{a}_1 \hat{a}_{i-1} \dots \hat{a}_1,$$

где  $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_i$  — векторы типа  $k$ ,  $p$  и  $e$ .

Перед тем как вычислить (4), несколько упростим  $M$ . Учитывая, что, по определению матриц Дирака,

$$\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} = 2(ab),$$

можно представить  $M$  в виде

$$M = k_2 \hat{e}_2 \hat{k}_1 \hat{e}_1 - k_2 \hat{e}_2 \hat{e}_1 (\hat{\beta}_1 - m) + 2k_2 \hat{e}_2 (p_1 e_1) + k_1 \hat{e}_1 \hat{k}_2 \hat{e}_2 + k_1 \hat{e}_1 \hat{e}_2 (\hat{\beta}_1 - m) - 2k_1 \hat{e}_1 (p_1 e_2). \quad (5)$$

Но так как  $M$  входит в комбинации

$$\bar{v} v' + (p_2) M v v' - (p_1),$$

а, согласно уравнению поля,

$$(\hat{\beta}_1 - m) v v' - (p_1) = 0$$

и ввиду того, что

$$(p_1 e_2) = (p_1 e_1) = 0,$$

матрицу  $M$  можно представить в виде

$$M = k_2 \hat{e}_2 \hat{k}_1 \hat{e}_1 + k_1 \hat{e}_1 \hat{k}_2 \hat{e}_2.$$

Матрицу  $A$  теперь можно записать в виде трех слагаемых

$$A = A_1 + A_2 + A_3,$$

где

$$A_1 = (\hat{\beta}_1 + m) M (\hat{\beta}_1 + m) M, \quad A_2 = (\hat{k}_1 - \hat{k}_2) M \hat{\beta}_1 M, \quad A_3 = m (\hat{k}_1 - \hat{k}_2) M M.$$

При вычислении шпуров используем условия поперечности электромагнитного поля

$$(e_1 k_1) = (e_2 k_2) = 0$$

и соотношения

$$(p_1 e_1) = (p_1 e_2) = 0, \quad (p_1 k_1) = m k_1, \quad (p_1 k_2) = m k_2,$$

$$(k_1 k_1) = (k_2 k_2) = 0, \quad e_1^2 = e_2^2 = -1.$$

Член  $A_3$  содержит произведение нечетного числа матриц Дирака, а потому

$$\text{Sp } A_3 = 0.$$

Для вычисления  $\text{Sp } A_1$  достаточно скоммутировать два первых сомножителя в  $A_1$  и воспользоваться третьей из формул (6.16), что дает:

$$\text{Sp } A_1 = 32m^2 k_1^2 k_2^2 (e_1 e_2)^2 = 32m^2 k_1^2 k_2^2 \cos^2 \chi. \quad (6)$$

где  $\chi$  — угол поворота поляризацій:

$$(e_1 e_2) = \cos \chi.$$

При вычислении  $A_2$  удобно, воспользовавшись возможностью циклической перестановки сомножителей под знаком шпура, представить его в виде

$$\text{Sp } A_2 = \text{Sp } M (\hat{k}_1 - \hat{k}_2) M \hat{\beta}_1.$$

Производя затем коммутации таким образом, чтобы одинаковые сомножители  $\hat{k}_1$  и  $\hat{k}_2$  оказались рядом и обратились в нуль (так как  $\hat{k}_i \hat{k}_i = k_i^2 = 0$ ), получим



в итоге несложной выкладки

$$\text{Sp } A_2 = 8k_1 k_2 m (k_1 k_2) (k_1 - k_2).$$

Складывая полученные выражения с учетом того, что, как следует из закона сохранения 4-импульса,

$$(k_1 k_2) = m (k_1 - k_2) = k_1 k_2 (1 - \cos \theta), \quad (7)$$

находим

$$\text{Sp } A = 8m^2 k_1 k_2 \left\{ 4 \cos^2 \chi + \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} - 2 \right\}.$$

Подставляя это выражение в (3), а затем в свою очередь в (1), получаем для дифференциального сечения известную формулу Клейна—Нишины—Тамма

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{4} \frac{k_2^3}{k_1^3} \left\{ 4 \cos^2 \chi + \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} - 2 \right\} d\Omega. \quad (8)$$

Здесь

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi m}$$

— классический радиус электрона.

Произведя усреднение по поляризации рассеянных фотонов можно получить из (8) [детали усреднения можно найти в § 22 книги Гайтлера (1954)]

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2} \frac{k_2^3}{k_1^3} \left\{ \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} - \sin^2 \theta \right\} d\Omega, \quad (9)$$

где  $\theta$  — угол рассеяния.

**26.2. Аннигиляция пары электрон — позитрон.** Рассмотрим процесс аннигиляции электрона и позитрона. Простейшая диаграмма, соответствующая этому процессу (рис. 15), является единственной диаграммой первого порядка.

Легко, однако, заметить, что описываемая этой диаграммой однофотонная аннигиляция запрещена законами сохранения энергии-импульса. В самом деле, законы сохранения дают:

$$\mathbf{k} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2,$$

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m^2},$$

и, переходя, например, к системе центра масс электрона и позитрона ( $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ ), получаем явное противоречие.

Двухфотонная аннигиляция описывается двумя диаграммами второго порядка, изображенными на рис. 11.

Расчет проведем в системе центра масс электрона и позитрона. Обозначая тогда

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}, \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}_2 = -\mathbf{k},$$

получаем:

электрон:  $(E_p = \sqrt{p^2 + m^2}, \mathbf{p})$ ,

позитрон:  $(E_p, -\mathbf{p})$ ,

1-й фотон:  $(k^0 = |\mathbf{k}|, \mathbf{k})$ ,

2-й фотон:  $(k^0, -\mathbf{k})$ .

Сечение процесса согласно основной формуле (27) с учетом нормировки амплитуды двухфотонного состояния и соотношения  $|\Phi'(E')| = 2$  равно

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^2 (k^0)^2}{4v(p_1)} \sum_{\sigma} |F^2| d\Omega = (2\pi)^2 \frac{(k^0)^3}{4p} \sum_{\sigma} |F|^2 d\Omega, \quad (10)$$

где обозначено  $p = |\mathbf{p}|$ .

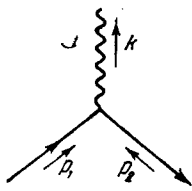


Рис. 15.

По правилам соответствия строим матричные элементы

$$F_a(p, k) = \frac{e^2}{8\pi^2 ik^0} \bar{v}^{v, -}(\mathbf{p}_2) \hat{e}_2 \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_1 + m}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \hat{e}_1 v^{v', -}(\mathbf{p}_1),$$

$$F_b(p, k) = \frac{e^2}{8\pi^2 ik^0} \bar{v}^{v, -}(\mathbf{p}_2) \hat{e}_1 \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \hat{e}_2 v^{v', -}(\mathbf{p}_1);$$

складывая их, находим:

$$F(p, k) = \frac{ie^2}{8\pi^2 k^0} \frac{\bar{v}^{v, -}(\mathbf{p}_2) M v^{v', -}(\mathbf{p}_1)}{2(p_1 k_1)(p_1 k_2)},$$

причем

$$M = (p_1 k_2) \hat{e}_2 (\hat{p}_1 - \hat{k}_1 + m) \hat{e}_1 + \hat{e}_1 (\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m) \hat{e}_2 (p_1 k_1).$$

Коммутируя  $\hat{p}_1 \hat{e}_1$  и  $\hat{p}_2 \hat{e}_2$  и используя уравнения поля

$$(\hat{p}_1 - m) v(\mathbf{p}_1) = 0,$$

приводим  $M$  к виду

$$M = (p_1 k_2) [2(p_1 e_1) \hat{e}_2 - \hat{e}_2 \hat{k}_1 \hat{e}_1] + (p_1 k_1) [2(p_1 e_2) \hat{e}_1 - \hat{e}_1 \hat{k}_2 \hat{e}_2],$$

откуда также следует, что

$$\bar{M} = (p_1 k_2) [2(p_1 e_1) \hat{e}_2 - \hat{e}_1 \hat{k}_1 \hat{e}_2] + (p_1 k_1) [2(p_1 e_2) \hat{e}_1 - \hat{e}_2 \hat{k}_2 \hat{e}_1].$$

При вычислении  $\sum_{\sigma} |F|^2$  необходимо усреднить по спинам электрона и позитрона. Поэтому с учетом (7.20) и (7.21)

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} |F|^2 &= \frac{e^4}{(8\pi^2 k^0)^2} \frac{1}{16(p_1 k_1)^2 (p_1 k_2)^2} \sum_{v, v'} \bar{v}^{v, -}(\mathbf{p}_2) M v^{v', -}(\mathbf{p}_1) \bar{v}^{v', +}(\mathbf{p}_1) \times \\ &\times \bar{M} v^{v, +}(\mathbf{p}_2) = \frac{e^4}{(4\pi k^0)^4} \frac{1}{16(p_1 k_1)^2 (p_1 k_2)^2} \text{Sp } A, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$A = (\hat{p}_2 - m) M (\hat{p}_1 + m) M.$$

Используя закон сохранения 4-импульса

$$p_2 = k_1 + k_2 - p_1,$$

представим  $A$  в виде суммы

$$A = A_1 + A_2 + A_3,$$

причем

$$A_1 = (\hat{k}_1 + \hat{k}_2) M \hat{p}_1 \bar{M},$$

$$A_2 = -(\hat{p}_1 + m) M (\hat{p}_1 + m) \bar{M},$$

$$\text{Sp } A_3 = 0.$$

При вычислении  $\text{Sp } A_1$  и  $\text{Sp } A_2$  используем (6.16) и следующие соотношения, вытекающие из определений:

$$(k_1 e_1) = (k_2 e_2) = (k_1 e_2) = (k_2 e_1) = 0,$$

$$(k_1 k_2) = 2(k^0)^2, \quad k_1^2 = k_2^2 = 0,$$

$$(k_1 p_1) = (k^0)^2 - k_1 p_1 = k^0(k^0 - p \cos \theta),$$

$$(k_2 p_1) = (k^0)^2 - k_2 p_1 = k^0(k^0 + p \cos \theta),$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $k_1$  и  $p_1$ .

Общий метод вычисления шпуров, как и в предыдущем случае, заключается в последовательном сближении одинаковых матричных 4-векторов. Опуская элементарные, но утомительные выкладки, приведем результаты:

$$\text{Sp } A_1 = 32 (k^0)^2 (pk_1) (pk_2) \{ 2 (e_1 e_2) (pe_1) (pe_2) + k_0^2 + (pe_1)^2 + (pe_2)^2 \},$$

$$\text{Sp } A_2 = - 32 (k^0)^2 (pk_1) (pk_2) \{ 2 (e_1 e_2) (pe_1) (pe_2) + (pe_1)^2 + (pe_2)^2 \} - 32 \{ 2 (k^0)^2 (pe_1) (pe_2) + (e_1 e_2) (pk_1) (pk_2) \}^2,$$

$$\text{Sp } A = 32 (pk_1)^2 (pk_2)^2 \left\{ \frac{(k^0)^4}{(pk_1) (pk_2)} - \frac{4 (k^0)^4 (pe_1)^2 (pe_2)^2}{(pk_1)^2 (pk_2)^2} - \frac{4 (k^0)^2 (e_1 e_2) (pe_1) (pe_2)}{(pk_1) (pk_2)} - (e_1 e_2)^2 \right\}.$$

Выполняя суммирование по направлениям поляризации фотонов с учетом соотношений

$$\begin{aligned} \sum_{e_1} (pe_1)^2 &= \sum_{e_2} (pe_2)^2 = p^2 \sin^2 \theta, & \sum_{e_1, e_2} (pe_1)^2 (pe_2)^2 &= p^4 \sin^4 \theta, \\ \sum_{e_1, e_2} (e_1 e_2)^2 &= 2, & \sum_{e_1, e_2} (e_1 e_2) (pe_1) (pe_2) &= - p^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

получаем

$$\text{Sp } A = 64 (pk_1)^2 (pk_2)^2 \left[ \frac{(k^0)^2 + p^2 + p^2 \sin^2 \theta}{(k^0)^2 - p^2 \cos^2 \theta} - \frac{2p^4 \sin^4 \theta}{((k^0)^2 - p^2 \cos^2 \theta)^2} \right].$$

Внося это выражение в (11) и (10), приходим к известной формуле для дифференциального эффективного сечения аннигиляции электрон-позитронной пары:

$$d\sigma = \frac{e^4}{4 (4\pi)^2 k^0 p} \left\{ \frac{(k^0)^2 + p^2 + p^2 \sin^2 \theta}{(k^0)^2 - p^2 \cos^2 \theta} - \frac{2p^4 \sin^4 \theta}{((k^0)^2 - p^2 \cos^2 \theta)^2} \right\} d\Omega. \quad (12)$$

**26.3. Тормозное излучение.** Рассмотрим процесс тормозного излучения электрона в поле ядра. Процесс заключается в испускании фотона электроном,

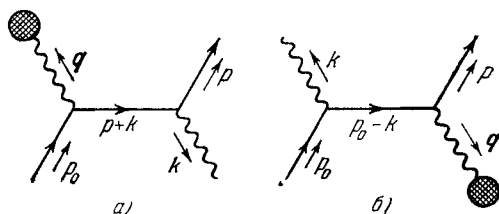


Рис. 16.

проходящим вблизи ядра, под действием электрического поля ядра. При этом ядро принимает на себя часть импульса, необходимую для сохранения энергии. Потенциал ядра с зарядом  $Ze$  по закону Кулона равен

$$a_0(x) = \frac{Ze}{4\pi |x|},$$

поэтому

$$\Phi_0(q) = \frac{Ze}{(2\pi)^{3/2} |q|^2}. \quad (13)$$

В первом исчезающем приближении тормозное излучение описывается двумя диаграммами второго порядка, изображенными на рис. 16, где  $p_0$  обозна-

чает начальный 4-импульс электрона,  $q$  — импульс, передаваемый ядру,  $p$  — конечный 4-импульс электрона, а  $k$  — импульс излучаемого фотона.

Сечение процесса согласно основной формуле (25.29) равно

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^2 EE_0 p}{p_0} \sum_{\sigma} |F(p', p)|^2 d\Omega_p d\Omega_k (k^0)^2 dk^0, \quad (14)$$

где сокращенно

$$p_0 = |p_0| \quad \text{и} \quad p = |p|.$$

Для вычисления матричных элементов введем фиктивный «вектор поляризации» временного псевдофотона отдачи  $e_q$ , обладающий лишь временной компонентой, т. е.

$$e_q^\mu = \delta_{\mu 0}.$$

Получаем далее по общей рецептуре

$$F(p', p) = \frac{e^2 \Phi(q)}{i(2\pi)^2} \bar{v}^{\nu} + (p) \left\{ \frac{\hat{e}}{\sqrt{2k^0}} \frac{\hat{p} + \hat{k} + \hat{m}}{2(pk)} \hat{e}_q - \hat{e}_q \frac{\hat{p}_0 - \hat{k} + m}{2(p_0 k)} \frac{\hat{e}}{\sqrt{2k^0}} \right\} v^{\nu'} - (p_0)$$

или

$$F(p', p) = \frac{e^2 \Phi(q)}{2i(2\pi)^2 \sqrt{2k^0}} \bar{v}^{\nu} + (p) M v^{\nu'} - (p_0), \quad (15)$$

где  $M$  после обычных упрощений может быть приведено к виду

$$M = \frac{a}{(pk)} + \frac{b}{(p_0 k)}$$

$$(a = \hat{e} \hat{k} \hat{e}_q + 2(ep) \hat{e}_q, \quad b = \hat{e}_q \hat{k} \hat{e} - 2(ep_0) \hat{e}_q).$$

Возводя (15) в квадрат, суммируя по спину  $\nu$  и поляризации  $e$  и усредняя по спину  $\nu'$ , получаем:

$$\sum_{\sigma} |F|^2 = \frac{Z^2 e^6}{64(2\pi)^2 k^0 E E_0 (q^2)^2} \text{Sp } \hat{A}, \quad (16)$$

где

$$\hat{A} = (\hat{p} + m) M (\hat{p}_0 + m) \bar{M},$$

а тильдой над  $\hat{A}$  обозначено суммирование по поляризации  $e$ .

Вычисление  $\text{Sp } \hat{A}$  проведем в три приема. Представим  $\hat{A}$  в виде суммы трех членов:

$$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3, \quad \hat{A}_1 = \frac{1}{(pk)^2} \{(\hat{p} + m) a (\hat{p}_0 + m) \bar{a}\},$$

$$\hat{A}_2 = \frac{1}{(p_0 k)^2} \{(\hat{p} + m) b (\hat{p}_0 + m) \bar{b}\},$$

$$\hat{A}_3 = \frac{1}{(pk)(p_0 k)} \{(\hat{p} + m) a (\hat{p}_0 + m) b + (\hat{p} + m) b (\hat{p}_0 + m) \bar{a}\}.$$

Заметим, что  $\hat{A}_2$  может быть получено из  $\hat{A}_1$  заменой

$$\begin{aligned} E &\rightarrow -E_0, & p_0 &\rightarrow -p, \\ E_0 &\rightarrow -E, & p &\rightarrow -p_0. \end{aligned}$$

Поэтому, вычисляя шпуры

$$\text{Sp } A_1 = \frac{8}{(pk)^2} \{ (pk) (2E_0 k^0 - (p_0 k)) + 2 (ep)^2 (2EE_0 - (pp_0) + m^2) + \\ + 2 (ep)^2 (2E_0 k^0 - (p_0 k)) + 2 (ep) (ep_0) (pk) \},$$

$$\text{Sp } A_3 = \frac{16 (ep) (ep_0)}{(p_0 k) (pk)} \{ (p_0 k) - (pk) - 2m^2 - 4EE_0 + 2 (pp_0) \} + \\ + \frac{16}{(p_0 k) (pk)} \{ k^0 [k^0 (pp_0) - E (p_0 k) - E_0 (pk)] + (p_0 k) (pk) - \\ - m^2 (k^0)^2 + (ep)^2 (p_0 k) - (ep_0)^2 (pk) \}$$

и выполняя суммирование по поляризации фотона  $e$  с учетом соотношений

$$\left. \begin{aligned} \sum_e (ep)^2 &= p^2 \sin^2 \theta, \\ \sum_e (ep_0)^2 &= p_0^2 \sin^2 \theta_0, \\ \sum_e (ep_0) (ep) &= pp_0 \sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где  $\theta$  — угол между  $k$  и  $p$ ,  $\theta_0$  — угол между  $k$  и  $p_0$ ,  $\varphi$  — угол между плоскостями  $(k, p)$  и  $(k, p_0)$ , получаем:

$$\text{Sp } \tilde{A} = \frac{8p^2 \sin^2 \theta}{(pk)^2} (4E_0^2 - q^2) + \frac{8p_0^2 \sin^2 \theta_0}{(p_0 k)^2} (4E^2 - q^2) - \\ - \frac{16pp_0 \sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi}{(pk) (p_0 k)} [4EE_0 - q^2 + 2 (k^0)^2] + 16 (k^0)^2 \frac{p_0^2 \sin^2 \theta_0 + p^2 \sin^2 \theta}{(pk) (p_0 k)}.$$

Подставляя (16) в (14), имеем:

$$d\sigma = \frac{Z^2 e^6}{64 (2\pi)^5} \frac{p}{p_0} \frac{k^0 dk^0 d\Omega_k d\Omega_p}{q^2 q^2} \text{Sp } \tilde{A}.$$

Полагая

$$d\Omega_k d\Omega_p = \sin \theta d\theta \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi d\varphi_0,$$

получаем после интегрирования по  $d\varphi_0$  выражение для дифференциального сечения в виде

$$d\sigma = \frac{Z^2}{(2\pi)^2} \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^3 \frac{p}{p_0} \frac{k_0 dk_0 \sin \theta d\theta \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi}{q^2 q^2} \times \\ \times \left\{ \frac{p^2 \sin^2 \theta}{(pk)^2} (4E_0^2 - q^2) + \frac{p_0^2 \sin^2 \theta_0}{(p_0 k)^2} (4E^2 - p^2) - \right. \\ \left. - \frac{2pp_0 \sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi}{(pk) (p_0 k)} (4EE_0 - q^2 + 2k_0^2) + \frac{2 (k^0)^2 (p_0^2 \sin^2 \theta_0 + p^2 \sin^2 \theta)}{(pk) (p_0 k)} \right\}. \quad (18)$$

Поскольку

$$(pk) = k^0 (E - p \cos \theta), \quad (p_0 k) = k^0 (E_0 - p_0 \cos \theta_0),$$

то выражение (18) совпадает с известной формулой Бете—Гайтлера!

УСТРАНЕНИЕ РАСХОДИМОСТЕЙ ИЗ  $S$ -МАТРИЦЫ§ 27. О расходимостях  $S$ -матрицы в электродинамике  
(второй порядок)

На примерах комптоновского рассеяния, аннигиляции позитронов и тормозного излучения мы подробно ознакомились с типами матричных элементов, соответствующих одной из диаграмм второго порядка.

Интеграции соответствующих матричных элементов выполнялись тривиальным образом с помощью вершинных  $\delta$ -функций (24.8), и основной труд заключался в вычислении шпуров. При наличии на диаграмме внутренних линий, соответствующих виртуальным частицам, число вершинных  $\delta$ -функций, вообще говоря,

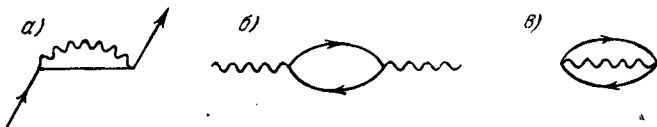


Рис. 17. Расходящиеся диаграммы второго порядка в электродинамике.

оказывается недостаточным для свертывания всех интегралов. Необходимым условием этого является наличие в диаграмме замкнутых петель. В этом случае функция  $F(p', p)$ , определенная в (24.35), представляется в виде кратного интеграла по 4-импульсам виртуальных частиц. При этом оказывается, что такие интегралы могут расходиться в области больших значений виртуальных импульсов.

Расходятся, например, матричные элементы комптоновского рассеяния и аннигиляции пар в высших порядках по  $e^2$  ( $e^4$  и выше). Расходятся также матричные элементы второго порядка, соответствующие диаграммам, изображенным на рис. 17.

Эти диаграммы соответствуют виртуальным процессам, являющимся простейшими проявлениями феномена квантовых вакуумных флуктуаций, о которых упоминалось в § 20.1.

**27.1. Расходящаяся диаграмма с двумя внешними электронными линиями  $\Sigma$ .** Представим член матрицы рассеяния, соответствующий диаграмме рис. 17, а, в виде

$$S_2(x, y) \sim -i: \bar{\psi}(x) \Sigma(x-y) \psi(y) :, \quad (1)$$

где

$$\Sigma(x-y) = -4\pi i \gamma^n S^c(x-y) \gamma_n D_0^c(x-y), \quad \alpha = e^2/4\pi. \quad (2)$$

Множитель  $-i$  выделен здесь для удобства дальнейших выкладок. При такой нормировке оператор  $\Sigma$  в импульсном представлении оказывается действительным при  $k^2 < 0$  (см. § 35.2) и в сумме с массой электрона  $m$  образует оператор массы в уравнениях Дайсона для функций Грина (см. § 38.4).

Нетрудно показать простым вычислением, что фурье-образ  $\Sigma(p)$  оператора  $\Sigma(x-y)$

$$\Sigma(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip(x-y)} \Sigma(p) dp$$

входит в матричный элемент S-матрицы через комбинацию

$$F(p', p) = -2\pi i \bar{v}(p') \Sigma(p) v(p) \quad (p' = p),$$

где  $\bar{v}$  и  $v$  — спинорные амплитуды, соответствующие функциям поля  $\bar{\psi}$  и  $\psi$ . Сходимость матричного элемента  $F$  поэтому полностью определяется сходимостью функции  $\Sigma(p)$ . Вспоминая, что в импульсном представлении причинные функции имеют вид (ср. (24.3) и (24.4))

$$D_0^c(k) = -\frac{1}{k^2 + i\epsilon}, \quad S^c(p) = \frac{m + \hat{p}}{m^2 - p^2 - i\epsilon}, \quad (3)$$

находим для  $\Sigma(p)$ :

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \frac{\alpha}{4\pi^3 i} \int dk D_0^c(k) \gamma^n S^c(p-k) \gamma_n = \\ &= \frac{\alpha}{4\pi^3 i} \int \frac{dk}{k^2 + i\epsilon} \gamma^n \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_n. \end{aligned}$$

При больших  $|k|$  интегрируемая функция убывает как  $|k|^{-3}$ , и потому интеграл этот, вообще говоря, расходится. Мы видим, таким образом, что принятые чисто формальные правила обращения с произведениями причинных функций в данном случае приводят к бессмысленному результату.

По существу, здесь проявилось то обстоятельство, что мы не определили произведение сингулярных функций как интегрируемую сингулярную функцию. Чтобы решить задачу определения коэффициентов хронологического произведения

$$T(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2))$$

как интегрируемых несобственных функций, воспользуемся, подобно тому как это было сделано в § 18, методом предельного перехода. Для этого рассмотрим сначала вспомогательный фиктивный случай, когда операторные функции поля удовлетворяют перестановочным соотношениям, в которых причинные функции  $\Delta^c$  заменены на  $\text{reg}(\Delta^c)$ .

В выражение для  $\Sigma(p)$  вместо (3) должны быть подставлены функции

$$\operatorname{reg} D_0^c(k) = -\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} - \sum_M c_M \frac{1}{k^2 + i\varepsilon - M^2},$$

$$\operatorname{reg} S^c(p) = (m + \hat{p}) \left\{ \frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} + \sum_{M \neq m} \frac{c_M}{M^2 - p^2 - i\varepsilon} \right\}.$$

При этом оказывается, что для регуляризации  $\Sigma(p)$  достаточно одной вспомогательной массы  $M$ . Полагая

$$c_M = -1,$$

имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{reg} D_0^c(k) &= -\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} = \frac{M^2}{(k^2 + i\varepsilon)(k^2 - M^2 + i\varepsilon)}, \\ \operatorname{reg} S^c(p) &= \frac{m + \hat{p}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} - \frac{m + \hat{p}}{M^2 - p^2 - i\varepsilon} = \frac{(m + \hat{p})(M^2 - m^2)}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)(M^2 - p^2 - i\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Видно, что  $\operatorname{reg} D_0(k)$  убывает как  $|k|^{-4}$ , а  $\operatorname{reg} S^c(p)$  — как  $|k|^{-3}$ , и поэтому интеграл в выражении для  $\operatorname{reg} \Sigma(p)$

$$\operatorname{reg} \Sigma(p) = \frac{\alpha}{4\pi^3 i} \int dk \operatorname{reg} D_0^c(k) \gamma^2 \operatorname{reg} S^c(p - k) \gamma_n \quad (5)$$

при больших значениях  $|k|$  сходится как

$$\int \frac{d^4 k}{|k|^7} \sim \frac{1}{|k|^3}.$$

Исследуем теперь поведение  $\operatorname{reg} \Sigma(p)$  при  $M \rightarrow \infty$  в процессе снятия регуляризации. Удобно провести это рассмотрение, вычислив  $\operatorname{reg} \Sigma(p)$  в явном виде.

Для вычисления интеграла (5) используем следующий вспомогательный прием. Представим сомножители в знаменателе (5) в виде

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = i \int_0^\infty e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\varepsilon)} d\alpha. \quad (6)$$

Эту формулу будем называть формулой перехода в *альфа-представление*. После этого перехода интегрирование по  $k$  в (5) сведется к взятию интегралов типа Гаусса.

Основной четырехмерный интеграл гауссова типа имеет вид

$$\int e^{i(ak^2 + 2bk)} dk = \frac{\pi^2}{i a^2} e^{-\frac{ib^2}{a}} \quad (a > 0). \quad (7)$$

Формулу (7) можно получить, исходя из рассмотрения типичного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(a t^2 + 2bt)} dt \quad (a > 0),$$



который будем всегда считать пределом выражения

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(at^2 + 2bt) - \eta t^2} dt \quad \text{при } \eta \rightarrow +0.$$

Для его вычисления произведем замену переменной

$$t = \frac{1+i}{\sqrt{2}} x - \frac{b}{a}, \quad i(at^2 + 2bt) = -ax^2 - \frac{ib^2}{a},$$

сводящуюся к повороту системы координат на  $-\pi/4$  и сдвигу начала координат. Тогда в пределе  $\eta \rightarrow 0$  получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(at^2 + 2bt)} dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{ib^2}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{ib^2}{a}} \quad (a > 0)$$

Значение этого интеграла при  $a < 0$  может быть получено операцией комплексного сопряжения. Имеем поэтому:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(at^2 + 2bt)} dt = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} e^{-\frac{ib^2}{a}} \quad (a < 0).$$

Теперь можно приступить к вычислению необходимых четырехмерных интегралов типа

$$\int e^{i(ak^2 + 2bk)} dk,$$

где

$$k^2 = (k^0)^2 - k^2, \quad bk = b^0 k^0 - bk, \quad dk = dk^0 dk.$$

С помощью полученных формул непосредственно приходим к (7):

$$\begin{aligned} \int e^{i(ak^2 + 2bk)} dk &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(ak^0{}^2 + 2b^0 k^0)} dk^0 \prod_{1 \leq \alpha \leq 3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(ak^\alpha{}^2 + 2b^\alpha k^\alpha)} dk^\alpha = \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left( \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^3 \frac{\pi^2}{a^2} e^{-\frac{i}{a}(b^0{}^2 - b^2)} = \frac{\pi^2}{ia^2} e^{-\frac{ib^2}{a}} \quad (a > 0) \end{aligned}$$

Остальные необходимые интегралы этого типа могут быть получены из (7) путем повторного дифференцирования по компонентам  $b$ . Так, например,

$$\int e^{i(ak^2 + 2bk)} k^n dk = \frac{ib^n}{a} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 e^{-\frac{ib^2}{a}} \quad (a > 0), \quad (8)$$

$$\int e^{i(ak^2 + 2bk)} k^m k^n dk = \frac{agmn - 2ib^n b^m}{2a^2} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 e^{-\frac{ib^2}{a}} \quad (a > 0), \quad (9)$$

$$\int e^{i(ak^2 + 2bk)} k^2 dk = \frac{2a - ib^2}{a^2} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 e^{-\frac{ib^2}{a}} \quad (a > 0). \quad (10)$$

Вернемся к вычислению интеграла (5). Подставляя в него интегральные представления сингулярных функций типа (6)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{reg} D_0^c(k) &= \int_0^{\infty} e^{i\alpha k^2 - \varepsilon\alpha} (1 - e^{-i\alpha M^2}) d\alpha, \\ \operatorname{reg} S^c(p) &= i(m + \hat{p}) \int_0^{\infty} e^{i\alpha p^2 - \varepsilon\alpha} (e^{-i\alpha m^2} - e^{-i\alpha M^2}) d\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

выполняя с помощью (7) и (8) интеграцию по  $dk$ , получаем, имея в виду, что

$$\gamma^n \hat{p} \gamma_n = -2\hat{p} \quad \text{и} \quad \gamma^n \gamma_n = 4,$$

следующее выражение для  $\operatorname{reg} \Sigma(p)$ :

$$\operatorname{reg} \Sigma(p) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} d\beta \frac{e^{-\varepsilon(\alpha+\beta)}}{(\alpha+\beta)^2} e^{\frac{i\alpha\beta p^2}{\alpha+\beta}} \left(2m - \hat{p} \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \times \\ \times (1 - e^{-i\alpha M^2}) (e^{-i\beta m^2} - e^{-i\beta M^2}).$$

Переходя к новым переменным

$$\alpha = \xi\lambda, \quad \beta = (1 - \xi)\lambda,$$

с учетом якобиана

$$\frac{(\partial\alpha, \partial\beta)}{(\partial\xi, \partial\lambda)} = \lambda$$

находим:

$$\operatorname{reg} \Sigma(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 (2m - \hat{p}\xi) J_s(\xi, M) d\xi, \quad (12)$$

где

$$J_s(\xi, M) = \\ = \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda\varepsilon + i\lambda\xi(1-\xi)p^2} (1 - e^{-i\xi\lambda M^2}) (e^{-i(1-\xi)\lambda m^2} - e^{-i(1-\xi)\lambda M^2}).$$

Вычисление интегралов такого типа можно проводить с помощью формулы

$$\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} (e^{iA\lambda} - e^{iB\lambda}) e^{-\varepsilon\lambda} = \ln \frac{B + i\varepsilon}{A + i\varepsilon}. \quad (13)$$

Ввиду того что сходимость интеграла на верхнем пределе обеспечивается множителем  $e^{-\lambda\varepsilon}$ , при выполнении предельного перехода  $\varepsilon \rightarrow 0$  следует соблюдать известную осторожность.

Наличие бесконечно малого мнимого добавка  $i\varepsilon$  под знаком логарифма  $\ln(a + i\varepsilon)$  делает его комплексным при  $a < 0$ :

$$\ln(a + i\varepsilon) = \ln|a| + i\pi\theta(-a).$$

В дальнейшем мы не будем явно выписывать члены  $i\epsilon$  под знаком логарифмов и будем считать, что (в соответствии с определением причинной  $D^c$ -функции) квадраты масс  $M^2$ ,  $m^2$  и т. д. содержат бесконечно малые отрицательные мнимые добавки.

Для  $J_\epsilon$  получаем в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$J_0(\xi, M) = \ln \left[ \frac{M^2 - \xi \rho^2}{m^2} \right] + \ln \left[ \frac{m^2}{m^2 - \xi \rho^2} \frac{\xi M^2 + (1 - \xi) m^2 - \xi (1 - \xi) \rho^2}{M^2 - \xi (1 - \xi) \rho^2} \right].$$

**27.2. Выделение из  $\Sigma$  расходящейся части.** Подставляя полученное значение  $J_0(\xi, M)$  в (12), получаем

$$\text{reg } \Sigma(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\xi (2m - \hat{p}\xi) \ln \left[ \xi \frac{M^2 - \xi \rho^2}{m^2} \right] + \Sigma_M(p), \quad (14)$$

$$\Sigma_M(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\xi (2m - \hat{p}\xi) \ln \left[ \frac{m^2}{m^2 - \xi \rho^2} \frac{\xi M^2 + (1 - \xi) m^2 - \xi (1 - \xi) \rho^2}{\xi [M^2 - \xi (1 - \xi) \rho^2]} \right];$$

второй член  $\Sigma_M$  при  $M \rightarrow \infty$  сходится к определенному пределу, равному

$$\tilde{\Sigma}(p) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 d\xi (2m - \hat{p}\xi) \ln \left[ \frac{m^2}{m^2 - \xi \rho^2} \right]. \quad (15)$$

Разбиение (14) сделано так, что

$$\tilde{\Sigma}(0) = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial \tilde{\Sigma}(p)}{\partial p^2} \right|_{p=0} = 0. \quad (16)$$

Первый член в (14) при  $M \rightarrow \infty$ , очевидно, расходится логарифмически.

Переходя к конфигурационному представлению, получаем при достаточно больших  $M$

$$\text{reg } \Sigma(x) = \text{sing } \Sigma(x, M) + \Sigma_M(x), \quad (17)$$

где

$$\text{sing } \Sigma(x, M) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \ln \frac{M^2}{m^2} \left( 4m - i \frac{\partial}{\partial x} \right) + \left( \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} - 4m \right) \right\} \delta(x), \quad (18)$$

а фурье-образ функции  $\Sigma_M(x)$  представляется вторым членом выражения (14). Повторяя рассуждение § 18, убеждаемся, что при  $M \rightarrow \infty$   $\Sigma_M(x)$  сходится в несобственном смысле к интегрируемой функции

$$\lim \Sigma_M(x) = \Sigma'(x),$$

фурье-образ которой представляется выражением (15). В целом же функция  $\text{reg } \Sigma(x)$  из-за фактора  $\ln(M/m)^2$  не будет сходиться при  $M \rightarrow \infty$  даже в несобственном смысле. Поскольку, кроме того,

первый член (17) исчезает при  $x \neq 0$ , можно написать:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \text{reg } \Sigma(x) = \Sigma'(x) \text{ всюду при } x \neq 0.$$

Мы произвели здесь выделение расходящейся части из сингулярной функции  $\Sigma(x)$ . Подчеркнем, однако, что операция выделения сингулярности является неоднозначной. В самом деле, представляя  $\text{reg } \Sigma$ , например, в виде

$$\text{reg } \Sigma(x) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \ln \left( \frac{M}{\mu} \right)^2 \left( 4m - i \frac{\partial}{\partial x} \right) + \left( \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} - 4m \right) \right\} \delta(x) + \Sigma'_M(x),$$

где

$$\Sigma'_M(x) = \frac{\alpha}{4\pi} \ln \left( \frac{\mu}{m} \right)^2 \left( 4m - i \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta(x) + \Sigma'_M(x),$$

а  $\mu$  — произвольная конечная масса, мы получили бы для регулярной части  $\Sigma'_M$  выражение, отличающееся от  $\Sigma'_M$  членами, пропорциональными  $\delta(x)$  и ее первым производным.

Изменение подобного характера в конечной части  $\Sigma'_M$  можно получить при переходе к какому-либо другому способу регуляризации. Например, если регуляризовать  $\Sigma(p)$  введением в интеграл (4) *обрезающего множителя Фейнмана* (1948б, 1949б)

$$\frac{M^2}{M^2 - k^2},$$

что в нашей записи эквивалентно регуляризации лишь фотонной  $D_0^c$ -функции, то результат может быть представлен в виде

$$\text{reg}_F \Sigma(x) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \ln \left( \frac{M}{m} \right)^2 \left( 4m - i \frac{\partial}{\partial x} \right) + \left( \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} - 4m \right) \right\} \delta(x) + \Sigma'_F(x),$$

где регулярная функция  $\Sigma'_F$  в импульсном представлении отличается от  $\Sigma'$  на величину

$$\frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 d\xi (\rho\xi - 2m) \ln(1 - \xi) = \frac{\alpha}{4\pi} \left( 2m - \frac{3}{4} \rho \right).$$

Таким образом, видно, что при снятии регуляризации к определенному пределу сходится не  $\text{reg } \Sigma(p)$ , а, например, выражение, получающееся путем вычитания из него двух первых членов ряда Маклорена:

$$\text{reg } \Sigma(p) - \text{reg } \Sigma(0) - \frac{\partial \text{reg } \Sigma(p)}{\partial p^n} \Big|_{p=0} \cdot p^n. \quad (19)$$

Последнее выражение сходится к пределу, не зависящему от способа регуляризации, так как добавление к  $\text{reg } \Sigma(p)$  любого полинома первой степени по  $p$  не меняет написанного «остаточного» члена (19).

Общее выражение для  $\Sigma'(p)$  получим, прибавляя к (19) произвольный полином первой степени по  $p$ . Из соображений релятивист-

ской ковариантности этот полином должен иметь вид

$$c_2(\hat{p} - m) + c_1 m,$$

и, следовательно, общее выражение для  $\Sigma'(p)$  получим в виде

$$\Sigma'(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ \int_0^1 d\xi (2m - \hat{p}\xi) \ln \left[ \frac{m^2}{m^2 - \xi p^2} \right] + c_2(\hat{p} - m) + c_1 m \right\}. \quad (20)$$

Соответственно в  $x$ -представлении выражение для  $\Sigma'$  определено с точностью до члена

$$\left\{ c_2 \left( i \frac{\partial}{\partial x} - m \right) + c_1 m \right\} \delta(x),$$

исчезающего при  $x \neq 0$ , т. е., как и следовало ожидать из общих соображений, произвол в этом члене  $T$ -произведения имеет место лишь в бесконечно малой окрестности точки  $x = 0$ .

**27.3. Расходящаяся диаграмма с двумя внешними фотонными линиями П.** Обратимся ко второму расходящемуся члену в  $S_2(x, y)$ . Член матрицы рассеяния, соответствующий диаграмме рис. 17, б, можно представить в виде

$$-e^2 : \text{Sp} (\hat{A}(x) S^c(x-y) \hat{A}(y) S^c(y-x)) := \\ = -i : A_m(x) \Pi^{mn}(x-y) A_n(y) :,$$

где

$$\Pi^{mn}(x-y) = -ie^2 \text{Sp} \gamma^m S^c(x-y) \gamma^n S^c(y-x) \quad (21)$$

— так называемый *поляризационный оператор*.

Переходя к импульсному представлению

$$\Pi^{mn}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ik(x-y)} \Pi^{mn}(k) dk, \quad (22)$$

убеждаемся, что интеграл

$$\Pi^{mn}(k) = \frac{\alpha}{4\pi^3 i} \int dp \text{Sp} \left( \gamma^m \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^n \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \quad (23)$$

квадратично расходится в области больших импульсов.

Определение  $\Pi^{mn}(k)$  в явном виде проведем теми же приемами, которые применялись при вычислении  $\Sigma(p)$ . Используя регуляризованные  $S^c$ -функции (11), с помощью формул (7)—(9) производим интеграцию по  $dp$ . Вычисляя также шпур по формуле (6.16), получаем:

$$\text{reg} \Pi^{mn}(k) = \\ = \frac{i\alpha}{\pi} \int_0^\infty du \int_0^\infty d\beta e^{-\epsilon(\alpha+\beta) + \frac{i\alpha\beta k^2}{\alpha+\beta}} (e^{-i\alpha m^2} - e^{-i\alpha M^2}) (e^{-i\beta m^2} - e^{-i\beta M^2}) \times \\ \times \frac{1}{(\alpha+\beta)^2} \left\{ \frac{i\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} (2k^n k^m - k^2 g^{mn}) - g^{mn} \left( \frac{1}{\alpha+\beta} + i m^2 \right) \right\}.$$

В новых переменных

$$\alpha = \xi\lambda, \quad \beta = (1 - \xi)\lambda$$

это выражение имеет вид

$$\text{reg } \Pi^{mn}(k) =$$

$$= \frac{i\alpha}{\pi} \int_0^1 d\xi \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-e\lambda} (e^{-i\xi\lambda m^2} - e^{-i\xi\lambda M^2}) (e^{-i(1-\xi)\lambda m^2} - e^{-i(1-\xi)\lambda M^2}) \times \\ \times e^{i\lambda\xi(1-\xi)k^2} \left\{ i\xi(1-\xi)(2k^m k^n - g^{mn}k^2) - g^{mn} \left( \frac{1}{\lambda} + im^2 \right) \right\}.$$

Для выполнения интеграции по  $\lambda$  член, содержащий в знаменателе  $\lambda^2$ , представим в виде

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} e^{-e\lambda} f(\lambda),$$

где

$$f(\lambda) = e^{i\lambda\xi(1-\xi)k^2} (e^{-i\xi\lambda m^2} - e^{-i\xi\lambda M^2}) (e^{-i(1-\xi)\lambda m^2} - e^{-i(1-\xi)\lambda M^2}),$$

и, интегрируя по частям с учетом конечности  $f(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  и обращения  $f(\lambda)$  в нуль как  $\lambda^2$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , находим:

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} f(\lambda) e^{-e\lambda} = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} (e^{-e\lambda} f(\lambda)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-e\lambda} \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda}.$$

Поэтому имеем:

$$\text{reg } \Pi^{mn}(k) = \frac{i\alpha}{\pi} \int_0^1 d\xi F_\varepsilon(\xi, M),$$

где интеграл

$$F_\varepsilon(\xi, M) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-e\lambda} \left\{ f(\lambda) [i\xi(1-\xi)(2k^m k^n - g^{mn}k^2) - im^2 g^{mn}] - g^{mn} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right\}$$

может быть вычислен дифференцированием по параметру  $\varepsilon$ . Получаем таким путем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(\xi, M) = F_0(\xi, M) = [2i\xi(1-\xi)(k^m k^n - g^{mn}k^2) - im^2 g^{mn}] \times \\ \times \left\{ \ln \left[ \frac{(1-\xi)M^2 + \xi m^2 - \xi(1-\xi)k^2}{m^2 - \xi(1-\xi)k^2} \right] - \ln \left[ \frac{M^2 - \xi(1-\xi)k^2}{\xi M^2 + (1-\xi)m^2 - \xi(1-\xi)k^2} \right] \right\} + \\ + ig^{mn}\xi \left\{ m^2 \ln \left[ \frac{(1-\xi)M^2 + \xi m^2 - \xi(1-\xi)k^2}{m^2 - \xi(1-\xi)k^2} \right] - \right. \\ \left. - M^2 \ln \left[ \frac{M^2 - \xi(1-\xi)k^2}{\xi M^2 + (1-\xi)m^2 - \xi(1-\xi)k^2} \right] \right\} + \\ + ig^{mn}(1-\xi) \left\{ m^2 \ln \left[ \frac{\xi M^2 + (1-\xi)m^2 - \xi(1-\xi)k^2}{m^2 - \xi(1-\xi)k^2} \right] - \right. \\ \left. - M^2 \ln \left[ \frac{M^2 - \xi(1-\xi)k^2}{(1-\xi)M^2 + \xi m^2 - \xi(1-\xi)k^2} \right] \right\}.$$

В пределе  $M \rightarrow \infty$  это выражение принимает вид

$$\lim_{M \rightarrow \infty} F_0(\xi, M) = ig^{mn} (M^2 - m^2) [\xi \ln \xi + (1 - \xi) \ln (1 - \xi)] + \\ + 2i\xi (1 - \xi) \ln \frac{M^2}{m^2} (k^n k^m - g^{nm} k^2) + \\ + 2i\xi (1 - \xi) (k^n k^m - g^{nm} k^2) \ln \left[ \frac{\xi (1 - \xi) m^2}{m^2 - \xi (1 - \xi) k^2} \right] + ig^{mn} [m^2 - \xi (1 - \xi) k^2].$$

**27.4. Выделение расходимостей из  $\Pi$  и градиентная инвариантность.** Интегрируя по  $\xi$ , находим, что в пределе больших  $M$

$$\text{reg } \Pi^{mn}(k) = \text{sing } \Pi^{mn}(k, M) + \tilde{\Pi}^{mn}(k), \quad (24)$$

где

$$\text{sing } \Pi^{mn}(k, M) = \frac{\alpha}{2\pi} g^{mn} \left[ M^2 - 3m^2 + \frac{k^2}{3} \right] + \frac{\alpha}{3\pi} (g^{mn} k^2 - k^m k^n) \ln \frac{M^2}{m^2},$$

а

$$\tilde{\Pi}^{mn}(k) = \frac{2\alpha}{\pi} (k^n k^m - g^{nm} k^2) \int_0^1 d\xi \cdot \xi (1 - \xi) \ln \left[ \frac{m^2 - \xi (1 - \xi) k^2}{\xi (1 - \xi) m^2} \right] \quad (25)$$

— регулярная функция.

Переходя к конфигурационному представлению, мы получаем при достаточно больших  $M$

$$\text{reg } \Pi^{mn}(x) = \text{sing } \Pi^{mn}(x, M) + \Pi_M^{mn}(x). \quad (26)$$

В пределе  $M \rightarrow \infty$  член  $\Pi_M^{mn}(x)$  сходится в несобственном смысле к интегрируемой функции  $\Pi'^{mn}(x)$ :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \Pi_M^{mn}(x) = \Pi'^{mn}(x),$$

фурье-образ которой дается формулой (25). Выделение сингулярностей из  $\Pi^{mn}$ , таким образом, закончено. Заметим, что, как и в предыдущем случае, разбиение  $\text{reg } \Pi^{mn}$  на сингулярную и конечную части выполняется неоднозначно. Следовательно, и конечная часть  $\Pi'^{mn}$  не является однозначной. К  $\Pi^{mn}(k)$  может быть прибавлено любое выражение, являющееся полиномом по компонентам  $k^n$  не выше второй степени, так как сингулярная часть является в данном случае квадратичным полиномом по  $k$ .

Чтобы закончить анализ выражения  $\Pi^{mn}$ , сформулируем еще условие *градиентной инвариантности*, которому должно удовлетворять  $\Pi^{mn}$ . Нетрудно убедиться, что в матричные элементы функция  $\Pi^{mn}(k)$  подобно функции  $\Sigma(p)$  входит в следующей комбинации с потенциалами  $A_m(k)$ :

$$: A_m(k) \Pi^{mn}(k) A_n(k) :. \quad (27)$$

Как указывалось в § 5, потенциалы электромагнитного поля  $A_m$  с самого начала вводятся так, что все физически наблюдаемые

величины не меняют своего значения при градиентном преобразовании потенциалов

$$A_m(x) \rightarrow A'_m(x) = A_m(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x^m}$$

или, в импульсном представлении,

$$A_m(k) \rightarrow A'_m(k) = A_m(k) + ik_{mf}(k).$$

Поэтому требование инвариантности матричных элементов операторов типа (27)

$$: A'_m(k) \Pi^{mn}(k) A'_n(k) : = : A_m(k) \Pi^{mn}(k) A_n(k) :$$

приводит к условию

$$k_m \Pi^{mn}(k) = 0, \quad (28)$$

откуда следует, что функция  $\Pi^{mn}$  должна иметь вид

$$\Pi^{mn}(k) = (k^m k^n - g^{mn} k^2) \pi(k^2). \quad (29)$$

Ввиду того что сингулярные слагаемые в (24), (26) в дальнейшем будут компенсированы квазилокальным оператором  $\Lambda_2(x_1, x_2)$  (см. § 27.5) и вклада в  $S_2$  не дадут, условие градиентной инвариантности должно быть наложено на регулярную часть  $\Pi'$ , которая согласно (25) удовлетворяет условию (28). Ясно также, что к (25) можно прибавить выражение

$$c_3(k^n k^m - g^{mn} k^2),$$

т. е. разбиение (26), вообще говоря, нужно заменить следующим:

$$\begin{aligned} \text{reg } \Pi^{mn}(x) = & \frac{\alpha}{2\pi} g^{mn} \left[ M^2 - 3m^2 + \frac{\square}{3} \right] \delta(x) + \\ & + \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{1}{3} \ln \frac{M^2}{m^2} + 2c_3 \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_m} + g^{mn} \square \right) \delta(x) + \Pi'_{\text{инв}}{}^{mn}(x), \end{aligned}$$

где конечная часть  $\Pi'_{\text{инв}}{}^{mn}(x)$  инвариантна по отношению к градиентному преобразованию и в импульсном представлении имеет форму (29):

$$\begin{aligned} \Pi'_{\text{инв}}{}^{mn}(k) = \\ = \frac{2\alpha}{\pi} (k^m k^n - g^{mn} k^2) \left( c_3 + \int_0^1 d\xi \cdot \xi (1 - \xi) \ln \left[ \frac{m^2 - \xi(1 - \xi) k^2}{\xi(1 - \xi) m^2} \right] \right). \quad (30) \end{aligned}$$

Подобным же образом может быть исследован член S-матрицы, соответствующий вакуумной диаграмме рис. 17, в (см. стр. 260). Не вдаваясь в вычисления, отметим, что соответствующая функция  $R(x_1 - x_2)$  содержит сингулярную часть, которая после выполнения регуляризации в пределе  $M \rightarrow \infty$  расходится как  $M^4$ . Однако вклад диаграммы рис. 17, в не содержит зависимостей от импульсов физических частиц и представляет собой число  $iR_2$ . Можно показать (с учетом вкладов диаграмм высших порядков), что это число вхо-



дит в S-матрицу в виде фазового множителя  $e^{iR_2}$  и не приводит к каким-либо физическим следствиям.

**27.5. Построение интегрируемой функции  $S_2$ .** Мы приходим к выводу, что член второго порядка в матрице рассеяния

$$S_2(x_1, x_2) = i^2 T(\mathcal{L}(x_1), \mathcal{L}(x_2))$$

в рассматриваемом регуляризованном случае ( $M < \infty$ ) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} i^2 T(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2)) = & i^2 T'_M[\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2)] - \\ & - i \{ a_2^M : \psi(x_1) (i\hat{\partial}_1 - m) \delta(x_1 - x_2) \psi(x_2) : - \\ & - \delta m : \bar{\psi}(x_1) \delta(x_1 - x_2) \psi(x_2) : + \delta \mu^2 : A^n(x_1) \delta(x_1 - x_2) A_n(x_2) : + \\ & + a_3^M : A_n(x_1) (\partial_1^m \partial_1^m + \square_1 g^{mn}) \delta(x_1 - x_2) A_m(x_2) : + \\ & + R_{\text{синг}} \left( M, \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta(x_1 - x_2) + \text{те же члены с заменой } x_1 \text{ на } x_2 \}. \end{aligned} \quad (31)$$

При этом константы  $a_2^M$ ,  $a_3^M$ ,  $\delta m$ ,  $\delta \mu$  при больших  $M$  расходятся:

$$\left. \begin{aligned} a_2 & \sim \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \ln \frac{M^2}{m^2} - \frac{1}{2} - c_2 \right], & \delta m & \sim \frac{\alpha m}{4\pi} \left[ 3 \ln \frac{M^2}{m^2} - \frac{7}{2} + c_0 \right], \\ a_3 & \sim \frac{2\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{6} \ln \frac{M^2}{m^2} - c_3 \right], & \delta \mu^2 & \sim \frac{\alpha}{2\pi} [M^2 - m^2], \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

а при построении коэффициентных функций выражения  $T'_M$  правила соответствия должны быть несколько изменены: для простых линий диаграмм Фейнмана следует использовать  $\text{reg } \Delta^c$  вместо  $\Delta^c$  и для замкнутых петель соответствующие конечные функции  $\Sigma'_M$ ,  $\Pi_{M, \text{инв}}^{\text{инв}}$  и  $R'_M$ . Тогда очевидно, что все коэффициентные функции выражения  $T'_M(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2))$  сходятся к конечному пределу при снятии регуляризации.

Мы видим также, что все расходимости в  $S_2(x_1, x_2)$  обязаны членам, пропорциональным  $\delta(x_1 - x_2)$  и ее производным, отличным от нуля лишь в бесконечно малой окрестности точки  $x_1 = x_2$ . Именно в окрестности этой точки, как указывалось в § 22,  $T$ -произведение  $T(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2))$  не является полностью определенным.

Возникает поэтому возможность определить это  $T$ -произведение в окрестности точки  $x_1 = x_2$  как предел:

$$T'(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2)) = \lim_{M \rightarrow \infty} T'_M(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2)),$$

что обеспечит *интегрируемость*  $S_2(x_1, x_2)$ .

Имеется также и другая, вполне эквивалентная возможность получения интегрируемой  $S_2$ . Как было установлено в § 21, наиболее общая форма  $S_2$  включает произвольный квазилокальный оператор:

$$S_2(x_1, x_2) = i^2 T(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2)) + i \Lambda_2(x_1, x_2). \quad (33)$$

Поэтому можно, не переходя к пределу  $M \rightarrow \infty$ , определить квазилокальный оператор  $i\Lambda_2(x_1, x_2)$  так,

$$i\Lambda_2(x_1, x_2) = T(\mathcal{L}(x_1)\mathcal{L}(x_2)) - T'_M(\mathcal{L}(x_1)\mathcal{L}(x_2)), \quad (34)$$

чтобы он скомпенсировал все сингулярные члены  $T(\mathcal{L}(x_1)\mathcal{L}(x_2))$  в (33). Тогда после перехода к пределу  $M \rightarrow \infty$  мы получим  $S_2(x_1, x_2)$  в виде интегрируемого полилокального оператора

$$S_2(x_1, x_2) = -T'(\mathcal{L}(x_1)\mathcal{L}(x_2)).$$

Как было показано в § 21, квазилокальный оператор  $i\Lambda_2$  может быть включен в полный эффективный лагранжиан взаимодействия. Для этого в  $\mathcal{L}(x)$  необходимо ввести дополнительные члены  $\mathcal{L}^{(2)}(x)$ , которые после интегриации по  $dx$  скомпенсируют сингулярные члены в  $S_2$ , т. е.

$$i \int \mathcal{L}^{(2)} dx + \frac{i^2}{2} \int \{T(\mathcal{L}(x_1)\mathcal{L}(x_2)) - T'_M(\mathcal{L}(x_1)\mathcal{L}(x_2))\} dx_1 dx_2 = 0. \quad (35)$$

Используя выражение (31), после интегриации по частям эти контрчлены можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)}(x) &= \frac{1}{2} \int \Lambda_2(x, y) dy = \\ &= a_3^M \left\{ \frac{i}{2} : \left( \bar{\psi}(x) \gamma^n \frac{\partial \psi}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^n} \gamma^n \psi(x) \right) : - m : \bar{\psi} \psi : \right\} - \\ &\quad - \delta m : \bar{\psi}(x) \psi(x) : + \frac{\delta \mu^2}{2} : A_n(x) A^n(x) : + \\ &\quad + \frac{a_3^M}{2} \left\{ : \frac{\partial A_n}{\partial x^m} \frac{\partial A^n}{\partial x_m} : - : \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 : \right\} + R, \quad (36) \end{aligned}$$

где константы  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $\delta m$  и  $\delta \mu^2$  имеют порядок  $\alpha$  и расходятся при  $M \rightarrow \infty$ .

Итак, после переопределения  $T(\mathcal{L}(x_1)\mathcal{L}(x_2))$  в окрестности точки  $x_1 = x_2$  или после дополнительного введения квазилокального оператора (34), что эквивалентно введению в лагранжиан взаимодействия контрчленов (36) порядка  $\alpha$ , и после перехода к пределу  $M \rightarrow \infty$  мы получаем для членов  $S$ -матрицы порядка  $\alpha$  регуляризованное выражение

$$\frac{i^2}{2!} \int dx_1 dx_2 T'(\mathcal{L}(x_1)\mathcal{L}(x_2)).$$

### § 28. О расходимостях $S$ -матрицы в электродинамике (третий порядок)

Мы полностью рассмотрели вопрос регуляризации матрицы во втором порядке по  $e$ . Нетрудно, однако, убедиться, что совершенно аналогичной процедурой могут быть регуляризованы члены  $S$ -матрицы более высоких порядков.

Рассмотрим член третьего порядка в матрице рассеяния

$$S_3(x, y, z) = i^3 T(\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) \mathcal{L}(z)). \quad (1)$$

Часть расходящихся членов в  $S_3$ , содержащих расходимости второго порядка, например соответствующих диаграммам, изображен-

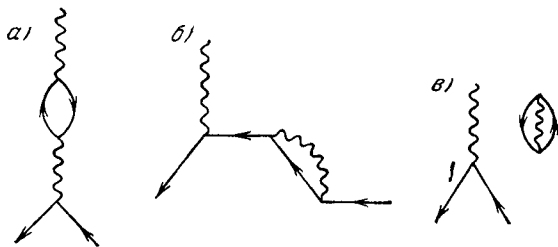


Рис. 18.

ным на рис. 18, компенсируется одновременно с устранением расходимостей из  $S_2$  контрчленами второго порядка, т. е. переопределением  $T$ -произведения (1) в точках совпадения каких-либо двух аргументов.

Специфические расходимости третьего порядка могут поэтому содержаться лишь в членах  $S_3$ , соответствующих диаграммам, изображенным на рис. 19 и 20. Однако члены, соответствующие диаграммам типа рис. 19, а, так же как и члены, соответствующие диаграммам типа рис. 19, б, в сумме всегда аннулируются. Действительно, указанные члены пропорциональны  $e^3$  и не содержат факторов, соответствующих свободным электронам и позитронам. Поэтому при преобразовании зарядового сопряжения (13.12) соответствующие матричные элементы изменятся на фактор  $(-1)^3 = -1$  и ввиду отсутствия реальных электронов и позитронов будут описывать те же самые процессы. Следовательно, они равны нулю\*).

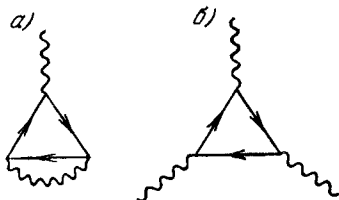


Рис. 19.

**28.1. Вершинная диаграмма третьего порядка.** Поэтому необходимо рассмотреть лишь член третьего порядка, соответствующий диаграмме, изображенной на рис. 20. Этот член может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} (ie)^3 : \bar{\psi}(x) \overline{\hat{A}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \hat{A}(y) \psi(y) \bar{\psi}(z) \hat{A}(z) \psi(z)} : = \\ = ie : \bar{\psi}(x) \Gamma^n(x, z | y) \psi(z) A_n(y) :, \end{aligned}$$

\* Это утверждение является частным случаем теоремы Фарри (см. § 33).

где введена *вершинная функция* третьего порядка

$$\Gamma^n(x, z|y) = ie^2 \gamma^k S^c(x-y) \gamma^n S^c(y-z) \gamma_k D_0^c(x-z). \quad (2)$$

Переходя к импульсному представлению

$$\Gamma^n(x, z|y) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int e^{ip(z-x)+ik(y-x)} \Gamma^n(p, k) dp dk, \quad (3)$$

получаем для нее следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Gamma^n(p, k) &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int dq D_0^c(p-q) \gamma^k S^c(q+k) \gamma^n S^c(q) \gamma_k = \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} i \int \frac{dq}{(p-q)^2 + i\epsilon} \gamma^k \frac{\hat{q} + \hat{k} + m}{(q+k)^2 - m^2} \gamma^n \frac{\hat{q} + m}{q^2 - m^2} \gamma_k. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим при этом, что выбору импульсных переменных в (3), (4) соответствует диаграмма, на которой входящая электронная линия имеет импульс  $p$ , фотонная линия — импульс  $k$ , выходящая электронная линия — импульс  $p+k$ , а в качестве переменной  $q$  в (4) взята разность 4-импульсов входящего электрона и виртуального фотона, как это изображено на рис. 21.

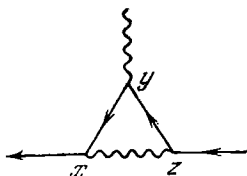


Рис. 20. Расходящаяся диаграмма третьего порядка.

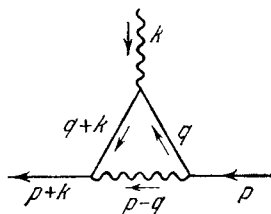


Рис. 21. Выбор импульсных обозначений в диаграмме рис. 20.

Интеграл (4) при больших  $q$  расходится логарифмически. Для его вычисления воспользуемся принятой процедурой регуляризации (27.11). Подставляя выражения для  $S^c$  и  $D_0^c$  в (3), находим после небольших перестроек матриц Дирака

$$\begin{aligned} \text{reg } \Gamma^n(p, k) &= -\frac{e^2}{8\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma e^{i\alpha p^2 + i\beta k^2 - \epsilon(\alpha + \beta + \gamma)} (1 - e^{-i\alpha M^2}) \times \\ &\times (e^{-i\beta m^2} - e^{-i\beta M^2}) (e^{-i\gamma m^2} - e^{-i\gamma M^2}) \times \\ &\times \int dq e^{iq^2(\alpha + \beta + \gamma) + 2iq(k\beta - p\alpha)} [\gamma^n m^2 + \hat{q} \gamma^n (\hat{k} + \hat{q}) - 2m(k^n + 2q^n)]. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование по  $q$  с помощью (27.7), (27.8) и (27.9) и переходя к новым переменным  $x, y, \lambda$ :

$$\alpha = \lambda x, \quad \beta = \lambda y, \quad \gamma = \lambda(1-x-y), \quad (5)$$

получаем после интегриации по  $\lambda$  в пределе больших  $M$

$$\text{reg } \Gamma_n(p, k) = \frac{\alpha}{4\pi} \gamma_n \left[ \ln \frac{M^2}{m^2} - 3 \right] + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[ \gamma_n \ln \frac{m^2}{Z} + \frac{N_n}{Z} \right],$$

где

$$Z = m^2(1-x) - xp^2 - yk^2 + (xp - yk)^2 = m^2(1-x)^2 + xy[m^2 - (p+k)^2] + x(1-x-y)[m^2 - p^2] - y(1-x-y)k^2$$

и

$$N_n = \gamma_n m^2 - 2mk_n + (\hat{p}x - \hat{k}y) \gamma_n \hat{k} + 4m(k_n y - p_n x) + (\hat{p}x - \hat{k}y) \gamma_n (\hat{p}x - \hat{k}y).$$

Отметим, что если регуляризовать интеграл (4) по Фейнману (т. е. введением дополнительного множителя  $M^2 [M^2 - (p - q)^2]^{-1}$ ), то результат будет отличаться от полученного на конечную константу

$$\text{reg}_F \Gamma^n(p, q) = \text{reg } \Gamma^n(p, q) + \frac{3\alpha}{8\pi} \gamma^n.$$

**28.2. Выделение расходимости из  $\Gamma$  и градиентная инвариантность.** Таким образом,  $\text{reg } \Gamma$  может быть представлена в виде суммы

$$\text{reg } \Gamma^n(p, k) = \text{sing } \Gamma^n(M) + \tilde{\Gamma}_m^n(p, k), \quad (6)$$

где

$$\text{sing } \Gamma^n(M) = \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \ln \frac{M^2}{m^2} - \frac{1}{2} \right] \gamma^n,$$

а второй член в пределе больших  $M$  сходится к конечному пределу, равному

$$\tilde{\Gamma}_n(p, k) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[ \gamma_n \ln \frac{m^2(1-x)}{Z} + \frac{N_n}{Z} - \frac{\gamma_n}{1-x} \right]. \quad (7)$$

Переходя к конфигурационному представлению, получаем соответственно

$$\text{reg } \Gamma^n(x, z|y) = \text{sing } \Gamma^n(M) \delta(x-z) \delta(x-y) + \Gamma_M^n(x, z|y), \quad (8)$$

причем в пределе  $M \rightarrow \infty$  второе слагаемое сходится к интегрируемой функции  $\Gamma'^n(x, z|y)$ , фурье-образ которой определяется выражением (7).

Разбиение (6), конечно, *не является однозначным*. В данном случае оно выбрано так, чтобы

$$\Gamma'^n(0, 0) = 0. \quad (9)$$

Степень неоднозначности определяется структурой сингулярного члена. К выражению (7) поэтому может быть прибавлена постоянная, пропорциональная матрице  $\gamma^n$ . Эта константа, однако, не

является произвольной и определяется условием градиентной инвариантности.

Рассмотрим это условие применительно к членам третьего порядка матрицы рассеяния. Эти члены могут быть разбиты на две группы. В одну войдут члены, содержащие три оператора электромагнитного поля  $A(x)$ ,  $A(y)$ ,  $A(z)$  и не содержащие электромагнитных спариваний  $D_0^c$ , а в другую — выражения, содержащие один оператор  $A$  и одно спаривание  $D_0^c$ . Члены первой группы соответствуют диаграммам, приведенным на рис. 22. Члены, соответствующие диаграммам рис. 22, а—в, являются нормальными произведениями членов низшего порядка и потому явным образом градиентно-инвариантны. Член, соответствующий рис. 22, г, равен нулю по теореме Фарри и, наконец, градиентная инвариантность члена, соответствующего рис. 22, д, может быть установлена непосредственным вычислением.

Рис. 22.

Сумма членов второй группы, содержащих расходимости собственно третьего порядка, может быть записана в виде

$$: A_n(x) J^n(x, y, z) : + : A_n(y) J^n(y, z, x) : + : A_n(z) J^n(z, x, y) :$$

Требование градиентной инвариантности накладывает на каждое из слагаемых этого выражения условия вида

$$\int \frac{\partial f(x)}{\partial x^n} J^n(x, y, z) dx = 0,$$

которые ввиду произвольности функции  $f$  дают:

$$\frac{\partial}{\partial x^n} J^n(x, y, z) = 0. \quad (10)$$

Обратимся к структуре функции  $J^n(x, y, z)$ . Эта функция содержит члены, соответствующие четырём диаграммам (рис. 23) и ещё четырём диаграммам, отличающимся от приведенных перестановкой точек  $z$  и  $y$ .

Заметим, во-первых, что члены  $J^n$ , соответствующие диаграмме рис. 23, г,

$$J_g^n(x, y, z) \sim \{ \Pi^{mn}(x-z) : \bar{\psi}(y) \gamma_n \psi(y) : D_0^c(y-z) + \\ + \text{член с переставленными } z \text{ и } y \}$$

после устранения расхождений в силу условия (27.28) дают автоматически

$$\frac{\partial}{\partial x^n} J_z^n(x, y, z) = 0.$$

Поэтому остается рассмотреть лишь члены  $S_3$ , соответствующие трем первым диаграммам рис. 23:

$$\begin{aligned} & \{ : \bar{\psi}(z) \gamma^m S^c(z-x) \gamma^n S^c(x-y) \gamma_m \psi(y) : + \\ & \quad + : \bar{\psi}(z) \gamma^m S^c(z-y) \gamma_m S^c(y-x) \gamma^n \psi(x) : + \\ & \quad + : \bar{\psi}(x) \gamma^n S^c(x-z) \gamma^m S^c(z-y) \gamma_m \psi(y) : \} D_0^c(y-z). \end{aligned} \quad (11)$$

Формально дифференцируя их по  $x^n$  и суммируя с учетом уравнений

$$\left. \begin{aligned} \left( i \frac{\partial}{\partial x} - m \right) \psi(x) = 0, \quad i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^n} \gamma^n + m \bar{\psi}(x) = 0, \\ \left( i \frac{\partial}{\partial x} - m \right) S^c(x) = i \frac{\partial S^c(x)}{\partial x^n} \gamma^n - m S^c(x) = -\delta(x), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

получаем:

$$\begin{aligned} D_0^c(y-z) \{ : \bar{\psi}(z) \gamma^m \delta(z-x) S^c(x-y) \gamma_m \psi(y) : - \\ - : \bar{\psi}(z) \gamma^m S^c(z-x) \delta(x-y) \gamma_m \psi(y) : + \\ + : \bar{\psi}(z) \gamma^m S^c(z-y) \gamma_m \delta(y-x) \psi(x) : - \\ - : \bar{\psi}(x) \delta(x-z) \gamma^m S^c(z-y) \gamma_m \psi(y) : \} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, члены S-матрицы, соответствующие диаграммам рис. 23, а, б, в, в сумме действительно градиентно-инвариантны

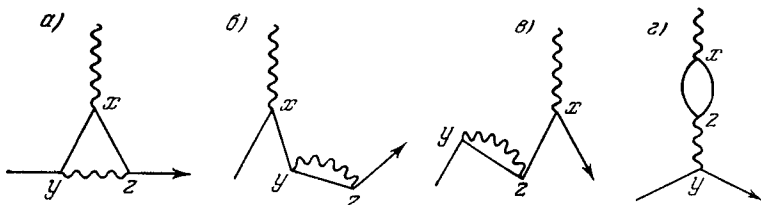


Рис. 23.

Проведенная нами проверка условия (10) носила чисто формальный характер, поскольку каждый из членов выражения (11) в действительности расходится. По существу необходимо проверить условие градиентной инвариантности его конечной части, которая и войдет в матричный элемент после компенсации сингулярной части. Для удобства проверки целесообразно воспользоваться сначала методом регуляризации Фейнмана, а затем уже перейти к принятому нами способу регуляризации. Регуляризуя поэтому лишь

одну фотонную функцию

$$D_0^c(y-z) \rightarrow \text{reg } D_0^c(y-z),$$

получаем выражение

$$\begin{aligned} \text{reg } D_0^c(y-z) \{ & \bar{\psi}(z) \gamma^n S^c(z-x) \gamma^n S^c(x-y) \gamma_m \psi(y) : + \\ & + \bar{\psi}(z) \gamma^m S^c(z-y) \gamma_m S^c(y-x) \gamma^n \psi(x) : + \\ & + \bar{\psi}(x) \gamma^n S^c(x-z) \gamma^m S^c(z-y) \gamma_m \psi(y) : \}, \end{aligned} \quad (13)$$

которое в целом явно удовлетворяет условию (10), так как дифференцируемые сомножители

$$\bar{\psi}(x), \quad S^c(x-w), \quad S^c(w-x), \quad \psi(x) \quad (w=y, z)$$

здесь не меняются.

Сингулярная часть (13) при  $M < \infty$  с учетом разложений

$$\left. \begin{aligned} \text{reg}_F \Sigma(x-y) &= \Sigma'_F(x-y) - a_2^F \left( i \frac{\hat{\partial}}{\partial x} - m \right) \delta(x-y) - \delta m \delta(x-y), \\ \text{reg}_F \Gamma^n(x, y | \xi) &= a_1^F \gamma^n \delta(x-y) \delta(y-\xi) + \Gamma_F^n(x, y | \xi) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

представляется в виде

$$\begin{aligned} a_1^F : & \bar{\psi}(z) \gamma^n \delta(z-x) \delta(x-y) \psi(y) : + \\ & + a_2^F : \bar{\psi}(z) \left[ \left( i \frac{\hat{\partial}}{\partial z} - m \right) \delta(z-y) \right] S^c(y-x) \gamma^n \psi(x) : + \\ & + \delta m : \bar{\psi}(z) \delta(z-y) S^c(y-x) \gamma^n \psi(x) : + \\ & + a_2^F : \bar{\psi}(x) \gamma^n S(x-z) \left[ \left( i \frac{\hat{\partial}}{\partial z} - m \right) \delta(z-y) \right] \psi(y) : + \\ & + \delta m : \bar{\psi}(x) \gamma^n S^c(x-z) \delta(z-y) \psi(y) : . \end{aligned}$$

Дифференцируя эту комбинацию по  $x^n$  и суммируя по  $n$ , с учетом уравнений (12) приходим к выражению

$$\begin{aligned} (a_1^F - a_2^F) \{ & \bar{\psi}(z) \left( \frac{\hat{\partial}}{\partial x} \delta(z-x) \right) \delta(x-y) \psi(y) : + \\ & + \bar{\psi}(z) \delta(z-x) \left( \frac{\hat{\partial}}{\partial x} \delta(x-y) \right) \psi(y) : \}. \end{aligned}$$

**28.3. Тожество Уорда.** Таким образом, для обеспечения градиентной инвариантности сингулярной части выражения (13) необходимо, чтобы

$$a_1^F = a_2^F. \quad (15)$$

В силу градиентной инвариантности выражения (13) в целом при этом обеспечивается инвариантность его конечной части. Переходя затем к пределу  $M \rightarrow \infty$  после перестройки эффективного лагранжиана, мы получим для  $S_3$  градиентно-инвариантное выражение, не содержащее бесконечностей. Тожество сингулярных констант (15),



обеспечивающее градиентную инвариантность, впервые было установлено в несколько более общей форме Уордом (1950) и известно под названием *тождества Уорда*.

Это тождество получено нами при регуляризации по Фейнману. Покажем, что оно имеет место и при обычно используемом нами способе регуляризации. Для этого, обозначая сокращенно

$$\text{reg}_F \Sigma \equiv \Sigma_F \quad \text{и} \quad \text{reg}_F \Gamma^n \equiv \Gamma_F^n,$$

представим соотношения (14) в виде

$$\begin{aligned} \Sigma'_F &= \Sigma_F(p) + a_2^F \hat{p} - m a_1^F + \delta m = \\ &= \Sigma_F(p) - \Sigma_F(0) - \left. \frac{\partial \Sigma_F(p)}{\partial p^n} \right|_{p=0} \cdot p^n + c_0^F + c_2^F \hat{p}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Gamma'^n_F(p, k) = \Gamma_F^n(p, k) - a_1^F \gamma^n = \Gamma_F^n(p, k) - \Gamma_F^n(0, 0) - c_1^F \gamma^n, \quad (17)$$

откуда, на основании (15), следует

$$a_2^F \gamma^n = - \left. \frac{\partial \Sigma_F(p)}{\partial p_n} \right|_{p=0} + c_2^F \gamma^n = \Gamma_F^n(0, 0) + c_1^F \gamma^n. \quad (18)$$

Прямым вычислением легко убедиться, что

$$\left. \frac{\partial \Sigma_F(p)}{\partial p_n} \right|_{p=0} = - \Gamma_F^n(p, 0). \quad (19)$$

Поэтому из (18) следует, что

$$c_1^F = c_2^F.$$

Вспоминая теперь, что согласно (27.19) комбинация

$$\Sigma_F(p) - \Sigma_F(0) - \left. \frac{\partial \Sigma_F(p)}{\partial p^n} \right|_{p=0} \cdot p^n$$

не зависит от способа регуляризации и в соответствии с (27.16) равна (27.15), используя аналогичные соображения также для функции  $\Gamma^n$ , приходим к выводу, что выражения

$$\Sigma'(p) + c_0 + c_2 \hat{p} \quad \text{и} \quad \Gamma'^n(p, k) - c_1 \gamma^n$$

удовлетворяют требованию градиентной инвариантности при условии

$$c_1 = c_2.$$

Поэтому вычитаемые при нашем обычном способе регуляризации сингулярные части функций  $\Sigma(x)$  и  $\Gamma(x, y | \xi)$  могут быть записаны в виде

$$a_2 \left( i \frac{\hat{\partial}}{\partial x} - m \right) \delta(x) + \delta m \delta(x), \quad (20)$$

$$- a_1 \gamma^n \delta(x - y) \delta(x - \xi), \quad (21)$$

где

$$a_1 = a_2 = \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \ln \frac{M^2}{m^2} - \frac{1}{2} - c_2 \right], \quad (22)$$

$$\delta m = \frac{\alpha m}{4\pi} \left\{ 3 \ln \frac{M^2}{m^2} - \frac{7}{2} + c_0 \right\}. \quad (23)$$

Тождество Уорда, таким образом, имеет место и в нашем способе регуляризации. Ввиду того, что в проведенном рассуждении использовались лишь соотношения

$$\Sigma(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial p^2} \right|_{p=0} = 0, \quad \Gamma^n(0, 0) = 0,$$

этим показано, что тождество Уорда вообще не зависит от способа регуляризации.

**28.4. Получение интегрируемой функции  $S_3$ .** Мы приходим к заключению, что член третьего порядка в матрице рассеяния может быть представлен в виде

$$S_3(x_1, x_2, x_3) = i^3 T'_M(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2) \mathcal{L}(x_3)) - i^2 T(\mathcal{L}(x_1) \Lambda_2(x_2, x_3)) - \\ - i^2 T(\mathcal{L}(x_2) \Lambda_2(x_1, x_3)) - i^2 T(\mathcal{L}(x_3) \Lambda_2(x_1, x_2)) - i \Lambda_3(x_1, x_2, x_3), \quad (24)$$

где  $T'_M$  есть регулярная операторная функция, в коэффициентных функциях которой должны быть взяты: функции гег  $\Delta^c$  для простых линий, функции  $\Pi'_M$  и  $\Sigma'_M$  — для замкнутых диаграмм, изображенных на рис. 17, а, б, и функция  $\Gamma'_M$  — для вершинной части (рис. 20).

Тогда очевидно, что при снятии регуляризации все коэффициентные функции оператора  $T'_M$  сходятся к конечным пределам, зависящим от  $\Delta^c$ ,  $\Pi'$ ,  $\Sigma'$  и  $\Gamma$ . Члены выражения (24), содержащие функции

$$i \Lambda_2(x_1, x_2) = T(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2)) - T'_M(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2)),$$

учитывают расходимости второго порядка, соответствующие диаграммам типа рис. 18, а квазилокальный оператор

$$\Lambda_3(x_1, x_2, x_3) = -a_1 e \{ \psi(x_1) \hat{A}(x_2) \psi(x_3) : \delta(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3) + \\ + \text{члены, отличающиеся перестановками аргументов} \} \quad (25)$$

соответствует расходимостям вершинных частей (рис. 20).

Члены, содержащие функции  $\Lambda_2$ , после интегрирования по  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  дают в S-матрицу вклад

$$\frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 dx_3 T(\mathcal{L}(x_1) \Lambda_2(x_2, x_3)),$$

который компенсируется членами  $S_2$ , содержащими контрчлены  $\mathcal{L}^{(2)}(x)$ :

$$\frac{i^2}{2!} \int T(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}^{(2)}(x_2)) dx_1 dx_2 + \frac{i^2}{2!} \int T(\mathcal{L}(x_2) \mathcal{L}^{(2)}(x_1)) dx_1 dx_2 = \\ = -\frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 dx_3 T(\mathcal{L}(x_1) \Lambda_2(x_2, x_3)).$$

Последний расходящийся член в (24) должен быть скомпенсирован добавлением в лагранжиан взаимодействия нового контрчлена третьего порядка по  $e$ :

$$\mathcal{L}^{(3)}(x) = -ea_1 : \psi(x) \hat{A}(x) \psi(x) : = \frac{1}{3!} \int \Lambda_3(x, x_2, x_3) dx_2 dx_3. \quad (26)$$

Таким образом, после введения в лагранжиан дополнительных контрчленов  $\mathcal{L}^{(2)}(x)$  и  $\mathcal{L}^{(3)}(x)$  и перехода к пределу  $M \rightarrow \infty$  мы получаем для членов S-матрицы второго и третьего порядка интегрируемые выражения

$$T'(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2)) \quad \text{и} \quad T'(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2) \mathcal{L}(x_3)). \quad (27)$$

Подчеркнем при этом, что получение для  $S_2$  и  $S_3$  интегрируемых выражений (27) может быть проведено и без обращения к контрчленам, путем соответствующего переопределения  $T$ -произведений в области совпадения их аргументов. Последняя возможность является более предпочтительной, поскольку структура контрчленов *оказывается зависящей не только от конкретного вида вспомогательной регуляризации, но также и от «области включения» взаимодействия, описываемой функцией  $g(x)$ .*

До сих пор мы ограничивались рассмотрением случая, когда взаимодействие включено полностью во всем пространстве-времени и  $g(x) = 1$ . Именно этот случай важен при вычислении матричных элементов процессов рассеяния и взаимного превращения частиц, когда фактическое включение и выключение взаимодействия относится к бесконечно удаленным прошедшему и будущему.

Оказывается, однако, что в случаях, если нас интересуют характеристики систем частиц, находящихся в связанных состояниях (энергетические уровни, времена жизни, вероятности переходов между связанными состояниями (см. подробнее в главе VII)) приходится рассматривать положение, когда взаимодействие включено лишь в некоторой части 4-пространства и функция  $g(x)$  возрастает от нуля до единицы в малых областях около поверхностей, ограничивающих эту часть 4-пространства.

Имея в виду этот последний случай, исследуем структуру контрчленов эффективного лагранжиана  $\mathcal{L}(x; g)$ , обеспечивающих интегрируемость оператора

$$S(g) = T(\exp i \int \mathcal{L}(x; g) dx).$$

Рассмотрим члены второго порядка. Контрчлен  $\mathcal{L}^{(2)}(x; g)$  определяется из условия, являющегося естественным обобщением соотношения (27.35):

$$\begin{aligned} \int \mathcal{L}^{(2)}(x; g) dx &= \\ &= \frac{1}{2!} \int dx_1 dx_2 g(x_1) g(x_2) [T(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2)) - T_M(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2))]. \end{aligned}$$

Внося сюда выражение разности  $T - T'_M$  из (27.31) и интегрируя по частям, находим:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)}(x; g) = & \mathcal{L}^{(2)}(x) g^2(x) + \frac{ia_3^M}{2} : \bar{\Psi}(x) \gamma^n \Psi(x) : g(x) \partial_n g(x) + \\ & + \frac{a_3}{2} g(x) : A^n(x) \{ A^m \partial_n \partial_m g(x) + A_n \square g + H_{nm} \partial^m g + (\partial^m A_m) \partial_n g \} : + \\ & + \{ \text{члены, соответствующие } R \}, \quad (28) \end{aligned}$$

причем оператор  $\mathcal{L}^{(2)}(x)$  определяется соотношением (27.36). Нетрудно также убедиться, что в третьем порядке

$$\mathcal{L}^{(3)}(x; g) = \mathcal{L}^{(3)}(x) g^3(x),$$

причем  $\mathcal{L}^{(3)}(x)$  определяется соотношением (26).

Таким образом, при интеграции по частям в  $\mathcal{L}(x; g)$  появляются члены, содержащие производные от функции  $g(x)$ , отличающиеся от обычных контрчленов своей операторной структурой. Это обстоятельство окажется существенным при устранении расходимостей из уравнения Шредингера.

## § 29. Общие правила устранения расходимостей из S-матрицы

**29.1. Постановка задачи.** В §§ 27, 28 на примере спинорной электродинамики было выполнено построение интегрируемых выражений для  $S_2$  и  $S_3$ . В этом параграфе мы сформулируем общий способ устранения расходимостей из членов S-матрицы любого порядка, основанный на том же принципе, что и рассмотренный пример (см. Боголюбов (1952)).

Прежде всего, заменим истинные причинные функции  $\Delta^c$  регуляризованными выражениями  $\text{reg } \Delta^c$  с надлежащим числом вспомогательных масс  $M_i$ . При конечных значениях этих масс обычное T-произведение лагранжианов

$$T(\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)) \quad (1)$$

вполне определено и его коэффициентные функции непрерывны. Однако, как мы убедились на конкретных примерах, предельный переход  $M \rightarrow \infty$ , понимаемый даже в несобственном смысле, осуществить в (1) невозможно.

Точнее говоря, коэффициентные функции оператора (1) будут сходиться в несобственном смысле лишь в тех областях пространства-времени, в которых все без исключения аргументы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  отличны друг от друга. Чтобы выделить в (1) «сходящуюся часть», необходимо, как и в приведенных примерах, использовать вычитательную процедуру. Для формулировки этой процедуры удобно исходить из общей формулы (21.41), выражающей  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  через лагранжиан взаимодействия  $\mathcal{L}(x) = \Lambda_1(x)$  и квазилокаль-

ные операторы  $\Lambda_\nu$  ( $\nu \geq 2$ ):

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T(\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)) + \sum_{\substack{2 \leq m \leq n-1 \\ \sum \nu_i = n}} i^m P'(x_1, \dots, x_{\nu_1} | \dots | \dots, x_n) T(\Lambda_{\nu_1}(x_1, \dots, x_{\nu_1}) \dots \dots \Lambda_{\nu_m}(\dots, x_n)) + i \Lambda_n(x_1, \dots, x_n). \quad (2)$$

Как было показано, это выражение является наиболее общим, удовлетворяющим всем наложенным на  $S_n$  условиям (симметрии, ковариантности, унитарности и причинности) при произвольном выборе эрмитовых ковариантных квазилокальных операторов  $\Lambda_\nu$ .

Если удастся выбрать квазилокальные операторы  $\Lambda_\nu$ , так, чтобы выражения  $S_n$  оказались сходящимися (сходимость подобного рода выражений мы всегда будем понимать в несобственном смысле), то их предел при  $M \rightarrow \infty$ , во-первых, будет интегрируемой операторной функцией (в смысле определения § 19), а во-вторых, будет удовлетворять всем наложенным на  $S_n$  требованиям. В самом деле, условие ковариантности (21.4) имеет линейный характер и потому предельный переход в нем тривиален, а возможность перехода к пределу в условиях унитарности (21.9) и причинности (21.13) обусловлена доказанной в § 19 теоремой, что предел обычного произведения двух операторных функций равен соответствующему произведению пределов.

**29.2. Общий метод устранения расходимостей.** Как было показано Степановым (1963, 1965), построить сходящиеся выражения для  $S_n$  можно и не прибегая к промежуточной регуляризации Паули—Вилларса, а используя метод математической индукции и теорему Хана—Банаха о расширении линейного функционала.

Перепишем условие причинности для операторных функций (21.13) в форме

$$S_{n+1}(y, x_1, \dots, x_n) = R_{n+1}(y, x_1, \dots, x_n), \quad (3)$$

где введено обозначение

$$R_{n+1}(y, x_1, \dots, x_n) = - \sum_{0 \leq k \leq n-1} P\left(\frac{x_1, \dots, x_k}{x_{k+1}, \dots, x_n}\right) S_{k+1}(y, x_1, \dots, x_k) S_{n-k}^\dagger(x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (4)$$

Соотношение (3) формально определяет операторное выражение  $S_{n+1}$  через предыдущие  $S_k$ ,  $k \leq n$ . В § 28 мы провели конструктивное определение операторных функций  $S_2$  и  $S_3$  как интегрируемых обобщенных функций, т. е. как ядер некоторых линейных функционалов. Мы воспользуемся теперь операторными соотношениями (3) и (4) для построения  $S_{n+1}$  через предыдущие  $S_k$ , считая их заданными как ядра линейных функционалов

$$\int S_k(x_1, \dots, x_k) F(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

для функций  $F(x_1, \dots, x_k)$  из некоторого класса  $C(q, r, k)$ . Пользуясь теоремой из § 19.3 об умножении перестановочных функций одинаковой частотности, можно теперь найти такие числа  $q_n, r_n$ , что правая часть (4) определяет функционал

$$\int R_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) F(x_1, \dots, x_{n+1}) dx_1 \dots dx_{n+1}$$

для функций  $F$  из класса  $C(q_n, r_n, n+1)$ . Если теперь выделить в  $C(q_n, r_n, n+1)$  подкласс  $\tilde{C}_1$  функций, обладающих свойством

$$F_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0, \text{ если } x_j > x_1 \text{ для всех } j > 1, \quad (\tilde{C}_1)$$

то на этом подклассе можно определить оператор  $S_{n+1}$  с помощью соотношения

$$\begin{aligned} \int S_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) F_1(x_1, \dots, x_{n+1}) dx_1 \dots dx_{n+1} = \\ = \int R_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) F_1(x_1, \dots, x_{n+1}) dx_1 \dots dx_{n+1}, \end{aligned} \quad (5)$$

которое и представляет собой строгую формулировку условия причинности (3). В условии (5), как и в (3), не отражена симметрия оператора  $S_{n+1}$ . Поскольку перестановка переменных  $x_1 \leftrightarrow x_m$  приводит к замене  $F_1 \rightarrow F_m$ , где

$$F_m(x_1, \dots, x_m, \dots, x_{n+1}) = 0, \text{ если } x_j > x_m \text{ для всех } j \neq m,$$

то условие симметрии  $S_{n+1}$  приводит к тому, что оператор  $S_{n+1}$  оказывается определенным на более широком классе  $\tilde{C}$ :

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_m F_m(x_1, \dots, x_{n+1}). \quad (\tilde{C})$$

Очевидно, что в силу непрерывности функций  $F_m$  их сумма обращается в нуль в точке  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1}$ . Как можно показать (см. Степанов (1965)), справедливо и обратное утверждение, т. е. любая функция из  $C(q_n, r_n, n+1)$ , обладающая нулем достаточно высокого порядка при совпадении аргументов, может быть представлена в виде суммы ( $\tilde{C}$ ).

Таким образом, мы убедились, что симметричный оператор  $S_{n+1}$ , первоначально определенный несимметричным условием причинности на подклассе  $\tilde{C}_1$ , оказывается определенным на всех функциях  $F \in \tilde{C}$ , обладающих нулем достаточно высокого порядка при совпадении всех аргументов. Как можно показать, этот оператор  $S_{n+1}$  выражается обычной формулой (21.31) через хронологические произведения лагранжианов.

Для определения  $S_{n+1}$  при совпадении всех аргументов, т. е. для перехода от класса  $\tilde{C}$  на весь класс  $C(q, r, n+1)$ , можно воспользоваться теоремой Хана—Банаха (см. например, Владимиров (1964)) о расширении функционала. При таком расширении остается произвольным некоторый конечный квазилокальный оператор  $i\Delta_{n+1}$ , который в силу условия унитарности оказывается также антиэрмитовым.

Таким образом, достаточно установить способ построения по заданному лагранжиану  $\mathcal{L}(x) = \Lambda_1(x)$  цепочки квазилокальных операторов  $\Lambda_\nu$  ( $\nu \geq 2$ ), обеспечивающих сходимость выражения (2). Для полученных этим путем предельных выражений все условия, наложенные на  $S_n$ , включая и условие интегрируемости, выполняются автоматически. Для решения этой задачи, очевидно, достаточно выбрать в качестве  $\Lambda_\nu(x_1, \dots, x_\nu)$  квазилокальные операторы того же операторного типа, что и (1) (при  $n = \nu$ ). Говоря здесь, что  $\Lambda_\nu$  принадлежит к тому же операторному типу, что и (1), мы подразумеваем, что  $\Lambda_\nu$  состоит из тех же операторных членов

$$\dots u_\alpha(x_j) \dots,$$

что и (1), отличаясь от него лишь коэффициентными функциями.

Из (2) теперь следует, что  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  также будет выражением операторного типа (1). Чтобы упростить формулы, удобно положить

$$i^{1-\nu} \Delta_\nu(x_1, \dots, x_\nu) = \Delta_\nu(x_1, \dots, x_\nu), \quad \mathcal{L}(x) = \Lambda_1(x) = \Delta_1(x),$$

тогда

$$S_n = i^n T'_n,$$

где

$$T'_n = T(\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)) + \sum_{\substack{2 \leq m \leq n-1 \\ \sum \nu_i = n-1}} P'(x_1, \dots, x_{\nu_1} | \dots | \dots, x_n) T(\Delta_{\nu_1}(x_1, \dots, x_{\nu_1}) \dots \dots \Delta_{\nu_m}(\dots, x_n)) + \Delta_n(x_1, \dots, x_n). \quad (6)$$

Поскольку  $T'_n$  принадлежит к тому же операторному типу, что и (1), можно, очевидно, разработать методику построения  $T'_n$  путем некоторого преобразования коэффициентных функций оператора  $T$ .

**29.3. Графическое представление процедуры вычитания и  $R$ -операция.** Наши предыдущие рассуждения имели в основном характер теоремы существования, поскольку не была указана конкретная процедура построения операторов  $\Lambda_n$ , а следовательно, и  $T'_n$ . Мы дадим сейчас конструктивную форму теоремы Хана—Банаха, т. е. рецепт построения  $\Lambda_n$  и конечных  $T'_n$ . При этом оказывается удобным работать с графическими представлениями.

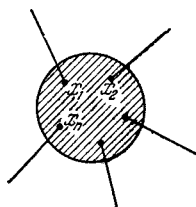


Рис. 24.

Коэффициентная функция  $T$ -произведения, соответствующая какой-либо данной диаграмме с  $\nu$  вершинами и заданными внутренними линиями представляется произведением регуляризованных причинных функций типа

$$\prod_i \{\text{reg } \Delta_i^\epsilon(x_a - x_b)\}. \quad (7)$$

Коэффициентные функции квазилокального оператора  $\Delta_\nu$  для той же диаграммы представляют собой произведение  $\delta$ -функций и их производных. Поэтому вся совокупность точек  $x_1, \dots, x_\nu$  на диаграмме выступает как единое целое, так что при операциях с  $\Delta_\nu$  удобно ввести понятие *обобщенного узла*  $G$  (см. рис. 24). Соответствующую данному обобщенному узлу  $G$  коэффициентную функцию оператора  $\Delta_\nu$  обозначим через  $a_G(x_1, \dots, x_\nu)$ . Обратимся теперь к выражению вида

$$T(\Delta_\nu(x_1, \dots, x_\nu) \mathcal{L}(x_{\nu+1}) \dots \mathcal{L}(x_n)). \quad (8)$$

Его коэффициентные функции могут быть получены из коэффициентных функций оператора (1) следующей процедурой. Рассмотрим

рим какую-либо диаграмму, соответствующую оператору (1). Объединяя на ней точки  $x_1, \dots, x_v$  в обобщенную вершину  $G$ , заменим произведение (7), соответствующее внутренним по отношению к  $G$  линиям  $l$ , коэффициентной функцией  $d_G(x_1, \dots, x_v)$ . Операцию такой замены формально обозначим символом  $\Delta(G)$ . Тогда коэффициентные функции оператора (8) будут получаться из коэффициентных функций оператора (1) операцией  $\Delta(G)$ .

В более общем случае произвольному члену под знаком суммы в правой части (6) может быть сопоставлено разбиение всей диаграммы  $G$  на поддиаграммы  $G_1 \dots G_m$ :

$$G = G_1 * G_2 * \dots * G_m$$

(диаграмма  $G$  выступает здесь как топологическое произведение  $G_1, \dots, G_m$ ). Коэффициентные функции выражения

$$T(\Delta_{v_1}(x_1, \dots, x_{v_1}) \dots \Delta_{v_m}(\dots, x_n))$$

могут быть получены из коэффициентных функций оператора (1) с помощью операции

$$\Delta(G_1) \dots \Delta(G_m),$$

закрывающейся в объединении точек  $x_1, \dots, x_{v_1}, x_{v_1+1}, \dots, x_{v_1+v_2}, \dots, x_n$  в обобщенные узлы (вершины)  $G_1, G_2, \dots, G_m$  и в замене множителей произведения (7), соответствующих внутренним по отношению к каждой из  $G_1, \dots, G_m$  линиям, на  $d_{G_1}, \dots, d_{G_m}$  при сохранении неизменными факторов, соответствующих линиям, соединяющим различные обобщенные вершины.

Итак,  $T'_n$  можно получить из  $T$  применением операции

$$R(G) = 1 + \sum_{\substack{2 \leq m \leq n-1 \\ G = G_1 * G_2 * \dots * G_m}} \Delta(G_1) \dots \Delta(G_m) + \Delta(G). \quad (9)$$

Сумма здесь берется по всем возможным разбиениям совокупности точек  $x_1, \dots, x_n$  диаграммы  $G$  на обобщенные узлы  $G_1, G_2, \dots, G_m$ . Симметрия  $T'_n$ , связанная с оператором симметризации  $P$ , входящим в (2), в данном случае обеспечивается тем, что при таком разбиении точки  $x_1, \dots, x_n$  выступают совершенно симметрично.

Подчеркнем также, что если при разбиении диаграммы какой-либо из обобщенных узлов  $G_k$  совпадает с обычной вершиной  $x_k$ , то в сумме правой части (9) соответствующую операцию  $\Delta(G_k)$  следует считать единичной, поскольку согласно соглашению, сформулированному перед (6), квазилокальный оператор  $\Delta_1(x_k)$  совпадает с лагранжианом.

Операция  $R(G)$  определена пока чисто формально. Она получит конкретное содержание, когда будут установлены правила определения функции  $d_G$  для данной диаграммы  $G$ . Задавая  $d_G$ , мы тем самым определяем  $\Delta_v$  и, следовательно,  $T'_n$ . Выберем  $d_G$  по соображениям интегрируемости  $T'_n$  при  $M \rightarrow \infty$ .



Прежде чем приступить к формулировке способа построения  $d_G$ , введем некоторые понятия. Мы будем говорить, что данная диаграмма *связная*, если ее нельзя разбить на части, которые не соединены друг с другом линиями. Если же диаграмма  $G$  распадается на связные поддиаграммы  $G_1, G_2, \dots$ , между которыми соединения отсутствуют, то мы назовем  $G$  *несвязной*, а об ее «кусках»  $G_1, G_2, \dots$  будем говорить как о *компонентах связности*. Связную диаграмму будем называть *слабо связной*, если ее можно превратить в несвязную снятием одной линии, и *сильно связной*, если это невозможно.

Заметим теперь, что для несвязной диаграммы коэффициентная функция  $T$ -произведения представляется в виде произведения двух коэффициентных функций с различными аргументами. Но произведение двух функций с различными аргументами является сходящимся, когда сходится каждая функция в отдельности. Отсюда вытекает, что в несвязной диаграмме расходимости автоматически устраняются после того, как они устранены в ее связных частях. Поэтому оператор  $\Delta(G)$  для несвязных диаграмм следует считать равным нулю.

При таком выборе  $\Delta(G)$  операция  $R(G)$ , приложенная к коэффициентной функции  $T$ -произведения, которая соответствует диаграмме  $G$ , состоящей из двух компонент связности  $G_1$  и  $G_2$ , распадается на произведение двух операций  $R(G_1)R(G_2)$ , действующих порознь на коэффициентные функции, соответствующие диаграммам  $G_1$  и  $G_2$ .

Для слабо связных диаграмм мы приходим к коэффициентным функциям типа

$$K_M(x_1, \dots, x_k) \operatorname{reg} \Delta^c(x_a - y_b) Q_M(y_1, \dots, y_s).$$

Ввиду трансляционной инвариантности  $K$  и  $Q$ , положив

$$x - x_a = x', \quad y - y_b = y', \quad x_a - y_b = \xi,$$

мы получим произведение коэффициентных функций с независимыми аргументами

$$K_M(x'_1, \dots, x'_k) \operatorname{reg} \Delta^c(\xi) Q_M(y'_1, \dots, y'_s). \quad (10)$$

Все выражение также будет сходящимся, если сходятся в отдельности  $K$  и  $Q$ . Поэтому для слабо связных диаграмм также следует положить  $\Delta(G) = 0$ .

Здесь, как и в предыдущем случае, ясно, что при данном выборе оператора  $\Delta(G)$  коэффициентные функции оператора  $T'_n$  для слабо связных диаграмм имеют структуру (10). Итак, в (9) можно рассматривать лишь разбиения  $G$  на сильно связные обобщенные вершины  $G_a$ .

**29.4. Индекс диаграммы  $\omega(G)$  и степень расходимости.** Для конкретизации оператора  $\Delta(G)$  введем еще понятие *индекса диаграммы*. Перейдем с этой целью к импульсному представлению. Коэффициентные функции  $T$ -произведения в  $p$ -представлении, очевидно,

будут иметь вид

$$J_M(k) = \int \prod_{(1 \leq q \leq n)} \delta(\Sigma p + k_q) \prod_i \{\text{reg } \Delta_i^c(p_i) dp_i\}. \quad (11)$$

Здесь в аргументах  $\delta$ -функций стоят алгебраические суммы импульсов внутренних линий диаграммы, сходящихся в вершины  $q$ , к которым добавлены внешние импульсы  $k_q$ .

В соответствии с принятой нами процедурой регуляризации  $\Delta^c$ -функций имеем также

$$\text{reg } \Delta_i^c(p) = Z(p) \left\{ \frac{1}{m_i^2 - p^2 - i\varepsilon} - \sum_j c_j \frac{1}{M_j^2 - p^2 - i\varepsilon} \right\},$$

где  $Z(p)$  — тот же полином степени  $r_i$ , что и в нерегуляризованной  $\Delta^c$ -функции.

Если в (11) перейти к пределу  $M_j \rightarrow \infty$ , то весь интеграл может оказаться расходящимся при больших импульсах. Подсчитаем сейчас суммарную степень его расходимости. Поскольку мы рассматриваем связанные диаграммы, с помощью  $\delta$ -функций снимается  $4(n-1)$  интеграций (одна остающаяся  $\delta$ -функция выражает закон сохранения полного 4-импульса) и остается  $4(L-n+1)$  независимых переменных интеграции, где  $L$  обозначает полное число внутренних линий.

Подобно тому как при интеграции по трехмерному пространству в качестве переменной интеграции вводится радиус, введем при выполнении интеграции по  $4(L-n+1)$ -мерному пространству соответствующий «радиальный» импульс  $P$ . Тогда произведение независимых дифференциалов  $\prod_i dp_i$  даст множитель  $P^{4(L-n+1)} dP/P$ .

Учитывая лишь старшие степени импульсов в функциях  $\Delta^c(p)$ , получаем множитель

$$P^{\sum_i r_i - 2L} = P^{\sum_i (r_i - 2)},$$

и поэтому при выполнении интеграции по  $P$  множитель при  $dP/P$  при больших  $P$  будет возрастать или убывать как

$$P^{\sum_i (r_i + 2) - 4(n-1)}.$$

Интеграл по  $P$  окажется, таким образом, расходящимся, если

$$\sum_i (r_i + 2) - 4(n-1) \geq 0,$$

и сходящимся при

$$\sum_i (r_i + 2) - 4(n-1) < 0.$$

Число

$$\omega(G) = \sum_l (r_l + 2) - 4(n - 1) \quad (12)$$

мы назовем *индексом диаграммы*  $G$ .

Разумеется, из сходимости интеграла по  $P$  еще не следует сходимость интеграла типа (11) в целом.

Здесь может возникнуть положение, подобное тому, когда при вычислении интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \frac{x}{(y^2 + 1)^2}$$

интеграл

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{\varrho^2 d\varrho \cos \varphi}{(\varrho^2 \sin^2 \varphi + 1)^2}$$

по радиальной переменной  $\varrho$  ( $\varrho = x/\cos \varphi = y/\sin \varphi$ ) сходится, но остающийся интеграл по  $\varphi$  из-за особенности в точке  $\varphi = 0$  оказывается расходящимся.

Индекс диаграммы  $\omega(G)$  можно связать также с *условной степенью роста* по импульсу. Для ее подсчета умножим все импульсы и массы на некоторое число  $a$  и подсчитаем, на какой множитель изменится интеграл (11), не учитывая регуляризации и принимая во внимание лишь высшую степень  $a$ . Нетрудно видеть, что этот множитель равен как раз

$$a^{\omega(G)}. \quad (13)$$

Таким образом, *индекс диаграммы в точности равен условной степени роста*.

Заметим, что степень роста называется условной потому, что оценка (13) проводится чисто формально, без тщательного анализа сходимости интеграла, и не учитывает наличия логарифмически расходящихся факторов.

Обратим внимание на тот факт, что при разбиении  $G$  на  $m$  обобщенных узлов:

$$G = G_1 * G_2 * \dots * G_m, \quad (*m)$$

мы будем иметь

$$\omega(G) = \sum_{1 \leq j \leq m} \omega(G_j) + \sum_l (r_l + 2) - 4(m - 1), \quad (14)$$

причем вторая сумма в правой части распространяется по всем линиям, соединяющим обобщенные узлы  $G_i$ .

Рассмотрим, далее, коэффициентную функцию  $d_{G_j}$ . В импульсном представлении она имеет вид

$$\delta(\sum p) Z_{G_j}(\dots p \dots),$$

где  $Z_{G_j}(\dots p \dots)$  — некоторый полином по компонентам  $p$ .

Как мы увидим позже, для компенсации расходимостей в  $T$ -произведении достаточно выбрать в качестве  $Z_{G_j}$  (... $p$ ...) полином степени  $\omega$  ( $G_j$ ). Из (14) следует, что при таком выборе  $d_{G_j}$  ни суммарная степень расходимости, ни условная степень роста по импульсу не увеличатся от приложения операции  $\Delta$  ( $G_1$ )... $\Delta$ ( $G_m$ ), а следовательно,  $\omega$  ( $G$ ) не увеличивается от приложения операции  $R$  ( $G$ ) в целом.

Как мы уже убедились на рассмотренных выше примерах, при анализе и вычислении интегралов типа (11) удобно пользоваться интегральным представлением причинных функций (мы будем называть его ниже « $\alpha$ -представлением»)

$$\Delta^c(p) = Z(p) i \int_0^{\infty} e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\varepsilon)} d\alpha,$$

$$\text{reg } \Delta^c(p) = Z(p) i \int_0^{\infty} e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\varepsilon)} I(\alpha) d\alpha,$$

где

$$I(\alpha) = 1 + \sum_M c_M e^{-i\alpha(M^2 - m^2)}.$$

Удобно представить множитель  $Z(p)$  в экспоненциальном виде. Для этого воспользуемся соотношением

$$Z(p) = Z(-i\nabla_q) e^{ipq} |_{q=0}.$$

После этого интегрирование по внутренним импульсам в (11) сведется к квадратурам гауссова типа

$$i^L \prod_l Z(-i\nabla_{q_l}) \int e^{i \sum_l \alpha_l p_l^2 + i \sum_l p_l q_l} \prod_{1 \leq a \leq n} \delta(\sum p + k_q) \prod_l dp_l |_{q_l=0} =$$

$$= \delta(\sum k) f(\dots k \dots \alpha \dots) \quad (15)$$

и останутся только интеграции по переменным  $\alpha$ :

$$J_M(k) =$$

$$= \delta(\sum k) \int_0^{\infty} d\alpha_1 \dots \int_0^{\infty} d\alpha_L f(\dots k \dots \alpha \dots) e^{-i \sum_l \alpha_l m_l^2 - \varepsilon \sum_l \alpha_l} \prod_{1 \leq l \leq L} I(\alpha_l). \quad (16)$$

Выполняя интеграцию по  $p_l$ , находим, что

$$f(\dots k \dots \alpha \dots) = F(\dots k \dots \alpha \dots) e^{i \sum_{a,b} A_{ab}(\dots \alpha \dots) (k_a^{k_b})}, \quad (17)$$

где  $F$  является полиномом по  $k$  и рациональной функцией от  $\alpha$ , обладающей неинтегрируемыми полюсами при обращении в нуль некоторых  $\alpha$ . Ввиду того, что сходимость интеграла (16) при боль-

ших  $\alpha$  обеспечивается факторами  $\exp\left(-\varepsilon \sum_l \alpha_l\right)$ , возможные его расходимости в нерегуляризованном случае в данном представлении обуславливаются наличием именно этих неинтегрируемых полюсов.

Чтобы выяснить структуру особенности в нерегуляризованной коэффициентной функции, введем новые переменные

$$\alpha_j = \lambda \xi_j, \quad \sum \xi_j = 1$$

и, фиксируя  $\xi_j \neq 0$ , подсчитаем степень полюса в точке  $\lambda = 0$ . Переходя для этого в (15) к новым «импульсам»

$$p_l \sqrt{\lambda} = P_l; \quad q_l \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = Q_l; \quad k_q \sqrt{\lambda} = K_q,$$

представим левую часть (15) в виде

$$i^L \lambda^{2(n-L)} \prod_l Z\left(-\frac{i\nabla_{Q_l}}{\sqrt{\lambda}}\right) \times \\ \times \int \exp i \left\{ \sum_l (\xi_l P_l^2 + P_l Q_l) \right\} \prod_q \delta(\sum P + K_q) \prod_l dP_l |_{Q=0}.$$

Выполняя интегрирование по  $dP_l$ , получаем после сокращения на  $\delta(\sum k)$  при малых  $\lambda$

$$f(\dots k \dots \alpha \dots) = \lambda^{-\frac{\omega(G)}{2} - L} F'(\dots K \dots) e^{i \sum_{a,b} A'_{ab}(K_a K_b)} = \\ = \lambda^{-\frac{\omega(G)}{2} - L} F'(\dots \sqrt{\lambda} k \dots) e^{i\lambda \sum_{a,b} A'_{ab}(\xi)(k_a k_b)}. \quad (18)$$

Таким образом, эффективная степень полюса по  $\lambda$  при  $\lambda = 0$  с учетом значения детерминанта

$$\frac{(\partial \alpha_1, \dots, \partial \alpha_L)}{(\partial \xi_1, \dots, \partial \xi_{L-1}, \partial \lambda)} = \lambda^{L-1}$$

действительно определяется индексом диаграммы  $\omega(G)$ .

**29.5. Структура экспоненциальной квадратичной формы.** Рассмотрим теперь подробнее структуру квадратичной формы

$$A(\dots \alpha \dots; \dots k \dots) \equiv A_{ab}(\dots \alpha \dots) k^a k^b. \quad (19)$$

Для этого, во-первых, заметим, что она, разумеется, не зависит от вида полиномов  $Z(-i\nabla_q)$ . Будем поэтому для простоты считать, что все  $Z = 1$ . В такой ситуации, отвечающей случаю чисто скалярной теории, нетрудно привести явные выражения не только для квадратичной формы  $A$ , но и для предэкспоненциального множителя  $F(\dots \alpha \dots)$ , фигурирующего в равенстве (17). Соответствующие формулы могут быть доказаны по индукции.

Прежде всего понадобится несколько определений \*).

Пусть, по-прежнему,  $G$  — связная диаграмма с  $L$  внутренними линиями и  $n$  вершинами. *Деревом*  $G$  назовем любую ее связную поддиаграмму, содержащую все вершины  $G$  и не имеющую циклов. Очевидно, каждое дерево содержит ровно  $(n - 1)$  линий. Аналогично, *2-деревом* (двудере-

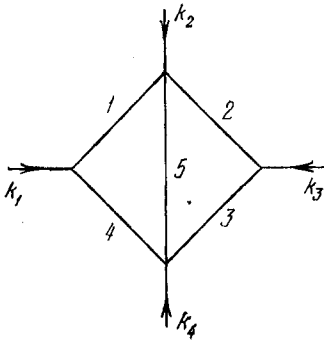


Рис. 25.

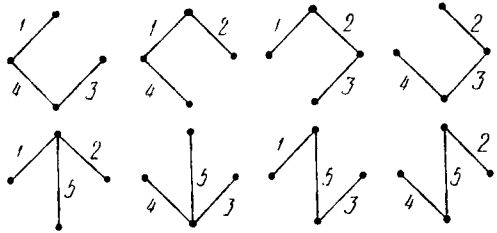


Рис. 26. Деревья диаграммы рис. 25.

вом) будем называть любую поддиаграмму  $G$ , содержащую все вершины исходной диаграммы, не имеющую циклов и состоящую в точности из двух компонент связности. Ясно, что в каждом 2-дереве содержится  $(n - 2)$  линии. Наконец, *хордой* дерева (2-дерева) назовем любую внутреннюю линию диаграммы, не принадлежащую этому дереву (2-дереву). Очевидно, что для того, чтобы из диаграммы получить дерево, следует убрать из нее ровно

$$c = L - n + 1 \quad (20)$$

линий. Число  $c$  в точности равно числу независимых замкнутых циклов, иначе, *петель* диаграммы. Поэтому каждому дереву соответствует  $c$  хорд, а каждому 2-дереву —  $(c + 1)$  хорд. Рассмотрим для примера диаграмму на рис. 25. Множество всех деревьев этой диаграммы изображено на рис. 26, а ее 2-деревья — на рис. 27.

Сделаем теперь следующее основное для этого пункта утверждение о квадратичной форме  $A$  и факторе  $F$ :

$$\left. \begin{aligned} A(\dots\alpha\dots, \dots k\dots) &= \frac{Q(\dots\alpha\dots; \dots k\dots)}{D(\dots\alpha\dots)}, \\ F(\dots\alpha\dots) &= \left(\frac{\pi^2}{i}\right)^c \frac{1}{\Gamma^2(\dots\alpha\dots)}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где  $D$  и  $Q$  — однородные функции параметров  $\alpha$ , которые строятся по сформулированным ниже, универсальным для всех диаграмм правилам.

\* ) Разбиение диаграммы на «деревья» и «хорды» (которое выглядит несколько искусственно в теории  $S$ -матрицы) вполне естественно появляется при вычислении операторов поля в гейзенберговском представлении по теории возмущений, где деревьям и хордам соответствуют различные сингулярные функции (см. Челлен (1951)).

*Построение формы D.* Каждому дереву диаграммы сопоставим произведение с параметров  $\alpha_j$ , ассоциированных со всеми  $(L - n + 1)$  хордами этого дерева. Сумма таких произведений по всем

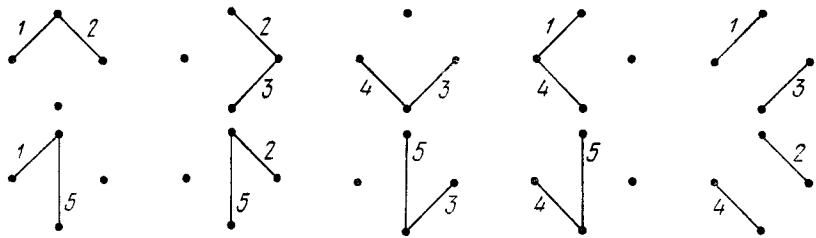


Рис. 27. Двудеревья диаграммы рис. 25.

деревьям диаграммы и есть форма  $D$ . Символически

$$D(\dots\alpha\dots) = \sum_{\text{по дер.}} \left( \prod_{\text{по хордам дер.}} \alpha_j \right). \quad (22)$$

*Построение формы Q.* Каждому 2-дереву диаграммы сопоставим произведение  $(c + 1)$  параметров  $\alpha_j$ , ассоциированных со всеми  $(L - n + 2)$  хордами этого 2-дерева. Домножим полученное произведение на квадрат суммы  $(\sum k_i)^2$  внешних импульсов  $k_i$ , входящих в вершины одной (в силу закона сохранения импульса — все равно какой) компоненты выбранный 2-дерева. Форма  $Q$  представляет собой сумму таких выражений по всевозможным 2-деревьям диаграммы. Символически:

$$Q(\dots\alpha\dots; \dots k\dots) = \sum_{\text{по 2-дер.}} \left( \prod_{\text{по хордам 2-дерева}} \alpha_j \right) \left( \sum_{\text{по комп. 2-дерева}} k_i \right)^2. \quad (23)$$

Как видно,  $Q$  представляет собой квадратичную форму внешних импульсов  $k$ .

Вспомня формулу (16), мы приходим к следующему общему  $\alpha$ -параметрическому представлению для регуляризованной коэффициентной функции произвольной диаграммы скалярной теории:

$$J_M(k) = \left( \frac{\pi^2}{i} \right)^c \delta(\sum k) \int_0^\infty d\alpha_1 \dots \int_0^\infty d\alpha_L D^{-2}(\dots\alpha\dots) \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{Q(\dots\alpha\dots k\dots)}{D(\dots\alpha\dots)} - i \sum_I \alpha_I (m_I^2 - ie) \right\} \prod_{1 \leq I \leq L} I(\alpha_I). \quad (24)$$

Вернемся теперь к диаграмме рис. 25 и на ее примере проиллюстрируем рецепты (22) и (23). Согласно рис. 26 имеем для формы  $D$ :

$$D(\dots\alpha\dots) = \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_5 + \alpha_4\alpha_5 + \alpha_1\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3.$$

Аналогично получаем для формы  $Q$

$$Q = k_1^2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 + k_1^2 \alpha_1 \alpha_4 \alpha_5 + k_2^2 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_5 + k_2^2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 + (k_1 + k_2)^2 \alpha_2 \alpha_4 \alpha_5 + \dots,$$

где выписаны лишь те члены, которые отвечают 2-деревьям, изображенным на верхней половине рис. 27.

Разумеется, для диаграмм высоких порядков правила (22), (23) приводят к довольно сложным выражениям для квадратичной формы  $A$  и предэкспоненциального фактора  $F$ . Тем не менее, представление (24) весьма удобно в общих исследованиях, поскольку оно обнаруживает целый ряд не зависящих от порядка и структуры диаграммы свойств подынтегрального выражения.

Однако ниже понадобятся только следующие два утверждения о квадратичной форме  $A = QD^{-1}$ :

$$\tilde{\sum} A_{ab} x^a x^b \geq 0, \quad (25)$$

если  $x$  — евклидов вектор и

$$\tilde{\sum}_{a, b} A_{ab} x^a x^b \leq \left( \sum_l \alpha_l \right) \left( \sum_a |x^a| \right)^2, \quad (26)$$

причем суммирование  $\tilde{\sum}$  распространяются по всем узлам, кроме одного. Первое из этих утверждений тривиально, поскольку неотрицательность форм  $Q$  и  $D$  непосредственно видна из правил (22) и (23). Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что для каждого слагаемого в  $Q$  квадрат суммы «внешних импульсов»  $x$  удовлетворяет неравенству

$$\left( \sum_{\substack{\text{по комп. } i \\ \text{2-деревья}} x_j \right)^2 \leq \left( \sum_{\substack{\text{по комп. } i \\ \text{2-деревья}} |x_j| \right)^2 \leq \left( \sum_a |x_a| \right)^2,$$

поэтому на основании (23)

$$Q(\dots \alpha \dots | \dots x \dots) \leq \left( \sum_a |x_a| \right)^2 \sum_{\text{по 2-дер.}} \left( \prod_{\substack{\text{по хор.} \\ \text{2-дер.}}} \alpha_j \right).$$

С другой стороны, каждое 2-дерево диаграммы может быть получено из некоторого дерева удалением одной (скажем,  $m$ -й) линии. Следовательно, для заданного 2-дерева имеет место оценка

$$\left( \prod_{\substack{\text{по хор.} \\ \text{2-дер.}}} \alpha_j \right) = \alpha_m \left( \prod_{\substack{\text{по хор.} \\ \text{дер.}}} x_j \right) \leq \left( \sum_l \alpha_l \right) \left( \prod_{\substack{\text{по хор.} \\ \text{дер.}}} \alpha_j \right).$$

Таким образом, из двух последних соотношений вытекает, что

$$Q \leq \left( \sum_a |x_a| \right)^2 \left( \sum_l \alpha_l \right) \sum_{\text{по дер.}} \left( \prod_{\substack{\text{по хор.} \\ \text{дер.}}} \alpha_j \right),$$

где суммирование ведется по некоторой совокупности деревьев диаграммы. Распространив суммирование на все деревья, мы лишь



усилим неравенство. Имеем поэтому

$$Q \leq \left( \sum_a \left| x_a \right| \right)^2 \left( \sum_l \alpha_l \right) D,$$

откуда и следует оценка (26) для  $A = Q/D$ .

Рассмотрим теперь изменения, которые произойдут в коэффициентных функциях  $T$ -произведений в результате действия операции  $\Delta(G_j)$  в принятом нами интегральном « $\alpha$ -представлении» (15). Напомним, что согласно определению операция  $\Delta(G_j)$  в  $x$ -представлении состоит в замене части произведения  $\prod_l \Delta_l^c(x_a - x_b)$ , соответствующей внутренним линиям из  $G_j$ , на коэффициентную функцию квазилокального оператора  $d_{G_j}(\dots x_a \dots)$ , которая в  $p$ -представлении имеет вид полинома, умноженного на  $\delta$ -функцию:  $\delta(\sum p) Z_{G_j}(\dots p \dots)$ .

При переходе к интегральному представлению (15) воспользуемся для приведения полинома  $Z_G$  к экспоненциальному виду соотношением

$$Z_G(\dots p \dots) = Z_G(\dots -i\nabla \dots) e^{i\sum (p_a q_a)} \Big|_{q=0}, \quad (27)$$

представляющим собой естественное обобщение формулы для  $Z_l(p)$  из  $\Delta_l^c(p)$ . Очевидно при этом, что квадратичная форма в экспоненте как от  $Z_G$ , так и от  $Z_l$  зависеть не будет. Таким образом, в результате применения операции  $\Delta(G_j)$  мы получим опять выражение типа (17), которое не содержит переменные, соответствующие внутренним линиям  $G_j$ .

«Новая» квадратичная экспоненциальная форма получается из «старой» путем приравнивания нулю всех  $\alpha_i$ , соответствующих внутренним линиям  $G_j$ . При этом из нее автоматически выпадают импульсы  $k_a$ , соответствующие вершинам диаграммы, входящим в обобщенный узел  $G_j$ . Очевидно также, что указанные  $\alpha_i$  не войдут и в предэкспоненциальный множитель  $F(\dots k \dots \alpha \dots)$ .

Для анализа особенности станем теперь пропорционально уменьшать все  $\alpha_i$ , положив

$$\alpha_i = \xi_i \lambda, \quad \sum \xi_i = 1, \quad \xi_i > 0, \quad \lambda \rightarrow 0,$$

и установим максимальную эффективную степень полюса в получающемся интеграле при  $\lambda = 0$ . Ранее было установлено, что эффективная степень полюса равна половине условной степени роста плюс единица и что условная степень роста не меняется под действием операции  $\Delta(G_j)$ . Следовательно, в данном случае эффективная степень полюса равна

$$\frac{\omega(G)}{2} + 1.$$

Вполне аналогичное заключение можно сделать и о неизменности эффективной степени полюса при действии операции  $\Delta(G_1) \dots \Delta(G_m)$ .

**29.6. Выбор операции  $\Delta(G)$ .** Установив это важное свойство, приступим к конкретному построению операции  $\Delta(G)$ . Рассмотрим, прежде всего, случай, когда массы частиц всех рассматриваемых полей  $m_i$  больше нуля. Как мы только что выяснили, эффективная степень полюса выражения  $\Delta(G_1) \dots \Delta(G_m) J_M(k)$  в  $\alpha$ -представлении равна  $\omega(G)/2 + 1$ .

С другой стороны, из (16) и (18) следует, что каждое дифференцирование по компонентам импульсов  $k_a$  снижает степень полюса на  $1/2$ . Поэтому, взяв частную производную  $N$ -го порядка по компонентам  $k_a$

$$\frac{\partial^N f(\dots k \dots)}{\partial^{N_1} k_1 \dots \partial^{N_m} k_m} \quad (\sum N_i = N),$$

получим выражение, в котором эффективная степень полюса уменьшится на  $N/2$  и окажется равной  $(\omega(G) - N + 2)/2$ . Выбирая  $N = \omega(G) + 1$ , мы получим под интегралом фактор  $d\lambda \lambda^{-1/2}$ . Так как, однако, все наши функции были рациональными функциями переменных  $\alpha$ , они должны быть рациональными и по  $\lambda$ . Поэтому множитель  $\lambda^{-1/2}$  фактически отсутствует.

Заметим теперь, что если из функции  $f(\dots k \dots)$  вычесть сумму всех первых членов ее разложения в ряд Маклорена до членов порядка  $\omega(G)$  включительно, то остаточный член

$$f(\dots k \dots) - \{f(\dots k \dots)\}_{\omega(G)}$$

по известной формуле Шлемильха выражается в виде интеграла от частных производных порядка  $\omega(G) + 1$ . Таким образом, в остаточном члене эффективная степень полюса  $\lambda = 0$  равна нулю.

Определим теперь операцию  $\Delta(G)$  следующими рекуррентными соотношениями:

$$\Delta(G) = 1, \quad (28a)$$

если обобщенный блок  $G$  совпадает с обычной вершиной,

$$\Delta(G) = -M(G) \sum_{1 \leq m \leq n; (*_m)} \Delta(G_1) \dots \Delta(G_m) \quad (28b)$$

в прочих случаях. Символ  $(*_m)$  под знаком суммирования напоминает о разбиении  $G$  на  $m$  обобщенных узлов (см. формулу  $(*_m)$  на стр. 289 перед (14)).

Здесь операция  $M(G)$  определена соотношениями

$$M(G) \{ \delta(\sum k) f(k) \} = \delta(\sum k) \{ f(k) \}_{\omega(G)}, \quad (29)$$

если  $G$  — сильно-связный расходящийся обобщенный блок, и  $M(G) = 0$  во всех других случаях. С учетом равенства (28a) формулу (9) для  $R$ -операции можно теперь переписать следующим образом:

$$R(G) = \sum_{1 \leq m \leq n; (*_m)} \Delta(G_1) \dots \Delta(G_m). \quad (30)$$

Из этих формул следует, что

$$R(G) J_M(k) = \{1 - M(G)\} J'_M(k),$$

где

$$J'_M(k) = \sum_{2 \leq m \leq n: (*_m)} \Delta(G_1) \dots \Delta(G_m) J_M(k)$$

и, поскольку в  $J'_M$  особенность по  $\lambda$  не выше, чем в  $J_M$ , то  $R(G) J_M$  в точке  $\lambda = 0$  вообще не имеет особенности. Теперь можно снять вспомогательную регуляризацию и перейти к пределу  $M \rightarrow \infty$ .

Таким образом, приложении последней операции  $\Delta(G)$  устраняет особенности при пропорциональном стремлении всех  $\alpha$  к нулю. Так как операции  $\Delta(G_1) \dots \Delta(G_m)$  одновременно с этим компенсируют особенности в области стремления к нулю лишь некоторых из  $\alpha$ , то в  $R(G) J_M$  особенностей нет вообще. Последнее утверждение составляет содержание важной теоремы, доказательство которой дано Парасюком (1955, 1956) (см. также Боголюбов, Парасюк (1955а, б, 1956, 1957), Хепп (1966), Аникин, Завьялов, Поливанов (1973)).

Рассмотренный выше способ построения операции  $\Delta(G)$  содержит определенный произвол, состоящий в выборе центра разложения в точке  $k = 0$ . Поэтому операцию  $\Delta(G)$  можно несколько обобщить.

С этой целью рассмотрим систему конечных полиномов  $Z'_G(\dots k \dots)$  степени не выше  $\omega(G)$ , таких что выражения

$$\delta(\sum k) Z'_G(\dots k \dots)$$

являются импульсными представлениями коэффициентных функций некоторых эрмитовых, ковариантных квазилокальных операторов  $\Lambda'(\dots x \dots)$ . Наиболее общее выражение операции  $\Delta(G)$  можно получить, определяя ее для сильно-связных обобщенных узлов как сумму ранее введенной операции (28б) и операции добавления полинома  $Z'_G$ , т. е.

$$\Delta(G) = -M(G) \sum_{2 \leq m \leq n: (*_m)} \Delta(G_1) \dots \Delta(G_m) + Z(G), \quad (28в)$$

где  $Z(G)$  — оператор соответствующей замены.

Отвечающее (28в) наиболее общее выражение для  $S_n$  отличается от полученного ранее включением эрмитовых ковариантных операторов  $\Lambda'_n$ . Но добавление в  $S_n$  некоторых  $\Lambda'_n$  может быть учтено изменением эффективного лагранжиана взаимодействия. Таким образом, изменение рецептуры построения интегрируемых коэффициентных функций эквивалентно добавлению к эффективному лагранжиану новых конечных контрчленов. Поэтому можно считать, что  $T'$ -произведение всегда определено, например, посредством (28в), но имеется произвол в выборе лагранжиана. Этот произвол состоит в возможности включения в  $\mathcal{L}(x)$  членов, соответствующих

квазилокальным операторам типа (21.37), связанным с обобщенными сильно-связными узлами  $G$  с неотрицательным индексом  $\omega(G)$ .

**29.7. Размерная перенормировка.** В последние годы широкое распространение получила так называемая размерная перенормировка расходимостей. Она формулируется с помощью представлений метода размерной регуляризации (см. выше § 16.4). В технике размерной регуляризации ультрафиолетовые расходимости фейнмановских интегралов выступают в облики полюсов по параметру  $\delta = (n - 4)/2$ , где  $n < 4$  — нецелое число измерений.

В рамках сформулированной выше  $R$ -операции конкретный вид вспомогательной регуляризации несуществен. Можно, однако, используя размерную регуляризацию фейнмановских диаграмм, вместо вычитания регуляризованных выражений при некоторых фиксированных значениях внешних импульсов, провести устранение расходимостей так сказать «минимальным» образом, вычитая лишь сингулярные (т. е. полюсные по  $\delta$ ) выражения и снимая затем регуляризацию переходом к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ . Этот способ вычитания ультрафиолетовых расходимостей, предложенный т'Хоофтом (1973), известен как метод размерной перенормировки или *минимального вычитания*.

Его достоинство состоит в том, что он не затрагивает тензорную структуру фейнмановских интегралов и, как следствие, не искажает их трансформационных свойств относительно преобразований калибровочного типа. В силу этого обстоятельства размерная перенормировка наиболее употребительна в квантово-полевых моделях, включающих калибровочные поля, например в квантовой хромодинамике.

Как можно показать (см. напр. главу III книги Завьялова (1979)), размерная перенормировка оказывается эквивалентной  $R$ -операции, основанной на обобщении операции  $\Delta(G)$ , рассмотренной в конце § 29.6. При этом оказывается, что, вообще говоря, результат минимального вычитания в каждом данном  $n$ -м порядке теории возмущений может быть сведен к вычитанию в некоторой точке пространства внешних импульсов  $k$ . Однако положение этих точек зависит от номера  $n$ , вследствие чего для матричного элемента в целом размерная перенормировка не сводится к вычитанию при каком-либо значении внешних импульсов.

## § 30. Структура $R$ -операции

**30.1. Факторизация  $R$ -операции.** Формулы (29.28) в силу их рекуррентного характера еще неудобны для практической работы с диаграммами. Поэтому сейчас мы преобразуем их к более простому виду, а в следующем разделе получим явное выражение для  $\lim_{M \rightarrow \infty} R(G) J_M(k)$ , являющееся обобщением  $\alpha$ -представления (29.24)

на случай расходящихся диаграмм (см. Щербина (1964), Завьялов, Степанов (1965), Завьялов (1974)).

Рассмотрим общую ситуацию, когда отвечающие «конечной перенормировке» полиномы  $Z_G$ , а следовательно, и фигурирующие в (29.28в) операторы  $Z(G)$ , вообще говоря, отличны от нуля. Пусть  $G_1, G_2, \dots, G_m$  — совершенно произвольные обобщенные блоки диаграммы, а  $A(G_i)$  — либо оператор  $M(G_i)$ , либо оператор  $Z(G_i)$ . Назовем тогда «трехточечным произведением»:  $A(G_1) \dots A(G_m)$ : величину, заданную правилами:

а) Если среди  $G_1, \dots, G_m$  найдется хотя бы одна пара  $G_i, G_j$  частично пересекающихся (т. е. не содержащихся один в другом, но имеющих общие вершины) обобщенных блоков, то:  $A(G_1) \dots A(G_m)$ : полагается равным нулю.

б) Если среди  $G_1, \dots, G_m$  найдется пара  $G_i, G_j$ , такая, что  $G_j$  содержится в  $G_i$ , а  $A(G_i) = Z(G_i)$ , то:  $A(G_1) \dots A(G_m)$ : также полагается равным нулю.

в) Во всех других случаях:  $A(G_1) \dots A(G_m)$ : полагается равным обычному произведению  $A(G_1) \dots A(G_m)$  тех же сомножителей  $A(G_i)$ , взятых в «естественном» порядке. Естественным при этом считается такой порядок, что из того, что  $G_j$  содержится в  $G_i$ , следует, что  $A(G_i)$  стоит левее  $A(G_j)$ .

Теперь можно сформулировать следующее утверждение:

$$R(G) = :[1 - M(G_1) + Z(G_1)] \dots [1 - M(G_k) + Z(G_k)]:, \quad (1)$$

где  $G_1, \dots, G_k$  — все расходящиеся сильно-связные обобщенные блоки диаграммы  $G$ .

Таким образом, чтобы выразить  $R(G)$  непосредственно через операторы  $M$  и  $Z$ , нужно раскрыть скобки в правой части (1), из полученной суммы вычеркнуть все слагаемые, удовлетворяющие условиям а) или б), а в оставшихся слагаемых провести «естественную» перестановку сомножителей. В частности, если диаграмма не содержит частично пересекающихся расходимостей, а все  $Z(G_i) = 0$ , то (1) сводится к обычному произведению

$$R(G) = [1 - M(G_1)] \dots [1 - M(G_k)]. \quad (2)$$

Переходя к доказательству соотношения (1), покажем сначала, что если  $G_i$  не совпадает с одиночной вершиной, то

$$\Delta(G_i) = :[Z(G_i) - M(G_i)] \prod_k [1 - M(G_{ik}) + Z(G_{ik})]:, \quad (3)$$

где произведение берется по всем  $G_{ik}$ , строго содержащимся в  $G_i$ . Чтобы доказать этот факт, достаточно проверить, что операторы (3) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (29.28в).

Пользуясь свойствами «трехточечного произведения», перепишем (3) в виде

$$\Delta(G_i) = -M(G_i) : \prod_k [1 - M(G_{ik}) + Z(G_{ik})]: + Z(G_i). \quad (4)$$

Следовательно, теперь нужно установить, что «трехточечное произведение» в правой части (4) совпадает с суммой в правой части формулы (29.28в), примененной к  $G_i$ .

Положим для краткости  $B(G) \equiv Z(G) - M(G)$ , раскроем в рассматриваемом «трехточечном произведении»

$$: \prod_k [1 + B(G_{ik})] : \quad (5)$$

скобки и вычеркнем из полученной суммы все слагаемые, содержащие произведения  $B(G_{ik}) \dots B(G_{ij})$  с частично пересекающимися  $G_{ik}, G_{ij}$ . Каждое из оставшихся слагаемых определяет некоторое разбиение вершин  $G_i$  на непересекающиеся группы вершин  $G_{i1}, \dots, G_{im}$ . Именно, каждое такое слагаемое задает некоторое отношение эквивалентности между вершинами диаграммы  $G_i$  — две вершины считаются эквивалентными, если в соответствующем слагаемом найдется множитель  $B(G_{ik})$ , такой, что обобщенный блок  $G_{ik}$  содержит эти вершины. Классы эквивалентности вершин по этому отношению и являются группами  $G_{i1}, \dots, G_{im}$ .

С другой стороны, для каждого разбиения  $G_i = G_{i1} * \dots * G_{im}$  диаграммы  $G_i$  на непустые непересекающиеся группы вершин  $G_{i1}, \dots, G_{im}$  найдутся слагаемые в сумме (5), порождающие именно это разбиение. Это такие слагаемые, что в качестве максимальных сомножителей  $B(G_{ik})$  в них фигурируют именно  $B(G_{ik})$ , отвечающие группам  $G_{ik}$  из данного разбиения (сомножитель  $B(G_{ik})$  назовем максимальным, если в соответствующем слагаемом нет других  $B(G_{ij})$ , таких, что  $G_{ik}$  содержится в  $G_{ij}$ ).

Таким образом, произведение (5) можно трактовать как некоторую сумму по всевозможным разбиениям  $G_i = G_{i1} * \dots * G_{im}$  ( $G_{ik} \neq G_i$ ). При этом данному разбиению  $G_i = G_{i1} * \dots * G_{i,k-1} * G_{ik} * \dots * G_{im}$ , где  $G_{i1}, \dots, G_{i,k-1}$  — одновершинные обобщенные блоки, а  $G_{ik}, \dots, G_{im}$  содержит не менее двух вершин, отвечает член

$$: B(G_{ik}) \dots B(G_{im}) \left\{ \prod_{\kappa} [1 + B(G_{ik,\kappa})] \dots \prod_{\mu} [1 + B(G_{im,\mu})] \right\} :$$

причем каждый из обобщенных блоков  $G_{i,r,\rho}$  строго содержится в  $G_{ir}$ . В соответствии с правилами «трехточечного упорядочения» последнее выражение можно записать в виде

$$\Delta(G_{ik}) \dots \Delta(G_{im}),$$

где  $\Delta(G_{ir})$  имеет форму (3). Учитывая также, что для одновершинных обобщенных блоков  $\Delta(G_{ir}) = 1$ , получаем, что

$$: \prod_k [1 - M(G_{ik}) + Z(G_{ik})] : = \sum_{\substack{2 \leq m \leq n \\ (G_i = G_{i1} * \dots * G_{im})}} \Delta(G_{i1}) \dots \Delta(G_{im}).$$

Таким образом, мы проверили выполнение рекуррентных соотношений (29.28в) для построенных операторов  $\Delta$ , и формула (3) доказана

Рассмотрим теперь выражение  $R'(G)$ :

$$R'(G) = : \prod_i [1 + B(G_i)] : , \quad (6)$$

где произведение распространяется на все обобщенные узлы  $G_i$  диаграммы  $G$ , содержащие не менее двух вершин. Повторив применительно к этому произведению рассуждения о классах эквивалентности вершин, мы снова придем к выводу, что  $R'(G)$  есть сумма по всевозможным разбиениям  $G$  на непустые непересекающиеся группы вершин  $G_1, \dots, G_m$  ( $G = G_1 * \dots * G_m$ ). Снова заданному разбиению  $G = G_1 * \dots * G_{k-1} * G_k * \dots * G_m$ , где  $G_1, \dots, G_k$  — одновершинные узлы, будет отвечать в этой сумме слагаемое:

$$\begin{aligned} & : B(G_k) \prod_k [1 + B(G_{ik})] : \dots : B(G_m) \prod_m [1 + B(G_{im})] : = \\ & = \Delta(G_k) \dots \Delta(G_m) = \Delta(G_1) \dots \Delta(G_{k-1}) \Delta(G_k) \dots \Delta(G_m). \end{aligned}$$

Иначе говоря,  $R'(G)$  совпадает с правой частью формулы (29.30) и, следовательно,  $R'(G) = R(G)$ . Утверждение (1) доказано

**30.2. Параметрическое представление.** Соотношение (1) позволяет представить перенормированную коэффициентную функцию диаграммы  $R(G) J_M(k)$  в виде  $\alpha$ -параметрического интеграла типа (29.16), (29.24). Ограничимся случаем нулевой конечной перенормировки, т. е. случаем, когда в (1) все  $Z(G_i) = 0$ .

Рассмотрим сначала некоторую скалярную диаграмму, которая обладает неотрицательным индексом  $\omega(G)$ , но не содержит расходящихся обобщенных блоков, не совпадающих с самой диаграммой. Ясно, что в этой ситуации предел интеграла (29.24) при стремлении регуляризирующих масс к бесконечности не существует из-за особенности фактора  $D^{-2}(\alpha)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . В соответствии с (2) вместо  $J_M(k)$  нужно рассматривать функцию  $R(G) J_M(k) = [1 - M(G)] J_M(k)$ . Имеем:

$$R(G) J_M(k) = \left(\frac{\pi^2}{i}\right)^C \delta(\Sigma k) \int_0^\infty \prod_l \{I(\alpha_l) \alpha_l\} \frac{e^{-i \sum \alpha_l (m_l^2 - i\varepsilon)}}{D^2(\alpha)} \left[ \exp i \frac{Q(\alpha, k)}{D(\alpha)} - \sum_{\nu=0}^{\omega(G)/2} \frac{i^\nu}{\nu!} \left(\frac{Q(\alpha, k)}{D(\alpha)}\right)^\nu \right]. \quad (7)$$

Вспомним теперь, что каждое слагаемое формы  $D(\alpha)$  включает ровно  $c = L - n + 1$  параметров  $\alpha_j$ , т. е.

$$D(\kappa^2 \alpha) = \kappa^{2c} D(\alpha).$$

Аналогично,

$$Q(\kappa^2 \alpha, k) = \kappa^{2c+2} Q(\alpha, k).$$

Поэтому

$$\frac{\kappa^{4c}}{D^2(\kappa^2 \alpha)} e^{i \frac{Q(\kappa^2 \alpha, k)}{D(\kappa^2 \alpha)}} = \frac{1}{D^2(\alpha)} e^{i \kappa^2 \frac{Q(\alpha, k)}{D(\alpha)}}. \quad (8)$$

Таким образом, последний множитель в подынтегральном выражении (7) есть не что иное, как остаточный член (при  $\kappa = 1$ ) тейлоровского разложения в окрестности точки  $\kappa = 0$  левой части (8). Учитывая это, запишем

$$R_G J_M(k) = \left(\frac{\pi^2}{i}\right)^C \delta(\Sigma k) \int_0^\infty \prod_l \left\{ I(\alpha_l) d\alpha_l \hat{R}_\kappa^{(\omega)} \left[ \frac{\kappa^{4c}}{D^2(\kappa^2 \alpha)} \exp \left\{ i \frac{Q(\kappa^2 \alpha)}{D(\kappa^2 \alpha)} \right\} \times \exp \left\{ -i \sum_l \kappa^2 \alpha_l (\mu_l^2 - i\varepsilon) \right\} \right] \right\}, \quad (9)$$

где  $\mu_l = m_l/\kappa$ , а действие  $\hat{R}_\kappa^{(\omega)}$  на функцию  $f(\kappa)$  определено равенством

$$\hat{R}_\kappa^{(\omega)} f(\kappa) = f(1) - f(0) - \dots - \frac{1}{\omega!} \left( \frac{d^\omega f(\kappa)}{d\kappa^\omega} \right)_{\kappa=0}. \quad (10)$$

Теперь видно, что для правильной записи  $\alpha$ -параметрического интеграла для  $R(G)J_M(k)$  нужно в подынтегральном выражении (29.24) заменить все  $\alpha_l$  (кроме входящих в  $I(\alpha_l)$ ) на  $\beta_l = \varkappa^2 \alpha_l$ , все массы  $m_l$  на  $\mu_l = m_l/\varkappa$ , домножить подынтегральное выражение на  $\varkappa^{4C}$  и поддействовать на него оператором  $\hat{R}_\varkappa^{(\omega)}$ . В последнем множителе правой части (9) замены масс в точности компенсируют замены параметров  $\alpha_l$ , и его можно было бы вынести из-под оператора  $\hat{R}_\varkappa^{(\omega)}$ . Мы ввели здесь тем не менее эти замены в видах удобства последующего обобщения на случай диаграмм, содержащих спинорные линии.

Вспомнивая соотношение (2), заключаем, что для произвольной скалярной диаграммы без частично перекрывающихся расходимостей перенормированное выражение получится в результате последовательного применения таких процедур ко всем расходящимся обобщенным блокам, поскольку ее можно построить из диаграмм типа (9), а возникающие при этом интеграции по внутренним импульсам никак не затрагивают параметров  $\alpha_j$ . Более того, оказывается, что то же самое правило справедливо и для диаграмм с перекрывающимися расходимостями, так как «лишние» слагаемые, отличающие обычное произведение типа (2) от «трехточечного» произведения, автоматически обращаются в нуль в  $\alpha$ -параметрическом интеграле. Прежде чем написать соответствующую общую формулу, представим оператор  $\hat{R}_\varkappa^{(\omega)}$  в интегральном виде:

$$\hat{R}_\varkappa^{(\omega)} = \frac{1}{\omega!} \int_0^1 d\varkappa (1 - \varkappa)^\omega \left( \frac{d}{d\varkappa} \right)^{\omega+1}. \quad (11)$$

Подведем итог: коэффициентная функция произвольной перенормированной скалярной диаграммы, содержащей расходящиеся обобщенные блоки  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$  с индексами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  соответственно, имеет вид

$$\begin{aligned} R(G)J_M(k) &= \left( \frac{\pi^2}{i} \right)^C \frac{\delta(\Sigma k)}{\omega_1! \dots \omega_k!} \int_0^\infty \prod_I \{I(\alpha_l) d\alpha_l\} \times \\ &\times \prod_{1 \leq p \leq k} \left\{ \int_0^1 d\varkappa_p (1 - \varkappa_p)^{\omega_p} \left( \frac{d}{d\varkappa_p} \right)^{\omega_p+1} \varkappa_p^{4(L_p - n_p + 1)} \times \right. \\ &\times \left. \frac{1}{D^2(\beta)} \exp \left\{ i \frac{Q(\beta, k)}{D(\beta)} - i \sum_l (\mu_l^2 - i\varepsilon) \beta_l \right\} \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

Здесь  $\beta_j = \alpha_j$ , если  $j$ -я линия не входит ни в один расходящийся обобщенный блок  $\Gamma_p$ , и  $\beta_j = \varkappa_q^2 \dots \varkappa_r^2 \alpha_j$ , если  $j$ -я линия входит в расходящиеся обобщенные блоки  $\Gamma_q, \dots, \Gamma_r$ . Аналогично  $\mu_l = m_l$ , если линия  $l$  не входит ни в один  $\Gamma_p$  и  $\mu_l = m_l (\varkappa_q \dots \varkappa_r)^{-1}$ , если  $l$ -я линия входит в  $\Gamma_q, \dots, \Gamma_r$ .



Формы  $Q$  и  $D$  строятся (теперь уже из параметров  $\beta_j$ , а не  $\alpha_j$ ) по тем же правилам (29.22) и (29.23), что и раньше.

Точно таким же образом пишется параметрическое представление для диаграмм, содержащих спинорные линии. Для этого в подынтегральном выражении неперенормированной амплитуды (29.16)

$$J_M(k) = \delta(\sum k) \int_0^\infty \prod_i \{I(\alpha_i) d\alpha_i\} f(\dots k \dots \alpha \dots) e^{-t \sum \alpha_i (m_i^2 - it)}$$

следует заменить по сформулированным выше правилам все параметры  $\alpha_i$  (кроме входящих в  $I(\alpha_i)$ ) на  $\beta_i$ , все массы  $m_i$  на  $\mu_i$ , ввести множители  $\kappa_p^{4(L_p - n_p + 1)}$  и подействовать на подынтегральное выражение должным числом операторов  $\hat{R}_{\kappa_p}^{(\omega, p)}$ , заданных соотношением (11). Нетрудно также модифицировать представление (12) таким образом, чтобы оно отвечало ненулевым точкам вычитания по внешним импульсам расходящихся обобщенных узлов (см. Завьялов (1975)).

В выражении (12) можно уже непосредственно перейти к пределу  $M \rightarrow \infty$  при фиксированном  $\varepsilon > 0$ . При этом после выполнения дифференцирований по  $\kappa$  в подынтегральной функции (12)  $\lim_{M \rightarrow \infty} R(G)J_M$  будет представлен конечной суммой абсолютно сходящихся интегралов по параметрам  $\alpha$  и  $\kappa$ .

Здесь необходимо подчеркнуть наличие произвола в выборе операции  $R(G)$ . В самом деле, согласно (29) операция  $1 - M(G)$  сводится к вычитанию из  $f$  полинома Маклорена степени, равной степени роста, что оказывается достаточным для устранения бесконечностей. Совершенно очевидно, что если, например, определить операцию  $1 - M(G)$  вычитанием из  $f$  полинома Маклорена степени  $n > \omega(G)$ , то мы также пришли бы к выражениям, не содержащим расходимостей. Можно показать, что произвол, связанный с выбором  $n$ , фактически сводится к изменению лагранжиана. Выбранные здесь минимальные значения  $n = \omega(G)$  приводят к контрчленам, наименее отличающимся по своей операторной структуре от членов полного лагранжиана. Этот выбор, однако, не является обязательным.

**30.3. Переход к пределу при  $\varepsilon = 0$ .** Рассмотрим свойства аналитичности фейнмановских интегралов и возможность перехода к пределу при  $\varepsilon = 0$ . По существу, это вопрос о сходимости интегралов типа (12) или (29.26) на верхнем пределе по переменным  $\alpha_i$ . Поведение же подынтегральных функций при малых  $\alpha_i$ , а следовательно, и ультрафиолетовые перенормировки здесь оказываются мало существенными. Обратимся поэтому сначала к неперенормированному регуляризованному интегралу (29.16). Поворачивая контуры интегрирования по переменным  $\alpha_i$  на  $90^\circ$  в комплексной плоскости, т. е. совершая замену

$$\alpha_i \rightarrow -i\alpha_i, \quad (13)$$

запишем его в виде

$$\int_0^\infty d\alpha_1 \dots \int_0^\infty d\alpha_l F(\dots k \dots \alpha \dots) \exp \left\{ - \sum_l \alpha_l (m_l^2 - i\varepsilon) + \sum A_{ab}(\dots \alpha \dots) k_a k_b \right\}. \quad (14)$$

Представляя показатель экспоненты

$$A = \sum A_{ab}(\dots \alpha) k_a^0 k_b^0 - \sum A_{ab}(\dots \alpha \dots) k_a k_b - \sum_l \alpha_l (m_l^2 - \varepsilon),$$

находим с помощью условий (29.25) и (29.26)

$$A < \sum_l \alpha_l \left[ \left( \sum_a |k_a^0|^2 \right) - m_l^2 \right] + i\varepsilon \sum_l \alpha_l.$$

Теперь очевидно, что при выполнении условия

$$\left( \sum_a |k_a^0|^2 \right) < \min m_l^2 \quad (15)$$

форма  $A$  оказывается отрицательной, интеграл (14) абсолютно сходится и преобразование (13) законно. В полученном выражении можно перейти к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и получить функцию, аналитическую в области, определяемой неравенством (15). Это неравенство можно записать в релятивистски-инвариантной форме:

$$\left| \sum_a (k_a \xi)^2 \right| < \min m_l^2,$$

где  $\xi$  — времениподобный единичный вектор, направленный в будущее:

$$\xi^2 = 1, \quad \xi^0 > 0.$$

В изложенной процедуре мы сначала устремили  $\varepsilon$  к нулю. Перенормировки и переход к пределу  $M \rightarrow \infty$  составляют второй этап. Однако операции поворота (13) и предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$  можно осуществить и непосредственно в перенормированном интеграле (12). Фактически это следует из того, что в рассматриваемом случае точка  $k_a = 0$  оказывается регулярной и разложения в ряд Маклорена допустимы. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что согласно предположению все массы  $m_l$  строго положительны и

$$\min m_l^2 > 0.$$

В случае же, когда некоторые из масс равны нулю, точка  $k_a = 0$  может и не быть регулярной. Тогда выбор центра разложения в точке  $k_a = 0$  при определении операции  $\Delta(G)$  может оказаться недопустимым, и центр приходится помещать в некоторой точке  $(k^0, \mathbf{k})$  с чисто мнимой временной компонентой  $k^0 = i\omega$ . Поскольку, однако, выделение какой-либо точки в импульсном пространстве (кроме точки  $k = 0$ ) не является инвариантным относительно 4-по-

воротов, то соответствующий полином необходимо, кроме того, усреднить по сфере

$$\omega^2 + k^2 = \mu^2, \quad \text{где } \mu^2 = \text{const.}$$

При таком выборе операции  $\Delta(G)$  сделанные выше заключения о свойствах коэффициентных функций, получающихся в результате операции  $R(G)$ , очевидно, сохраняются, с тем, однако, отличием, что аналитичность будет иметь место лишь для точек  $k$  с чисто мнимой  $k^0$ .

Пусть теперь импульсы  $k$  совершенно произвольны. Пока массы имеют конечные, чисто мнимые отрицательные добавки  $-i\epsilon$ , в интегралах содержатся обрезающие множители  $\exp\left(-\epsilon \sum_l \alpha_l\right)$  и функции являются регулярными. При устремлении  $\epsilon$  к нулю они сходятся лишь в несобственном смысле. Получающиеся при этом предельные выражения, представляющие собой истинные коэффициентные функции  $T'$ -произведений, оказываются *несобственными* и могут обладать особенностями в некоторых областях значений своих аргументов.

Однако в силу свойств интегрируемости операторные интегралы

$$\int T'(\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n$$

при достаточно регулярных и достаточно быстро убывающих на бесконечности функциях  $g(x)$  оказываются сходящимися, и трудности возникают здесь при предельном переходе  $g(x) \rightarrow 1$ : соответствующие матричные элементы  $S(1)$  оказываются расходящимися. В этих случаях обычно говорят о расходимостях типа *инфракрасной катастрофы* или о *резонансных знаменателях*.

Сингулярности первого типа возникают, как известно, из-за неприменимости метода теории возмущений при описании процессов с квантами очень малой энергии и могут быть исключены из результатов методом Блоха—Нордсика (см. ниже § 35) или введением в фотонные  $D_0^c$ -функции малой константы, играющей роль «фотонной массы» (см. ниже § 35.4).

Сингулярности второго типа имеют место, например, в том случае, когда процесс рассеяния высокого порядка при данных значениях импульсов может быть сведен к более простым независимым процессам низшего порядка.

Следует заметить, что расходимость этих двух типов проявляется и в обычной квантовой механике в тех случаях, когда применение теории возмущений незаконно. Здесь мы подчеркнем, что условие интегрируемости операторных функций  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  гарантирует лишь отсутствие расходимостей, специфических для квантовой теории поля — «расходимостей при больших импульсах».

Мы сформулировали выше рецепт построения интегрируемых коэффициентных функций для операторов  $S_n(x_1, \dots, x_n)$ . Заметим

теперь, что введение регуляризованных причинных функций

$$\Delta^c \rightarrow \text{reg } \Delta^c$$

имело в нашем рассуждении чисто вспомогательный характер и, в сущности, требовалось лишь для выяснения того, что полученные выражения для  $S_n$  удовлетворяют всем условиям, наложенным на члены разложения матрицы рассеяния. Практически, например при вычислении указанных коэффициентных функций, вполне возможно оперировать «истинными»  $\Delta^c$ -функциями. Переходя при этом к  $\alpha$ -представлению, можно применять операцию  $R(G)$ , исключив из области интеграции по  $\alpha$  лишь малую область около точки  $\alpha = 0$ .

**30.4. Иллюстрация.** В качестве примера применения общих правил рассмотрим диаграмму  $G$  (рис. 28) в скалярной мезонной теории.

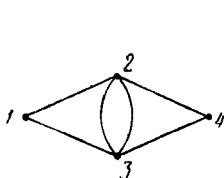


Рис. 28. Диаграмма  $G$ .

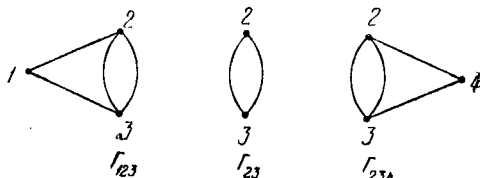


Рис. 29. Расходящиеся узлы диаграммы  $G$ .

Эта диаграмма содержит три расходящихся узла  $\Gamma_i$  (рис. 29), для каждого из которых индекс  $\omega(\Gamma_i) = 0$ . При этом узлы  $\Gamma_{123}$  и  $\Gamma_{234}$  частично пересекаются. Поэтому диаграмма  $G = \Gamma_{1234}$  является диаграммой второго класса. Для нее имеется три разбиения, содержащих расходящиеся узлы:

$$G_1 * \Gamma_{23} * G_4, \quad \Gamma_{123} * G_4, \quad G_1 * \Gamma_{234},$$

где узлы  $G_1$  и  $G_4$  совпадают с простыми вершинами.

Согласно формулам (29.9) и (29.28) имеем:

$$R(G) = (1 - M(G))(1 + \Delta_{23} + \Delta_{123} + \Delta_{234}), \quad (16)$$

где для упрощения положено  $\Delta(\Gamma_{23}) \equiv \Delta_{23}$  и т. д. Применяя, далее, (29.28) к узлам  $\Gamma_{123}$ ,  $\Gamma_{234}$  и  $\Gamma_{23}$ , получаем

$$\Delta_{123} = -M_{123}(1 + \Delta_{23}), \quad \Delta_{234} = -M_{234}(1 + \Delta_{23}), \quad \Delta_{23} = -M_{23}.$$

Таким образом, окончательно

$$R(G) = (1 - M_{1234})(1 - M_{123} - M_{234})(1 - M_{23}). \quad (17)$$

Перейдем теперь к построению контрчленов, регуляризующих диаграмму рис. 28. Так как для всех расходящихся узлов  $\omega(\Gamma_i) = 0$ , то согласно (29.29) операция  $(-M)$  сводится к вычитанию из  $\Gamma_i$  значения соответствующей коэффициентной функции в точке, где все внешние (по отношению к  $\Gamma_i$ ) импульсы равны нулю. После

такого вычитания мы получаем конечное выражение. Как было отмечено в § 29.6, точка вычитания фактически является произвольной, что находит свое отражение в рассматриваемом случае в возможности добавления к вычтенному выражению произвольной константы (обобщенная R-операция). Таким образом,

$$(1 - M_{\omega=0}) \delta(\sum k) f(\dots k \dots) = \delta(\sum k) \{f(\dots k \dots) - f(\dots 0 \dots) + C\}.$$

В разделе 29.5 было отмечено, что вычитаемый член эквивалентен вкладу выражения (12) в пределе  $\kappa_j \rightarrow 0$ . Заметим теперь, что в этом пределе

$$D_G(\beta) \rightarrow \kappa_i^{L_i - n_i + 1} D_{\Gamma_i}(\alpha) D_{H_i}(\beta), \quad A_G(\beta, k) \rightarrow A_{H_i}(\beta, k), \quad (18)$$

где диаграмма  $H_i$  получается из диаграммы  $G$  стягиванием расходящегося узла в точку (рис. 30).

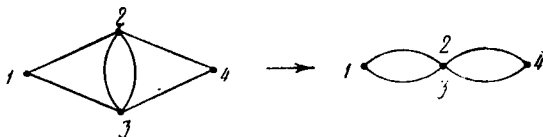


Рис. 30. Операция «стягивания в точку» расходящегося узла  $\Gamma_{23}$ .

Пользуясь свойством (18), нетрудно теперь выписать интересующие нас контрчлены. Сделаем это графически, не выписывая длинных аналитических выражений. Действие операции  $(1 - M_{23})$  на вклад диаграммы рис. 28

$$(1 - M_{23}) \left( \text{diamond diagram} \right) = \left( \text{diamond diagram} \right) - \left( \text{contracted diagram} \right) \left( \text{circled diagram} \right)$$

Рис. 31. Действие операции  $(1 - M_{23})$ .

согласно (18) может быть представлено в виде графической операции, изображенной на рис. 31, где диаграмме, обведенной пунктиром, соответствует константа  $c$  и значение ее вклада в точке вычитания

$$\left( \text{circled diagram} \right) = 2 \left( \text{contracted diagram} \right) \Big|_{\kappa=0} + C \quad (19)$$

логарифмически расходящегося при  $M \rightarrow \infty$ . Действуя теперь оператором  $(1 - M_{123} - M_{234})$  на правую часть соотношения, изображенного на рис. 31, получим выражение, соответствующее рис. 32.

Наконец, действие последнего вычитания  $(1 - M_{1234})$  дает после приведения подобных членов выражение, изображенное на рис. 33.

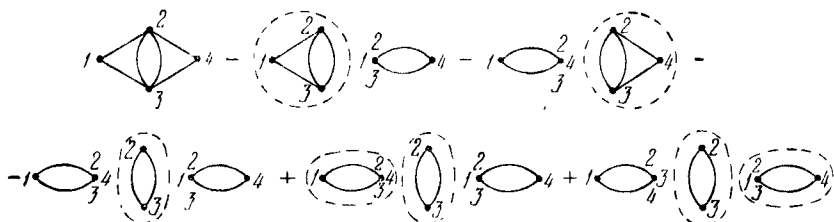


Рис. 32. Действие операции  $(1 - M_{123} - M_{234})(1 - M_{23})$ .

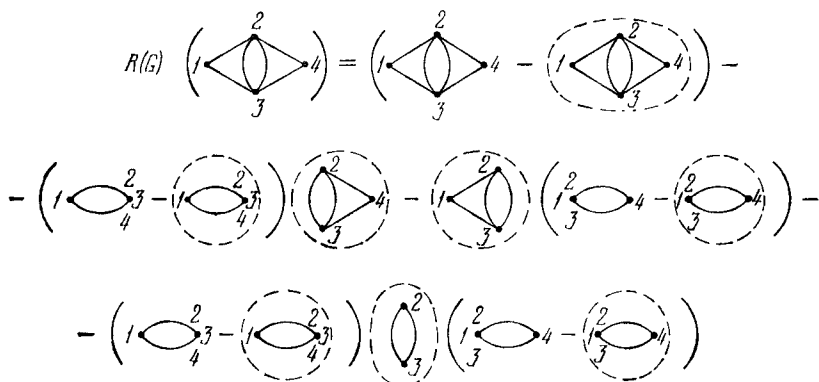


Рис. 33. Действие операции  $R(G)$  на диаграмму рис. 28.

Нетрудно проверить, что действие оператора  $M_{123}M_{234}$  на выражение рис. 31 дает нуль, ввиду чего вместо (17) можно записать

$$R(G) = (1 - M(G))(1 - M(\Gamma_{123}))(1 - M(\Gamma_{234}))(1 - M(\Gamma_{23})). \quad (20)$$

Это обстоятельство является следствием общего свойства  $R$ -операции упомянутого выше (2).

### § 31. Аналитические свойства коэффициентных функций в импульсном представлении

**31.1. Аналитические свойства  $S_n$ .** В предыдущем параграфе было установлено, что коэффициентные функции  $S_n$  матрицы рассеяния в импульсном представлении являются аналитическими

функциями в области значений импульсов  $k_a$ , где

$$\sum_a k_a^0 < \min m_l \quad (1)$$

после выполнения предельного перехода  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Поэтому можно считать, что функции  $S_n$ , полученные после устранения расходимостей, определены как аналитические функции своих аргументов в области, ограниченной неравенством (1), причем значения функций  $S_n$  вне этой области могут быть получены с помощью аналитического продолжения, которое состоит в добавлении ко всем массам  $m_l$ , соответствующим внутренним линиям, бесконечно малых чисто мнимых отрицательных величин:

$$m_l \rightarrow m_l - i\varepsilon_l. \quad (2)$$

Мы покажем сейчас, что с помощью иного варианта аналитического продолжения можно получить из  $S_n$  коэффициентные функции  $H_n$  (см. (21.11)), которые, как устанавливается ниже (глава VII), необходимы для построения особого оператора  $H(x; g)$ , играющего роль гамильтониана в нашей теории.

**31.2. Структура функций  $H_n$ .** Рассмотрим функции  $H_n(x, x_1, \dots, x_n)$ ; в соответствии с (21.12) они выражаются простым образом через коэффициентные функции матрицы рассеяния  $S_V(x_1, \dots, x_V)$ , т. е. операторная структура  $H_n$  полностью определяется операторной структурой  $S_{n+1}$ . В самом деле, из (21.12) следует, что среди коэффициентных функций  $H_n$  будут, во-первых, коэффициентные функции  $S_{n+1}$  и, во-вторых, члены, соответствующие произведениям типа

$$S_{k+1}(x, x_1, \dots, x_k) \overset{\dagger}{S}_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (3)$$

Раскрывая (3) и приводя произведение операторов полей к нормальной форме, мы получим сумму членов, совпадающих по операторной структуре с  $S_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n)$ , но отличающихся от них различными вариантами замены функций  $D^c$  на функции  $D^-$  для внутренних линий, соединяющих точки различных совокупностей  $(x, x_1, \dots, x_k)$  и  $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ , и на функции  $(D^c)^*$  для линий между точками из совокупности  $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ . Таким образом, операторная структура  $H_n$  действительно определяется диаграммой Фейнмана для  $S_{n+1}$ .

Займемся более подробным рассмотрением полученных коэффициентных функций. Покажем, во-первых, что несвязным диаграммам будут соответствовать коэффициентные функции, равные нулю. Пусть не являются связными части диаграммы, содержащие точки  $(x, \dots, x_a, \dots)$  и  $(\dots, x_b, \dots)$ . Соответствующая коэффициентная функция оператора  $H_n$  имеет вид

$$K''(x, \dots, x_a, \dots, x_b, \dots) = \sum_i Q_i(x, \dots, x_a, \dots) Q_i(\dots, x_b, \dots),$$

причем  $Q_i$  и  $Q'_i$  трансляционно-инвариантны. Сдвигая аргументы  $Q_i$  на  $\xi$  такое, что  $x^0 + \xi^0 > x_b^0$ , получим в силу свойства (21.13)

$$K^H(x, \dots, x_a, \dots, x_b, \dots) = K^H(x + \xi, \dots, x_a + \xi, \dots, x_b, \dots) = 0.$$

Поэтому ниже мы будем рассматривать лишь связанные диаграммы.

Перейдем к импульсному представлению

$$\int K(x, x_1, \dots, x_n) \exp i \left( px + \sum_{j=1}^n p_j x_j \right) dx dx_1 \dots dx_n = \\ = (2\pi)^4 \delta \left( p + \sum_i p_i \right) K(p_1, \dots, p_n),$$

где

$$K(p_1, \dots, p_n) = \int K(x, x_1, \dots, x_n) \exp i \left( \sum_j p_j (x_j - x) \right) dx_1 \dots dx_n \quad (4)$$

— некоторая несобственная функция импульсов  $p_1, \dots, p_n$ .

**31.3. Аналитические свойства функций  $H_n$ .** Считая переменные  $p_i$  комплексными, представим их в виде

$$p_i = v_i + i\Gamma_i,$$

где  $v$  и  $\Gamma$  — действительные 4-векторы. Тогда вместо (4) можно, очевидно, писать:

$$K(p_1, \dots, p_n) = \\ = \int K(x, x_1, \dots, x_n) g'(x_1) \dots g'(x_n) \exp i \left( \sum_i v_i (x_i - x) \right) dx_1 \dots dx_n,$$

где

$$g'(x_i) = \exp [-\Gamma_i (x_i - x)].$$

Теперь видно, что если в качестве  $\Gamma_i$  выбрать чисто временной 4-вектор, направленный в будущее:

$$\Gamma = (\Gamma^0, 0, 0, 0), \quad \Gamma^0 > 0,$$

то при  $x_i^0 \rightarrow \infty$  функция  $g$  будет экспоненциально стремиться к нулю и ввиду того, что интеграция производится по области  $x_i^0 > x^0$ , интеграл (4) окажется сходящимся, а функция  $K(p_1, \dots, p_n)$  — регулярной для  $p_i = v_i + i\Gamma_i$ . Очевидно, то же будет справедливым, если в качестве  $\Gamma_i$  взять времениподобный 4-вектор, направленный в будущее. При этом функция  $K(p_1, \dots, p_n)$  для вещественных значений  $p_i$  может рассматриваться как несобственный предел регулярной функции при  $\Gamma_i \rightarrow 0$ . Иными словами, функция  $K(p_1, \dots, p_n)$  оказывается аналитической в области

$$p_i = v_i + i\varepsilon_i \Gamma,$$

где  $v_i$  — действительный 4-вектор,  $\varepsilon_i$  — действительный положительный параметр, а  $\Gamma$  — времениподобный 4-вектор, направленный в будущее.



Покажем сейчас, что при выполнении условия (1) коэффициентные функции операторов  $H_n$  также будут аналитическими и совпадающими с коэффициентными функциями  $S_{n+1}$ . В § 30 была доказана регулярность функций  $S_{n+1}$  в области, ограниченной условием (1). Поэтому достаточно показать, что произведения (3) не будут давать вклада в  $H_n$  в этой области \*). Соответствующие коэффициентные функции имеют вид

$$\int Q(\dots, k_a - \sum \lambda, \dots) \delta(\sum k_a - \sum \lambda) Q'(\dots, k_b + \sum \lambda, \dots) \times \\ \times \delta(\sum k_b + \sum \lambda) \prod \{Z_{\alpha\beta}(\lambda_{\alpha\beta}) \theta(-\lambda_{\alpha\beta}^0) \delta(\lambda_{\alpha\beta}^2 - m_{\alpha\beta}^2) d\lambda_{\alpha\beta}\}.$$

Из условий  $\lambda_{\alpha\beta}^0 < 0$  и  $\lambda_{\alpha\beta}^2 = m_{\alpha\beta}^2$  следует, что

$$-\sum \lambda_i^0 \geq m_i;$$

с другой стороны, мы имеем

$$\sum |k| \leq \min m,$$

поэтому одно из двух требований:

$$\sum k_a^0 - \sum \lambda^0 = 0, \quad \sum k_b^0 + \sum \lambda^0 = 0,$$

всегда окажется невыполненным, вклад от (3) действительно будет равен нулю и  $H_n$  совпадет с аналитической  $S_{n+1}$ . Вспоминая, что путем добавления к массам малых чисто мнимых отрицательных добавок (2) мы получили функции  $S_n$ , аналитические во всей плоскости импульсных переменных, мы приходим к следующему рецепту построения *коэффициентных функций оператора  $H_n$  из коэффициентных функций оператора  $S_{n+1}$* .

Рассмотрим оператор  $S_{n+1}$ , которому соответствует некоторая (обязательно связанная) диаграмма. Коэффициентные функции этого оператора при  $\epsilon = 0$  представляются выражениями, аналитическими в области малых импульсов. Аналитическое продолжение этих выражений в область больших импульсов с помощью замены (2) приведет нас опять к коэффициентным функциям оператора  $S_{n+1}$ . Для получения же коэффициентных функций оператора  $H_n$  следует выбрать аналитическое продолжение в область больших импульсов с помощью замены

$$p_j^0 \rightarrow p_j^0 + i\Gamma^0. \quad (5)$$

Мы рассмотрели здесь связь между коэффициентными функциями операторов

$$\mathcal{S}(g) \quad \text{и} \quad H(x; g) = i \frac{\delta \mathcal{S}(g)}{\delta g(x)} \dot{\mathcal{S}}(g).$$

\*) В случае, когда минимальная масса равна нулю (электромагнитное поле), в рассуждениях данного параграфа ее можно считать равной некоторой малой величине  $\chi$ . Такая операция не приведет к каким-либо противоречиям.

Как указывалось в § 20, если вспомогательный функциональный аргумент вводится не в виде «интенсивности взаимодействия»  $g$ , а в качестве классического внешнего поля  $u$ , то оператор

$$i \frac{\delta S(u)}{\delta u(x)} \overset{\dagger}{S}(u)$$

также обладает свойством причинности (20.31), ввиду чего его коэффициентные функции будут находиться в аналогичном соответствии с коэффициентными функциями матрицы  $S(u)$ . При этом оказывается, что аналитическая связь  $S(u)$  и  $i [\delta S(u)/\delta u(x)] \overset{\dagger}{S}(u)$  в случае произвольного введения поля  $u$  может быть установлена для этих операторов в целом, без обращения к их функциональным разложениям. Это будет продемонстрировано в главе X.

## § 32. Классификация ренормируемости теорий

**32.1. Взаимодействия первого и второго рода.** Как было установлено в § 29, изменение эффективного лагранжиана взаимодействия путем введения в него контрчленов обусловлено наличием сильно связанных диаграмм  $G$  с неотрицательным индексом  $\omega(G)$ . Рассмотрим связь между строением таких диаграмм и структурой соответствующих контрчленов в  $x$ -представлении.

Если упомянутая диаграмма объединяет  $n$  вершин и обладает  $s$  внешними линиями, то соответствующий квазилокальный оператор будет иметь вид

$$: u_{\alpha_1}(x_{i_1}) \dots u_{\alpha_s}(x_{i_s}) : Z \left( \dots \frac{\partial}{\partial x} \dots \right) \delta(x_1 - x_2) \dots \delta(x_{n-1} - x_n),$$

причем степень полинома  $Z$  равна индексу диаграммы  $\omega(G)$ . Интегрируя это выражение по всем переменным  $x_i$ , кроме одной, мы получим контрчлен лагранжиана. При выполнении этих тривиальных интеграций производные с  $\delta$ -функций перейдут на операторы поля  $u$  и результат представится в виде нормального произведения некоторого числа операторных функций поля и их производных. При этом суммарная степень производных оказывается равной индексу диаграммы  $\omega(G)$ , а «степень» всего выражения по операторным функциям — числу внешних линий  $s$ .

Поэтому, если какая-либо теория (полностью определяемая основным «затрабочным» членом лагранжиана взаимодействия и структурой причинных функций) приводит к сильно связным диаграммам с неотрицательным индексом, у которых числа  $\omega(G)$  и  $s$  оказываются ограниченными, то для полного исключения всех расходимостей такая теория требует введения контрчленов конечного числа типов. Под типом контрчлена здесь подразумевается его операторный тип и степень производных у каждого оператора поля. В противном случае число типов контрчленов оказывается бесконечным.

Проанализируем теперь зависимость индексов  $\omega(G)$  от числа внешних и внутренних линий диаграммы. Введем для этого понятие *индекса вершины*, определив его равенством

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sum_{l_{int}} (r_l + 2) - 4, \quad (1)$$

причем суммирование производится по всем внутренним линиям, входящим в  $i$ -ю вершину. Нетрудно заметить, что индекс диаграммы выражается через индексы входящих в диаграмму вершин следующим образом:

$$\omega(G) = \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_i + 4, \quad (2)$$

поскольку каждая внутренняя линия входит одновременно в две вершины. Для данного типа вершин индекс  $\omega_i$  принимает максимальное значение  $\omega_i^{\max}$  в том случае, когда все линии, входящие в вершину, оказываются внутренними. Если

$$\omega_i^{\max} \leq 0, \quad (3)$$

то из (2) следует, что

$$\omega(G) \leq 4.$$

Напротив, если для некоторых типов вершин

$$\omega_i^{\max} > 0, \quad (4)$$

то всегда можно построить такую диаграмму  $G$ , содержащую достаточное число вершин этого типа, чтобы  $\omega(G)$  оказалось большим любого наперед заданного числа. Таким образом, либо индекс диаграмм не превышает четырех, либо он может быть сделан сколь угодно большим.

Учитывая, что

$$\omega_i = \omega_i^{\max} - \frac{1}{2} \sum_{l_{ext}} (r_l + 2),$$

где  $l_{ext}$  — индексы внешних линий, входящих в данную вершину, зависимость  $\omega(G)$  от числа внешних линий можно записать в виде

$$\omega(G) = \sum_l \omega_l^{\max} + 4 - \frac{1}{2} \sum_{l_{ext}} (r_l + 2); \quad (5)$$

суммирование в последнем члене производится по всем внешним линиям данной диаграммы.

Поэтому в случае (3) число внешних линий диаграммы с положительным индексом не превышает четырех. В этом случае обе величины  $\omega(G)$  и  $s$  ограничены числом 4, количество типов соответствующих контрчленов оказывается конечным и может быть осу-

шестьлена их детальная классификация. В случае же (4) обе суммы в правой части (5) могут быть сделаны сколь угодно большими при неотрицательном  $\omega(G)$ . Обе характеристики,  $\omega(G)$  и  $s$ , оказываются неограниченными, и для компенсации расходимостей возрастающих порядков приходится вводить контрчлены с возрастающей степенью «линейности» и количеством производных. Замкнутого выражения для полного эффективного лагранжиана при этом получить не удается.

В соответствии с указанным типом взаимодействий могут быть разбиты на два класса:

а) взаимодействия *первого рода* (все  $\omega_i \leq 0$ );

б) взаимодействия *второго рода* (некоторые из  $\omega_i > 0$ ). Соответствующие теории называются *ренормируемыми* и *неренормируемыми*.

По поводу введенного определения нужно сделать только одну существенную оговорку. Дело в том, что в некоторых случаях отдельные вершинные факторы могут взаимно компенсироваться и тем самым снижать эффективное значение  $\omega_i$ . Рассмотрим, например, взаимодействие обычного фермионного поля (спин 1/2) с нейтральным векторным мезонным полем типа

$$: \bar{\psi}(x) \gamma^n \psi(x) \varphi_n(x) :. \quad (6)$$

При непосредственном вычислении  $\omega_i$ , воспользовавшись тем, что спаривание векторного поля в  $p$ -представлении имеет вид

$$\frac{g^{mn} - k^m k^n / m^2}{k^2 - m^2}$$

и, следовательно,  $r_i$  для него равны 2, получим, очевидно,  $\omega_i = 1$  и отнесем лагранжиан (6) к неренормируемому типу. В действительности, однако, этот лагранжиан описывает взаимодействие первого рода. Следуя Штюкельбергу (1938), разобьем поле  $\varphi_n$  на поперечную и продольную части:

$$\varphi_n(x) = \Phi_n(x) + \frac{1}{m} B_{;n}$$

со спариваниями

$$\overline{\Phi_n(x)} \Phi_m(y) \sim i g^{mn}, \quad \overline{B_{;n}} B_{;m} \sim k_n k_m.$$

Видно отсюда, что неренормируемость лагранжиана (6) обусловлена продольной частью векторного поля. Можно показать теперь, что соответствующий член в лагранжиане взаимодействия

$$: \bar{\psi}(x) \gamma^n \psi(x) B_{;n}(x) :,$$

имея структуру: (сохраняющийся ток)  $\times$  (градиент), не дает вклада в матричные элементы, вследствие чего продольное поле  $B$  фактически выпадает из  $S$ -матрицы, эффективные значения  $r_i$  и индексы вершины  $\omega_i$  понижаются до нуля и лагранжиан (6) оказывается ренормируемым.

Подобного рода вопросы об «эффективном изменении спариваний» под действием канонических преобразований типа градиентного будут специально обсуждаться ниже после рассмотрения условий сохранения заряда и градиантной инвариантности, которых мы пока не затрагивали.

Не рассматривая здесь детально этих весьма специальных случаев компенсации особенностей, обязанных своим существованием некоторой группе преобразований, дадим сейчас общую классификацию простейших лагранжианов, подобных введенным в § 8.

**32.2. Перечень взаимодействий первого рода.** При установлении индексов  $\omega_i^{\max}$  примем во внимание, что в соответствии с общей структурой перестановочных и причинных функций степень полинома  $r_i$  для скалярного поля и векторного поля с массой нуль (электромагнитного) со скалярной связью равна нулю, для спинорного поля спина  $1/2$  — равна единице, для векторного поля (при  $m \neq 0$ ) со скалярной связью — равна двум. В случае градиентной связи с помощью формулы (22.11) находим, что  $r_i$  для скалярного и электромагнитного полей равна двум, а для векторного поля — четырем.

Как было отмечено, число внешних линий в сильно связанных диаграммах с неотрицательным индексом не может быть более четырех. Поэтому максимальная степень линейности лагранжиана взаимодействия первого рода равна четырем. Из формулы

$$\omega_i^{\max} = \frac{1}{2} \sum_l (r_l + 2) - 4, \quad (7)$$

где суммирование производится по *всем* линиям, выходящим из данной вершины, находим, что все четыре линии должны иметь индекс  $r_l = 0$ , т. е. лишь четверные произведения скалярных и электромагнитных полей

$$: \varphi_1 \varphi_3 \varphi_3 \varphi_4 :, \quad : \varphi_1 \varphi_2 A_k A^k :, \quad : A_k A^k A_l A^l : \quad (8)$$

описывают взаимодействие первого рода. Все остальные четверные взаимодействия, например четверное ферми-взаимодействие спинорных операторных функций

$$(\bar{\psi}_1 O \psi_2) (\bar{\psi}_3 O \psi_4) \quad (\omega_i = 2),$$

четверные взаимодействия, включающие производные и векторные функции поля, например

$$: \varphi_1 \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^k} A^k :, \quad (\omega_i = 1), \quad : \varphi_1 \varphi_2 U_k U^k :, \quad (\omega_i = 2),$$

представляют собой взаимодействия второго рода.

Кубические члены в лагранжиане первого рода могут, очевидно, иметь следующую структуру:

а) произведение трех скалярных и электромагнитных функций без производных:

$$: \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 :, \quad : \varphi A_k A^k : \quad (\omega_i = -1) \quad (9)$$

(остальные комбинации не образуют скаляра);

б) произведение трех скалярных и электромагнитных функций с одной первой производной:

$$: \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^k} A^k : \quad (\omega_i = 0); \quad (10)$$

по этому типу построено взаимодействие заряженных скалярных мезонов с электромагнитным полем (скалярная электродинамика);

в) произведение одной скалярной, одной векторной и одной электромагнитной функций:

$$: \varphi U^k A_k : \quad (\omega_i = 0); \quad (11)$$

г) произведение двух спинорных и одной скалярной или электромагнитной функций:

$$: \bar{\psi}_\alpha M_{\alpha\beta} \psi_\beta \varphi :, \quad : \bar{\psi}_\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^k \psi_\beta A_k : \quad (\omega_i = 0). \quad (12)$$

Все остальные кубичные взаимодействия, например взаимодействие спинорного поля со скалярным типа градиентной связи

$$: \bar{\psi}_\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^k \psi_\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} : \quad (\omega_i = 1),$$

вообще говоря, приводит к ненормируемым теориям.

Перечисленные девятью лагранжианами (8)—(12) и ограничиваются возможные типы взаимодействий первого рода, так как квадратичные формы, удовлетворяющие условию (3), соответствуют вершинам, в которые входят по две линии. Такие формы не описывают процессов взаимного превращения частиц и поэтому представляют лишь возможные типы контрчленов.

**32.3. Природа взаимодействий второго рода.** Остановимся более подробно на свойствах взаимодействий второго рода. Как мы уже убедились, среди бесконечного числа типов контрчленов, возникающих в таких теориях, содержатся группы членов одинакового операторного типа, но с бесконечно возрастающими степенями производных. Такие ряды по степеням производных фактически представляют собой разложение некоторых нелокальных выражений и потому, быть может, выражают *нелокальные взаимодействия*.

Например, лагранжиан псевдовекторной мезон-нуклонной связи

$$: \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^k \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} :$$

требует введения в эффективный лагранжиан бесконечного числа контрчленов вида

$$C_{\alpha_1}, \dots, \alpha_n : \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^k \psi \frac{\partial^n}{(\partial x^{\alpha_1})^n} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) :,$$

которые в сумме могут рассматриваться как разложение нелокального выражения

$$\int : \psi(x) \gamma^5 \gamma^k \psi(x) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y^k} : K(x-y) dy$$

в ряд по степеням производных функций  $\varphi$ .

Таким образом, в случае взаимодействий второго рода происходит фактическое исчезновение локализуемости эффективного лагранжиана, который начинает зависеть от поведения функций поля не только в бесконечно малой окрестности точки  $x$ . При этом оказывается, что, вне зависимости от малости константы взаимодействия, становятся существенными члены высших порядков при достаточно больших импульсах. Действительно, из соображений размерности следует, что контрчлен, содержащий  $n$  производных, пропорционален фактору  $l^n$ , где  $l$  — малый параметр с размерностью длины («универсальная длина»), связанный степенным образом с константой взаимодействия. В  $p$ -представлении производные  $d/dx$  превращаются в импульсы, и мы получаем разложение по

$$pl = l/\lambda, \quad (13)$$

где

$$\lambda = 1/p$$

— комптоновская длина волны. При достаточно больших  $p$  величина  $\lambda$  становится сравнимой с универсальной длиной  $l$  и параметр разложения (13) нелокального лагранжиана в ряд по производным перестает быть малым. Универсальная длина  $l$  в этом случае является характеристикой физической «размытости» частицы, и ее появление сигнализирует о важности влияния внутренней структуры частицы.

Таким образом, лагранжианы взаимодействия второго рода, возможно, представляют собой «обломки» нелокализованных взаимодействий, представленные в локализованном виде. Для последовательного построения таких теорий необходимо с самого начала исходить из нелокального лагранжиана, учитывающего внутреннюю структуру элементарных частиц. Такие попытки, с определенной долей успеха, время от времени предпринимались (см., например, книгу Ефимова (1977)).

Следует в этой связи отметить, что все современные квантово-полевые теории реальных взаимодействий — квантовая электродинамика, объединенная теория электрослабых взаимодействий и квантовая хромодинамика — являются локальными и перенормируемыми, а каких-либо экспериментальных указаний на существование нелокальных эффектов не обнаружено. Поэтому мы не будем более обсуждать неперенормируемые и нелокальные взаимодействия.

Заметим лишь, что упомянутая выше гипотетическая картина нелокальной природы взаимодействий второго рода не является

бесспорной. Имеется по крайней мере еще одна, достаточно широко обсуждавшаяся в литературе, альтернатива. Она связана с возможной неаналитичностью квантовополевых разложений по константе связи (т. е. нарушением гипотезы б) из обсуждения свойства разложимости в § 20.1). Достаточно сильная неаналитичность в точке  $g = 0$  может привести к тому, что «степень расходимости» коэффициентов разложения по степеням  $g$  будет быстро возрастать.

Отсылая за подробностями к работам Редмонда, Урецкого (1958) и Боголюбова, Логунова, Ширкова (1959), приведем в качестве иллюстрации модельное выражение для вклада в амплитуду фермион-фермионного рассеяния в теории, основанной на четверном взаимодействии фермиевского типа

$$T(p^2, G) = G + G^2 p^2 K(p^2, G),$$

$$K(p^2, G) = \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dz}{(z - p^2 - ie) [(1 + Gz \ln(z/m^2))^2 + \pi^2 G^2 z^2]}. \quad (14)$$

Написанный здесь интеграл как бы соответствует сумме вкладов итераций однопетлевых диаграмм (см. ниже рис. 49). Этот интеграл хорошо сходится и может быть вычислен в явном виде:

$$K(p^2, G) = \frac{1}{1 + Gp^2 \ln \frac{p^2}{m^2}} - \frac{p^2}{Gp_0^2(p^2 - p_0^2) \left[ 1 + \ln \left( \frac{p_0^2}{m^2} \right) \right]}. \quad (15)$$

Здесь  $p_0^2$  — корень уравнения

$$1 + Gp_0^2 \ln \frac{p_0^2}{m^2} = 0. \quad (16)$$

Однако при попытке разложения подынтегрального выражения в ряд по степеням  $G$  почленное интегрирование приводит к возрастающим степенным расходимостям

$$K \sim \ln \Lambda + G\Lambda \ln^2 \Lambda + G^2 \Lambda^2 \ln^3 \Lambda + \dots \quad (17)$$

(здесь  $\Lambda$  — квадрат импульса обрезания или массы Паули—Вилларса), достаточно хорошо имитирующим структуру главных расходимостей ряда теории возмущений в теориях второго рода.

Это свойство отражает неаналитичность интеграла (14) по  $G$  при  $G = 0$ . Анализ выражений (15), (16) показывает, что особенность интеграла  $K$  имеет вид

$$K \sim \frac{1}{1 - \ln Gm^2}. \quad (18)$$

Функция

$$f(x) = \frac{1}{1 - \ln x} \quad (19)$$

обладает свойствами

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = \infty,$$

отраженными в структуре ряда (17).

Для сравнения заметим, что конструкции, аналогичные (14), могут быть построены и для теорий первого рода. Соответствующее модельное выражение



для фотонного пропагатора в спинорной электродинамике имеет вид

$$D(k^2, \alpha) = -\frac{d(k^2, \alpha)}{k^2}; \quad d(k^2, \alpha) = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} L(k^2, \alpha),$$

$$L(k^2, \alpha) = \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dz}{(z - k^2) \left[ \left( 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{z}{m^2} \right)^2 + \frac{\alpha^2}{9} \right]}. \quad (20)$$

Интеграл  $L$  подобно  $K$  сходится, но не допускает разложения по степеням  $\alpha$ . Расходимости коэффициентов степенного разложения имеют чисто логарифмическую структуру. Особенность в точке  $\alpha = 0$  имеет вид

$$L \sim \exp\left(-\frac{3\pi}{\alpha}\right).$$

Функция

$$\varphi(z) = \exp\left(-\frac{1}{z}\right),$$

в отличие от функции  $l$  (19), в точке  $z = 0$  равна нулю вместе со всеми своими производными.

**32.4. Фиксирование теории первого рода конечным числом констант.** Произведем более тщательный анализ возможностей построения теорий первого рода. Как было установлено ранее, возможные типы членов эффективного лагранжиана взаимодействия ограничиваются конечным числом членов четвертого, третьего и второго порядка по операторам поля. Поэтому в теориях первого рода выбор лагранжианов взаимодействия сводится к выбору *конечного числа* «констант связи». Число независимых среди них уменьшается в результате учета свойств эрмитовости, градиентной инвариантности, сохранения электрического и барионного зарядов и т. д. Чтобы полностью фиксировать теорию, необходимо, разумеется, задать еще массы частиц при отсутствии взаимодействия. Таким образом, любая теория первого рода полностью характеризуется конечным набором чисел: масс частиц и констант связи.

В нашем варианте теории основной величиной, кроме лагранжианов свободных частиц, определяющих свойства невзаимодействующих полей, является также лагранжиан взаимодействия  $\mathcal{L}(x)$ . Как мы убедились, выбирая  $\mathcal{L}(x)$  обычным образом, посредством переопределения  $T$ -произведения, удается получить интегрируемые выражения для членов  $S$ -матрицы:

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T'(\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)).$$

Хотя рецепт построения оператора  $T'$  является неоднозначным, но содержащийся в нем произвол соответствует конечному изменению констант связи в лагранжиане взаимодействия, т. е. дополнительному введению в исходный лагранжиан  $\mathcal{L}(x)$  конечных контрчленов того же типа, что и члены допустимого эффективного лагранжиана первого рода. Поэтому для полной однозначности расчетов

необходимо задавать  $\mathcal{L}(x)$  применительно к фиксированной рецептуре построения  $T'$ -произведения.

С другой стороны, как мы видели, совершенно эквивалентный результат получается, если вместо переопределения  $T$ -произведения использовать обычное  $T$ -произведение (с той или иной вспомогательной регуляризацией в промежуточных рассуждениях), но зато вместо  $\mathcal{L}(x)$  пользоваться некоторым эффективным лагранжианом взаимодействия  $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$ , содержащим, кроме исходного лагранжиана взаимодействия, расходящиеся контрчлены, которые и компенсируют расходимости в обычных  $T$ -произведениях. С точки зрения  $S$ -матрицы дело обстоит так, как если бы вместо исходного полного лагранжиана

$$\mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}(x)$$

мы имели бы лагранжиан

$$\mathcal{L}_{\text{полн}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{эфф}}.$$

Входящие в него «массы», «заряды», т. е. коэффициенты при соответствующих операторных комбинациях, расходятся; однако вычисляемые с их помощью наблюдаемые величины (в том числе массы, заряды и т. п.) имеют конечные значения.

Мы приходим этим путем к так называемой «*ренормализационной*» точке зрения, когда для получения конечных значений рассчитываемых наблюдаемых величин в лагранжиан вводятся бесконечные «затравочные» массы, заряды и т. п. При этом говорят, что устранение бесконечностей из теории достигается путем «перенормировки» основных констант. Факторы перенормировки содержат расходящиеся выражения.

Эта точка зрения, однако, *не проводится достаточно последовательно*, так как в  $\mathcal{L}_{\text{полн}}$  приходится дополнительно вводить такие контрчлены, появление которых не сводится к перенормировке основных величин (например, в случае спинорной электродинамики явно градиентно-неинвариантные члены фотонной массы \*) и  $(\partial A)^2$ . Кроме того, при рассмотрении обобщенной матрицы рассеяния  $S(g)$ , как мы убедились в § 28, структура контрчленов меняется и оказывается зависящей от поведения функции  $g(x)$ . Как будет показано ниже, именно матрицей  $S(g)$  определяется эффективный гамилтониан системы. Поэтому можно сказать, что при регуляризации уравнения Шредингера приходится вводить контрчлены, отличные от тех, которые требуются при регуляризации  $S$ -матрицы.

Ввиду всего этого мы не придерживаемся «*ренормализационной*» терминологии, рассматривая процедуру введения контрчленов как *формальный прием*, обеспечивающий конечность результатов расчетов.

\*) При градиентно-неинвариантном способе регуляризации, подобном использованному в § 27.2.

**ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ УСТРАНЕНИЯ  
РАСХОДИМОСТЕЙ**

**§ 33. Спинорная электродинамика**

**I. Общий вид контрчленов**

**33.1. Типы расходящихся диаграмм и теорема Фарри.** В качестве первого примера взаимодействующих квантованных волновых полей мы подробно рассмотрим практически важный случай спинорной электродинамики, т. е. систему взаимодействующих векторного электромагнитного и спинорного фермионного полей с лагранжианом взаимодействия

$$\mathcal{L}(x) = e : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) : = e : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) :. \quad (23.3)$$

Напомним, что в соответствии со структурой выражения (23.3) в каждой вершине диаграмм Фейнмана встречаются две фермионные линии и одна фотонная, а причинные функции взаимодействующих полей имеют вид

$$i \overline{A_m(x) A_n(y)} = -g^{mn} D_0^c(x-y) = g^{mn} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{dk e^{ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon}, \quad (24.3)$$

$$i \overline{\psi(x) \bar{\psi}(y)} = S^c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{m + \not{p}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)} dp. \quad (24.4)$$

Поэтому степень полинома  $P$  в числителе причинной функции для фотонной линии равна нулю, а для фермионной линии равна единице. Максимальный индекс вершины, определяемый по формуле

$$\omega_l^{\max} = \frac{1}{2} \sum_l (r_l + 2) - 4, \quad (32.7)$$

оказывается равным нулю, и лагранжиан (23.3) относится поэтому к ренормируемому типу.

Проведем теперь классификацию расходящихся диаграмм, основываясь на формуле (32.5). Замечаем прежде всего, что ввиду равенства нулю максимального индекса вершины  $\omega_l^{\max}$  индекс диаграммы  $\omega(G)$  не зависит от числа вершин и оказывается зависящим лишь от числа и характера внешних линий:

$$\omega(G) = 4 - \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{ex}}} (r_l + 2). \quad (1)$$

Как указывалось в § 32, максимальное число внешних линий на расходящихся диаграммах не может превышать четырех. Из (1) сле-

дует, что в спинорной электродинамике единственной диаграммой такого рода является диаграмма с четырьмя внешними фотонными линиями. Индекс этой диаграммы  $\omega(G)$  оказывается равным нулю.

Перейдем к диаграммам с тремя внешними линиями. В силу свойства непрерывности спинорных линий (см. § 23) число спинорных внешних линий всегда четно. Поэтому достаточно рассмотреть диаграммы с тремя внешними фотонными и диаграммы с двумя внешними фермионными и одной фотонной линиями. Суммарные вклады в матричные элементы от диаграмм с *нечетным числом внешних фотонных линий* при

отсутствии внешних спинорных линий будут *равны нулю* на основании изложенной ниже теоремы Фарри.

Для диаграммы с двумя внешними спинорными линиями и одной фотонной линией индекс  $\omega(G)$  равен нулю, для диаграммы с двумя внешними спинорными

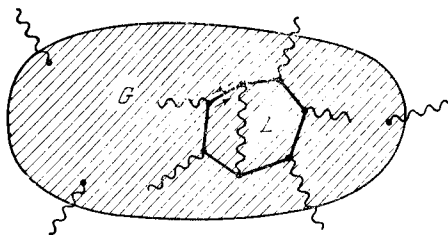


Рис. 34

ными линиями — единице, а для диаграммы с двумя внешними фотонными линиями — двум. Диаграммы с одной внешней фермионной линией исключены в силу непрерывности фермионных линий, а диаграммы с одной фотонной внешней линией запрещаются по теореме Фарри.

Перечисление расходящихся диаграмм на этом закончено. Перед тем как обратиться к исследованию соответствующих квазилокальных операторов, докажем упомянутую теорему Фарри.

Отметим, прежде всего, что проводимая общая классификация расходящихся диаграмм не учитывает свойств симметрии и инвариантности системы по отношению к различным преобразованиям. Выполнение указанных свойств ведет к значительным ограничениям возможных типов диаграмм и, как мы увидим ниже, устанавливает взаимную связь между структурой регуляризирующих квазилокальных операторов, соответствующих различным расходящимся диаграммам. Например, отмеченная выше непрерывность спинорных линий является, по существу, отражением свойства сохранения электрического заряда фермионов (соответствующее преобразование см. в § 8).

Важное ограничение на возможные типы диаграмм накладывает свойство *зарядовой инвариантности*, т. е. инвариантности относительно изменения знака электрического заряда в процессах, в начальных и конечных состояниях которых отсутствуют электрически заряженные фермионные частицы. Такие процессы как раз и описываются диаграммами, на которых все внешние линии — фотонные. Преобразование зарядового сопряжения приводит здесь,

очевидно, к изменению знака заряда виртуальных фермионов в промежуточных состояниях. Движение указанных виртуальных частиц на диаграммах Фейнмана описывается замкнутыми спинорными циклами.

*Теорема Фарри (1937)* заключается в утверждении, что матричные элементы, соответствующие диаграммам, содержащим хотя бы один нечетный замкнутый спинорный цикл, взаимно аннулируются. Рассмотрим подобную диаграмму  $G$ , на которой  $L$  — нечетный замкнутый цикл (рис. 34). Очевидно, что матричный элемент, соответствующий этой диаграмме, будет суммой двух членов, один из которых соответствует движению заряда вдоль  $L$  по часовой стрелке, а второй — движению в противоположном направлении. Как будет сейчас показано (доказательство принадлежит Фейнману (1949а)), указанные члены отличаются лишь знаками, а потому в сумме дают нуль.

Сомножитель матричного элемента, соответствующий обходу по часовой стрелке замкнутого цикла  $L$ , содержащего  $n$  вершин, запишем в виде \*)

$$\begin{aligned} \text{Sp} [\gamma S^c (1 \div 2) \gamma S^c (2 \div 3) \dots \gamma S^c (n \div 1)] = \\ = \sum_{\alpha, \dots, \nu} \{ \gamma_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma}^c (1 \div 2) \gamma_{\gamma\delta} S_{\delta\epsilon}^c (2 \div 3) \dots \gamma_{\nu\alpha} S_{\nu\alpha}^c (n \div 1) \}. \end{aligned} \quad (2)$$

Воспользуемся тем, что вся схема спинорного поля и, в частности, соотношение, определяющее матрицы Дирака:

$$\gamma^m \gamma^n + \gamma^n \gamma^m = 2g^{mn},$$

так же как и значения шпуров от произведений любого числа матриц, инвариантны относительно замены

$$\gamma \xrightarrow{\Gamma} -\gamma, \quad \text{т. е.} \quad \gamma_{\alpha\beta} \rightarrow -\gamma_{\beta\alpha}. \quad (3)$$

В результате преобразования (3) причинная функция

$$S_{\beta\gamma}^c (1 \div 2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{(m + \hat{p})_{\beta\gamma}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} e^{ip(2 \div 1)} dp$$

примет вид

$$\frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{(m - \hat{p})_{\beta\gamma}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} e^{ip(2 \div 1)} dp = S_{\gamma\beta}^c (2 \div 1).$$

Поэтому, производя над выражением (2) преобразование (3), получаем:

$$\begin{aligned} \text{Sp} [\gamma S^c (1 \div 2) \gamma S^c (2 \div 3) \dots \gamma S^c (n \div 1)] = \\ = (-1)^n \sum_{\alpha, \dots, \nu} \{ \gamma_{\beta\alpha} S_{\beta\gamma}^c (2 \div 1) \gamma_{\delta\gamma} S_{\delta\epsilon}^c (3 \div 2) \dots \gamma_{\nu\alpha} S_{\nu\alpha}^c (1 \div n) \} = \\ = (-1)^n \text{Sp} \{ \gamma S^c (1 \div n) \dots \gamma S^c (3 \div 2) \gamma S^c (2 \div 1) \}. \end{aligned}$$

\*) Здесь, например,  $S(n \div 1)$  представляет собой сокращенную запись для  $S(x_n - x_1)$  и т. п.

Отсюда видно, что благодаря инвариантности шпура по отношению к преобразованию (3) множитель (2) при четном  $n$  совпадает с выражением

$$\text{Sp} \{ \gamma S^c (1 \div n) \dots \gamma S^c (3 \div 2) \gamma S^c (2 \div 1) \}, \quad (4)$$

соответствующим обходу контура  $L$  в противоположном направлении, а при нечетном  $n$  отличается от него знаком. В этом последнем случае сумма матричных элементов, соответствующих различным направлениям обхода нечетного цикла, аннулируется и теорема Фарри доказана.

Заметим, что приведенное доказательство теоремы Фарри носит формальный характер, поскольку мы имеем здесь дело с сингулярными произведениями нерегуляризованных причинных функций. Нетрудно, однако, видеть, что доказательство остается в силе и при замене  $S^c$  на  $\text{reg } S^c$ , и сумма регуляризованных матричных элементов равна нулю. Поэтому, поставив в соответствие таким диаграммам квазилокальный оператор, равный нулю:

$$\Lambda_n(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (5)$$

мы получим выполнение теоремы Фарри для полных коэффициентных функций  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  после устранения расходястей.

Подчеркнем, что условие (5), обеспечивающее зарядовую инвариантность теории после устранения расходястей, вообще говоря, не является обязательным. Заменяв его на какое-либо другое, мы могли бы получить ту или иную зарядово-неинвариантную теорию.

Отметим также, что мы доказали теорему Фарри для спинорной электродинамики, используя алгебраические свойства матриц Дирака. Как уже отмечалось, физическая основа теоремы Фарри связана с симметрией относительно замены знака электрического заряда, точнее, с операцией зарядового сопряжения. Ясно поэтому, что теорема Фарри может быть обобщена на более широкий класс взаимодействий.

Вернемся к рассматриваемым диаграммам. Ввиду того, что диаграммы, имеющие лишь внешние фотонные линии в нечетном числе, обладают нечетным числом вершин, они обязательно содержат хотя бы один нечетный спинорный цикл, и поэтому матричные элементы диаграмм с нечетным числом внешних фотонных линий всегда аннулируются. Это обстоятельство мы использовали выше, запретив существование диаграмм с тремя и с одной внешними фотонными линиями.

Таким образом, с учетом теоремы Фарри, мы имеем следующие четыре типа расходящихся диаграмм в спинорной электродинамике, изображенные на рис. 35. На этих схемах заштрихованные окружности представляют внутренние части диаграмм, содержащие произвольное (в  $a$ ,  $v$  и  $g$  — четное, в  $b$  — нечетное) число вершин. Напомним, что независимость степени расходимости от числа вершин вы-

текает в спинорной электродинамике из равенства нулю максимального индекса вершины.

Исследуем теперь форму квазилокальных операторов, соответствующих каждой из этих расходящихся диаграмм. Диаграмме *a*

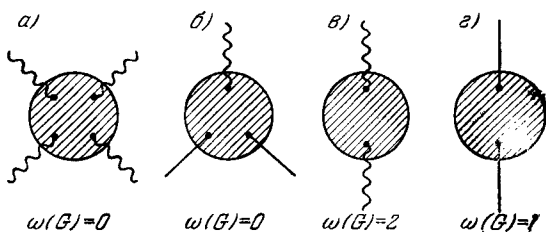


Рис. 35

при каждом четном  $n$ , начиная с  $n = 4$ , соответствует член в  $\Lambda_n(x_1, \dots, x_n)$

$$|A_n : A_k(x_i) A^k(x_j) A_l(x_m) A^l(x_p) : \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \dots \delta(x_1 - x_n). \quad (6)$$

Степень дифференциального полинома в этом выражении равна нулю в согласии со значением индекса диаграммы *a*. Диаграмме *б* при каждом нечетном  $n$ , начиная с  $n = 3$ , соответствует квазилокальный оператор

$$B_n : \bar{\psi}(x_i) \hat{A}(x_k) \psi(x_j) : \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \dots \delta(x_1 - x_n) \\ (i \neq k, i \neq j, k \neq j). \quad (7)$$

Диаграмме *в* при каждом четном  $n$ , начиная с  $n = 2$ , соответствует член в  $\Lambda_n(x_1, \dots, x_n)$

$$: A^m(x_i) \left\{ \left( C_n g^{mk} + D_n \frac{\partial}{\partial x_i^m} \frac{\partial}{\partial x_j^k} + E_n g^{mk} \frac{\partial}{\partial x_i^l} \frac{\partial}{\partial x_{jl}} \right) \times \right. \\ \left. \times \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \dots \delta(x_1 - x_n) \right\} A^k(x_j) : \quad (i \neq j). \quad (8)$$

Дифференциальный полином здесь — второй степени в согласии с индексом соответствующей диаграммы. В полиноме отсутствует член первой степени ввиду невозможности построить инвариантную комбинацию с его участием. Наконец диаграмме *г* при каждом четном  $n$ , начиная с  $n = 2$ , соответствует оператор

$$: \bar{\psi}(x_i) \left\{ \left[ F_n + G_n \frac{i}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right] \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \dots \right. \\ \left. \dots \delta(x_1 - x_n) \right\} \psi(x_j) :. \quad (9)$$

Из выписанных выражений видно, что квазилокальные операторы содержат довольно много произвольных констант.

**33.2. Градиентная инвариантность матрицы рассеяния.** Заметим, однако, что до сих пор не принималось во внимание требование градиентной инвариантности. Чтобы сформулировать это требование, рассмотрим сначала бесконечно малое градиентное преобразование потенциалов электромагнитного поля

$$A_m(x) \rightarrow A_m(x) + \frac{\partial f}{\partial x^m}, \quad (10)$$

где  $f$  — произвольная бесконечно малая функция. При этом преобразовании член  $n$ -го порядка матрицы рассеяния  $S$  (1)

$$\int S_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (11)$$

с учетом линейной зависимости  $S_n$  от потенциалов  $A(x_i)$  с различными аргументами, получит приращение

$$\sum_i \int \frac{\partial S_n}{\partial A_m(x_i)} \frac{\partial f}{\partial x_i^m} dx_1 \dots dx_n.$$

Интегрируя это выражение по частям, находим, что оно обращается в нуль, если тождественно

$$\operatorname{div}_i^{(4)} \frac{\partial S_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial A(x_i)} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i^m} \frac{\partial S_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial A_m(x_i)} = 0. \quad (12)$$

Нетрудно убедиться, что если выполняется это условие, выражение (11) не будет меняться и при конечном градиентном преобразовании. Это обусловлено тем, что коэффициенты при старших степенях  $\partial f / \partial x$  в приращении подынтегрального выражения можно записать через производные по  $A(x_j)$  от (12).

Исходя из указанных соображений, мы примем в качестве *условия градиентной инвариантности теории* условие (12). Ниже мы увидим (глава VII), что, кроме инвариантности  $S$  (1), это условие обеспечивает также выполнение дифференциального закона сохранения электрического тока.

Проанализируем теперь степень произвола в выборе коэффициентов  $A_n, B_n, \dots, F_n, G_n$  в выражениях (6)—(9), остающуюся после наложения условия градиентной инвариантности в форме (12). Рассмотрим, например, вершинную часть операторной функции  $S_n(x_1, \dots, x_n)$

$$\sum_{i \neq j \neq k} : \bar{\psi}(x_i) \Gamma^m(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n | x_k) \psi(x_j) A_m(x_k) :. \quad (13)$$

Для выполнения условия градиентной инвариантности эта величина должна удовлетворять соотношению

$$\operatorname{div}_k^{(4)} : \psi(x_i) \Gamma(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n | x_k) \psi(x_j) : = 0.$$

Сравнивая с (7), мы видим, что функция  $\Gamma^m$  определена с точностью до члена

$$b_n \gamma^m \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \dots \delta(x_1 - x_n). \quad (14)$$



При этом ясно, что введение  $b_n$  соответствует изменению коэффициента  $B_n$ . Однако нетрудно заметить, что если вершинная часть (13) удовлетворяет условию (12), то при добавлении к  $\Gamma^m$  члена (14) она это свойство теряет, так как

$$\text{div}_k^i : \bar{\psi}(x_i) \gamma \psi(x_j) : \delta(x_1 - x_2) \dots \delta(x_1 - x_n) \neq 0 \quad \text{при } k \neq i, j.$$

Поэтому, если квазилокальные операторы (7) подобраны так, что результат вычитательной процедуры градиентно-инвариантен, то этот выбор вполне однозначен, т. е. неопределенность устраняется требованием градиентной инвариантности.

Совершенно аналогично можно убедиться в однозначности коэффициентов  $A_n$  в выражениях (6) и  $C_n$  в выражениях (8). Ясно также, что выражения (9), не содержащие потенциалов электромагнитного поля, допускают произвол в выборе коэффициентов  $F_n$  и  $G_n$ .

Рассмотрим еще неоднозначность операторных выражений типа

$$\sum_{(i \neq j)} : A_m(x_i) \prod^{mk} (x_1, \dots, x_n) A_k(x_j) :$$

по отношению к членам с той же структурой, что и члены с коэффициентами  $D_n$  и  $E_n$  в выражении (8). Подставляя такой член

$$\sum_{(i \neq j)} : A^m(x_i) \left\{ \left( d_n \frac{\partial}{\partial x_i^n} \frac{\partial}{\partial x_j^k} + e_n g^{mk} \frac{\partial}{\partial x_i^l} \frac{\partial}{\partial x_j^l} \right) \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \dots \dots \delta(x_1 - x_n) \right\} A^k(x_j) :$$

в условие (12), с учетом свойств производной  $\delta$ -функции

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta(x - y) = - \frac{\partial}{\partial y} \delta(x - y),$$

находим соотношение между  $d_n$  и  $e_n$ :

$$d_n + e_n = 0, \tag{15}$$

оставляющее одну степень произвола в выборе этих коэффициентов.

Таким образом, для каждого  $n$  имеются три неоднозначные константы  $F_n$ ,  $G_n$  и, например,  $D_n$ , но в контрчленах лагранжиана неоднозначными оказываются всего лишь три числа (ср. (21.44)):

$$D = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} D_n, \quad F = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} F_n, \quad G = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} G_n.$$

В дальнейшем мы увидим, что эти три числа входят в результаты лишь в двух комбинациях и неоднозначность полностью устраняется выбором массы и заряда спинорной частицы.

Теперь необходимо показать, что подбором соответствующих контрчленов действительно можно получить градиентно-инвариантную теорию. Как известно, контрчлены лагранжиана служат для

описания того или иного вычитательного процесса, используемого в теории. Напомним, что принятая нами вычитательная процедура состоит в вычитании из расходящегося выражения достаточного числа членов его ряда Маклорена с центром разложения в точке  $p = 0$  и добавлении к результату произвольного конечного полинома определенной степени. На основании только что полученных результатов этот произвол сводится к двум константам в членах типа (9) и одной константе в членах типа (8). Покажем, что в результате такого способа устранения расходимостей получаемая теория градиентно-инвариантна.

В доказательстве используем следующий вариант регуляризации с помощью вспомогательных масс. Фотонные причинные функции (24.3) регуляризуем обычным образом (см. (27.4)), а спинорные причинные функции будем регуляризовать не по отдельности, а заменяя их произведения, соответствующие замкнутым циклам:

$$\text{Sp} [\gamma S^c(x_1 - x_2) \gamma S^c(x_2 - x_3) \dots \gamma S^c(x_{n-1} - x_n) \gamma S^c(x_n - x_1)], \quad (16)$$

выражениями

$$\sum_M c_M \text{Sp} [\gamma S_M^c(x_1 - x_2) \gamma S_M^c(x_2 - x_3) \dots \gamma S_M^c(x_n - x_1)], \quad (17)$$

где  $S_M^c(x)$  — причинная фермионная функция с массой  $M$ :

$$S_M^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{M + \hat{p}}{M^2 - p^2 - i\epsilon} e^{-ipx} dp. \quad (18)$$

Указанный способ регуляризации спинорных причинных функций представляет собой один из вариантов регуляризации Паули—Вилларса (1949).

Заметим в этой связи, что согласно общим свойствам регуляризуемых выражений, установленным в главе V, изменение способа вспомогательной регуляризации не влияет на общую структуру окончательных регуляризованных выражений, которые являются коэффициентными функциями операторов  $S'_n$ , определяющих не содержащую бесконечностей матрицу рассеяния.

Покажем теперь, что регуляризация по Паули—Вилларсу устраняет расходимости из матричных элементов, соответствующих замкнутым циклам. Рассмотрим для этого результат интеграции выражения (16), записанный в импульсном представлении:

$$\int dp \frac{\text{Sp} \{ \gamma(m + \hat{p}) \gamma(m + \hat{p} + \hat{k}_1) \dots \gamma(m + \hat{p} + \hat{k}_{n-1}) \}}{(m^2 - p^2 - i\epsilon)(m^2 - (p + k_1)^2 - i\epsilon) \dots (m^2 - (p + k_{n-1})^2 - i\epsilon)}. \quad (19)$$

Подынтегральное выражение при больших  $p$  ведет себя, как  $p^{-n}$ , и при  $n \leq 4$  интеграл расходится как

$$\int \frac{p^3 dp}{p^n} \sim \int \frac{dp}{p^{n-3}}.$$

Замечаем, что при больших  $p$  подынтегральное выражение в (19)

$$\frac{P_n(p) + m^2 P_{n-2}(p) + \dots + m^n}{P_{2n}(p) + m^2 P_{2n-2}(p) + \dots + m^{2n}} \simeq \left\{ \frac{P_n(p)}{P_{2n}(p)} + \frac{P_n(p)}{P_{2n}(p)} \left[ \frac{P_{n-2}(p)}{P_n(p)} - \frac{P_{2n-2}(p)}{P_{2n}(p)} \right] m^2 + \dots \right\}$$

(где  $P_i(p)$  — полином  $i$ -й степени по  $p$ ) может быть представлено в виде степенного ряда по  $m^2$ , причем степень роста по  $p$  при  $p \rightarrow \infty$  коэффициента при  $m^2$  в степени  $k$  равна  $p^{-n-2k}$ . Ясно поэтому, что если коэффициенты  $c_M$  в сумме (17) удовлетворяют  $k$  соотношениям типа

$$\sum_M c_M = 0, \quad \sum_M c_M M^2 = 0, \quad \dots, \quad \sum_M c_M M^{2k-2} = 0,$$

то подынтегральное выражение, соответствующее (17), при  $p \rightarrow \infty$  ведет себя, как  $p^{-2k-n}$ , и процедура Паули—Вилларса регуляризует рассматриваемые выражения вместе с их  $2k + n - 5$  первыми производными по  $x_i$ . Это свойство процедуры Паули—Вилларса можно было бы также непосредственно установить, переходя к « $\alpha$ -представлению» причинных функций.

Таким образом, мы будем вводить вспомогательные массы лишь в фотонные линии и замкнутые спинорные циклы. Незамкнутые спинорные циклы мы вообще не будем подвергать регуляризации. Легко видеть, что в фотонные функции достаточно ввести одну вспомогательную массу, а в замкнутые спинорные циклы — две. Действительно, максимальная степень расходимости диаграмм с замкнутыми спинорными циклами равна двум (диаграммы типа рис. 35, в) ( $n = 2$ ), а введение двух вспомогательных масс снижает степень на четыре. В результате этой процедуры интеграл при  $p \rightarrow \infty$  будет сходиться как

$$\int dp p^{-3}.$$

С другой стороны, максимальная степень расходимости диаграмм с внутренними фотонными линиями равна единице (диаграммы типа рис. 35, г). Введение в фотонную функцию одной вспомогательной массы снижает степень расходимости на два и интеграл становится сходящимся, как

$$\int dp p^{-2}.$$

Необходимости в регуляризации незамкнутых спинорных циклов, таким образом, не возникает. Мы видим отсюда, что при конечных значениях вспомогательных масс  $M_i$  все матричные элементы оказываются сходящимися.

Напомним, однако, что регуляризация методом вспомогательных масс является лишь техническим приемом, проводимым на промежуточной стадии рассуждений, и что фактическое устранение

расходимостей производится путем вычитательной процедуры. Поэтому к полученному регуляризованному выражению для матрицы рассеяния мы применим теперь обычную процедуру вычитания ряда Маклорена в импульсном представлении при одновременном добавлении трех произвольных конечных констант. Ввиду установленной ранее инвариантности результатов такого вычитания относительно способа введения вспомогательных масс нам остается лишь установить градиентную инвариантность регуляризации Паули—Вилларса и следующей за ней процедуры вычитания.

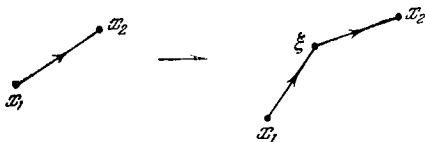


Рис. 36. Процесс вставки  $\xi$ -вершины.

Докажем градиентную инвариантность регуляризованной матрицы  $S(1)$  до применения к ней вычитательной процедуры. При этом мы воспользуемся тем обстоятельством, что совокупность диаграмм  $n$ -го порядка с  $k$  ( $k \geq 1$ ) внешними фотонными линиями может быть получена из диаграмм  $(n-1)$ -го порядка с  $k-1$  внешними фотонными линиями посредством вставки дополнительной  $n$ -й вершины  $\xi$  в любую внешнюю или внутреннюю спинорную линию. Процесс вставки (который для краткости будем именовать  $\xi$ -процессом) одновременно устанавливает графическое соответствие между выражениями

$$\sum_i \frac{\partial S_n(x_1, \dots, x_i)}{\partial A(\xi)} \Big|_{\xi=x_i} \quad \text{и} \quad S_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Рассмотрим сначала  $\xi$ -процесс для внутренней спинорной линии. Вставляя  $\xi$ -вершину в линию  $x_1, x_2$ , получим рис. 36. Вычисляя дивергенцию (12) по  $\xi$  от фактора

$$S^c(x_2 - \xi) \gamma S^c(\xi - x_1),$$

находим, пользуясь уравнениями для  $S^c$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\xi}^{\text{в}} [S^c(x_2 - \xi) \gamma S^c(\xi - x_1)] &\equiv \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial \xi_j} S^c(x_2 - \xi) \gamma^j S^c(\xi - x_1) = \frac{1}{i} (\delta(x_2 - \xi) - \delta(\xi - x_1)) S^c(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (20)$$

$\xi$ -процесс для внутренних линий сложного фермионного цикла может быть представлен схемой рис. 37. Находя дивергенцию от суммы членов, соответствующих правой части схемы, с помощью (20) без труда убеждаемся, что она пропорциональна члену, отвечающему диаграмме в левой части схемы, с множителем пропорциональности, равным

$$\frac{1}{i} (\delta(x_n - \xi) - \delta(x_1 - \xi)). \quad (21)$$

Отсюда следует, что указанная дивергенция обращается в нуль для замкнутых циклов (при  $x_1 = x_n$ ).

Применяя это рассуждение к более сложным диаграммам, состоящим из внутренних фотонных линий и произвольного числа

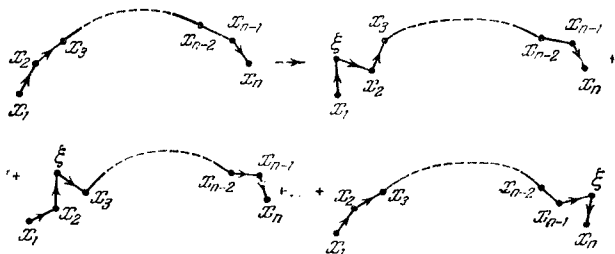


Рис. 37.  $\xi$ -процесс для внутренних линий фермионного цикла.

замкнутых и незамкнутых фермионных циклов, приходим к соотношению

$$\operatorname{div}_{\xi}^{(4)} K_{n+1}(x_1, \dots, x_n | \xi) = i \left( \sum_a \delta(\xi - x_a) - \sum_b \delta(\xi - x_b) \right) K_n(x_1, \dots, x_n), \quad (22)$$

где суммирование  $\sum_a$  и  $\sum_b$  распространяются на все вершины диаграммы, в которые входят ( $x_a$ ) и из которых выходят ( $x_b$ ) — внешние фермионные линии; здесь  $K_n(x_1, \dots, x_n)$  — коэффициентная функция  $n$ -го порядка, а  $K_{n+1}(x_1, \dots, x_n | \xi)$  — полученная из нее  $\xi$ -процессом коэффициентная функция  $(n+1)$ -го порядка.

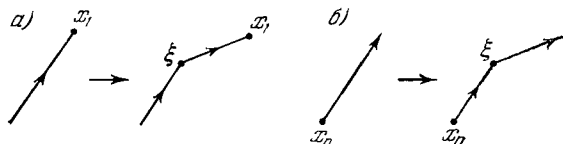


Рис. 38.  $\xi$ -процесс для внешних фермионных линий.

Для завершения доказательства рассмотрим еще  $\xi$ -процесс для внешних (входящей и выходящей) фермионных линий (рис. 38). Вычисляя соответствующие дивергенции, находим:

$$\operatorname{div}_{\xi}^{(4)} S^c(x_1 - \xi) \gamma \psi(\xi) = \frac{1}{i} \delta(x_1 - \xi) \psi(x_1), \quad (23)$$

$$\operatorname{div}_{\xi}^{(4)} \bar{\psi}(\xi) \gamma S^c(\xi - x_n) = -\frac{1}{i} \delta(\xi - x_n) \bar{\psi}(x_n). \quad (24)$$

Сравнивая эти выражения с (22), убеждаемся, что  $S_n(x_1, \dots, x_n)$  действительно удовлетворяют условию градиентной инвариантности (12). В самом деле, по только что доказанному, дивергенция факторов, описывающих замкнутые циклы, равна нулю. Дивергенция же оператора соответствующего незамкнутому циклу, складывается из дивергенции суммы  $\xi$ -вставок в коэффициентную функцию и вставка во внешние линии и также обращается в нуль, поскольку (24) компенсирует первый, а (23) — второй член в (21).

Этим формально доказана градиентная инвариантность матрицы  $S(1)$  до процесса регуляризации. Заметим, однако, что регуляризации по Паули—Вилларсу подвергаются лишь замкнутые фермионные циклы, причем в каждом из дополнительных членов в выражениях (17) для всех причинных функций  $S^c$  масса имеет одинаковое значение. Поэтому указанные дополнительные члены после  $\xi$ -процесса обладают также нулевой дивергенцией, и мы приходим к выводу, что и после применения процедуры Паули—Вилларса регуляризованная матрица  $S(1)$  удовлетворяет условию градиентной инвариантности. Отметим здесь, что указанное свойство сохранения градиентной инвариантности является важным преимуществом регуляризации по Паули—Вилларсу, которое мы и имели в виду, отступив от принятого нами ранее способа введения вспомогательных масс.

Подчеркнем, что формула (22) может рассматриваться как условие градиентной инвариантности для коэффициентных функций. В самом деле, мы только что убедились, что (22) является достаточным для выполнения условия градиентной инвариантности матрицы рассеяния (12). Формулу (22) полезно переписать в импульсном представлении, переход к которому мы произведем, явно учитывая трансляционную инвариантность

$$K_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{4(n-1)}} \int e^{-i\sum p_j x_j} \tilde{K}_n(p_1, \dots, p_n) \delta\left(\sum_i p_j\right) dp_1 \dots dp_n, \quad (25)$$

$$K_{n+1}(x_1, \dots, x_n | \xi) = \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int e^{-i\sum p_j x_j - iq\xi} \tilde{K}_{n+1}(p_1, \dots, p_n | q) \delta(\sum p_j + q) dp_1 \dots dp_n dq. \quad (26)$$

Получаем вместо (22)

$$q\tilde{K}_{n+1}(p_1, \dots, p_n | q) = \sum_a \tilde{K}_n(p_1, \dots, p_a + q, \dots, p_n) - \sum_b \tilde{K}_n(p_1, \dots, p_b + q, \dots, p_n). \quad (27)$$

Формула (27) представляет собой условие градиентной инвариантности коэффициентных функций в импульсном представлении. Среди аргументов  $p_1, \dots, p_n$  в (27), так же как и среди аргументов  $x_1, \dots, x_n$  в (22), существенными являются только те, которые соот-

ветствуют внешним линиям. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно подставить  $K$  в  $S_n$  и выполнить интегрирование по всем  $x_i$ , соответствующим внутренним вершинам диаграммы.

**33.3. Тождества Уорда.** Рассмотрим наиболее простой случай, когда в диаграмме, соответствующей  $K_{n+1}$ , имеется одна внешняя фотонная линия, одна входящая электронная линия и одна выходящая электронная линия (рис. 35, б). В этом случае  $K_{n+1}$  является вершинной функцией

$$\tilde{K}_{n+1}(p_1, \dots, p_n | q) \rightarrow \Gamma_{n+1}(p_b, p_a | q),$$

а  $K_n$  — собственной энергией электрона

$$\tilde{K}_n(p_1, \dots, p_n) \rightarrow \Sigma_n(p_b, p_a).$$

Вместо (27) получаем

$$q\Gamma_{n+1}(p_b, p_a | q) = \Sigma_n(p_b, q + p_a) - \Sigma_n(p_b + q, p_a). \quad (28)$$

Полученная формула устанавливает связь между вершинной функцией  $n + 1$ -го порядка и собственной энергией электрона в  $n$ -м порядке. Эта формула известна под названием *обобщенного тождества Уорда*. Дифференцируя (28) по  $q_m$  и полагая  $q = 0$ , получим обычное тождество Уорда

$$\Gamma_{n+1}^m(p, 0) = -\frac{\partial \Sigma_n(p)}{\partial p_m}, \quad (29)$$

где мы перешли к обозначениям (27.4), (28.3):

$$\Gamma_{n+1}(p, k) = \Gamma_{n+1}(p + k, -p | -k), \quad \Sigma_n(p) = \Sigma_n(p, -p).$$

Выполняя в (28) и (29) суммирование по  $n$ , можно получить тождества Уорда для соответствующих полных вершинных и собственно-энергетических функций. Мы отложим эту операцию до § 34.3. Для диаграмм 35, а и б, не содержащих внешних электронных линий в правой части (27), мы получаем нуль, вследствие чего коэффициентные функции соответствующих выражений

$$\begin{aligned} & : A_p(x_1) A_q(x_2) A_r(x_3) A_s(x_4) : \square^{pqrs}(x_1, \dots, x_4), \\ & : A_p(x_1) A_q(x_2) : \Pi^{pq}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

удовлетворяют условиям

$$(k_1)_p \tilde{\square}^{pqrs}(k_1, \dots, k_4) = 0, \quad (30)$$

$$k_p \Pi^{pq}(k, -k) = 0. \quad (31)$$

Мы рассмотрели применение условия градиентной инвариантности (27) к диаграммам с неотрицательным индексом  $\omega(G)$ , изображенным на рис. 35. Использование этого условия привело к ограничениям (30), (31) для коэффициентных функций диаграмм с двумя и четырьмя фотонными концами, а также к обобщенному тождеству Уорда, связывающему вершинную функцию и собственную энергию

электрона. Полученные соотношения налагают связи на произвольные константы, возникающие в процессе устранения ультрафиолетовых расходимостей.

Если применить условие градиентной инвариантности (27) к диаграммам с большим числом внешних концов (и отрицательными индексами  $\omega(G)$ ), то можно получить другие полезные соотношения. Так, например, подразумеваемая под  $K_{n+1}$  в левой части (27) коэффициентную функцию процесса комптоновского рассеяния, получаем связь типа обобщенного тождества Уорда (28) между комптоновским рассеянием и вершинной функцией и т. д. Аналог обычного тождества Уорда (29), получаемый затем дифференцированием по импульсу фотона, приводит к так называемым пороговым теоремам.

Перейдем теперь к доказательству градиентной инвариантности вычитательной процедуры. Ввиду выполнения условия (12) до вычитательного процесса следует убедиться в градиентной инвариантности вычитаемых квазилокальных операторов  $\Lambda_n$ . Если при этом окажется, что вычитаемые операторы, соответствующие диаграммам рис. 35, *a* и *b*, по отдельности градиентно-инвариантны, а операторы, соответствующие диаграммам рис. 35, *б* и *г*, удовлетворяют соотношению (27), то этим будет установлена градиентная инвариантность вычитательной процедуры. Покажем, что такое положение действительно имеет место.

Воспользовавшись тем, что условие градиентной инвариантности вычитательной процедуры во втором и третьем порядках по  $e$  уже установлено (см. § 28), доказательство проведем методом индукции. Предположим, что квазилокальные операторы  $\Lambda_n$  удовлетворяют указанным требованиям вплоть до некоторого нечетного

$$n - 1 = 2\nu - 1.$$

Рассмотрим член матрицы рассеяния  $S'_n = S_n - i\Lambda_n$  до вычитания из него квазилокального оператора  $\Lambda_n(x_1, \dots, x_n)$ . В силу доказанного для  $S$ -матрицы до процесса вычитания и предполагаемого для квазилокальных операторов низших порядков

$$\Lambda_\nu(x_1, \dots, x_\nu) \quad (\nu = 1, \dots, n-1)$$

свойства градиентной инвариантности выражение  $S'_n$  будет также градиентно-инвариантным. Специфические расходимости  $n$ -го порядка при четном  $n$  соответствуют диаграммам, приведенным на рис. 35, *a*, *в*, *г*.

Ввиду градиентной инвариантности  $S_n$  будут инвариантными также ее части, соответствующие этим диаграммам. При этом градиентная инвариантность диаграммы 35, *г* очевидна, а условия инвариантности для диаграмм 35, *a*, *в* имеют вид (30) и (31).

Дифференцируя (30) по  $(k_1)_p$  и полагая  $k_1 = 0$ , получаем

$$\hat{\square}^{pqrs}(0, k_2, k_3, k_4) = 0. \quad (32)$$



Эта формула имеет *исключительно важное* значение. Благодаря лишь логарифмической расходимости диаграммы рис. 35, а устранение расходимости сводится к вычитанию из  $\tilde{\square}$  его значения при нулевых импульсах внешних фотонов, т. е. величины

$$\tilde{\square}^{pqrs}(0, 0, 0, 0),$$

которая, в силу (22), равна нулю. Поэтому *величина  $\square$  оказывается сходящейся*, и из диаграммы рис. 35, а вообще не нужно устранять расходимости.

Таким образом, условие градиентной инвариантности привело нас к выводу о сходимости диаграмм, описывающих рассеяние света на свете, и следовательно, к отсутствию квазилокальных операторов вида (6). Это обстоятельство находится в соответствии с отсутствием градиентной инвариантности у выражений, которые подобно (6) содержат непосредственно электромагнитный потенциал  $A_m$  (а не его производные, сводящиеся к электрическому и магнитному полям).

Обратимся к двухфотонной диаграмме. Условие (31) вместе с соображениями релятивистской ковариантности приводит нас к заключению, что оператор поляризации

$$\Pi^{pq}(k, -k) \equiv \Pi^{pq}(k)$$

имеет поперечную форму

$$\Pi^{pq}(k) = (g^{pq}k^2 - k^p k^q) \pi(k^2). \quad (33)$$

Поскольку оператор  $\Pi^{pq}$  определен с точностью до произвольного конечного полинома второй степени по компонентам  $k$ , то ясно, что этот полином имеет вид

$$d_n (g^{pq}k^2 - k^p k^q), \quad (34)$$

что находится в соответствии с (15).

Градиентная инвариантность не накладывает каких-либо ограничений на квазилокальный оператор  $\Lambda_n$ , соответствующий диаграмме собственной энергии электрона (рис. 35, г). Этот оператор определен с точностью до полинома

$$f_n m - g_n \hat{p}. \quad (35)$$

Рассмотрение членов  $\Lambda_n$ , таким образом, закончено. В следующем нечетном порядке  $n + 1$  единственной диаграммой, из которой необходимо устранить расходимость, является вершинная диаграмма (см. рис. 35, б). При устранении расходимости из нее необходимо обеспечить выполнение условия (29). Записывая его для вычитаемых членов, т. е. для коэффициентных функций квазилокальных операторов

$$\Gamma_{n+1}^{\text{вычит}}(p, 0) = - \frac{\partial \Sigma_n^{\text{вычит}}(p)}{\partial p}, \quad (36)$$

примем во внимание, что вычитаемые части  $\Gamma$  и  $\Sigma$  с точностью до конечных полиномов совпадают с их рядами Маклорена:

$$\Gamma_{n+1}^{\text{вычит}}(p, k) = \Gamma_{n+1}(0, 0) + \gamma b_{n+1},$$

$$\Sigma_n^{\text{вычит}}(p) = \Sigma_n(0) + p \left[ \frac{\partial \Sigma_n(p)}{\partial p} \right]_{p=0} + f_n m - g_n \hat{p}.$$

Подставляя эти выражения в (36), получаем с учетом (29)

$$b_{n+1} = g_n. \quad (37)$$

Ввиду установленной однозначности константы  $b_{n+1}$  она и определяется этим соотношением. Процедура вычитания в  $(n+1)$ -м порядке при соблюдении (37) также оказывается градиентно-инвариантной. Доказательство на этом закончено.

Заметим еще, что совокупность соотношений (36) и (37) устанавливает в каждом порядке по  $n$  равенство констант  $G_n$  и  $B_{n+1}$  в операторах (7) и (9), т. е. представляет собой *тождество Уорда для констант перенормировки*.

**33.4. Контрчлены.** Выпишем теперь контрчлены лагранжиана, регуляризующие матрицу  $S(1)$ . Подставляя в (21.44) выражения (7)–(9), получаем после интегриации по частям и суммирования по  $v$  полный лагранжиан взаимодействия в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x; 1) = & e Z_1 : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) + \\ & + (Z_2 - 1) (i/2) : \{ \bar{\psi}(x) \gamma^k \partial_k \psi(x) - \partial_k \bar{\psi}(x) \gamma^k \psi(x) \} : + \\ & - (Z_m - 1) m \bar{\psi}(x) \psi(x) - (Z_3 - 1) (1/2) : \{ \partial_m A^n(x) \partial^m A_n(x) - (\partial^n A_n)^2 \} :, \end{aligned} \quad (38)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} Z_1 = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\alpha^v}{(2v)!} B_{2v+1}, \quad Z_2 = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\alpha^v}{(2v)!} G_{2v}, \\ Z_3 = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\alpha^v}{(2v)!} D_{2v}, \quad Z_m = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\alpha^v}{(2v)!} F_{2v}. \end{aligned} \quad (39)$$

Ввиду того, что  $B_{2v+1} = G_{2v}$ , тождество Уорда в этих обозначениях принимает вид

$$Z_1 = Z_2. \quad (40)$$

Константы  $Z_i$ , определенные соотношениями (39), зависят от вспомогательных масс  $M_i$ , причем при устремлении этих масс к бесконечности коэффициенты в разложениях (39) расходятся логарифмически. Однако матричные элементы матрицы

$$S(1) = T \left( \exp i \int \mathcal{L}(x; 1) dx \right)$$

в пределе  $M_i \rightarrow \infty$  стремятся к конечным значениям.

Ввиду градиентной инвариантности процедуры Паули—Вилларса лагранжиан (38) в отличие от лагранжиана (27.36), полученного с помощью градиентно-неинвариантной регуляризации, не содержит члена фотонной массы

$$\delta m_{\Phi}^2 : A_n(x) A^n(x) : \quad (41)$$

и потому явным образом градиентно-инвариантен.

Мы видим, таким образом, что форма и свойства контрчленов *существенно зависят от способа вспомогательной регуляризации*. Так, при градиентно-неинвариантной регуляризации фотонных и фермионных спариваний, которая была нами использована в главе V при выделении бесконечностей из  $S_2$  и  $S_3$ , мы пришли к необходимости ввести *градиентно-неинвариантные контрчлены* типа (41). Наоборот, при употреблении вспомогательной регуляризации Паули—Вилларса, обладающей свойством градиентной инвариантности, мы приходим к выражению (38), не содержащему градиентно-неинвариантных членов. Более того, может оказаться, что *контрчлены не будут обладать и свойством лоренцевой инвариантности*. Как было показано Степановым (1956), такое положение действительно имеет место при употреблении лоренц-неинвариантной вспомогательной регуляризации. При этом, разумеется, после снятия вспомогательной регуляризации матрица рассеяния оказывается и градиентно-инвариантной, и лоренц-инвариантной.

## § 34. Спинорная электродинамика.

### II. Ренормировка массы и заряда

34.1. Градиентное преобразование спаривания  $\overline{AA}$ . Рассмотрим матрицу рассеяния  $S$  (1) более подробно. В предыдущем параграфе была установлена ее градиентная инвариантность. Заметим предварительно, что свойство градиентной инвариантности позволяет прибавлять к спариванию электромагнитных потенциалов

$$\overline{A_n(k) A_n(k')},$$

используемому в процессе приведения членов матрицы  $S$  (1) к нормальному виду, выражение типа

$$k_m k_n f(k^2),$$

где  $f(k^2)$  — произвольная функция. Иными словами, матричные элементы рассеяния не меняют своих значений при замене

$$\overline{A_m(k) A_n(k')} \equiv \langle T(A_m(k) A_n(k')) \rangle_0 = -\frac{ig^{mn}}{k^2 + i\epsilon} \delta(k + k') \quad (1)$$

выражением

$$\frac{1}{i} \left( g^{mn} \frac{1}{k^2} + k_m k_n f(k^2) \right) \delta(k + k').$$

Для доказательства рассмотрим градиентное преобразование

$$A_n \rightarrow A'_n = A_n + k_n F(k^2) (k \cdot A(k)). \quad (2)$$

Определяем хронологическое спаривание новых операторов  $A'$ :

$$\overline{A'_n(k) A'_m(k')} = \frac{1}{i} \left\{ \frac{g^{mn}}{k^2} + \frac{k_m k_n}{k^2} (2F(k^2) + k^2 F(k^2) F(k^2)) \right\} \delta(k+k'). \quad (3)$$

Ввиду доказанной в предыдущем параграфе градиентной инвариантности  $S(1)$  ее матричные элементы не будут зависеть от функции

$$f(k^2) = \frac{2F(k^2)}{k^2} + F(k^2) F(k^2),$$

и требуемое доказано. Заметим еще, что, полагая

$$f(k^2) = \frac{d^l - 1}{k^2 k^2},$$

мы можем записать выражение (3) в виде

$$\begin{aligned} i \overline{A'_n(k) A'_m(k')} &= \\ &= \frac{1}{k^2} \left( g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2} \right) \delta(k+k') + \frac{d^l}{k^2} \frac{k_m k_n}{k^2} \delta(k+k') = D_{nm}(k) \delta(k+k'), \end{aligned} \quad (4)$$

$$D_{nm}(k) = \frac{1}{k^2} \left( g_{nm} - \frac{k_n k_m}{k^2} \right) + \frac{d^l}{k^2} \cdot \frac{k_n k_m}{k^2}. \quad (5)$$

Формула (5) является наиболее удобной. В ней произведено явное разделение спаривания  $\overline{AA}$  на *поперечную и продольную* (в четырехмерном смысле) части, а произвол в калибровке полностью отнесен к продольной части (коэффициент  $d_l$ ). При этом  $d_l$  может, вообще говоря, зависеть от  $k^2$ . Однако для дальнейшего нам будет вполне достаточно считать  $d_l$  постоянным числом.

Полагая  $d_l = 0$ , мы получим из (5) выражение

$$i \overline{A_n^{\text{tr}}(k) A_m^{\text{tr}}(k')} = \frac{1}{k^2} \left( g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2} \right) \delta(k'+k), \quad (6)$$

обладающее свойством поперечности

$$k^n \overline{A_n^{\text{tr}}(k) A_m^{\text{tr}}(k')} = 0. \quad (7)$$

При  $d_l = 1$  мы приходим к обычному диагональному спариванию (1).

Отметим, что диагональную калибровку (1) в литературе иногда называют *калибровкой Фейнмана*, а поперечную калибровку (6) — *калибровкой Ландау*.

**34.2. Неоднозначность процесса устранения бесконечностей.** В § 33 было показано, что в процедуре получения не содержащей бесконечностей градиентно-инвариантной матрицы  $S(1)$  имеется произвол, связанный с тремя конечными постоянными, которые могут быть представлены в виде коэффициентов при операторных выражениях того же типа, что и контрчлены лагранжиана (33.38).

Таким образом, после устранения бесконечностей, которое может быть осуществлено либо введением расходящихся контрчленов (33.38), либо соответствующим переопределением хронологических произведений, выражение для  $S$ -матрицы содержит определенный произвол, который удобнее всего записать в виде конечных добавок к исходному лагранжиану взаимодействия:

$$\delta\mathcal{L}(x) = e(z_1 - 1) : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) : + \\ + (z_2 - 1)(i/2) : \{\psi(x) \gamma^n \partial_n \bar{\psi}(x) - \partial_n \bar{\psi}(x) \gamma^n \psi(x)\} : - \\ - (z_m - 1) m \bar{\psi}(x) \psi(x) - (z_3 - 1)(1/2) : \{\partial_m A^n(x) \partial^m A_n(x) - (\partial A)^2\} :. \quad (8)$$

Здесь  $z_i$  — конечные постоянные, причем в силу тождества Уорда (33.40)

$$z_1 = z_2. \quad (9)$$

Мы рассмотрим сейчас влияние на матрицу рассеяния конечных контрчленов (8) и покажем, что оно сводится к некоторой конечной перенормировке массы  $m$  и заряда  $e$ . С этой целью, во-первых, запишем (8) в импульсном представлении

$$\delta\mathcal{L}(p) = (z_1 - 1) e \bar{\psi} \hat{A} \psi + (z_2 - 1) \psi(p) \hat{p} \psi(-p) + \\ - (z_m - 1) m \bar{\psi}(p) \psi(-p) - (z_3 - 1)(1/2) A_m(p) (g^{mn} p^2 - p^m p^n) A_n(-p) \quad (10)$$

(в этой записи использованы некоторые очевидные сокращения).

Лагранжиану  $\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$  в отличие от обычного «затравочного» лагранжиана взаимодействия  $\mathcal{L} = e \bar{\psi} \hat{A} \psi$  на диаграммах Фейнмана будут соответствовать вершины четырех типов. Помимо обычных вершин с измененной константой связи  $z_1 e$  появятся вершины с двумя фермионными линиями, соответствующие слагаемому в (10), содержащим  $z_2$  и  $z_m$ , а также вершины с двумя фотонными линиями, соответствующие последнему слагаемому в (10).

Рассмотрим структуру факторов распространения, соответствующих внутренним линиям новых, усложненных диаграмм. Начнем с фермионных линий. Для удобства несколько перегруппируем члены из (10), билинейные по операторам поля Дирака

$$(z_2 - 1) \bar{\psi}(\hat{p} - m) \psi - \delta m \bar{\psi} \psi, \quad \delta m = z_m - z_2.$$

В модифицированных правилах Фейнмана первому слагаемому будет соответствовать «двухфермионная» вершина с матричным фактором, равным  $(z_2 - 1)(\hat{p} - m)$ . Эту вершину назовем  $z_2$ -вершиной. Второму слагаемому соответствует  $z_m$ -вершина с числовым фактором  $\delta m = z_m - z_2$ .

Подсчитаем теперь «полный фактор распространения» фермиона между двумя модифицированными вершинами обычного типа ( $z_1$ -вершинами), учитывающий поправки от  $z_2$ - и  $z_m$ -вершин. Он будет представляться суммой слагаемых, соответствующих фермионным циклам, имеющим начало и конец в  $z_1$ -вершинах и содержащим произвольное число вершин типа  $z_2$  и  $z_m$ . Рассмотрим сначала циклы,

содержащие только  $z_2$ -вершины. Вычисляя последовательно соответствующие вклады с учетом наличия множителя  $i^n$  в  $n$ -м порядке  $S$ -матрицы и компенсации факториала  $n!$  в знаменателе при переходе к импульсному представлению, находим

$$\frac{i}{\hat{p}-m}; \frac{i}{\hat{p}-m} i (z_2 - 1) (\hat{p} - m) \frac{i}{\hat{p}-m} = (1 - z_2) \frac{i}{\hat{p}-m}.$$

Таким образом, введению каждой новой  $z_2$ -вершины соответствует появление множителя  $y_2 = 1 - z_2$ . Поэтому, суммируя вклады с различным числом  $z_2$ -вершин от нуля до бесконечности

$$\frac{i}{\hat{p}-m} (1 + y_2 + y_2^2 + y_2^3 + \dots) = \frac{i}{\hat{p}-m} \frac{1}{1-y_2} = \frac{1}{z_2} \frac{i}{\hat{p}-m},$$

убеждаемся, что введение в лагранжиан взаимодействия члена  $\sim (z_2 - 1)$  с точки зрения внутренних фермионных линий эквивалентно простой перенормировке причинной функции фермиона

$$S^c(p) \rightarrow z_2^{-1} S^c(p), \quad (11)$$

что представляется вполне естественным. В то же время аналогичный учет члена  $\sim (z_2 - 1)$  во внешних фермионных линиях ведет к появлению фактора  $z_2^{-1}$  при операторах  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , соответствующих свободным фермионным (внешним) линиям диаграмм.

Повторяя проведенное рассуждение для конечного контрчлена  $\sim (z_m - 1)$ , убеждаемся, что его учет во внутренних фермионных линиях приводит к перенормировке массы фермиона

$$m \rightarrow z_m z_2^{-1} m.$$

Таким образом, суммарный эффект билинейных спинорных контрчленов сводится к преобразованию

$$\frac{1}{\hat{p}-m} \rightarrow \frac{1}{z_2} \frac{1}{\hat{p}-\tilde{m}}, \quad \tilde{m} = z_m z_2^{-1} m.$$

Следует оговориться, что при проведении соответствующих рассуждений для внешних фермионных линий приходится иметь дело с выражениями вида

$$\frac{1}{\hat{p}-m} (\hat{p} - m) \psi(p),$$

содержащими очевидную неопределенность при переходе на массовую поверхность, когда  $(\hat{p} - m) \psi(p) = 0$ .

Как было установлено Медведевым и Поливановым (1967), более строгий анализ показывает, что «множители» перенормировок типа  $z_i$  для внешних линий вне массовой поверхности представляют собой, вообще говоря, интегро-дифференциальные операторы. Они становятся числами лишь при переходе к массовой поверхности. В этом случае получаем

$$\psi(p) \rightarrow z_2^{-1/2} \psi(p), \quad \bar{\psi}(p) \rightarrow z_2^{1/2} \bar{\psi}(p). \quad (12)$$

Обратимся к внутренним фотонным линиям. Сопоставим внутренним фотонным линиям пропатор вида (5) в произвольной калибровке

$$\overline{A_m(-k)} A_n(k) = \frac{1}{ik^2} (P_{mn}^{tr} + d^l P_{mn}^l), \quad (13)$$

где выражения

$$P_{mn}^{tr} = g_{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2}, \quad P_{mn}^l = \frac{k_m k_n}{k^2} \quad (14)$$

являются проекционными операторами и удовлетворяют свойствам

$$P^{tr} P^{tr} = P^{tr}, \quad P^l P^l = P^l, \quad P^{tr} P^l = 0.$$

Вершине  $z_3$  сопоставим фактор

$$\frac{1-z_3}{2} (g^{mn} k^2 - k^m k^n) = \frac{y_3}{2} (P^{tr})^{mn} k^2.$$

Исследуем структуру выражений, соответствующих включению  $z_3$ -вершин во внутренние фотонные линии. Получаем последовательно:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{ik^2} (P^{tr} + d_l P^l); \\ & \frac{1}{ik^2} (P^{tr} + d_l P^l) 2i \frac{y_3}{2} P^{tr} k^2 \frac{1}{ik^2} (P^{tr} + d_l P^l) = \frac{y_3}{ik^2} P^{tr}, \\ & \dots \dots \dots = \frac{y_3^3}{ik^2} P^{tr}, \end{aligned}$$

и т. д.

Множитель 2 в  $z_3$ -вершине обязан своим появлением двум возможным порядкам спаривания операторов  $A$ , входящих в член  $z_3$  в (10). Выполняя суммирование по всем возможным числам  $z_3$ -вершин

$$1 + y_3 + y_3^2 + \dots = \frac{1}{1-y_3} = z_3^{-1},$$

приходим к выражению:

$$\frac{1}{ik^2} \left( \frac{1}{z_3} P_{mn}^{tr} + d_l P_{mn}^l \right).$$

Таким образом, член с  $(z_3 - 1)$  приводит к перенормировке лишь поперечной части фотонной функции Грина, а продольный член не испытывает никаких изменений. При обычном рассмотрении матрицы рассеяния этим членом пренебрегают, используя отмеченный выше факт градиентной инвариантности матрицы рассеяния. Поэтому в теории  $S$ -матрицы факт «неполной ренормировки» фотонной функции оказывается несущественным.

Положение меняется при переходе к общей теории функций Грина взаимодействующих полей, которым соответствуют суммы диаграмм, составленных лишь из внутренних линий. В этом случае

основной аппарат формулируется без какого бы то ни было обращения к матричным элементам и условию Лоренца. Здесь уже продольным членом пренебрегать нельзя. Однако возникающее затруднение можно обойти, если в качестве нулевого приближения для функции Грина выбрать чисто поперечное выражение

$$D_{mn}^{c, \text{tr}}(p) = -\frac{1}{p^2} \left( g^{mn} - \frac{p_m p_n}{p^2} \right).$$

В этом случае учет члена  $(z_3 - 1)$  приводит к чисто мультипликативной перенормировке:

$$D_{mn}^{c, \text{tr}}(p) \rightarrow D_{mn}^{c, \text{tr}}(p) = z_3^{-1} D_{mn}^{c, \text{tr}}(p). \quad (15)$$

Рассматривая далее процесс вставки  $z_3$ -вершин во внешние фотонные линии диаграмм, убеждаемся, что с учетом ослабленного условия Лоренца, наложенного на допустимые состояния, квадратичные по  $A$  члены ведут к преобразованию

$$A_m(p) \rightarrow z_3^{-1/2} A_m(p). \quad (16)$$

При этом, строго говоря, мы получаем выражение вида

$$\left\{ \frac{1}{z_3} P^{1i} + d_i P^i \right\}_{mn} A^n(k),$$

содержащее неопределенности типа  $(kA)/k^2 \sim 0/0$ . Однако, если учесть, что поле  $A$  является поперечным и вне массовой поверхности (при  $k^2 \neq 0$ ), то, выбирая надлежащий порядок предельных переходов и учитывая замечание, сделанное перед (12), мы получим (16). Ясно также, что влияние члена  $(z_1 - 1)$  сводится к изменению величины заряда

$$e \rightarrow e' = z_1 e. \quad (17)$$

Подытоживая результаты рассуждения, на основании (11), (12), (15)—(17) приходим к выводу, что введение в лагранжиан взаимодействия конечных членов  $(z_1 - 1)$ ,  $(z_2 - 1)$  и  $(z_3 - 1)$  эквивалентно с точки зрения структуры  $S$ -матрицы следующему преобразованию Дайсона (1949 б) факторов распространения, операторов полей и заряда электрона:

$$S^c(p) \rightarrow z_3^{-1} S^c(p), \quad D^{c, \text{tr}}(p) \rightarrow z_3^{-1} D^{c, \text{tr}}(p), \quad e \rightarrow z_1 e, \quad (18)$$

$$\bar{\Psi}(p) \rightarrow z_2^{-1/2} \bar{\Psi}(p), \quad \Psi(p) \rightarrow z_2^{-1/2} \Psi(p), \quad A(p) \rightarrow z_3^{-1/2} A(p). \quad (19)$$

Формулы (18) без труда обобщаются на случай  $d_i \neq 0$ . Заметим для этого, что преобразование

$$D^c(k) = -\frac{1}{k^2} (P^{1i} + d_i P^i) \rightarrow -\frac{1}{k^2} \left\{ \frac{1}{z_3} P^{1i} + d_i P^i \right\}$$

может быть записано в виде

$$D^c(k | d_i) \rightarrow z_3^{-1} D^c(k | z_3 d_i),$$



так что вместо (18) получаем:

$$S^c \rightarrow z_2^{-1} S^c, \quad D^c \rightarrow z_3^{-1} D^c, \quad e \rightarrow z_1 e, \quad d_l \rightarrow z_3 d_l. \quad (20)$$

Отметим здесь, что в противоположность всем остальным квадратичным членам действие выражения  $\delta m \bar{\psi} \psi$  не может быть сведено к какой-либо перенормировке или к замене причинных функций и потенциалов и потому обязательно должно быть оставлено в лагранжиане взаимодействия. В самом деле, нетрудно убедиться, что включение вершин типа  $\delta m$  во внутренние фермионные линии приводит к новой массе фермиона:

$$\frac{1}{\hat{p} - m} \rightarrow \frac{1}{\hat{p} - m'}, \quad m' = m + \delta m. \quad (21)$$

Включение же  $\delta m$ -вершин во внешние фермионные линии приводит к выражению

$$\psi(p) \rightarrow \frac{\hat{p} - m}{\hat{p} - m'} \psi(p),$$

которое при вычислении матричного элемента дает нуль. Таким образом, с точки зрения  $S$ -матрицы, введение члена  $\delta m \bar{\psi} \psi$  не может быть последовательно описано изменением массы фермиона.

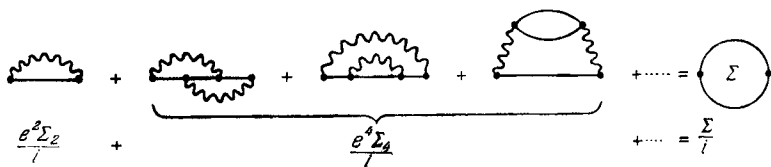


Рис. 39.

**34.3. Полные функции Грина  $G$ ,  $D$  и вершинная часть  $\Gamma$ .** Можно также показать, что совокупность преобразований (19), (20), эквивалентная членам (10) в отношении внутренних линий диаграмм Фейнмана, может быть полностью сведена к изменению массы  $m$  и заряда  $e$  электрона. Для этого рассмотрим подробнее структуру факторов, соответствующих внутренним элементам диаграмм, с учетом радиационных поправок.

Начнем с внутренней фермионной линии. Радиационные поправки к такой линии обусловлены диаграммами собственно-энергетического типа. Сумму всевозможных таких сильно связанных диаграмм всех порядков мы обозначим кругом с двумя фермионными входами (рис. 39), а соответствующий фактор — через  $\frac{1}{i} \Sigma$  \*).

\*) Введенный этим путем  $\Sigma$  является обобщением рассмотренного в § 27 оператора собственной энергии фермиона порядка  $\alpha$

Ясно, что  $\Sigma$  является функцией импульсов  $p_1$  и  $p_2$ , соответствующих входу и выходу диаграммы. Но так как  $p_1 + p_2 = 0$ , то

$$\Sigma = \Sigma(p, \alpha),$$

где в соответствии с (27.4)

$$-p_1 = p_2 = p.$$

Полный фактор распространения фермиона  $G$ , содержащий всевозможные радиационные вставки типа собственной энергии,

$$\frac{S^{\sigma}}{i} + \frac{S^{\sigma}}{i} \cdot \frac{\Sigma}{i} \cdot \frac{S^{\sigma}}{i} + \frac{S^{\sigma}}{i} \cdot \frac{\Sigma}{i} \cdot \frac{S^{\sigma}}{i} \cdot \frac{\Sigma}{i} \cdot \frac{S^{\sigma}}{i} + \dots = \frac{G}{i}$$

Рис. 40. Совокупность диаграмм, соответствующих полной электронной функции Грина.

соответствует совокупности диаграмм, изображенных на рис. 40, и может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i(m-\hat{p})} + \frac{1}{i(m-\hat{p})} \frac{\Sigma}{i} \frac{1}{i(m-\hat{p})} + \frac{1}{i(m-\hat{p})} \frac{\Sigma}{i} \frac{1}{i(m-\hat{p})} \frac{\Sigma}{i} \frac{1}{i(m-\hat{p})} + \dots = \\ & = \frac{i}{\hat{p}-m} \left( 1 + \Sigma \frac{1}{\hat{p}-m} + \Sigma \frac{1}{\hat{p}-m} \Sigma \frac{1}{\hat{p}-m} + \dots \right) = \frac{i}{\hat{p}-m} \left( 1 - \frac{\Sigma}{\hat{p}-m} \right)^{-1} = \\ & = \frac{i}{\hat{p}-m-\Sigma(p)}, \end{aligned}$$

т. е.

$$G(p) = \frac{1}{m + \Sigma(p) - \hat{p}}. \quad (22)$$

Аналогичным образом можно сконструировать полную функцию Грина фотона и обобщенную вершинную часть. Так, суммируя вклад от собственно-энергетических частей фотона  $\Pi(k)$ :

$$\Pi^{mn}(k) = \left( g^{mn} - \frac{k^m k^n}{k^2} \right) \pi(k^2, \alpha), \quad (23)$$

приходим к полному фактору распространения фотона

$$D_{mn}(k) = \frac{1}{\pi(k^2) - k^2} \left( g^{mn} - \frac{k^m k^n}{k^2} \right) - \frac{d_l}{k^2} \frac{k^m k^n}{k^2}. \quad (24)$$

Важной особенностью формулы (24) является тот факт, что в силу поперечного характера оператора  $\Pi$  радиационные поправки к продольному члену равны нулю. Напомним в этой связи, что поперечная форма  $\Pi$  обусловлена требованием градиентной инвариантности матрицы рассеяния (см. (27.29) и (33.31)). Можно показать также, что в свою очередь  $\pi(k, \alpha)$  является градиентно-инвариантной величиной и не зависит от  $d_l$ .

Обратимся, наконец, к вершинным диаграммам, т. е. к диаграммам с одним фермионным входом, одним фермионным выходом и

внешним фотонным входом. Введем сумму сильно связанных диаграмм такого типа  $\Gamma$ , которую можно представить в виде

$$\Gamma^n(p, q; k) = \gamma^n + \Lambda^n(p, q; k), \quad (25)$$

где  $\Lambda^n$  — сумма всевозможных сильно связанных радиационных поправок. Слабо связанные диаграммы этого типа мы всегда будем относить к радиационным поправкам во внешние линии, т. е. к поправкам электронных и фотонной функций Грина.

Согласно результатам § 33.3, сильно связанная вершинная часть  $\Lambda$  и оператор собственной энергии электрона  $\Sigma$  связаны между собой обобщенным тождеством Уорда, которое в обозначениях данного параграфа имеет вид

$$k\Lambda(p+k, p|k) = \Sigma(p) - \Sigma(p+k). \quad (26)$$

Эта формула получена из (33.28) путем суммирования по всем порядкам теории возмущений. Дифференцируя ее по компонентам 4-вектора  $k$  и полагая  $k=0$ , получаем обычное тождество Уорда

$$\Lambda_m(p, p|0) = -\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^m}. \quad (27)$$

Используя связи (22) и (25), можно перейти в (26) к полной вершинной части  $\Gamma$  и полной функции Грина  $G$ :

$$k\Gamma(p+k, p|k) = G^{-1}(p) - G^{-1}(p+k). \quad (28)$$

Эту связь называют иногда *соотношением Уорда—Такахашии*.

Заметим теперь, что хотя соотношения (22)—(28) могут формально иметь место и до процесса устранения бесконечностей, на главным образом будут интересовать связи этого типа между величинами, не содержащими расходимостей. Поэтому будем считать, что указанные соотношения записаны уже после устранения бесконечностей.

Тогда в конечных величинах  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$  имеется неоднозначность, связанная с возможностью введения в лагранжиан взаимодействия конечных членов (10). Поэтому установим вид трансформации величин  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$  при добавлении в лагранжиан выражения (10). Рассмотрим сначала преобразование  $\Sigma$  и  $\Pi$ . Выше было показано, что функции  $S^c$ ,  $D^{c, tr}$  и заряд  $e$  при введении упомянутых членов преобразуются согласно формулам (18). Заметим теперь, что, поскольку в каждой вершине встречаются две фермионные и одна фотонная линии, то можно считать, что (18) эквивалентно преобразованию, при котором  $S^c$  и  $D^{c, tr}$  не меняются, а заряд  $e$ , соответствующий каждой вершине, *внутренней* по отношению к  $\Sigma$  и  $\Pi$ , изменяется согласно

$$e \rightarrow e' = z_1 z_2^{-1} z_3^{-1/2} e \quad (29)$$

(рис. 41). Что касается содержащихся в  $\Sigma$  и  $\Pi$  двух внешних вершин, т. е. вершин, соединяющих  $\Sigma$  и  $\Pi$  с остальными частями диа-

грамм, то для полной перенормировки (29) в каждой из этих вершин будет недоставать по корню из соответствующего  $z$  (см. рис. 42). Поэтому закон преобразования  $\Sigma$  и  $\Pi$  можно представить в виде

$$\Sigma(p, e) \rightarrow z_2 \Sigma(p, e'), \tag{30}$$

$$\Pi(k, e) \rightarrow z_3 \Pi(k, e'), \tag{31}$$

причем  $e'$  дается (29).

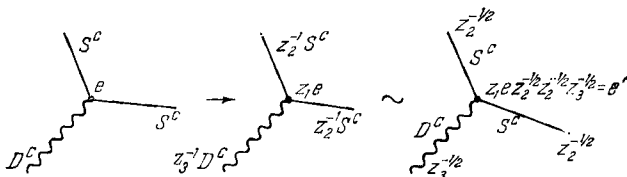


Рис. 41. Преобразование вершины, внутренней по отношению к  $\Sigma$  и  $\Pi$ .

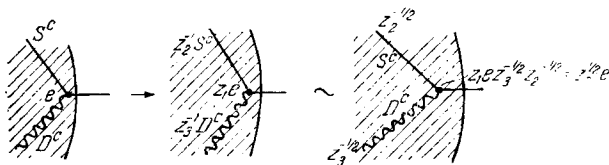


Рис. 42. Преобразование вершины, внешней по отношению к  $\Sigma$ .

Переходя к преобразованию полных функций Грина  $G$  и  $D$ , заметим, что в процессе суммирования, приводящем к (22) и (24), необходимо лишь произвести замену

$$\Sigma(p, e) \rightarrow z_2 \Sigma(p, e'), \quad \pi(k, e) \rightarrow z_3 \pi(k, e'), \tag{32}$$

$$\frac{1}{\hat{p}-m} \rightarrow \frac{1}{z_2} \frac{1}{(\hat{p}-m)}, \quad \frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{z_3} \frac{1}{k^2}, \tag{33}$$

что дает:

$$G(p, e) \rightarrow z_3^{-1} G(p, e'), \tag{34}$$

$$D^{ir}(k, e) \rightarrow z_3^{-1} D^{ir}(k, e'). \tag{35}$$

Наконец, учет члена  $\delta m = (z_m - z_2) m$  во всех внутренних фермионных линиях приводит к перенормировке массы:

$$m \rightarrow m' = z_m z_2^{-1} m \tag{36}$$

Аналогичным путем легко убедиться, что учет членов (10) в диаграммах вершинного типа дает:

$$e\Gamma^n(p, k, q | e, m) \rightarrow z_2 z_3^{1/2} e' \Gamma^n(p, k, q | e', m') = z_1 e \Gamma^n(p, q, k | e', m'). \tag{37}$$

Суммируя, получаем, что введение членов (10) эквивалентно следующему преобразованию факторов  $G$ ,  $D$ ,  $\Gamma$ ,  $e$  и  $m$ :

$$\left. \begin{aligned} G(p, e, m) &\rightarrow z_3^{-1}G(p, e', m'), & D(k, e) &\rightarrow z_3^{-1}D^{\text{tr}}(k, e', m'), \\ \Gamma(p, q, k|e, m) &\rightarrow z_1\Gamma(p, q, k|e', m'), \\ \text{причем} & & e' &= z_1z_3^{-1}z_3^{-1/2}e, & m' &= z_mz_3^{-1}m. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Заметим еще, что с помощью факторов  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$  вычисления любого процесса сколь угодно высокого порядка можно производить на основе так называемых «скелетных» диаграмм Фейнмана. Совокупность скелетных диаграмм получается из совокупности всех связанных диаграмм устранением из них диаграмм, которые включают элементы, изображенные на рис. 35. Поэтому в скелетных диаграммах не содержится собственно-энергетических и вершинных частей. Зато при подсчете соответствующих коэффициентных функций мы должны использовать не обычные факторы распространения  $S^c$  и  $D^c$ , а полные факторы распространения  $G$  и  $D$  и вершинам скелетной диаграммы сопоставлять не  $\gamma^n$ , а  $\Gamma^n$ . Подчеркнем, что в этой схеме вычисления, оперируя ренормированными функциями  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$ , уже не приходится прибегать к вычитательной процедуре, поскольку, как было ранее установлено, вычитание должно применяться лишь к элементам диаграмм типа рис. 35.

Отсюда также следует, что влияние членов (10) на коэффициентные функции  $S$ -матрицы, соответствующие более сложным неприводимым диаграммам, полностью описывается перенормировкой (38) величин  $G$ ,  $D^{\text{tr}}$ ,  $\Gamma$ , относящихся к элементам соответствующей скелетной диаграммы, и не приводит к каким-либо дополнительным эффектам.

Ясно также, что множители  $z_2^{-1}$ ,  $z_3^{-1}$  и  $z_1$ , соответствующие факторам  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$  скелетной диаграммы, приводят в конечном счете к перенормировке зарядов (29) во внутренних узлах скелетной диаграммы.

Таким образом, с точки зрения внутренних частей *сколь угодно сложных диаграмм любого порядка* введение членов  $(z_1 - 1)$ ,  $(z_2 - 1)$ ,  $(z_3 - 1)$  эквивалентно перенормировке величин  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$ :

$$\Gamma \rightarrow z_1\Gamma, \quad G \rightarrow z_2^{-1}G, \quad D^{\text{tr}} \rightarrow z_3^{-1}D^{\text{tr}}, \quad (39)$$

что в свою очередь эквивалентно перенормировке заряда (29), или, с учетом тождества Уорда,

$$e \rightarrow e' = z_3^{-1/2}e. \quad (40)$$

В совокупности с установленным выше характером влияния члена  $\delta m$  это означает, что действие четырех членов (10) сводится к перенормировке двух величин — массы  $m$  и заряда  $e$ , описываемой формулами (36) и (40).

Поэтому, если одновременно с введением членов (10) заменить массу  $m$  и заряд  $e$  в исходных уравнениях на величины

$$\left. \begin{aligned} m'' &= z_m^{-1} z_2 m, \\ e'' &= z_3^{1/2} e, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

то в результате преобразований (36) и (40) мы придем к первоначальным значениям массы  $m$  и заряда  $e$ . Наоборот, вместо введения членов (10) достаточно было перейти с самого начала к новым массе и заряду  $m'$  и  $e'$ .

Таким образом, одновременное осуществление перенормировок (38) и (41) дает в результате теорию, эквивалентную первоначальной. Эти преобразования, очевидно, обладают групповым свойством и приводят нас к *группе преобразований*, оставляющих инвариантными наблюдаемые значения  $m$  и  $e$ . Мы назовем эту группу *группой перенормировок*. Она будет рассмотрена более подробно в главе IX.

Уравнения (39) и (40) непосредственно обобщаются на случай  $d_l \neq 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &\rightarrow z_1 \Gamma, & G &\rightarrow z_3^{-1} G, & D &\rightarrow z_3^{-1} D, \\ m &\rightarrow z_m z_2^{-1} m, & e &\rightarrow z_3^{-1/2} e, & d_l &\rightarrow z_3 d_l. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Важно отметить, что для сохранения физического смысла перенормированных массы и заряда произвольные постоянные должны удовлетворять некоторым условиям. Так, из требований конечности и положительности массы, а также конечности и действительности заряда вытекают следующие ограничения

$$0 < z_m z_2^{-1} m < \infty, \quad 0 < z_3 < \infty \quad (43)$$

**34.4. Радиационные поправки во внешние линии и выбор конечных постоянных.** Конкретизируем теперь процедуру вычитания и окончательно устраним произвол в вычитаемых полиномах. При общем определении вычитательной операции (§ 29) мы условились вычитать из расходящихся выражений (в данном случае  $\Sigma$ ,  $\Pi$  и  $\Lambda$ ) первые члены их разложений в ряды Маклорена. Для практических целей, однако, оказывается более удобным взять центр разложения собственно-энергетической части фермиона в точке  $\hat{p} = m$ . Мы определим поэтому *регулярную* функцию  $\Sigma_{\text{рег}}$  следующим образом:

$$\Sigma_{\text{рег}}(p) = \Sigma(p) - \Sigma(p) \Big|_{\hat{p}=m} - \frac{d\Sigma(p)}{d\hat{p}} \Big|_{\hat{p}=m} (\hat{p} - m). \quad (44)$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что  $\Sigma$  зависит от  $p$  лишь через  $\hat{p}$  и  $p^2 = (\hat{p})^2$ , и ввели обозначение

$$\frac{df(\hat{p}, p^2)}{d\hat{p}} = \frac{\partial f(\hat{p}, p^2)}{\partial \hat{p}} + 2\hat{p} \frac{\partial f(\hat{p}, p^2)}{\partial p^2}.$$

При таком способе вычитания

$$\Sigma_{\text{рег}}(p) \Big|_{\hat{p}=m} = 0 \quad (45)$$

и

$$\left. \frac{d\Sigma_{\text{per}}(\rho)}{d\hat{\rho}} \right|_{\hat{\rho}=m} = 0, \quad (46)$$

откуда также следует, что

$$\frac{1}{\hat{\rho}-m} \Sigma_{\text{per}}(\rho) \Big|_{\hat{\rho}=m} = \Sigma_{\text{per}}(\rho) \frac{1}{\hat{\rho}-m} \Big|_{\hat{\rho}=m} = 0. \quad (47)$$

Из (45) вытекает, что  $m$  оказывается равной наблюдаемой массе электрона. Это можно непосредственно заключить из того, что полюс полной функции Грина

$$G(\rho) = \frac{1}{m - \hat{\rho} + \Sigma_{\text{per}}(\rho)}$$

совпадает с полюсом функции

$$S^c(\rho) = \frac{1}{m - \hat{\rho}}.$$

Условие (46) приводит к равенству нулю радиационных поправок для внешних фермионных линий.

В связи с выбором центра разложения функции  $\Sigma$  в точке  $\hat{\rho} = m$  ( $\rho^2 = m^2$ ) необходимо также заметить, что, как было установлено в главе V (§§ 29.2, 31.1), область аналитичности регуляризованных выражений в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  ограничена условием (31.1), которое в нашем случае имеет вид

$$\rho^0 < \min m_i.$$

Поскольку в рассматриваемом случае минимальная масса равна нулю (масса фотона), то в точке  $\rho^2 = m^2$  функция  $\Sigma(\rho)$  может не обладать свойством аналитичности, что в действительности и имеет место. В этой точке производная  $\partial\Sigma/\partial\hat{\rho}$  расходится. Эта расходимость, однако, является проявлением хорошо известной «инфракрасной катастрофы» (см. § 35), и для ее ликвидации оказывается достаточным ввести в промежуточных рассуждениях вспомогательную величину — фиктивную бесконечно малую массу фотона  $\lambda_0$ . Поэтому в дальнейшем мы всегда будем предполагать там, где в этом возникает необходимость, наличие у фотона малой массы  $\lambda_0$ .

Рассмотрим теперь вычитание для вершинной части  $\Gamma$ . В § 33 было показано, что требование градиентной инвариантности приводит к тому, что вычитание для  $\Gamma$  однозначно определяется вычитанием для  $\Sigma$ . Действительно, на основании (33.29) имеем для полной вершинной функции

$$\Gamma^n(\rho, 0) = -\frac{\partial\Sigma(\rho)}{\partial\rho_n} + \gamma^n. \quad (48)$$

Требуя, чтобы эта связь имела место и для регуляризованных функций, т. е. чтобы выполнялось соотношение

$$\Gamma_{\text{per}}^n(\rho, 0) = -\frac{\partial\Sigma_{\text{per}}(\rho)}{\partial\rho_n} + \gamma^n, \quad (49)$$

получаем, что вычитаемая константа  $\Lambda$  —

$$\Gamma_{\text{per}}^n(p, q; k) = \Gamma^n(p, q; k) - \gamma^n \Lambda$$

— в соответствии с (44) будет равна

$$\Lambda = - \left( \frac{d\Sigma(p)}{d\hat{p}} \right)_{\hat{p}=m}.$$

Нам осталось определить еще операцию вычитания для собственно-энергетической части фотона. Располагая, как обычно, центр разложения в точке  $k = 0$ , имеем:

$$\Pi_{\text{per}}^{mn}(k) = \Pi^{mn}(k) - \Pi^{mn}(0) - \frac{\partial \Pi^{mn}(k)}{\partial k^l} \Big|_{k=0} k^l - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi^{mn}(k)}{\partial k^l \partial k^s} \Big|_{k=0} k^l k^s. \quad (50)$$

Это выражение, удовлетворяющее условиям

$$\Pi_{\text{per}}^{mn}(0) = 0 \quad (51)$$

и

$$\frac{1}{k^2} \Pi_{\text{per}}^{mn}(k) \Big|_{k=0} = 0, \quad (52)$$

в силу свойства (51) не меняет полюса фотонной функции и в соответствии с (52) приводит к отсутствию радиационных поправок для внешних фотонных линий.

Более того, можно также показать, что выражение (50) обеспечивает совпадение постоянной  $e$  в лагранжиане взаимодействия с наблюдаемым значением заряда электрона. В самом деле, добавим к правой части уравнения (50) выражение

$$c(g^{mn}k^2 - k^m k^n), \quad (53)$$

нарушающее условие (52). Это выражение эквивалентно дополнительному введению в лагранжиан конечного члена типа  $z_3 - 1 = c$ , так что постоянная  $c$  вызывает умножение заряда на  $(1 + c)^{-1/2}$ . Мы получаем, таким образом, возможность определить произвольную конечную постоянную  $c$  из условия совпадения  $e$  с наблюдаемым значением заряда фермиона. Допуская, что это значение определяется в акте рассеяния фотона с нулевой энергией на фермионе, получим для описания этого процесса выражение

$$e \bar{\psi}(p) \Gamma_{\text{per}}^n(p, -p, 0) \psi(-p). \quad (54)$$

При вычислении (54) заметим, что согласно (49) и (44)

$$\Gamma_{\text{per}}^n(p, -p; 0) = \gamma^n - \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_n} + \gamma^n \left( \frac{d\Sigma}{d\hat{p}} \right)_{\hat{p}=m}. \quad (55)$$

Покажем теперь, что

$$\bar{\psi}(p) \left\{ \gamma^n \left( \frac{d\Sigma}{d\hat{p}} \right)_{\hat{p}=m} - \frac{\partial \Sigma}{\partial p_n} \right\} \psi(-p) = 0. \quad (56)$$

Для этого представим  $\Sigma$  в виде

$$\Sigma(\hat{p}) = -\hat{p}a(p^2) + mb(p^2).$$



Вычисляя входящую в (55) разность, находим

$$\gamma^n \left( \frac{d\Sigma}{d\hat{p}} \right)_{\hat{p}=m} - \frac{\partial \Sigma}{\partial p_n} = 2m (\gamma^n m - p^n) [b' (m^2) - a' (m^2)].$$

С учетом уравнений поля

$$\psi(p) (\hat{p} - m) = 0, \quad (\hat{p} - m) \psi(-p) = 0$$

и с помощью преобразования

$$2 (\gamma^n m - p^n) = (m - \hat{p}) \gamma^n + \gamma^n (m - \hat{p})$$

убеждаемся в справедливости (56).

С учетом перенормировки получаем окончательно

$$e\psi \Gamma_{\text{рег}}^n \psi = \frac{e}{\sqrt{1+c}} \bar{\psi} \gamma^n \psi,$$

откуда следует, что условие совпадения  $e$  с экспериментальным значением заряда имеет вид

$$c = 0.$$

Таким образом, формула (50) действительно обеспечивает как отсутствие радиационных поправок для внешних фотонных линий, так и равенство  $e$  наблюдаемому значению заряда электрона.

### § 35. Спинорная электродинамика.

#### III. Радиационные поправки второго порядка

Займемся теперь применением полученных результатов к вычислению радиационных поправок низшего порядка в эффектах спинорной электродинамики. С этой целью получим сперва выражения для поправок к факторам распространения фотона  $D$ , электрона  $G$  и для вершинной функции  $\Gamma$ .

**35.1. Поправки к фотонной функции.** Фотонная функция Грина  $D$  в нулевом приближении, отвечающем отсутствию взаимодействия, в случае произвольного  $d_i$  имеет вид

$$D_{mn}^c(k) = -\frac{1}{k^2} \left( g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2} \right) - \frac{d_i}{k^2} \frac{k_m k_n}{k^2}. \quad (1)$$

Для вычисления радиационной поправки к (1) следует прибавить член, соответствующий фотонной линии и содержащий вставку собственной энергии фотона второго порядка (рис. 43). Этот член имеет вид

$$i^2 D_{mk}^c \Pi^{kl}(k) D_{ln}^c(k) \quad (2)$$

Используя для поляризационного оператора  $\Pi$  градиентно-инвариантное выражение (27.30) и определяя постоянную в нем из



Рис. 43 Диаграммы, соответствующие основному члену в  $D_{mn}$  и однопетлевой поправке.

условия обращения в нуль частных производных второго порядка в точке  $k = 0$ , находим

$$\Pi^{ki}(k) = \frac{\alpha}{3\pi} (g^{kl}k^2 - k^k k^l) I(k^2), \quad (3)$$

где

$$I(k^2) = 6 \int_0^1 dx (1-x) x \ln \left[ \frac{m^2 - x(1-x)k^2}{m^2} \right]. \quad (4)$$

Подставляя (3) в (2) и складывая с (1), получаем:

$$D_{mn}(k) = -\frac{d(k^2)}{k^2} \left( g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2} \right) - \frac{d_l}{k^2} \frac{k_m k_n}{k^2}, \quad (5)$$

где

$$d(k^2, \alpha) = 1 + \frac{\alpha}{3\pi} I(k^2); \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (6)$$

Из (4)–(6) вытекает, как и следовало ожидать, что, с одной стороны, продольная функция  $d_l$  не влияет на радиационные поправки к поперечной функции  $d(k^2)$ , а с другой — радиационные поправки не дают вклада в  $d_l$ . Поэтому мы ограничимся рассмотрением чисто поперечной части фотонной функции Грина, записав ее в виде

$$D_{mn}^{tr}(k) = -\frac{1}{k^2} \left( g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2} \right) d(k^2). \quad (7)$$

Входящий в определение  $d(k^2)$  интеграл  $I$  заменой переменных  $z = 1 - 2x$  и интеграцией по частям может быть преобразован к виду

$$I(k^2) = \frac{3}{2} \int_0^1 dz (1-z^2) \ln \left[ 1 - \frac{1-z^2}{4} \frac{k^2}{m^2} \right] = -k^2 \int_0^1 \frac{z^2 dz (3-z^2)}{4m^2 - k^2(1-z^2)}. \quad (8)$$

При  $k^2 > 4m^2$  знаменатель интеграла (8) имеет нули, что приводит на первый взгляд к неинтегрируемой особенности. Вспоминаем, однако, что в подобных случаях необходимо считать массу электрона имеющей бесконечно малую мнимую добавку ( $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$ ), так что указанные особенности оказываются интегрируемыми.

Производя в (8) еще одну замену переменных:  $4m^2/(1-z^2) = M^2$ , с учетом указанной мнимой добавки получаем:

$$I(k^2) = -k^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dM^2 (1 + 2m^2/M^2) \sqrt{1 - 4m^2/M^2}}{M^2 (M^2 - k^2 - i\epsilon)}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (6) и (7), приходим к известному параметрическому представлению фотонной функции Грина:

$$D_{mn}^{tr}(k) = \left( g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2} \right) \left\{ \frac{1}{-k^2 - i\epsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\rho(M^2) dM^2}{M^2 - k^2 - i\epsilon} \right\} \quad (10)$$

— так называемому *спектральному представлению* Челлена (1952)— Лемана (1954) (подробнее см. ниже, § 53). Ядро спектрального представления, в нашем случае вычисленное во втором порядке теории возмущений, имеет вид

$$\rho(x) \rightarrow \rho_2(x) = \frac{\alpha}{3\pi} \frac{x+2m^2}{x^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{x}}.$$

Интеграл (9) может быть вычислен. Для этого его удобно представить в виде

$$I(k^2) = -\frac{5}{3} - \frac{4m^2}{k^2} + \left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right) J\left(\frac{k^2}{4m^2}\right).$$

Введенная здесь величина

$$J(x) = (1-x) \int_1^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-x+i\epsilon)}}$$

при  $x < 1$  не содержит особенностей под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} J(x) &= 2 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{1-x} \right)^{1/2} \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ &= 2 \left( \frac{x-1}{x} \right)^{1/2} \operatorname{Arth} \left( \frac{x}{x-1} \right)^{1/2} = \\ &= 2 \sqrt{\frac{x-1}{x}} \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{-x}) \quad \text{при } x \leq 0. \end{aligned}$$

При  $x > 1$  подынтегральное выражение содержит полюс, правила обхода которого определяются бесконечно малой добавкой  $-i\epsilon$ . Используя символическую формулу (П2А.7) из Приложения 2, получаем:

$$J(x) = -i\pi \sqrt{\frac{x-1}{x}} + 2 \sqrt{\frac{x-1}{x}} (\ln \sqrt{x} + \sqrt{x-1}) \quad \text{при } x > 1.$$

Объединяя две последние формулы, с учетом соотношения

$$ix \operatorname{Arth} \frac{1}{ix} = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

получим

$$\begin{aligned} I(k^2) &= -\left(\frac{5}{3} + \frac{4m^2}{k^2}\right) + 2\left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \operatorname{Arth} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}} - \\ &\quad - i\pi \theta(k^2 - 4m^2) \left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

При малых  $k^2$  имеем отсюда

$$I(k^2) = -\frac{1}{5} \frac{k^2}{m^2} - \frac{3}{140} \left(\frac{k^2}{m^2}\right)^2 + O\left[\left(\frac{k^2}{m^2}\right)^3\right] \quad (k^2 \ll m^2).$$

Сравнивая этот результат с (6), приходим к важному свойству радиационной поправки в функции  $d$  (которое является следствием

условия (34.52)) —

$$d(k^2, \alpha) = 1 - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{k^2}{m^2} \quad (k^2 \ll m^2)$$

— она обращается в нуль в пределе  $k^2 = 0$ .

В области больших  $k^2$  получаем соответственно

$$I(k^2) = \ln \frac{-k^2}{m^2} - \frac{5}{3} - 6 \frac{m^2}{k^2} + O\left(\frac{m^4}{k^4} \ln \frac{k^2}{m^2}\right),$$

что дает

$$d(k^2, \alpha) = 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{-k^2}{m^2} - \frac{5\alpha}{9\pi} + \dots \quad (12)$$

Отметим здесь, что в следующем, четвертом порядке теории возмущений вклад в фотонный оператор дают три диаграммы, изображенные на рис. 44. Диаграмма рис. 44, а представляет собой

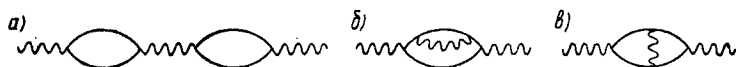


Рис. 44. Диаграммы 4-го порядка, дающие вклад в фотонный пропагатор.

итерацию однопетлевой диаграммы второго порядка рис. 43, а ее вклад в поперечную функцию  $d$  — в точности квадрат вклада упомянутой диаграммы. Остальные диаграммы четвертого порядка 44, б и 44, в являются двухпетлевыми и дают вклад, который обозначим  $(\alpha/\pi)^2 I_2(k^2)$ . Таким образом, в четвертом порядке

$$d(k^2, \alpha) = 1 + \frac{\alpha}{3\pi} I(k^2) + \left(\frac{\alpha}{3\pi}\right)^2 I^2(k^2) + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 I_2(k^2) + \dots \quad (13)$$

Явное вычисление последнего слагаемого представляет довольно сложную процедуру, приводящую к громоздкому выражению. Оно приведено в работе Барбьери и Ремидди (1973). Мы дадим лишь предельное значение функции  $I_2$  в области больших значений аргумента

$$I_2(k^2) = \frac{1}{4} \ln \frac{-k^2}{m^2} + \frac{5}{24} - \zeta(3) - \frac{m^2}{k^2} \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{-k^2}{m^2} \right) + \dots \\ \dots + O\left(\frac{m^4}{(k^2)^2} \ln^2 \frac{k^2}{m^2}\right), \quad (14)$$

где  $\zeta$  — дзета-функция Римана:  $\zeta(3) = 1,20206\dots$

**35.2. Поправки к электронной функции Грина.** Поправка второго порядка к функции Грина электрона имеет вид

$$\frac{i}{\hat{p}-m} \frac{\Sigma^{(2)}(p)}{i} \frac{i}{\hat{p}-m}. \quad (15)$$

Для определения  $\Sigma^{(2)}(p)$  будем исходить из причинной функции фотона при произвольном  $d_i$ . Неопределенные константы  $c_1$  и  $c_2$  (ср. (27.20)) фиксируются выбором процедуры вычитания. Если

использовать для этой цели условия (34.45, 46)

$$\Sigma^{(2)}(m) = 0, \quad \left. \frac{d\Sigma^{(2)}(\rho)}{d\hat{\rho}} \right|_{\hat{\rho}=m} = 0, \quad (16)$$

то мы получим вычитание на массовой поверхности. Однако при этом оказывается, что производная  $d\Sigma^{(2)}(\rho)/d\hat{\rho}$  содержит член вида  $\ln\left(1 - \frac{\rho^2}{m^2}\right)$ , который при  $\hat{\rho} \rightarrow m$  расходится. Эта расходимость есть проявление инфракрасной катастрофы и связана с незаконностью разложения по числу испущенных фотонов при рассмотрении процессов, в которых играют роль фотоны с малыми импульсами. Природа инфракрасных расходимостей была в свое время исследована Блохом и Нордсиком (1937). Отсылая читателя за более детальным анализом указанной трудности к разделу 4 настоящего параграфа (см. также гл. IX, § 50.3), мы ограничимся здесь лишь указанием, что полные вероятности переходов в каждом порядке по  $\alpha$  свободны от инфракрасных расходимостей, а фактическая регуляризация промежуточных выражений осуществляется обычно введением фиктивной малой массы фотонов  $\lambda_0$ .

Модифицируя соответствующие выкладки § 27 и оставляя константу  $c_1$  произвольной, получаем вместо (27.20)

$$\Sigma^{(2)}(\rho) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{\rho^2 - m^2}{\rho^2} \left( d_l \frac{\rho^2 + m^2}{\rho^2} \hat{\rho} - (d_l + 3)m \right) L(\rho^2) + d_l \hat{\rho} \frac{\rho^2 - m^2}{\rho^2} + c_1 (\hat{\rho} - m) \right\}, \quad (17)$$

где

$$L(\rho^2) = \int_0^1 \frac{dx (x-1) \rho^2}{(1-x)(m^2 - x\rho^2) + x\lambda_0^2} = \begin{cases} \ln \left[ \frac{m^2 - \rho^2}{m^2} \right] & \text{при } |\rho^2 - m^2| \gg \lambda_0^2, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_0^2}{m^2} \equiv L_0 & \text{при } \rho^2 = m^2. \end{cases} \quad (18)$$

Выражение (17) удобно записать через две скалярные функции:

$$\Sigma^{(2)}(\rho) = \frac{\alpha}{\pi} \{ -\hat{\rho} a(\rho^2) + m b(\rho^2) \}, \quad (19)$$

$$a(\rho^2) = \frac{d_l}{4} \left( \frac{m^2 - \rho^2}{\rho^2} \right) \left[ \frac{m^2 + \rho^2}{\rho^2} L(\rho^2) + 1 \right] - \frac{c_1}{4},$$

$$b(\rho^2) = \frac{3 + d_l}{4} \left( \frac{m^2 - \rho^2}{\rho^2} \right) L(\rho^2) - \frac{c_1}{4}. \quad (20)$$

Подставляя (19) в сумму

$$G(\rho, \alpha) = \frac{1}{m - \hat{\rho}} - \frac{1}{m - \hat{\rho}} \Sigma^{(2)}(\rho) \frac{1}{m - \hat{\rho}},$$

представленную в виде (34.22):  $[m - \hat{p} + \Sigma(p)]^{-1}$ , получаем

$$G^{-1}(p, \alpha) = mB(p^2, \alpha) - \hat{p}A(p^2, \alpha),$$

где

$$A(p^2, \alpha) = 1 + \frac{\alpha}{\pi} a(p^2), \quad B(p^2, \alpha) = 1 + \frac{\alpha}{\pi} b(p^2).$$

Полную функцию Грина электрона полезно также представить в виде

$$G(p, \alpha) = \frac{A^{-1}(p^2, \alpha)}{M(p^2, \alpha) - \hat{p}}, \quad (21)$$

где  $M(p^2, \alpha)$  — так называемый оператор *эффективной массы* электрона. В рассматриваемом приближении

$$\frac{M(p^2, \alpha)}{m} = 1 + \frac{\alpha}{\pi} [b(p^2) - a(p^2)].$$

Видно теперь, что следующее из первого из условий (16) соотношение  $c_2 = 0$  приводит к выражению для эффективной массы

$$\frac{M(p^2, \alpha)}{m} = 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{m^2 - p^2}{p^2} \right) \left\{ 3L(p^2) - d_l \left[ \frac{m^2}{p^2} L(p^2) + 1 \right] \right\}, \quad (22)$$

радиационная поправка в котором обращается в нуль при  $p^2 = m^2$ , т. е.

$$M(m^2, \alpha) = m.$$

Таким образом, именно первое из условий (16) обеспечивает равенство  $m$  физической массе электрона.

В окрестности массовой поверхности при  $\hat{p} \sim m$ ,  $p^2 \sim m^2$

$$G(p, \alpha) \simeq \frac{A^{-1}(m^2, \alpha)}{m + (p^2 - m^2) M'(m^2, \alpha) - \hat{p}} \simeq \frac{Z_2(m^2, \alpha)}{m - \hat{p}}, \quad (23)$$

где

$$Z_2 = \frac{A^{-1}(m^2, \alpha)}{1 - 2mM'(m^2, \alpha)} \simeq 1 + \frac{\alpha}{4\pi} [c_1 - 2(3 - d_l)L_0 + 2d_l].$$

Поэтому, если определить константу  $c_1$  соотношением

$$c_1 = 2(3 - d_l)L_0 - 2d_l, \quad (24)$$

что соответствует второму из условий (16), то мы получим  $Z_2 = 1$  и

$$G(p, \alpha) \simeq \frac{1}{m - \hat{p}} \quad (\hat{p} \sim m).$$

Заметим теперь, что если вместо второго из условий (16) использовать соотношение

$$\left. \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p}=m} = \left. \frac{\partial \Sigma(\hat{p}, m^2)}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p}=m} = 0,$$

то вместо (24) мы получим  $c_1 = 0$ , а также

$$Z_2 = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} [(d_l - 3)L_0 + d_l].$$

Таким образом, при первом способе перенормировки (24) выражение (21) для полной функции Грина явно содержит инфракрасную сингулярность в виде  $L_0 = \ln(\lambda_0/m)$ . В то же время оно оказывается весьма простым в окрестности массовой поверхности, где совпадает со свободным пропагатором. Во втором случае ( $c_1 = 0$ ) инфракрасная сингулярность  $L_0$  в явное выражение для  $G(p^2, \alpha)$  не входит. Однако при стремлении  $G$  к массовой поверхности она появляется в «нормировочном» множителе  $Z_2$ .

Приведем еще формулы в ультрафиолетовой области

$$A^{-1}(p^2, \alpha) \simeq 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \left[ d_l \ln \frac{(-p^2)}{m^2} + d_l + c_1 + O\left(\frac{m^2}{p^2}\right) \right],$$

$$\frac{M(p^2, \alpha)}{m} \simeq 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left[ 3 \ln \frac{(-p^2)}{m^2} - d_l + O\left(\frac{m^2}{p^2} \ln \frac{p^2}{m^2}\right) \right]. \quad (25)$$

**35.3. Поправки к вершинной части.** Обратимся теперь к вершинной части

$$\Gamma^n(p, q, k) = \gamma^n + \Lambda^n(p, q, k),$$

где, как обычно,  $p$  и  $q$  — выходящий и входящий электронные 4-импульсы соответственно, а  $k = p - q$  — входящий фотонный импульс (рис. 45). В § 28 было установлено, что наиболее общее выражение для  $\Lambda_3^n$  содержит член  $C\gamma^n$ , где коэффициент  $C$  является произвольной постоянной. Этот коэффициент согласно § 33 должен быть определен из условия градиентной инвариантности матрицы рассеяния, которое имеет вид

$$\Lambda_3^n(p, p, 0) = -\frac{\partial \Sigma_2(p)}{\partial p_n}. \quad (26)$$

Обобщая соответствующие выкладки § 28 на случай  $d_l \neq 0$ ,  $\lambda_0 \neq 0$ , получаем:

$$\Gamma_{\text{рег}}^n(p, q, k) =$$

$$= \gamma^n + \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \gamma^n \left[ (1 + d_l) \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)k^2} \right] - \frac{3}{2} - 2d_l - C \right] + \right.$$

$$+ \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2A^n + A^n(1-x-y)(d_l-1) - 4\hat{Q}Q^n - 2R^n - (d_l-1)D^n}{Z} +$$

$$\left. + (d_l-1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(1-x-y)B^n}{Z^2} - 2\gamma^n \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left[ \frac{(x+y)m^2}{Z} \right] \right\}, \quad (27)$$

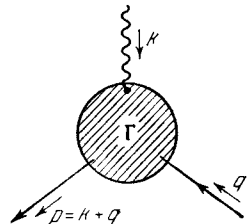


Рис. 45. Импульсные переменные в вершинной части.

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} A^n &= \gamma^n (\hat{q} + m) \hat{p} - (\hat{p} - m) (\hat{q} + m) \gamma^n - (\hat{p} - m) \gamma^n (\hat{q} - 2m), \\ B^n &= \hat{Q} (\hat{p} + m) \gamma^n (\hat{q} + m) \hat{Q}, \\ D^n &= \gamma^n (\hat{q} + m) \hat{Q} + \hat{Q} (\hat{p} + m) \gamma^n, \\ Q &= xq + yp, \\ R^n &= \hat{Q} \hat{k} \gamma^n - \gamma^n \hat{k} \hat{Q} - (\hat{p} - 2m) \gamma^n \hat{Q} - \hat{Q} \gamma^n (\hat{q} - 2m), \\ Z &= (1 - x - y) yp^2 + (1 - x - y) xq^2 + xyk^2 - m^2(x + y) - \\ &\quad - (1 - x - y) \lambda_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Определяя постоянную  $C$  из условия (26), находим для нее значение

$$C = 2 + (3 - d_i) \ln \frac{\lambda_0^2}{m^2}. \quad (24')$$

**35.4. Схема вычисления поправок к формуле Клейна—Нишины.** Формулы (5), (6), (21) и (27) для  $D$ ,  $G$  и  $\Gamma$ , содержащие поправки порядка  $e^2$  к основным выражениям, позволяющие непосредственно вычислять радиационные поправки порядка  $e^2$  к эффектам спинорной

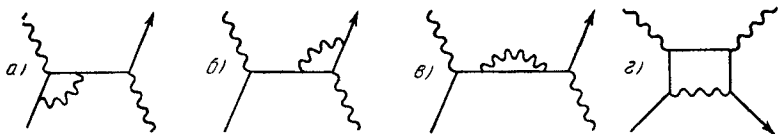


Рис. 46. Диаграммы, дающие вклад в радиационную поправку к комптон-эффекту.

электродинамики. В качестве иллюстрации рассмотрим *схематически* процедуру вычисления радиационных поправок к формуле Клейна—Нишины, полученной нами в § 26. Для этого, очевидно, следует учесть диаграммы четвертого порядка, обладающие двумя внешними фотонными и двумя внешними электронными линиями. Таких диаграмм имеется восемь. Четыре из них отличаются от основной диаграммы комптон-эффекта собственно-энергетическими вставками во внешние линии и в соответствии с условиями (34.47) и (34.52) не дают вкладов в матричные элементы. Еще две диаграммы содержат вершинные части второго порядка (рис. 46, *а*, *б*), одна диаграмма содержит собственно-энергетическую вставку во внутреннюю фермионную линию (рис. 46, *в*), и, наконец, последняя диаграмма соответствует испусканию дополнительного виртуального фотона (рис. 46, *з*).

Структура матричных элементов, соответствующих диаграммам рис. 46, *а*, *б*, аналогична структуре основных матричных элементов второго порядка (26.2), за исключением того, что вершинным частям, содержащимся в этих диаграммах, соответствует не матрица  $\gamma^n$ , а выражение  $\Gamma^n(p, q, k)$ , определяемое формулой (27).



Заметим в этой связи, что входящие в указанные матричные элементы вершинные факторы  $\Gamma^n(p, q, k)$  соответствуют одной из двух групп условий:

$$\begin{aligned} 1) \quad \hat{p} &= m, \quad k^2 = 0, \quad e_n k^n = 0, \\ 2) \quad \hat{q} &= m, \quad k^2 = 0, \quad e_n k^n = 0. \end{aligned}$$

В этих двух случаях интеграции, содержащиеся в (27), могут быть выполнены почти полностью и вершинный фактор  $\Gamma^n$  — выражен через алгебраические комбинации матриц Дирака и импульсов, логарифмы и функцию Спенса (дилогарифм)

$$\omega(z) = - \int_1^z \frac{\ln t}{t-1} dt. \quad (29)$$

Матричные элементы, соответствующие диаграмме рис. 46, а, составляются путем использования в качестве функции распространения фермиона в промежуточном состоянии выражения (21) (включающего радиационную поправку, которая обязана своим появлением присутствующей на этой диаграмме собственно-энергетической петле).

Таким образом, вычисление матричных элементов, соответствующих всем диаграммам комптоновского рассеяния четвертого порядка, за исключением диаграммы рис. 46, з, весьма просто выполняется с помощью полученных выше явных конечных выражений для  $G$  и  $\Gamma$ . Это вычисление уже не содержит интегрирования по 4-импульсам и фактически сводится к взятию шнура от квадрата суммы матричных элементов (см. (26.3), (26.4)).

Наконец, определение матричных элементов, соответствующих последней диаграмме (рис. 46, з), требует вычисления интегралов вида

$$\int \frac{dq}{q^2 + i\varepsilon} \gamma_n \frac{1}{\hat{p}_2 - \hat{q} - m} \gamma^m \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 - \hat{q} - m} \gamma^l \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{q} - m} \gamma^n, \quad (30)$$

где  $p_1 + k_1 = p_2 + k_2$ .

Интегралы (30) очевидным образом не содержат ультрафиолетовых расходимостей. Однако они логарифмически расходятся в области малых  $q$  при  $\hat{p}_1 = m$ ,  $\hat{p}_2 = m$ . Действительно, в этом случае имеет место особенность вида

$$\int \frac{dq}{q^2} \frac{1}{(p_2 q)(p_1 q)},$$

которая, как обычно, может быть устранена введением фотонной массы  $\lambda_0$ . Фактическое вычисление интегралов (30) может быть без труда проведено с помощью перехода к  $\alpha$ -представлению причинных функций (типа (27.6)). Из-за громоздкости соответствующих выкладок мы не будем вычислять интегралы типа (30) и шнуры, отослав читателя, интересующегося конечным выражением для

формулы Клейна — Нишины с учетом радиационных поправок порядка  $e^4$ , к статье Броуна и Фейнмана (1952).

Скажем еще лишь несколько слов по поводу компенсации инфракрасных расходимостей в окончательных выражениях. Как мы уже видели, члены пропорциональные  $\ln(\lambda_c^2/m^2)$ , содержатся в целом ряде матричных элементов комптоновского рассеяния четвертого порядка. Подобные члены будут присутствовать и в выражениях для вероятности перехода. Таким образом, выражение для вероятности комптоновского рассеяния, соответствующее приведенным выше восьми диаграммам четвертого порядка, оказывается *бессмысленным*.

Причина этого заключается в *физически неправильной постановке вопроса*. Как уже упоминалось, инфракрасная катастрофа является следствием неприменимости разложения по числу испущенных фотонов в области малых энергий последних. С точки зрения эксперимента указанное положение соответствует физической неразличимости процессов, отличающихся между собой некоторым числом испущенных фотонов малой энергии. В самом деле, факт излучения фотона весьма малой энергии может быть установлен лишь косвенным путем, на основе измерения энергий остальных частиц, участвующих в процессе, что можно провести лишь с некоторой конечной точностью. Поэтому всегда остается возможность испускания фотонов с суммарной энергией, меньшей некоторой величины  $E_{\max}$ , определяемой возможной ошибкой измерения.

В рассматриваемом случае первые радиационные поправки к формуле Клейна—Нишины порядка  $e^6$ , обязанные интерференции членов второго и четвертого порядка, оказываются физически неотличимыми от случая так называемого *двойного* комптоновского рассеяния, при котором, кроме обычного наблюдаемого комптоновского фотона, испускается также второй фотон с очень малой энергией и вероятность которого также имеет порядок  $e^6$ . Учет вероятности двойного комптон-эффекта, проинтегрированной по энергиям второго фотона от нуля до  $E_{\max}$ , приводит к выражению, свободному от инфракрасной катастрофы, но включающему в себя явным образом величину  $E_{\max}$ .

## § 36. Некоторые модели сильных взаимодействий

В этом параграфе мы рассмотрим три достаточно простые квантовопольевые модели, иногда используемые при качественном обсуждении взаимодействия мезонов и нуклонов.

**36.1. Модель  $\varphi^3$ .** Сначала возьмем простейшую модель вещественного скалярного поля с нелинейным кубичным членом в лагранжиане

$$\mathcal{L}_{\text{полн}} = \frac{1}{2} \varphi; \pi \varphi; \dot{\varphi}^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{g}{3!} \varphi^3. \quad (1)$$

Этот член можно рассматривать как взаимодействие поля  $\phi$  самого с собой. После перехода к представлению взаимодействия получаем лагранжиан взаимодействия в виде

$$\mathcal{L}(x) = \frac{g}{3!} : \phi^3(x) : \quad (2)$$

Отметим сразу же, что волновое поле, определяемое лагранжианом (1), по своей природе совершенно *фиктивно*, однако его изучение представляет определенный *методический интерес*, поскольку лагранжиан (2) наиболее прост с аналитической точки зрения, а описание этого поля в схеме теории взаимодействия основывается на единственной, самой простой причинной функции скалярного поля

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{m^2 - k^2 - i\epsilon} dk. \quad (3)$$

Проведем согласно общему рецепту § 32 классификацию диаграмм, соответствующих расходящимся матричным элементам.

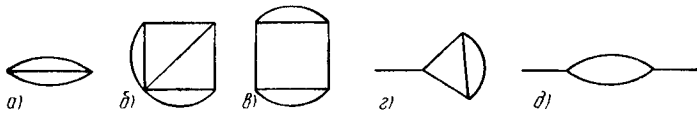


Рис. 47. Расходящиеся диаграммы модели  $\phi^3$ .

Из структуры лагранжиана «взаимодействия» (2) следует, что в каждой вершине диаграмм Фейнмана встречаются три одинаковые линии.

Ввиду того, что степень полинома в числителе причинной функции (3) равна нулю, из (32.1) находим, что максимальный индекс вершины отрицателен:

$$\omega_l^{\max} = -1,$$

и лагранжиан (2), таким образом, относится к ренормируемому типу. Формула (32.5) позволяет теперь провести полную классификацию расходящихся диаграмм.

Начнем рассмотрение с вакуумных диаграмм ( $l_{\text{ext}} = 0$ ), которые в данном случае всегда содержат четное число вершин. Из (32.5) следует, что индекс вакуумных диаграмм неотрицателен лишь при  $i = 2$  и  $i = 4$ . В первом случае положение соответствует диаграмме, изображенной на рис. 47, *a*, причем  $\omega(G) = 2$  и мы приходим к квадратичной расходимости, а во втором (рис. 47, *б* и *в*)  $\omega(G) = 0$  и расходимость носит логарифмический характер.

Для диаграмм, имеющих одну внешнюю линию ( $l_{\text{ext}} = 1$ ), число вершин в рассматриваемом случае (2) всегда нечетно. Диаграммы с одной вершиной при одной внешней линии не существует, а диаграмма с тремя вершинами ( $i = 3$ ), изображенная на рис. 47, *г*,

приводит к логарифмической расходимости ( $\omega(G) = 0$ ). Других расходимостей в случае  $l_{\text{ex}1} = 1$  не возникает.

Наконец, единственной расходящейся диаграммой при двух внешних линиях является диаграмма с двумя вершинами (рис. 47, д). Ее индекс равен нулю, и соответствующая расходимость — логарифмическая.

Диаграммами, изображенными на рис. 47, исчерпываются все сильно связанные расходящиеся диаграммы модели  $\varphi^3$ . Подчеркнем, что наличие *конечного числа расходящихся диаграмм* является важной отличительной чертой лагранжиана (2). Как мы увидим ниже, в других теориях, как правило, в любых сколь угодно больших порядках по константе связи, существуют расходящиеся диаграммы и их общее число оказывается бесконечным.

В рассматриваемом случае расходимости содержатся лишь во втором, третьем и четвертом порядках. Соответствующие регуляризующие квазилокальные операторы имеют поэтому вид

$$\Lambda_2(x_1, x_2) = (A_1 + A_2 \square_{x_1}) \delta(x_1 - x_2) + A_3 : \varphi^2(x_1) : \delta(x_1 - x_2),$$

$$\Lambda_3(x_1, x_2, x_3) = B \varphi(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3),$$

$$\Lambda_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = C \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_1 - x_4)$$

и после выполнения интеграций приводят к контрчленам

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{A_3}{2!} : \varphi^3(x) : + \frac{B}{3!} : \varphi(x) : + \frac{C}{4!} + A_{1,2}, \quad (4)$$

причем константы  $A_3$ ,  $B$  и  $C$  при  $M \rightarrow \infty$  расходятся логарифмически, а  $A_{1,2}$  — квадратично.

С перенормировочной точки зрения контрчлены  $C$  и  $A_{1,2}$  являются несущественными аддитивными константами, член  $A_3 : \varphi^3(x) :$  приводит к перенормировке массы, а член  $B\varphi$  осуществляет аддитивную перенормировку потенциала и дополнительную перенормировку массы:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} + \Delta \mathcal{L} &= \frac{1}{2} : \varphi :_n \varphi :_n : - \frac{m^2}{2} : \varphi^2 : + \lambda : \varphi^3(x) : + \\ &\quad + A : \varphi^2(x) : + B : \varphi(x) : + C + A_{1,2} = \\ &= \frac{1}{2} : \varphi' :_n \varphi' :_n : - \frac{m'^2}{2} : \varphi'^2(x) : + g : \varphi'^3(x) : + C', \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + \varphi_0, \quad (6)$$

а  $\varphi_0$ ,  $m'^2$ ,  $C'$  суть константы, алгебраически выражающиеся через  $m$ ,  $g$ ,  $A$ . Заметим также, что из-за отсутствия дифференциальных операторов в квазилокальных операторах, зависящих от функций поля  $\varphi(x)$ , контрчлены для уравнения Шредингера имеют вид

$$\Delta \mathcal{L}(x; g) = \frac{A_3}{2!} : \varphi^2(x) : g(x) + \frac{B}{3!} : \varphi(x) : g^3(x). \quad (7)$$

Таким образом, в модели (2) отсутствуют бесконечные перенормировки функции поля  $\varphi$  и константы связи  $g$ . Единственной физически существенной расходимостью является расходимость, соответствующая собственно-энергетической диаграмме второго порядка, изображенной на рис. 47, *д*. Эта расходимость приводит к перенормировке массы. Изучим ее более подробно.

Диаграмма рис. 47, *д* дает добавку к свободной функции Грина поля  $\varphi$ :

$$\overline{\varphi(x)\varphi(y)} \rightarrow \overline{\varphi(x)\varphi(y)} + \frac{i^2 g^2}{2} \int \overline{\varphi(x)\varphi(z)} dz [\overline{\varphi(z)\varphi(t)}]^2 dt \overline{\varphi(t)\varphi(y)}, \quad (8)$$

или, в импульсном представлении,

$$D(k^2) = \frac{1}{m^2 - k^2} \rightarrow D(k^2) - D(k^2) M_2(k^2) D(k^2). \quad (9)$$

Массовый оператор второго порядка может быть представлен в виде

$$M_2(k^2) = \frac{g^2}{32\pi^2} I(k^2), \quad (10)$$

где

$$I(k^2) = 16\pi^2 i \int e^{ik(x-t)} [i\overline{\varphi(z)\varphi(t)}]^2 dt. \quad (11)$$

Интеграл  $I$  в импульсном представлении имеет вид

$$I(k^2) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^4 p}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon) [m^2 - (p+k)^2 - i\varepsilon]} \quad (12)$$

и расходится логарифмически. Для его вычисления следует использовать  $R$ -операцию. Производя вычитание в точке  $k^2 = \lambda$ , получаем после стандартных вычислений с помощью формул (27.6), (27.7), (27.13)

$$R_\lambda I(k^2) = I_\lambda(k^2) = \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{k^2 x(1-x) - m^2 + i\varepsilon}{\lambda x(1-x) - m^2 + i\varepsilon} \right]. \quad (13)$$

Проводя в правой части (13) ряд преобразований, использованных выше в § 35.1 при вычислении поляризационного оператора, приведем  $I_\lambda$  к спектральной форме

$$I_\lambda(k^2) = (\lambda - k^2) \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} dM^2}{(M^2 - k^2 - i\varepsilon)(M^2 - \lambda)}. \quad (14)$$

Этот интеграл может быть вычислен до конца и представлен в виде

$$I_\lambda(k^2) = J\left(\frac{k^2}{4m^2}\right) - J\left(\frac{\lambda}{4m^2}\right), \quad (15)$$

где  $J(x)$  определено в (35.11).

Параметр  $\lambda$  следует выбирать таким образом, чтобы вычитаемая константа, переходящая в пределе снятия промежуточной регуляризации в массовый контрчлен

$$\Delta \mathcal{L} \sim \frac{g^2}{32\pi^2} J \left( \frac{\lambda}{4m^2} \right) \varphi^2(x),$$

была бы действительной, а контрчлен  $\Delta \mathcal{L}$  — эрмитовым. Как следует из (14) и (11), это будет обеспечено при

$$\lambda \leq 4m^2. \quad (16)$$

В частности, можно положить  $\lambda = m^2$ , т. е. вычесть диаграмму собственной энергии на «массовой поверхности». В этом случае

$$I_{m^2}(k^2) = (m^2 - k^2) \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} dM^2}{(M^2 - k^2 - ie)(M^2 - m^2)}, \quad (17)$$

или

$$I_{m^2}(k^2) = J \left( \frac{k^2}{4m^2} \right) - J \left( \frac{1}{4} \right) = J \left( \frac{k^2}{4m^2} \right) - \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \quad (18)$$

Вычитание радиационных поправок к одночастичной функции Грина на массовой поверхности удобно тем, что при этом полная функция Грина  $D(k^2, g^2)$  имеет ту же полюсную структуру при  $k^2 = m^2$ , что и свободная функция Грина

$$D(k^2, g^2) = \frac{d(k^2, g^2)}{m^2 - k^2 - ie}. \quad (19)$$

Введенная здесь безразмерная функция  $d$  конечна при  $k^2 = m^2$ . В нашем случае, согласно (9), (10) и (17),

$$d \rightarrow d_2(k^2, g^2) = 1 - \frac{g^2}{32\pi^2} \frac{I_{m^2}(k^2)}{m^2 - k^2}. \quad (20)$$

Это выражение конечно в окрестности массовой поверхности

$$d_2(m^2, g^2) = 1 - \frac{g^2}{96\pi^2 m^2} \left( \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 1 \right), \quad (21)$$

имеет корневую особенность на двухчастичном пороге

$$d_2(k^2 \sim 4m^2, g^2) \simeq 1 - \frac{g^2}{96\pi m^2} \left[ i \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right] \quad (22)$$

и логарифмическую в ультрафиолетовой асимптотике

$$d_2(k^2, g^2) \simeq 1 + \frac{g^2}{32\pi^2 k^2} \left[ \ln \frac{|k^2|}{m^2} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} - i\pi\theta(k^2) \right] \text{ при } |k^2| \gg m^2. \quad (23)$$

**36.2. Псевдоскалярное поле с нелинейным взаимодействием.** Рассмотрим вещественное скалярное поле, описываемое нели-

нейным лагранжианом

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} : \varphi :_n \varphi :_n : - \frac{m^2}{2} : \varphi^2 : + h : \varphi^4 :. \quad (24)$$

Ввиду того что  $\mathcal{L}$  зависит лишь от четных степеней  $\varphi$ , поле  $\varphi$  можно считать не скаляром, а псевдоскаляром. Если теперь заменить функцию  $\varphi$  на изотопический триплет  $\varphi_\sigma$  (или  $\pi(x)$  — см. § 3.5)

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} : (\pi :_n \pi :_n) : - \frac{m^2}{2} : (\pi \pi) : + h : (\pi \pi)^2 :, \quad (25)$$

то мы получим модель для описания реальных взаимодействующих пи-мезонов.



Рис. 48. Диаграммы собственной энергии в модели  $\varphi^4$ .

Лагранжианы (24) и (25) отличаются только изотопической структурой, и поэтому мы для простоты будем рассматривать первый из них, делая в случае необходимости оговорки, относящиеся к (25).

Рассмотрим структуру членов теории возмущений, основанной на лагранжиане взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = \mathcal{L}(x) = h : \varphi^4(x) :$$

и пропагаторе (3). В каждой вершине диаграмм Фейнмана встречаются четыре линии. Соответственно этому максимальный индекс вершины (32.1) оказывается равным нулю  $\omega_i^{\text{max}} = 0$ , вследствие чего рассматриваемая модель является ренормируемой, а степень расходимости диаграмм целиком определяется числом внешних линий и не зависит от порядка теории возмущений.

В силу псевдоскалярности поля  $\varphi$  (отсутствия нечетных степеней  $\varphi$  в  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$ ) диаграмм с нечетным числом внешних линий не существует. Наиболее сильно расходятся вакуумные диаграммы. Согласно формуле (32.5) их степень расходимости равна четырем. Диаграммы с двумя внешними концами (рис. 48) расходятся квадратично и, наконец, диаграммы с четырьмя внешними концами (диаграммы рассеяния — рис. 49) расходятся логарифмически.

Квазилокальные операторы, регуляризующие диаграммы, изображенные на рис. 48 и 49, после выполнения интегрирований приводят к контрчленам

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{Z_1 - 1}{2} : (\partial \varphi)^2 : - \frac{Z_2 - 1}{2} m^2 : \varphi^2 : + (Z_3 - 1) h : \varphi^4 :.$$

При этом величины  $Z_i$  выражаются рядами по степеням  $h$ , причем коэффициенты разложений  $Z_1$  и  $Z_3$  при снятии регуляризации расходятся логарифмически, а коэффициенты  $Z_2$  — квадратично.

Проведем теперь вычисления низших радиационных поправок. Первая радиационная поправка к одночастичному пропагатору имеет вид (13), причем массовый оператор второго порядка в данном



Рис. 49 Диаграммы рассеяния в модели  $\varphi^4$ .

случае соответствует диаграмме с тремя внутренними линиями (первая диаграмма в правой части рис. 48) и может быть представлена в виде

$$M_2(k^2) = \frac{96h^2}{(2\pi)^8 i} \int dp dq D(q) D(p) D(p+q+k) = \frac{3h^2}{4\pi^4 i} \tilde{J}(k^2), \quad (26)$$

$$\tilde{J}(k^2) = \frac{1}{\pi^4} \int \frac{d^4q d^4p}{(m^2 - q^2) [m^2 - (k+q+p)^2] (m^2 - p^2)}.$$

Интеграл  $\tilde{J}$  расходится квадратично. Результат двукратного вычитания в точке  $k^2 = \lambda$  имеет вид

$$R_\lambda \tilde{J}(k^2) = \tilde{J}_\lambda(k^2) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{d^2(x, y)} \left\{ (ak^2 - m^2) \ln \left[ \frac{ak^2 - m^2 + i\epsilon}{a\lambda - m^2} \right] + a(\lambda - k^2) \right\}. \quad (27)$$

Здесь

$$d(x, y) = xy + (x+y)(1-x-y),$$

$$a = a(x, y) = \frac{xy(1-x-y)}{d(x, y)}.$$

Обратимся к 4-концевой вершинной функции. Первая радиационная поправка соответствует первой диаграмме в правой части рис. 49. Как видно, она совпадает с диаграммой собственной энергии в модели  $\varphi^3$ , изображенной на рис. 47,  $\partial$ . Соответственно этому, первые поправки к 4-мезонной вершине могут быть представлены в виде

$$h \rightarrow \Gamma_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = h - \frac{3h^2}{4\pi^2} \{I(s) + I(t) + I(u)\},$$

где

$$s = (k_1 + k_2)^2, \quad t = (k_1 + k_3)^2, \quad u = (k_1 + k_4)^2,$$

а функции  $I(k^2)$  были введены и вычислены в § 36.1 (см. формулы (15)—(17)).

Здесь возникает вопрос о выборе точек вычитания в расходящихся вклады в вершинную функцию  $\Gamma_4$ . Такие точки вычитания, вообще говоря, могут выбираться независимо для различных диа-



грамм. Однако практически удобно выбрать их единым образом для всех вкладов в  $\Gamma_4$ . Для этого заметим, что в силу лоренцевой инвариантности скалярная функция  $\Gamma_4$  зависит от инвариантных квадратов 4-импульсов  $k_1, \dots, k_4$  и их попарных сумм:

$$k_1^2, k_2^2, k_3^2, k_4^2, (k_1 + k_2)^2 = s, (k_1 + k_3)^2 = t, (k_1 + k_4)^2 = u. \quad (28)$$

При этом в силу закона сохранения 4-импульса

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$$

имеет место соотношение

$$s + t + u = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2. \quad (29)$$

Поэтому из семи инвариантных аргументов (28) вершинной функции  $\Gamma_4$  только шесть являются линейно независимыми и точку вычитания в семимерном многообразии (28) следует выбирать с учетом связи (29).

Практически удобной с точки зрения физических приложений и использования в итеративных построениях  $R$ -операции является симметричный выбор точки вычитания

$$k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = k_4^2 = m^2, \quad s = u = t = \frac{4m^2}{3}. \quad (30)$$

Такому выбору соответствует

$$\Gamma_4 \left( k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = k_4^2 = m^2, \quad s = t = u = \frac{4}{3} m^2 \right) = h, \quad (31)$$

так как в точке (30) все радиационные поправки равны нулю. Если при этом точку вычитания пропагатора выбрать равной  $m^2$ , то формулу (31) можно рассматривать как определение перенормированной константы связи. При таком выборе точек вычитания

$$M_2(k^2) = \frac{3h^2}{4\pi^2} J_{m^2}(k^2), \quad (32)$$

$$\tilde{J}_{m^2}(k^2) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{d^2} \left\{ (ak^2 - m^2) \ln \left[ \frac{ak^2 - m^2}{(a-1)m^2} \right] + a(m^2 - k^2) \right\} \quad (33)$$

и

$$\Gamma_4(\dots) = h - \frac{3h^2}{4\pi^2} \{ \tilde{I}(s) + \tilde{I}(t) + \tilde{I}(u) \}, \quad (34)$$

$$\tilde{I}(k^2) = \left( \frac{4m^2}{3} - k^2 \right) \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} dM^2}{M^2 (M^2 - k^2 - i\epsilon) \left( M^2 - \frac{4}{3} m^2 \right)}. \quad (35)$$

Отметим здесь важное обстоятельство. Как уже упоминалось выше, в квантовополевых теориях с расходимостями параметры

исходного лагранжиана (массы, константы связи) не имеют непосредственного физического смысла. Соответствующие физические параметры следует специально определять после устранения расходимостей. Как отмечалось, такие определения, вообще говоря, неоднозначны. В рассматриваемом случае, например, можно было бы провести вычитание 4-вершины не в точке (30), а в несимметричной точке

$$k_1^2 = \dots = k_4^2 = m^2, \quad s = 4m^2, \quad t = u = 0, \quad (36)$$

соответствующей физическому порогу реакции (1) + (2)  $\rightarrow$  (3) + (4). Этот выбор может представляться более физичным, так как величина

$$\Gamma_4(m^2, m^2, m^2, m^2, 4m^2, 0, 0; \dots) = h_{\text{пор}} \quad (37)$$

непосредственно связана с пороговым значением амплитуды рассеяния (и выражается через  $s$ -волновую длину рассеяния).

Не составляет труда связать «новую» константу связи  $h_{\text{пор}}$  со «старой»  $h$ . Записывая для этого вершинную функцию (34) в точке (36), получим

$$h_{\text{пор}} = h - \frac{3h^2}{4\pi^2} \{ \tilde{I}(4m^2) + 2\tilde{I}(0) \} + O(h^3). \quad (38)$$

Возможны и другие определения.

С принципиальной точки зрения различные дефиниции перенормированной константы связи выступают совершенно равноправно. Произвол в определении параметров не приводит к каким-либо затруднениям, и в каждом конкретном случае им можно распоряжаться из соображений удобства.

В то же время физические величины не могут зависеть от указанного произвола, и вследствие этого матричные элементы, определенные в различных схемах вычитания, переходят друг в друга путем замены переменных вида  $h \rightarrow h' = Q(h)$ , где функция  $Q$  определена разложением, подобным (38). Таким образом, указанный произвол сводится к свободе выбора параметризации того же типа, что и рассмотренная ранее неопределенность (см. § 34.3). Как будет показано ниже (см. § 36.4 и главу IV), она лежит в основе метода ренормализационной группы.

**36.3. Псевдоскалярная модель мезон-нуклонного взаимодействия.** В качестве третьей модели сильных взаимодействий рассмотрим псевдоскалярную теорию мезон-нуклонного взаимодействия, т. е. теорию взаимодействия псевдоскалярного мезонного и спинорного нуклонного полей. Лагранжиан взаимодействия выберем в псевдоскалярном варианте, не содержащем производных (типа (8.4)). Такая модель мезон-нуклонного взаимодействия иногда называется *псевдоскалярной юкавской*.

При этом мы остановимся на так называемом *симметричном* варианте, приводящем к ядерным силам, симметричным относительно электрического заряда (например, к одинаковым матричным эле-

ментам рассеяния протон—протон и нейтрон—нейтрон). Математическое описание симметричной псевдоскалярной теории наиболее просто проводится в рамках *изотопического формализма* (см. Приложение 1)

Лагранжиан взаимодействия, инвариантный относительно «вращений в изотопическом пространстве», имеет вид

$$\mathcal{L}(x) = g : \bar{\Psi}(x) \gamma^5 \tau \Psi(x) \varphi(x) : . \quad (8.8)$$

Постоянная  $g$  играет роль константы связи и называется *мезонным зарядом*.

Заметим также, что для простоты иногда рассматривают так называемую «нейтральную модель» псевдоскалярной теории с лагранжианом

$$\mathcal{L}(x) = g : \bar{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x) \varphi(x) : . \quad (39)$$

Здесь  $\psi, \bar{\psi}$  — четырехкомпонентные спиноры,  $\varphi$  — действительная однокомпонентная функция. Нейтральная модель отличается от симметричной отсутствием изотопической алгебры и в то же время сохраняет основные элементы ее структуры. В дальнейшем для краткости мы будем иногда объединять (8.8) и (39) в виде

$$\mathcal{L}(x) = g : \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \varphi(x) : , \quad (40)$$

не конкретизируя структуру вершинной матрицы  $\Gamma$ .

Переходя к анализу расходящихся диаграмм, заметим, что элементарные спаривания имеют вид

$$\overline{\Psi_\alpha(x) \Psi_\beta(y)} = \frac{1}{i} \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp e^{-ip \cdot x - y} \frac{(M + \hat{p})_{\alpha\beta}}{M^2 - p^2 - i\varepsilon} , \quad (41)$$

$$\overline{\varphi_i(x) \varphi_j(y)} = \frac{\delta_{ij}}{i (2\pi)^4} \int \frac{dk e^{ik \cdot (x-y)}}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} , \quad (42)$$

где  $M_{\alpha\beta} = M \mathbf{1}_{\alpha\beta}$ ,  $\hat{p}_{\alpha\beta} = p_n \gamma_{\alpha\beta}^n$ ,  $\mathbf{1}_{\alpha\beta}$  — единичная матрица восьмого порядка, а  $\gamma_{\alpha\beta}^n$  — матрицы восьмого порядка, связанные с обычными матрицами Дирака четвертого порядка соотношениями

$$\gamma_{\alpha\beta}^n = \begin{pmatrix} \gamma^n & 0 \\ 0 & \gamma^n \end{pmatrix}_{\alpha\beta} .$$

Наконец,  $M$  и  $m$  — массы нуклона и  $\pi$ -мезона соответственно.

Для нас в данном случае является существенным то, что в соответствии с (41) и (42) степень полинома  $P$  в числителе причинной функции для мезонной линии равна нулю, а для нуклонной линии — единице. Поэтому максимальный индекс вершины

$$\omega_i^{\max} = \frac{1}{2} \sum_i (r_i + 2) - 4$$

оказывается равным нулю, а лагранжиан (40) относится к ренормируемому типу.

Переходя к классификации расходящихся диаграмм, заметим, что положение здесь в значительной мере напоминает спинорную электродинамику, отличаясь от нее лишь в следующих пунктах:

а) масса мезонов отлична от нуля, что приводит к отсутствию градиентной инвариантности;

б) мезонные функции образуют изотопический 3-вектор, а не обычный 4-вектор, как для электромагнитного поля;

в) структура вершинной матрицы  $\Gamma$  отличается от 4-вектора матриц Дирака  $\gamma^k$ .

Ввиду этого часть результатов рассмотрения, проведенного для спинорной электродинамики в §§ 33 и 34, может быть непосредственно перенесена на псевдоскалярную мезонную теорию.

Так, с учетом теоремы Фарри приходим к типам расходящихся диаграмм, изображенным на рис. 50. При этом ввиду отсутствия

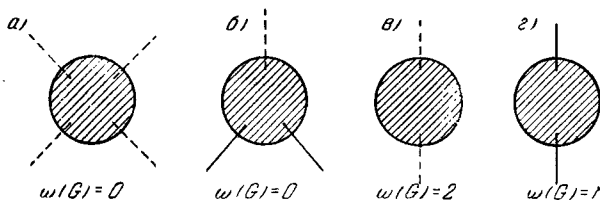


Рис. 50. Типы расходящихся диаграмм в модели (36.40).

соображений градиентной инвариантности диаграмма с четырьмя бозонными внешними линиями (рис. 50, а) в отличие от спинорной электродинамики приводит к расходимости, для компенсации которой приходится вводить особый «четыремезонный» контрчлен вида  $Z : \varphi^4$ ; а для вычитания расходимостей, связанных с диаграммой собственной энергии мезона (рис. 50, в), кроме контрчлена  $(Z_3 - 1) \varphi^2 \varphi$ , контрчлен собственной массы мезона  $\sim \varphi^2$ .

В итоге получаем полный лагранжиан взаимодействия в виде

$$gZ_1 \bar{\Psi} \Gamma \Psi \varphi + (Z_2 - 1) \bar{\Psi} \rho \Psi - (Z_M - 1) M \bar{\Psi} \Psi + \\ + (Z_3 - 1) \varphi^2 \varphi - (Z_m - 1) m^2 \varphi^2 + Z \varphi^4. \quad (43)$$

**36.4. Второй заряд, мультипликативные ренормировки и внешние линии.** Как следует из общей теории, введение контрчленов (43) в лагранжиан взаимодействия может быть заменено переопределением соответствующих хронологических произведений. Для нас, однако, является важным, что при этом в теории появляется произвол, связанный с возможностью введения в лагранжиан взаимодействия конечных членов с шестью произвольными коэффициентами

$$z_1, z_2, z_3, z_M, z_m \text{ и } z,$$

имеющих ту же операторную структуру, что и (43).

Анализируя влияние этих членов на функции Грина нуклона  $G$ , мезона  $\Delta$ , вершинную часть  $\Gamma_3$ , массы и заряд, получаем, что введение постоянных  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  эквивалентно перенормировке  $G$ ,  $\Delta$  и  $\Gamma_3$  и, следовательно, сводится к изменению заряда  $g$ , а  $z_M$  и  $z_m$  приводят к изменению масс мезонов и нуклонов во внутренних линиях диаграмм.

Однако член  $z\varphi^4$  не сводится к изменению  $g$ ,  $M$  и  $m$ . Это значит, что в теории, кроме масс  $M$ ,  $m$  и мезонного заряда  $g$ , фактически содержится ещё одна постоянная  $h$ , которая должна быть введена с самого начала в лагранжиан взаимодействия в виде коэффициента при  $\varphi^4$ .  $\mathcal{L}(x)$ , таким образом, принимает вид

$$\mathcal{L}(x) = g : \Psi(x) \Gamma \Psi(x) \varphi(x) : + h : \varphi^2 \varphi^2 : \quad (44)$$

(в случае симметричной теории  $\varphi^2 \rightarrow \varphi^2$ ).

Введенная постоянная выступает как фактически в роли *второго заряда*. Последняя, так же как и величина  $g$ , должна быть определена из экспериментальных данных. Введение члена с  $z$ , который удобно представить в виде

$$z = (z_4 - 1)h,$$

сводится теперь к перенормировке заряда  $h$ .

С помощью рассуждений, аналогичных проведенным в § 34.2, приходим к выводу, что добавление к лагранжиану взаимодействия конечных членов

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & (z_1 - 1)g\bar{\Psi}\Gamma\Psi_g + (z_2 - 1)\bar{\Psi}(\hat{p} - M)\Psi - \delta M\bar{\Psi}\Psi + \\ & + (z_3 - 1)\varphi(\hat{p}^2 - m^2)\varphi - \delta m^2\varphi^2 + (z_4 - 1)h\varphi^2 \cdot \varphi^2, \quad (45) \\ & \delta M = (z_M - z_2)M, \quad \delta m^2 = (z_m - z_3)m^2 \end{aligned}$$

эквивалентно следующей перенормировке пропагаторов и вершинных функций:

$$\begin{aligned} G(m, M, g, h) & \rightarrow z_1^{-1}G(m', M', g', h'), \\ \Delta(m, M, g, h) & \rightarrow z_3^{-1}\Delta(m', M', g', h'), \\ \Gamma_3(m, M, g, h) & \rightarrow z_1\Gamma_3(m', M', g', h'), \\ \Gamma_4(m, M, g, h) & \rightarrow z_4\Gamma_4(m', M', g', h'). \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь

$$m' = z_m z_3^{-1} m^2, \quad M' = z_M z_2^{-1} M, \quad g' = z_1 z_2^{-1} z_3^{-1/2} g, \quad h' = z_4 z_3^{-2} h, \quad (47)$$

а  $\Gamma_4$  — четырехмезонная вершина, представляемая суммой диаграмм с четырьмя внешними мезонными линиями (рис. 51). Продолжая рассуждения § 34.2, видим, что с точки зрения внутренних частей диаграмм введение шести конечных контрчленов (45) эквивалентно преобразованию двух масс и двух зарядов (т. е. констант связи):

$$m^2 \rightarrow z_m z_3^{-1} m^2, \quad M \rightarrow z_M z_2^{-1} M, \quad g \rightarrow z_1 z_2^{-1} z_3^{-1/2} g, \quad h \rightarrow z_4 z_3^{-2} h. \quad (48)$$

Обратимся теперь к внешним линиям. Проводя рассуждения по образцу § 34.5, получим, что для фиксирования произвола в перенормировках пропагаторов наиболее удобно выбрать центры разложения собственных энергий мезона и нуклона в точках  $k^2 = m^2$  и  $\hat{p} = M$  соответственно. Этими соотношениями определяются постоянные  $z_2, z_3, z_m$  и  $z_M$ .

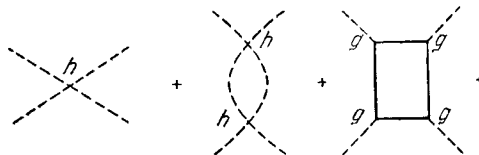


Рис. 51. Диаграммы, дающие вклад в четырех-мезонную вершину  $\square$ .

Что же касается постоянных  $z_1$  и  $z_4$ , то их можно однозначно определить, фиксируя экспериментальный способ измерения зарядов  $g$  и  $h$ , например положив, что экспериментальное значение заряда  $g$  определяется в акте рассеяния на нуклоне мезона нулевой скорости, а значение  $h$  — в акте взаимного рассеяния двух мезонов с нулевыми скоростями.

## § 37. Полные функции Грина и вершинные функции

**37.1. Высшие функции Грина.** В квантовополовой теории возмущений основную роль играют хронологические спаривания операторов свободных полей  $\Delta^c(x-y)$ , являющиеся функциями Грина соответствующих уравнений для свободных полей:

$$(\square - m^2) \Delta^c(x-y) = -\delta(x-y).$$

С физической точки зрения  $\Delta^c$  представляют собой факторы пространства частиц, движущихся между точками  $x$  и  $y$ , не взаимодействуя с другими полями. Влияние таких взаимодействий приводит к радиационным поправкам в элементарные пропагаторы  $\Delta^c$ , учет которых приводит к так называемым полным функциям Грина  $\Delta(x; g)$ , включающим эффекты взаимодействия и зависящим от констант связи  $g_i$ .

Полные функции Грина  $\Delta$  были введены выше в § 34.3 полуинтуитивным образом, путем суммирования членов, соответствующих диаграммам Фейнмана. Такие полные функции Грина являются факторами распространения частиц, движущихся между точками  $x$  и  $y$ , с учетом взаимодействия этих частиц. Поэтому они могут рассматриваться как обобщения функций Грина свободных полей на случай взаимодействия.

Мы дадим теперь точные определения полных одночастичных функций Грина  $\Delta(x; g)$ , а также высших функций Грина  $\Gamma(x_1, \dots, x_n; g)$ , представляющих собой обобщение вершинных факторов (вертексов), подобных 3-вершинной функции  $\Gamma_\mu$  квантовой электродинамики, и представленных суммами связанных диаграмм с заданным числом ( $= k$ ) внешних линий.

Высшие и одночастичные функции Грина будем строить на основе вакуумных ожиданий

$$\langle T \{u_1(x_1) u_2(x_2) \dots u_k(x_k) S\} \rangle_0, \quad (1)$$

содержащих под знаком хронологического произведения матрицу рассеяния

$$S = T \left( \exp i \int \mathcal{L}(x) dx \right). \quad (2)$$

Выражения вида (1) при  $k = 2$  являются естественными обобщениями одночастичных функций Грина свободных полей на случай наличия взаимодействия  $\mathcal{L} \neq 0$ . Путем разложения оператора  $S$  по степеням взаимодействия  $\mathcal{L}$  мы получаем ряд

$$\begin{aligned} \langle T \{u_1(x) u_2(y) S\} \rangle_0 &= \langle T \{u_1(x) u_2(y)\} \rangle_0 + i \langle T \{u_1(x) u_2(y) A\} \rangle_0 = \\ &+ \frac{i^2}{2} \langle T \{u_1(x) u_2(y) A^2\} \rangle_0 + \dots; \quad A \equiv \int \mathcal{L}(x) dx, \quad (3) \end{aligned}$$

последовательные члены которого содержат радиационные поправки к первому члену  $\langle T \{u_1 u_2\} \rangle_0$ , представляющему собой элементарное (свободное) спаривание.

Здесь уместно сделать одно важное техническое замечание, относительно выражений, содержащих под знаком операции

$$\langle T (\dots) \rangle_0$$

операторные сомножители, не зависящие явно от времени, подобные показателю экспоненты в (2) или, например, операторам полей в импульсном представлении.

Может возникнуть искушение вынести такой «не зависящий от времени» сомножитель из-под знака  $T$ -произведения. Однако в результате этой операции, после вычисления вакуумного ожидания мы приходим к выражению, в котором некоторые хронологические спаривания окажутся замененными на обычные, т. е. приходим к неверному результату.

В выражениях подобного типа всегда следует сначала выполнять операцию  $\langle T \dots \rangle_0$ , а затем уже интегрировать по конфигурационному пространству. Например, третий член в правой части (3) есть, по определению,

$$\begin{aligned} \langle T \{u_1(x) u_2(y) A^2\} \rangle_0 &\equiv \int dz_1 dz_2 G(x, y; z_1, z_2), \\ G(x, y; z_1, z_2) &= \langle T \{u_1(x) u_2(y) \mathcal{L}(z_1) \mathcal{L}(z_2)\} \rangle_0. \end{aligned}$$

Таким образом, операции  $\langle T \dots \rangle_0$  и  $\int dx$  не переставимы и запись типа (2) является чисто символической.

Слагаемые правой части (3) содержат члены, соответствующие диаграммам Фейнмана с двумя внешними линиями, входящими в точки  $x$  и  $y$ . На рис. 52 изображены диаграммы Фейнмана, соответствующие членам нескольких низших порядков в теории скалярного поля с четверным самодействием  $\mathcal{L} \sim \varphi^4$ . Диаграмма *a*) соответствует первому члену в правой части (3), диаграммы *b*) и *в*) — третьему члену, а диаграмма *г*) — четвертому члену.

Обращает на себя внимание диаграмма *в*). Она является несвязной. Такие несвязные диаграммы появляются во всех высших членах разложения (3). Все такие вклады соответствуют определенному

способу спариваний операторов, когда операторы  $u_1(x)$  и  $u_2(y)$  спарены друг с другом через «часть» промежуточных вершин  $z_1, \dots, z_m$ . Остальные вершины  $z_{m+1}, \dots, z_n$  в диаграммах данного  $n$ -го порядка спарены только между собой. Соответствующие вклады факторизуются

$$\langle T \{u_1 u_2 (iA)^m\} \rangle_0^{\text{CB}} \langle T (iA)^{n-m} \rangle_0.$$

Введенный здесь верхний индекс соответствует связным вкладам. Вершины  $z_1, \dots, z_m$  могут быть выбраны из  $n$  вершин  $n!$   $[m! (n - m)!]^{-1}$  способами. Имеем поэтому:

$$\langle T \{u_1 u_2 S\} \rangle_0 = \sum_{0 \leq n \leq \infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{1 \leq m \leq n} \frac{n!}{m! (n - m)!} \langle T \{u_1 u_2 A^m\} \rangle_0^{\text{CB}} \langle T A^{n-m} \rangle_0.$$

Меняя порядок суммирования, получаем:

$$\begin{aligned} \langle T \{u_1 u_2 S\} \rangle_0 &= \sum_{0 \leq m \leq \infty} \frac{i^m}{m!} \langle T \{u_1 u_2 A^m\} \rangle_0^{\text{CB}} \sum_l \frac{i^l}{l!} \langle T A^l \rangle_0 = \\ &= \langle T \{u_1 u_2 S\} \rangle_0^{\text{CB}} S_0; \quad S_0 = \langle S \rangle_0, \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, вакуумные вклады  $S_0$  факторизуются и в полном выражении.

Поэтому полные одночастичные функции Грина определим следующим образом:

$$\Delta_{12}(x, y) = i \frac{\langle T \{u_1(x) u_2(y)\} S \rangle_0}{S_0}. \quad (5)$$

Выражение (5) учитывает все радиационные поправки, соответствующие связным диаграммам Фейнмана, и в пределе выключения взаимодействия переходит в функцию Грина свободных полей.

Не составляет труда убедиться, что проведенное выше рассуждение, приводящее к факторизации (5) вакуумных вкладов, может быть повторено для вакуумных ожиданий (1) при  $k > 2$ . Здесь, однако, вообще говоря, могут возникнуть вклады, в которых часть операторов  $u_1, \dots, u_l$  входит в одну компоненту связности несвязной диаграммы, а остальные  $u_{l+1}, \dots, u_k$  — в другую (другие).

Поэтому выражения типа

$$\frac{1}{S_0} \langle T \{u_1 \dots u_k S\} \rangle_0 \quad (6)$$

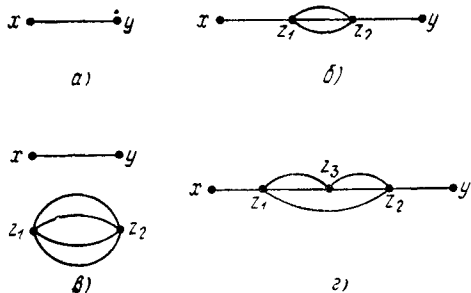


Рис. 52. Диаграммы низших порядков с двумя внешними линиями в модели  $\Phi^4$ .



при  $k \geq 4$  содержат несвязные вклады. Исключение составляет 3-вертекс

$$\frac{1}{S_0} \langle T \{u_1(x) u_2(y) u_3(z) S\} \rangle_0, \quad (7)$$

представляющий собой сумму связанных вкладов. К вопросу об определении связанных высших функций Грина мы вернемся в § 37.4.

Отметим еще, что здесь мы всюду используем значение матрицы рассеяния  $S = S(1)$ , получающееся из  $S(g)$  в процессе устремления функции  $g(x)$ , характеризующей область включения взаимодействия, к единице во всем пространстве-времени. Здесь следует иметь в виду, что даже в этом предельном случае функция  $g(x)$ , по определению  $S$ -матрицы, адиабатически стремится к нулю на положительной и отрицательной временных бесконечностях.

**37.2. Источники и производящие функционалы.** Для того чтобы связать между собой различные функции Грина, а также ввести сильно-связные функции Грина, воспользуемся, следуя Швингеру (1949а), общим приемом введения *производящего функционала*. С этой целью добавим в лагранжиан рассматриваемой системы вспомогательные слагаемые, линейные по операторам поля

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \sum_i \varphi_i(x) J^i(x). \quad (8)$$

Неоператорные коэффициенты  $J^i$  принято именовать «классическими токами» — источниками полей  $\varphi_i$ . Такое название исторически связано с тем, что для случая электромагнитного поля  $\varphi \rightarrow A$  член в лагранжиане

$$A_n(x) J^n(x)$$

в точности соответствует взаимодействию с заданным внешним электромагнитным током  $J^n$ . В общем случае это наименование довольно условно.

В результате операции (8) матрица рассеяния  $S$ , ее вакуумное ожидание  $S_0$ , а также и определенные выше функции Грина начинают функционально зависеть от  $J^i$ . Они становятся *функционалами токов*. Подчеркнем, что введение классических токов  $J$  является вспомогательным математическим приемом и совсем не обязательно предполагает фактическое наличие внешних токов и зарядов. Функции  $J^i(x)$ , в сущности, являются вспомогательными объектами, (до некоторой степени аналогичными функции  $g(x)$  из главы IV), позволяющими перейти к функциональной формулировке уравнений для различных функций Грина и связей между ними. В том случае, когда реальных внешних токов нет, на заключительном этапе рассуждений или вычислений функции  $J^i$  будут полагаться равными нулю.

В статистической механике производящий функционал (а также его экспоненциальное представление) впервые был определен Боголюбовым (1946, 1947)

путем введения вспомогательных классических функций  $f$  в сумму состояний  $Z$ . Многочастичные функции распределения были выражены через вариационные производные от  $\ln Z(f)$  по  $f$ .

Рассмотрим прежде всего вакуумное ожидание матрицы рассеяния в присутствии токов  $J$ :

$$S_0(J) = \langle S(J) \rangle_0, \quad (9)$$

$$S(J) = T \left\{ \exp i \left( \int \mathcal{L}(x) dx + \varphi J \right) \right\}. \quad (10)$$

Здесь введена сокращенная запись  $\varphi J \equiv \int dx \sum_i \varphi_i(x) J^i(x)$ .

Выражение (9) представимо в виде функционального ряда по степеням  $J$ :

$$S_0(J) = S_0(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_n)} C_{\nu_1 \dots \nu_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J^{\nu_1}(x_1) \dots J^{\nu_n}(x_n). \quad (11)$$

Коэффициенты  $C^{(n)}$  могут быть выражены через функциональные производные

$$\frac{\delta^n S_0(J)}{\delta J_\alpha(x_1) \dots \delta J_\omega(x_n)} = i^n \langle T \{ \varphi_\alpha(x_1) \dots \varphi_\omega(x_n) S(J) \} \rangle_0 \quad (12)$$

при  $J = 0$ , т. е.

$$C_{\alpha \dots \omega}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n S_0(J)}{\delta J_\alpha(x_1) \dots \delta J_\omega(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (13)$$

Таким образом,  $S_0(J)$  является производящим функционалом для вакуумных ожиданий (1).

Отдельно рассмотрим процедуру введения источников для полей с полувещным спином:

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) \rightarrow \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) + \sum_i (\bar{\psi}_i(x) \eta_i(x) + \bar{\eta}_i(x) \psi_i(x)). \quad (14)$$

Ввиду антикоммутативности фермиевских полевых операторов  $\psi, \bar{\psi}$  соответствующие функции источников  $\eta, \bar{\eta}$  также следует считать антикоммутирующими объектами, удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \eta(x) \eta(y) + \eta(y) \eta(x) &= 0, & \eta(x) \eta(x) &= 0, \\ \bar{\eta}(x) \bar{\eta}(y) + \bar{\eta}(y) \bar{\eta}(x) &= 0, & \bar{\eta}(x) \eta(x) &= 0. \\ \eta(x) \bar{\eta}(y) + \bar{\eta}(y) \eta(x) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Эти соотношения лишь последней строкой отличаются от фермиевских перестановочных соотношений. Классические антикоммутирующие поля  $\eta, \bar{\eta}$  можно рассматривать как образующие *грасмановой алгебры*. (Более подробное изложение математических аспек-

тов этого вопроса содержится в книге Березина (1965.) Коммутационные соотношения (15) будем называть грассмановыми перестановочными соотношениями, величины  $\eta$ ,  $\bar{\eta}$  для краткости — ферми-источниками.

Удобно также положить, что источники  $\eta, \bar{\eta}$  полностью антикоммутируют с квантованными ферми-полями  $\psi, \bar{\psi}$

$$\{\eta, \psi\}_+ = \{\eta, \bar{\psi}\}_+ = \{\bar{\eta}, \psi\}_+ = \{\bar{\eta}, \bar{\psi}\}_+ = 0.$$

При введении вариационных производных по ферми-источникам нужно учитывать их антикоммутативность. Здесь следует также различать *левые* и *правые* вариационные производные. Левую (правую) вариационную производную функционала  $F(\eta)$  по антикоммутирующему ферми-источнику  $\eta(x)$  определим как коэффициент в главной части приращения  $\delta F$  при приращении аргумента  $\delta\eta(x)$ , вынесенном налево (направо). Обозначая левую производную символом  $'\delta F/\delta\eta$ , а правую —  $\delta'F/\delta\eta$  имеем по определению

$$\delta F = \int \delta\eta(x) \frac{'\delta F(\eta)}{\delta\eta(x)} dx = \int \frac{\delta'F(\eta)}{\delta\eta(x)} \delta\eta(x) dx. \quad (16)$$

При этом, например, левая вариационная производная однородного полиномиального функционала  $F$  «степени»  $n$  будет совпадать с правой при нечетных  $n$  и будет отличаться знаком от правой производной для четного  $n$ .

Для удобства ниже всегда будем работать только с левыми производными. Обозначим поэтому

$$\frac{\delta}{\delta\eta} = \frac{'\delta}{\delta\eta}, \quad \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}} = \frac{'\delta}{\delta\bar{\eta}}.$$

Антикоммутативность полей  $\eta, \bar{\eta}$  приводит к антикоммутативности операций вариационного дифференцирования друг с другом при многократном дифференцировании, например,

$$\frac{\delta^2 F}{\delta\eta_1 \delta\eta_2} = - \frac{\delta^2 F}{\delta\eta_2 \delta\eta_1}, \quad (17)$$

а также к антикоммутативности с ферми-полями и ферми-источниками. При дифференцировании произведения следует пользоваться формулой

$$\frac{\delta}{\delta\eta} (AB) = \frac{\delta A}{\delta\eta} B + (-1)^a A \frac{\delta B}{\delta\eta}, \quad (18)$$

где  $a$  — суммарная степень линейности функционала  $A$  по всем  $(\eta, \bar{\eta}, \psi, \bar{\psi})$  ферми-полям.

Введенные определения и отмеченные свойства позволяют получить формулы, аналогичные (12). Например,

$$\frac{\delta^2 S_0(\eta, \bar{\eta})}{\delta\bar{\eta}(x) \delta\eta(y)} = i^2 \langle \{T\psi(x) \bar{\psi}(y) S\} \rangle_0 \quad (19)$$

и т. д. Ниже для общего анализа мы будем пользоваться формулой

(12), считая, что она описывает как бозе-, так и ферми-поле и источники.

**37.3. Производящий функционал для высших функций Грина.** Установим теперь связь правых частей в (12) с полными функциями Грина.

Выражения

$$\langle T \{ u(\xi_1) \dots u(\xi_n) S(J) \} \rangle_0 \quad (20)$$

представляют собой суммы всех вкладов с  $n$  внешними концами в присутствии внешних источников. Отделим прежде всего несвязные вклады. Несвязные диаграммы распадаются на два класса.

Это, во-первых, диаграммы, содержащие вакуумные поддиаграммы. В отличие от рассмотренного в § 37.1, класс вакуумных диаграмм теперь значительно шире.

В качестве иллюстрации на рис. 53 изображены вакуумные диаграммы двух низших порядков в модели

$$\mathcal{L} = \lambda \varphi^3 + \varphi J. \quad (21)$$

Крестами обозначены «токовые» вершины, соответствующие  $\varphi J$ . Как видно, количество вакуумных диаграмм, грубо говоря, удваивается. Повторяя рассуждения предыдущего раздела этого параграфа, нетрудно показать, что все несвязные диаграммы этого класса

устраняются делением на  $S_0(J)$ .

Второй класс несвязных вкладов в (20) соответствует диаграммам, несвязность которых, так сказать, органически связана с наличием токов  $J$ . Примеры таких диаграмм с двумя внешними концами для модели (21) приведены на рис. 54.

Как видно, эти диаграммы соответствуют той возможности, что цепочка спариваний,

начатая на операторе  $\varphi(x)$ , соответствующем внешней линии диаграммы, «не пройдет сквозь диаграмму», а закончится внутри нее на некотором числе «токовых» вершин. Не составляет труда убедиться, что такие возможности спариваний внутри выражений (20) соответствуют частичной или полной «факторизации», как, например,

$$\begin{aligned} \langle T \{ \varphi_1(x) \varphi_2(y) S(J) \} \rangle_0 &\rightarrow \langle T \{ \varphi_1(x) S(J) \} \rangle_0 \langle T \{ \varphi_2(y) S(J) \} \rangle_0, \\ \langle T \{ \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 S \} \rangle_0 &\rightarrow \langle T \{ \varphi_1 S \} \rangle_0 \langle T \{ \varphi_2 S \} \rangle_0 \langle T \{ \varphi_3 S \} \rangle_0 + \\ &+ \langle T \{ \varphi_1 \varphi_2 S \} \rangle_0 \langle T \{ \varphi_3 S \} \rangle_0 + \langle T \{ \varphi_2 \varphi_3 S \} \rangle_0 \langle T \{ \varphi_1 S \} \rangle_0 + \\ &+ \langle T \{ \varphi_1 \varphi_3 S \} \rangle_0 \langle T \{ \varphi_2 S \} \rangle_0. \end{aligned}$$

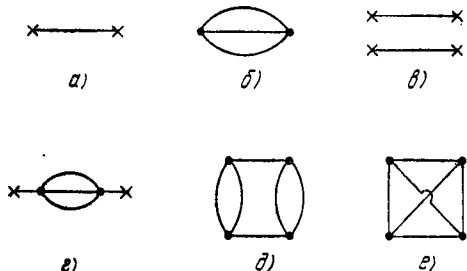


Рис. 53. Вакуумные диаграммы 2-го и 4-го порядка в теории  $\varphi^3$  в присутствии внешне-го тока.

Введем выражение

$$\Phi(x, J) = \frac{1}{S_0(J)} \langle T \{ \varphi(x) S(J) \} \rangle_0 = \frac{-i}{S_0(J)} \frac{\delta S_0(J)}{\delta J(x)}, \quad (22)$$

представляющее собой сумму связанных диаграмм с одним внешним концом. Оно может быть интерпретировано как среднее наблюдаемое значение оператора  $\varphi(x)$  в присутствии внешнего тока  $J$ .

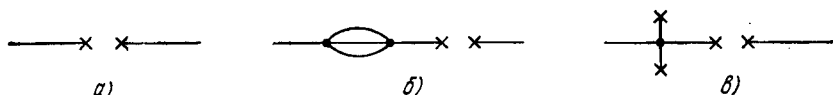


Рис. 54. Несвязные диаграммы с двумя внешними концами для модели (37.21), не содержащие вакуумных вкладов.

Двухконцевая и трехконцевая функции Грина, свободные от несвязных вкладов, теперь могут быть записаны в виде

$$S_0^{-1}(J) \langle T \{ \varphi_1(x) \varphi_2(y) S \} \rangle_0 - \Phi_1(x|J) \Phi_2(y|J) = \frac{1}{i} \Delta_{12}(x, y|J), \quad (23)$$

$$S_0^{-1}(J) \langle T \{ \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 S \} \rangle_0 - \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 - \Phi_1 S_0^{-1} \langle T \{ \varphi_2 \varphi_3 S \} \rangle_0 - \Phi_2 S_0^{-1} \langle T \{ \varphi_1 \varphi_3 S \} \rangle_0 - \Phi_3 S_0^{-1} \langle T \{ \varphi_1 \varphi_2 S \} \rangle_0 = \frac{1}{i^2} \Delta_{123}(x_1, x_2, x_3|J). \quad (24)$$

В формуле (23) мы ввели обозначение  $\Delta_{12}$  для суммы связанных двухконцевых диаграмм. Функцию  $\Delta_{12}(x, y|J)$  будем называть полной двухконцевой (одночастичной) функцией Грина. Она является непосредственным обобщением функции  $\Delta_{12}(x, y)$ , введенной в (5). Введенная в (24) функция  $\Delta_{123}$  представляет полную (связную) трехконцевую функцию Грина. Аналогично можно ввести высшие связанные функции Грина.

Заметим теперь, что функции (22)—(24) весьма просто выражаются через вариационные производные функционала  $Z(J)$ , связанного с  $S_0(J)$  соотношением

$$Z(J) = -i \ln S_0(J), \quad S_0(J) = \exp iZ(J). \quad (25)$$

Имеем

$$\frac{\delta Z(J)}{\delta J(x)} = \Phi(x|J), \quad (26)$$

$$\frac{\delta^2 Z(J)}{\delta J_1(x) \delta J_2(y)} = \frac{\delta \Phi_1(x|J)}{\delta J_2(y)} = \Delta_{12}(x, y|J), \quad (27)$$

$$\frac{\delta^3 Z(J)}{\delta J_1(x) \delta J_2(y) \delta J_3(z)} = \frac{\delta \Delta_{12}(x, y)}{\delta J_3(z)} = \Delta_{123}(x, y, z|J). \quad (28)$$

Мы видим, таким образом, что введенный в (25) функционал  $Z(J)$  является производящим функционалом для связанных функций Грина

$$\frac{\delta^n Z(J)}{\delta J_1(x_1) \dots \delta J_n(x_n)} = \Delta_{1, \dots, n}^{cB}(x_1, \dots, x_n|J). \quad (29)$$

**37.4. Вершинные функции.** Заметим, что введенные в (29) выше функции Грина включают все слабо-связные (т. е. одночастично приводимые) вклады. На рис. 55, иллюстрирующем это замечание, сильно-связные части диаграмм отмечены двойной штриховкой.

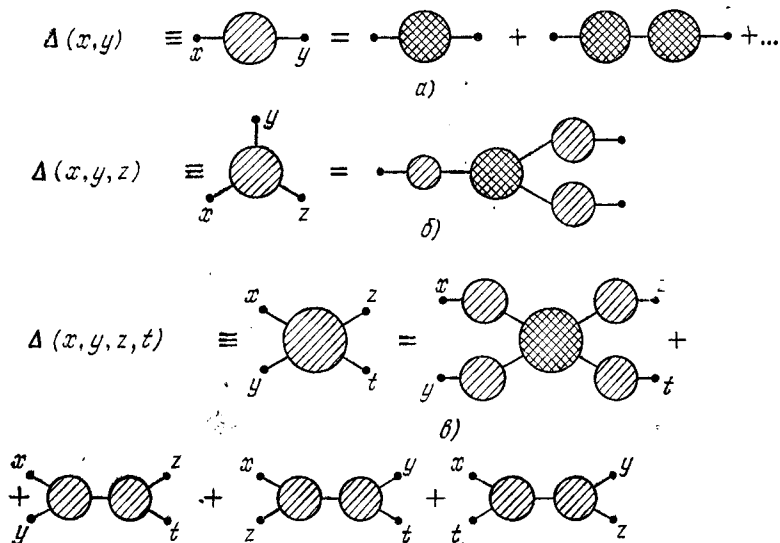


Рис. 55.

Для того чтобы ввести величины, соответствующие сильно-связным диаграммам, проведем функциональное преобразование Лежандра:

$$Z(J) \rightarrow W(\Phi) = Z - \int d^4x J(x) \Phi(x), \quad (30)$$

введя вместо функционального аргумента  $J$  новый независимый функциональный аргумент  $\Phi$  (т. е. обратив функциональную связь  $\Phi = \Phi(J)$ ).

Как будет установлено ниже,  $W(\Phi)$  является производящим функционалом для сильно-связных функций Грина. Мы будем называть их вершинными функциями (иногда для краткости — вертексами).

Выведем сперва одно полезное вспомогательное соотношение. Дифференцируя формулу (26) по  $\Phi(y)$ , получаем по правилам дифференцирования сложной функции

$$\frac{\delta^2 Z(J)}{\delta \Phi(y) \delta J(x)} = \int \frac{\delta J(z)}{\delta \Phi(y)} dz \frac{\delta^2 Z(J)}{\delta J(z) \delta J(x)} = \int \frac{\delta J(z)}{\delta \Phi(y)} dz \Delta(z, x) = \delta(x - y).$$

С учетом (27) получаем отсюда

$$\frac{\delta J(z)}{\delta \Phi(y)} = \Delta^{-1}(z, y). \quad (31)$$

Здесь мы ввели функцию  $\Delta^{-1}$ , обратную к  $\Delta$  в смысле интегральной свертки в  $x$ -представлении:

$$\int \Delta(x, z) dz \Delta^{-1}(z, y) = \int \Delta^{-1}(x, z) dz \Delta(z, y) = \delta(x - y). \quad (32)$$

Отметим, что в импульсном представлении (в трансляционно-инвариантном пределе  $J \rightarrow 0$ ,  $\Phi \rightarrow 0$ ) соотношение (32) принимает алгебраическую форму

$$\tilde{\Delta} \tilde{\Delta}^{-1} = 1.$$

Рассмотрим теперь последовательно вариационные производные от  $W$ . Имеем, с учетом (26),

$$\begin{aligned} \frac{\delta W(\Phi)}{\delta \Phi(x)} &= \frac{\delta Z}{\delta \Phi(x)} - \int \frac{\delta J(z)}{\delta \Phi(x)} dz \Phi(z) - J(x) = \\ &= \int \left[ \frac{\delta Z}{\delta J(z)} - \Phi(z) \right] dz \frac{\delta J(z)}{\delta \Phi(x)} - J(x) = -J(x). \end{aligned}$$

Таким образом, функционал  $W(\Phi)$  обладает важным свойством *стационарности*. В пределе выключения внешних токов ( $J \rightarrow 0$ ) его первая производная обращается в нуль.

Дифференцируя повторно по  $\Phi(y)$ , находим с помощью (31)

$$\frac{\delta^2 W(\Phi)}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)} = -\frac{\delta J(x)}{\delta \Phi(y)} = -\Delta^{-1}(x, y). \quad (33)$$

Эта величина представляет собой фурье-образ обратного (в алгебраическом смысле) пропагатора

$$\tilde{\Delta}^{-1}(p) = m^2 - p^2 - \Gamma(p),$$

и поэтому представляется суммой сильно-связных диаграмм. Дифференцируя (33) еще раз по  $\Phi(z)$ , получим, после небольших преобразований

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 W(\Phi)}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y) \delta \Phi(z)} &= \\ &= \int \Delta^{-1}(x, \xi) d\xi \frac{\delta^3 Z}{\delta J(\xi) \delta J(\eta) \delta J(\tau)} d\eta \Delta^{-1}(\eta, y) d\tau \Delta^{-1}(\tau, z). \end{aligned} \quad (34)$$

Соотношение (34) говорит нам, что вершинная функция

$$\Gamma(x, y, z) = \frac{\delta^3 W(\Phi)}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y) \delta \Phi(z)} \quad (35)$$

отличается от трехконцевой функции Грина  $\Delta(x, y, z)$  (ср. (28)) отсутствием множителей, соответствующих внешним линиям (переход от  $\Delta(x, y, z)$  к  $\Gamma(x, y, z)$  соответствует «ампутации» внешних факторов (ср. рис. 55, в и рис. 56, в)).

Отметим, что из (33) также следует соотношение

$$\Gamma(x, y, z) = -\frac{\delta \Delta^{-1}(x, y)}{\delta \Phi(z)}. \quad (36)$$

Мы предоставляем читателю в виде упражнения получить формулу, связывающую  $\Delta(x, y, z, t)$  с четырехконцевой вершинной функцией  $\Gamma(x, y, z, t)$ , графически проиллюстрированную на рис. 56, в.

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \Gamma(x, y) &= x \cdot \text{шарик} \cdot y & \text{б) } \Gamma(x, y, z) &= \text{шарик} \\
 \text{в) } \Gamma(x, y, z, t) &= \text{шарик} & &
 \end{aligned}$$

Рис. 56.

Таким образом, функционал  $W(\Phi)$  является производящим функционалом

$$\frac{\delta^n W(\Phi)}{\delta \Phi_1(x_1) \dots \delta \Phi_n(x_n)} = \Gamma_{1, \dots, n}(x_1, \dots, x_n) \quad (37)$$

для вершинных (т. е. сильно-связных) функций.

### § 38. Уравнения Швингера и Дайсона

Теперь мы обратимся к задаче получения уравнений для введенных в предыдущем параграфе полных функций Грина. Как будет показано в § 38.2, эти функции Грина достаточно просто (вообще говоря, линейно) связаны с матричными элементами  $S$ -матрицы и полностью характеризуют поведение динамической системы. С другой стороны, рассматривая однородные уравнения для «обобщенных волновых функций», соответствующие неоднородным уравнениям для полных функций Грина, мы получаем возможность рассчитать радиационные поправки к собственным значениям энергии замкнутых систем и решать иные подобные задачи (см. ниже главу VII).

Можно было бы попытаться получить такие уравнения для полных функций Грина, «раскрывая» содержание радиационных поправок. Например, поляризационный оператор фотона в спинорной электродинамике можно выразить через интеграл от произведения электродинамических функций Грина и вершинных частей. В свою очередь сумму радиационных поправок к вершинной части можно выразить через одночастичные функции Грина и более сложные вершинные части и т. д.

Таким путем мы получили бы бесконечную последовательность все более усложняющихся уравнений, так называемых уравнений Дайсона. Как было показано Поливановым (1955), более элегантные соотношения можно получить на другом пути — используя метод производящего функционала, введенного в § 37.2. Здесь удастся



получить вполне обозримую систему уравнений в функциональных производных — так называемых уравнений Швингера, из которой в свою очередь можно получать уравнения, связывающие различные функции Грина (уравнения Дайсона).

**38.1. Обобщенная теорема Вика.** Прежде чем строить уравнения для функций Грина, рассмотрим вспомогательное предложение, которое уместно назвать «обобщенной теоремой Вика», утверждающее, что вакуумное ожидание от хронологического произведения  $n + 1$  линейных операторов  $A, B_1, \dots, B_n$  равно сумме  $n$  вакуумных ожиданий тех же хронологических произведений со всеми возможными спариваниями одного из этих операторов (например,  $A$ ) со всеми остальными, т. е.

$$\langle T(A B_1 \dots B_n) \rangle_0 = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle T(\overline{A B_1 \dots B_i \dots B_n}) \rangle_0. \quad (1)$$

Обратим внимание на то, что в правой части (1) в отличие от обычной теоремы Вика (ср., например, (17.17)) не содержится выражений с числом спариваний, бóльшим единицы.

Тем не менее, справедливость (1) непосредственно вытекает из обычной теоремы Вика. Ввиду исчезновения вакуумного ожидания нормального произведения любого отличного от нуля числа неспаренных операторов левая часть (1) равна сумме всех возможных вариантов полных взаимных спариваний внутри произведения операторов

$$A B_1 \dots B_n, \quad (2)$$

т. е. спариваний, где спарены друг с другом все операторы. Совершенно аналогично любой из членов суммы в правой части (1), например первый, может быть представлен в виде

$$\overline{A B_1} \langle T(B_2 \dots B_n) \rangle_0$$

и равен произведению спаривания  $\overline{A B_1}$  на сумму всех возможных полных спариваний операторов  $B_2, \dots, B_n$ .

Выполняя суммирование по  $i$  в правой части (1), получаем сумму всех возможных полных спариваний операторов (2). Тем самым обобщенная теорема Вика доказана.

Имея в виду, что под знаком  $T$ -произведений в вакуумных ожиданиях, определяющих полные функции Грина, содержится также матрица  $S$ , не являющаяся линейным оператором, обобщим теорему (1) и на этот случай. Рассмотрим для этого процесс спаривания линейного оператора  $A$  с  $n$ -м членом разложения матрицы рассеяния

$$\frac{i^n}{n!} \int T(\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)) dx_1 \dots dx_n. \quad (3)$$

Введем операцию спаривания линейного оператора  $A$  с лагранжианом  $\mathcal{L}(x)$ , также не являющимся линейным оператором. Выра

жение  $\overline{A\mathcal{L}}(x)$  естественно определить как сумму произведений  $A\mathcal{L}$  со всеми возможными спариваниями оператора  $A$  с операторами, входящими в  $\mathcal{L}$ . Например, в случае спинорной электродинамики, когда с учетом члена внешнего тока  $\mathcal{L}(x)$  имеет вид

$$\mathcal{L}(x) = e : \psi(x) \gamma^n \psi(x) A_n(x) : + J^k(x) A_k(x), \quad (4)$$

получаем, по определению,

$$\overline{\psi(x)\mathcal{L}(y)} = \overline{e\psi(x)\psi(y)\gamma^k} : \psi(y) A_k(y) :, \quad (5)$$

$$\overline{\bar{\psi}(x)\mathcal{L}(y)} = e : A_k(y)\bar{\psi}(y) : \gamma^k \bar{\psi}(y) \bar{\psi}(x), \quad (6)$$

$$\overline{A_l(x)\mathcal{L}(y)} = e : \psi(y)\gamma^k\psi(y) : \overline{A_l(x)A_k(y)} + J^k(y)\overline{A_l(x)A_k(y)}. \quad (7)$$

Отметим в этой связи, что определенные выше полные функции Грина, которые являются суммами вкладов, соответствующих внутренним линиям диаграмм Фейнмана, естественно, содержат расходимости того же типа, что и матрица рассеяния. Для устранения этих расходимостей следовало бы с самого начала ввести в лагранжиан взаимодействия обычные контрчлены. Однако ради простоты изложения мы выведем сначала уравнения Швингера для функций Грина, исходя из лагранжиана (4), а затем произведем также и учет контрчленов.

Вернемся к спариванию (3) с линейным оператором  $A$ ; мы получим сумму членов

$$\frac{i^n}{n!} \sum_i \int T(\overline{A\mathcal{L}(x_1)\dots\mathcal{L}(x_i)\dots\mathcal{L}(x_n)}) dx_1\dots dx_n,$$

которая благодаря симметрии (3) по отношению к переменным интегрирования  $x_1, \dots, x_n$  может быть представлена следующим образом:

$$\frac{i^n}{(n-1)!} \int dt \int dx_1\dots dx_{n-1} T(\overline{A\mathcal{L}(t)}\mathcal{L}(x_1)\dots\mathcal{L}(x_{n-1})).$$

Суммируя по  $n$ , получаем результат спаривания оператора  $A$  с матрицей  $S$  в виде

$$\overline{AS} = i \int dt T(\overline{A\mathcal{L}(t)} \exp i \int \mathcal{L}(x) dx) = i \int dt T(\overline{A\mathcal{L}(t)} S). \quad (8)$$

Эту формулу можно переписать в другом виде, если использовать понятие *вариационной производной*  $S$ -матрицы по *операторной функции поля*.

Такие производные можно ввести, определив их как пределы соответствующих функциональных производных по аддитивным классическим добавкам  $\eta(x)$  к квантовым  $u(x)$

$$u(x) \rightarrow u(x) + \eta(x)$$

при  $\eta(x) = 0$ , т. е.

$$\frac{\delta S}{\delta u_l(x)} = \lim_{\eta=0} \frac{\delta S(\eta)}{\delta \eta_l(x)}. \quad (9)$$

Для того, чтобы полученные таким путем вариационные производные по ферми-полям  $\psi$  обладали надлежащими свойствами антикоммутативности, необходимо считать, что классические добавки к ферми-полям по своей алгебраической природе подобны введенным в § 37.3 источникам ферми-полей  $\eta$ ,  $\bar{\eta}$  и удовлетворяют коммутационным соотношениям (37.15) грассмановой алгебры. Подобно тому, как это было сделано в § 37.3, мы условимся считать все вариационные производные по ферми-полям левыми производными.

Замечая, что формулы (5—7) могут быть представлены в виде

$$\overline{u(x) \mathcal{L}(y)} = \overline{u(x)} u(y) \frac{\delta \mathcal{L}(y)}{\delta u(y)},$$

перепишем (8) в виде

$$\overline{AS} = \int \overline{Au}(\eta) d\eta \frac{\delta S}{\delta u(\eta)}. \quad (10)$$

Приведем еще формулы коммутации с  $S$ -матрицей и ее функциональными производными для бозе-оператора  $\varphi$ :

$$[\varphi(x), S]_- = \int [\varphi(x), \varphi(\xi)]_- d\xi \frac{\delta S}{\delta \varphi(\xi)}, \quad (11)$$

для ферми-оператора  $\psi$ :

$$[\psi(x), S]_- = \int [\psi(x), \bar{\psi}(\xi)]_+ d\xi \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}(\xi)}, \quad (12.a)$$

$$\left[ \psi(x), \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}(y)} \right]_+ = \int [\psi(x), \bar{\psi}(\eta)]_+ d\eta \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi}(\eta) \delta \bar{\psi}(y)}. \quad (12.b)$$

Отметим, что коммутаторы ферми-операторов  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  с четными по ферми-полям функционалами (например, вариационными производными от  $S$  четного порядка по  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ ) имеют структуру (12a). В то же время структуру, подобную (12b), имеют антикоммутаторы ферми-операторов  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  с нечетными по ферми-полям функционалами.

Выразим теперь вакуумные ожидания

$$\langle T \{u_1(\xi_1) u_2(\xi_2) \dots u_k(\xi_k) S\} \rangle_0, \quad (37.1)$$

на основе которых в § 37 строились высшие функции Грина, через вариационные производные  $S$ -матрицы.

Используя обобщенную теорему Вика относительно  $u_1$ , получаем согласно (1) и (10)

$$\begin{aligned} \langle \{Tu_1 \dots u_k S\} \rangle_0 &= \sum_{2 \leq l \leq k} \eta_{l-2} \overline{u_1 u_l} \langle T' \{u_2 \dots u_k S\} \rangle_0 + \\ &+ \eta_{k-1} \sum_m \int \overline{u_1 u_m}(\xi) d\xi \left\langle T \left\{ u_2 \dots u_k \frac{\delta S}{\delta u_m(\xi)} \right\} \right\rangle_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $T'$  обозначает величину, полученную из (37.1) вычеркиванием оператора  $u_i$ ;  $\eta_{l-2}$  и  $\eta_{k-1}$  — знаковые множители, учитывающие

четность перестановок ферми-операторов, в случае, если  $u_1$  — поле с полуцелым спином.

Формула (13) выражает вакуумное ожидание от хронологического произведения  $k$  операторов и  $S$ -матрицы через сумму аналогичных ожиданий от  $k - 1$  операторов и  $S$ -матрицы, либо ее вариационной производной, т. е. эффективно понижает на единицу степень линейности по  $u$ .

Применяя троекратно формулу (13) к выражению  $\langle T\varphi_1\varphi_2\varphi_3S \rangle_0$ , связанному по формуле (37.24) с трехконцевой функцией Грина, получим после небольших преобразований

$$S_0^{-1} \langle T \{ \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 S \} \rangle_0 = \overline{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} + \overline{\varphi_1 \varphi_3} \overline{\varphi_2} + \overline{\varphi_2 \varphi_3} \overline{\varphi_1} + \\ + S_0^{-1} \int \overline{\varphi_1 \varphi}(\tau) d\tau \overline{\varphi_2 \varphi}(\rho) d\rho \left\langle \frac{\delta^3 S}{\delta \varphi(\sigma) \delta \varphi(\rho) \delta \varphi(\tau)} \right\rangle_0 d\sigma \overline{\varphi(\sigma) \varphi_3}. \quad (14)$$

Сравнивая (37.24) и (14), получаем связь между  $\Delta_{123}$  и вакуумным ожиданием от третьей вариационной производной. Эта связь имеет вид

$$\Delta_{123}(x, y, z | J) = \frac{i^2}{S_0} \int \overline{\varphi_1(x) \varphi(\tau)} d\tau \overline{\varphi_2(y) \varphi(\rho)} d\rho \times \\ \times \left\langle \frac{\delta^3 S}{\delta \varphi(\sigma) \delta \varphi(\tau) \delta \varphi(\rho)} \right\rangle_0 d\sigma \overline{\varphi(\sigma) \varphi_3(z)} + \dots \quad (15)$$

Здесь многоточием обозначены слагаемые, пропорциональные  $\Phi_k$  и обращающиеся в нуль в пределе выключения источников. Для  $n$ -концевой функции Грина соответствующее соотношение в отсутствие внешних источников имеет вид

$$\Delta_{1, \dots, n}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{J=0} \Delta_{1, \dots, n}(x_1, \dots, x_n | J) = \\ = \frac{i^{n-1}}{S_0} \int \prod_{1 \leq j \leq n} \{ \overline{\varphi(x_j) \varphi(\eta_j)} d\eta_j \} \left\langle \frac{\delta^n S}{\delta \varphi(\eta_1) \dots \delta \varphi(\eta_n)} \right\rangle_0. \quad (16)$$

Переходя к импульсному представлению

$$\Delta_{1, \dots, n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{in}} \int e^{-i \sum x_j k_j} \tilde{\Delta}(k_1, \dots, k_n) dk_1 \dots dk_n, \\ \overline{\varphi_j(x) \varphi_j(y)} = \frac{1}{(2\pi)^i} \int e^{-ik(x-y)} \tilde{D}(k) dk, \quad (17)$$

получим также

$$\tilde{\Delta}_{1, \dots, n}(k_1, \dots, k_n) = \\ = \frac{1}{iS_0} \int \prod_{1 \leq j \leq n} \{ D_j(k_j) e^{-ik_j x_j} dx_j \} \left\langle \frac{\delta^n S}{\delta \varphi_1(x_1) \dots \delta \varphi_n(x_n)} \right\rangle_0. \quad (18)$$

Формулы (16), (18) допускают очевидное обобщение на случай ферми-полей.

**38.2. Редукционные формулы.** Для того чтобы установить связь между введенными в § 37 полными высшими функциями Грина и

матричными элементами матрицы рассеяния, решим сначала вспомогательную задачу: выразим матричные элементы оператора  $S$  через вакуумные ожидания от его вариационных производных.

Рассмотрим матричный элемент  $S$ -матрицы

$$\langle \Phi_{1, 2, \dots, k}^* S \Phi_{k+1, \dots, n} \rangle, \quad (19)$$

причем амплитуды состояния возьмем в нормировке (25.11), т. е.

$$\Phi_{1, 2, \dots, k} = a_{\sigma_1}^+ (p_1) \dots a_{\sigma_k}^+ (p_k) \Phi_0.$$

Как обычно, будем считать, что среди частиц в начальном  $\Phi_{k+1, \dots, n}$  и конечном  $\Phi_{1, \dots, k}$  состояниях нет тождественных (т. е. с совпадающими импульсами  $p$  и остальными квантовыми числами  $\sigma$ ). Иными словами, любой из операторов рождения из  $\Phi_{k+1, \dots, n}$  в точности (анти)коммутирует с каждым из операторов уничтожения из  $\Phi_{1, \dots, k}^*$ .

Станем теперь передвигать операторы рождения налево, коммутируя их с матрицей рассеяния или ее производными, а операторы уничтожения — направо. Для этого воспользуемся формулами (11), (12), преобразовав их к импульсному представлению. Для бесспиновых бозе-операторов получим из (11)

$$[a^\pm(p), S]_- = \frac{\pm 1}{(16\pi^3 p^0)^{1/2}} \int e^{\mp i p z} dz \frac{\delta S}{\delta \varphi(z)}. \quad (20б)$$

Вместо  $S$ -матрицы в этих формулах могут стоять ее вариационные производные.

Для спинорного поля имеем соответственно

$$\left. \begin{aligned} [a_v^\pm(p), S] &= \frac{\bar{v}_v^\mp(p)}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{\mp i p z} dz \frac{\delta S}{\delta \psi(z)}, \\ [a^*{}^\pm(p), S] &= \frac{v^\mp(p)}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{\mp i p z} dz \frac{\delta S}{\delta \psi(z)}. \end{aligned} \right\} \quad (20\phi)$$

Аналогичные формулы можно написать, заменяя  $S$  на ее вариационные производные. Для производных, содержащих нечетное число дифференцирований по внешним полям, коммутаторы в левых частях (20\phi) следует заменить на антикоммутаторы.

Выполняя с помощью формул (20) коммутации операторов в (19) с  $S$ -матрицей, получим

$$\begin{aligned} &\langle \Phi_0 a_1(p_1) \dots a_k^-(p_k) S a_{k+1}^+(q_{k+1}) \dots a_n^+(q_n) \Phi_0 \rangle_0 = \\ &= \int \prod_{1 \leq i \leq k} \bar{f}_i^+(p_i) \prod_{k+1 \leq j \leq n} \bar{f}_j^-(q_j) \int \exp i(\sum p_i z_i - \sum q_j z_j) \times \\ &\quad \times \left\langle \frac{\delta^n S}{\delta u_1(z_1) \dots \delta u_n(z_n)} \right\rangle_0 dz_1 \dots dz_n \quad (21) \end{aligned}$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} f_{\bar{l}}^{\pm}(k) &= \pm (16\pi^3 k^0)^{-1/2} \text{ — для бесспиновых полей,} \\ f_{\bar{l}}^{\pm}(p) &= \frac{\sigma_{\bar{l}}^{\pm}(p)}{(2\pi)^{3/2}} \text{ — для полей с полуцелым спином,} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$\eta$  — знаковый фактор, учитывающий перемены знаков при коммутировании ферми-полей.

Для того чтобы связать матричный элемент с функцией Грина  $\Delta_1, \dots, n$ , следует теперь разрешить уравнение (16) относительно  $\langle \delta^n S \rangle$  и подставить полученное выражение в (21).

Для этого воспользуемся уравнениями, которым удовлетворяют свободные спаривания, входящие в правую часть (16). Эти уравнения могут быть записаны в виде

$$D_{\bar{k}}^{-1}(x) \overline{u_{\bar{k}}(x)} u_{\bar{k}}(y) = \frac{1}{i} \delta(x - y).$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} D_{\bar{k}}^{-1}(x) &= m_{\bar{k}}^2 - \square_x \text{ для бозе-полей,} \\ &= m_{\bar{k}} - i\hat{\partial}_x \text{ для ферми-полей.} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Действуя операторами  $D^{-1}$  на (16)  $n$  раз, получаем

$$\frac{1}{S_0} \left\langle \frac{\delta^n S}{\delta u_1(z_1) \dots \delta u_n(z_n)} \right\rangle_0 = i \prod_{1 \leq k \leq n} \{D_{\bar{k}}^{-1}(z_k)\} \Delta_1, \dots, n(z_1 \dots z_n). \quad (24)$$

Совокупность соотношений (21) и (24) дает явную связь между матричным элементом матрицы рассеяния и соответствующей связанной вершинной функцией. Напомним, что формально матричный элемент, стоящий в левой части соотношения (21), содержит несвязные вклады, представляющиеся сингулярным фазовым множителем  $S_0$ . Как отмечалось в главе V, при вычислениях по теории возмущений мы опустили подобные нефизические вклады, вводя в лагранжиан взаимодействия соответствующие вакуумные контрчлены. Эта процедура эквивалентна делению правой части (21) на вакуумное ожидание  $S$ -матрицы или умножению ее на  $\hat{S} = S^{-1}$  под знаком вакуумного ожидания от вариационной производной

$$\langle \delta^n S \rangle_0 \rightarrow \frac{1}{S_0} \langle \delta^n S \rangle_0 = \langle \delta^n S \cdot \hat{S} \rangle_0. \quad (25)$$

С учетом (25), получаем из (21) и (24)

$$\begin{aligned} &\langle \hat{\Phi}(p_1, \dots, p_n) S \Phi(q_1, \dots, q_m) \rangle_0 = \\ &= i\eta \int \prod_{1 \leq k \leq n} \{f_{\bar{k}}^{\pm}(p_k) D_{\bar{k}}^{-1}(z_k) dz_k\} \prod_{1 \leq l \leq m} \{f_{\bar{l}}^{\pm}(q_l) D_{\bar{l}}^{-1}(t_l) dt_l\} \times \\ &\times \exp i(\sum p_k z_k - \sum q_l t_l) \Delta_1, \dots, n+m(z_1, \dots, z_n, t_1, \dots, t_m). \end{aligned} \quad (26)$$

Формулы такого типа называются *редукционными формулами*.

Вводя импульсное представление для высших функций Грина по формуле (17), можем представить (26) в виде

$$\begin{aligned} & \langle \Phi^*(p_1, \dots, p_n) S \Phi(q_1, \dots, q_m) \rangle_0 = \\ & = i\eta \prod_{1 \leq k \leq n} \{f_k^+(p_k) \Delta_{\bar{k}}^{-1}(p_k)\} \prod_{1 \leq l \leq m} \{f_l^-(q_l) \Delta_{\bar{l}}^{-1}(q_l)\} \times \\ & \quad \times \tilde{\Delta}_{1, \dots, n+m}(p_1, \dots, p_n; -q_1, \dots, -q_m). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь  $\Delta_{\bar{k}}^{-1}$ ,  $\Delta_{\bar{l}}^{-1}$  — фурье-образы дифференциальных операторов (23), совпадающие с обратными одночастичными функциями Грина свободных полей.

**38.3. Уравнения Швингера.** Перейдем теперь к процедуре получения уравнений в вариационных производных. Рассмотрение проведем для спинорной электродинамики, введя в лагранжиан взаимодействия внешний электромагнитный ток по формуле (4). Источников спинорных полей вводить не будем.

В этом случае связанная одноэлектронная функция Грина

$$G_{\sigma\rho}(x, y) = \frac{i}{S_0(J)} \langle T \{ \psi_\sigma(x) \bar{\psi}_\rho(y) S(J) \} \rangle_0 \quad (28)$$

будет функционалом  $J$ . Явную запись этой зависимости в левой части (28) мы не делаем. Числитель выражения (28)

$$g_{\sigma\rho}(x, y) = i \langle T \{ \psi_\sigma(x) \bar{\psi}_\rho(y) S \} \rangle_0,$$

используя обобщенную теорему Вика и формулу (8), представим в виде

$$g(x, y) = \overline{i\psi(x)\bar{\psi}(y)} S_0 + i^2 \int d\tau \langle T \{ \overline{\psi(x)\mathcal{L}(\tau)\bar{\psi}(y)} S \} \rangle_0. \quad (29)$$

Учитывая далее соотношение (5) и действуя на (29) оператором  $(i\hat{\partial} - m)$ , получим после небольших преобразований

$$(i\hat{\partial} - m)g(x, y) = -\delta(x - y) S_0 - ie\gamma^n \langle T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) A_n(x) S \} \rangle_0.$$

Последний член в правой части может быть выражен через вариационную производную от  $g(x, y)$ . Заметим для этого, что вариационное дифференцирование оператора  $S$  по  $J^n(x)$  эквивалентно его умножению на  $iA_n(x)$ . Имеем поэтому

$$\frac{\delta}{\delta J^n(x)} g(x, y) = i^2 \langle T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) A_n(x) S \} \rangle_0.$$

Таким образом,

$$\left\{ i\gamma^n \left( \partial_n - e \frac{\delta}{\delta J^n(x)} \right) - m \right\} g(x, y) = -\delta(x - y) S_0.$$

Переходя к функции Грина  $G = gS_0^{-1}$ , получаем отсюда

$$\left\{ i\gamma^n \left( \partial_n - e \frac{\delta}{\delta J^n(x)} \right) - m \right\} G(x, y) = -\delta(x - y) + \frac{ie}{S_0} \gamma^n \frac{\delta S_0}{\delta J^n(x)} G(x, y). \quad (30)$$

Входящая в последний член величина

$$\frac{1}{iS_0} \frac{\delta S_0}{\delta J^n(x)} = \frac{\langle T A_n(x) S \rangle_0}{S_0} = \mathfrak{A}_n(x) \quad (31)$$

согласно (37.22) представляет собой среднее наблюдаемое значение оператора потенциала электромагнитного поля. В соответствии с (37.26) она может быть также представлена в виде

$$\mathfrak{A}_n(x) = \frac{\delta Z(J)}{\delta J^n(x)},$$

где функционал  $Z$  связан с  $S_0$  соотношением (37.25).

Подставляя (31) в (30), получаем искомое функциональное уравнение для однофермионной функции Грина:

$$\left\{ i\gamma^n \left( \partial_n - e \frac{\delta}{\delta J^n(x)} - ie\mathfrak{A}_n(x) \right) - m \right\} G(x, y) = -\delta(x - y). \quad (32)$$

Построим теперь соответствующие уравнения для  $\mathfrak{A}_n$ . Для этого с помощью (1) и (8) представим  $\mathfrak{A}_n$  в виде

$$\mathfrak{A}_n(x) = \frac{1}{S_0} \langle T \{ \overline{A_n(x)} S \} \rangle_0 = \frac{i}{S_0} \int \langle T \{ A_n(x) \mathcal{L}(\tau) S \} \rangle_0 d\tau.$$

Используя далее (7) и (15.20), получаем:

$$\mathfrak{A}_n(x) = -\frac{1}{S_0} \int D_0^c(x - \tau) d\tau [e \langle T \{ j_n(\tau) S \} \rangle_0 + J_n(\tau) S_0], \quad (33)$$

где обозначено

$$j_n(x) = : \psi(x) \gamma_n \psi(x) :.$$

Вспоминая, что функция  $D_0^c$  удовлетворяет уравнению

$$\square D_0^c(x) = -\delta(x),$$

получаем, применяя к (33) операцию  $\square$ ,

$$\square \mathfrak{A}_n(x) = J_n(x) + e \frac{\langle T \{ j_n(x) S \} \rangle_0}{S_0}.$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \langle T \{ j_n(x) S \} \rangle_0 &= \langle T \{ \bar{\psi}_\sigma(x) (\gamma_n)_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'}(x) \} S \rangle_0 = \\ &= - \sum_{\sigma, \sigma'} (\gamma_n)_{\sigma\sigma'} \langle T \{ \psi_{\sigma'}(x) \psi_\sigma(x) S \} \rangle_0 = i \text{Sp} (\gamma_n G(x, x)) S_0, \end{aligned} \quad (34)$$

получаем окончательное уравнение для  $\mathfrak{A}_n$  в форме

$$\square \mathfrak{A}_n(x) = J_n(x) + ie \text{Sp} (\gamma_n G(x, x)). \quad (35)$$

Уравнения (32) и (35) образуют систему, из которой можно определить две неизвестные величины,  $G$  и  $\mathfrak{A}$ , через заданную функцию  $J$ . Эти уравнения были впервые получены Швингером (1951a, б), который исходил из специально сформулированного им квантового динамического принципа. Уравнения типа (32) и (35) называются *уравнениями Швингера*.



**38.4. Уравнения Дайсона.** Можно несколько преобразовать уравнения Швингера с тем, чтобы они превратились в систему интегро-дифференциальных уравнений для электронной функции  $G$  и фотонной функции  $D$ , не содержащую явно операторов вариационного дифференцирования. Для этого оказывается удобным совершить переход от  $J$  к новому функциональному аргументу  $\mathfrak{A}$ , т. е. переход, рассмотренный в § 37.4 при введении вершинных функций.

Введем связную (одно)фотонную функцию Грина  $D_{nm}(x, y)$ . На основании (37.23), а также (37.27) имеем

$$D_{m'}(x, y) = \frac{i}{S_0(J)} \langle T \{A_m(x) A_n(y) S\} \rangle_0 - i\mathfrak{A}_m(x) \mathfrak{A}_n(y) = \frac{\delta \mathfrak{A}_m(x)}{\delta J^n(y)}. \quad (36)$$

Поэтому вариационная производная по  $J$  может быть выражена через производную по  $\mathfrak{A}$  соотношением

$$\frac{\delta}{\delta J^n(y)} = \int \frac{\delta \mathfrak{A}_m(z)}{\delta J^n(y)} dz \frac{\delta}{\delta \mathfrak{A}_m(z)} = \int D_{nm}(y, z) dz \frac{\delta}{\delta \mathfrak{A}_m(z)}, \quad (37)$$

внося которое в (32), получаем

$$\{\gamma^n (i\partial_n + e\mathfrak{A}_n(x)) - m\} G(x, y) - ie\gamma^n \int D_{nm}(x, z) dz \frac{\delta G(x, y)}{\delta \mathfrak{A}_m(z)} = -\delta(x - y). \quad (38)$$

С другой стороны, дифференцируя уравнение (35) по  $J^n(y)$ , с учетом (35) и (37), получаем

$$\square_x D_{mn}(x, y) = -g_{mn} \delta(x - y) + ie \int \text{Sp} \left\{ \gamma_m \frac{\delta G(x, x)}{\delta \mathfrak{A}_l(z)} \right\} dz D_{ln}(z, y). \quad (39)$$

Уравнения (38) и (39) образуют систему, в которой функции Грина  $G$  и  $D$  следует рассматривать как функционалы эффективного поля  $\mathfrak{A}$ . Ток  $J$  в этих уравнениях не фигурирует.

Входящие в (38) и (39) вариационные производные с помощью соотношений типа (37.28), (37.34) могут быть выражены через сильно-связную вершинную функцию

$$\Gamma^n(x, y; z) = -\frac{\delta G^{-1}(x, y)}{\delta \mathfrak{A}_n(z)}. \quad (40)$$

Формула (40) является аналогом формулы (37.36). Получаем:

$$\frac{\delta G(x, y)}{\delta \mathfrak{A}_n(z)} = \int G(x, x') dx' \Gamma^n(x', y'; z) dy' G(y', y). \quad (41)$$

Подставляя (41) в уравнения (38) и (39), находим

$$(i\hat{\partial} + e\mathfrak{A}(x)) G(x, y) - \int M(x, z) dz G(z, y) = -\delta(x - y) \quad (42)$$

и

$$\square_x D_{mn}(x, y) - \int P_m^l(x, z) dz D_{ln}(z, y) = -g_{nm} \delta(x, y), \quad (43)$$

где введенные оператор массы  $M$  и оператор поляризации  $P$  определены соотношениями

$$M(x, y) =$$

$$= m\delta(x-y) - ie\gamma^n \int G(x, x') dx' \Gamma^n(x', y; z') dz' D_{nm}(z', x), \quad (44)$$

$$P_m^l(x, z) = ie \text{Sp} \left[ \gamma_m \int G(x, x') dx' \Gamma^l(x', y; z) dy G(y, x) \right]. \quad (45)$$

Подчеркнем, что операторы  $\Gamma$ ,  $M$  и  $P$  подобно функциям Грина  $G$  и  $D$ , являются функционалами  $\mathfrak{A}$ .

Для уяснения физического смысла операторов  $\Gamma$ ,  $M$  и  $P$  удобно перейти от интегро-дифференциальных уравнений (42), (43) к чисто интегральным уравнениям с помощью операции, обратной применению операторов  $\square$  и  $(i\hat{d} - m)$ . Для этого достаточно умножить (42) на  $S^c(z-x)$ , а (43) — на  $D_0^c(z-x)$  и интегрировать по  $x$ . В результате интегрирования по частям получим:

$$G(z, y) = S^c(z-y) + e \int dx S^c(z-x) \mathfrak{A}(x) G(x, y) - \int S^c(z-x) dx M^l(x, x') dx' G(x', y), \quad (46)$$

$$M^l(x, y) = M(x, y) - m\delta(x-y), \quad (47)$$

$$D_{mn}(z, y) = g_{mn} D_0^c(z-y) - \int D_0^c(z-x) dx P_m^l(x, x') dx' D_{ln}(x', y), \quad (48)$$

или, в символической сокращенной форме,

$$G = S^c + e S^c \mathfrak{A} G - ie S^c (\gamma G \Gamma D) G, \quad (49)$$

$$D = D_0 - ie D_0 \text{Sp} (\gamma G \Gamma G) D. \quad (50)$$

Уравнениям (46—48) могут быть сопоставлены графические схемы, изображенные на рис. 57. Входящие в эти схемы элементы

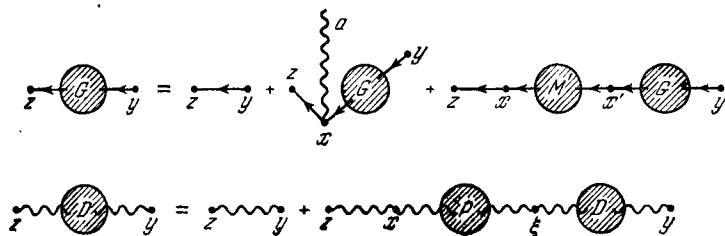


Рис. 57.

$M^l$  и  $P$  расшифровываются с помощью определений (44) и (45), что графически изображено на рис. 58.

Интегральные уравнения для полных функций Грина типа (44—48) называются иногда *уравнениями Дайсона*. Существенно, что подобные уравнения не образуют замкнутой схемы. Так, в уравнения (44—48) входит вершинная функция  $\Gamma$ , которая связана с  $G$  операцией вариационного дифференцирования. Разумеется для  $\Gamma$  можно также получить интегральное уравнение. Для этого следует продифференцировать по  $\mathcal{A}_m$  уравнение (46) и затем по формуле (40) перейти к  $\Gamma$ . Полученное таким путем соотношение в своей правой части будет содержать величину

$$\frac{\delta \Gamma^n(x, y; z)}{\delta \mathcal{A}_m(t)} \langle T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) A_n(z) A_m(t) S \} \rangle_0,$$

связанную с четыреххвостной вершинной функцией  $K_{mn}$  комптоновского типа. Таким образом, система (44—48) дополненная «уравнением» для  $\Gamma$ , опять окажется незамкнутой. Продолжая этот процесс дальше, мы будем получать уравнения, содержащие все более высокие функции Грина. Уравнения (44—48), функционально зависящие от  $\mathcal{A}$ , являются производящими уравнениями для такой бесконечной цепочки.

Изложенный метод может быть также непосредственно применен к получению замкнутых уравнений для более сложных образований, например для функций Грина двух фермионов, двух фотонов и т. п. Определяя подобные функции через вакуумные ожидания от хронологического произведения соответствующего числа операторов полей, с помощью обобщенной теоремы Вика можно построить для них уравнения, подобные полученным Швингером (1951б) для двухфермионной функции Грина.

8.5. Учет контрчленов. Как уже отмечалось, «полные» функции Грина содержат расходимости того же типа, что и матрица рассеяния. Для компенсации их необходимо ввести в лагранжиан взаимодействия известные контрчлены, т. е. перейти от лагранжиана (4) к (33.38).

Напомним, что контрчлены (33.38) устраняют из  $S$ -матрицы все расходимости, кроме вакуумных петель, которые в функциях Грина согласно определению компенсируются множителем  $(S_0)^{-1}$ .

Повторяя проведенное выше рассуждение для лагранжиана (33.38), т. е. вводя в формулы (29)---(30), (33), (34) и т. д. контрчлены (33.38), получим уравнения Швингера для функций Грина,

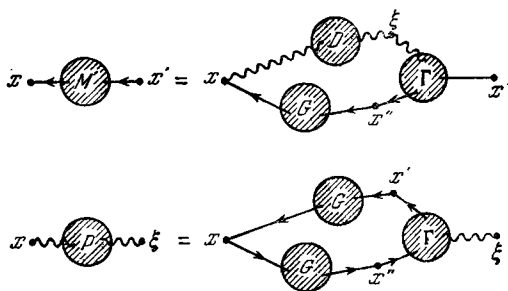


Рис. 58.

не содержащих расходимостей, в виде

$$Z_2 \left( i \frac{\partial}{\partial x} - m \right) G(x, y) - i Z_1 e \gamma^k \left( \frac{\delta}{\delta J^k(x)} + i \mathfrak{A}_k(x) \right) G(x, y) = -\delta(x-y), \quad (51)$$

$$Z_3 \square D_{kl}(x, y) = -g^{kl} \delta(x-y) + i Z_1 e \int d\xi \operatorname{Sp} \left\{ \gamma^k \frac{\delta G(x, x)}{\delta \mathfrak{A}_m(\xi)} \right\} D_{ml}(\xi, y) - (Z_3 - 1) \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_n} D_{nl}(x, y). \quad (52)$$

Совершенно аналогичным путем можно прийти к уравнениям типа (42), (43), содержащим вместо вариационных производных операторы  $M$  и  $P$ .

Существенное отличие уравнения (52) для функции  $D$  от уравнения (39) заключается в наличии в нем члена

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_n} D_{nl}(x, y).$$

Происхождение этого выражения связано с поперечной формой контрчлена  $(Z_3 - 1)$ , который отличается от лагранжиана свободного электромагнитного поля членом  $(\partial A / \partial x)^2$ . По существу, мы встречаемся здесь с последствиями «неполной ренормировки» функции  $D$ , содержащей продольную составляющую. Ясно поэтому, что для получения уравнения с контрчленами, совпадающего по форме с уравнением без контрчленов, достаточно использовать вместо диагонального спаривания операторов электромагнитного поля чисто поперечное спаривание.

Уравнения (51), (52) могут быть получены из (38), (39) (с учетом (36)) с помощью формального преобразования Дайсона

$$G \rightarrow Z_2 G, \quad D^{\text{tr}} \rightarrow Z_3 D^{\text{tr}}, \quad D^l \rightarrow D^l, \\ \mathfrak{A} \rightarrow Z_3^{1/2} \mathfrak{A}, \quad e \rightarrow Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e. \quad (53)$$

Если теперь перейти к интегральной форме уравнений Швингера, то мы получим вместо (49), (50)

$$Z_2 G = S^c - Z_1 e \gamma S^c \mathfrak{A} G - i Z_1 e^2 S^c (\gamma G \Gamma D) G, \quad (54)$$

$$Z_3 D = D_0 - i Z_1 e^2 D_0 \operatorname{Sp} (\gamma G \Gamma G) D - (Z_3 - 1) \partial_\mu \partial_\nu D_{\mu\nu}. \quad (55)$$

Последние уравнения получаются из (49), (50) тем же преобразованием (53). При этом закон преобразования вершинной функции

$$\Gamma \rightarrow Z_1^{-1} \Gamma \quad (56)$$

вытекает из (40) и (53).

По поводу уравнений типа (51), (52) необходимо сделать еще следующее замечание. Непосредственным стимулом к построению уравнений Швингера явилась надежда получить какие-либо сведения о полных функциях Грина, которые не были бы связаны с аппаратом теории возмущений. Однако решения уравнений типа (38),

(39) содержат расходимости, в то время как уравнения (51), (52) для функций Грина, свободных от бесконечностей, включают расходящиеся постоянные и потому имеют формальный характер. Таким образом, получение какой-либо информации о полных функциях Грина на основе уравнений Швингера наталкивается на существенные трудности, связанные с проведением программы выделения бесконечностей.

Разумеется, если рассматривать эти уравнения только как источник получения формальных разложений по степеням константы связи, то соответствующие расходимости скомпенсируются, но при этом мы не получим ничего нового по сравнению с теорией возмущений. Проблема же нахождения эффективного способа решения этих уравнений, не основанного на теории возмущений, в настоящее время еще далека от своего сколько-нибудь удовлетворительного завершения.

## УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА И ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

### § 39. Уравнение Шредингера для амплитуды состояний \*)

**39.1. Уравнение для  $\Phi(g)$  в вариационных производных.** При изучении взаимодействия свободных полей до сих пор мы рассматривали положения, когда взаимодействие эффективно в конечной пространственно-временной области. С помощью соответствующего предельного перехода, в процессе которого «область эффективности» взаимодействия неограниченно расширяется, мы получали возможность определить элементы матрицы рассеяния. Последние, в свою очередь, позволили вычислять эффективные сечения для процесса рассеяния, в начале и конце которого частицы можно считать свободными. Однако этим не исчерпывается круг задач, стоящих перед теорией. Мы имеем в виду вопросы определения энергетических и иных характеристик связанных состояний, времен жизни возбужденных состояний, эффективных поперечных сечений процессов в случаях, когда в начальном и конечном состоянии имеются связанные комплексы частиц, и т. п.

Для решения этих задач матрица рассеяния недостаточна; оказывается необходимым иметь инструмент более детального описания системы, например уравнение типа уравнения Шредингера. Для естественного построения такого уравнения будем исходить формально из установленного ранее соотношения (20.13):

$$\Phi(g) = S(g) \Phi,$$

где  $\Phi$  — постоянная,  $S(g)$  — матрица рассеяния при взаимодействии, включенном с интенсивностью  $g$ , а  $\Phi(g)$  — амплитуда состояния, в котором находится система, испытавшая взаимодействие указанной интенсивности. Варьируя это соотношение по функции  $g(x)$  и используя условие унитарности матрицы  $S(g)$  получаем:

$$\frac{\delta \Phi(g)}{\delta g(x)} = \frac{\delta S(g)}{\delta g(x)} \Phi = \frac{\delta S(g)}{\delta g(x)} \overset{\dagger}{S}(g) \Phi(g).$$

Поэтому, вводя оператор (ср. §§ 21.2, 31.2)

$$H(x; g) = i \frac{\delta S(g)}{\delta g(x)} \overset{\dagger}{S}(g), \quad (21.10)$$

\*) Изложение базируется на работах Боголюбова (1951б, 1952).

можем записать

$$i \frac{\delta \Phi(g)}{\delta g(x)} = H(x; g) \Phi(g) \quad (1)$$

или, в интегральной форме,

$$i \delta \Phi(g) = \int H(x; g) \Phi(g) \delta g(x) dx. \quad (2)$$

Уравнение (2) по своей форме является вариационным аналогом уравнения Шредингера, а оператор  $H(x; g)$  играет роль обобщенного гамильтониана (точнее, плотности обобщенной функции Гамильтона). Более того, аналогия с уравнением Шредингера увеличивается и, как мы увидим ниже, формально приводит к совпадению, если функцию  $g(x)$  устремить к разрывной функции, равной единице для всех точек 4-пространства, имеющих временную координату, меньшую некоторого фиксированного

$$x^0 = \tau,$$

и равную нулю для всех точек с  $x^0 > \tau$ . Такая  $g(x)$ , очевидно, описывает процесс мгновенного выключения взаимодействия во всем трехмерном пространстве в момент времени  $x^0 = \tau$ . Амплитуда состояния  $\Phi(g)$  при этом становится функцией параметра  $\tau$  и может быть обозначена через  $\Phi_\tau$ .

Но и в обычной теории такое понятие, как *волновая функция в момент времени  $\tau$* , может быть введено с помощью процесса мгновенного выключения взаимодействия в момент времени  $\tau$ . После такого выключения волновая функция перестает изменяться, и мы имеем просто

$$\Phi_\tau = \Phi_\infty.$$

Если при этом произвести выключение взаимодействия не на 4-плоскости  $x^0 = \tau$ , а на некоторой пространственно-подобной 4-поверхности  $\sigma$ :

$$x^0 = T_\sigma(x),$$

то мы получим известное ковариантное уравнение в форме Томонага—Швингера. При этом, как в обычном уравнении Шредингера, плотность гамильтониана  $H(x; \sigma)$  будет зависеть от поведения полей в бесконечно малой окрестности точки  $x$ . Наша точка зрения отличается от обычной тем, что мы используем процесс непрерывного, а не мгновенного выключения взаимодействия.

**39.2. Уравнение Шредингера в представлении взаимодействия и уравнение Томонага—Швингера.** Исследуем поведение оператора  $H(x; g)$  в процессе устремления непрерывной функции  $g(x)$  к упомянутому разрывному пределу. Напомним, прежде всего, что, как было показано в § 21.2, обобщенный гамильтониан  $H(x; g)$  может быть представлен в виде функционального разложения по степеням

взаимодействия

$$H(x; g) = H_0(x) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int H_n(x, x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (3)$$

где  $H_n$  выражены с помощью соотношений

$$H_0(x) = -\mathcal{L}(x), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} H_n(x, x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} P\left(\frac{1, \dots, k}{k+1, \dots, n}\right) S_{k+1}(x, x_1, \dots, x_k) S_{n-k}^\dagger(x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (21.12) \\ &\quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

через коэффициенты разложения  $S_k(x_1, \dots, x_k)$  матрицы  $S(g)$  и в силу условия причинности, накладываемого на  $S(g)$ , обладают свойством

$$\left. \begin{aligned} H_n(x, x_1, \dots, x_n) &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \\ \text{если, хотя бы для одного } x_j & x_j \gtrsim x_l \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (21.13)$$

Поэтому интеграция по каждому из  $x_j$  в членах разложения (3) фактически происходит по световому конусу точки  $x$ , направленному в будущее. Сходимость интегралов, входящих в (3), будет обеспечена надлежаще быстрым (например, экспоненциальным) убыванием достаточно гладкой весовой функции  $g(x)$  при  $x_j^0$ , стремящемся к бесконечности. Этому условию функция  $g(x)$  будет, очевидно, удовлетворять, если ее определить как аппроксимацию известной разрывной функции  $\theta(\tau - x^0)$  (см. (3.18)), равной нулю при значениях  $x^0$ , больших некоторого параметра  $\tau$ . Положим, например,

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= f(\tau - x^0), \\ f(t) - \theta(t) &= 0 \quad \text{при } |t| \geq \Delta t, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

выбрав при этом достаточно гладкую функцию  $f(t)$ . Ясно, что интегралы (3) при этом выборе  $g(x)$  сходятся, поскольку  $g(x_j)$  при  $x_j^0 \rightarrow \infty$  убывает достаточно быстро, а от поведения  $g(x_i)$  на пространственной и отрицательной временной бесконечностях в силу свойства (21.13) интегралы (3) не зависят.

Сделанный выбор  $g(x)$  соответствует включению взаимодействия во всем 3-пространстве во время от  $-\infty$  до момента  $\tau - \Delta t$  и постепенному выключению в интервале от  $\tau - \Delta t$  до  $\tau + \Delta t$ .

Амплитуду состояния теперь можно рассматривать как функцию параметра  $\tau$ :

$$\Phi(g) = \Phi_\tau.$$

Определяя из (5) вариацию  $\delta g$ :

$$\delta g(x) = f'(\tau - x^0) \delta \tau,$$



находим с помощью (2)

$$i\delta_\tau \Phi_\tau = \int H(x; f) f'(\tau - x^0) dx \delta\tau \Phi_\tau,$$

откуда следует:

$$i \frac{\partial \Phi_\tau}{\partial \tau} = \int H(x; f) f'(\tau - x^0) dx \Phi_\tau. \quad (6)$$

По определению функции  $f$  интеграция производится здесь по временному «слою» от  $\tau - \Delta t$  до  $\tau + \Delta t$ . С другой стороны, интеграция в (3) происходит по световому конусу с «высотой»

$$h = \tau + \Delta t - x^0.$$

Учитывая, что в (6)  $x^0$  во всяком случае больше, чем  $\tau - \Delta t$ , получаем (рис. 59), что  $h \leq 2\Delta t$ . Таким образом, интеграция в (3) производится по области, удовлетворяющей условию

$$x_j^0 - x^0 \leq 2\Delta t, \quad |x_j - x| \leq 2\Delta t. \quad (7)$$

Поэтому входящий в (6) «эф-фективный» гамильтониан  $H(x; f)$  зависит от поведения функций поля в окрестности точки  $x$  порядка  $2\Delta t$ . Если бы имелась возможность перейти в (6) к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$  и вместо  $f$  оперировать с  $\theta$ , то мы получили бы вместо него уравнение

$$i \frac{\partial \Phi_\tau}{\partial \tau} = \int H(x) dx \Phi_\tau, \quad (8)$$

в котором плотность гамильтониана  $H(x)$  зависит от поведения полей в бесконечно малой окрестности точки  $x$ . Уравнение (8), по существу, и есть *уравнение Шредингера в представлении взаимодействия*.

До сих пор говорилось о специальном случае выключения взаимодействия вдоль плоскости  $x^0 = \tau$ . Нетрудно, однако, обобщить это рассуждение. Рассмотрим пространственно-подобную поверхность  $\sigma$

$$x^0 = T_\sigma(\mathbf{x}),$$

для которой условие пространственного подобия выполняется в сильном смысле:

$$|T_\sigma(\mathbf{x}) - T_\sigma(\mathbf{y})| < \lambda |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{y}),$$

с постоянной  $\lambda < 1$ . Введем разрывную функцию  $\theta_\sigma(\mathbf{x})$  такую, что

$$\left. \begin{aligned} \theta_\sigma(\mathbf{x}) &= 1 && \text{при } x^0 > T_\sigma(\mathbf{x}), \\ \theta_\sigma(\mathbf{x}) &= 0 && \text{при } x^0 < T_\sigma(\mathbf{x}), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

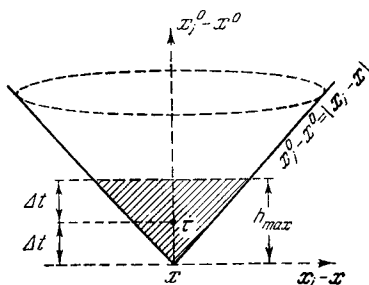


Рис. 59.

т. е.  $\theta_\sigma(x) = \theta(x^0 - T_\sigma(x))$ , и рассмотрим какую-либо достаточно гладкую функцию  $g(x)$ , отличающуюся от  $\theta_\sigma(-x)$  лишь внутри слоя

$$|x^0 - T_\sigma(x)| \leq \Delta t.$$

Ясно, что тогда эффективная область интеграции по каждому  $x_j$  в выражении

$$\int H_n(x, x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (10)$$

подобно разобранному случаю определяется пересечением верхнего светового конуса точки  $x$  и «слоя» высотой  $2\Delta t$  вокруг поверхности  $\sigma$ , расположенного под углом к оси конуса, не меньшим, чем

$$\varphi = \arctg \lambda. \quad (11)$$

Из рис. 60 видно, что высота той части конуса, в которой заключена область интеграции (на чертеже заштрихована), не превышает величины  $2\Delta t(1-\lambda)^{-1}$ .

Поэтому область интеграции ограничена неравенствами

$$x_j^0 - x^0 \leq \frac{2\Delta t}{1-\lambda},$$

$$|x_j - x| \leq \frac{2\Delta t}{1-\lambda}. \quad (12)$$

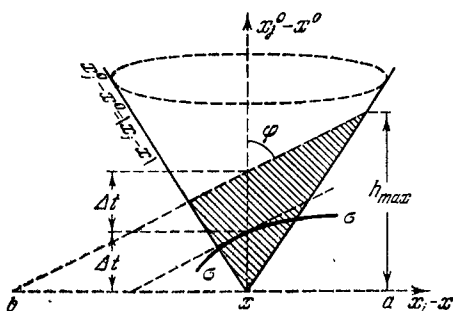


Рис. 60.

Как видно, в этом случае временные и пространственные размеры эффективной области интеграции в (10) не превосходят величины, пропорциональной  $\Delta t$ . Сператор  $H(x; g)$  будет поэтому зависеть от состояния полей только в окрестности точки  $x$ , причем размеры окрестности приближаются к нулю при утончении «слоя размытости», выделяемого функцией  $g(x)$ .

Совершим теперь в уравнении (2) формальный переход к пределу, соответствующий бесконечному утончению слоя размытости  $g(x)$ :

$$\Delta t \rightarrow 0, \quad g(x) \rightarrow \theta(T_\sigma(x) - x_0) = \theta_\sigma.$$

При этом вариации  $\delta g(x)$  будет соответствовать вариация поверхности  $\sigma$ , причем

$$\delta g(x) = g'(T_\sigma - x_0) \delta T_\sigma(x).$$

Вспомним определение вариационной производной по поверхности  $\sigma$ :

$$\frac{\delta F(\sigma)}{\delta \sigma(x)} = \lim_{\Omega(x) \rightarrow 0} \frac{F(\sigma') - F(\sigma)}{\Omega(x)},$$

где  $\Omega(x)$  — объем, заключенный между поверхностями  $\sigma'$  и  $\sigma$ , а  $\sigma'$  получается малой деформацией  $\delta T_\sigma$  поверхности  $\sigma$  вблизи точки  $x$ . Очевидно,

$$\Omega(x) = \int_{\sigma}^{\sigma'} \delta T_\sigma dx'$$

является 4-мерным объемом размытости.

В результате описываемого предельного перехода уравнение (2) перейдет в

$$i\delta_\sigma \Phi(\sigma) = \lim_{g \rightarrow \theta_\sigma} \int H(x, g) g'(T_\sigma(x) - x_0) dx_0 \Omega(x) \Phi(\sigma)$$

или

$$i \frac{\delta \Phi(\sigma)}{\delta \sigma(x)} = H(x, \sigma) \Phi(\sigma), \quad (13)$$

где оператор

$$H(x, \sigma) = \lim_{g \rightarrow \theta_\sigma} \int H(x, g) g'(T_\sigma(x) - x_0) dx_0 \quad (14)$$

зависит от поведения полей лишь в бесконечно малой окрестности точки  $x$  на поверхности  $x_0 = T_\sigma(x)$ . Мы получили известное *уравнение Томонага — Швингера*.

Таким образом, при сжатии области изменения функции  $g(x)$  и устремлении ее к разрывному пределу мы действительно можем получить из (1) как обычное уравнение Шредингера (8), так и уравнение Томонага—Швингера (13). При этом эффективный гамильтониан  $H(x; \sigma)$  или  $H(x; f)$  определяется формулами (8) и (14).

**39.3. Сингулярности обобщенного гамильтониана.** Исследуем более подробно предельный переход, предписываемый формулой (14). При этом, чтобы не сталкиваться с дополнительными осложнениями, связанными с проблемой ультрафиолетовых расходимостей, будем исходить из регуляризованного выражения для  $H(x, g)$  с конечными вспомогательными массами  $M$ .

Начнем с члена второго порядка в  $H(x, g)$ . Из уравнений (21.12) и (21.41) находим

$$H_1(x, x') = -\Lambda_2(x, x') + i\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(x') - iT(\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(x')).$$

Если регуляризация проведена для каждой внутренней линии, то при конечных  $M$  выражение

$$\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(x') - T(\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(x'))$$

является регулярным, и интеграл от произведения его на  $g(x')$  по области (12) в пределе  $\Delta t \rightarrow 0$  обращается в нуль, поскольку сама область при этом сжимается в точку. В то же время соответствующий интеграл

$$-\int \Lambda_2(x, x') g(x') dx'$$

с квазилокальным оператором, содержащим  $\delta$ -функцию, отличен от нуля.

Совершенно аналогичными рассуждениями можно установить, что в более общем случае имеет место предельное равенство

$$\int H_n(x, x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ = - \int \Lambda_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Для доказательства этого, представив  $H_n$  в виде суммы двух членов:

$$H_n(x, x_1, \dots, x_n) = -\Lambda_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n) + \tilde{H}_n(x, x_1, \dots, x_n),$$

достаточно убедиться в том, что оператор  $\tilde{H}_n$  содержит число  $\delta$ -функций, меньшее  $n$ , и потому  $n$ -кратная интеграция его по бесконечно малой области также даст нуль.

Итак, предельное (при  $\Delta t \rightarrow 0$ ) выражение для плотности гамильтониана имеет вид (Суханов (1962а))

$$H(x, \sigma) = - \lim_{g \rightarrow \theta_\sigma} \int dx_0 g'(T_\sigma - x_0) \{ \mathcal{L}(x) + \\ + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int \Lambda_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n \} = \\ = - \lim_{g \rightarrow \theta_\sigma} \int dx_0 g'(T_\sigma - x_0) \frac{\delta \int \mathcal{L}(y, g) dy}{\delta g(x)}. \quad (15)$$

Особенности этого выражения проиллюстрируем на двух примерах.

В теории с взаимодействием  $\lambda : \varphi^3(x)$ : квазилокальные операторы  $\Lambda_{n+1}$  с производными относятся лишь к вакуумным членам, не содержащим операторов полей. Их вклад в предельный гамильтониан (15) пропорционален интегралу

$$-2 \lim_{g \rightarrow \theta_\sigma} \int dx_0 g'(T_\sigma - x_0) \int dy \square \delta(x - y) g(T_\sigma - y_0) = \\ = \lim_{g \rightarrow \theta_\sigma} \int dx_0 \frac{\partial}{\partial x_0} (g'(T_\sigma - x_0))^2, \quad (16)$$

обращающемуся в нуль вследствие убывания функции  $g'$  на бесконечности. В остальных членах квазилокальные операторы не содержат производных, и предельный переход (15) с учетом свойств симметрии операторов  $\Lambda_{n+1}$  (подробнее см. Суханов (1962 а)) дает:

$$H(x, \sigma) = -\mathcal{L}(x; 1)|_{x^0 = T_\sigma(x)}, \quad (17)$$

где эффективный лагранжиан  $\mathcal{L}(x; g)$  теории  $\lambda : \varphi^3$ : определен формулой (36.7).

В теории  $\lambda : \varphi^4$ : производные в  $\Lambda_{n+1}$  содержатся уже в операторных членах. При выполнении интеграций по  $x_i$  в (15) эти производные перейдут как на поля  $\varphi(x_i)$ , так и на функции  $g(x_i)$ . В членах

первого типа предельный переход  $g(x) \rightarrow \theta_\sigma$  допустим и (в совокупности с пределом членов без производных) дает выражение, аналогичное (17). Для членов же второго типа формального предела  $g \rightarrow \theta_\sigma$  не существует. Действительно, во втором порядке по  $g(x)$  в  $H(x, \sigma)$  будет давать вклад выражение

$$\begin{aligned} -2 \lim_{g \rightarrow \theta_\sigma} \int dx_0 g'(T_\sigma - x_0) : \varphi^2(x) : g''(T_\sigma - x_0) = \\ = 2 \lim_{g \rightarrow \theta_\sigma} \int dx_0 \frac{\partial}{\partial x_0} [ : \varphi^2(x) : (g'(T_\sigma - x_0))^2 ] - \\ - \lim_{g \rightarrow \theta_\sigma} \int dx_0 \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} : \varphi^2(x) : \right] [g'(T_\sigma - x_0)]^2. \quad (18) \end{aligned}$$

По тем же соображениям, что и в (16), первый член разности здесь обращается в нуль. Во втором члене в пределе  $g \rightarrow \theta_\sigma$  появляется выражение неинтегрируемого типа, поскольку  $g'(x) \rightarrow \delta(x_0 - T_\sigma)$ . Подчеркнем, что эта трудность возникает и при конечных вспомогательных массах  $M$ , она связана с резким исключением взаимодействия на пространственно-подобной поверхности  $x_0 = T_\sigma$ . Существование расходимостей такого типа впервые было отмечено Штюкельбергом (1951), который назвал их *поверхностными*.

Формально предел  $\lim_{g \rightarrow \theta_\sigma} [g'(T_\sigma - x_0)]^2$  можно доопределить как расширение функционала  $[\delta(x)]^2$ , определенного на основных функциях, обращающихся в 0 в точке  $x = 0$ , на все основные функции класса  $C(q, r, n)$ . Такое расширение (см., например, Владимиров (1964)) имеет вид

$$[\delta(x)]^2 = C\delta(x), \quad (19)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. В этом случае выражение (18) примет вид

$$-C \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} : \varphi^2(x) : \right] \Big|_{x_0 = T_\sigma}.$$

Аналогичные вклады (с новыми произвольными постоянными) возникают от старших порядков по  $g(x)$ .

Таким образом, в теории  $\lambda\varphi^4(x)$ : формальное доопределение (19) предельного перехода  $g \rightarrow \theta_\sigma$  приводит к виду (Суханов, 1962б):

$$H(x, \sigma) = -\mathcal{L}(x, 1) \Big|_{x_0 = T_\sigma} - C(M) \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} : \varphi^2(x) : \right] \Big|_{x_0 = T_\sigma}, \quad (20)$$

где эффективный лагранжиан  $\mathcal{L}(x, g)$  определен формулой (21.39), а  $C(M)$  представляет собой сумму вкладов в перенормировочный множитель  $(Z_3 - 1)$  от различных порядков теории возмущений, умноженных на произвольные постоянные  $c$  (при  $M \rightarrow \infty$  эти вклады расходятся).

Посмотрим, как проявляет себя этот произвол в решении уравнения Томонага—Швингера (13), которое естественно искать в виде

$$\Phi(\sigma) = S(\sigma) \Phi. \quad (21)$$

Мы имеем

$$S(\sigma) = T \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\sigma} H(y, \sigma) dy \right\} \equiv S(\sigma, -\infty), \quad (22)$$

причем  $H(y, \sigma)$  определяется формулой (20). Очевидно, вклад второго члена в (20) сосредоточен на поверхности  $x_0 = T_\sigma$ . Поскольку при этом  $\mathcal{L}(x, 1)$  и  $\varphi^2(x)$  коммутируют при равных временах, этот вклад можно вынести из-под знака  $T$ -экспоненты и выделить в отдельный экспоненциальный множитель слева:

$$\exp \left\{ iC(M) \int d\sigma(x) : \varphi^2(x) : \right\} \Big|_{x_0 = T_\sigma}. \quad (23)$$

Таким образом, весь произвол в  $S(\sigma)$ , появляющийся при доопределении предельного перехода  $g \rightarrow \theta_\sigma$ , удается выделить в унитарный операторный множитель, сосредоточенный на поверхности  $\sigma$ . Заметим, что этот произвол не сказывается на полной  $S$ -матрице.

Отметим, что рассуждения, приведшие нас к формулам (15) и (20), справедливы лишь в случае, когда регуляризация проводится для каждой внутренней линии диаграммы. Такая регуляризация, конечно, «избыточна»; для устранения расходимостей было бы достаточно регуляризовать только сильно связанные части диаграмм; однако ее преимуществом является простота формул типа (15) и (20).

При минимальной же регуляризации выражения типа

$$\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(x') - T(\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(x')),$$

вообще говоря, не регулярны и содержат квазилокальную компоненту, если в лагранжиане имеются производные. Действительно, слабо связанной диаграмме отвечает член с единственной сверткой, возникающий при раскрытии  $T$ -произведения лагранжианов, причем соответствующая линия теперь не регуляризуется. Поэтому, например, две временные производные, действовав на свертку  $D^c(x - x')$ , дадут квазилокальный член, пропорциональный  $\delta(x - x')$ . (Ранее, при неминимальной регуляризации, множителем при этом члене стояла обращающаяся в нуль сумма коэффициентов Паули—Вилларса.)

В итоге, в каждом порядке по  $g(x)$ , наряду с вкладом от операторов  $\Lambda_{n+1}$ , в пределе  $\Delta t \rightarrow 0$  появляется дополнительный квазилокальный вклад в  $H(x, g)$ :

$$-\int \Delta_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (24)$$

так что вместо (15) будет справедлива формула (Суханов (1961))

$$H(x, \sigma) = - \lim_{g \rightarrow \theta_\sigma} \int dx^0 g'(T_\sigma - x^0) \frac{\delta}{\delta g(x)} \int [\mathcal{L}(y, g) + \Delta(y, g)] dy, \quad (25)$$

где

$$\Delta(x_1; g) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \int \Delta_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_2 \dots dx_n. \quad (26)$$

Заметим, что предельный переход  $g \rightarrow \theta_\sigma$  в члене  $\Delta(y, g)$  также приводит к поверхностным расходимостям, поскольку операторы  $\Delta_n$ , как и  $\Lambda_n$ , могут содержать производные.

В примере теории  $\lambda : \varphi^4$  предельное выражение для обобщенного гамилтониана при минимальной регуляризации приобретает вид:

$$H(x, \sigma) = - \mathcal{L}(x, 1) \Big|_{x_0 = T_\sigma} - \Delta(x, 1) \Big|_{x_0 = T_\sigma} - C'(M) \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} : \varphi^2(x) : \right] \Big|_{x_0 = T_\sigma}. \quad (27)$$

Последний член, как и ранее, приводит в матрице  $S(\sigma)$  к (другому) унитарному множителю, сосредоточенному на поверхности  $\sigma$ . Второй член, отличающий  $H(x, \sigma)$  от  $-\mathcal{L}(x; 1)$ , всегда присутствует в теориях с производными. Об этом отличии уже упоминалось в конце § 21 в связи с двумя формами  $S$ -матрицы — виковой и дайсоновой.

Подчеркнем, что все рассуждения мы проводили при конечных вспомогательных массах. В пределе  $M \rightarrow \infty$  перенормировочные константы в эффективном лагранжиане  $\mathcal{L}(x, g)$  расходятся. От-

сюда следует, что в некоторых случаях можно сразу записать «настоящее» уравнение Шредингера (с мгновенным выключением), но тогда в нем автоматически появляются расходящиеся члены.

Мы видим поэтому, что между матрицей рассеяния и уравнением Шредингера существует свойство *дополнительности* в смысле *наличия бесконечностей*, даже после выделения поверхностных членов в унитарный множитель. Так, в обычной теории гамильтониан (т. е. уравнение Шредингера) регулярен, но в  $S$ -матрице содержатся бесконечные члены. С другой стороны, мы только что убедились, что если регуляризовать матрицу рассеяния, то расходимости автоматически появляются в уравнении Шредингера.

В этой связи можно сделать следующее предположение о физической природе появления таких расходимостей. При мгновенном выключении взаимодействия влияние этого процесса на систему столь велико, что практически полностью невозможно определить какие-либо характеристики системы до процесса выключения. С формальной точки зрения мы имеем здесь некоторую аналогию с соотношениями неопределенности Гейзенберга, которые, как известно, связаны с самыми общими свойствами волновых процессов.

Мы приходим к выводу, что в общем случае можно довольно просто записать конечное уравнение для амплитуды  $\Phi(g)$ , где  $g$  — достаточно гладкая функция, но невозможно перейти к пределу  $g \rightarrow \theta_0$  и получить имеющую смысл амплитуду  $\Phi(\sigma)$  при снятии регуляризации, т. е. при  $M \rightarrow \infty$ .

Таким образом, вообще говоря, уравнения Шредингера и Томонага—Швингера в квантовой теории поля могут иметь лишь чисто формальное значение.

Итак, чтобы избежать появления бесконечностей в теории, мы должны работать с достаточно гладкими  $g(x)$ . При этом можно заметить, что для сходимости рассматриваемых интегралов нет необходимости требовать, чтобы  $g'(x)$  была равна нулю всюду вне слоя толщиной  $2\Delta t$ . Достаточно потребовать, чтобы  $g(x)$  достаточно быстро (например, экспоненциально) убывала вне этого слоя и была бы всюду достаточно гладкой. Совершенно очевидно, что класс  $G$  таких функций будет релятивистски-инвариантным по отношению к любому лоренцевому преобразованию  $L$ , т. е. если  $g(x) \in G$ , то также и  $g(Lx) \in G$ .

**39.4. Основные свойства обобщенного гамильтониана.** Установим теперь ряд основных свойств введенного обобщенного гамильтониана  $H(x; g)$ . Ясно, прежде всего, что оператор  $H(x; g)$  является эрмитовым (это было установлено еще в § 21.2), т. е.

$$H^\dagger(x; g) = H(x; g). \quad (28)$$

Трансформационные свойства  $H(x; g)$  могут быть получены из условия ковариантности матрицы  $S(g)$ :

$$S(Lg) = U_L S(g) U_L^\dagger. \quad (20.21)$$

Вспоминая, что  $Lg(x) = g(L^{-1}x)$ , получаем отсюда

$$H(x; Lg) = i \frac{\delta S(Lg)}{\delta g(L^{-1}x)} \overset{\dagger}{S}(Lg) = i U_L \frac{\delta S(g)}{\delta g(L^{-1}x)} \overset{\dagger}{U}_L U_L \overset{\dagger}{S}(g) U_L,$$

$$\left. \begin{aligned} \text{т. е.} \quad & H(x; Lg) = U_L H(L^{-1}x; g) \overset{\dagger}{U}_L \\ \text{или} \quad & H(x; g) = U_L H(L^{-1}x; L^{-1}g) \overset{\dagger}{U}_L. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Теперь легко видеть, что ковариантность уравнения (1), как это и должно быть, является следствием законов преобразования амплитуды состояния (20.18) и гамильтониана (29). В самом деле, переходя в (2) от  $g$  к  $L^{-1}g$  и используя (20.18), получаем последовательно

$$\begin{aligned} i\delta\Phi'(g) &= iU_L \delta\Phi(L^{-1}g) = U_L \int H(x; L^{-1}g) \delta g(Lx) dx \Phi(L^{-1}g)_{Lx \rightarrow x} = \\ &= U_L \int H(L^{-1}x; L^{-1}g) \delta g(x) dx \overset{\dagger}{U}_L U_L \Phi(L^{-1}g) \end{aligned}$$

или, с учетом (29),

$$i\delta\Phi'(g) = \int H(x; g) \delta g(x) dx \Phi'(g),$$

чем и доказана ковариантность.

Нетрудно заметить, что определение гамильтониана (21.10) с учетом унитарности матрицы  $S(g)$  автоматически обеспечивает совместность уравнений (1). Для этого достаточно вычислить вторую вариацию амплитуды состояния

$$\frac{\delta^2 \Phi}{\delta g(x) \delta g(y)}$$

и установить, что ее значение не зависит от порядка варьирования при  $x \sim y$  (подробнее об этом см. в § 40.2).

Мы видим, таким образом, что, исходя из матрицы рассеяния, определенной условиями унитарности, причинности и ковариантности, можно однозначно получить уравнение типа Шредингера, удовлетворяющее условиям ковариантности, совместности и локализуемости гамильтониана. Можно также показать возможность обратной процедуры.

Как уже отмечалось, оба формализма (т. е. уравнение Шредингера и матрица  $S(g)$ ) не содержат обычных расходимостей при условии принадлежности  $g$  к классу  $G$ . Поэтому встает вопрос о формулировке всей теории для случая, когда взаимодействие включено с интенсивностью  $g(x) \in G$ . Иначе говоря, требуется уметь определять основные физические величины с помощью амплитуды состояния  $\Phi(g)$ , подобно тому как они определяются в обычной теории с помощью амплитуд  $\Phi_r$  или  $\Phi_\sigma$ . Так как специальный вид функции  $g$  не имеет физического смысла, необходимо обеспечить при построении теории независимость наблюдаемых значений физических величин от частного выбора  $g(x)$ .



### § 40. Динамические переменные системы взаимодействующих полей

Рассмотрим вопрос о построении динамических характеристик системы взаимодействующих полей, например, 4-вектора энергии-импульса, тензора момента и 4-вектора тока. В теории невзаимодействующих полей соответствующие выражения непосредственно получаются с помощью теоремы Нётер и принципа экстремального действия. В случае взаимодействующих полей этот путь оказывается неконструктивным, так как мы не имеем в своем распоряжении точных решений уравнений взаимодействующих полей, осуществляющих экстремум полного действия системы в целом. В этом случае приходится иметь дело с операторными волновыми функциями свободных полей и из них конструировать различные физические величины.

**40.1. Энергия, импульс и тензор момента \*).** Для построения 4-вектора энергии-импульса и тензора момента построим бесконечно малое унитарное преобразование амплитуды состояния при бесконечно малых преобразованиях Пуанкаре

$$x \rightarrow x' = Lx = x + \delta x; \quad \delta x^k = a^k + \omega^{kn} x_n. \quad (9.16)$$

При этом согласно (20.18)

$$\Phi(g) \rightarrow \Phi'(g) = U_L \Phi(L^{-1}g). \quad (1)$$

Вычислим бесконечно малую вариацию

$$\delta_L \Phi(g) = \Phi'(g) - \Phi(g).$$

С учетом (9.17) и (20.19) находим:

$$\Phi'(g) = U_L S(L^{-1}g) \Phi = U_L S(L^{-1}g) \overset{\dagger}{S}(g) \Phi(g).$$

Таким образом, вариация  $\delta_L \Phi$  обусловлена как унитарным преобразованием  $U_L$ , так и преобразованием области взаимодействия

$$\delta_L \Phi(g) = [U_L S(L^{-1}g) \overset{\dagger}{S}(g) - 1] \Phi(g). \quad (2)$$

Принимаем теперь во внимание, что в соответствии с (9.17) и (9.18)

$$U_L = 1 + \delta U_L, \quad \delta U_L = iP_0^k a_k + \frac{i}{2} M_0^{kl} \omega_{kl},$$

где  $P_0$  и  $M_0$  по форме — операторы энергии-импульса и момента количества движения в отсутствие взаимодействия, а также

$$\begin{aligned} S(L^{-1}g) &= S(g + \delta g) = \\ &= S(g) + \int \frac{\delta S(g)}{\delta g(x)} \delta g(x) dx = \left(1 - i \int H(x; g) \delta g(x) dx\right) S(g), \end{aligned}$$

\*) Изложение основано на работе Боголюбова (1951а).

причем в силу (20.17)

$$\begin{aligned} L^{-1}g(x) &= g(Lx) = g(x) + \delta g(x), \\ \delta g(x) &= \partial_k a^k + (1/2)(x^k \partial^l g - x^l \partial^k g) \omega_{kl}. \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (2), находим:

$$\begin{aligned} \delta_L \Phi(g) &= \left[ \delta U_L - i \int H(x; g) \delta g(x) dx \right] \Phi(g) = \\ &= i \left\{ P^k(g) a_k + \frac{1}{2} M^{kl}(g) \omega_{kl} \right\} \Phi(g), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$P^k(g) = P_0^k - \int H(x; g) \frac{\partial g(x)}{\partial x_k} dx \quad (4)$$

и

$$M^{kl}(g) = M_0^{kl} - \int H(x; g) (x^k \partial^l g - x^l \partial^k g) dx. \quad (5)$$

Мы пришли, таким образом, к искомым выражениям для компонент 4-вектора энергии-импульса и тензора момента количества движения динамической системы при наличии взаимодействия. Правильные трансформационные свойства их очевидны из формы записи. Взяв

$$g(x) = f(\tau - x \cdot \xi),$$

где  $\tau$  — параметр поверхности, а  $\xi$  — некоторый 4-вектор, характеризующий геометрию поверхности, найдем:

$$\partial_k g(x) = -f'(\tau - x\xi) \partial_k(x\xi) = -\xi_k f'(\tau - x\xi),$$

так что

$$P^k(\tau) = P_0^k + \xi^k \int f'(\tau - \xi x) H(x; f) dx. \quad (6)$$

В частности, если в качестве  $\xi$  выбрать орт временной оси,

$$\xi^k = \delta_{k0},$$

то получим

$$P^\alpha(\tau) = P_0^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (7)$$

$$P^0(\tau) = P_0^0 + \int f'(\tau - x^0) H(x; f) dx. \quad (8)$$

Как видно, в этом случае выражение для полного импульса то же, что и при отсутствии взаимодействия, а выражение полной энергии складывается из «собственной энергии» частиц  $P_0^0$  и энергии взаимодействия

$$\int f'(\tau - x^0) H(x; f) dx.$$

Мы имеем здесь полную аналогию с обычной формулировкой квантовой механики, причем ясно, что с точностью до «степени размытости» функции  $f$  можно рассматривать  $H(x; f)$  как плотность энергии взаимодействия.

Покажем теперь, что средние значения

$$\overset{*}{\Phi}(g) P^i(g) \Phi(g), \quad \overset{*}{\Phi}(g) M^{ik}(g) \Phi(g)$$

не зависят от вида  $g$  при изменении  $g$  в рассматриваемом классе допустимых функций. Для доказательства будем исходить из того (см. § 39.4), что преобразованная амплитуда состояния

$$\Phi'(g) = U_L \Phi(L^{-1}g)$$

также удовлетворяет уравнению Шредингера в интегральной форме. Поэтому

$$i\delta \{U_L \Phi(L^{-1}g) - \Phi(g)\} = \int H(x; g) \delta g(x) dx \{U_L \Phi(L^{-1}g) - \Phi(g)\},$$

что имеет место для любого лоренцева преобразования, в частности и для бесконечно малого. Но, как уже было показано, для последнего

$$U_L \Phi(L^{-1}g) - \Phi(g) = J(g) \Phi(g),$$

где

$$J(g) = i(P(g) \cdot a) + \frac{i}{2} M_{kl}(g) \omega^{kl}.$$

Имеем, следовательно,

$$i\delta [J(g) \Phi(g)] = \int H(x; g) \delta g(x) dx J(g) \Phi(g),$$

откуда с учетом того, что

$$i\delta \overset{*}{\Phi}(g) = -\overset{*}{\Phi}(g) \int H(x; g) \delta g(x) dx,$$

получаем:

$$i\delta [\overset{*}{\Phi}(g) J(g) \Phi(g)] = i\delta \overset{*}{\Phi}(g) J(g) \Phi(g) + i\overset{*}{\Phi}(g) \delta [J(g) \Phi(g)] = 0,$$

т. е.

$$\delta (\overset{*}{\Phi}(g) J(g) \Phi(g)) = 0.$$

Вспоминая, что  $J(g)$  есть линейная комбинация из  $P(g)$  и  $M(g)$  с произвольными коэффициентами  $a$ ,  $\omega$ , убеждаемся, что имеют место соотношения

$$\delta (\overset{*}{\Phi}(g) P^i(g) \Phi(g)) = 0 \quad \text{и} \quad \delta (\overset{*}{\Phi}(g) M^{ik}(g) \Phi(g)) = 0, \quad (9)$$

которое мы и хотели установить.

Покажем теперь, что при изменении  $g$  в классе  $G$  не меняются и собственные значения рассматриваемых операторов  $P^i(g)$  и  $M^{ik}(g)$ . Возьмем, например, оператор энергии. Пусть при некотором допустимом  $g = g_0$  собственная функция этого оператора будет  $\Phi_E$ , а соответствующее собственное значение равно  $E$ . Тогда

$$(P^0(g_0) - E) \Phi_E = 0.$$

Пусть  $\Phi(g)$  — амплитуда состояния, удовлетворяющая основному уравнению и переходящая в  $\Phi_E$  при  $g = g_0$ , т. е.

$$(P^0(g) - E) \Phi(g) = 0 \quad \text{при} \quad g = g_0. \quad (10)$$

С другой стороны, как уже было показано, если  $\Phi(g)$  удовлетворяет уравнению Шредингера (39.1), то ему удовлетворяет также и  $J(g)\Phi(g)$ . Но поскольку  $J(g)$  является линейной комбинацией операторов  $P(g)$  и  $M(g)$  с произвольными коэффициентами, то и каждый из них по отдельности будет обладать этим свойством. Поэтому  $P^0(g)\Phi(g)$ , а следовательно, и  $\Psi(g) \equiv (P^0(g) - E)\Phi(g)$  удовлетворяют (39.1). Отсюда заключаем, что так как  $\Psi(g)$  согласно (10) аннулируется при  $g = g_0$ , то  $\Psi(g)$  и везде в  $G$  остается равной нулю. Таким образом, всюду в  $G$

$$(P^0(g) - E)\Phi(g) = 0,$$

что доказывает инвариантность собственных значений. Видно также, что в качестве собственной функции всегда можно выбрать амплитуду состояния, удовлетворяющую основному уравнению.

Установленные свойства инвариантности средних и собственных значений рассматриваемых операторов представляют в нашей теории одновременно законы сохранения, ковариантности и независимости данных физических величин от степени размытости допустимых пространственно-подобных поверхностей. Так, инвариантность по отношению к изменению  $g$ , обусловленному трансляцией, очевидно, соответствует обычным законам сохранения. Инвариантность по отношению к изменениям  $g$ , вызываемым лоренцевыми вращениями, обеспечивает фактическую ковариантность. Наконец, инвариантность по отношению к изменениям  $g$ , вызванным изменением процесса сглаживания функции  $g$ , выражает независимость рассматриваемых физических величин от характера процесса выключения взаимодействия.

Заметим в этой связи, что, вообще, если для некоторого  $O(g)$  имеет место соотношение

$$\delta_g (\Phi^*(g) O(g) \Phi(g)) = 0,$$

то в нашем представлении это означает, что величина  $O(g)$  является интегралом движения.

**40.2. Локальные динамические величины \*).** В предыдущем разделе мы ввели в рассмотрение 4-вектор энергии-импульса и тензор момента, которые являются характеристиками системы квантованных полей в целом. Представляют, однако, интерес также некоторые более детальные характеристики системы взаимодействующих полей, зависящие не только от области включения взаимодействия  $g$ , но и от точки  $x$ , например плотность тока. Величиной подобного локального типа является и рассмотренная выше плотность гамильтониана  $H(x; g)$ .

Обратимся к общим свойствам локальных динамических переменных  $B(x; g)$  указанного типа. Сформулируем, прежде всего, физические требования, которым они должны удовлетворять. Для

\*) Изложение этого раздела основано на работе Степанова (1955).

этого представим  $B(x; g)$  в виде функционального разложения по «степеням»  $g$ :

$$B(x; g) = \\ = B(x) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int B_n(x, x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (11)$$

Начнем со свойства локальности. Это свойство динамической величины  $B(x; g)$  соответствует тому, что в пределе стремления функции  $g(x)$  к разрывной функции  $\sigma(x)$  (см. § 39)  $B(x; g)$  оказывается зависящей от поведения полей лишь в бесконечно малой окрестности точки  $x$ . Соответствующее условие для коэффициентов разложения  $B_n$ , как легко показать, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} B_n(x, x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \text{если хотя бы для одного } x_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ x \gtrsim x_j. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Действительно, в § 39.2 свойство локальности гамильтониана  $H(x; g)$  было установлено непосредственно из условия (12) в форме (21.13). Условие (12), очевидно, может быть также записано в форме

$$\frac{\delta B(x; g)}{\delta g(y)} = 0 \quad \text{при } x \gtrsim y. \quad (13)$$

Существенным является требование совпадения  $B(x; g)$  в пределе выключения взаимодействия  $g \rightarrow 0$  с соответствующим выражением  $B(x)$ , взятым из теории свободных полей:

$$B(x; 0) = B(x). \quad (14)$$

Наконец, важным является условие независимости наблюдаемого значения

$$\overset{*}{\Phi}(g) B(x; g) \Phi(g) \quad (15)$$

от поведения функции  $g$  в моменты времени, следующие за  $x$ :

$$\frac{\delta (\overset{*}{\Phi}(g) B(x; g) \Phi(g))}{\delta g(y)} = 0 \quad \text{при } y \gtrsim x. \quad (16)$$

Это условие представляет собой следствие принципа причинности и выражает тот факт, что результат измерения, проведенного в момент  $x$ , описываемый величиной (15), не может зависеть от эволюции системы в последующие моменты времени.

Используя уравнение Шредингера (39.1), находим отсюда уравнение

$$i \frac{\delta B(x; g)}{\delta g(y)} = [H(y; g), B(x; g)] \quad \text{при } y \gtrsim x, \quad (17)$$

которое в частном случае  $B(x; g) = H(x; g)$  дает

$$i \frac{\delta H(x; g)}{\delta g(y)} - i \frac{\delta H(y; g)}{\delta g(x)} = [H(y; g), H(x; g)], \quad (18)$$

т. е. условие совместности для уравнения (39.1).

Заметим, что данное определение локальных динамических переменных является естественным обобщением соответствующих понятий, рассматриваемых в локальной теории Швингера (1948). Исследуем поведение введенных квадратичных форм  $(\Phi^*(g) B(x; g) \Phi(g))$  при стремлении функции  $g$  к разрывной функции  $\sigma$ , проходящей через точку  $x$ . Если бы этот предельный переход оказался возможным, то мы получили бы выражение именно того типа,

$$\Phi^*(\sigma) B_\sigma(x) \Phi(\sigma),$$

который рассматривается Швингером. В его работе доказывается, что эта форма не зависит от вида поверхности  $\sigma$ , проходящей через точку  $x$ . В нашем случае соответствующее условие имеет более общий вид (16).

Отметим также, что в силу (17) имеет место соотношение, еще более общее, чем (16):

$$\frac{\delta (\Phi_1^*(g) B(x; g) \Phi_2(g))}{\delta g(y)} = 0 \quad (y \gtrsim x), \quad (19)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — два различных решения уравнения Шредингера (39.1).

Исходя из соотношений (11), (12), (14), (16) и видоизменяя рассуждение, с помощью которого мы определили коэффициенты разложения матрицы рассеяния  $S_n$ , можно определить также все коэффициенты  $B_n$ . Однако, поскольку это уже было сделано для оператора  $H(x; g)$  рассматриваемого типа, мы сведем задачу к этому случаю. Для этого введем в лагранжиан взаимодействия добавочный член

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) - B(x) b(x), \quad (20)$$

где  $B(x)$  — оператор свободного поля, соответствующий  $B(x; g)$ , а  $b(x)$  — некоторая классическая функция той же тензорной размерности. Матрица  $S(g)$ , так же как и гамильтониан  $H(x; g)$ , становится функционалом, зависящим от  $b$ :

$$S(g) \rightarrow S(g; b), \quad H(x; g) \rightarrow H(x; g; b) = i \frac{\delta S(g; b)}{\delta g(x)} \dot{S}(g; b).$$

Покажем, что оператор  $B(x; g)$  может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} B(x; g) &= \left. \frac{\partial H(x; g; b)}{\partial b(x)} \right|_{b=0} \equiv i \frac{\delta S(g; b)}{\delta [b(x)g(x)]} \dot{S}(g; b) \Big|_{b=0} = \\ &= T(B(x) S(g)) \dot{S}(g). \end{aligned} \quad (21)$$

В самом деле, выполняя функциональное дифференцирование выражения (21) с учетом коммутативности операций обычного и функционального дифференцирования, получим:

$$\frac{\delta B(x; g)}{\delta g(y)} = \frac{\partial}{\partial b(x)} \left[ i \frac{\delta}{\delta g(y)} \left( \frac{\delta S(g, b)}{\delta g(x)} \dot{S}(g, b) \right) \right]_{b=0},$$

что с учетом условия причинности для матрицы  $S(g; b)$  дает:

$$\frac{\delta B(x; g)}{\delta g(y)} = 0 \quad \text{при } x \gtrsim y.$$

Отсюда следует, что свойство локальности оператора  $B(x; g)$  является непосредственным следствием условия причинности для матрицы рассеяния. Вспоминая далее, что

$$H(x; 0) = H_0(x) = -\mathcal{L}(x),$$

находим дифференцированием по  $b$

$$B(x; 0) = B(x).$$

Наконец, дифференцируя (18) по  $b(x)$  при  $b \neq 0$  и полагая затем  $b = 0$ , получим с учетом (21) условие причинности (16).

Отметим также, что если  $B(x)$  (а следовательно, и  $b(x)$ ) в (20) выбраны эрмитовыми, то  $B(x; g)$ , определяемый формулой (21), также будет эрмитовым в силу эрмитовости  $H(x; g)$ . При этом очевидно, что  $B(x; g)$  будет ковариантным.

**40.3. Вектор тока.** В качестве примера рассмотрим выражение для плотности тока в электродинамике. Замечая, что в лагранжиан взаимодействия оператор  $j(x)$  входит всегда в комбинации

$$j(x) A(x),$$

где  $A(x)$  — потенциал электромагнитного поля, видим, что вспомогательное классическое поле, по которому нужно дифференцировать  $H(x; g)$ , чтобы получить  $j(x; g)$ , является просто добавкой к  $A(x)$ , и потому вообще можно положить

$$j^k(x; g) = -\frac{\partial H(x; g)}{\partial A_k(x)} = T(j^k(x) S(g)) \dot{S}(g) \quad (22)$$

Величина (22) по только что доказанному будет удовлетворять условиям локальности и причинности и при выключении взаимодействия будет переходить в оператор тока свободного поля. Покажем, что она будет также удовлетворять уравнению непрерывности

$$\operatorname{div}_x^{(4)} j(x; g) = 0. \quad (23)$$

Перенося условие (23) на коэффициентные функции  $H_n$ , имеем:

$$\operatorname{div}_x^{(4)} \frac{\partial H_n(x, x_1, \dots, x_n)}{\partial A(x)} = 0. \quad (24)$$

Представляя  $H_n$  с помощью соотношения (21.12) в виде квадратичной формы от  $S_k$ , в которую  $S_k$ , зависящие от  $x$ , входят линейно,

находим, что условие градиентной инвариантности  $S$ -матрицы в форме (33.12)

$$\operatorname{div}_{x_i}^{(A)} \frac{\partial S_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial A(x_i)} = 0$$

обеспечивает выполнение условия (24), а следовательно, и выполнение уравнения непрерывности тока, определяемого выражением (22).

Перейдем теперь к построению выражения для полного заряда системы. В обычной теории это выражение имеет вид

$$Q = \int dx \cdot j^0(x), \quad (2.29)$$

где  $j^0$  — нулевая компонента вектора тока. Соотношение (2.29), однако, явно неинвариантно по отношению к лоренцевым преобразованиям. Совершая в нем переход, обратный переходу к (2.8), получаем лоренц-инвариантное выражение

$$Q = \int d\sigma_k j^k(x), \quad (25)$$

где  $d\sigma_k$  — элемент трехмерной поверхности, ортогональный к оси  $x^k$ , а интеграция производится по всей трехмерной поверхности  $\sigma$ . Это выражение, очевидно, может быть представлено в следующей форме:

$$\int d\sigma_k j^k = \int d\Sigma \cdot \cos(n \cdot x^k) \cdot j^k = \int \frac{\partial \theta_\sigma(x)}{\partial x^k} j^k(x) dx,$$

где  $d\Sigma$  — элемент площади поверхности  $\sigma$ ,  $\cos(n \cdot x^k)$  — косинус угла между осью  $x^k$  и нормалью  $n$  к поверхности  $\sigma$  в точке  $x$ , а  $\theta_\sigma(x)$  — разрывная функция, введенная в § 39,

$$\theta_\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x^0 > T_\sigma(x) \\ 0 & \text{при } x^0 < T_\sigma(x) \end{cases} \quad (\theta_\sigma(x) = \theta(x^0 - T_\sigma(x))). \quad (39.9)$$

Выражение для заряда тогда принимает вид

$$Q = \int dx j^k(x) \frac{\partial \theta_\sigma(x)}{\partial x^k}. \quad (26)$$

В нашей теории естественным обобщением этого соотношения является выражение

$$Q(g) = - \int dx j^k(x; g) \frac{\partial g(x)}{\partial x^k}, \quad (27)$$

которое формально переходит в (26) в пределе  $g(x) \rightarrow \theta_\sigma(-x)$ . Убедимся в том, что выбранное выражение (27) является интегралом движения, т. е. что наблюдаемое значение  $Q$  не зависит от вида функции  $g(x)$  и его вариация

$$\delta_g \langle Q(g) \rangle = \delta_g \langle \overset{\ast}{\Phi}(g) Q(g) \Phi(g) \rangle \quad (28)$$

обращается в нуль при произвольной вариации  $\delta g(x)$ .



Для доказательства (28) будем исходить из (18), продифференцированного по  $A(x)$ :

$$-i \left( \frac{\delta j(x; g)}{\delta g(y)} + \frac{\partial}{\partial A(x)} \frac{\delta H(y; g)}{\delta g(x)} \right) = -[H(y; g), j(x; g)],$$

которое можно представить в виде

$$i \frac{\delta j(x; g)}{\delta g(y)} - [H(y; g), j(x; g)] = -i \frac{\partial}{\partial A(x)} \frac{\delta H(y; g)}{\delta g(x)}. \quad (29)$$

В силу (23) из (29) также следует, что

$$\operatorname{div}_x^4 \frac{\partial}{\partial A(x)} \frac{\delta H(y; g)}{\delta g(x)} = 0. \quad (30)$$

Вычисляя вариацию (28) с учетом уравнения Шредингера и соотношений (27) и (29), находим:

$$\begin{aligned} \delta_{g(y)} \langle Q(g) \rangle &= \Phi^*(g) \left\{ \frac{\delta Q(g)}{\delta g(y)} + i[H(y; g), Q(g)] \right\} \Phi(g) \delta g(y) = \\ &= - \int dx \Phi^*(g) \left\{ \left[ \frac{\delta j^k(x; g)}{\delta g(y)} + i[H(y; g), j^k(x; g)] \right] \frac{\partial g(x)}{\partial x^k} + \right. \\ &\quad \left. + j^k(x; g) \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\delta g(x)}{\delta g(y)} \right\} \Phi(g) \delta g(y) = \\ &= - \int dx \Phi^*(g) \left[ \frac{\partial}{\partial A_k(x)} \left( \frac{\delta H(y; g)}{\delta g(x)} \right) \frac{\partial g(x)}{\partial x^k} + j^k(x; g) \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial x^k} \right] \Phi(g) \delta g(y). \end{aligned}$$

Интегрируя второй член по частям, получаем, что

$$- \int dx j^k(x; g) \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial x^k} = \frac{\partial j^k(y; g)}{\partial y^k} = 0$$

в силу уравнения непрерывности (23), а также, что

$$\int dx \frac{\partial}{\partial A_k(x)} \frac{\delta H(y; g)}{\delta g(x)} \frac{\partial g(x)}{\partial x^k} = 0$$

в силу (30), обращения в нуль  $g(x)$  на положительной временной бесконечности и обращения в нуль  $\delta H(y; g)/\delta g(x)$  в соответствии с условием локализуемости (13) на отрицательной временной и пространственных бесконечностях.

**40.4. Условие Лоренца.** † заключение коснемся вопроса о дополнительном условии на допустимые состояния системы взаимодействующих полей. Как известно, это условие в теории свободных полей имеет вид

$$(\partial A^-(x)) \Phi \equiv \frac{\partial A_R^-(x)}{\partial x^k} \Phi = 0. \quad (12.8)$$

В случае взаимодействующей системы это условие принимает вид

$$\Omega^-(x; g) \Phi(g) = 0, \quad (31)$$

где оператор  $\Omega^-(x; g)$  должен, с одной стороны, переходить при  $g \rightarrow 0$  в  $\partial A^-(x)/\partial x$ , а с другой стороны, должен быть интегралом

движения, так как (31) представляет собой уравнение с не зависящим от времени нулевым собственным значением оператора  $\Omega^-$ . Это требование является условием совместности уравнения (31) с уравнением движения Шредингера.

Опуская соответствующие выкладки, укажем, что приведенными двумя условиями оператор  $\Omega^-$  полностью определяется в виде

$$\Omega^-(x; g) = (\partial A^-(x)) - \int D_0^-(x-y) j^k(y; g) \partial_k g(y) dy$$

и условие (31) принимает вид

$$\{(\partial A^-(x)) - \int D_0^-(x-y) j^k(y; g) \partial_k g dy\} \Phi(g) = 0. \quad (32)$$

Здесь  $D_0^-(x)$  — отрицательно-частотная часть фотонной функции Паули — Йордана,

$$D_0^-(x) = \frac{i}{8\pi^3} \int dk \delta(k^2) \theta(-k^0) e^{ikx}.$$

**40.5. Операторы волновых полей.** Подобно оператору  $j(x; g)$  можно ввести также операторы

$$A(x; g), \quad \psi(x; g), \quad \bar{\psi}(x; g),$$

обобщающие соответствующие локальные величины в теории свободных полей. Для этого согласно общему способу построения локальных величин в теории взаимодействия введем в лагранжиан взаимодействия спинорной электродинамики  $\mathcal{L}$  следующие добавочные члены:

$$\bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x) + J(x) A(x). \quad (33)$$

Здесь  $J(x)$  — некантованная функция, которую можно отождествить с некоторым внешним током,  $\bar{\eta}(x)$  и  $\eta(x)$  — некантованные спинорные функции, антикоммутирующие как друг с другом, так и с полями  $\bar{\psi}, \psi$ . Эти «классические спинорные поля» были введены в § 37.2 как образующие грассмановой алгебры.

Введем выражения

$$A(x; g) = -\frac{\partial H(x; g)}{\partial J(x)} = -\frac{i}{g(x)} \left( \frac{\delta S}{\delta J(x)} \overset{\dagger}{S} \right), \quad (34)$$

$$\psi(x; g) = -\frac{\partial H(x; g)}{\partial \bar{\eta}(x)} = -\frac{i}{g(x)} \left( \frac{\delta S}{\delta \bar{\eta}(x)} \overset{\dagger}{S} \right), \quad (J, \eta, \bar{\eta} = 0). \quad (35)$$

$$\bar{\psi}(x; g) = -\frac{\partial H(x; g)}{\partial \eta(x)} = -\frac{i}{g(x)} \left( \frac{\delta S}{\delta \eta(x)} \overset{\dagger}{S} \right) \quad (36)$$

Отметим, что в отличие от  $\eta, \bar{\eta}$  вспомогательное «поле»  $J(x)$  может иметь физический смысл. В самом деле, пусть требуется исследовать влияние на рассматриваемую квантовую систему некоторых внешних источников электрического поля, характеризующихся некантованным вектором плотности внешнего тока  $J_0(x)$ . При этом,

очевидно, вместо (34) следует положить

$$A(x; g) = - \frac{i}{g(x)} \left( \frac{\delta S(g)}{\delta J(x)} \dot{S} \right) \Big|_{\eta, \dot{\eta}=0, J=J_0} \quad (37)$$

Введенные таким способом операторы  $A(x; g)$ ,  $\psi(x; g)$  и  $\bar{\psi}(x; g)$  могут рассматриваться как обобщения операторов свободных полей на случай взаимодействия, включенного с интенсивностью  $g$ . В §§ 41 и 42 с помощью этих операторов будет исследован вопрос об аномальном магнитном моменте электрона и о смещении уровней электронов в атомах.

## § 41. Поляризация вакуума и аномальный магнитный момент электрона

**41.1. Поляризация вакуума.** Перейдем теперь к некоторым приложениям изложенной выше общей формальной теории. Рассмотрим прежде всего вопрос об изменении состояния вакуума под действием внешнего некантованного тока  $J(x)$  или, что эквивалентно, под действием заданного внешнего потенциала  $A^{ext}(x)$ , связанного с током  $J$  соотношением

$$\square A^{ext}(x) = -J(x). \quad (1)$$

Как может показаться, эта задача имеет чисто теоретический интерес ввиду непосредственной ненаблюдаемости изменения свойств вакуума. Однако изменение свойств вакуума под действием внешнего электромагнитного поля входит составной частью в ряд наблюдаемых эффектов (сдвиг уровней атомных электронов, рассеяние света на свете и т. д.).

Для ее решения удобно рассмотреть среднее наблюдаемое значение оператора электромагнитного потенциала. Введем в лагранжиан в соответствии с вышеуказанным (§ 40.5) общим рецептом добавочный член

$$J(x) A(x). \quad (2)$$

Тогда на основании (40.37) среднее наблюдаемое значение электромагнитного потенциала равно

$$A^{obs}(x) = - \Phi_0^*(g; J) \frac{i}{g(x)} \frac{\delta S(g; J)}{\delta J(x)} \dot{S}(g; J) \Phi_0(g; J). \quad (3)$$

Здесь  $\Phi_0(g; J)$  — амплитуда вакуума реальных частиц, изменившегося под действием внешнего тока  $J(x)$ , а функция  $g(y) = 1$  при всех  $y \lesssim x$ . Согласно общим положениям  $A^{ext}$  не зависит от специального выбора  $g$ . Физический смысл имеет, очевидно, случай, когда внешний ток можно считать не зависящим от времени, поскольку в противном случае этот ток будет вызывать реальные процессы взаимного превращения частиц. Мы будем поэтому рассматривать случай, в котором

$$J(x) = J(x). \quad (4)$$

Тогда  $\Phi_0(g; J)$  можно определить как низшее энергетическое состояние динамической системы при наличии  $J(x)$ .

Заметим прежде всего, что

$$\hat{S}(g; J) \Phi_0(g; J) = \Phi_0, \quad (5)$$

где  $\Phi_0$  — амплитуда состояния вакуума свободных полей. Воспользовавшись независимостью выражения (3) от конкретного вида функции  $g$ , совершим обычный предельный переход  $g(x) \rightarrow 1$ . Тогда получим:

$$A^{\text{эфф}}(x) = -i \Phi_0^* \hat{S} \frac{\delta S}{\delta J(x)} \Phi_0, \quad (6)$$

где величина  $S = S(1; J)$  представляет собой матрицу рассеяния в случае, когда взаимодействие равно нулю в отдаленном прошлом и в отдаленном будущем.

Поскольку при подобном адиабатическом включении и выключении взаимодействия невозможны реальные процессы рождения частиц, то имеем также

$$S \Phi_0 = a \Phi_0, \quad (7)$$

где, очевидно,

$$a = \langle S \rangle_0 = S_0, \quad (8)$$

причем  $a a^* = 1$ . Следовательно,

$$\Phi_0^* S_0 = \Phi_0 a = \frac{\Phi_0}{S_0}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (6), получаем:

$$A^{\text{эфф}}(x) = -i \frac{\Phi_0^* \frac{\delta S}{\delta J(x)} \Phi_0}{\Phi_0^* S_0 \Phi_0} = -\frac{i}{S_0} \left\langle \frac{\delta S}{\delta J(x)} \right\rangle_0. \quad (10)$$

Далее окажется удобным выразить правую часть уравнения (10) через полную функцию Грина фотона. Рассмотрим для этого выражение

$$\frac{\delta}{\delta J(y)} (S_0 \cdot A^{\text{эфф}}(x)).$$

С помощью (10) получаем:

$$\frac{\delta}{\delta J^m(y)} [S_0 \cdot A_n^{\text{эфф}}(x)] = \frac{1}{i} \left\langle \frac{\delta^2 S}{\delta J^m(y) \delta J^n(x)} \right\rangle_0. \quad (11)$$

Укажем смысл операции повторного варьирования по внешнему току в правой части (11). Матрица  $S(1; J)$  может быть представлена совокупностью диаграмм, которые наряду с обычными вершинами содержат также вершины, соответствующие члену лагранжиана  $J(x) A(x)$ , из которых выходит по одной фотонной линии (вершины

такого типа уже встречались при рассмотрении процесса тормозного излучения, § 26). В результате варьирования по  $J$  соответствующая фотонная линия приобретает свободный конец, а под знаком  $T$ -произведения появляется оператор  $A(x)$ . Поэтому, выполняя операцию повторного варьирования в правой части (11) в явном виде, находим, что величина

$$\bar{D}_{nm}(x, y; J) = i \left\langle \frac{\delta^2 S}{\delta J^m(y) \delta J^n(x)} \right\rangle_0 = \frac{1}{i} \langle T(A_m(y) A_n(x) S) \rangle_0 \quad (12)$$

представляет собой сумму коэффициентных функций, соответствующих внутренним линиям всевозможных диаграмм с двумя свободными фотонными концами. Таким образом,  $D$  с точностью до множителя  $S_0^{-1}$  является функцией Грина  $D(x, y; J)$  фотона, движущегося во внешнем поле тока  $J$ . Мы можем написать теперь:

$$\frac{\delta}{\delta J^m(y)} (S_0 \cdot A_n^{\text{эфф}}(x)) = -S_0 D_{nm}(x, y; J). \quad (13)$$

Полученная формула позволяет написать функциональное разложение  $A^{\text{эфф}}$  «по степеням»  $J$ , исходя из соответствующих разложений для  $S_0$  и  $D(x, y; J)$ . Имея в виду дальнейшие приложения, мы выполним сейчас это разложение в явном виде, считая внешний ток  $J$  малой величиной и удерживая в (13) лишь главные члены.

Полагая в (13)  $J \rightarrow 0$ , получаем:

$$S_0 \frac{\delta A_n^{\text{эфф}}(x)}{\delta J^m(y)} = -S_0 D_{mn}(x, y). \quad (14)$$

Здесь мы использовали то обстоятельство, что выражение

$$\frac{\delta S_0}{\delta J^m(y)} = i \langle A_m(y) S \rangle_0$$

в пределе  $J \rightarrow 0$  соответствует диаграммам с одной внешней фотонной линией и равно нулю. Заметим также, что выражение

$$D_{nm}(x, y) = D_{nm}(x, y; J)|_{J=0}$$

представляет собой полную фотонную функцию Грина в отсутствии внешних токов.

Сокращая в (14) на  $S_0$  и интегрируя по  $\delta J$ , получаем:

$$A_n^{\text{эфф}}(x) = - \int D_{nm}(x, y) J^m(y) dy. \quad (15)$$

Переходя к импульсному представлению

$$\left. \begin{aligned} A_n^{\text{эфф}}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ikx} A_n^{\text{эфф}}(k) dk, \\ J^m(y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{iqy} J^m(q) dq, \\ D_{mn}(x, y) &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik(x-y)} \left\{ \frac{d(k^2)}{k^2} \left( g^{nm} - \frac{k^m k^n}{k^2} \right) + \frac{d_l}{k^2} \frac{k_n k_m}{k^2} \right\} dk \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

с учетом уравнения непрерывности внешнего тока  $k_m J^m(k) = 0$ , получаем:

$$A_n^{\text{эфф}}(k) = g^{nm} \frac{d(k^2)}{k^2} J^m(k) = \frac{d(k^2)}{k^2} J_n(k). \quad (17)$$

В рассматриваемом частном случае (4), когда  $J$  не зависит от времени, мы можем положить:

$$J_n(k) = 2\pi\delta(k^0) J_n(k^2). \quad (18)$$

Подставляя это выражение в (16) и (15), находим:

$$A_n^{\text{эфф}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx} \frac{d(-k^2)}{-k^2} J_n(k^2) dk. \quad (19)$$

Из (19) следует, что «пространственная часть»  $d(-k^2)/(-k^2)$  фотонной функции Грина представляет собой эффективный потенциал, создаваемый единичным зарядом в результате его взаимодействия с вакуумом электрон-позитронов и фотонов (для этого достаточно положить  $J_m(y) = \delta_{m0}\delta(y)e$ , т. е.  $J(k^2) = e$ ). Воспользовавшись тем, что для свободного поля при  $d(-k^2) = 1$  потенциал (19) переходит в кулоновский, представим его в общем случае в виде

$$V(r) = \frac{e}{(2\pi)^3} \int e^{-ikr} \frac{d(-k^2)}{-k^2} dk = -e \frac{\rho(r)}{4\pi r} \quad (r = |\mathbf{r}|). \quad (20)$$

Отклонения введенной здесь функции  $\rho(r)$  от единицы соответствуют отклонению потенциала  $V(r)$  от кулоновского (аналогичную роль в импульсном представлении играет функция  $d$ ). Это отклонение эффективного потенциала от кулоновского является следствием поляризации вакуума и может быть наглядным образом связано с эффектом *экранизации заряда*, внесенного в вакуум, за счет рождения в последнем виртуальных электрон-позитронных пар. Функция  $\rho$  при этом характеризует относительную степень экранизации. Для получения ее конкретного вида необходимо обратиться к соответствующей части фотонной функции распространения.

Теория не располагает полным выражением для этой функции (см., однако, ниже § 50.2). Для наших целей можно воспользоваться разложением  $d$  в ряд по степеням  $\alpha^2$ , первый член которого был получен в § 35.1.

Рассмотрим сначала случай больших  $r$ . Переходя в интеграле (20) к новой переменной  $|k|r = x$  и выполняя интеграцию по угловым переменным, преобразуем его к виду

$$\frac{\rho(r)}{r} = \frac{1}{\pi r} \int_0^\infty dx d\left(-\frac{x^2}{r^2}\right) \int_{-1}^{+1} d\mu e^{-ix\mu} = \frac{2}{\pi r} \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} d\left(-\frac{x^2}{r^2}\right). \quad (21)$$

Отсюда следует, что для рассмотрения асимптотики больших  $r$  необходимо иметь сведения о поведении функции  $d$  при малых  $k^2$ . Из (35.6) находим:

$$d(k^2)|_{k^2 \ll m^2} = 1 + e^2 O(k^2).$$

Подставляя это выражение в (21), получаем, что при больших  $r$  (по сравнению с  $1/m$ , или в обычных единицах — с  $r_0 = \hbar/mc = 3,862 \cdot 10^{-11}$  см)  $\rho(r)$  стремится к единице \*):

$$\rho(r) = 1 + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \left(r \gg \frac{1}{m}\right). \quad (22)$$

(Это свойство не меняется при учете высших приближений.)

Поэтому постоянную  $e$  следует отождествлять с величиной наблюдаемого заряда. Вид функции  $\rho(r)$  при малых  $r$  может быть получен согласно (21) путем исследования асимптотической формы  $d(k^2)$  при больших  $k^2$ . Воспользовавшись формулой (35.12), имеем:

$$d(k^2) |_{k^2 \gg m^2} = 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{k^2}{m^2} + \dots$$

Отсюда непосредственной интеграцией получаем асимптотику  $\rho(r)$  при малых  $r$  в виде (Швингер (1949а))

$$\rho(r) = 1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \left[ \ln\left(\frac{1}{rm}\right) \right] + \dots \quad (23)$$

Таким образом, при малых  $r \ll m^{-1}$  эффективная плотность  $\rho(r)$  возрастает и в пределе  $r \rightarrow 0$  имеет логарифмическую особенность. Важно, однако, подчеркнуть, что формула (23) получена с помощью теории возмущений и, следовательно, справедлива, грубо говоря, лишь в той области, где второй член заметно меньше первого. Поэтому какие-либо обоснованные заключения об истинном поведении  $\rho(r)$  при  $r \rightarrow 0$  могут быть сделаны лишь с помощью рассуждений, не связанных с теорией возмущений.

**41.2. Аномальный магнитный момент электрона.** В качестве второй иллюстрации приложения общей теории к конкретным задачам мы вычислим магнитный момент электрона с учетом радиационных поправок.

Для этого необходимо рассмотреть задачу взаимодействия одного электрона с внешним током и определить (с учетом радиационных поправок) энергию, обусловленную этим взаимодействием. Разумеется, будем считать, что внешнее поле (внешний ток) является постоянным во времени, так как только при этом условии электрон будет обладать определенной энергией.

Выше мы рассмотрели вопрос об изменении свойств вакуума при наличии внешнего постоянного тока

$$J(x) = J(x),$$

теперь же следует выяснить изменение свойств одноэлектронного состояния. Повторяя предыдущие рассуждения, найдем с помощью (40.37), что

$$\frac{\delta E(J)}{\delta J(x)} = -A_1^{\text{эфф}}(x) = i\Phi_1^* \frac{\delta S(J)}{\delta J(x)} \Phi_1 \langle S \rangle_0, \quad (24)$$

где  $S(J) = S(1; J)$ , а матричный элемент берется между двумя одноэлектронными состояниями

$$\Phi_1^* = (2\pi)^{3/2} \Phi_0^* a_{\bar{v}}^*(k'), \quad \Phi_1 = (2\pi)^{3/2} a_{\bar{v}}^*(k) \Phi_0 \quad (25)$$

с одинаковой энергией  $\sqrt{k^2 + m^2} = \sqrt{k'^2 + m^2}$ .

Учитывая (25), а также раскрывая вариационную производную  $\delta S/\delta J(x)$ , получаем:

$$\frac{\delta E(J)}{\delta J^n(x)} = - \frac{(2\pi)^3}{S_0} \Phi_0^* a_{\bar{v}}^*(k') T(A_n(x) S) a_{\bar{v}}^*(k) \Phi_0. \quad (26)$$

Имея в виду, что магнитному моменту в выражении для энергии  $E(J)$  соответствует член, линейный по внешнему полю (току), можно в правой части уравнения (26) положить  $J = 0$ .

Заметим теперь, что если бы операторы  $a^-$  и  $a^+$  в (26) находились под знаком  $T$ -произведения, то такое выражение соответствовало бы сумме связанных диаграмм различных порядков с одной фотонной и двумя электронными внешними линиями и могло бы быть представлено в виде

$$G' \Gamma' D_{in} G. \quad (27)$$

Здесь первая электронная функция Грина  $G'$  соответствует внешней электронной линии  $k'$ , вторая,  $G$  — внешней электронной линии  $k$ ,  $D_{in}$  — фотонная функция Грина, соответствующая оператору  $A_n(x)$ . Вершинная часть  $\Gamma$  здесь, как обычно, представляет собой сумму сильно связанных диаграмм с внешними концами, соответствующими  $G'$ ,  $G$  и  $D$ . В силу сделанного выше замечания  $G'$ ,  $G$ ,  $\Gamma$  и  $D$  могут рассматриваться при  $J = 0$  как обычные функции Грина и вершинная часть, содержащие радиационные поправки.

Однако ввиду того, что операторы  $a^-$  и  $a^+$  в выражении (26) не входят под знак  $T$ -произведения, оно отличается от (27). Разница состоит в том, что последние «внешние» спаривания в  $G'$  и  $G$  из (27) в выражении (26) заменены на обычные спаривания вида

$$\underline{\psi(x) a_{\bar{v}}^*(k)} = \frac{v^-, \bar{v}^-(k)}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ikx},$$

т. е.

$$\frac{1}{\hat{k} - m} \rightarrow \frac{v^-(k)}{(2\pi)^{3/2}}, \quad \frac{1}{\hat{k}' - m} \rightarrow \frac{\bar{v}^+(k')}{(2\pi)^{3/2}}$$

или

$$G(k) \rightarrow G(\hat{k}) (\hat{k} - m) \frac{v^-(k)}{(2\pi)^{3/2}}, \quad G'(k') \rightarrow \frac{\bar{v}^+(k')}{(2\pi)^{3/2}} (\hat{k}' - m) G'(k'). \quad (28)$$

Выражения, стоящие в правой части (28), не могут быть истолкованы непосредственно, поскольку  $(\hat{k} - m) v^-(k) = \bar{v}^+(k') (\hat{k}' - m) = 0$ , а функция  $G(k)$  при  $\hat{k} = m$  имеет полюс. Для раскрытия неопределенности выразим функцию Грина  $G$  через оператор собствен-



ной энергии  $\Sigma$ :

$$G(k) = \frac{1}{m - \hat{k} + \Sigma(k)}.$$

При этом мы будем считать, что устранение инфракрасной катастрофы из  $\Sigma$  произведено с помощью введения малой массы фотона  $\lambda_0$  (как в § 35.2) и  $\Sigma(k)$  удовлетворяет условию

$$\left. \frac{\Sigma(k)}{\hat{k} - m} \right|_{\hat{k} = m} = 0.$$

Получаем тогда

$$(m - \hat{k}) G(k) \Big|_{\hat{k} = m} = \frac{m - \hat{k}}{m - \hat{k} - \Sigma(k)} \Big|_{\hat{k} = m} = 1, \quad (29)$$

и, следовательно, с учетом сохранения энергии ( $k^0 = k'^0$ ),

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \Phi_0 a_{\bar{\nu}}(k') T \left\{ A_k(x), \frac{S}{S_0} \right\}^* a_{\nu}^{\dagger}(k) \Phi_0 = \\ = e \int v^{\nu} + (k') \Gamma^n(k', k|q) v^{\nu} - (k) D_{nk}(q) e^{iqx} dq \delta(k' - k - q) = \\ = e \bar{v}^{\nu} + (k') \Gamma^n(k', k|k' - k) v^{\nu} - (k) D_{nk}(k' - k) e^{i(k - k')x}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (24) и интегрируя по  $J(x) = J(x)$ , находим:

$$\begin{aligned} e \int dx J^k(x) e^{ix(k - k')} \bar{v}^{\nu} + (k') \Gamma^n(k', k|k' - k) v^{\nu} - (k) D_{nk}(k' - k) = \\ = e \bar{v}^{\nu} + (k') \Gamma^n(k', k|k' - k) v^{\nu} - (k) D_{nk}(k' - k) J^k(k - k'). \end{aligned}$$

Переходя здесь от тока  $J$  к внешнему полю  $A^{\text{ext}}$ , с учетом представления

$$D_{nk}(k) = -\frac{d(k^2)}{k^2} \left( g_{nk} - \frac{k_n k_k}{k^2} \right) - \frac{k_n k_k}{k^2} \frac{d_1}{k^2}$$

и условия Лоренца для внешнего поля

$$(k \cdot A^{\text{ext}}(k)) = 0$$

приводим это выражение к виду

$$e \bar{v}^{\nu} + (k') \Gamma^n(k', k|k' - k) v^{\nu} - (k) A_n^{\text{ext}}(k - k') d(-(k - k')^2). \quad (30)$$

Для определения магнитного момента необходимо выделить из (30) член, пропорциональный напряженности магнитного поля  $H$ :

$$H_1 = H_{23}, \quad H_2 = H_{31}, \quad H_3 = H_{12},$$

$$H_{ik} = \partial_i A_k^{\text{ext}} - \partial_k A_i^{\text{ext}} \rightarrow i(q_i A_k^{\text{ext}}(q) - q_k A_i^{\text{ext}}(q)).$$

Рассмотрим сначала в (30) главный член, для которого

$$\Gamma^n = \gamma^n \quad \text{и} \quad d = 1.$$

Энергия взаимодействия с внешним полем (30) принимает вид

$$E = -j^n A_n^{\text{ext}}, \quad (31)$$

где

$$j^n = e\bar{v}^v \cdot + (k') \gamma^n v^v \cdot - (k) \quad (32)$$

Чтобы получить отсюда магнитный момент, следует перейти к нерелятивистскому пределу. При  $k \rightarrow 0$ ,  $k^0 > 0$  позитронные компоненты малы по сравнению с электронными компонентами (ср (7.41)) и имеют порядок  $|k|/2k^0$ . Обозначая электронные компоненты через  $v$ , а позитронные — через  $v_n$ , т. е.

$$v = (v, v_n), \quad \bar{v} = (\bar{v}_n, \bar{v}), \quad (33)$$

заметим, что согласно (6.19)

$j^n = e(\bar{v}^v \cdot + (k') \gamma^n v^v \cdot - (k)) = e\bar{v}_n^* + (k') \alpha_n v^v \cdot - (k)$  при  $n = 1, 2, 3$ , и поскольку в «расщепленном» представлении (7.11)

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

где  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  — двухрядные спиновые матрицы Паули, то

$$j = e(\bar{v}_n^* (k') \sigma v_n^v(k) + e(\bar{v}_n^* (k') \sigma v^v(k)). \quad (35)$$

Принимая теперь во внимание, что из уравнений Дирака вытекают соотношения

$$(k^0 + m) v_n = (\sigma \cdot k) v, \quad \bar{v}_n (k^0 + m) = \bar{v} (\sigma \cdot k),$$

и имея в виду, что в пределе малых  $k$

$$k^0 + m \simeq 2m,$$

находим:

$$j_\alpha = \frac{e}{2m} \bar{v}^v [(\sigma \cdot k') \sigma_\alpha + \sigma_\alpha (\sigma \cdot k)] v^v. \quad (36)$$

Подставляя (36) в (31) с учетом того, что из-за чисто магнитного характера внешнего поля  $A_i^{\text{ext}} = 0$  и что в соответствии с (7.10)

$$\sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2 \sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_3 \sigma_1 = i\sigma_2,$$

получаем ( $q = k' - k$ ):

$$E = j A^{\text{ext}} = -\frac{e}{2m} \bar{v}^v \sigma H v^v - \frac{e}{m} \bar{v}^v (k' A^{\text{ext}}(q)) v^v \quad (37)$$

Второй член содержит внешний потенциал и отношения к магнитному моменту не имеет, а первый член соответствует магнитному моменту электрона

$$M = \mu_0 \bar{v} \sigma v, \quad (38)$$

где  $\mu_0$  — магнетон Бора,

$$\mu_0 = \frac{e}{2m}. \quad (39)$$

Обратимся к радиационным поправкам. Для вычисления первой поправки к  $\mu_0$  необходимо рассмотреть члены порядка  $e^2$  в произведении  $\Gamma^n d$ , входящем в формулу (30). Ясно, однако, что поскольку нас интересуют члены, линейные по производным от  $A^{\text{ext}}$ , а разложение  $d(q)$  около  $q = 0$  начинается с квадратичных членов, то фактически следует рассмотреть лишь поправку к  $\Gamma^n$ .

Согласно (35.26) выражение

$$\bar{v}^{\nu} + (\mathbf{k}') \Gamma^n (\mathbf{k}', \mathbf{k} | \mathbf{k}' - \mathbf{k}) v^{\nu} - (\mathbf{k})$$

в пределе малых  $q = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$  с точностью до членов  $e^2$  может быть представлено в виде

$$\bar{v}^{\nu} + (\mathbf{k}') \gamma^n v^{\nu} - (\mathbf{k}) + \frac{\alpha}{4\pi m} \bar{v}^{\nu} + (\mathbf{k}') \gamma^n \hat{q} v^{\nu} - (\mathbf{k}).$$

Как только что было показано, первое слагаемое приводит к магнетону Бора, а второе дает:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{e}{2m} \frac{\alpha}{2\pi} \bar{v}^{\nu} + (\mathbf{k}') \hat{A}^{\text{ext}}(q) \hat{q} v^{\nu} - (\mathbf{k}) = \\ &= -\mu_0 \frac{\alpha}{2\pi} \bar{v}^{\nu} + (\mathbf{k}') (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}(q)) v^{\nu} - (\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Переходя в этом выражении к нерелятивистскому пределу, воспользуемся тем, что в «расщепленном» представлении (33) четырехрядные матрицы  $\boldsymbol{\sigma}$  диагональным образом выражаются через двухрядные матрицы Паули. Получаем в результате

$$\Delta E = -\mu_0 \frac{\alpha}{2\pi} \bar{v} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}) v = -\frac{\alpha}{2\pi} (M\mathbf{H}).$$

Согласно этому выражению радиационная поправка порядка  $e^2$  приводит к *дополнительному магнитному моменту электрона*, равному

$$\Delta\mu = \mu_0 \frac{\alpha}{2\pi} = 0,001161\mu_0.$$

Этот результат был впервые получен Швингером (1949б). Соответствующие вычисления были впоследствии проведены в двух- и трехпетлевом приближениях, а в последнее время и в четырехпетлевом приближении. Результат может быть представлен в виде

$$\frac{\mu_{\text{теор}}}{\mu_0} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right) + c_2 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + c_3 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + c_4 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^4, \quad (40)$$

где \*)

$$c_2 = -0,328478\dots, \quad c_3 = 1,1765(13), \quad c_4 = -0,8 \pm 2,5.$$

\*) Цифры в скобках показывают неопределенность в одну стандартную ошибку, выраженную в единицах последнего знака основного числа, так что, например,  $1,1765(13) = 1,1765 \pm 0,0013$ .

Коэффициент  $c_2$  вычислен аналитически, для чего потребовалось рассмотреть 5 диаграмм. Трехпетловому вкладу  $c_3$  соответствуют 72 диаграммы, причем вклад 51 из них удалось вычислить точно с помощью использования ЭВМ для аналитических вычислений. Ошибка в  $c_3$  (так же, как и в  $c_4$ ) связана с приближенным численным расчетом остальных диаграмм (в последнем случае всех 891 четырехпетловых диаграмм).

Для сравнения теоретического результата (40) с экспериментальным \*)

$$\mu_{\text{эксп}}/\mu_0 = 1,001\,159\,652\,200 \quad (40)$$

следует использовать численное значение постоянной тонкой структуры. Если взять в качестве такового ее наиболее точное значение, определенное с помощью эффекта Джозефсона

$$\alpha^{-1} = 137,035\,963 \quad (15), \quad (42)$$

то мы получим

$$\mu_{\text{теор}} = 1,001\,159\,652\,460 \quad (147), \quad (43)$$

причем большая часть ошибки связана с ошибкой в значении  $\alpha$ .

Как видно, согласие между теоретическим  $\mu_{\text{теор}}$  и экспериментальным  $\mu_{\text{эксп}}$  значениями имеет место на относительном уровне  $2 \cdot 10^{-10}$ . Этот результат является рекордным в физике. Он свидетельствует о поразительной предсказательной силе квантовой электродинамики и о верности основных принципиальных положений, положенных в основу современной квантовой теории поля.

## § 42. Уравнение Дирака с радиационными поправками

42.1. Обобщение волновой функции электрона. Поставим теперь задачу получить уравнение, описывающее движение одного электрона в заданном внешнем электромагнитном поле  $A^{\text{ext}}(x)$ .

В классической теории уравнение для *неквантованной* спинорной волновой функции  $\psi(x)$  электрон-позитронного поля может быть получено с помощью вариационного принципа из полного лагранжиана системы, равного сумме лагранжиана свободного электрон-позитронного поля и лагранжиана взаимодействия поля  $\psi(x)$  с внешним полем  $A^{\text{ext}}(x)$ :

$$\mathcal{L}(x) = (i/2) (\bar{\psi}(x) \gamma^n \partial_n \psi(x) - \partial^n \bar{\psi}(x) \gamma^n \psi(x)) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) + e \bar{\psi}(x) \hat{A}^{\text{ext}}(x) \psi(x). \quad (1)$$

Для такого лагранжиана вариационный принцип приводит к известному уравнению Дирака

$$(i\hat{\partial} + e\hat{A}^{\text{ext}} - m) \psi(x) = 0, \quad (2)$$

\*) Ссылки на оригинальные теоретические и экспериментальные публикации см. в статье Киношита и Линдквиста (1981).

на основе которого в свое время релятивистская квантовая механика добилась больших успехов в объяснении магнитных свойств электрона, расчете тонкой структуры уровней водородоподобных атомов и т. п.

Однако это уравнение не учитывает таких специфических квантовополевых эффектов, как поляризация вакуума, рождение виртуальных пар и т. п., ввиду чего в квантовой теории поля оно должно быть соответствующим образом обобщено. Чтобы подойти к решению поставленной задачи, рассмотрим получение неквантованной электрон-позитронной функции из квантовой теории поля. Здесь состояние с одним электроном, обладающим определенным импульсом  $\mathbf{p}$  и определенным направлением спина, будет описываться функцией

$$\Phi_1 = (2\pi)^{3/2} a_{\mathbf{v}}^{\dagger}(\mathbf{p}) \Phi_0. \quad (41.25)$$

Общее одноэлектронное состояние найдется суперпозицией таких «чистых» состояний:

$$\Phi_1 = (2\pi)^{3/2} \sum_{\mathbf{v}} \int c_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) a_{\mathbf{v}}^{\dagger}(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \Phi_0. \quad (3)$$

Введем выражение

$$\Phi_0^* \psi(x) \Phi_1 = (2\pi)^{3/2} \sum_{\mathbf{v}} \int c_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) \Phi_0^* \psi(x) a_{\mathbf{v}}^{\dagger}(\mathbf{p}) \Phi_0 d\mathbf{p} \quad (4)$$

и заметим, что в силу перестановочных соотношений

$$\psi(x) a_{\mathbf{v}}^{\dagger}(\mathbf{p}) + a_{\mathbf{v}}^{\dagger}(\mathbf{p}) \psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} v^{\mathbf{v} \cdot -(\mathbf{p})} e^{-i\mathbf{p}x} \quad (\rho_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}).$$

Поэтому

$$\Phi_0^* \psi(x) \Phi_1 = \int e^{-i\mathbf{p}x} \sum_{\mathbf{v}} v^{\mathbf{v} \cdot -(\mathbf{p})} c_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) d\mathbf{p}. \quad (5)$$

Так как, по определению,

$$(\hat{\rho} - m) v^{\mathbf{v} \cdot -(\mathbf{p})} = 0,$$

то видим, что неквантованный спинор

$$\psi(x) = \Phi_0^* \psi(x) \Phi_1 \quad (6)$$

удовлетворяет уравнению Дирака для свободного поля

$$(i\hat{\partial} - m) \psi(x) = 0.$$

Из представления (5) следует далее, что спинор  $\psi(x)$  полностью определяет амплитуды  $c_{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$ , а тем самым и состояние  $\Phi_1$ . В частности, когда в этом состоянии электрон обладает определенной энергией  $E > 0$ , то

$$c_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = f_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) \delta(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - E)$$

и, из (5),

$$\psi(x) = e^{-iEx^0} \chi(x) \quad (7)$$

После этих предварительных замечаний перейдем к интересующей нас задаче и обобщим (6) для получения некантованного спинора, характеризующего электронные состояния для взаимодействующей системы.

Амплитуды состояния  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  здесь, очевидно, следует заменить на  $\Phi_0(g)$ ,  $\Phi_1(g)$ . В качестве локального оператора, обобщающего  $\psi(x)$ , мы, естественно, выберем  $\psi(x; g)$ . Для исключения зависимости от  $g$  условимся иметь дело только с такими  $g = g_x(y)$ , для которых

$$g_x(y) = 1 \quad \text{при} \quad y \lesssim x. \quad (8)$$

Тогда в силу общих результатов § 40 выражение

$$\Phi(x) = \overset{*}{\Phi}_0(g) \psi(x; g) \Phi_1(g) \quad (9)$$

будет некантованным спинором, не зависящим от специального выбора функции  $g$ , удовлетворяющей условию (8).

Рассмотрим сначала положение, когда внешнее электромагнитное поле отсутствует и, следовательно, имеет место трансляционная инвариантность. Рассмотрим некоторую трансляцию  $L$ ,

$$x \rightarrow x + a,$$

и заметим, что согласно закону преобразования матрицы  $S(g)$  (20.21)

$$S(Lg) = U_L S(g) \overset{\dagger}{U}_L$$

и закону преобразования оператора  $\psi(x)$  при преобразовании переноса (см. (9.23))

$$\psi(Lx) = U_L \psi(x) \overset{\dagger}{U}_L$$

в соответствии с определением (40.35) имеет место соотношение

$$\psi(Lx, Lg) = U_L \psi(x; g) \overset{\dagger}{U}_L$$

или

$$\psi(Lx, g) = U_L \psi(x, L^{-1}g) \overset{\dagger}{U}_L.$$

Но для бесконечно малой трансляции  $a = \delta a$

$$U_L = 1 + \delta U_L, \quad \delta U_L = i(P_0 \cdot \delta a).$$

Поэтому в соответствии с (9.24)

$$i \frac{\partial \psi(x; g)}{\partial x_n} = [\psi(x; g), P_0^n] + i \int \frac{\delta \psi(x; g)}{\delta g(y)} \frac{\partial g(y)}{\partial y_n} dy.$$

Вследствие (8)

$$\frac{\partial g(y)}{\partial y^n} = 0 \quad \text{при } y \lesssim x,$$

и по (40.17)

$$i \frac{\delta \psi(x; g)}{\delta g(y)} = [H(x; g), \psi(x; g)] \quad \text{при } y \gtrsim x.$$

Отсюда

$$i \frac{\partial \psi(x; g)}{\partial x_n} = \left[ \psi(x; g), \left( P_0^2 - \int H(y; g) \frac{\partial g(y)}{\partial y_n} dy \right) \right].$$

Следовательно, на основании (40.4) получаем:

$$i \frac{\partial \psi(x; g)}{\partial x_n} = [\psi(x; g), P^n(g)],$$

и потому

$$i \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_n} = \overset{*}{\Phi}_0(g) \psi(x; g) P^n(g) \Phi_1(g) - \overset{*}{\Phi}_0(g) P^n(g) \psi(x; g) \Phi_1(g).$$

Рассмотрим случай, когда электрон в состоянии  $\Phi_1(g)$  обладает определенным 4-вектором энергии-импульса. Тогда

$$P^n(g) \Phi_1(g) = p^n \Phi_1(g).$$

С другой стороны, для вакуумного состояния имеем всегда:

$$P^n(g) \Phi_0(g) = 0, \quad \overset{*}{\Phi}_0(g) P^n(g) = 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^n} = -i p_n \Phi(x)$$

и

$$\Phi(x) = C e^{-i p x} \quad (C = \text{const}, \quad p^0 = \sqrt{p^2 + m^2}).$$

Поскольку, кроме того,  $\Phi(x)$  обладает трансформационными свойствами спинора, мы видим, что

$$(i \hat{d} - m) \Phi(x) = 0.$$

Данное уравнение удовлетворяется в случае, когда в одноэлектронном состоянии  $\Phi_1(g)$  имеется определенный 4-вектор энергии-импульса. Так как любое одноэлектронное состояние может быть получено суперпозицией состояний этого типа, мы видим, что уравнение Дирака выполняется и в общем случае.

Перейдем, наконец, к исследованию положения, когда имеется внешнее электромагнитное поле. Если это поле не зависит от времени, у нас остается инвариантность по отношению к временным трансляциям, и потому, повторяя вышеприведенное рассуждение, убеждаемся, что если в рассматриваемом одноэлектронном состоянии имеется определенная энергия  $E$ , то

$$\Phi(x) = e^{-i E x^0} \chi(x). \quad (10)$$

Таким образом, энергетические уровни для стационарных одноэлектронных состояний должны находиться из решения задачи на собственные значения.

**42.2. Обобщение уравнения Дирака.** Это решение мы получим, подставив (10) в обобщенное уравнение Дирака. Для фактического построения этого уравнения возвратимся к формуле (9). Внося в нее представление (40.35), имеем:

$$\varphi(x) = \frac{1}{ig(x)} \Phi_0^* S(g) \frac{\delta S(g)}{\delta \bar{\eta}(x)} \Phi_1,$$

где  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  — вакуумное и одноэлектронное состояния при отсутствии взаимодействия.

Совершив обычный предельный переход  $g \rightarrow 1$ , найдем

$$\varphi(x) = \frac{1}{i} \Phi_0^* S \frac{\delta S}{\delta \bar{\eta}(x)} \Phi_1. \quad (11)$$

Но

$$\frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta \bar{\eta}(x)} = i\psi(x),$$

откуда

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{\eta}(x)} = iT(\psi(x) S). \quad (12)$$

Для того чтобы исключить с самого начала обычные расходимости, будем считать, что  $T$ -произведение здесь переопределено так, что (12) не содержит ультрафиолетовых бесконечностей. Имеем, следовательно,

$$\varphi(x) = \Phi_0^* S T(\psi(x) S) \Phi_1 = \frac{\Phi_0^* T(\psi(x) S) \Phi_1}{S_0},$$

где  $\Phi_1$  дается формулой (3).

Заметим, что диаграммы, определяющие  $\varphi(x)$ , непосредственно получаются из соответствующих диаграмм для свободной от расходимостей функции Грина

$$G(x, y | A^{\text{ext}}) = i \frac{\Phi_0^* T(\psi(x) \bar{\psi}(y) S) \Phi_0}{S_0}$$

заменой фактора для входящей линии

$$i \Phi_0^* T(\psi(x) \bar{\psi}(z)) \Phi_0 = S^c(x-z)$$

«внешним» фактором

$$\Phi_0^* \psi(x) \Phi_1 = \int e^{-ipx} \sum_v c_v(p) dp = \psi(x).$$

Поэтому связь между  $\varphi(x)$  и  $G$  можно записать в следующем виде:

$$\varphi(x) = \int G(x, y | A^{\text{ext}}) [S^c(y-z)]^{-1} \psi(z) dy dz. \quad (13)$$



В § 38 на основе обобщенной теоремы Вика мы получили для электронной функции Грина уравнение Швингера, интегральная форма которого (38.46) символически может быть записана в виде

$$G = S^c - eS^c \mathfrak{A} G + S^c M' G.$$

Подставляя это выражение в уравнение (13), записанное в форме

$$\varphi = G \frac{1}{S^c} \psi,$$

получим:

$$\varphi = (S^c - eS^c \mathfrak{A} G + S^c M' G) \frac{1}{S^c} \psi = \psi - eS^c \mathfrak{A} \varphi + S^c M' \varphi,$$

т. е.

$$\varphi(x) = \psi(x) -$$

$$- e \int S^c(x-y) \mathfrak{A}(y) \varphi(y) dy + \int S^c(x-y) M'(y, z) \varphi(z) dy dz. \quad (14)$$

Воздействуя на (14) оператором Дирака, с учетом того, что  $\psi(x)$  удовлетворяет уравнению Дирака для свободного поля, найдем для  $\varphi(x)$  уравнение

$$(i\hat{\partial}_x + e\mathfrak{A}(x)) \varphi(x) - \int M(x, y) \varphi(y) dy = 0, \quad (15)$$

впервые полученное Швингером (1951б). Напомним, что здесь  $M(x, y)$  представляет введенный в § 38 массовый оператор, который согласно (38.44) имеет вид

$$M(x, y) = m\delta(x-y) - ie^2 \gamma^k \int G(x, z) \Gamma^l(z, y | \xi) D_{kl}(\xi, x) d\xi dz \quad (16)$$

и, кроме того,

$$\mathfrak{A}(x) = \frac{1}{S_0} \langle T [(A(x) + A^{\text{ext}}(x)) S] \rangle_0. \quad (17)$$

Теперь ясно, что в пределе выключения взаимодействия с квантованным электромагнитным полем ( $e \rightarrow 0$ ,  $eA^{\text{ext}}$  конечно) мы получаем из (15) уравнение Дирака для классического электрона во внешнем поле

$$(i\hat{\partial}_x + e\hat{A}^{\text{ext}}(x) - m) \varphi(x) = 0.$$

Таким образом, (15) представляет собой уравнение Дирака с радиационными поправками. Эти радиационные поправки, как видно, принадлежат двум различным типам. Член  $\mathfrak{A}$  представляет собой потенциал внешнего поля  $A^{\text{ext}}$ , сложенный с эффективным средним потенциалом поля, «индуцированного» в вакууме. Этот член содержит поправки к  $A^{\text{ext}}$ , связанные с *поляризацией вакуума*. Величина  $M(x, y)$  представляет собой оператор массы, включающий в себя эффекты *собственной энергии*. В низшем порядке по  $e^2$  эти величины

могут быть записаны в виде (считая, что  $e^2 \ll 1$ ,  $eA^{\text{ext}}$  конечно)

$$M(x, y) = m\delta(x - y) - ie^2\gamma^k \int S^c(x, z | A^{\text{ext}}) \gamma^l \delta(z - y) \delta(z - \xi) \times \\ \times D_{kl}^c(\xi - x) d\xi dz = m\delta(x - y) - ie^2\gamma^k S^c(x, y | A^{\text{ext}}) \gamma^l D_{kl}^c(y - x) \quad (18)$$

и

$$\mathfrak{A}_k(x) = A_k^{\text{ext}}(x) - ie^2 \int \text{Sp} [S^c(y - \tau) \gamma^m S^c(\tau - y) \gamma^n] D_{nk}^c(y - x) A_m^{\text{ext}}(\tau) dy d\tau. \quad (19)$$

Поэтому при учете поправок порядка  $e^2$  обобщенное уравнение Дирака (15) может быть записано в виде

$$(i\hat{d} + e\hat{A}^{\text{ext}}(x) - m) \varphi(x) - ie^2\gamma^k \varphi(x) \int dy d\tau D_{kn}^c(x - y) \text{Sp} [S^c(y - \tau) \gamma^m S^c(\tau - y) \gamma^n] eA_m^{\text{ext}}(\tau) + \\ + ie^2 \int dy \gamma^k S^c(x, y | A^{\text{ext}}) \gamma^l D_{lk}^c(y - x) \varphi(y) = 0. \quad (20)$$

Здесь  $S^c(x, y | A^{\text{ext}})$  — функция Грина классического электрона, движущегося в заданном внешнем поле  $A^{\text{ext}}$ . Эта функция, по определению, удовлетворяет уравнению

$$(i\hat{d} + e\hat{A}^{\text{ext}} - m) S^c(x, y | A^{\text{ext}}) = -\delta(x - y) \quad (21)$$

и представляется суммой диаграмм с двумя внешними электронными

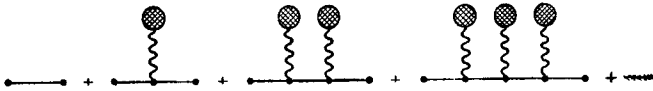


Рис. 61.

линиями и любым числом внешних фотонных линий, соответствующих заданному полю  $A^{\text{ext}}$  (рис. 61). Соответствующее разложение для  $S^c(| A^{\text{ext}})$  может быть формально получено разложением в степенной ряд по  $A^{\text{ext}}$  выражения

$$S^c(x, y | A^{\text{ext}}) \simeq -\frac{1}{i\hat{d} - m + e\hat{A}^{\text{ext}}} = \frac{1}{(S^c)^{-1} - e\hat{A}^{\text{ext}}}$$

и имеет вид

$$S^c(x, y | A^{\text{ext}}) = S^c(x - y) + e \int S^c(x - z) \hat{A}^{\text{ext}}(z) S^c(z - y) dz + \\ + e^2 \int S^c(x - z) \hat{A}^{\text{ext}}(z) S^c(z - t) \hat{A}^{\text{ext}}(t) S^c(t - y) dz dt + \dots \quad (22)$$

Уравнение (20) позволяет вычислить радиационные поправки к энергетическим уровням связанных состояний.

**42.3. Лэмбовский сдвиг уровней.** Важным примером этого рода является задача вычисления радиационного смещения уровней

электрона в водородоподобном атоме — так называемого *лэмбовского сдвига*. Для вычисления сверхтонкой структуры рассмотрим движение электрона в кулоновском поле ядра. Положим

$$\left. \begin{aligned} A_n^{\text{ext}}(\mathbf{x}) &= \delta_{n0} A_0(\mathbf{x}), \\ A_0(\mathbf{x}) &= \frac{Ze}{4\pi |\mathbf{x}|} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

или, в импульсном представлении,

$$A_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} A_0(\mathbf{q}) d\mathbf{q}, \quad (24)$$

$$A_0(\mathbf{q}) = \frac{Ze}{(2\pi)^{3/2} |q|^2}. \quad (25)$$

В этом случае функция  $\Phi(\mathbf{x})$  имеет вид (10), причем энергия  $E$  после подстановки (10) в (15) может быть определена из уравнения

$$(E\gamma^0 - i\partial\gamma + e\mathcal{A}(\mathbf{x})) \chi(\mathbf{x}) = \int e^{iE(x^0 - y^0)} M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \chi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (26)$$

где  $E$  удобно записать в виде ряда по степеням  $\alpha = e^2/4\pi$ :

$$E = E_0 + \alpha E_1 + \dots, \quad (27)$$

выбрав в качестве нулевого приближения случай отсутствия радиационных поправок. Уравнение в этом приближении

$$(E_0\gamma^0 - i\partial\gamma + e\gamma^0 A_0(\mathbf{x}) - m) \chi_0(\mathbf{x}) = 0 \quad (28)$$

представляет собой обычное уравнение Дирака для движения электрона в кулоновском поле ядра, а функции  $\chi_0$  и собственные значения  $E$  соответствуют тонкой структуре водородоподобных уровней. Ясно, что добавки к  $E_0$  именно и являются искомым лэмбовским смещением уровней, обусловленным радиационными поправками.

Вычисление первой поправки  $E_1$  может быть проведено на основе уравнения (20). Внося в него (25) и (27) с учетом (28), приравнивая члены порядка  $e^2$ , переходя к импульсному представлению

$$\chi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \chi(\mathbf{p}) d\mathbf{p},$$

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} M(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{p} d\mathbf{q},$$

$$S^c(\mathbf{x}, \mathbf{y} | A^{\text{ext}}) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} S^c(\mathbf{p}, \mathbf{q} | A^{\text{ext}}) d\mathbf{p} d\mathbf{q}$$

и умножая уравнение (26) слева на сопряженный спинор  $\bar{\chi}(\mathbf{p})$  такой, что

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \bar{\chi}(\mathbf{p}) \gamma^0 \chi(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int |\chi(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} = 1,$$

получаем выражение для  $E_1$  в виде суммы двух членов, один из которых,  $E'_1$ , соответствует радиационной поправке к оператору массы,

а второй,  $E_1''$  — поляризации вакуума:

$$\alpha E_1 = E_1' + E_1'', \quad (29)$$

где

$$E_1' = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \bar{\chi}(p) M(p, q) \chi(q) dp dq = \\ = \frac{e^2}{i(2\pi)^7} \int \bar{\chi}(p) \gamma^n S^c(p-k, q-k | A^{\text{ext}}) \gamma^m D_{nm}^c(k) \chi(q) dk dp dq \quad (30)$$

и

$$E_1'' = -\frac{e}{(2\pi)^3} \int \bar{\chi}(p) \gamma^k D_{km}^c(p-q) \Pi^{nm}(p-q) A_n^{\text{ext}}(p-q) \chi(q) dp dq, \quad (31)$$

причем

$$p^0 = q^0 = E \approx E_0. \quad (32)$$

Здесь  $\Pi^{nm}(k)$  — оператор поляризации второго порядка, рассмотренный еще в главе VI. На основании (35.3) и (35.8) после устранения расходимости этот оператор имеет вид

$$\Pi^{nm}(k) = \frac{\alpha}{3\pi} (g^{nm}k^2 - k^n k^m) I(k^2), \quad (33)$$

где

$$I(k^2) = -k^2 \int_0^1 \frac{z^2(3-z^2) dz}{4m^2 - k^2(1-z^2)} \Big|_{k^2 \ll m^2} \approx -\frac{1}{5} \frac{k^2}{m^2} + \dots \quad (34)$$

Выражение (30) дает основной вклад в радиационное смещение уровней. Подставляя в (30) разложение (22) для  $S^c(x, y | A^{\text{ext}})$ , находим, что первый член приводит к расходящемуся выражению типа собственной энергии электрона, который полностью компенсируется соответствующим переопределением  $T$ -произведения (ср. (12)). Второй же член приводит к выражению

$$E_1'^{(2)} = \frac{e^3}{i(2\pi)^7} \times \\ \times \int \bar{\chi}(p) \gamma^k S^c(p-k) \hat{A}^{\text{ext}}(p-q) S^c(q-k) \gamma^l D_{kl}^c(k) \chi(q) dk dp dq = \\ = -\frac{e}{(2\pi)^3} \int \bar{\chi}(p) \Lambda^n(p, q, p-q) A_n^{\text{ext}}(p-q) \chi(q) dp dq, \quad (35)$$

в котором  $\Lambda^n(x, y | z)$  является введенной в § 28.1 вершинной функцией; последняя после устранения ультрафиолетовой расходимости определяется выражением (35.27), которое, как было установлено, содержит инфракрасную особенность. Для устранения этой особенности следует рассмотреть следующие члены массового оператора. Отсылая читателя, интересующегося деталями вычислений, к оригинальным исследованиям\*), заметим здесь, что основной вклад

\*) Карплус, Клейн, Швингер (1952), Беранже, Бете, Фейнман (1953).

в  $E'_1$  дает нерелятивистский член, соответствующий малому импульсу  $q^2 \ll m^2$  внешнего поля  $A_0(q)$ , который был впервые вычислен Бете (1947).

Важной особенностью выражения (35) является его явная зависимость от вида функций  $\chi, \bar{\chi}$ , что приводит к неодинаковой величине лэмбовского сдвига для различных уровней электрона в водородоподобном атоме. Именно это обстоятельство и приводит к наблюдаемому на опыте *расщеплению уровней*  $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$ , которые согласно одноэлектронной теории Дирака являются совпадающими.

Член поляризации вакуума (31) в низшем приближении приводит к смещению одних лишь  $S$ -уровней. В самом деле, подставляя (23), (24), (32), (33) в (31), получаем:

$$E_1^n = -e \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \chi(p) I(-(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2) A_0(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \chi(q) dp dq \simeq \\ \simeq 4\alpha(Z\alpha) \frac{dI(k^2)}{dk^2} \Big|_{k^2=0} |\chi^{nr}(\mathbf{x}=0)|^2 = -\frac{4\alpha(Z\alpha)}{15m^2} |\chi^{nr}(0)|^2, \quad (36)$$

где  $I(k^2)$  определяется выражением (34) при  $k^2 = -k^2$ , а  $\chi^{nr}$  — нерелятивистская кулоновская волновая функция.

Заметим, наконец, что рассчитанное (см. Мор (1975)) значение относительного сдвига  $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$  уровней водорода, вычисленное с точностью до членов порядка  $\alpha(Z\alpha)^2$  и  $\alpha^2$  с учетом влияния на тонкую структуру эффектов взаимодействия электрона с магнитным дипольным моментом ядра, а также эффектов структуры и конечности массы ядра, оказалось равным  $1057,87 \pm 0,02$  МГц, что находится в полном согласии с экспериментальным значением  $1057,8594 \pm 0,0019$  МГц, полученным недавно Соколовым и Яковлевым (1982).

**42.4. Заключительные замечания.** Применение методики, изложенной в п. 1 этого параграфа, конечно, не ограничивается рассмотрением лэмбовского сдвига уровней в водороде. Этот метод без труда может быть распространен на системы, содержащие произвольное число электронов и позитронов.

Например, позитронная волновая функция, очевидно, имеет вид

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{1}{i} \bar{\Phi}_0^\dagger \frac{\delta S}{\delta \eta(x)} \Phi_1 = \frac{\bar{\Phi}_0 T(\bar{\psi}(x) S) \Phi_1}{S_0}, \quad (37)$$

где  $\Phi_1$  — амплитуда однопозитронного состояния. Замечая, что  $\bar{\varphi}(x)$  отличается от одноэлектронной функции Грина заменой фактора  $S^c$  для выходящей линии на  $\bar{\psi}(x)$ , можно, проводя аналогичное изложенному рассуждение, получить для  $\bar{\varphi}$  уравнение Дирака с радиационными поправками.

Аналогично можно ввести волновую функцию для двух электронпозитронов. Для рассмотрения позитрония удобно ввести величину

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{i^2} \bar{\Phi}_0^\dagger \frac{\delta^2 S}{\delta \eta(x) \delta \eta(y)} \Phi_2 = \frac{\bar{\Phi}_0 T(\psi(x) \bar{\psi}(y) S) \Phi_2}{S_0}, \quad (38)$$

где  $\Phi_2$  — амплитуда состояния с одним электроном и одним позитроном. Уравнение для  $\Phi(x, y)$  может быть получено соответствующей модификацией уравнения для двухэлектронной функции Грина

$$G(x, x', y, y') = \frac{\Phi_0^* T(\psi(x) \psi(x') \bar{\psi}(y) \psi(y') S) \Phi_0}{S_0}.$$

Очевидно, вводя в рассмотрение матричные элементы от вариационных производных  $S$ -матрицы более высоких порядков, можно обобщить полученные результаты на любые многоэлектронные системы.

## МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УСРЕДНЕНИЯ

## § 43. Континуальный интеграл в квантовой теории поля

**43.1. Введение.** Мы приступим теперь к рассмотрению различных попыток выхода за рамки теории возмущений. Среди этих попыток большой интерес представляет изложенный в настоящей главе метод, который основан на использовании континуального интеграла, введенного в свое время Фейнманом (1948а). Как будет показано, здесь удастся получить замкнутые выражения для полных функций Грина, включающих в себя все радиационные поправки. Эти выражения можно рассматривать как формулы усреднения классических функций Грина для частиц, движущихся в заданном внешнем поле, по квантовым флуктуациям этого поля. Континуальные интегралы по функциональному пространству возникают именно в процессе такого усреднения.

Следует отметить, что исследования в этой области еще далеки от своего завершения; здесь имеется ряд нерешенных вопросов как технического, так и принципиального характера.

Представления функций Грина в виде континуальных интегралов могут быть получены различными способами. Один из них \*) основывается на формальном интегрировании уравнений в вариационных производных для функций Грина, рассмотренных в § 38. Мы, однако, изложим другой, по нашему мнению, более простой путь (Боголюбов (1954)), который исходит из представления функций Грина через вакуумные ожидания хронологических произведений, причем операция вакуумного усреднения интерпретируется как функциональный интеграл.

Будем исходить из полученных в § 37 выражений для полных функций Грина

$$\Delta(x, y) = i \frac{\langle T\varphi(x)\varphi(y)S \rangle_0}{S_0}$$

в виде вариационных производных от производящего функционала  $S_0(J)$  (ср. (37.12))

$$\langle T\varphi(x)\varphi(y)S(J) \rangle_0 = (-i)^2 \frac{\delta^2 S_0(J)}{\delta J(x)\delta J(y)}.$$

\*) Эдвардс, Пайерлс (1954), Симанзик (1954), Гельфанд, Минлос (1954), Фрадкин (1954), Халатников (1955).

Здесь для простоты мы пока ограничиваемся случаем теории с одним скалярным полем:

$$S_0(J) = \langle T \exp i \left( \int \mathcal{L}(\varphi) dx + \varphi J \right) \rangle_0. \quad (37.10)$$

В более общем случае производящий вакуумный функционал  $S_0(\eta, \bar{\eta}, J, \dots)$  содержит ферми-аргументы, а операция  $\langle \dots \rangle_0$  содержит усреднение как по бозонному, так и по фермионному вакуумам. Однако при вычислении вакуумных средних операции усреднения по бозе- и ферми-вакуумам можно проводить независимо, так как соответствующие выражения представляются линейными формами произведений вакуумных средних по каждому вакууму. Мы начнем сейчас с изучения процедуры вычисления среднего по бозе-вакууму. Эта операция является исчерпывающей для класса квантовопольевых моделей, не содержащих ферми-полей. В соответствии с тем, что сказанным она является также необходимым независимым этапом при рассмотрении моделей, содержащих как бозе-, так и ферми-поля. Наконец, как будет показано, она является логическим предшествованием к вычислению средних по ферми-вакууму.

Поставим задачу определения вакуумного среднего от произвольного функционала  $F$ , зависящего от операторных функций действительного поля  $\varphi$ , квантованных по Бозе—Эйнштейну,  $\langle T(F(\varphi)) \rangle_0$ . При этом мы будем считать, что хронологические спаривания операторов  $\varphi$  заданы и в импульсном представлении имеют вид

$$\overline{\varphi(p)\varphi(p')} = -i\delta(p+p')\Delta^c(p). \quad (1)$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда  $F$  имеет экспоненциальную форму, и определим выражение

$$I = \langle T(\exp i \int v(p)\varphi(p) dp) \rangle_0, \quad (2)$$

где  $v(p)$  — произвольная функция.

**43.2. Вычисление  $\langle T(\exp i \int v\varphi dp) \rangle_0$ .** Для вычисления  $I$  заметим, что приведение к нормальной форме какого-либо операторного  $T$ -функционала  $F$ , зависящего от бозе-поля  $\varphi$ , может быть выполнено с помощью следующей процедуры. Вместо  $\varphi$  в  $F$  следует подставить величину  $\varphi'$ , которая в импульсном представлении имеет вид \*)

$$\varphi'(k) = \varphi(k) + \int \overline{\varphi(k)\varphi(k')} \frac{\delta}{\delta\varphi(k')} dk' = \varphi(k) - i\Delta^c(k) \frac{\delta}{\delta\varphi(-k)}. \quad (3)$$

После замены (3) функционал  $F(\varphi')$  следует рассматривать как обычный  $c$ -функционал от неквантованной функции  $\varphi$  и ее функ-

\*) Соответственно в  $x$ -представлении

$$\varphi'(x) = \varphi(x) - i \int \Delta^c(x-y) \frac{\delta}{\delta\varphi(y)} dy.$$



циональных производных и производить в нем необходимые функциональные дифференцирования, считая, что справа  $F$  умножено на единицу. Полученное в результате этой операции выражение можно считать записанным в нормальной форме функционалом  $F$  от операторных функций  $\varphi$ . Например,

$$T\left(\int \varphi(k) a(k) dk \int \varphi(k') b(k') dk'\right) \rightarrow \int \left[\varphi(k) - i\Delta^c(k) \frac{\delta}{\delta\varphi(-k)}\right] \times \\ \times a(k) dk \int \left[\varphi(k') - i\Delta^c(k') \frac{\delta}{\delta\varphi(-k')}\right] b(k') dk' \cdot 1 = \\ = \int \varphi(k) a(k) dk \int \varphi(k') b(k') dk' - i \int \Delta^c(k) b(-k) a(k) dk,$$

т. е.

$$T\left(\int \varphi(k) a(k) dk \int \varphi(k') b(k') dk'\right) = \\ = \int a(k) dk \int b(k') dk' : \varphi(k) \varphi(k') : - i \int a(k) \Delta^c(k) b(-k) dk,$$

что может быть проверено непосредственной подстановкой.

Справедливость сформулированного рецепта так же легко проверяется для случая, когда  $F$  имеет полиномиальную форму, откуда вытекает его справедливость для любых  $F$ , которые могут быть разложены в степенные ряды. Ясно, кроме того, что для вычисления вакуумного среднего достаточно в результате положить  $\varphi = 0$ , т. е.

$$\langle T(F(\varphi)) \rangle_0 = \left\{ F\left(\varphi - i\Delta^c \frac{\delta}{\delta\varphi}\right) \cdot 1 \right\}_{\varphi=0}. \quad (4)$$

Применяя рецепт (4) к интегралу (2), находим, что последний может быть представлен в виде

$$I = \left[ \left\{ \exp i \int v(p) \left( \varphi(p) - i\Delta^c(p) \frac{\delta}{\delta\varphi(-p)} \right) dp \right\} \cdot 1 \right]_{\varphi=0}. \quad (5)$$

Для вычисления (5) определяем вспомогательную величину

$$U(\lambda | \varphi) = \exp \left( i\lambda \int v(p) \left( \varphi(p) - i\Delta^c(p) \frac{\delta}{\delta\varphi(-p)} \right) dp \right) \cdot 1, \quad (6)$$

причем, очевидно,

$$I = U(1 | 0).$$

Дифференцируя (6) по параметру  $\lambda$ , получаем для  $U$  дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial U(\lambda | \varphi)}{\partial \lambda} = i \int v(p) \left( \varphi(p) - i\Delta^c(p) \frac{\delta}{\delta\varphi(-p)} \right) dp U(\lambda | \varphi), \quad (7)$$

решение которого, удовлетворяющее начальному условию

$$U(\lambda | \varphi) |_{\lambda=0} = U(0 | \varphi) = 1,$$

будем искать в виде

$$U(\lambda | \varphi) = e^{s(\lambda | \varphi)}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получаем для  $s$  уравнение в «частных производных»:

$$\frac{\partial s}{\partial \lambda} = \int v(p) \left( i\varphi(p) + \Delta^c(p) \frac{\delta s}{\delta \varphi(-p)} \right) dp.$$

Для решения его представим  $s$  в виде

$$s(\lambda | \varphi) = i\lambda \int v(p) \varphi(p) dp + r(\lambda),$$

где  $r$  не зависит от  $\varphi$  и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda} = i\lambda \int v(p) \Delta^c(p) v(-p) dp,$$

интегрирование которого с учетом граничного условия дает:

$$r(\lambda) = \frac{i\lambda^2}{2} \int v(p) \Delta^c(p) v(-p) dp.$$

Таким образом,

$$U(\lambda | \varphi) = \exp i \left( \lambda \int v(p) \varphi(p) dp + \frac{\lambda^2}{2} \int v(p) \Delta^c(p) v(-p) dp \right),$$

и в соответствии с (4), (5)

$$I = \left\langle T \left( \exp i \int v(p) \varphi(p) dp \right) \right\rangle_0 = \exp \left[ \frac{i}{2} \int v(p) \Delta^c(p) v(-p) dp \right]. \quad (9)$$

**43.3. Континуальные интегралы.** Для перехода от (9) к функциональному интегралу введем дискретное «решетчатое» импульсное представление, основанное на конечной системе точек  $p_j$  в импульсном пространстве, которая симметрична по отношению к преобразованию

$$p \rightarrow -p.$$

Пусть  $\Delta p$  — четырехмерный элемент объема решетки. Тогда, вводя обозначения

$$\varphi(p_j) = \varphi_j, \quad \Delta^c(p_j) = \Delta_j^c, \quad v(p_j) \Delta p = v_j, \quad (10)$$

получим из (9), с учетом четности  $\Delta^c$ ,

$$\begin{aligned} \left\langle T \left( \exp i \sum_j v_j \varphi_j \right) \right\rangle_0 &= \exp \left( \frac{i}{2\Delta p} \sum_j v_j \Delta_j^c v_j \right) = \\ &= \prod_j \left( \exp \frac{i}{2\Delta p} v_j \Delta_j^c v_j \right) = \prod_{j>0} \left( \exp \frac{i}{\Delta p} v_j \Delta_j^c v_j \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Замечая, что условие вещественности поля  $\varphi(x)$  в дискретном импульсном представлении имеет вид

$$\varphi^*(p_j) = \varphi(-p_j),$$

выбирая систему обозначений так, чтобы

$$-p_j = p_{-j},$$

положим

$$\varphi_j = x_j + iy_j, \quad \varphi_{-j} = x_j - iy_j,$$

причем  $j > 0$ , а все  $x_j$  и  $y_j$  действительны.

Тогда с помощью обычной гауссовой квадратуры

$$\exp\left(i \frac{\lambda^2 - \mu^2}{4a}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{ia}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp i \{(-a + i\varepsilon)(x^2 + y^2) + \lambda x + i\mu y\}$$

сомножители правой части (11) могут быть представлены в виде ( $a = \Delta\rho/\Delta_j^c$ ,  $\lambda = v_j + v_{-j}$ ,  $\mu = v_j - v_{-j}$ ):

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i}{\Delta\rho} v_j \Delta_j^c v_{-j}\right) &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{i\Delta\rho}{\pi\Delta_j^c} \int_{-\infty}^{\infty} dx_j \int_{-\infty}^{\infty} dy_j \exp i \left\{ \varphi_j \left(-\frac{\Delta\rho}{\Delta_j^c(\varepsilon)}\right) \varphi_{-j} + v_j \varphi_j + v_{-j} \varphi_{-j} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\frac{1}{\Delta_j^c(\varepsilon)} = \frac{1}{\Delta_j^c} - i\varepsilon,$$

что соответствует обычному определению причинной функции  $\Delta^c$ . В дальнейшем, как обычно, знак предельного перехода по  $\varepsilon$  явно не указывается, а вместо  $\Delta_j^c(\varepsilon)$  пишется  $\Delta_j^c$ .

Введем новое обозначение

$$\begin{aligned} \delta\varphi_j &= \frac{i\Delta\rho}{\pi\Delta_j^c} \exp\left(-i\varphi_j \frac{\Delta\rho}{\Delta_j^c} \varphi_{-j}\right) dx_j dy_j = \\ &= \frac{\exp\left(-i\varphi_j \frac{\Delta\rho}{\Delta_j^c} \varphi_{-j}\right) dx_j dy_j}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\varphi_j \frac{\Delta\rho}{\Delta_j^c} \varphi_{-j}\right) dx_j dy_j}. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда (11) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle T \exp\left(i \sum_j v_j \varphi_j\right) \rangle_0 &= \prod_{j>0} \left\{ \int \exp i (v_j \varphi_j + v_{-j} \varphi_{-j}) \delta\varphi_j \right\} = \\ &= \int \exp\left(i \sum_j v_j \varphi_j\right) \prod_{j>0} \delta\varphi_j. \end{aligned} \quad (13)$$

Произведение  $\prod_{j>0} \delta\varphi_j$  представляет собой интегральный вес в дискретном функциональном пространстве. Поскольку он не зависит от  $v_j$ , то с помощью преобразования Фурье по переменным  $v_k$

$$F(\dots \varphi_k \dots) = \int \prod_k (e^{i v_k \varphi_k} dv_k) \tilde{F}(\dots v_k \dots),$$

можно прийти к выводу, что соотношение вида (13) имеет место для произвольной функции  $F$  от переменных  $\dots \varphi_k \dots$ , т. е.

$$\langle T [F (\dots \varphi_k \dots)] \rangle_0 = \int F (\dots \varphi_k \dots) \prod_{i>0} \delta \varphi_i. \quad (14)$$

Совершим теперь обратный переход к непрерывному пространству импульсов путем уменьшения элемента решетки  $\Delta p$  и неограниченного увеличения области 4-пространства импульсов, занятого решеткой. Определим функциональный (континуальный) интеграл в виде соответствующего предела правых частей (13) и (14), обозначив его символом

$$\int \dots \delta \varphi,$$

т. е. положим вместо (13) и (14)

$$\begin{aligned} \langle T \exp \left( i \int v(p) \varphi(p) dp \right) \rangle_0 &= \exp \left( \frac{i}{2} \int v(p) \Delta^c(p) v(-p) dp \right) = \\ &= \int \exp \left( i \int v(p) \varphi(p) dp \right) \delta \varphi \end{aligned} \quad (15)$$

и

$$\langle TF(\varphi) \rangle_0 = \int F(\varphi) \delta \varphi. \quad (16)$$

В левых частях (15, 16)  $\varphi$  является оператором, а в правых — представляет собой  $c$ -функцию.

В соответствии с (12) введем также другую форму функционального интеграла. Положим

$$\delta \varphi = \exp(i e \mathcal{A}_0(\varphi)) d\varphi, \quad (17)$$

где функционал

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(\varphi) &= -\frac{1}{2} \int \varphi(p) [\Delta^c(p)]^{-1} \varphi(-p) dp = \\ &= \frac{1}{2} \int \varphi(p) (p^2 - m^2 + i\varepsilon) \varphi(-p) dp = \int [\mathcal{L}_0(p) + i\varepsilon \varphi(p) \varphi(-p)] dp \end{aligned}$$

оказывается равным действию свободного поля. Получаем вместо (15) и (16)

$$\begin{aligned} \exp \left( \frac{i}{2} \int v(p) \Delta^c(p) v(-p) dp \right) &= \\ &= \int \exp i \left[ \mathcal{A}_0(\varphi) + \int v(p) \varphi(p) dp \right] d\varphi, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\langle TF(\varphi) \rangle_0 = \int F(\varphi) e^{i\mathcal{A}_0(\varphi)} d\varphi. \quad (19)$$

Отметим, что введенный функциональный дифференциал  $d\varphi$  «включает» в себя предел произведения интегралов, стоящих в знаменателе правой части (12). Благодаря этому, например,

$$\int \exp(i e \mathcal{A}_0(\varphi)) d\varphi = \int \delta \varphi = 1. \quad (20)$$

Формула (18) теперь непосредственно проверяется линейной постановкой

$$\varphi(p) = \varphi'(p) + v(-p) \Delta^c(p).$$

Рассмотренный выше предельный переход к непрерывному функциональному пространству выполнен формально. Вопрос об ограничениях, которые необходимо наложить на класс функционалов и на пространство функций  $\varphi$  для сходимости этого предельного перехода требует отдельного изучения.

Однако можно абстрагироваться от проведенного рассуждения и рассматривать соотношения (15—20) как *определения* функциональных интегралов. Эти определения могут быть истолкованы как формулы, устанавливающие связь между вакуумным хронологическим ожиданием  $\langle T(\dots) \rangle_0$  и функциональным усреднением соответствующих выражений, зависящих от классических  $c$ -полей, по квантовым флуктуациям этих полей. Структура флуктуаций определяется классическим действием.

При таком самом общем *аксиоматическом* введении континуальных интегралов мы совершенно игнорируем вопросы *существования*, связанные в первую очередь с ультрафиолетовыми расходимостями. Здесь можно сужить класс рассматриваемых квантово-полевых функционалов  $F(\varphi)$ , ограничившись суммами рядов теории возмущений. Это, в сущности весьма серьезное, ограничение тем не менее оказывается достаточным для существующего в настоящее время круга приложений, рамки которого ограничены квазигауссовой квадратурой вида (15). В рамках теории возмущений мы можем исключить ультрафиолетовые расходимости, либо введя надлежащие контрчлены, либо (путем модификации спаривания  $\Delta^c$ ) регуляризацию.

Такая программа последовательной реализации аксиоматического введения континуального интеграла в рамках теории возмущений была проведена Славновым (1975), который использовал в качестве определения следующую формулу для квазигауссова интеграла:

$$\int \exp \left[ i \int \varphi(x) \frac{K(x-y)}{2} \varphi(y) dx dy + i \int \varphi(x) \eta(x) dx \right] \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) d\varphi = (-i)^n \frac{\delta^n}{\delta \eta(x_1) \dots \delta \eta(x_n)} \exp \left[ -\frac{i}{2} \int \eta(x) K^{-1}(x-y) \eta(y) dx dy \right], \quad (21)$$

обобщающую формулу (18). Здесь ядро  $K$  — ковариантная функция, такая, что существует обратная функция

$$\int K(x-z) dz K^{-1}(z-y) = \int K^{-1}(x-z) dz K(z-y) = \delta(x-y).$$

Если при этом  $K$  или  $K^{-1}$  определены неоднозначно (преобразование Фурье  $\tilde{K}^{-1}(p)$  имеет полюс по  $p^2$ ), то следует считать, что обход полюса совершается по правилу  $p^2 - m^2 + i\epsilon$ .

Как можно показать, введенный в (21) объект обладает алгебраическими свойствами обычного интеграла, а именно:

- а) позволяет выполнять интегрирование по частям,
- б) производить замену переменных интегрирования.

Здесь можно также доказать существование кратных интегралов и возможность перемены порядка интегрирования, существование преобразования Фурье и некоторых других свойств, во всяком случае достаточных для обоснования тех преобразований, которые приходится проводить с континуальными интегралами в теории возмущений.

Мы не будем явно формулировать и доказывать все эти свойства, отослав интересующегося читателя к оригинальной работе Славнова (1975). Приведем лишь наиболее полезную для приложений формулу, определяющую функциональную  $\delta$ -функцию:

$$\int \exp [i (f(x|\varphi) - y(x)) \eta(x)] d\eta = \delta \{f(x|\varphi) - y(x)\}. \quad (22)$$

Здесь  $y(x)$  — некоторая явная функция от  $x$ , а  $f(x|\varphi)$  — некоторый функционал от  $\varphi$ . Формула (22) означает, что

$$\int F(\varphi) \exp [i (f(x|\varphi) - y(x)) \eta(x)] \det \left( \frac{\delta f}{\delta \varphi} \right) d\varphi d\eta = F(\tilde{\varphi}), \quad (23)$$

где  $\tilde{\varphi}$  — решение уравнения

$$f(x|\tilde{\varphi}) - y(x) = 0.$$

**43.4. Континуальный интеграл по ферми-полям.** Перейдем теперь к случаю ферми-полей. Поступая по аналогии с предыдущим, рассмотрим вакуумное среднее от экспоненциального линейного функционала

$$I(\eta, \bar{\eta}) = \langle T \exp i \int (\bar{\eta}(p) \psi(p) + \psi(p) \eta(p)) dp \rangle_0.$$

Здесь  $\psi, \bar{\psi}$  — квантованные фермионные поля, хронологические спаривания которых в импульсном представлении имеют вид

$$\overline{\psi(p) \bar{\psi}(q)} = -\overline{\bar{\psi}(q) \psi(p)} = \frac{\delta(p+q)}{i} S^c(p),$$

а  $\eta, \bar{\eta}$  — «классические антикоммутирующие поля» (которые могут рассматриваться как образующие грассмановой алгебры, см. § 37.2), удовлетворяющие коммутационным соотношениям (37.15).

Вычисление вакуумного среднего  $I(\eta, \bar{\eta})$  может быть проведено тем же методом, что и вычисление аналогичной величины (2) для бозе-случая. Результат имеет вид

$$\langle T \exp i \int (\bar{\eta} \psi + \psi \eta) dp \rangle_0 = \exp \left( i \int dp \bar{\eta}(p) S^c(p) \eta(-p) \right). \quad (24)$$

Для перехода от (24) к функциональному интегралу, кроме введения решетчатого импульсного пространства

$$\psi(p_j) = \psi_j, \quad S^c(p_j) = S_j^c, \quad \eta(p_j) \Delta p = \eta_j,$$

следует непротиворечиво определить правила интегрирования в пространстве комплексных антикоммутирующих величин (в пространстве образующих грассмановой алгебры с инволюцией \*).

Такое пространство состоит из двух наборов

$$\chi_1, \dots, \chi_n, \quad \varkappa_1, \dots, \varkappa_n \quad (25)$$

величин, удовлетворяющих перестановочным соотношениям грассмановой алгебры

$$\{\chi_i, \chi_k\}_+ = \{\chi_i, \varkappa_k\}_+ = \{\varkappa_i, \varkappa_k\}_+ = 0. \quad (26)$$

Пока нам не потребуется операция комплексного сопряжения, можно рассматривать  $\chi_i$  и  $\varkappa_k$  как совершенно независимые величины. В силу соотношений (26) квадрат любого из образующих равен нулю

$$\chi_i^2 = \varkappa_k^2 = 0$$

Поэтому, в частности, произвольная функция от образующих (25) представима в виде конечного полинома

$$\begin{aligned} \Phi(\chi, \varkappa) = \\ = \sum_{(\alpha, \beta = 0, 1)} a(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n) (\chi_1)^{\alpha_1} \dots (\chi_n)^{\alpha_n} (\varkappa_1)^{\beta_1} \dots (\varkappa_n)^{\beta_n}. \end{aligned} \quad (27)$$

Введем символы инфинитезимальных приращений

$$d\chi_i, d\varkappa_k$$

к образующим (25) и подчиним их соотношениям антикоммутации.

$$\{d\chi_i, d\chi_k\}_+ = \{d\chi_i, d\varkappa_k\}_+ = \{d\varkappa_i, d\varkappa_k\}_+ = 0, \quad (28)$$

$$\{\chi_i, d\chi_k\}_+ = \{\chi_i, d\varkappa_k\}_+ = \{\varkappa_i, d\chi_k\}_+ = \{\varkappa_i, d\varkappa_k\}_+ = 0. \quad (29)$$

Определим однократные определенные интегралы

$$\int d\chi_i = \int d\varkappa_k = 0, \quad (30)$$

$$\int \chi_i d\chi_i = \int \varkappa_k d\varkappa_k = 1. \quad (31)$$

Несколько неожиданные определения (30) являются единственно совместными с (28). В то же время интегралы (31) естественно было бы выразить через квадрат объема интегрирования. Однако, как мы уже убедились в § 43.3, этот (бесконечный) объем из окончательных результатов выпадает. Этим и объясняется выбор нормировки в (31).

Принятое определение приводит к тому, что интеграл от функции (27) оказывается равным

$$\int \Phi(\chi, \varkappa) d\chi_1 \dots d\chi_n d\varkappa_1 \dots d\varkappa_n = a(1, \dots, 1; 1, \dots, 1). \quad (32)$$

\* Такие правила впервые были последовательно введены Березиным (1961). Наше изложение следует книге Березина (1965).

Таким образом, операция интегрирования оказывается эквивалентной операции дифференцирования.

Для интегралов по антикоммутирующим полям можно ввести формулы линейной замены переменных. При этом ввиду соглашения (31) переменные и дифференциалы преобразуются взаимно обратными матрицами:

$$\left. \begin{aligned} \chi_i &= a_{ik} \rho_k, & d\chi_i &= a_{ik}^{-1} d\rho_k, \\ \kappa_i &= b_{ik} \sigma_k, & d\kappa_i &= b_{ik}^{-1} d\sigma_k. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

При такой замене

$$\chi_1 \chi_2 \dots \chi_n = \det a \cdot \rho_1 \dots \rho_n, \quad \kappa_1 \dots \kappa_n = \det b \cdot \sigma_1 \dots \sigma_n$$

и

$$d^n \chi \equiv d\chi_1 \dots d\chi_n = \det a^{-1} d^n \rho, \quad d^n \kappa = \det b^{-1} d^n \sigma,$$

а также

$$\int \Phi(\chi, \kappa) d^n \chi d^n \kappa = \det a^{-1} \cdot \det b^{-1} \int \Phi(a\rho, b\sigma) d^n \rho d^n \sigma. \quad (84)$$

Приведем еще формулу интегрирования «квазигауссовой» экспоненты

$$\int e^{\kappa A \chi} d^n \chi d^n \kappa = \det A \quad (85)$$

и экспоненты с линейными членами

$$\int \exp(\kappa A \chi + \nu \chi + \kappa \eta) d^n \chi d^n \kappa = \det A \exp(-\nu A^{-1} \eta). \quad (86)$$

Формула (85) доказывается путем использования линейной подстановки  $A\chi = \chi'$ , диагонализующей показатель экспоненты, а формула (86) — аддитивным преобразованием переменных интегрирования

$$\chi = \chi' - A^{-1} \eta, \quad \kappa = \kappa' - \nu A^{-1}.$$

Формула (86), подобная формуле (13) для бозе-случая, является основой для введения функционального интеграла по ферми-полям.

Полагая формально

$$A_{kl} = \delta_{kl} (iS^c)^{-1} \Delta\rho, \quad \kappa_k = \bar{\psi}_k, \quad \chi_i = \psi_i, \quad \eta_k = i\bar{\mu}_k, \quad \nu_k = i\bar{\mu}_k,$$

получаем из (86) в пределе  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int \exp \left\{ i \int [\bar{\psi}(\rho) (\rho - m + i\varepsilon) \psi(\rho) + \bar{\mu}(\rho) \psi(\rho) + \bar{\psi}(\rho) \mu(\rho)] d\rho \right\} d\psi d\bar{\psi} = \\ = \exp \left( i \int \bar{\mu}(\rho) S^c(\rho) \mu(-\rho) d\rho \right). \end{aligned} \quad (87)$$

Здесь символы  $d\psi$ ,  $d\bar{\psi}$  пропорциональны пределам произведений

$$d\psi \sim \lim_{n \rightarrow \infty} d^n \psi, \quad d\bar{\psi} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} d^n \bar{\psi}.$$



Сравнивая между собой формулы (37), (24), получаем соотношение

$$\langle T \exp \{i \int [\bar{\eta}(p) \psi(p) + \bar{\psi}(p) \eta(p)] dp\} \rangle_0 = \int \exp \{i \int [\bar{\eta}(p) \psi(p) + \bar{\psi}(p) \eta(p)] dp\} \delta\psi \delta\bar{\psi}, \quad (38)$$

аналогичное (15). Здесь по определению

$$\delta\psi \delta\bar{\psi} = e^{i\mathcal{L}_0(\psi, \bar{\psi})} d\psi d\bar{\psi}, \quad (39)$$

где

$$\mathcal{L}_0(\psi, \bar{\psi}) = \int dp \bar{\psi}(p) (\hat{p} - m) \psi(p) = \int dx \bar{\psi}(x) (i\hat{\partial} - m) \psi(x)$$

— действие свободного спинорного поля.

Формула (38) может рассматриваться как определение континуального интеграла по ферми-полям. Соотношение (38) говорит нам, что процедуру усреднения операторного выражения по фермионному вакууму можно представить в виде континуального интеграла, т. е. операцию вакуумного усреднения представить в виде функционального усреднения

$$\langle TF(\psi, \bar{\psi}) \rangle_0 = \int F(\psi, \bar{\psi}) \delta\psi \delta\bar{\psi}. \quad (40)$$

## § 44. Производящие функционалы и функции Грина

**44.1. Запись основных величин через функциональные интегралы.** Полученные в предыдущем параграфе формулы функционального усреднения позволяют получить «замкнутые» выражения для основных и высших функций Грина в форме континуальных интегралов. Такие выражения удобно получать единым образом, воспользовавшись концепцией производящих функционалов, введенных в главе VI.

Рассмотрим, например, систему взаимодействующих фермионного и бозонного полей, полный лагранжиан которой имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\psi, \bar{\psi}) + \mathcal{L}_0(\varphi) + \mathcal{L}_1(\psi, \bar{\psi}, \varphi). \quad (1)$$

Добавляя в лагранжиан взаимодействия  $\mathcal{L}_1$  члены с источниками (ср. (37.8), (37.14))

$$\mathcal{L}_{\text{ист}} = \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + \varphi J, \quad (2)$$

запишем вакуумное ожидание матрицы рассеяния в присутствии источников

$$S_0(\eta, \bar{\eta}, J) = \langle T \exp i \int (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{\text{ист}}) dx \rangle_0 \quad (3)$$

в виде функционального интеграла. Воспользовавшись формулами (43.16) и (43.40), находим

$$S_0(\eta, \bar{\eta}, J) = \int e^{i\mathcal{L}_1(\eta, \bar{\eta}, J)} \delta\psi \delta\bar{\psi} \delta\varphi, \quad (4)$$

где

$$\mathcal{A}_1(\eta, \bar{\eta}, J) = \int (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{\text{ист}}) dx$$

— действие взаимодействия рассматриваемой системы.

С помощью формул (43.17) и (43.39) интеграл (4) может быть представлен в виде

$$S_0(\eta, \bar{\eta}, J) = \int e^{i\mathcal{A}(\eta, \bar{\eta}, J)} d\psi d\bar{\psi} d\varphi. \quad (5)$$

Здесь  $\mathcal{A}(\eta, \bar{\eta}, J) = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1(\eta, \bar{\eta}, J)$  — полное (классическое) действие системы, соответствующее сумме полного физического лагранжиана (1) и членов с источниками (2), а  $\mathcal{A}_0$  — действие свободных полей.

Как было показано в § 37, функционал  $S_0$  является производящим функционалом для вакуумных ожиданий вида

$$\langle Tu(\xi_1) \dots u(\xi_n) S \rangle_0.$$

Производящий функционал  $Z$  для связанных функций Грина получается из  $S_0$  путем логарифмирования

$$Z(\eta, \bar{\eta}, J) = -i \ln \left[ \int e^{i\mathcal{A}(\eta, \bar{\eta}, J)} d\psi d\bar{\psi} d\varphi \right]. \quad (6)$$

Дифференцируя (6) два раза по  $J$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \Delta(x, y | \eta, \bar{\eta}, J) &= \\ &= \frac{\int e^{i\mathcal{A}(\eta, \bar{\eta}, J)} \varphi(x) \varphi(y) d\psi d\bar{\psi} d\varphi}{S_0(\eta, \bar{\eta}, J)} - \Phi(x | \eta, \bar{\eta}, J) \Phi(y | \eta, \bar{\eta}, J), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Phi(x | \eta, \bar{\eta}, J) = \frac{\int e^{i\mathcal{A}(\eta, \bar{\eta}, J)} \varphi(x) d\psi d\bar{\psi} d\varphi}{S_0(\eta, \bar{\eta}, J)} \quad (8)$$

— представление для одночастичной мезонной функции Грина в присутствии источников в виде функционального интеграла. В пределе  $\eta = \bar{\eta} = J = 0$  находим вместо (7):

$$\Delta(x, y) = i \frac{\int e^{i\mathcal{A}} \varphi(x) \varphi(y) d\psi d\bar{\psi} d\varphi}{\int e^{i\mathcal{A}} d\psi d\bar{\psi} d\varphi}, \quad (9)$$

где

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\eta = 0, \bar{\eta} = 0, J = 0)$$

— полное действие системы в отсутствие источников.

С другой стороны, дифференцируя производящий функционал  $Z$  по  $\eta(x)$  и  $\bar{\eta}(y)$ , получаем (положив  $\eta = \bar{\eta} = J = 0$ ) одночастичную фермионную функцию Грина в отсутствие внешних источников

$$G(x, y) = i \frac{\int e^{i\mathcal{A}} \psi(x) \bar{\psi}(y) d\psi d\bar{\psi} d\varphi}{\int e^{i\mathcal{A}} d\psi d\bar{\psi} d\varphi}. \quad (10)$$

Аналогично находим для слабо-связной 3-вершинной функции

$$\Delta_3(x, y|z) = \frac{\int e^{i\mathcal{L}} \psi(x) \bar{\psi}(y) \varphi(z) d\psi d\bar{\psi} d\varphi}{\int e^{i\mathcal{L}} d\psi d\bar{\psi} d\varphi}. \quad (11)$$

**44.2. Представления для функций Грина в виде континуальных бозе-интегралов.** Полученные формулы вида (9—11) содержат функциональные квадратуры как по бозе-, так и по ферми-полям. Выполняя (символически) континуальное интегрирование по ферми-полям, оказывается возможным получить для функций Грина выражения, которые можно рассматривать как формулы усреднения соответствующих функций Грина для частиц, движущихся в классическом внешнем поле  $\varphi$ , по квантовым флуктуациям этого поля.

С этой целью заметим, что в числителях и знаменателях выражений (9—11) интегрирование по ферми-аргументам  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  можно выполнить в первую очередь. Согласно (43.40) такое интегрирование сводится к усреднению по вакууму ферми-операторов

$$\int F(\psi, \bar{\psi}, \varphi) \delta\psi \delta\bar{\psi} = \langle TF(\psi, \bar{\psi}, \varphi) \rangle_{F_0}. \quad (12)$$

Здесь символом  $\langle \dots \rangle_{F_0}$  обозначена операция вычисления вакуумного ожидания только по ферми-операторам  $\bar{\psi}$ ,  $\psi$ . Бозе-аргументы  $\varphi$  считаются при этом классическими функциями.

При выполнении операции ферми-усреднения удобно задать явно зависимость лагранжиана взаимодействия от ферми-полей. Мы положим

$$\mathcal{L}_1(x) = g\bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) K(\varphi) + M(\varphi). \quad (13)$$

Здесь  $\Gamma$  — некоторая вершинная матрица, а  $K$  и  $M$  зависят только от бозе-поля  $\varphi$ . (Более общий случай 4-фермионного взаимодействия фермиевского типа (8.13) также может быть включен в рассмотрение.)

Используя соотношение (12) в числителе и знаменателе выражения (10), находим, с учетом (13),

$$G(x, y) = i \frac{\int e^{i \int M(\varphi) dx} \delta\varphi \langle T\psi(x) \bar{\psi}(y) e^{ig \int \bar{\psi} \Gamma \psi K(\varphi) dx} \rangle_{F_0}}{\int e^{iM(\varphi) dx} \delta\varphi \langle T \exp(ig \int \bar{\psi} \Gamma \psi K(\varphi) dx) \rangle_{F_0}}. \quad (14)$$

В то же время обычная функция Грина одного фермиона, взаимодействующего с классическим внешним полем  $\varphi_{\text{кл}}$  с

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = g\bar{\psi} \Gamma \psi K(\varphi_{\text{кл}}),$$

имеет вид

$$G(x, y|\varphi, g) = i \frac{\langle T\psi(x) \bar{\psi}(y) e^{ig \int \bar{\psi} \Gamma \psi K(\varphi) dx} \rangle_{F_0}}{S_0(\varphi, g)}, \quad (15)$$

где

$$S_0(\varphi, g) = \langle T \exp \int (ig \int \bar{\psi}(z) \Gamma \psi(z) K(\varphi(z)) dz) \rangle_0 \quad (16)$$

может быть вычислена в явном виде. Дифференцируя  $S_0(\varphi, g)$  по  $g$  с учетом определения (15) находим

$$\frac{\partial S_0(\varphi, g)}{\partial g} = i \left\langle T \int dx \psi \Gamma \psi K(\varphi(x)) \exp \left( ig \int \psi \Gamma \psi K(\varphi) dz \right) \right\rangle_{F_0} = \\ = - \int SP \{G(x, x | \varphi, g) \Gamma K(\varphi(x))\} dx \cdot S_0(\varphi, g).$$

Здесь символ SP обозначает суммирование как по спинорным, так и по возможным бозонным индексам. Интегрируя полученное дифференциальное уравнение первого порядка с учетом граничного условия  $S_0(\varphi, 0) = 1$ , получаем

$$S_0(\varphi, g) = \exp \left( - \int_0^g dg' \int dx SP \{G(x, x | \varphi, g') \Gamma K(\varphi(x))\} \right). \quad (17)$$

Используя формулы (15) и (17), можно преобразовать (14) к виду

$$G(x, y) = \int G(x, y | \varphi, g) D\varphi, \quad (18)$$

т. е. представить функцию Грина одного фермиона, взаимодействующего с квантованным бозе-полем, как некоторое функциональное среднее от обычной функции Грина фермиона, взаимодействующего с классическим бозе-полем. Эффекты квантового самодействия бозе-поля, описываемые функцией  $M(\varphi)$ , а также вакуумные флуктуации, отнесены здесь к мере интегрирования

$$D\varphi = \frac{e^{i \int M(\varphi) dx} S_0(\varphi, g) \delta\varphi}{\int e^{i \int M(\varphi) dx} S_0(\varphi, g) \delta\varphi}. \quad (19)$$

Так, например, функция Грина электрона в спинорной электродинамике может быть записана в виде

$$G(x, y) = \frac{\int G(x, y | A) S_0(A) \delta A}{\int S_0(A) \delta A}, \quad (20)$$

где

$$S_0(A) = \langle T \exp \left( ie \int \bar{\psi}(z) A(z) \psi(z) dz \right) \rangle_0 \quad (21)$$

Формулы, аналогичные (18), могут быть получены для других функций Грина. Так, например, бозонная функция Грина (9) представима в виде

$$\Delta(x, y) = i \int \varphi(x) \varphi(y) D\varphi \quad (22)$$

и т. д.

С формальной точки зрения задача нахождения одночастичных квантово-полевых функций Грина  $G$  и  $\Delta$  сведена к определению функции Грина одного фермиона  $G(x, y | \varphi_{кл})$ , движущегося в классическом внешнем поле  $\varphi_{кл}$ . Здесь однако следует подчеркнуть, что если бы даже и удалось получить для  $G(x, y | \varphi)$  замкнутое выражение в том или ином приближении, что представляет в общем случае

очень сложную задачу, то остаются еще функциональные квадратуры в (18), (20), (22), которые также не являются простыми. Тем не менее существует по крайней мере одна достаточно простая по математической структуре и физически важная модель, в которой формулы, полученные в этом разделе, могут быть эффективно использованы. Мы имеем в виду модель Блоха — Нордсика, рассматриваемую ниже в § 46. Как уже отмечалось ранее, возможности приложенный метода континуального интегрирования серьезно ограничиваются тем обстоятельством, что техники вычислений функциональных квадратур практически не существует. Единственный вид континуальных интегралов, который мы можем вычислять, это гауссовы квадратуры, или приводящиеся к ним путем функциональной замены переменной интегрирования или путем вариационного дифференцирования по параметру.

Ввиду этих, пока не поддающихся решению, проблем, в течение длительного времени континуальные интегралы практически не использовались в работах по современной квантовой теории поля. Интерес к данному методу вновь возродился в конце 60-х годов, когда выяснилось, что он очень удобен для работы с калибровочными полями (см. § 8.2) в силу сингулярного характера соответствующих лагранжианов (см. § 11.4). С помощью метода континуального интегрирования было проведено квантование (Фаддеевым и Поповым (1967а, б)) и построена перенормировочная процедура в теории возмущений (Славновым, (1972а, б)) для полей Янга — Миллса. Удобство применения континуального интеграла здесь связано с тем, что он позволяет в компактном виде описать сложные комбинаторные выкладки. В частности, переход к другому базису совершается путем замены переменных интегрирования.

Ниже мы проиллюстрируем подобные возможности метода на примере простейшего абелева калибровочного поля — электромагнитного поля, взаимодействующего с фермионами. В рамках спинорной электродинамики будут получены обобщенные соотношения Уорда (полученные ранее по теории возмущений в § 33), а также исследована структура преобразований полных функций Грина при калибровочном преобразовании электромагнитных потенциалов.

## § 45. Градиентные преобразования спинорной электродинамики

**45.1. Функциональный интеграл в произвольной калибровке.** Процедура введения континуального интеграла наиболее проста в диагональной фейнмановской калибровке электромагнитного потенциала, использованного нами при квантовании в § 12, поскольку в этой калибровке свободный лагранжиан является ковариантной суммой лагранжианов для отдельных компонент

$$\mathcal{L}_0(A_n) = \mathcal{L}_0(A_0, A_1, A_2, A_3) = \sum_{m, n} -\frac{1}{2} \partial_n A_m \partial^n A^m, \quad (1)$$

а дифференциальный оператор, стоящий в действии, является обратным к хронологическому спариванию (24.3)

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L}_0(A_n) dx = \int dx A^n(x) [D^c(x-y)]_{nm}^{-1} A^m(y) dy. \quad (2)$$

Вследствие (1) функциональный вес факторизуется,

$$\delta A = \delta A_0 \delta A_1 \delta A_2 \delta A_3,$$

и можно определить операцию функционального интегрирования по 4-компонентному полю  $A_n$ , как произведение соответствующих операций по каждой из компонент. Такое определение в силу свойства (2) будет совместным с основными формулами типа (43.18), (43.21), которые в данном случае принимают вид

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{i}{2} \int v^n(k) D_{nm}^c(k) v^m(-k) dk\right) &= \int \exp\left(i \int v^n(k) A_n(k) dk\right) \delta A = \\ &= \int \exp\left(i \int dk \{A^n(k) [D^c(k)]_{mn}^{-1} A^m(-k) + v^n(k) A_n(k)\}\right) dA. \end{aligned} \quad (3)$$

Имеем также вместо (43.19)

$$\langle TF(A) \rangle_0 = \int F(A) e^{i\mathcal{A}_0(A)} dA = \int F(A) \delta A. \quad (4)$$

Таким образом, например, производящий функционал для связанных функций Грина спинорной электродинамики можно записать так:

$$Z(\eta, \bar{\eta}, J^m) = -i \ln \left\{ \int e^{i\mathcal{A}_0(\eta, \bar{\eta}, J^m)} d\psi d\bar{\psi} dA \right\}, \quad (5)$$

где  $A$  — полное действие, отвечающее лагранжиану с источниками

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\psi, \bar{\psi}) + \mathcal{L}_0(A_n) + e\bar{\psi}\hat{A}\psi + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + A_n J^n, \quad (6)$$

причем лагранжиан свободного электромагнитного поля  $\mathcal{L}_0(A_n)$  имеет вид (1).

Для того чтобы перейти к произвольной калибровке потенциалов электромагнитного поля, следует воспользоваться градиентным преобразованием, рассмотренным в § 34.1.

Положим

$$A'_n(k) = A_n(k) + k_n \beta \frac{(kA(k))}{k^2}, \quad (7)$$

причем в правой части стоят потенциалы в диагональной калибровке. Хронологическое спаривание операторов  $A'_n$  будет равно

$$\overline{A'_n(k) A'_m(k')} = \frac{\delta(k+k')}{ik^2} \left\{ (g_{nm} - \frac{k_n k_m}{k^2}) + d_l \frac{k_n k_m}{k^2} \right\}, \quad (8)$$

где

$$d_l = (1 + \beta)^2.$$

В то же время

$$(kA'(k)) = (1 + \beta) (kA(k)) \quad (9)$$

и, следовательно,

$$A_n(k) = A'_n(k) - \frac{\beta}{1+\beta} k_n \frac{(kA'(k))}{k^2}. \quad (10)$$

Поэтому преобразованный лагранжиан будет равен

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(A) &= -\frac{1}{2} A_m(k) k^2 A^m(-k) = \\ &= -\frac{1}{2} A'_m(k) (g^{mn} k^2 - k^m k^n) A'_n(-k) - \frac{1}{2d_l} (kA'(k))(kA'(-k)) \equiv \\ &\equiv \mathcal{L}_0(A', d_l). \end{aligned} \quad (11)$$

Соответственно в конфигурационном представлении

$$\mathcal{L}_0(A, d_l) = -\frac{1}{4} H_{mn} H^{mn} - \frac{1}{2d_l} (\partial A)^2 = \mathcal{L}_0^{\text{tr}}(A) - \frac{1}{2d_l} (\partial A)^2. \quad (12)$$

Первое слагаемое в правой части равно калибровочно-инвариантному сингулярному лагранжиану (5.13). Второй член, содержащий  $d_l$ , фиксирует калибровку. Полагая  $d_l = 1$ , возвращаемся к диагональному выражению (1).

Нетрудно проверить, что ядро оператора  $\mathcal{L}_0(A, d_l)$  является обратным к хронологическому спариванию (34.5). Поэтому переход к произвольной калибровке в основной формуле (3) может быть произведен путем замены в правой части лагранжиана  $\mathcal{L}_0(A)$  на  $\mathcal{L}_0(A, d_l)$ :

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{i}{2} \int v^n(k) D_{mn}^c(k|d_l) v^m(-k) dk\right) = \\ = \int \exp\left(i \int dk \{A^n(k) [D^c(k|d_l)]_{nm}^{-1} A^m(-k) + v^n(k) A_n(k)\} dA\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Формула (13) дает нам функциональный интеграл по электромагнитным полям в произвольной калибровке. Вводя обозначение

$$e^i \int \mathcal{L}_0(x|d_l) dx dA = \delta A(d_l), \quad (14)$$

запишем

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{i}{2} \int v^n(k) D_{nm}^c(k|d_l) v^m(-k) dk\right) = \\ = \int e^{i \int v^n(k) A_n(k) dk} \delta A(d_l). \end{aligned} \quad (15)$$

Соответственно переход к произвольной калибровке в производящем функционале (5) достигается путем замены действия

$$\mathcal{A}(\eta, \bar{\eta}, J) = \mathcal{A}(\eta, \bar{\eta}, J|d_l = 1),$$

отвечающего лагранжиану (6), на действие

$$\mathcal{A}(\dots|d_l) = \int \mathcal{L}(\dots|d_l) dx, \quad (16)$$

в котором

$$\mathcal{L}(\dots | d_i) = \mathcal{L}_0(\psi, \bar{\psi}) + \mathcal{L}_0^{tr}(A) + e\bar{\psi}\hat{A}\psi + \frac{1}{2d_i}(\partial A)^2 + \psi\eta + \bar{\eta}\psi + A_n J^n. \quad (17)$$

Таким образом,

$$Z(\eta, \bar{\eta}, J_n | d_i) = -i \ln S_0(\eta, \bar{\eta}, J_n | d_i), \quad (18)$$

$$S_0(\eta, \bar{\eta}, J_n | d_i) = \int e^{i\mathcal{L}(\dots | d_i)} d\psi d\bar{\psi} dA \quad (19)$$

Используя (43.39) и (14), можем представить  $S_0$  также в виде

$$S_0(\eta, \bar{\eta}, J_m | d_i) = \int \exp \left\{ i \int (e\bar{\psi}\hat{A}\psi + \psi\eta + \bar{\eta}\psi + JA) dx \right\} \delta\psi \delta\bar{\psi} \delta A(d_i). \quad (20)$$

Подставляя (20) в формулу (37.27) и используя далее редукционную формулу (38.26), получим выражение для матричного элемента  $S$ -матрицы в виде вариационной производной от  $\ln S_0$ , соответствующим образом спроектированной на импульсное пространство. Формулы дифференцирования и проектирования имеют следующую структуру:

Электрону в начальном состоянии с импульсом  $p$  соответствует операция

$$\lim_{\hat{p}=m} \frac{v^{v,-}(p)}{(2\pi)^{3/2}} (m - \hat{p}) \int e^{-ipy} dy \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)}, \quad (21)$$

позитрону в конечном состоянии с импульсом  $p$  соответствует

$$\lim_{\hat{p}=m} \frac{v^{v,+}(p)}{(2\pi)^{3/2}} (m - \hat{p}) \int e^{ipx} dx \frac{\delta}{\delta\eta(x)}. \quad (21')$$

Электрону в конечном (позитрону в начальном) состоянии с импульсом  $p$  соответствует

$$\lim_{\hat{p}=m} \frac{\bar{v}^{v,\pm}(p)}{(2\pi)^{3/2}} (m - \hat{p}) \int e^{\pm ipx} dx \frac{\delta}{\delta\eta(x)}. \quad (22)$$

Наконец фотону в начальном (конечном) состоянии с импульсом  $k$  и поляризацией  $e_\nu$  соответствует оператор

$$\lim_{k^2=0} \frac{e_\nu^i(k)}{(16\pi^3 k^0)^{1/2}} (-k^2) \int e^{\mp ikx} dx \frac{\delta}{\delta J^\nu(x)}. \quad (23)$$

**45.2. Градиентная инвариантность матрицы рассеяния.** Докажем теперь градиентную инвариантность  $S$ -матрицы. Для доказательства возьмем функционал  $S_0$  в произвольной калибровке (19) и произведем в нем замену переменных интегрирования с единичным



якобианом:

$$\left. \begin{aligned} A_n &\rightarrow A_n + \partial_n \varphi, & \square \varphi(x) &= (1 + \beta) (\partial A), \\ \psi &\rightarrow \psi e^{ie\varphi(x)}, & \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} e^{-ie\varphi(x)} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где  $\beta$  — числовой параметр.

Производящий функционал (19) примет вид

$$S_0(\dots J) = \int \exp \left[ i \int \mathcal{L}(d_i, \beta) dx \right] d\psi d\bar{\psi} dA, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(d_i, \beta) = \mathcal{L}_0(\psi, \bar{\psi}) + \mathcal{L}_0^{\text{tr}}(A) + e\psi \hat{A}\psi + \frac{\beta^2}{2d_i} (\partial A)^2 + J^n(x) (A_n + \partial_n \varphi) + \\ + \bar{\psi}(x) \eta(x) e^{-ie\varphi(x)} + \bar{\eta}(x) \psi(x) e^{ie\varphi(x)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Согласно редукционной формуле матричные элементы  $S$ -матрицы выражаются через вариационные производные от  $S_0$ , умноженные на операторы проектирования (21—23). При варьировании функционала  $S_0$ , зависящего от лагранжиана (26), вариационные производные будут эффективно видоизменяться:

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^n(x)} \sim A_n(x) \rightarrow A_n(x) + \partial_n \varphi, \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \sim \psi(x) &\rightarrow \psi(x) + \psi(x) [e^{ie\varphi(x)} - 1], \\ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \sim \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x) + \bar{\psi}(x) [e^{-ie\varphi(x)} - 1]. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Подставляя правую часть (27) в (23), находим, что в силу условия поперечности реальных фотонов  $e_n^\alpha(k) \partial_n \sim e_n^\alpha(k) k_n = 0$ , второй член из (27) не дает вклада в матричные элементы. Нетрудно показать, что добавки в правые части (28) после действия операторов проектирования (21, 22) также фактически не дают вклада в матричные элементы. Это происходит вследствие того, что множители

$$(m - \hat{p}) = [S^c(p)]^{-1} = S_c^{-1}(p),$$

стоящие в этих операторах, при действии на линейные объекты вида  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ , сокращаются с одночастичными спариваниями по схеме:

$$\begin{aligned} \int S_c^{-1}(y-x) dx \frac{\delta S_0}{\delta \eta(x)} &= i \int S_c^{-1}(y-x) dx \langle T(\psi(x) S) \rangle_0 = \\ &= i \int S_c^{-1}(y-x) dx \overline{\psi(x)} \bar{\psi}(z) dz \frac{\delta S_0}{\delta \bar{\psi}(z)} = \\ &= \int S_c^{-1}(y-x) dx S_c(x-z) dz \frac{\delta S_0}{\delta \bar{\psi}(z)} = \frac{\delta S_0}{\delta \bar{\psi}(y)}. \end{aligned}$$

При действии на нелинейные объекты вида

$$\bar{\psi}(x) [e^{ie\varphi(x)} - 1] = ie\bar{\psi}(x) \varphi(x) + \dots$$

такая компенсация имеет место лишь для слабо-связных диаграмм, вследствие чего при переходе на массовую поверхность  $\hat{p} = m$

вклад от вторых слагаемых эффективно сводится к перенормировке внешних линий.

Таким образом, при вычислении матричных элементов выражение (26) можно эффективно заменить на

$$\mathcal{L}(d'_i) = \mathcal{L}_0(\psi) + \mathcal{L}_0^{tr}(A) + e\bar{\psi}\hat{A}\psi + \frac{1}{2d'_i}(\partial A)^2 + \bar{\psi}\eta + \eta\psi + JA, \quad (29)$$

где

$$\frac{1}{d'_i} = \frac{\beta^2}{d_i}. \quad (30)$$

Итак, мы установили, что при вычислении матричных элементов переход от одних значений параметра  $d_i$  к другим  $d'_i$  может быть произведен заменой переменных интегрирования, т. е. операцией, не меняющей  $S_0$ , а, следовательно, и не влияющей на значения матричных элементов. Тем самым показано, что матричные элементы не зависят от  $d_i$ , что и завершает доказательство градиентной инвариантности матрицы рассеяния.

Здесь следует оговориться, что это утверждение справедливо лишь для перенормированной матрицы рассеяния, поскольку (как было отмечено) переход от одной калибровки к другой приводит к дополнительной перенормировке внешних линий.

**45.3. Обобщенные тождества Уорда.** Произведем в интеграле, стоящем в правой части уравнения (19), линейную замену переменных функционального интегрирования

$$\psi(x) = \psi'(x) e^{ief(x)}, \quad \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}'(x) e^{-ief(x)}, \quad A_n(x) = A'_n(x) + \partial_n f(x) \quad (31)$$

вида (8.17). Как было установлено в § 8.2, сумма первых трех членов в правой части (17) (совпадающая с лагранжианом (8.16)) является инвариантной относительно (31). Очевидно также, что в силу взаимнообратного характера преобразований  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  и аддитивной структуры преобразования  $A$  произведение дифференциалов также оказывается инвариантным

$$d\psi d\bar{\psi} dA = d\psi' d\bar{\psi}' dA'.$$

Таким образом, вариация функционала (19) при преобразовании (31) целиком обуславливается последними четырьмя членами в правой части (17). Считая  $f(x)$  бесконечно-малой величиной, представим вариацию действия  $\mathcal{A}(\eta, \bar{\eta}, J_m | d_i)$  в виде

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}(\eta, \bar{\eta}, J_m | d_i) &= \\ &= \int dx \left\{ \frac{1}{d_i} \partial^\nu A_\nu \partial^\mu \partial_\mu f(x) + ie(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta) f(x) + J^n(x) \partial_n f(x) \right\}, \\ \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta f(x)} &= \left\{ -\frac{1}{d_i} \square(\partial A(x)) + ie(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta) - (\partial J(x)) \right\}. \end{aligned}$$

Вариация функционала  $S_0$  будет равна

$$\frac{\delta S_0}{\delta f(x)} = i \int e^{i\mathcal{A}(\dots | d_i)} \frac{\delta \mathcal{A}(\eta, \bar{\eta}, J_m | d_i)}{\delta f(x)} d\psi d\bar{\psi} dA.$$

Однако функционал  $S_0$  не должен менять своего значения при замене переменных интегрирования. Поэтому вариация  $\delta S_0$  должна быть равна нулю и, следовательно,

$$\int e^{i\omega(\eta, \bar{\eta}, J_m | d_l)} d\psi d\bar{\psi} dA \left\{ -\frac{\square(\partial A(x))}{d_l} + \right. \\ \left. + i\epsilon(\bar{\eta}(x)\psi(x) - \bar{\psi}(x)\eta(x)) - (\partial J(x)) \right\} = 0. \quad (32)$$

Функциональное соотношение (32) является производящим для получения обобщенных тождеств Уорда (иногда называемых также *тождествами Уорда—Такахаси*).

Так, дифференцируя это соотношение по  $J^m(y)$ , полагая затем  $\eta = \bar{\eta} = J_m = 0$ , находим

$$\int e^{i\omega(0 | d_l)} \left[ \frac{i}{d_l} \square_x \partial_x^n A_n(x) A_m(y) + \partial_m \delta(x-y) \right] d\psi d\bar{\psi} dA = 0,$$

или

$$i \langle T \square_x \partial_x^n A_n(x) A_m(y) S \rangle_0 + d_l \partial_m \delta(x-y) S_0 = 0. \quad (33)$$

Ввиду перестановочности операций дифференцирования  $\square_x \partial_x^n$  и континуального интегрирования в (32), следует считать  $\square \bar{\partial}$  перестановочным с символами  $\langle T \dots \rangle_0$  также и в (33). Иными словами, в (33) под символом  $T$  следует понимать виково хронологическое произведение, введенное в § 15.3 (см. формулу (15.26)). Таким образом,

$$\square \partial^n \langle T A_n(x) A_m(0) S \rangle_0 = i d_l \partial_m \delta(x) S_0. \quad (34)$$

Полученная формула соответствует отсутствию радиационных поправок в продольную часть электромагнитного спаривания, иначе — поперечности всех радиационных поправок:

$$D_{mn}(x) = \frac{1}{iS_0} \langle T A_m(x) A_n(0) S \rangle_0 = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ikx} \tilde{D}_{mn}(k) dk, \quad (35)$$

$$\tilde{D}_{mn}(k) = \frac{d(k^2, \alpha)}{-k^2 + i\epsilon} \left( g_{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2} \right) - \frac{d_l}{k^2} \frac{k_m k_n}{k^2}, \quad (36)$$

и может быть записана в виде

$$\square \partial^n D_{nm}(x) = -d_l \partial_m \delta(x). \quad (37)$$

Дифференцируя производящее функциональное соотношение (32) по  $\eta(y)$  и  $\bar{\eta}(z)$ , находим в пределе  $\eta = \bar{\eta} = J = 0$ :

$$\int e^{i\omega(0 | d_l)} \left[ \psi(z) \bar{\psi}(y) \frac{\square(\partial A(x))}{d_l} + \right. \\ \left. + e\psi(z) \bar{\psi}(x) \delta(x-y) - e\psi(z) \bar{\psi}(y) \delta(x-z) \right] d\psi d\bar{\psi} dA = 0,$$

или

$$\square_x \partial_x^m \langle T \psi(z) \bar{\psi}(y) A_m(x) S \rangle_0 = \\ = e d_l \langle T \psi(z) \bar{\psi}(y) S \rangle_0 \delta(x-z) - e d_l \langle T \psi(z) \bar{\psi}(y) S \rangle_0 \delta(x-y). \quad (38)$$

Соотношение (38) устанавливает связь между продольной (по фотонному концу) составляющей слабо-связной 3-вершинной функции и полными одночастичными функциями Грина. Вводя сильно-связную вершину  $\Gamma$  по формуле, аналогичной (37.34):

$$\langle T\psi(z)\bar{\psi}(y)A_m(x)S \rangle_0 = ieS_0 \int D_{mn}(x-x') dx' G(z-z') dz' \Gamma^n(z', y' | x') dy' G(y'-y), \quad (39)$$

с учетом (37) получаем

$$\int G(z-z') dz' \frac{\partial}{\partial x^n} \Gamma^n(z', y' | x) dy' G(y'-y) = [\delta(x-z) - \delta(x-y)] G(z-y).$$

Переходя затем в импульсное представление

$$\Gamma^n(z, y | x) = (2\pi)^{-8} \int \exp i(kx + py - qz) \delta(p - q + k) \tilde{\Gamma}^n(p, q; k) dp dq dk, \quad (40)$$

находим

$$G(p) k_n \tilde{\Gamma}^n(p, p+k; k) G(p+k) = G(p+k) - G(p)$$

или

$$k_n \tilde{\Gamma}^n(p, p+k; k) = G^{-1}(p) - G^{-1}(p+k), \quad (41)$$

что совпадает с (34.28).

Подобным образом можно получить связи между высшими функциями Грина. Так, например, дифференцируя производящее функциональное соотношение (32) по  $\eta(y)$ ,  $\bar{\eta}(z)$  и  $J_m(t)$ , найдем соотношение Уорда—Такахаши, связывающее 4-вершинную функцию комптоновского типа с низшими вертексами и т. д.

Это «второе» тождество Уорда оказывается важным в скалярной электродинамике ввиду расходящегося характера диаграмм комптоновского типа.

**45.4. Переход к поперечной калибровке.** Рассмотрим теперь переход к поперечному потенциалу. Непосредственно такой переход в выражениях (9), (10), (13), (15), (19) произвести затруднительно, поскольку в пределе  $d_i = 0$  член лагранжиана  $\mathcal{L}(\dots | d_i)$ , фиксирующий калибровку, становится бесконечным. Поэтому мы проведем специальную процедуру, взяв за отправную точку соотношение (15).

Рассмотрим специализированное калибровочное преобразование операторов электромагнитного поля, отделяющее поперечную часть

$$A_n(k) = A_n^{\text{tr}}(k) + k_n f(k). \quad (42)$$

Здесь  $A_n$  — потенциал в произвольной калибровке, а  $A^{\text{tr}}$  — поперечный потенциал, по определению удовлетворяющий условию

$$(k A^{\text{tr}}(k)) = 0. \quad (43)$$

Хронологическое спаривание  $A^{\text{tr}}$  имеет вид

$$\overline{A_n^{\text{tr}}(k) A_m^{\text{tr}}(k')} = \frac{\delta(k+k')}{ik^2} \left( g_{nm} - \frac{k_n k_m}{k^2} \right).$$

Второй член в (42) соответствует продольной калибровке и в соответствии с (43) равен

$$f(k) = \frac{kA(k)}{k^2}.$$

Для нас окажется существенным, что перекрестное спаривание продольной  $kf$  и поперечной  $A^{\text{tr}}$  составляющих в (42) равно нулю

$$\overline{A_n^{\text{tr}}(k) f(k')} = 0, \quad (44)$$

и что взаимное спаривание операторов  $f$  может быть представлено в виде

$$\overline{f(k) f(k')} = \frac{\overline{(kA(k)) (k'A(k'))}}{k^2 k'^2} = i\delta(k+k') F(k^2), \quad (45)$$

где

$$F(k^2) = \frac{d_1}{k^2 k^2}. \quad (46)$$

Совершим теперь в левой части (15) функциональную замену переменных, соответствующую (42),

$$A_n(k) = A_n^{\text{tr}}(k) + k_n f(k). \quad (42')$$

С учетом разделения функциональных квадратур вследствие (44) получим тогда

$$\begin{aligned} & \int \exp \left( i \int v^n(k) A_n(k) dk \right) \delta A(d_i) = \\ & = \int \exp \left( i \int v^n(k) A_n^{\text{tr}}(k) dk \right) \delta A^{\text{tr}} \int \exp \left( i \int v^n(k) k_n f(k) dk \right) \delta f. \end{aligned} \quad (47)$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} & \int v^n(k) D_{nm}^c(k|d_i) v^m(-k) dk = \\ & = \int v^n(k) D_{nm}^{\text{tr}}(k) v^m(-k) dk + \int v^n(k) k_n F(k^2) k_m v^m(-k) dk, \end{aligned}$$

можем получить из (47) два соотношения:

$$\begin{aligned} & \int \exp \left( i \int v^n(k) A_n^{\text{tr}}(k) dk \right) \delta A^{\text{tr}} = \\ & = \exp \left( -\frac{i}{2} \int v^n(k) D_{nm}^{\text{tr}}(k) v^m(-k) dk \right), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\int \exp \left( i \int \xi(k) f(k) dk \right) \delta f = \exp \left( \frac{i}{2} \int \xi(k) F(k^2) \xi(-k) dk \right), \quad (49)$$

где введено обозначение  $k_n v^n = \xi$ .

Соотношение (48) может рассматриваться как определение функционального интеграла по поперечному потенциалу электромагнитного поля  $A^{\text{tr}}$ , тогда как (49), в правой части которого  $F$  определено согласно (46), можно рассматривать как определение функционального интеграла по продольной составляющей.

**45.5. Градиентные преобразования функций Грина.** Рассмотрим теперь выражения вида

$$\int e^{\int \mathcal{L}(0|d_i) dx} \prod_1^l \psi(x_k) \bar{\psi}(y_k) \prod_1^b A_{n_j}(z_j) dA d\psi d\bar{\psi}, \quad (50)$$

получающиеся из (19) надлежащим вариационным дифференцированием и отвечающие высшим слабо-связным функциям Грина с  $b$  фотонными и  $2f$  электронными внешними линиями. Здесь

$$\mathcal{L}(0|d_i) = \mathcal{L}_0(\psi, \bar{\psi}) + \mathcal{L}_0^{\text{tr}}(A) + e\psi \hat{A} \psi + \frac{1}{2d_i} (\partial A)^2$$

Совершим в интеграле (50) фазовую замену фермионных переменных интегрирования

$$\psi(x) = \psi'(x) e^{ief(x)}, \quad \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}'(x) e^{-ief(x)},$$

такую, что

$$\square f(x) = -(\partial A). \quad (51)$$

Лагранжиан примет вид

$$\mathcal{L}(0|d_i) = \mathcal{L}_0(\psi', \bar{\psi}') + \mathcal{L}_0^{\text{tr}}(A) + e\bar{\psi}'(\hat{A} - \hat{\delta}f)\psi' + \frac{1}{2d_i} (\partial A)^2.$$

Произведем теперь разделение продольных и поперечных компонент интегрирования электромагнитного потенциала вида (42):

$$A_n(x) = A_n^{\text{tr}}(x) + \partial_n f(x).$$

В силу (51) функция  $f$  здесь и в фазовом преобразовании  $\psi \rightarrow \psi'$  — одна и та же. Поэтому, используя (47) и опуская штрих у фермионных переменных, запишем (50) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int dA^{\text{tr}} d\psi d\bar{\psi} \exp \left[ i \int \mathcal{L}^{\text{tr}}(x) dx \right] \prod_1^l \psi_k(x_k) \bar{\psi}_k(y_k) \times \\ & \times \int df \exp \left\{ \frac{i}{2d_i} \int [\square f(x)]^2 dx + ie \sum_k [f(x_k) - f(y_k)] \right\} \times \\ & \times \prod_1^b (A_{n_j}^{\text{tr}}(z_j) + \partial_{n_j} f(z_j)). \end{aligned}$$

Как видно, интеграл по  $f$  сводится к квадратурам (49) и ее производным по  $\xi(k)$ . Он может быть вычислен в явном виде.

В качестве иллюстрации рассмотрим простейший случай одноэлектронной функции Грина ( $f = 1$ ,  $b = 0$ ). Формула преобразова-

ния от произвольной калибровки к поперечной факторизуется,

$$G(x, y | d_l) = J(x, y | d_l) G^{\text{tr}}(x, y), \quad (52)$$

где продольная квадратура  $J$  имеет вид:

$$J(x, y | d_l) = \int df \exp \left\{ \frac{i}{2d_l} \int [\square f(x)]^2 dx + ief(x) - ief(y) \right\} = \\ = \int \delta f e^{ie[f(x) - f(y)]} = \int \delta f \exp \left\{ \frac{ie}{(2\pi)^2} \int f(k) [e^{ikx} - e^{iky}] dk \right\}.$$

Выполняя интегрирование с помощью (49), находим

$$J(x, y | d_l) = \exp \left[ \frac{ie^2}{2(2\pi)^4} \int (e^{ikx} - e^{iky}) (e^{-ikx} - e^{-iky}) F(k) dk \right] = \\ = \exp \{ ie^2 [\tilde{F}(0) - \tilde{F}(x-y)] \},$$

где согласно (46)

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ikx} F(k) dk = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ikx} \frac{d_l(k) dk}{k^2 \cdot k^2}.$$

Функция  $\tilde{F}$  может быть вычислена в явном виде для частного случая  $d_l(k^2) = d_l = \text{const}$ . Для этого представим ее в виде свертки в  $x$ -представлении

$$\tilde{F}(x) = \frac{d_l}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ikx} dk}{(k^2 + i\varepsilon)^2} = d_l \int D_0^c(x-y) D_0^c(y) d^4y, \quad (53)$$

где  $D_0^c$  — причинная функция Грина безмассового поля (см. (П2Б.6)).

Интеграл (53) формально совпадает с (комплексно-сопряженным) фейнмановским интегралом для простейшей скалярной петли в диаграмме собственной энергии

$$\tilde{F}(x) = \frac{-d_l}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{(x-y)^2 - i\varepsilon} \frac{d^4y}{y^2 - i\varepsilon}$$

и может быть вычислен стандартными приемами, изложенными в начале главы V. Получаем этим путем

$$\tilde{F}(x) - \tilde{F}(0) = \frac{d_l}{(4\pi)^2 i} [\ln x^2 + C],$$

где  $C$  — расходящаяся константа. Таким образом, в результате градиентного преобразования у фермионной функции Грина может появиться сингулярный множитель. В соответствии с результатами § 34 этот множитель может быть удален путем соответствующего изменения вычитательной процедуры. В результате приходим к следующей формуле градиентного преобразования

$$G^{\text{tr}}(x) \rightarrow G(x) = \left( \frac{x^2}{x_0^2} \right)^{-\frac{ad_l}{4\pi}} G^{\text{tr}}(x). \quad (54)$$

## § 46. Исследование модели Блоха — Нордсика \*)

### 46.1. Модель Блоха — Нордсика и определение $G(x, y | A)$ .

В этом параграфе мы рассмотрим применение метода функционального усреднения к расчету модели Блоха — Нордсика в спинорной

\*)Изложение основано на работе Свидзинского (1956).

электродинамике. Как известно, Блох и Нордсик (1937) для устранения инфракрасной катастрофы разработали метод приближенного решения задачи взаимодействия фермиона с электромагнитным полем в области малых частот, не основанный на теории возмущений. Первое приближение их метода эквивалентно замене матриц Дирака постоянными числами  $u$ . Уравнения электродинамики, в которых

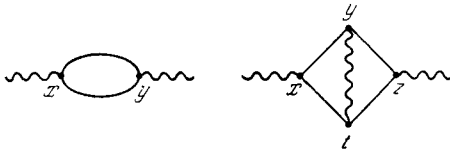


Рис. 62.

произведена такая замена, мы будем называть уравнениями модели Блоха — Нордсика.

Рассматриваемая задача, помимо ее значения для анализа инфракрасной катастрофы, представляет интерес и в методическом отношении, так как в указанной модели функциональные интеграции могут быть проведены до конца без каких-либо пренебрежений, что позволяет проследить во всех подробностях процедуру определения замкнутых выражений для функций Грина, и удаления из них бесконечностей. При этом, как и ранее, мы будем использовать на промежуточных этапах вспомогательную регуляризацию Паули — Вилларса.

Характерной чертой модели Блоха — Нордсика является отсутствие в ней поляризации вакуума:

$$S_0(A) = 1, \quad (1)$$

т. е. эффектов, связанных с собственной энергией фотонов, что непосредственно вытекает и из следующих простых соображений. Функция Грина свободного электрона  $G_0$  определяется в данном случае из уравнения первого порядка

$$(iu^n \partial_n - m) G_0(x - y) = -\delta(x - y), \quad (2)$$

причем

$$u^n u_n = 1,$$

и имеет в импульсном представлении не два полюса, как в обычной электродинамике, а один:

$$G_0(p) = \frac{1}{m - up - i\varepsilon}. \quad (3)$$

В соответствии с этим

$$G_0(x - y) = 0 \quad \text{при} \quad x^0 < y^0,$$

т. е.  $G_0$  является чисто запаздывающей. Поэтому в матричном элементе, соответствующем замкнутому электронному циклу (например, в диаграммах, изображенных на рис. 62), по крайней мере одна из функций  $G_0$  будет всегда равна нулю. Физически это соответствует тому, что в модели Блоха — Нордсика нет античастиц и, следовательно, не могут рождаться пары.



Таким образом, в этой модели отсутствуют радиационные поправки к фотонной функции Грина и определению подлежит лишь электронная функция Грина  $G(x, y)$ , которая определяется согласно (44.20) функциональным усреднением электронной функции Грина в заданном внешнем поле  $G(x, y | A)$ .

Эта последняя в рассматриваемом случае удовлетворяет уравнению

$$\{u^n (i\partial_n + eA_n(x)) - m\} G(x, y | A) = -\delta(x - y), \quad (4)$$

которое может быть решено в квадратурах. Мы воспользуемся для этого методом пятого параметра Фока (1937). Этот метод основан на символическом представлении обратного оператора в виде экспоненциального интеграла по пятому параметру:

$$H^{-1} = -i \int_0^\infty dv e^{ivH - \varepsilon v}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5)$$

С помощью этого представления, положив

$$H = \{u^n [i\partial_n + eA_n(x)] - m\}, \quad (6)$$

можем записать решение уравнения (4) в виде

$$G(x, y | A) = i \int_0^\infty dv U(v), \quad (7)$$

где функция  $U(v)$ , символически определенная соотношением

$$U(v) = \exp iv \{u^n [i\partial_n + eA_n(x)] - m + i\varepsilon\} \delta(x - y), \quad (8)$$

удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению первого порядка по пяти переменным:

$$-i \frac{\partial U(v)}{\partial v} = \{u^n [i\partial_n + eA_n(x)] - m + i\varepsilon\} U(v) \quad (9)$$

с начальным условием

$$U(v) |_{v=0} = \delta(x - y). \quad (10)$$

Переходя к импульсному представлению для  $\delta$ -функции

$$\delta(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip(x-y)} dp, \quad (11)$$

будем искать  $U(v)$  в виде

$$U(v) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp \{i[K(x, v) - p(x - y) - (m - ip - i\varepsilon)v]\} dp. \quad (12)$$

При этом функция  $K$  определяется уравнением

$$\frac{\partial K}{\partial v} = -u^n \frac{\partial K}{\partial x^n} + eu^n A_n(x) \quad (13)$$

с начальным условием

$$K(v) |_{v=0} = 0.$$

Уравнение (13) является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Решая его с помощью преобразования Фурье, находим:

$$K = \frac{e}{(2\pi)^4} \int dk (u \cdot A(k)) e^{-ikx} \int_0^y dv' e^{i(uk)v} \quad (14)$$

и, следовательно, с учетом (7), (12)

$$G(x, y | A) = \\ = i \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dp \int dv \exp[-ip(x-y) - iv(m-up-ie) + iK(v|A)]. \quad (15)$$

Формула (15) представляет собой замкнутое явное выражение для функции Грина электрона в заданном внешнем поле для модели Блоха — Нордсика. Получив ее, мы можем приступить к определению полной электронной функции Грина.

**46.2. Вычисление  $G(x, y)$ .** Для этого воспользуемся формулой (44.20) с учетом того, что  $S_0(A)$  определяется уже не формулой (44.21), а на основании (1) равна единице. Это дает:

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip(x-y)} G(p) dp, \quad (16)$$

$$G(p) = i \int_0^\infty \exp[-iv(m-up-ie)] dv \int \exp[iK(v|A)] \delta A. \quad (17)$$

Таким образом, для определения  $G$  необходимо вычислить функциональный интеграл следующего вида:

$$\int \exp[iK(v|A)] \delta A = \int \exp \left[ \frac{i}{(2\pi)^4} \int dk \sum_n R^n A_n(k) \right] \delta A, \quad (18)$$

где

$$R^n(k) = eu^n e^{-ikx} \int_0^y dv' e^{i(uk)v'}.$$

Интеграл (18) принадлежит к типу гауссовых (относительно  $A_n$ ) и вычисляется с помощью формулы (45.15):

$$\int \exp[iK(v|A)] \delta A = \\ = \exp \left\{ -i \frac{1}{2(2\pi)^4} \int R^n(k) D_{nm}^0(k) R^m(-k) dk \right\} = \exp[f(v)],$$

где

$$f(v) = -\frac{ie^2}{2(2\pi)^4} \int (uD^0(k)u) \int_0^y dv' e^{i(uk)v'} \int_0^{v'} dv'' e^{-i(uk)v''} dk. \quad (19)$$

Отсюда имеем:

$$G(p) = i \int_0^{\infty} dv \exp[-iv(m - up - ie) + f(v)]. \quad (20)$$

Вычисляя интегралы по  $v'$  и  $v''$  в (19) находим:

$$f(v) = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int [uD^0(k)u] \frac{1 - \cos(uk)v}{(uk)^2} dk.$$

Дальнейшие вычисления будем вести в произвольной калибровке, когда  $D_{nm}^0$  определяется выражением (34.5).

Тогда, очевидно, с учетом того, что  $u^2 = 1$ :

$$f(v) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{1 - \cos(uk)v}{(uk)^2 k^2} [1 + (d_l - 1) \frac{(uk)^2}{k^2}] dk. \quad (21)$$

Этот интеграл логарифмически расходится в ультрафиолетовой области. Он, однако, что очень важно, не содержит каких-либо расходимостей при малых  $k$ . Таким образом, в полном решении (20) отсутствует инфракрасная катастрофа.

Для вычисления интеграла (21) в явном виде удобно воспользоваться вспомогательной регуляризацией Паули — Вилларса.

Опуская детали вычислений, приведем окончательный результат:

$$f(v) = \frac{e^2}{8\pi^2} (3 - d_l) \ln Mv - \frac{ie^2}{8\pi} Mv, \quad (22)$$

где  $M$  — масса Паули — Вилларса. Из сравнения с (20) видно, что второй член в правой части есть член перенормировки массы

$$m \rightarrow m' = m + \frac{e^2}{8\pi} M = m + \frac{\alpha}{2} M; \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}.$$

Поэтому (22) удобно переписать в виде

$$f(v) = -i \frac{\alpha}{2} Mv + \frac{\alpha}{2\pi} (3 - d_l) \ln \frac{M}{m'} + \frac{\alpha}{2\pi} (3 - d_l) \ln m'v. \quad (23)$$

Здесь первый член есть член перенормировки массы, второй — член перенормировки волновой функции (т. е. мультипликативной перенормировки функции Грина):

$$Z = \exp \left[ \frac{\alpha}{2\pi} (3 - d_l) \ln \frac{M}{m'} \right] = \left( \frac{M}{m'} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi} (3 - d_l)}. \quad (24)$$

Оба эти члена могут быть исключены соответствующей вычитательной процедурой, сводящейся, согласно общей теории устранения расходимостей, к переопределению хронологических произведений. Поэтому мы в дальнейшем вместо  $G$  будем рассматривать функцию

$$G'(m', p) = Z^{-1} G(m, p),$$

не содержащую ультрафиолетовых расходимостей в пределе  $M \rightarrow \infty$ .  
Получаем

$$G'(m, p) = i \int_0^{\infty} dv \exp \left[ -iv(m - up - i\varepsilon) + \frac{\alpha}{2\pi} (3 - d_l) \ln mv \right] = \\ = im \frac{\alpha(3 - d_l)}{2\pi} \int_0^{\infty} dv \exp \left[ -i(m - up - i\varepsilon)v \right] v^{\frac{\alpha(3 - d_l)}{2\pi}}. \quad (25)$$

Обратимся к случаю, когда  $m - (up) > 0$ . Производя в (25) замену переменной  $[m - (up)]v = x$ , получаем:

$$G'(p) = \frac{\left[ 1 - \frac{(up)}{m} \right]^{\frac{\alpha(d_l - 3)}{2\pi}}}{m - (up)} I, \quad (26)$$

где

$$I = i \int_0^{\infty} dx x^{\frac{\alpha(3 - d_l)}{2\pi}} e^{-ix - \varepsilon x}.$$

Интеграл  $I$  можно оценить приближенно, воспользовавшись тем, что  $\alpha(3 - d_l)/2\pi \ll 1$ . Получаем таким путем

$$I = i \int_0^{\infty} dx e^{-ix - \varepsilon x} + O(\alpha) = 1 + O(\alpha).$$

Подобным образом в случае, когда  $(up) - m > 0$ , заменой переменной  $[(up) - m]v = y$  приходим к выражению

$$G'(p) = \frac{\left[ \frac{(up)}{m} - 1 \right]^{\frac{\alpha(d_l - 3)}{2\pi}}}{(up) - m} I', \quad (27)$$

где

$$I' = i \int_0^{\infty} dy y^{\frac{\alpha(3 - d_l)}{2\pi}} e^{iy - \varepsilon y} = -1 + O'(\alpha).$$

Объединяя выражения (26) и (27), получаем окончательное выражение для функции Грина электрона в модели Блоха — Нордсика:

$$G'(p) = \frac{1}{m - (up)} \left| 1 - \frac{(up)}{m} \right|^b, \quad (28)$$

где

$$b = -\frac{e^2(3 - d_l)}{8\pi^2} = -\frac{\alpha}{2\pi} (3 - d_l). \quad (29)$$

Сравнивая (28) с (3), видим, что полная функция Грина отличается от функции Грина свободного поля множителем

$$\left| 1 - \frac{(up)}{m} \right|^b.$$

Если разложить полную функцию  $G'(p)$  в ряд по степеням  $\alpha$ , то в низшем приближении получим логарифмические члены

$$\left| 1 - \frac{(up)}{m} \right|^b = e^{b \ln \left| 1 - \frac{up}{m} \right|} = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} (3 - d_l) \ln \left| 1 - \frac{(up)}{m} \right| + \dots,$$

характерные для инфракрасной катастрофы.

В следующей главе (§ 50.3) будет показано, что инфракрасная особенность электронной функции Грина в обычной спинорной электродинамике также имеет характер (28).

## РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА

## § 47. Группа мультипликативных ренормировок в квантовой теории поля

**47.1. Введение.** Мы рассмотрим сейчас метод исследования асимптотических свойств функций Грина, основанный на существующей в квантовой теории поля группе ренормировочных преобразований, о которой упоминалось в главе VI. Суть дела сводится к следующему. Система взаимодействующих полей описывается полным лагранжианом  $\mathcal{L}$ , который представляют в виде суммы свободного лагранжиана  $\mathcal{L}_0$  и лагранжиана взаимодействия  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{вз}}. \quad (1)$$

Поля, соответствующие  $\mathcal{L}_0$ , квантуют, затем переходят к представлению взаимодействия и с помощью  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  строят теорию возмущений. При этом в перенормируемых теориях (после устранения бесконечностей) возникает конечный произвол, который можно фиксировать, добавив к  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  контрчлены, по своей операторной структуре совпадающие с отдельными слагаемыми в  $\mathcal{L}_0$  (конечные перенормировки масс и операторов поля) и в  $\mathcal{L}_{\text{вз}}$  (перенормировки констант связи).

Преобразования функций Грина и констант связи, связанные с этими конечными перенормировками, как было показано в § 34 и 36, обладают групповым свойством и образуют ренормализационную группу. Наличие ренормализационной группы накладывает своеобразные ограничения на структуру функций Грина и их зависимость от констант связи. Природа этих ограничений может быть проиллюстрирована следующим образом. Если полный лагранжиан  $\mathcal{L}$  представить в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}'_{\text{вз}}, \quad \mathcal{L}'_0 = z\mathcal{L}_0, \quad \mathcal{L}'_{\text{вз}} = (1-z)\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{вз}}$$

(причем  $z$  — действительная постоянная), то выражения для функций Грина (и матричных элементов), построенные с помощью «нового» лагранжиана взаимодействия  $\mathcal{L}'_{\text{вз}}$ , в отдельных порядках теории возмущений будут отличаться от выражений, полученных из (1). Однако полные выражения для физических величин должны совпадать.

Таким образом, оказывается, что конечные суммы членов теории возмущений не обладают ренормализационной инвариантностью. Наложение требований инвариантности позволяет, исходя из конечного числа членов теории возмущений для функций Грина, получить

для этих функций выражения, которые, с одной стороны, являются ренормализационно инвариантными, а с другой стороны, при разложении в ряд по константам связи дают члены, совпадающие с исходными. Иными словами, в ряде важных случаев, исходя из нескольких первых членов теории возмущений, удается восстановить ведущие члены во всех высших порядках теории возмущений и получить выражения для их сумм.

Такая процедура частичного суммирования бесконечных рядов теории возмущений представляет интерес не только в случае сильных взаимодействий. Как мы уже имели случай убедиться на примере функций Грина квантовой электродинамики, в ультрафиолетовой области фактически параметром разложения является не квадрат заряда  $\alpha$ , а его произведение на большой логарифм  $\alpha \ln k^2$ . Аналогичная ситуация возникает в инфракрасной области.

Впервые существование группы ренормировочных преобразований в квантовой теории поля было отмечено Штюкельбергом и Петерманом (1953), которые также указали на возможность введения соответствующих инфинитезимальных операторов и тем самым на возможность построения дифференциальных уравнений Ли. Вслед за тем Гелл-Манн и Лоу (1954) фактически воспользовались групповой структурой перенормировок в спинорной электродинамике для получения информации об ультрафиолетовой асимптотике функции Грина фотона. Их подход был основан на схеме теории возмущений, использующей вариант обрезания в импульсном пространстве. Эти авторы, однако, явно не обратили внимания на групповую подоплеку использованной аргументации и полученного функционального уравнения.

В следующем году Боголюбов и Ширков (1955б), используя групповой характер конечных мультипликативных перенормировок квантовополевых операторов и функций (т. е. конечных преобразований Дайсона), вывели функциональные уравнения для этих функций в общем случае (а не только в ультрафиолетовом пределе), установив тем самым идейную связь между работами Штюкельберга — Петермана и Гелл-Манна — Лоу. В этой работе было впервые введено понятие инвариантного заряда и конструктивно реализована общая идея Штюкельберга — Петермана о дифференциальных уравнениях Ли.

Дифференциальные групповые уравнения, впервые полученные в работе Боголюбова и Ширкова (1955б) путем дифференцирования функциональных уравнений, суть уравнения эволюции инвариантного заряда и функций Грина по энергетической переменной (см. ниже уравнения (48.17), (48.20), (48.23), (49.16)). Как функциональные, так и интегральные уравнения были сформулированы здесь в терминах импульсов нормировок, т. е. параметров  $R$ -операции. Такой подход, формально не связанный с ультрафиолетовыми расходимостями, позволяет более ясно понять автомодельную сущность ренормгрупповых преобразований.

Третьим важным элементом работы Боголюбова и Ширкова (1955б) явилось предложение использовать полученные дифференциальные уравнения для нахождения таких ренормализационно инвариантных решений, которые удовлетворяли бы условию соответствия с обычной квантовой теорией возмущений. Для этого достаточно определять так называемые ренормгрупповые функции, входящие в правые части эволюционных дифференциальных уравнений, с помощью теории возмущений.

Эта программа была реализована в примыкающей публикации Боголюбова и Ширкова (1955в) на примере ультрафиолетовых и инфракрасных асимптотик квантовой электродинамики в одно- и двухпетлевом приближениях. При этом были впервые получены формулы ультрафиолетовых асимптотик в двухпетлевом приближении.

Вслед за тем Ширков (1955) дал обобщение основных функциональных и дифференциальных уравнений на случай модели с двумя константами связи («многозарядный» случай), а также указал метод анализа полученной системы с помощью аппарата качественной теории дифференциальных уравнений. Такой анализ двухзарядной пион-нуклонной модели в однопетлевом приближении был вслед за тем выполнен Гинзбургом (1956).

Тем самым в упомянутых работах Боголюбова и Ширкова (см. также суммирующую публикацию на английском языке — Боголюбов, Ширков (1956б)) был сформулирован и успешно применен метод ренормализационной группы (т. е. регулярный метод улучшения аппроксимационных свойств квантовой теории возмущений путем решения надлежащих групповых дифференциальных уравнений), который в наши дни без существенных изменений используется во все возрастающем объеме на переднем крае исследований физики частиц и взаимодействий.

**47.2. Групповой характер мультипликативных перенормировок.** Как было установлено в главе V, введение конечных контрчленов в лагранжиан взаимодействия, по своей операторной структуре совпадающих с составляющими лагранжиана, эквивалентно некоторой конечной перенормировке (преобразованию Дайсона) основных функций Грина и констант связи. При этом следует оговориться, что в электродинамике мультипликативному преобразованию подвергается только поперечная часть фотонной функции.

Мы начнем изложение с наиболее простой модели (псевдо) скалярного поля  $\varphi$  с четверным самодействием

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = h\varphi^4(x). \quad (2)$$

В соответствии с результатами § 36 введение в лагранжиан (2) контрчленов

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{вз}} + \Delta\mathcal{L},$$

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{z_2 - 1}{2} \varphi(p)(p^2 - m^2)\varphi(p) - \frac{(z_m - 1)}{2} m^2 \varphi^2 + (z_1 - 1) h\varphi^4 \quad (3)$$



эквивалентно следующим преобразованиям:

$$\begin{aligned}\Delta(\dots, m, h) &\rightarrow z_2^{-1} \Delta(\dots, \tilde{m}, \tilde{h}), \\ \Gamma(\dots, m, h) &\rightarrow z_1 \Gamma(\dots, \tilde{m}, \tilde{h}),\end{aligned}\quad (4)$$

причем

$$h \rightarrow \tilde{h} = z_1 z_2^{-2} h, \quad m^2 \rightarrow \tilde{m}^2 = z_m z_2^{-1} m^2, \quad (5)$$

а многоточиями в (4) обозначены надлежащие конфигурационные или импульсные переменные. Таким образом, введение контрчленов (3), сводящихся к перенормировке элементарного хронологического спаривания, элементарной вершины и массы, индуцирует перенормировки (4) полной функции Грина  $\Delta$  и 4-вершинной функции  $\Gamma$  и, в конечном счете, сводится к перенормировке (5) физических параметров.

Это, в сущности, очень простое свойство может быть также проиллюстрировано следующим рассуждением. Полный лагранжиан

$$\mathcal{L}_{\text{полн}} = \mathcal{L}_0(m, \varphi) + \mathcal{L}_{\text{вз}}(h, \varphi) + \Delta \mathcal{L},$$

состоящий из суммы выражений (3.1), (2) и (3), может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{полн}} &= \frac{z_2}{2} \varphi(\rho^2 - \tilde{m}^2)\varphi + z_1 h \varphi^4 = \mathcal{L}_0(\tilde{m}', \varphi') + \tilde{h}' (\varphi')^4; \\ \varphi' &= \sqrt{z_2} \varphi.\end{aligned}\quad (6)$$

Рассматривая здесь первое слагаемое как свободный лагранжиан, проквантуем его и перейдем в представление взаимодействия. Роль бозонного поля, нормированного перестановочными соотношениями, будет теперь играть  $\varphi'$ , и мы придем к теории с новой константой связи  $\tilde{h}$  и новой массой  $\tilde{m}$ .

Подчеркнем, что приведенное рассуждение совершенно не опирается на теорию возмущений.

Если теперь *одновременно* с введением контрчленов (3) провести перенормировки константы связи и массы, обратные к (5)

$$h \rightarrow z_1^{-1} z_2^2 h, \quad m^2 \rightarrow z_m^{-1} z_2 m^2, \quad (7)$$

то в результате мы придем к теории, соответствующей неизменным значениям  $h$  и  $m$ .

В дальнейшем нам будет удобнее работать с преобразованиями, обратными к (4) и (7)

$$\begin{aligned}\Delta_1 \rightarrow \Delta_2 = z_2 \Delta_1, \quad \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 = z_1^{-1} \Gamma_1, \\ h_1 \rightarrow h_2 = z_1 z_2^{-2} h_1, \quad m_1^2 \rightarrow m_2^2 = z_m z_2^{-1} m_1^2.\end{aligned}\quad (8)$$

Функции  $\Delta_i$  и  $\Gamma_i$  с различными значениями индекса  $i$  отличаются друг от друга не только значениями параметров  $h_i$  и  $m_i$ , но и спо-

собою проведения процедуры вычитания, которую мы условно параметризуем одним дополнительным аргументом  $\mu_i$  (конструктивную реализацию этого аргумента, имеющего размерность массы, см. ниже в § 47.3):

$$\Delta_i = \Delta(\dots, \mu_i, h_i), \quad \Gamma_i = \Gamma(\dots, \mu_i, h_i). \quad (9)$$

Смысл преобразования (8) заключается в том, что набор  $\Delta_1, \Gamma_1, m_1, h_1$  приводит к тем же самым физическим результатам, что и набор  $\Delta_2, \Gamma_2, m_2, h_2$ . Очевидно, что число таких эквивалентных наборов неограничено. Ясно также, что преобразование (8) обладает групповым свойством. Соответствующую группу назовем группой мультипликативных ренормировочных преобразований, или *ренормализационной группой*. Наличие преобразований ренормализационной группы может быть установлено для широкого класса моделей квантовой теории поля. Рассмотренный пример является представителем класса перенормируемых моделей с одной безразмерной константой связи.

Физически важными случаями из этого класса являются (с некоторыми техническими оговорками, касающимися выбора калибровки векторных полей и перенормировки масс фермионов — см. ниже § 50) спинорная электродинамика и квантовая хромодинамика. Так, например, для спинорной электродинамики в поперечной калибровке электромагнитного поля ( $d_i = 0$ ), основываясь на конечных контрчленах из (34.10), не содержащих перенормировки массы электрона ( $z_m = z_2$ ),

$$\delta\mathcal{L} = (z_1 - 1) e \bar{\psi} \hat{A} \psi + (z_2 - 1) \bar{\psi}(p) (\hat{p} - m) \psi(-p) + \\ + \frac{z_3 - 1}{2} A_n(p) (g^{nm} p^2 - p^n p^n) A_m(-p) \quad (10)$$

и принимая во внимание тождество Уорда  $z_1 = z_2 = z$ , можно получить вместо (8)

$$G_1 \rightarrow G_2 = z G_1, \quad D_1 \rightarrow D_2 = z_2 D_1, \quad \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 = z^{-1} \Gamma_1, \quad \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 = z_3^{-1} \alpha_1, \quad (11)$$

причем

$$G_i = G(\dots, \mu_i, m, \alpha_i), \quad D_i = D_{tr}(\dots, \mu_i, m, \alpha_i), \\ \Gamma_i = \Gamma(\dots, \mu_i, m, \alpha_i). \quad (12)$$

Обратимся теперь к модели (36.44) мезон-нуклонного взаимодействия с двумя константами связи  $g$  и  $h$ . Здесь, как и в только что рассмотренном случае, ограничимся частным видом ренормгрупповых преобразований, не затрагивающих массы частиц. Такая возможность автоматически реализуется в схеме перенормировок путем «импульсных вычитаний», использованной в главе VI. С помощью контрчленов из (36.45), не меняющих масс  $M$  и  $m$ ,

на основе (36.46) и (36.47), приходим к групповым преобразованиям

$$\begin{aligned} G_1 \rightarrow G_2 &= z_2 G_1, & \Delta_1 \rightarrow \Delta_2 &= z_3 \Delta_1, & (\Gamma_3)_1 \rightarrow (\Gamma_3)_2 &= z_1^{-1} (\Gamma_3)_1, \\ (\Gamma_4)_1 \rightarrow (\Gamma_4)_2 &= z_4^{-1} (\Gamma_4)_1, & g_1 \rightarrow g_2 &= z_1 z_4^{-1} z_3^{-1/2} g_1, \\ h_1 \rightarrow h_2 &= z_4 z_3^{-2} h_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Соответствующая группа включает связанные между собой преобразования двух констант связи. Такие группы будем называть *двухзарядными*.

Перенормируемые модели квантовой теории поля обычно содержат безразмерные константы связи. Однако, как можно показать, при формулировке групповых ренормировочных преобразований размерности констант связи не являются существенными.

Групповые преобразования вида (8), (11), (13) позволяют получить для входящих в них функций Грина (мы будем называть их основными) достаточно простые функциональные уравнения, а также соответствующие дифференциальные уравнения (уравнения Ли).

**47.3. Переход к импульсному представлению.** Функциональные уравнения обычно записываются для «безразмерных» основных функций Грина, рассматриваемых в импульсном представлении.

Для мезонного пропагатора в модели (2)

$$\Delta(k^2, h) = \frac{d(k^2, h)}{m^2 - k^2} \quad (14)$$

такой безразмерной величиной является  $d(k^2, h)$ . Наряду с  $d$  следует ввести также сильно-связную 4-вершинную функцию

$$\Gamma_4 \sim \square(\{k^2\}, h). \quad (15)$$

Эту функцию следует выбрать в виде безразмерной лоренц-инвариантной величины, зависящей от шести линейно независимых инвариантных переменных

$$\{k^2\} = (k_1^2, k_2^2, k_3^2, k_4^2, (k_1 + k_2)^2, (k_1 + k_3)^2). \quad (16)$$

Ее нормировку фиксируем так, чтобы при  $h \rightarrow 0$  функция  $\square$  подобно  $d$  обращалась в единицу:

$$d(k^2, h=0) = \square(\{k^2\}, h=0) = 1. \quad (17)$$

Поэтому разложение функции

$$\square = \frac{1}{h} \Gamma_4 \quad (18)$$

по степеням  $h$  имеет вид

$$\square(\{k^2\}, h) = 1 + h [I(s) + I(t) + I(u)] + \dots, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} s &= (k_1 + k_2)^2, & t &= (k_1 + k_3)^2, \\ u &= (k_1 + k_4)^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 - s - t. \end{aligned}$$

Функции  $I$  соответствуют простейшим диаграммам второго порядка и были вычислены явно в § 36:

$$I(z) = \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{zx(1-x) - m^2 + ie}{\mu^2 x(1-x) - m^2} \right].$$

Здесь  $\mu^2$  — точка вычитания, такая, что

$$I(z = \mu^2) = 0.$$

В соответствии с (8) функции  $d$  и  $\square$  преобразуются следующим образом:

$$d_1 \rightarrow d_2 = z_2 d_1, \quad \square_1 \rightarrow \square_2 = z_1^{-1} \square_1, \quad (20)$$

поэтому эти функции определены с точностью до мультипликативных произвольных постоянных. Этот произвол соответствует произволу в  $R$ -операции — его можно фиксировать, если задать точки вычитания в  $R$ -операции.

Положим, что

$$d_i(k^2) = 1 \quad \text{при} \quad k^2 = \mu_i^2 = \lambda_i,$$

где  $\lambda_i$  играет роль квадрата импульса нормировки.

Нормировка на единицу возможна лишь для таких  $\lambda$ , при которых мезонный пропагатор  $d$  является действительным. Это связано с тем, что перенормировка пропагатора  $\Delta$  осуществляется константой  $z_2$ , входящей в контрчлен. Требование эрмитовости контрчлена приводит к действительности  $z_2$ . Условие действительности  $\Delta$  приводит согласно (36.27) к ограничению на возможные значения  $\lambda$ :

$$\lambda \leq 9m^2. \quad (21)$$

Соответственно для  $\square$  условие нормировки запишем в виде

$$\square_j(\{k^2\}) = 1 \quad \text{при} \quad \{k^2\} = \{\xi_j \lambda_j\},$$

т. е. при  $k_1^2 = \xi_1 \lambda_1$ , ...,  $k_6^2 = \xi_6 \lambda_6$ . Условие действительности  $z_1$  налагает на числа  $\xi_\alpha$  и размерные параметры  $\lambda_j$  соответствующие ограничения.

Из соображений однородности в импульсном пространстве следует, что  $d$  и  $\square$  могут быть представлены функциями безразмерных аргументов

$$d_i = d\left(\frac{k^2}{\lambda_i}, \frac{m^2}{\lambda_i}, h\right), \quad \square_j = \square\left(\frac{k^2}{\lambda_i}, \frac{m^2}{\lambda_i}, h\right),$$

причем числовые параметры  $\xi_\alpha$  введены в определение функции  $\square$ .

**47.4. Вывод функциональных уравнений.** Уравнения (20) могут теперь быть записаны в виде

$$d(k^2/\lambda_2, m^2/\lambda_2, h_2) = z_2 d(k^2/\lambda_1, m^2/\lambda_1, h_1), \quad (22)$$

$$\square(\{k^2/\lambda_2\}, m^2/\lambda_2, h_2) = z_1^{-1} \square(\{k^2/\lambda_1\}, m^2/\lambda_1, h_1), \quad (23)$$

причем в соответствии с (8)

$$h_2 = z_1 z_2^{-2} h_1. \quad (24)$$

Условия нормировки в новых обозначениях выглядят следующим образом

$$d(1, y, h) = 1, \quad \square(\{\xi\}, y, h) = 1. \quad (25)$$

Здесь  $\{\xi\} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , а буквой  $y$  обозначена безразмерная массовая переменная  $m^2/\lambda$ . Соотношения (22) — (25) образуют систему функциональных уравнений для  $d$  и  $\square$ . Константы  $z_i$  с помощью условий нормировки можно выразить через  $d$  и  $\square$ .

Полагая в (22)  $k^2 = \lambda_1$ , с помощью первого из уравнений (25) получаем

$$z_2 = d(\lambda_1/\lambda_2, m^2/\lambda_2, h_2) \quad (26)$$

Аналогичным образом находим

$$z_4^{-1} = \square(\{\xi\lambda_1/\lambda_2\}, m^2/\lambda_2, h_2) \equiv \square_s(\lambda_1/\lambda_2, m^2/\lambda_2, h_2). \quad (27)$$

Здесь введено специальное обозначение  $\square_s$  для «симметричной» по импульсным аргументам вершинной функции.

Подставляя теперь (26) и (27) в (22) — (24), имеем

$$d(x, y, h) = d(t, y, h) d(x/t, y/t, h_t),$$

$$\square(\{x\}, y, h) = \square_s(t, y, h) \square(\{x/t\}, y/t, h_t),$$

где  $t = \lambda_1/\lambda_2$ ,  $h = h_2$ ,  $h_t = h_1 = h d^2(t, y, h) \square_s(t, y, h)$ .

Произведение  $h d^2 \square_s$ , являющееся инвариантом преобразования, назовем *инвариантным зарядом*. Введя для него новое обозначение:

$$h d^2(t, y, h) \square_s(t, y, h) = \bar{h}(t, y, h), \quad (28)$$

запишем полученные уравнения в виде

$$d(x, y, h) = d(t, y, h) d\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \bar{h}(t, y, h)\right), \quad (29)$$

$$\square(\{x\}, y, h) = \square_s(t, y, h) \square\left(\left\{\frac{x}{t}\right\}, \frac{y}{t}, \bar{h}(t, y, h)\right). \quad (30)$$

Полагая в (30)  $x_1 = \dots = x_n = x$ , получим также

$$\square_s(x, y, h) = \square_s(t, y, h) \square_s\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \bar{h}(t, y, h)\right). \quad (31)$$

Уравнение для инвариантного заряда  $\bar{h}$  может быть получено теперь из (28), (29) и (31):

$$\bar{h}(x, y, h) = h\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \bar{h}(t, y, h)\right), \quad (32)$$

причем

$$\bar{h}(1, y, h) = h. \quad (33)$$

Свяжем теперь константу связи  $h$ , содержащуюся в формулах (29) — (33), с «наблюдаемой» константой  $h_0$ , определенной через значение амплитуды рассеяния  $M(s, t)$ , т. е. 4-концевой вершинной функции на массовой поверхности  $k_1^2 = \dots = k_4^2 = m^2$ , в некоторой «низкоэнергетической» точке

$$h_0 = M(s_0, t_0), \quad s_0 = \sigma m^2, \quad t_0 = \tau m^2. \quad (34)$$

Соответствующие этой точке функции Грина обозначим нижним индексом «нуль». В силу инвариантности произведения  $h d^2 \square$  имеем

$$h_\lambda d^2 \left( \frac{k^2}{\lambda}, \frac{m^2}{\lambda}, h_\lambda \right) \square \left( \left\{ \frac{k^2}{\lambda} \right\}, \frac{m^2}{\lambda}, h_\lambda \right) = h_0 d_0^2 \left( \frac{k^2}{m^2}, h_0 \right) \square_0 \left( \left\{ \frac{k^2}{m^2} \right\}, \sigma, \tau, h_0 \right). \quad (35)$$

Полагая затем

$$k^2 = \lambda, \quad \{k^2\} = \{\xi \lambda\} \quad (36)$$

и используя условия нормировки, находим искомое соотношение

$$h_\lambda = h_0 d_0^2 \left( \frac{\lambda}{m^2}, h_0 \right) \square_0 \left( \left\{ \xi \frac{\lambda}{m^2} \right\}, \sigma, \tau, h_0 \right). \quad (37)$$

**47.5. Свойства функциональных уравнений.** Полученные функциональные уравнения можно расположить в определенной иерархической последовательности. Центральное место занимает уравнение (32) для инвариантного заряда. Оно является замкнутым и его необходимо решать в первую очередь. Вторую группу образуют уравнения (29) и (31), зависящие от  $\bar{h}$ . Уравнения подобного типа можно называть ренормгрупповыми уравнениями для одноаргументных функций, имея в виду наличие в них лишь одного аргумента типа  $x$ . Наконец в третью группу отнесем уравнение (30) для многоаргументной функции  $\square$ . Помимо инвариантного заряда  $\bar{h}$  оно содержит соответствующую одноаргументную («симметричную») функцию  $\square_s$ .

Все эти уравнения оказываются универсальными. Это означает, что они являются справедливыми в любой перенормируемой квантовополевой модели с одной константой связи  $g$  и одной массой  $m$ . Второе условие несущественно, поскольку переход к случаю нескольких масс  $m_1, \dots, m_k$  достигается простым «размножением» массового аргумента  $y \rightarrow \{y\} = y_1, \dots, y_k$ . Следует также отметить, что под «константой связи» в данном контексте подразумевается параметр разложения теории возмущений, неперенормированный аналог которого имеется в исходном полном лагранжиане модели. Под это определение подпадает параметр типа  $d_i$  в квантовой электродинамике, фиксирующий калибровку электромагнитного поля (а также аналогичный параметр в квантовой хромодинамике).

Таким образом, в любой квантовополевой модели с одной (в указанном выше смысле) константой связи  $g$  уравнение для инвариант-

ного заряда имеет вид

$$\bar{g}(x, y, g) = \bar{g}(x/t, y/t, \bar{g}(t, y, g)), \quad (38)$$

уравнения для одноаргументных функций —

$$s_i(x, y, g) = s_i(t, y, g) s_i(x/t, y/t, \bar{g}(x, y, g)), \quad (39)$$

а уравнения для многоаргументных вершин —

$$\Gamma_j(\{x\}, y, g) = s_j(t, y, g) \Gamma_j(\{x/t\}, y/t, \bar{g}(t, y, g)). \quad (40)$$

Здесь  $s_j$  — «симметричная» функция, связанная с  $\Gamma_j$  соотношением (27), а аргумент  $y$  может быть заменен на набор  $\{y\}$  или опущен. Последний случай отвечает безмассовой модели.

Подобная универсальность имеет место и для функциональных уравнений, отвечающих квантовополевым моделям с двумя или большим числом констант связи (см. ниже § 48.1). Как можно показать (см. Ширков (1982)), эта универсальность выходит далеко за рамки квантовой теории поля. Дело в том, что функциональное уравнение рассмотренного типа отражает простое свойство транзитивности физических характеристик относительно способа задания своих краевых (или начальных) значений. Это свойство справедливо для широкого класса динамических систем, обладающих однородностью по соответствующей переменной. Вследствие этого уравнения подобного типа (с точностью до простой замены переменных) могут быть записаны в самых различных разделах теоретической физики (статистической физике, теории переноса излучения, теории турбулентности, гидродинамике, теории упругости и т. д.).

Функциональные уравнения (29) — (32) оказываются также форминвариантными относительно преобразований константы связи вида

$$g \rightarrow G = Q(y, g), \quad (41)$$

где  $Q$  — произвольная функция двух аргументов, однозначно обратимая относительно второго, т. е. допускающая представление

$$g = Q^{-1}(y, G) \equiv q(y, G). \quad (42)$$

В самом деле, определяя «новый» инвариантный заряд соотношением, аналогичным (41)

$$\bar{G}(x, y, G) = Q(y/x, \bar{g}[x, y, q(y, G)]), \quad (43)$$

простой выкладкой убеждаемся, что функция  $\bar{G}$  удовлетворяет уравнению (38). Подобным же образом с учетом надлежащих переобозначений (например,  $S(x, y, G) \equiv s(x, y, q(y, G))$ ) сохраняются и уравнения (39), (40).

Инвариантность относительно (41) в частности означает, что наряду с константой связи можно использовать, например, ее квадрат (т. е. истинный параметр разложения теории возмущений в теориях с трilinearным взаимодействием). Она также означает

возможность преобразования более специального вида

$$g \rightarrow G = Q(y, g) = g + g^2 Q_1(y) + g^3 Q_2(y) + \dots \quad (44)$$

К выражениям подобной структуры можно прийти с помощью формул типа (37), а также, исследуя связи между перенормированными константами связи, полученными в различных перенормировочных схемах (см., например, § 36.2, а также ниже § 49.1).

## § 48. Общий анализ групповых уравнений

**48.1. Уравнения спинорной электродинамики. Двухзарядный случай.** Получим теперь функциональные уравнения для других квантовопольевых моделей из § 47.2.

В спинорной электродинамике имеются три основные функции Грина: поперечная часть фотонного пропагатора

$$D_{mn}^{tr}(k) = (-1/k^2)(g_{mn} - k_m k_n / k^2) d(k^2, \alpha), \quad (35.7)$$

электронная функция Грина

$$G(p) = \frac{s(p^2, \alpha, \alpha_i)}{M(p^2, \alpha, \alpha_i) - \hat{p}} \quad (1)$$

и вершинная функция

$$\Gamma_n(p, q; \alpha, \alpha_i) = \gamma_n \Gamma(p^2, q^2, (p-q)^2; \alpha, \alpha_i) + \dots \quad (2)$$

Формула (1) получена из (35.21) переобозначением  $A^{-1} = s$ . В аргументы функций  $s$ ,  $M$  и  $\Gamma$ , следуя Логунову (1956), мы ввели величину  $\alpha_i = \alpha d_i$ , которую можно трактовать как «продольную константу связи». В перенормированной теории возмущений  $\alpha_i$  (наряду с  $\alpha$ ) выступает как параметр разложения.

Мультипликативные преобразования Дайсона (47.11) теперь могут быть записаны для скалярных функций  $d$ ,  $s$ ,  $\Gamma$ :

$$\left. \begin{aligned} d(k^2/\lambda_2, m^2/\lambda_2, \alpha_2) &= z_3 d(k^2/\lambda_1, m^2/\lambda_1, \alpha_1), \\ s(k^2/\lambda_2, m^2/\lambda_2; \alpha_2, \alpha_i) &= z s(k^2/\lambda_1, m^2/\lambda_1; \alpha_1, \alpha_i), \\ \Gamma(\{k^2/\lambda_2\}, m^2/\lambda_2; \alpha_2, \alpha_i) &= z^{-1} \Gamma(\{k^2/\lambda_1\}, m^2/\lambda_1; \alpha_1, \alpha_i), \\ \alpha_2 &= z_3^{-1} \alpha_1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Благодаря калибровочной инвариантности продольная константа связи  $\alpha_i$  не преобразуется при (3), а вследствие тождества Уорда ( $z_1 = z_2 \equiv z$ ) функции  $s$  и  $\Gamma$  выпадают из инвариантного заряда

$$\bar{\alpha}(x, y, \alpha) = \alpha d(x, y, \alpha). \quad (4)$$

функциональное уравнение для которого

$$\bar{\alpha}(x, y, \alpha) = \bar{\alpha}(x/t, y/t, \bar{\alpha}(t, y, \alpha)) \quad (5)$$



совпадает с (47.38). Уравнение для одноаргументных функций  $s$  и  $M$  имеют вид (47.39), например

$$s(x, y; \alpha, \alpha_l) = s(t, y; \alpha, \alpha_l) s(x/t, y/t; \bar{\alpha}(t, y, \alpha), \alpha_l). \quad (6)$$

Такой же вид имеет уравнение для «симметричной» вершины  $\Gamma_s(x, y, \alpha, \alpha_l) \equiv \Gamma(x, x, x, y, \alpha, \alpha_l)$ :

$$\Gamma_s(x, y, \alpha, \alpha_l) = \Gamma_s(t, y, \alpha, \alpha_l) \Gamma_s\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \bar{\alpha}(t, y, \alpha), \alpha_l\right). \quad (7)$$

Наконец, уравнение для  $\Gamma$  будет

$$\Gamma(\{x\}, y, \alpha, \alpha_l) = \Gamma_s(t, y, \alpha, \alpha_l) \Gamma\left(\left\{\frac{x}{t}\right\}, \frac{y}{t}, \bar{\alpha}(t, y, \alpha), \alpha_l\right). \quad (8)$$

Константа связи  $\alpha$ , входящая в эти уравнения, связана с наблюдаемой низкоэнергетической константой (постоянной тонкой структуры)  $\alpha_0 = 1/137$  посредством соотношения

$$\alpha_\lambda = \alpha_0 d_0\left(\frac{\lambda}{m^2}, \alpha_0\right), \quad (9)$$

где  $d_0$  — фотонный пропагатор, нормированный на массовой поверхности реального фотона

$$d_0\left(\frac{k^2}{m^2}, \alpha_0\right)\Big|_{k^2=0} = d_0(0, \alpha_0) = 1.$$

В заключение выпишем без подробного вывода функциональные уравнения для двухзарядной модели мезон-нуклонного взаимодействия (36.44).

Вводя безразмерные функции безразмерных аргументов: мезонный и нуклонный пропагаторы

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda}, \frac{m^2}{\lambda}, \frac{m^2}{M^2}; g, h\right), \quad s\left(\frac{p^2}{\lambda}, \frac{m^2}{\lambda}, \frac{m^2}{M^2}; g, h\right),$$

3-вершинную и 4-вершинную функции

$$\Gamma\left(\left\{\frac{p^2}{\lambda}\right\}, \frac{m^2}{\lambda}; g, h\right), \quad \square\left(\left\{\frac{p^2}{\lambda}\right\}, \frac{m^2}{\lambda}; g, h\right)$$

(начиная с этого момента аргумент  $m^2/M^2$  для экономии места опускаем), удовлетворяющие условиям нормировки

$$d(1, \dots) = s(1, \dots) = \Gamma(\{1\}, \dots) = \square(\{1\}, \dots) = 1,$$

определим «симметричные» вертексы:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_s(x, y; g, h) &= \Gamma(x, x, x, y; g, h), \\ \square_s(x, y; g, h) &= \square(x, x, x, x, x, y; g, h) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

и введем инвариантные константы связи:

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}(x, y; g, h) &= g s(x, y; g, h) \Gamma(x, y; g, h) d^{1/2}(x, y; g, h), \\ \bar{h}(x, y; g, h) &= h d^2(x, y; g, h) \square(x, y; g, h). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Функциональные уравнения для  $\bar{g}$  и  $\bar{h}$  имеют вид

$$g(x, y; g, h) = \bar{g}\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}; \bar{g}(t, y; g, h), \bar{h}(t, y; g, h)\right), \quad (12)$$

$$\bar{h}(x, y; g, h) = \bar{h}\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}; \bar{g}(t, y; g, h), \bar{h}(t, y; g, h)\right). \quad (13)$$

Эта замкнутая пара уравнений образует первый класс. Ко второму классу относятся четыре уравнения для  $d$ ,  $s$  и симметричных вертексов  $\Gamma_s$  и  $\square_s$ :

$$\begin{aligned} F(x, y; g, h) &= \\ &= F(t, y; g, h) F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}; \bar{g}(t, y; g, h), \bar{h}(t, y; g, h)\right), \quad (14) \\ F &= (d, s, \Gamma_s, \square_s). \end{aligned}$$

Наконец, уравнениями третьего класса будут

$$\Gamma(\{x\}, y; g, h) = \Gamma_s(t, y; g, h) \Gamma\left(\left\{\frac{x}{t}\right\}, \frac{y}{t}, \bar{g}, \bar{h}\right), \quad (15)$$

$$\square(\{x\}, y; g, h) = \square_s(t, y; g, h) \square\left(\left\{\frac{x}{t}\right\}, \frac{y}{t}, \bar{g}, \bar{h}\right). \quad (16)$$

**48.2. Дифференциальные уравнения.** Ренормализационная группа, представляя собой группу непрерывных преобразований, может быть охарактеризована бесконечно-малым элементом, т. е. соответствующими дифференциальными уравнениями Ли.

Эти дифференциальные уравнения могут быть получены дифференцированием функциональных уравнений. Они оказываются очень полезными как для общего анализа, так и для конкретных приложений.

Рассмотрим сначала уравнения для инвариантного заряда в однозарядной модели. Дифференцируя (47.32) по  $x$  и полагая затем  $t = x$ , получим

$$x \frac{\partial \bar{h}(x, y, h)}{\partial x} = \beta \left( \frac{y}{x}, \bar{h}(x, y, h) \right), \quad (17)$$

где

$$\beta(y, h) = \left. \frac{\partial \bar{h}(t, y, h)}{\partial t} \right|_{t=1}. \quad (18)$$

С другой стороны, дифференцируя (47.32) по  $t$  и полагая затем  $t = 1$ , найдем

$$\left\{ x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \beta(y, h) \frac{\partial}{\partial h} \right\} \bar{h}(x, y, h) = 0, \quad (19)$$

где функция  $\beta$  определена в (18).

Уравнения (17) и (19) представляют собой различные формы дифференциальных групповых уравнений. Как уже отмечалось выше, уравнения вида (17), впервые введенные Боголюбовым и Ширковым

(19556), описывают эволюцию инвариантного заряда по энергетической переменной. Ниже мы будем именовать их эволюционными уравнениями. Уравнения типа (19) впервые были получены Овсянниковым (1956) в процессе построения общего решения функциональных уравнений (см. ниже § 48.3). Они выражают факт компенсации приращений от всех трех аргументов в инвариантном заряде при бесконечно малом изменении шкалы импульсов и масс. Мы будем называть их уравнениями Овсянникова или компенсационными уравнениями.

Компенсационные уравнения полностью эквивалентны эволюционным. Как те, так и другие несколько менее информативны, нежели «производящие» для них функциональные уравнения, поскольку не учитывают условие нормировки (47.33). Это условие следует накладывать на решения дифференциальных уравнений в качестве граничного.

Получим еще дифференциальные уравнения для функциональных уравнений второго класса. Дифференцируя соответствующим образом функциональное уравнение (47.29), получим эволюционное уравнение

$$x \frac{\partial \ln d(x, y, h)}{\partial x} = \gamma \left( \frac{y}{x}, \bar{h}(x, y, h) \right) \quad (20)$$

и уравнение Овсянникова

$$\left\{ x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \beta(y, h) \frac{\partial}{\partial h} \right\} \ln d(x, y, \bar{h}) = \gamma(y, h). \quad (21)$$

Здесь

$$\gamma(y, d) = \left. \frac{\partial \ln d(t, y, h)}{\partial t} \right|_{t=1}, \quad (22)$$

а функция  $\beta$  определена согласно (18).

Перейдем, наконец, к уравнениям третьего класса. Эти уравнения содержат несколько независимых импульсных аргументов. Поэтому эволюционные уравнения для них образуют систему

$$\frac{\partial \square(x_1, \dots, x_6, y, h)}{\partial \ln x_i} = \square(x_i, y, h) \Psi_i \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_6}{x_i}, \frac{y}{x_i}, \bar{h}(x_i, y, h) \right),$$

$$\Psi_i(\{x\}, y, h) = \left. \frac{\partial \square(x_1, \dots, x_6, y, h)}{\partial x_i} \right|_{x_i=1}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (23)$$

а компенсационное уравнение Овсянникова содержит все частные производные

$$\left\{ \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + y \frac{\partial}{\partial y} - \beta(y, h) \frac{\partial}{\partial h} \right\} \ln \square(\{x\}, y, h) = \gamma_{\square}(y, h). \quad (24)$$

Полученные уравнения естественным образом обобщаются на случай двух и более констант связи. Так, эволюционные уравнения

для двух инвариантных зарядов (11) будут

$$\left. \begin{aligned} x \frac{\partial \bar{g}(x, y, g, h)}{\partial x} &= \beta_g \left( \frac{y}{x}, \bar{g}, \bar{h} \right), \\ x \frac{\partial \bar{h}(x, y, g, h)}{\partial x} &= \beta_h \left( \frac{y}{x}, \bar{g}, \bar{h} \right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Здесь

$$\beta_g(y, g, h) = \left. \frac{\partial \bar{g}(t, y, g, h)}{\partial t} \right|_{t=1}, \quad \beta_h(y, g, h) = \left. \frac{\partial \bar{h}(t, y, g, h)}{\partial t} \right|_{t=1}, \quad (26)$$

а функции  $\bar{g}$  и  $\bar{h}$ , стоящие в аргументах правых частей, зависят от тех же аргументов, что и левые части.

Уравнения Овсянникова, соответствующие (25), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \left\{ x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \beta_g(y, g, h) \frac{\partial}{\partial g} - \beta_h(y, g, h) \frac{\partial}{\partial h} \right\} g(x, y, g, h) &= 0, \\ \left\{ x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \beta_g(y, g, h) \frac{\partial}{\partial g} - \beta_h(y, g, h) \frac{\partial}{\partial h} \right\} \bar{h}(x, y, g, h) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Дифференциальные уравнения, соответствующие уравнениям второго и третьего класса, также могут быть выписаны без труда. При этом эволюционные уравнения по форме совпадут с уравнениями для однозарядового случая, а операторы уравнений Овсянникова будут содержать комбинацию

$$\beta_g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_h \frac{\partial}{\partial h}$$

вместо  $\beta \frac{\partial}{\partial h}$ .

Обобщение на многозарядный случай очевидно.

**48.3. Общее решение уравнений.** Функциональные уравнения ренормализационной группы могут быть решены в общем виде. Такое общее решение было дано Овсянниковым (1956).

Рассмотрим сначала инвариантный заряд в однозарядной теории (уравнения (47.32), (17) и (19)).

Считая  $\beta(y, h)$  на время известной функцией, можем рассматривать (19) как линейное однородное уравнение в частных производных. Два первых интеграла дифференциальных уравнений характеристик могут быть выбраны в виде

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad \Phi_1(y, h) = C_2,$$

где  $\Phi_1$  — некоторая функция, для явного определения которой необходимо использовать явный вид функции  $\beta$  и решить уравнение

$$\frac{dh}{dy} + \frac{\beta(y, h)}{y} = 0.$$

Таким образом, искомая функция  $h$  представима в виде

$$\bar{h}(x, y, h) = \Phi_2 \left( \frac{y}{x}, \Phi_1(y, h) \right), \quad (28)$$

где  $\Phi_2$  — произвольная функция своих аргументов. Используем теперь условие нормировки инвариантного заряда (47.33). Разрешая для этого правую часть (28) относительно второго аргумента, получим

$$\Phi_1(y, h) = \Phi_3\left(\frac{y}{x}, \bar{h}(x, y, h)\right), \quad (29)$$

где  $\Phi_3$  — функция, обратная по отношению к  $\Phi_2$ . Положим  $x = 1$ . С учетом (47.33), находим  $\Phi_1 = \Phi_3$ . Уравнение (29) принимает вид

$$\Phi_1(y, h) = \Phi_1\left(\frac{y}{x}, \bar{h}(x, y, h)\right). \quad (30)$$

Функциональное соотношение (30) дает общее решение уравнения (47.32). Согласно этому соотношению всякому решению  $\bar{h}$  исходного функционального уравнения соответствует некоторая функция двух аргументов  $\Phi_1(y, h)$  такая, что это решение неявно определяется из (30).

Справедливо и обратное утверждение: какова бы ни была функция  $\Phi_1(y, h)$ , обратимая относительно второго аргумента, уравнение (30) определяет функцию  $\bar{h}(x, y, h)$ , удовлетворяющую функциональному уравнению (47.32). Доказательство этого утверждения сводится к ряду простых манипуляций с аргументами уравнения (30).

Как уже отмечалось, для определения явного вида  $\Phi_1$ , а следовательно, и явного вида  $\bar{h}$ , достаточно задать функцию  $\beta(y, h)$ . Этот факт впрочем непосредственно следует из уравнения (17).

Перейдем к решению уравнения второго класса. Общее решение уравнения (21) может быть представлено в виде

$$\ln d(x, y, h) = F_1\left(\frac{y}{x}, \bar{h}(x, y, h)\right) + F_2(y, h).$$

Здесь первое слагаемое есть общее решение соответствующего однородного уравнения, а второе слагаемое удовлетворяет уравнению

$$\left\{y \frac{\partial}{\partial y} - \beta(y, h) \frac{\partial}{\partial h}\right\} F_2(y, h) = \gamma_d(y, h).$$

В силу условия нормировки

$$F_1(y, h) = -F_2(y, h) = \ln F(y, h)$$

и, следовательно,

$$d(x, y, h) = \frac{F\left(\frac{y}{x}, \bar{h}(x, y, h)\right)}{F(y, h)}, \quad (31)$$

причем при любой произвольной функции двух переменных  $F(y, h)$  выражение (31) удовлетворяет функциональному уравнению (47.29). Выражение (31) удовлетворяет также дифференциальному уравне-

нию (21), в котором правая часть определена как

$$\gamma_d(y, h) = \beta(y, h) \frac{\partial \ln F(y, h)}{\partial h} - \frac{\partial \ln F(y, h)}{\partial \ln y}. \quad (32)$$

Таким образом, мы нашли наиболее общее решение функционального уравнения второго класса (47.29). Нахождение общего решения дифференциального уравнения второго класса (21) при заданных функциях  $\bar{h}(x, y, h)$  и  $\psi_d(y, h)$  сведено к решению уравнения (32). Наконец, общее решение функционального уравнения третьего класса (47.31) может быть представлено в виде

$$\square(x_1, \dots, x_n, y, h) = \frac{K\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}, \frac{y}{x_1}, \bar{h}(x_1, y, h)\right)}{K(y, h)}, \quad (33)$$

причем функция  $K(y, h)$  удовлетворяет условию нормировки

$$K(y, h) = K(1, \dots, 1, y, h), \quad (34)$$

а также дифференциальному уравнению типа (32)

$$\beta(y, h) \frac{\partial \ln K(y, h)}{\partial h} - \frac{\partial \ln K(y, h)}{\partial \ln y} = \gamma_{\square}(y, h). \quad (35)$$

Нетрудно убедиться, что выражение (33) при произвольной функции  $n+1$  аргумента

$$K(\xi_2, \dots, \xi_n, y, h)$$

удовлетворяет функциональному уравнению (47.31). Оно удовлетворяет также дифференциальному уравнению Овсянникова третьего класса (24), при условии, что функция  $\gamma_{\square}(y, h)$  связана с  $\beta$  и  $K(y, h)$  соотношением (35).

Рассмотрение однозарядного случая исчерпано. Перейдем к двухзарядному случаю. Ограничимся здесь общим решением уравнений первого класса, т. е. системы двух функциональных уравнений (12) и (13). Соответствующие уравнения Овсянникова образуют систему двух дифференциальных уравнений (27). Не составляет труда убедиться, что общее решение системы (27) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \bar{g}(x, y, g, h) &= \Phi_1\left(\frac{y}{x}, F_1(y, g, h), F_2(y, g, h)\right), \\ \bar{h}(x, y, g, h) &= \Phi_2\left(\frac{y}{x}, F_1(y, g, h), F_2(y, g, h)\right), \end{aligned} \quad (36)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — произвольные функции трех аргументов, а функции  $F_1$  и  $F_2$  удовлетворяют уравнениям

$$\left\{ y \frac{\partial}{\partial y} - \beta_g(y, g, h) \frac{\partial}{\partial g} - \beta_h(y, g, h) \frac{\partial}{\partial h} \right\} F_i(y, g, h) = 0, \\ i = 1, 2.$$

Условия нормировки инвариантных зарядов налагают связи на функции  $F_1$ ,  $F_2$  и  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ . Так, разрешая правые части соотношений (36) относительно  $F_1$  и  $F_2$ , запишем

$$F_i(y, g, h) = \Psi_i\left(\frac{y}{x}, \bar{g}(x, y, g, h), \bar{h}(x, y, g, h)\right), \quad i=1, 2.$$

Условие нормировки приводит к функциональным равенствам

$$F_i(y, g, h) = \Psi_i(y, g, h), \quad i=1, 2,$$

вследствие чего окончательно имеем

$$F_i(y, g, h) = F_i\left(\frac{y}{x}, \bar{g}(x, y, g, h), \bar{h}(x, y, g, h)\right), \quad i=1, 2. \quad (37)$$

Эти соотношения являются аналогом уравнения (30) и дают наиболее общее решение системы функциональных уравнений (12) и (13).

**48.4. Синтез ренормгруппы и теории возмущений.** Как видно, решения функциональных уравнений обладают функциональным же произволом. Ограничения, связанные с функциональной автомодельностью, снижают на единицу число независимых аргументов. Так, например, функция трех аргументов  $\bar{h}(x, y, h)$  в силу (30) полностью определяется заданием функции двух аргументов  $\Phi(y, h)$ . Для фиксирования остающегося произвола следует обратиться к динамической информации определенной квантовополевой модели. Основным источником такой информации является перенормированная теория возмущений. Поэтому можно поставить задачу нахождения таких частных решений функциональных ренормгрупповых уравнений, которые удовлетворяют условиям соответствия с результатами вычислений конкретных вычислений по теории возмущений. Наиболее удобный путь состоит в определении функций  $\beta(y, h)$  и  $\gamma(y, h)$ , входящих в дифференциальные уравнения (так называемых *ренормгрупповых функций*), через теорию возмущений. Положим поэтому

$$\beta(y, h) = \left. \frac{\partial h_{\tau, n}(\xi, y, h)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1}, \quad \gamma(y, h) = \left. \frac{\partial \ln d_{\tau, n}(\xi, y, h)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1}, \quad (38)$$

где нижний индекс «т.в» означает, что функции  $\bar{h}$  и  $d$  представлены небольшим числом членов разложений по степеням константы связи.

В качестве простого примера рассмотрим уравнение для инвариантного заряда (17), когда функция  $\beta$  определена с помощью однопетлевого приближения для  $\bar{h}$ :

$$\bar{h}_{\tau, v}(x, y, h) = h + h^2 [f(x/y) - f(1/y)] + \dots \quad (39)$$

Подставляя (39) в первое из соотношений (38), имеем

$$\beta(y, h) = \frac{h^2}{y} f'\left(\frac{1}{y}\right)$$

и, следовательно,

$$x \frac{\partial \bar{h}(x, y, h)}{\partial x} = \frac{x}{y} f' \left( \frac{x}{y} \right) \bar{h}^2(x, y, h).$$

Заменой  $x \rightarrow z = x/y$  переменные разделяются, и мы приходим к точной квадратуре (см. Бланк, Ширков (1956)):

$$\bar{h}(x, y, h) = \frac{h}{1 - h[f(x/y) - f(1/y)]}. \quad (40)$$

Это выражение, являясь точным решением уравнения (17), строго удовлетворяет функциональному групповому уравнению (47.32), т. е. обладает свойством функциональной автомодельности. В то же время первые члены его разложения по  $h$  совпадают с «исходным» выражением (39) теории возмущений, которое не обладает этим свойством. Поэтому можно сказать, что проведенный синтез теории возмущений и ренормгрупповых свойств приводит к «улучшенной» ренорминвариантной теории возмущений, возникающей в результате специального пересуммирования бесконечных подпоследовательностей, содержащих все, сколь угодно высокие степени параметра разложения.

В более общем случае, когда исходное приближение для инвариантного заряда (а следовательно, и для  $\beta$ ) определено с точностью до величин более высокого порядка, уравнения (17) и (20) удастся проинтегрировать, вообще говоря, лишь приближенно (например, в случае «разномасштабных» масс, важном в квантовой хромодинамике — см. работу Ширкова (1981)).

Точному интегрированию, однако, поддаются важные случаи ультрафиолетовой (см. ниже § 49) и инфракрасной (см. § 50.3) асимптотик, когда эффективным параметром разложения перенормированной теории возмущений оказывается произведение малой константы связи на большое значение логарифма. Использование ренормгрупповых свойств, т. е. решение ренормгрупповых уравнений на основе информации из теории возмущений, позволяет существенно улучшить аппроксимационные свойства исходных разложений и восстановить истинный характер (ультрафиолетовой или инфракрасной) сингулярности, совместный со свойством функциональной автомодельности.

**48.5. Схемная зависимость.** При реализации этой программы приходится сталкиваться с вопросами так называемой схемной зависимости. Как отмечалось в §§ 34 и 36, для однозначного определения перенормированных конечных величин (масс, констант связи) необходимо фиксировать схему вычитания расходимостей. Поэтому, в частности, в одной и той же квантовополевой модели различные схемы перенормировок приводят к разным константам связи, которые могут быть выражены друг через друга соотношениями типа (47.37). Эти последние по своей структуре соответствуют преобразованиям специального вида (47.44).



Разумеется, в точных выражениях для квантовополевых величин (одетых пропагаторов, вершинных функций) подобные преобразования сводятся к заменам некоторых аргументов. Однако теория возмущений дает нам лишь степенные приближения, которые вообще говоря, оказываются неэквивалентными в различных схемах вычитания именно в силу своего приближенного характера.

Поскольку, согласно (38), ренормгрупповые функции  $\beta$  и  $\gamma$  определяются по теории возмущений, рассмотрим их трансформацию при преобразовании (47.44), т. е. переход от уравнений (17), (20) к уравнениям

$$\frac{\partial \bar{G}(x, y, G)}{\partial \ln x} = B\left(\frac{y}{x}, \bar{G}(x, y, G)\right), \quad (41)$$

$$\frac{\partial \ln S(x, y, G)}{\partial \ln x} = \Gamma\left(\frac{y}{x}, \bar{G}(x, y, G)\right), \quad (42)$$

причем  $G$ ,  $\bar{G}$  и  $S$  выражаются через  $g$ ,  $\bar{g}$  и  $s$  из (17), (20) соотношениями (47.43), (47.44) и

$$S(x, y, G) = s(x, y, q(y, G)), \quad (43)$$

где функция  $q$ , обратная к  $Q$ , была введена в (47.42). Общие соотношения между  $B$ ,  $\Gamma$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  получаются надлежащим дифференцированием уравнений (47.43) и (43):

$$B(y, G) = \left\{ \beta(y, g) \frac{\partial Q(y, g)}{\partial g} - y \frac{\partial Q(y, g)}{\partial y} \right\} \Big|_{g=q(y, G)}, \quad (44)$$

$$\Gamma(y, G) = \gamma(y, q(y, G)). \quad (45)$$

Обратимся теперь к теории возмущений. Используя для пересчетной функции  $Q$  разложение (47.44) и соответствующие разложения для ренормгрупповых функций ( $l \geq 1$ )

$$\begin{aligned} \beta(y, g) &= \sum g^{l+1} \beta_l(y), & \gamma(y, g) &= \sum g^l \gamma_l(y), \\ B(y, G) &= \sum G^{l+1} B_l(y), & \Gamma(y, G) &= \sum G^l \Gamma_l(y), \end{aligned} \quad (46)$$

получим из (44), (45)

$$\begin{aligned} B_1(y) &= \beta_1(y) - Q'_1(y), & B_2 &= \beta_2 + 2Q'_1 Q_1 - Q'_2, \\ B_3 &= \beta_3 - \beta_2 Q_1 + \beta_1(Q_2 - Q_1^2) + Q'_1(2Q_2 - 5Q_1^2) + 3Q'_2 Q_1 - Q'_3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (47)$$

а также

$$\Gamma_1(y) = \gamma_1(y), \quad \Gamma_2 = \gamma_2 - \gamma_1 Q_1, \dots \quad (48)$$

Формулы (48) значительно упрощаются, если пересчетная функция  $Q$  не зависит от  $y$ . Этот случай представляет интерес при анализе ультрафиолетовых асимптотик или безмассовых моделей.

Для него

$$\begin{aligned} B_1 &= \beta_1, & B_2 &= \beta_2, \\ B_3 &= \beta_3 - \beta_2 Q_1 + \beta_1 (Q_2 - Q_1^2), \\ B_4 &= \beta_4 - 2\beta_3 Q + \beta_2 Q_1^2 + 2\beta_1 (Q_3 - 3Q_1 Q_2 + 2Q_1^3), \\ &\dots \end{aligned} \quad (49)$$

Таким образом, схемно независимым является первый коэффициент  $\gamma$ -функции, а в безмассовом случае — также два первых коэффициента  $\beta$ -функции.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда инвариантный заряд не удовлетворяет условию нормировки на константу связи. Эта возможность реализуется, в частности, в схеме размерной перенормировки. Пусть, например

$$\bar{g}_n(1, y, g) = n(y, g). \quad (50)$$

Здесь мы ввели особое обозначение  $\bar{g}_n$  для «нормированного на  $n$ » инвариантного заряда. Функциональное уравнение для него имеет вид

$$\bar{g}_n(x, y, g) = \bar{g}_n(x/t, y/t, g_t), \quad (51)$$

где

$$g_t = N(y/t, \bar{g}_n(t, y, g)), \quad (52)$$

а  $N$  — функция, обратная к  $n$  по второму аргументу, т. е.

$$N(y, n(y, g)) = n(y, N(y, g)) = g.$$

Дифференциальное уравнение Ли для  $\bar{g}_n$  может быть записано в обычном виде

$$\frac{\partial \bar{g}_n(x, y, g)}{\partial \ln x} = \beta_n\left(\frac{y}{x}, \bar{g}_n(x, y, g)\right), \quad (53)$$

где, однако

$$\beta_n(y, g) = \left. \frac{\partial \bar{g}_n(\xi, y, N(y, g))}{\partial \xi} \right|_{\xi=1}. \quad (54)$$

Общие решения уравнений (51), (53) могут быть получены с помощью замечания о том, что величина  $g_t$ , участвующая в ренормировочном преобразовании ненормированного инвариантного заряда  $\bar{g}_n$  и определенная согласно (52), будучи представлена в виде

$$g_t = \bar{g}(t, y, g), \quad (55)$$

удовлетворяет обычному функциональному уравнению (47.38). Мы назовем ее *эффективным зарядом*. Выписывая для нее уравнение Ли

$$\frac{\partial \bar{g}(x, y, g)}{\partial \ln x} = \beta\left(\frac{y}{x}, \bar{g}(x, y, g)\right), \quad (56)$$

можем убедиться, что соответствующая бета-функция связана с  $\beta_n$  соотношением

$$\beta(y, g) = \left[ \beta_n(y, \gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - y \frac{\partial}{\partial y} \right] N(y, \gamma) |_{\gamma=n(y, g)}. \quad (57)$$

Не составляет большого труда проверить, что в уравнение Овсянникова для  $\bar{g}_n$

$$\left\{ x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \beta(y, g) \frac{\partial}{\partial g} \right\} \bar{g}_n(x, y, g) = 0 \quad (58)$$

входит бета-функция  $\beta(y, g)$  эффективного заряда.

Таким образом, в общем случае бета-функции эволюционного и компенсационного дифференциальных уравнений отличаются друг от друга. Исключение представляет схема импульсных вычитаний, в которой инвариантный заряд совпадает с эффективным.

Сравнивая формулы (57) и (44) убеждаемся в их тождественности при условии отождествления функций  $n(y, g)$  и  $q(y, g)$ . Этот факт вполне естествен, так как в свете преобразований из § 47.5 уравнения (50) — (52) могут рассматриваться как обычные уравнения, записанные в терминах «новой» константы связи  $g \rightarrow g' = Q(y, g) = N(y, g)$ .

## § 49. Асимптотический анализ в ультрафиолетовой области

Наиболее содержательные приложения метод ренормализационной группы нашел в исследовании ультрафиолетовых асимптотик перенормируемых квантовополевых моделей. Поэтому мы проведем сейчас общий анализ решений ренормгрупповых уравнений в ультрафиолетовой области.

**49.1. Асимптотические уравнения для инвариантного заряда. В ультрафиолетовой области**

$$|k^2| \gg m^2 \quad (1)$$

выберем точку нормировки, удовлетворяющую неравенству

$$|\lambda| \gg m^2, \quad (2)$$

и будем рассматривать область изменения переменной  $k^2$  такую, что отношение  $k^2/\lambda$  принимает значения в интервале

$$1 \lesssim \frac{k^2}{\lambda} = x \lesssim \infty. \quad (3)$$

В перенормируемых моделях с безразмерными константами связи предельный переход

$$y = \frac{m^2}{\lambda} \rightarrow 0$$

оказывается регулярным и функциональные уравнения ренормализационной группы упрощаются. Массовая переменная из них

выпадает. Уравнение для инвариантного заряда принимает вид

$$\bar{h}(x, h) = \bar{h}\left(\frac{x}{t}, \bar{h}(t, h)\right). \quad (4)$$

Здесь использовано обозначение

$$\bar{h}(x, h) = \bar{h}(x, 0, h) = \lim_{y \rightarrow 0} \bar{h}(x, y, h). \quad (5)$$

В дальнейшем все величины, не содержащие массовой переменной, следует считать связанными с соответствующими величинами, введенными в § 47, 48, подобным предельным переходом.

Относительно предельного соотношения (5) необходимо сделать следующее замечание. Введенный в (5) асимптотический инвариантный заряд  $\bar{h}(x, h)$  нормирован

$$\bar{h}(1, h) = h \quad (6)$$

в точке  $k^2 = \lambda$ , удовлетворяющей условию (2). Таким образом, фигурирующая в этом контексте константа связи  $h = h_\lambda$  также является асимптотической. По определению, она равна значению инвариантного заряда в ультрафиолетовой точке нормировки, удовлетворяющей условию (2). В то же время в реалистических моделях квантовой теории поля параметром, связанным с наблюдаемыми величинами, является константа связи, определенная через низкоэнергетические значения пропагаторов и вершинных функций Грина (ср. (34.54) и (36.31)). Необходимо поэтому иметь связь между асимптотической константой  $h_\lambda$  и низкоэнергетической  $h_0$ .

Условие инвариантности инвариантного заряда дает

$$\bar{h}_{n, \xi}(k^2, m^2, h_0) = \bar{h}_{n, \xi}(k^2, \lambda, m^2, h_\lambda) \simeq \bar{h}\left(\frac{k^2}{\lambda}, h_\lambda\right).$$

Введенный здесь низкоэнергетический инвариантный заряд  $\bar{h}_{n, \xi}$  нормирован в точке  $k^2 = \xi m^2$ , где  $\xi$  — число порядка единицы. Поэтому можно написать

$$\bar{h}_{n, \xi}(k^2, m^2, h_0) = \bar{h}_0\left(\frac{k^2}{m^2}, h_0\right),$$

причем

$$\bar{h}_0(1, h_0) = h_0. \quad (7)$$

Таким образом,

$$\bar{h}_0\left(\frac{k^2}{m^2}, h_0\right) \simeq \bar{h}\left(\frac{k^2}{\lambda}, h_\lambda\right). \quad (8)$$

Правая часть этого соотношения, будучи разложена в ряд по константе связи  $h_\lambda$ , представляется полиномом по степеням  $\ln \frac{k^2}{\lambda}$ . Поэтому точный знак равенства в (8) можно поставить только,

если перейти в левой части к асимптотической предельной форме

$$\bar{h}_0\left(\frac{k^2}{m^2}, h_0\right) \rightarrow \bar{h}_0^{\text{ac}}\left(\frac{k^2}{m^2}, h_0\right),$$

являющейся полиномом по  $\ln \frac{k^2}{m^2}$ . Таким образом,

$$\bar{h}\left(\frac{k^2}{\lambda}, h_\lambda\right) = \bar{h}_0^{\text{ac}}\left(\frac{k^2}{m^2}, h_0\right). \quad (9)$$

Входящая в (9) функция  $\bar{h}_0^{\text{ac}}$  получается из  $\bar{h}_0$  отбрасыванием всех членов, стремящихся к нулю при  $|k^2/m^2| \rightarrow 0$ . Если теперь формально положить  $\lambda = m^2$ , то мы получим из (9) при  $k^2 = \lambda = m^2$

$$h_{\text{в.э}} = h_{m^2} = \bar{h}_{\text{в.э}}(m^2, m^2, 0, h_{m^2}) = \bar{h}_0^{\text{ac}}(1, h_0)$$

— искомую связь между высокоэнергетической константой связи  $h_\lambda$  и низкоэнергетической физической константой связи  $h_0$ .

Обратимся к решению уравнения (4). Дифференциальное уравнение Овсянникова для  $\bar{h}(x, h)$  будет

$$\left[ x \frac{\partial}{\partial x} - \beta(h) \frac{\partial}{\partial h} \right] \bar{h}(x, h) = 0. \quad (10)$$

Здесь

$$\beta(h) = \frac{\partial \bar{h}(x, h)}{\partial x} \Big|_{x=1}. \quad (11)$$

Общее ненормированное решение уравнения (10) представимо в виде произвольной функции  $\Phi$  от первого интеграла уравнения характеристики

$$h(x, h) = \Phi(\ln x + \Psi(h)),$$

где

$$\Psi(h) = \int \frac{h}{\beta(h')}. \quad (12)$$

Используя условие нормировки (6), находим, что функции  $\Phi$  и  $\Psi$  взаимно обратны. Поэтому

$$\Psi(\bar{h}(x, h)) = \ln x + \Psi(h). \quad (13)$$

С учетом (12) получаем

$$\int_h^{\bar{h}(x, h)} \frac{da}{\beta(a)} = \ln x, \quad (14)$$

— формулу Гелл-Манна — Лоу (1954).

Заметим, что решение (13), (14) является частным случаем общего решения (48.30). Связь между функциями  $\Phi_1$  из (48.30) и  $\Psi$  из (13) имеет вид

$$\Psi(h) = \lim_{y \rightarrow 0} \ln \frac{\Phi_1(y, h)}{y}. \quad (15)$$

Ясно также, что решение в форме (14) может быть непосредственно получено из асимптотической формы эволюционного уравнения (48.17)

$$x \frac{\partial \bar{h}(x, h)}{\partial x} = \beta(\bar{h}(x, h)). \quad (16)$$

Отметим еще, что уравнение (10), для инвариантного заряда, а также ниже уравнение (28) для одночастичной функции Грина, являются асимптотическими формами соответствующих уравнений Овсянникова вида (48.19), (48.21). Эти асимптотические уравнения Овсянникова полностью совпадают с ультрафиолетовыми пределами так называемых уравнений Каллана (1970)—Симанчика (1970). Мы считаем справедливым называть такие асимптотические уравнения уравнениями *Овсянникова—Каллана—Симанчика*.

**49.2. Асимптотики инвариантного заряда.** Как следует из уравнений (14) и (11), для определения ультрафиолетового асимптотического поведения инвариантного заряда  $\bar{h}(x, h)$  достаточно знать его производную в окрестности точки нормировки  $x=1$ . Для ее нахождения можно использовать асимптотическую теорию возмущений

$$\bar{h}(x, h) = h + h^2 a_1 l + h^3 (b_2 l^2 + b_1 l) + \dots \quad (17)$$

Здесь введено обозначение  $l = \ln x$ . Ряд (17) можно представить в виде ряда по степеням  $l$ :

$$\bar{h}(x, h) = h + f_1(h) l + f_2(h) l^2 + \dots \quad (18)$$

Подставляя (8) в (11), получаем

$$\beta(h) = f_1(h) = a_1 h^2 + b_1 h^3 + \dots \quad (19)$$

Таким образом, для определения асимптотики  $\bar{h}(x, h)$  необходимо вычислить в каждом порядке теории возмущений коэффициент при линейном логарифмическом члене (при «младшем» логарифме).

Для дальнейшего анализа чрезвычайно важным оказывается арифметический знак функции  $\beta(h)$ . Как видно из (9), при достаточно малых  $h$  он определяется знаком коэффициента  $a_1$ , т. е. знаком первой логарифмической радиационной поправки в (7).

Рассмотрим сперва случай, когда  $\beta(h)$  положительна в интересующей нас области значений  $h$ . Из уравнения (16) тогда вытекает, что  $\bar{h}(x, g)$  растет с ростом  $l = \ln x$ . Предел бесконечно больших  $l$  соответствует расходимости интеграла

$$I(z) = \int_h^z \frac{da}{\beta(a)}, \quad (20)$$

стоящего в левой части уравнения (14), на верхнем пределе. Возможны три случая (рис. 63):

а) Интеграл  $I(z)$  расходится при конечном значении  $z = H$ . Это возможно, если функция  $1/\beta$  имеет в точке  $H$  неинтегрируемую особенность. Например,

$$\beta(h) \simeq a(H-h)^{1+m}, \quad m \geq 0.$$

В этом случае в пределе больших  $l$   $\bar{h}$  стремится снизу к конечному значению  $H$ ,

$$\bar{h}(\infty, h) = H, \tag{21}$$

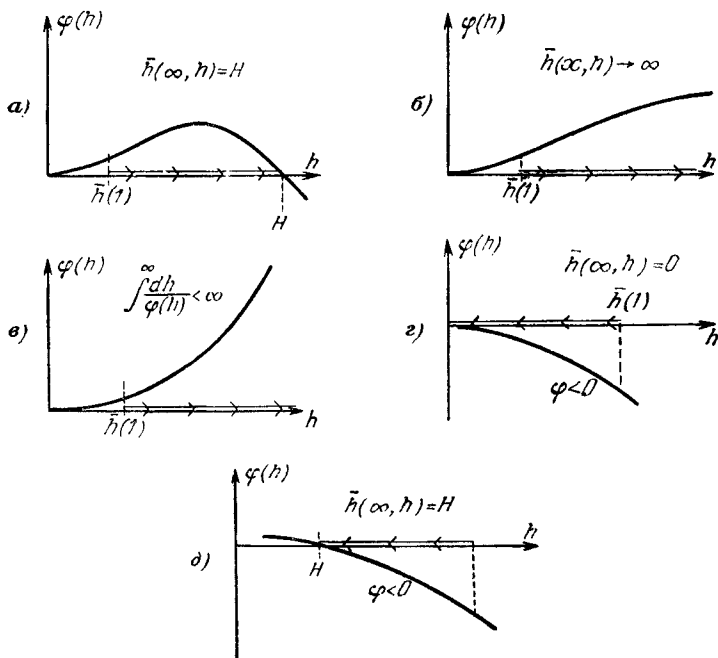


Рис. 63.

причем характер стремления в рассмотренном примере имеет вид

$$\bar{h}(x, h) \simeq H - \frac{1}{(aml)^{1/m}}.$$

б) Интеграл  $I(z)$  расходится при бесконечном значении  $z$ . Инвариантный заряд неограниченно возрастает

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{h}(x, h) = \infty. \tag{22}$$

Например,

α)  $\beta(h) \sim h^{1-n}, \quad n > 0,$

или

β)  $\beta(h) \sim bh(\ln h)^{1-q}, \quad 0 \leq q \leq 1.$

Подставляя эти выражения в (20), получаем

$$\left. \begin{array}{l} \alpha) \quad \bar{h}(x, h) \sim (\ln x)^{1/n} \\ \text{и} \\ \beta) \quad h(x, h) \sim \exp(bq \ln x)^{1/q} \end{array} \right\} \quad (23)$$

в) Интеграл (20) остается конечным при  $z \rightarrow \infty$ . В этом случае уравнение (14) не допускает самосогласованной асимптотики для  $\bar{h}$  при  $x \rightarrow \infty$ . Мы приходим к внутреннему противоречию.

Перейдем теперь к рассмотрению варианта, при котором  $\beta(h)$  отрицательна. При этом согласно (16) инвариантный заряд  $\bar{h}$  убывает с ростом  $l = \ln x$ . Уравнение (14) удобно записать в виде

$$\int_{\bar{h}(x, h)}^h \frac{da}{|\beta(a)|} = l. \quad (20')$$

Здесь возможны два случая:

г) Интеграл (20') расходится при  $\bar{h} = 0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{h}(x, h) = 0. \quad (24)$$

д) Интеграл, стоящий в левой части (20'), расходится при некотором конечном  $h' = H$ . Этот случай близок к случаю а) и отличается от него лишь тем, что  $\bar{h}$  стремится к своему асимптотическому значению *сверху*.

Обсудим физический смысл рассмотренных возможностей. Поскольку ультрафиолетовый импульсный предел  $l \rightarrow \infty$  по квантовомеханическому соотношению взаимности (см. также § 41.1) соответствует малым расстояниям, то это обсуждение удобно провести в терминах понятия перенормировки константы связи. Определяя константу перенормировки  $Z_h$  как отношение константы связи на больших расстояниях (физической константы  $h$ ) к ее значению на малых расстояниях (затравочная константа  $h_0 \sim \bar{h}(\infty, h)$ ), имеем

$$Z_h^{-1} = \frac{\bar{h}(\infty, h)}{h}. \quad (25)$$

Случай а) соответствует конечной перенормировке константы связи

$$Z_h^{-1} = \frac{H}{h}. \quad (25a)$$

Случай б) соответствует бесконечной перенормировке

$$Z_h^{-1} = \infty, \quad Z_h = 0 \quad (25b)$$

Эффективная константа связи на малых расстояниях неограниченно возрастает. Наоборот, если фиксировать любое конечное



значение затравочного заряда, то физический заряд обращается в нуль. Флуктуации вакуума полностью экранируют заряд.

Наконец, в случае  $z$ ) имеем

$$Z_h^{-1} = 0. \quad (25z)$$

При этом конечном значению физического заряда  $h$  соответствует нулевое значение асимптотического (т. е. затравочного). Эффект поляризации вакуума противоположен случаю полной экранировки и сводится как бы к бесконечному усилению интенсивности затравочной константы связи. Такое поведение инвариантного заряда в ультрафиолетовой области в современной литературе получило название *асимптотического свободного*. Асимптотическая свобода в ультрафиолетовой области с общей точки зрения привлекательна потому, что, даже при больших числовых значениях физических констант связи, в ультрафиолетовой асимптотике мы попадаем в область слабой связи, где можно пользоваться теорией возмущений

В последние годы был обнаружен класс моделей квантовой теории поля, содержащих неабелевы калибровочные поля (поля Янга — Миллса), приводящих к асимптотически свободному ультрафиолетовому поведению.

Мы не обсуждаем здесь случай  $z$ ) как внутренне противоречивый. Однако к этому случаю приводит анализ многих квантовополевых моделей, основанный на использовании информации из нижних порядков теории возмущений. Одной из таких моделей является спинорная электродинамика, которую мы рассмотрим в следующем параграфе. Там же будут даны более подробные комментарии варианта  $z$ ).

Мы закончили рассмотрение возможных ультрафиолетовых асимптотик инвариантного заряда в однозарядных перенормируемых моделях. В моделях, содержащих несколько констант связи, необходимо провести соответствующий анализ системы асимптотических уравнений для инвариантных зарядов.

Дифференциальные уравнения Ли для асимптотических инвариантных зарядов в  $(k + 1)$ -зарядном случае имеют вид

$$\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial l} = \varphi_i(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{k+1}), \quad i = 1, \dots, k + 1. \quad (26)$$

Здесь

$$l = \ln x, \quad \bar{g}_i = \bar{g}_i(l, g_1, \dots, g_{k+1}).$$

Важным свойством системы (26) является отсутствие явной зависимости правых частей от аргумента  $l$ , который поэтому можно исключить, поделив, например, первые  $k$  уравнений на последнее. Обозначая

$$\begin{aligned} \bar{g}_{k+1} &= \sigma, \quad \bar{g}_i(l, \dots) = y_i(\sigma), \quad i = 1, \dots, k, \\ \frac{\varphi_i(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{k+1})}{\varphi_{k+1}(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{k+1})} &= \psi_i(\sigma, y_1(\sigma), \dots, y_k(\sigma)), \end{aligned}$$

получаем

$$\frac{dy_i(\sigma)}{d\sigma} = \psi_i(\sigma, y_1, \dots, y_k), \quad i = 1, \dots, k \quad (27)$$

— систему  $k$  нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Качественный анализ такой системы может быть произведен методами качественной теории дифференциальных уравнений. Мы не будем этим заниматься. Отметим лишь, что ниже, в § 51, уравнения (27) используются при исследовании двухзарядной мезон-нуклонной модели.

**49.3. Асимптотики функций Грина.** Перейдем теперь к ультрафиолетовому анализу уравнений второго класса — уравнений для одночастичных функций Грина и симметричных высших функций Грина. Соответствующие дифференциальные уравнения (48.20), (48.21) запишем в асимптотической форме

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial l} - \beta(h) \frac{\partial}{\partial h} \right\} D(l, h) = \gamma(h), \quad (28)$$

$$\frac{\partial D(l, h)}{\partial l} = \gamma(\bar{h}(x, h)). \quad (29)$$

Здесь введены обозначения:

$$D(l, h) = \ln d(x, h), \quad \gamma(h) = \gamma(y=0, h).$$

Будем решать уравнение (28). Его общее решение представимо в виде:

$$D(l, h) = \tilde{\Psi} \left( l + \int_c^h \frac{da}{\beta(a)} \right) - \int_c^h \frac{\gamma(a)}{\beta(a)} da,$$

где  $\tilde{\Psi}$  — произвольная функция. Первый член правой части представляет собой общее решение однородного уравнения, соответствующего (28). Он может быть представлен в виде

$$\tilde{\Psi} \left( l + \int_c^h \frac{da}{\beta(a)} \right) = \ln Q(\bar{h}(x, h)).$$

Поэтому

$$d(x, h) = Q(\bar{h}(x, h)) \exp \left( - \int_c^h \frac{\gamma(a)}{\beta(a)} da \right). \quad (30)$$

Принимая во внимание условие нормировки

$$d(1, h) = 1,$$

получаем

$$d(x, h) = \exp \left( \int_h^{\bar{h}(x, h)} \frac{\gamma(a)}{\beta(a)} da \right). \quad (31)$$

Формула (31) представляет собой аналог квадратуры (14). Она весьма удобна для исследования возможных ультрафиолетовых асимптотик одночастичных функций Грина и симметричных многочастичных функций.

Проведем такой анализ схематически, применительно к возможным асимптотикам инвариантного заряда, рассмотренным в § 49.2:

а) *Конечная перенормировка заряда* (21). Существуют три возможности:

а<sub>1</sub>) интеграл

$$I_0 = \int_h^H \frac{\gamma(a)}{\beta(a)} da$$

сходится на верхнем пределе. Тогда

$$d(\infty, h) = e^{I_0} \quad (32)$$

— функция Грина имеет конечный предел. Перенормировка волновой функции также конечна.

а<sub>2</sub>) интеграл  $I_0$  расходится на верхнем пределе, однако интеграл

$$I_1 = \int_h^H \frac{\gamma(a) - \gamma(H)}{\beta(a)} da$$

сходится. Тогда

$$d(x, h) \rightarrow x^\nu e^{I_1}, \quad (33)$$

т. е. одночастичная функция Грина асимптотически возрастает (или убывает) степенным образом. Показатель степени

$$\nu = \gamma(H)$$

называется *аномальной размерностью*.

а<sub>3</sub>) Интеграл  $I_0$  расходится и «одного вычитания», проведенного при переходе к  $I_1$ , недостаточно, т. е.  $I_1$  тоже расходится. В этом случае, вообще говоря, на степенную асимптотику накладываются более слабые логарифмические зависимости:

$$d(x, h) \sim x^\nu (\ln x)^\mu \quad (34)$$

и т. п.

Поскольку инвариантный заряд  $\bar{h}$  представляется произведением одночастичных и симметричных функций Грина в различных степенях

$$\bar{h}(x, h) = \prod_i (d_i(x, h))^{N_i}, \quad (35)$$

то в случае а<sub>1</sub>) асимптотики отдельных сомножителей в (35) соответствуют асимптотике произведения. Можно назвать такой случай *нормальным*. При вариантах а<sub>2</sub>) и а<sub>3</sub>) асимптотики сомножителей

отличаются от асимптотики произведения. При этом, очевидно, аномальные размерности удовлетворяют соотношению

$$\sum_i \nu_i N_i = 0. \quad (36)$$

Мы назовем эти случаи аномальными.

б) *Бесконечная перенормировка константы связи* (22). Здесь возможно большее количество подвариантов, нежели при конечной перенормировке  $\hbar$ , соответствующих различным асимптотикам  $\bar{\hbar}$ . Эти асимптотики могут иметь, в частности, (квази) логарифмический характер (23 $\alpha$ ) или (квази) степенной характер (23 $\beta$ ). В нормальных случаях асимптотики отдельных функций Грина будут совпадать с (23), в аномальных — отклоняться в ту или иную сторону. Отметим, что степенные асимптотики вида (33) могут получаться в аномальном случае, соответствующем (23 $\alpha$ ), а также в нормальном случае, соответствующем (23 $\beta$ ). В последнем варианте правило суммы (36) не будет иметь места.

в) *Случай асимптотической свободы* (24). В этом случае при малых значениях константы  $\hbar$  мы не выходим из области слабой связи. Поэтому явное вычисление функций  $\beta$ ,  $\gamma$  может быть проведено с помощью теории возмущений. В низшем неисчезающем порядке теории возмущений получаем,

$$\gamma(h)/\beta(h) \sim ch^{-1}.$$

Поэтому

$$d_i(x, h) \sim [\bar{\hbar}(x, h)/h]^{c_i}. \quad (37)$$

**49.4. Высшие функции Грина.** Техника ренормализационной группы позволяет рассматривать не только основные, но и высшие функции Грина и вертексы (т. е. сильно-связные вершинные функции, введенные в § 37). Рассмотрим, например, многочастичную сильно-связную функцию Грина с  $b$  бозонными и  $2f$  фермионными внешними линиями, определенную соотношением вида (37.37). Как следует из общего анализа § 36, подобные объекты при  $b + 3f > 4$  содержат расходимости, соответствующие только расходящимся поддиаграммам, и не содержат специфических расходимостей, связанных с соответствующими диаграммами «в целом». Соответственно этому при преобразованиях мультипликативной ренормировки эти функции преобразуются следующим образом:

$$\Gamma_{b, 2f} \rightarrow z_3^{-f} z_3^{-1/2} \Gamma_{b, 2f}. \quad (38)$$

Используя соотношения типа (47.26, 27), получим для симметричных асимптотик

$$\Gamma_{b, 2f}(x, g, h) = s^{-f}(x, g, h) d^{-b/2}(x, g, h) \Gamma_{b, 2f}(1, \bar{g}, \bar{h}). \quad (39)$$

Отметим, что симметричные асимптотики (39) соответствуют случаю, когда все импульсные аргументы функции  $\Gamma$  устремлены к одному

(большому) значению  $k^2$ :

$$|k_i k_j| \sim |k^2|, \quad |k^2| \gg m^2. \quad (40)$$

Этот случай не имеет прямого отношения к реальным физическим процессам (в которых  $k_i^2 = m_i^2$ ). Однако, изучая его, мы получаем представление о характере взаимодействия «на малых расстояниях».

## § 50. Анализ функций Грина спинорной электродинамики

**50.1. Постановка задачи.** Как было установлено выше, уравнения ренормализационной группы, накладывая определенные ограничения на функции Грина и вершинные функции, оставляют тем не менее произвол функционального типа. Это свойство является вполне естественным, так как ренормализационная инвариантность представляет собой отражение своеобразной автомодельности основных функций Грина, соответствующей преобразованиям Дайсона, вследствие чего, например, уравнения ренормализационной группы, как это отмечалось в § 48.1, обладают свойством универсальности. Иными словами, в уравнениях ренормализационной группы и их решениях не отражена динамика.

Введение динамической информации поэтому является необходимой ступенью конкретизации полученных выше общих результатов. К сожалению, единственным источником такой информации являются вычисления теории возмущений. Мы хотим здесь обратить внимание на то, что предположение о разложимости (хотя бы асимптотический) ряд является гипотезой, в достаточной мере обоснованной лишь в электродинамике (ср. обсуждение в § 20.1). Ниже мы поставим задачу приведения общих решений в соответствии с теорией возмущений, имея в виду, что эта процедура, безусловно, имеет смысл в спинорной электродинамике.

Приведение теории возмущений к ренормализационно-инвариантному виду позволяет улучшить аппроксимационные свойства разложений электродинамической теории возмущений в случаях, когда члены этих разложений убывают недостаточно быстро. Такая ситуация возникает в ультрафиолетовой и инфракрасной областях импульсных переменных, где эффективным параметром разложения является произведение постоянной тонкой структуры на большой логарифм.

**50.2. Ультрафиолетовые асимптотики.** Согласно общему рецепту § 49 рассмотрим сперва асимптотику инвариантного заряда (48.4), совпадающего ввиду тождества Уорда с фотонной функцией Грина. Полагая  $y = 0$ , получаем вместо (48.5)

$$\bar{\alpha}(x, \alpha) = \bar{\alpha}\left(\frac{x}{t}, \bar{\alpha}(t, \alpha)\right). \quad (1)$$

Квадратура соответствующего дифференциального уравнения согласно (49.14) имеет вид

$$\int_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}(x, \alpha)} \frac{da}{\beta(a)} = \ln x, \quad (2)$$

где

$$\beta(\alpha) = \frac{\partial \bar{\alpha}(x, \alpha)}{\partial x} \Big|_{x=1}. \quad (3)$$

Для определения функции  $\beta(\alpha)$  воспользуемся теорией возмущений. Во втором порядке получаем согласно (35.15)

$$\bar{\alpha}_2(x, \alpha) = \alpha d_2(x, \alpha) = \alpha + \frac{\alpha^2}{3\pi} l, \quad l = \ln x. \quad (4)$$

Следовательно,

$$\beta(\alpha) \sim \beta_{(2)}(\alpha) = \frac{\alpha^2}{3\pi}. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (2), находим

$$\bar{\alpha}(x, \alpha) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} l}. \quad (6)$$

Эта формула была впервые получена Ландау, Абрикосовым и Халатниковым (1954б) прямым суммированием главных логарифмических членов.

Выражение (6) замечательно в двух отношениях. Во-первых, оно является функцией произведения  $\alpha l$  и при разложении в ряд содержит все степени  $(\alpha l)^n$ . Таким образом, исходя из первого логарифмического члена (2) второго порядка теории возмущений, и воспользовавшись ренормализационной инвариантностью, мы получили выражение (6), содержащее все старшие логарифмические члены в любом порядке теории возмущений.

Во-вторых, выражение (6) неограниченно возрастает при  $\alpha l \rightarrow \rightarrow 3\pi$  — содержит так называемый «призрачный» полюс, возможное существование которого приводит к серьезным противоречиям с рядом общих положений теории (ср. Ландау, Померанчук (1955), Фрадкин (1955а)). Это второе свойство, согласно классификации § 49.2, соответствует случаю в). Выражением (6) нельзя пользоваться при

$$\ln x = l \gtrsim \frac{3\pi}{\alpha}. \quad (7)$$

Внутренняя противоречивость результата (6) приводит нас к необходимости анализа его причин. Не составляет труда убедиться, что любая аппроксимация для  $\beta(\alpha)$ , полученная по теории возмущений, не должна использоваться при больших значениях аргумента. Это означает, что верхний предел в левой части (2) не может быть много большим единицы. Таким образом, любые следствия

уравнения (2), основанные на аппроксимации для  $\beta(\alpha)$  из теории возмущений и приводящие к

$$\bar{\alpha}(x, \alpha) \gg 1, \quad (8)$$

не являются обоснованными.

Перейдем к учету более высоких радиационных поправок. Как было отмечено в § 48.5 коэффициенты  $\beta_l$  разложения  $\beta$ -функции в ультрафиолетовом пределе ( $m=0$ ) зависят от схемы перенормировки, начиная с  $l=3$ . В квантовой электродинамике вычисления были выполнены вплоть до 3-петлевого уровня. Бакер и Джонсон (1969) провели расчеты в обычной схеме  $R$ -операции, которую ниже будем называть схемой «импульсных вычитаний». Их результат имеет вид \*)

$$\beta_{\text{МOM}}(\alpha) = \frac{\alpha^2}{3\pi} + \frac{\alpha^3}{4\pi^2} + \frac{\alpha^4}{8\pi^3} \left( \frac{8}{3} \zeta(3) - \frac{101}{36} \right), \quad (9)$$

где  $\zeta(x)$  — функция Римана, причем  $\zeta(3) \simeq 1,202$ .

При обсуждении формулы (9) и ее следствий следует иметь в виду связь между входящей в нее асимптотической константой связи  $\alpha$  и низкоэнергетическим параметром разложения  $\alpha_0$ , равным постоянной тонкой структуры. Эта связь вида (49.9)

$$\alpha = \alpha_0 d_{ac}(1, \alpha_0) = \alpha_0 - \frac{5\alpha_0^2}{9\pi} + \left[ \zeta(3) + \frac{65}{648} \right] \frac{\alpha_0^3}{\pi^2} \quad (10)$$

была найдена Рафаэлем и Рознером (1974).

Формулу (9) любопытно сравнить с выражением для бета-функции эффективного заряда в схеме размерной перенормировки

$$\beta_{\text{MS}}(\alpha) = \frac{\alpha^2}{3\pi} + \frac{\alpha^3}{4\pi^2} - \frac{31}{288} \frac{\alpha^4}{\pi^3}, \quad (11)$$

полученным Владимировым (см. Владимиров, Ширков (1979))

Если непосредственно подставить (9) в (2), то мы опять приходим к случаю 49.2 в), т. е. к внутреннему противоречию. Можно, однако, использовать вместо (9) разложение для  $\beta^{-1}$ :

$$\frac{1}{\beta_{\text{МOM}}(\alpha)} = \frac{3\pi}{\alpha^2} \left[ 1 - \frac{3\alpha}{4\pi} + \left( \frac{155}{46} - \zeta(3) \right) \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \right].$$

Благодаря положительному знаку перед третьим членом мы получаем случай (49.2 б). Выполняя интегрирование, находим

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\bar{\alpha}(x, \alpha)} - \frac{3}{4\pi} \ln \frac{\bar{\alpha}(x, \alpha)}{\alpha} + \left( \frac{155}{46} - \zeta(3) \right) \frac{\bar{\alpha}(x, \alpha) - \alpha}{\pi^2} = \frac{1}{3\pi} \ln x, \quad (12)$$

откуда в пределе  $x \rightarrow \infty$  имеем формально

$$\bar{\alpha}(x, \alpha) \rightarrow c \ln x. \quad c > 0.$$

Этот результат не меняется при использовании (11) вместо (9).

\*) Нижний индекс «МOM» является общепринятой теперь английской аббревиатурой для схемы импульсных вычитаний, тогда как «MS» (см. ниже формулу (11)) — для схемы минимальных вычитаний.

В этой связи нужно отметить, что уравнение (2) обладает одним интересным свойством. Предположим, что функция  $\beta(z)$  во всей области изменения своего аргумента  $0 < z < \infty$  определена и положительна, а также, что (см. Боголюбов и Ширков (1955 г.))

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{dz}{\beta(z)} = \infty.$$

Тем самым мы полагаем, что истинная функция  $d(x, \alpha)$  имеет единственную особенность при  $x \rightarrow \infty$  и теория не содержит каких-либо неприятных сюрпризов типа призрачного полюса (6).

Пусть, далее, мы вычисляем истинную функцию  $\beta(z)$  с помощью некоторого предельного перехода для функции  $\beta_{\Lambda}(z)$ , обладающей свойством

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \beta_{\Lambda}(z) = \beta(z) \text{ при любом } z,$$

причем, однако, для любого фиксированного  $\Lambda$

$$\beta_{\Lambda}(z) > z^2 \tau_{\Lambda} > 0. \quad (13)$$

Внося  $\beta_{\Lambda}$  в (2), имеем

$$\int_{\alpha_{\Lambda}}^{\alpha_{\Lambda} d_{\Lambda}} \frac{dz}{\beta_{\Lambda}(z)} = \ln x, \quad (13a)$$

откуда на основании (13) получаем

$$\ln x < \int_{\alpha_{\Lambda}}^{\infty} \frac{dz}{z^2 \tau_{\Lambda}} = \frac{1}{\tau_{\Lambda} \alpha_{\Lambda}}.$$

Теперь видно, что для применимости формулы (13a) во всей области изменения  $\ln x$  (от 0 до  $\infty$ ) нужно положить

$$\alpha_{\Lambda} = 0.$$

Нетрудно сообразить, что именно такого рода аппроксимация для  $\beta(z)$  получается при вспомогательной регуляризации с помощью введения нелокального взаимодействия, как это сделали Ландау и Померанчук (1955). Приведенное рассуждение показывает, что на основании аппроксимаций опасно делать какие-либо заключения о положении, имеющем место в точной задаче.

Отметим еще, что, разрешая трансцендентное уравнение (10) относительно  $\bar{\alpha}$  методом последовательных приближений (по малому  $\bar{\alpha}$ ), в первом, однопетлевом приближении приходим, естественно, к (6), а во втором можем получить

$$\bar{\alpha}_2(x, \alpha) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} l - \frac{3\alpha}{4\pi} \ln \left( 1 - \frac{\alpha}{3\pi} l \right)}. \quad (14)$$

Эта двухпетлевая формула, впервые полученная в работе Боголюбова, Ширкова (1955 в) (см. также формулу (43.12) 1-го издания этой книги), суммирует не только главные логарифмические вклады  $\sim \alpha(\alpha l)^n$ , но также и «следующие за главными» вклады вида  $\alpha^2(\alpha l)^m$ .



С практической точки зрения учет последнего слагаемого в знаменателе квантовоэлектродинамической формулы (14) представляется несущественным. Однако в квантовой хромодинамике, где взаимодействие сильнее ( $\alpha_s \sim 0,2$ ), учет двухпетлевого вклада оказывается важным и аналог выражения (14) является основной рабочей формулой.

Перейдем к электронной функции Грина. Основываясь на однопетлевых формулах теории возмущений из § 35.2 для структурных функций  $s$  и  $M$  (в обозначениях формулы (48.1)), имеем

$$\begin{aligned} s(x, y, \alpha, \alpha_l) &= 1 + \alpha_l s_1(x, y) + \dots, \\ M(x, y, \alpha, \alpha_l) &= m \{1 + \alpha M_1(x, y) + \dots\}, \end{aligned} \quad (15)$$

причем в ультрафиолетовой области

$$s_1(x, 0) = \frac{1}{4\pi} \ln x, \quad M_1(x, 0) = -\frac{3}{4\pi} \ln x. \quad (16)$$

Подставляя эти выражения в (49.31) и (48.22), находим

$$\begin{aligned} \ln \frac{s(x, \alpha, \alpha_l)}{s(1, \alpha, \alpha_l)} &= \frac{\alpha_l}{4\pi} \int_1^x \frac{dz}{z} = \frac{\alpha_l}{4\pi} \ln x, \\ \ln \frac{M(x, \alpha, \alpha_l)}{M(1, \alpha, \alpha_l)} &= -\frac{1}{4\pi} \int_1^x \frac{dz}{z} \bar{\alpha}(z, \alpha). \end{aligned} \quad (17)$$

Используя во втором уравнении явное выражение (6) для  $\bar{\alpha}$ , получаем, пренебрегая высшими степенями  $\alpha^*$ :

$$\frac{s(x, \alpha, \alpha_l)}{s(1, \alpha, \alpha_l)} = x^{\alpha_l/4\pi}, \quad (18)$$

$$\frac{M(x, \alpha, \alpha_l)}{M(1, \alpha, \alpha_l)} = \left[ \frac{\bar{\alpha}(x, \alpha)}{\alpha} \right]^{-1/4} = \left( 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln x \right)^{1/4}. \quad (19)$$

Последнее выражение представляет собой простейшее приближение для так называемой эффективной (или инвариантной) массы электрона. Аналогичные формулы для эффективных масс фермионов находят применение в квантовой хромодинамике и моделях великого объединения взаимодействий.

Подобным образом можно определить симметричную ультрафиолетовую асимптотику вершинной функции в случае, когда  $p^2 \sim q^2 \sim k^2 \gg m^2$ . Полагая  $x_1 = x_2 = x_3 = x$  и проводя выкладки, подобные приведенным, получим

$$\frac{\Gamma(x, \alpha, \alpha d^4)}{\Gamma(1, \alpha, \alpha d^4)} = x^{-\frac{\alpha d^4}{4\pi}}. \quad (20)$$

\* Эти формулы впервые были получены Гандау, Абрикосовым и Халатниковым (1954 а, в) путем решения приближенных интегральных уравнений для функций Грина,

Как видно из формул (14), (18), (19), для функций  $d$ ,  $a$ ,  $b$  получены разложения типа:

$$f_0(\alpha \ln x) + \alpha f_1(\alpha \ln x) + \dots$$

Из сравнения этих выражений с исходными разложениями (9), (15) видно, что для восстановления вида функции  $f_i(\alpha \ln x)$  (с помощью дифференциальных уравнений ренормализационной группы) достаточно знать ее первый член разложения в ряд Маклорена. Таким образом, например, член  $\frac{\alpha^2}{3\pi} \ln x$  в  $\bar{\alpha}$  определяет сумму старших логарифмических членов вида  $\alpha(\alpha \ln x)^n$ , член  $\frac{\alpha^3}{4\pi^2} \ln x$  — сумму всех членов вида  $\alpha^2(\alpha \ln x)^m$  и т. д.

**50.3. Инфракрасная асимптотика электронной функции Грина.** Рассмотрим теперь электронный пропагатор в окрестности точки  $p^2 = m^2$ , где радиационные поправки к нему имеют логарифмическую особенность. Отправляясь от результатов § 35.2, представим выражение (48.1) в виде

$$G(p, \alpha) = \frac{1 - \frac{\alpha}{\pi} a(p^2)}{m \left[ 1 + \frac{\alpha}{\pi} m(p^2) \right] - \hat{\beta}} \simeq \frac{\left\{ m \left[ 1 + \frac{\alpha}{\pi} m(p^2) \right] + \hat{\beta} \right\} \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} a(p^2) \right)}{m^2 - p^2 + m^2 \frac{2\alpha}{\pi} m(p^2)}, \quad (21)$$

где символом  $m(p^2)$  обозначено второе слагаемое в правой части (35.22), т. е. разность  $b(p^2) - a(p^2)$ . В области  $|p^2 - m^2| \ll m^2$  членами  $\sim \alpha$  в числителе можно пренебречь, тогда как знаменатель представим в виде

$$(m^2 - p^2) \left[ 1 + \frac{\alpha}{2\pi} (3 - d_l) L(p^2) \right].$$

Таким образом, в окрестности массовой поверхности с учетом нормировки на импульс вычитания можем написать

$$G(p, \alpha) \simeq \frac{m + \hat{\beta}}{m^2 - p^2} s(p^2, \alpha); \quad s(p^2, \alpha) = 1 + \frac{\alpha(3 - d_l)}{2\pi} \ln \frac{m^2 - p^2}{m^2 - \lambda}, \quad (22)$$

и мы видим, что при  $p^2 \rightarrow m^2$  радиационные поправки неограниченно возрастают. Истинный характер инфракрасной особенности может быть восстановлен из (22) с помощью ренормгруппы. Подставляя вторую из формул (22) в (48.22), находим

$$\psi(y, \alpha) = \frac{\alpha(3 - d_l)}{2\pi} \frac{1}{1 - y}.$$

Используя это выражение в правой части (48.20) и принимая во внимание, что при  $p^2 \sim m^2$  инвариантный заряд не имеет син-

гулярных поправок (вследствие чего можно положить  $\alpha = \alpha$ ), находим, выполняя простое интегрирование,

$$\ln s(p^2, \alpha) = \frac{\alpha(3-d_I)}{2\pi} \ln \frac{m^2 - p^2}{\lambda - p^2}. \quad (23)$$

Таким образом, мы видим, что в окрестности точки  $p^2 = m^2$  полная функция Грина электрона вместо простого полюса имеет особенность типа точки ветвления

$$G(p, \alpha) \simeq \frac{m + \hat{p}}{(m^2 - p^2)^{1-b}}, \quad b = \frac{\alpha(d_I - 3)}{2\pi}, \quad (24)$$

что находится в соответствии с результатами §§ 45.5 и 46.2.

**50.4. Матричные элементы и вероятности переходов.** Как упоминалось в § 49.4, мультипликативные преобразования Дайсона (см. (49.48)) могут быть записаны для высших сильно-связных вертексов. Редукционные формулы § 38.2 позволяют затем перейти к формулам преобразований для матричных элементов

$$M_{b,2f} \rightarrow Z_2^{b/3} M_{b,2f}, \quad (25)$$

введенных согласно (25.17). Отметим, что матричные элементы преобразуются обратно по отношению к сильно-связным вертексам  $\Gamma$  и подобно слабо-связным функциям  $G$

Теперь можно, следуя Бланку (1957а), сделать следующий шаг и перейти к квадратам матричных элементов, т. е. к вероятностям переходов, пропорциональных квадратам матричных элементов

$$W \sim |M|^2.$$

Для вероятностей переходов можно записать формулы преобразований, подобные (25), а также соответствующие функциональные и дифференциальные уравнения.

При переходе к таким уравнениям следует иметь в виду, что в матричных элементах и вероятностях перехода часть инвариантных импульсных аргументов находится на массовой поверхности и тем самым фиксирована. Поэтому, как отмечалось в § 49.4, при исследовании ультрафиолетовых асимптотик матричных элементов (т. е. несимметричных асимптотик функций Грина) возникают определенные трудности.

Это, однако, не относится к случаю инфракрасных особенностей, где удастся эффективно использовать уравнения ренормализационной группы. Основным инструментом являются дифференциальные уравнения типа (48.20) и их квадратуры вида (23), записанные для квадратов матричных элементов.

Квадратуры типа (23) приводят эффективно к тому, что нормированную радиационную поправку к  $W$  необходимо «ставить в экспоненту»,

$$W = W_0(1 + \alpha W_1 + \dots) \rightarrow W_0 e^{\alpha W_1}, \quad (26)$$

подобно тому, как это имеет место при переходе от формул теории возмущений (23) для электронной функции Грина к результату интегрирования (24) группового дифференциального уравнения.

Как известно (см. также § 35.4), в обычной теории возмущений для устранения инфракрасной катастрофы помимо основного процесса рассматривают также процесс с излучением одного дополнительного мягкого фотона, энергия которого не превышает  $E_{\max}$ . При этом зависимость суммарной вероятности от  $E_{\max}$  оказывается сингулярной ( $\sim \ln E_{\max}$ ). Для получения физически правильного результата следует просуммировать бесконечный ряд диаграмм, описывающих излучение различного числа длинноволновых фотонов. При использовании техники ренормализационной группы задача сильно упрощается. Вклад  $W_1$  от процесса с одним мягким квантом, пропорциональный  $\ln E_{\max}$ , в результате (26) оказывается в показателе экспоненты. Полученное выражение эквивалентно бесконечной сумме по различному числу мягких фотонов и обладает правильным пределом (обращается в нуль) при  $E_{\max} \rightarrow 0$ .

Детальные вычисления для процесса рассеяния электрона во внешнем поле были проведены Бланком (19576).

## § 51. Модели сильных взаимодействий

Мы переходим теперь к изучению ультрафиолетовых асимптотических моделей сильных взаимодействий. Сначала подробно рассмотрим однозарядную модель псевдоскалярного поля с четверным самодействием, введенную в § 36.2. Несмотря на простоту, эта модель дает исчерпывающую иллюстрацию к однозарядной ренормализационной группе.

51.1. Главное логарифмическое приближение модели  $\phi^4$ . Лагранжиан модели возьмем в виде (47.2), несколько изменив нормировку константы связи

$$\mathcal{L} = \frac{4\pi^2}{3} h \phi^4. \quad (1)$$

Инвариантный заряд  $\bar{h}$  содержит произведение симметричного 4-вертекса  $\square$  на квадрат обезразмеренного мезонного пропагатора

$$\dot{h}(x, h) = h \square(x, h) d^2(x, h). \quad (2)$$

Ввиду того, что первая поправка к  $d$  имеет второй порядок по  $h$ , первые логарифмические вклады в  $\bar{h}$  идут из  $\square$ .

Получаем согласно (36.34)

$$\square(x, h) \simeq 1 - 3hl, \quad l = \ln x \quad (3)$$

и, следовательно,

$$\bar{h}(x, h) \simeq h - 3h^2 l, \quad \beta(h) = -3h^2.$$

Дифференциальное уравнение (49.16) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{h}(x, h)}{\partial l} = -3\bar{h}^2(x, h).$$

Таким образом, инвариантный заряд  $\bar{h}$  имеет отрицательную производную и убывает от начальных положительных значений  $h > 0$ :

$$h(x, h) = \frac{h}{1 + 3hl} \rightarrow 0. \quad (4)$$

Мы приходим к случаю г) по классификации § 49.2. Модель (1) при  $h > 0$  оказывается асимптотически свободной.

Представляет интерес определить асимптотику пропагатора в этом случае. Вычисляя асимптотику выражения (36.27), соответствующего диаграмме типа «греческий орех», изображенной на рис. 50, получаем

$$d(x, h) = 1 + \frac{h^2}{3} l. \quad (5)$$

Асимптотика функции  $d$  может быть теперь определена по общему рецепту (49.31). Определяя из (5) соответствующую функцию

$$\gamma_d(h) = \frac{h^2}{3}, \quad (6)$$

получаем

$$\ln d(x, h) = \int_h^{\bar{h}} \frac{\gamma_d(h')}{\beta(h')} dh' = \frac{\bar{h} - h}{9},$$

т. е.

$$d(x, h) = \exp\left(\frac{h^2 l/3}{1 + 3hl}\right) = x^{\frac{h^2}{3(1 + 3hl)}}. \quad (7)$$

Таким образом, пропагатор  $d$  асимптотически стремится к свободному выражению  $d(\infty, h) \doteq \text{const}$ . Это свойство является характерным для случая асимптотической свободы: асимптотики отдельных функций Грина с логарифмической точностью стремятся к свободным выражениям.

Свойства полученных результатов (4), (6) существенно основаны на положительности константы связи  $h$ .

В случае  $h < 0$  картина меняется кардинальным образом. Для обсуждения этого случая удобно ввести новое обозначение  $g = -h$ .

Итак, вместо (1) рассмотрим модель

$$\mathcal{L} = -\frac{4\pi^2}{3} g\varphi^4, \quad g > 0 \quad (1')$$

(такой знак константы связи соответствует положительно-определенному гамильтониану, обладающему нижним состоянием).

Для вновь определенного инвариантного заряда

$$\bar{g}(x, g) = g \square_s d^2 = -\bar{h}(x, -g)$$

получаем вместо (4)

$$\bar{g}(x, g) = \frac{g}{1 - 3gl} \quad (8)$$

— случай *в*) по классификации § 49.2. Ввиду этого в правой части дифференциального уравнения

$$\partial \bar{g} / \partial l = \beta(\bar{g})$$

становятся существенными следующие, высшие члены, и приближение главных логарифмов  $\beta(g) = 3g^2$  оказывается недостаточным.

**51.2 Двухпетлевое приближение.** Для определения следующих вкладов в бета-функцию, пропорциональных  $g^3$ , нужно вычислить ультрафиолетовые логарифмические вклады в  $\bar{g}$  порядка  $g^3$  (т. е. члены  $\sim g^2$  в  $\square_s$  и  $d$ ). Для скалярного пропагатора получаем из (5)

$$d(x, -g) = 1 + \frac{g^2}{3} l, \quad (9)$$

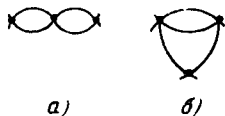


Рис. 64. Вклады 3-го порядка в вершинную функцию.

а для определения соответствующих вкладов в симметричную 4-вершину следует вычислить вклады диаграмм 3-го порядка, изображенных на рис. 64.

Диаграммы рис. 64, *а*, представляющие итерации однопетлевой диаграммы «рыба», дают вклад, пропорциональный квадрату логарифма  $3g^2 l$ , а двухпетлевые диаграммы рис. 64, *б* — вклад  $6g^2(l^2 - 2l)$ , содержащие младший логарифм. Имеем

$$\square \simeq 1 + 3gl + 9g^2 l^2 - 12g^2 l.$$

С учетом (9) получаем

$$\bar{g}(x, g) \simeq g + 3g^2 l + 9g^3 l^2 - (34/3)g^3 l.$$

Таким образом бета-функция 2-петлевого приближения оказывается равной

$$\beta(g) = 3g^2 - (34/3)g^3. \quad (10)$$

Это выражение является весьма примечательным. Оно линейно обращается в нуль в точке

$$g = g_* = 9/34, \quad (11)$$

вследствии чего интеграл в левой части квадратуры

$$\int_{g_*}^{\bar{g}} \frac{dg'}{\beta(g')} = l \quad (12)$$

неограниченно растет при стремлении  $\bar{g}$  к  $g_*$ . Величина  $g_*$  является ультрафиолетовым пределом инвариантного заряда:

$$\bar{g}(\infty, g) = g_* \quad (13)$$

Мы получили случай *a*) по классификации § 49.2. Уравнение Ли может быть проинтегрировано в квадратурах, что дает

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{g_*} + \frac{1}{g_*} \ln \left( \frac{\bar{g} g_* - g}{g g_* - \bar{g}} \right) = 3l \quad (14)$$

— трансцендентное уравнение для  $\bar{g}$ . Его можно переписать в форме

$$\bar{g}(x, g) = g \left[ 1 - 3gL + \frac{g}{g_*} \ln \left( \frac{\bar{g} g_* - g}{g g_* - \bar{g}} \right) \right]^{-1},$$

удобной для решения методом итераций при малом  $g$ . Первая итерация дает формулу вида (50.14), разлагая которую в свою очередь по  $g$  можно получить выражение, полностью соответствующее исходному 2-петлевому приближению для  $\bar{g}$ .

Однако для анализа поведения  $\bar{g}$  при  $l \rightarrow \infty$  удобнее исходить непосредственно из квадратуры (12), в которой следует сделать приближение

$$\beta_2(g) \simeq (27/34)(g_* - g).$$

Получаем этим путем

$$\bar{g}(x, g) \simeq g_* - cx^{-27/34}. \quad (15)$$

Таким образом  $\bar{g}$  стремится к своему предельному значению степенным образом, причем показатель степени не сильно отличается от единицы. Выход в окрестность  $g_*$  происходит быстро.

Обратимся к асимптотике пропагатора. Подставляя (6) и (10) в формулу (49.31), находим после небольших вычислений

$$d(x, g) \simeq x^v, \quad v = 27/(34)^2 \simeq 0,023. \quad (16)$$

Таким образом в соответствии с (49.33) пропагатор имеет степенную асимптотику. Показатель аномальной размерности мал по сравнению с единицей.

**51.3. Надежность результатов. Высшие приближения.** Для завершения анализа 2-петлевого приближения заметим следующее. Как мы убедились, учет второго члена в бета-функции кардинально изменил физическую картину. Вместо внутренне противоречивого случая 49.2*в*) мы получили случай 49.2*а*), соответствующий конечной перенормировке константы связи. Таким образом результат однопетлевого приближения оказался неустойчивым. Возникает естественный вопрос об устойчивости второго, только что рассмотренного приближения. Качественный ответ может быть получен внутри самого 2-петлевого приближения. С этой целью,

приняв во внимание, что выражение (10) для  $\beta$  получено с помощью теории возмущений, произведем переразложение

$$\frac{1}{\beta(g)} \simeq \frac{1}{3g^2} + \frac{34}{27} \frac{1}{g}$$

в левой части уравнения (12), что приводит нас к случаю 49.2 б). На этом основании можно сделать вывод о качественной ненадежности результатов 2-петлевого приближения.

Этот вывод получает количественное подтверждение прямыми вычислениями высших приближений. Такие вычисления были проведены в 3- и 4-петлевых приближениях в трех различных схемах перенормировки. Отсылая любопытствующего читателя за подробностями и литературными ссылками к обзору Владимира и Ширкова (1979), мы приведем здесь лишь 5-петлевой результат для бета-функции эффективного заряда

$$\begin{aligned} \beta_{MS}(g) = & 3g^2 - (34/3)g^3 + [(145/2) + 48\zeta(3)]g^4 - \\ & - (3499/6 + 624\zeta(3) - 144\zeta(4) + 960\zeta(5))g^5 + \\ & + [767271/144 + 7965\zeta(3) - 2354\zeta(4) + 16392\zeta(5) - \\ & - 6168\zeta(6) + 21168\zeta(7) + 720\zeta^2(3)]g^6, \quad (17) \end{aligned}$$

полученный недавно в работах Горишнего и др. (1983) и Казакова (1983) в схеме размерной перенормировки.

Это выражение, имеющее аналитический вид, является своеобразным вычислительным рекордом в квантовой теории поля. В целях удобства качественного обсуждения его полезно приближенно представить в виде

$$\beta_{MS}(g) \simeq 3g^2 - 11,33g^3 + 130,2g^4 - 2173g^5 + 45984g^6,$$

а также

$$\beta_{MS}(g) \simeq 3g^2 \left[ 1 - \left( \frac{g}{0,265} \right) + \left( \frac{g}{0,152} \right)^2 - \left( \frac{g}{0,111} \right)^3 + \left( \frac{g}{0,090} \right)^4 \right]. \quad (18)$$

Из последнего выражения ясно видно, что в области значений  $g$  вблизи нуля (11) бета-функции 2-петлевого приближения следующие поправки не только не малы, но велики по сравнению с единицей. Из формулы (18) следует также, что численные коэффициенты в ряду для бета-функции растут быстрее, чем степенным образом, что ставит на повестку дня вопрос о сходимости ряда квантовополевой теории возмущений.

Не вдаваясь в детали этого сложного вопроса, отметим, что, как было установлено Липатовым (1977) с помощью метода функционального перевала (см также обзор Казакова и Ширкова (1980)), подобные ряды имеют асимптотический, в смысле Пуанкаре, характер и могут служить источником количественной информации лишь при достаточно малых значениях параметра разложения.



Итог нашего обсуждения можно сформулировать следующим образом. В случае, когда бета-функция положительна в однопетлевом приближении, с ростом  $\ln x$  имеет место выход  $\bar{g}$  из области слабой связи и, вообще говоря, никаких устойчивых результатов, основываясь лишь на конечном числе членов теории возмущений, получить не удастся. В противном случае, когда первый коэффициент  $\beta_1$  отрицателен,  $\bar{g}$  убывает с ростом  $x$ , и в ультрафиолетовом пределе

$$\bar{g}(x, g) \simeq \frac{1}{b_1 \ln x} \rightarrow 0, \quad b_1 = -\beta_1 > 0 \quad (19)$$

мы получаем асимптотически свободную теорию. Эта возможность реализуется в моделях, содержащих поля Янга — Миллса.

**51.4. Квантовая хромодинамика** представляет собою квантово-полевую модель, состоящую из набора небольшого числа комплексных фермионных полей  $\psi_q, \bar{\psi}_q$  ( $q = 1, 2, \dots, l$ ), отвечающих кваркам и взаимодействующих минимальным образом с неабелевым полем  $B_n$  калибровочной группы  $SU(3)$ -преобразований внутренней симметрии в пространстве цветовых переменных (введенных Боголюбовым, Струминским, Тавхелидзе (1965), а также Ханом и Намбу (1965)). Поле  $B$  преобразуется по присоединенному представлению группы  $SU(3)$ , т. е. представлению, которое описывается бесшпуровой матрицей  $3 \times 3$ , а его квантами являются восемь безмассовых глюонов. Кварковые поля  $\psi, \bar{\psi}$  реализуют фундаментальное представление (представление — столбец) и являются трехкомпонентными.

Классический лагранжиан рассматриваемой системы имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{mn} F^{mn} + \sum_q \bar{\psi}_q (iD_n(B) \gamma^n - m_q) \psi_q. \quad (20)$$

Матричный тензор  $F_{mn}$  и ковариантная производная  $D_n$  определяются через  $B_m$  и его первые производные формулами § 8.3, в которые входит параметр  $g$  — константа связи кварков и глюонов, являющаяся одновременно константой самодействия глюонов.

Опуская детали квантования и техники диаграмм Фейнмана (см. по этому поводу книгу Славнова, Фаддеева (1978), а также §§ 11, 19 и Дополнение VIII в учебнике Боголюбова и Ширкова (1980)), приведем результаты расчетов для случая поперечной калибровки векторного поля  $B$ , когда теория возмущений содержит единственный параметр разложения

$$\frac{g^2}{4\pi} = \alpha_s$$

и ренормализационная группа квантовой хромодинамики оказывается однозарядной. Трехпетлевое приближение для бета-функции

эффективного заряда

$$\beta_{MS}(\alpha_s) = -b_1\alpha_s^2 - b_2\alpha_s^3 - b_3\alpha_s^4, \quad (21)$$

$$b_1(f) = \frac{11 - (2/3)f}{4\pi}, \quad b_2(f) = \frac{102 - (38/3)f}{(4\pi)^2}, \quad (22)$$

$$b_3(f) = \frac{1}{(4\pi)^3} \left[ \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}f + \frac{325}{54}f^2 \right]$$

было получено Тарасовым и др. (1980) в схеме минимальных вычитаний. Как видно, при небольшом числе кварков ( $f < 6$ ) все три коэффициента отрицательны. Эффективный заряд  $\bar{\alpha}_s$  является убывающей функцией  $\ln x$ .

Рассмотрим сначала формулу однопетлевого приближения

$$\bar{\alpha}_s^{(1)}(x, \alpha_s) = \frac{\alpha_s}{1 + \alpha_s b_1 \ln x}, \quad (23)$$

вид которой можно упростить, введя вместо параметра связи  $\alpha_s$  и  $\mu$  размерную величину

$$\Lambda = \mu \exp(-1/2b_1\alpha_s),$$

что дает

$$\bar{\alpha}_s^{(1)}(L) = \frac{1}{b_1 L}, \quad L = \ln x + \ln(\mu^2/\Lambda^2) = \ln(Q^2/\Lambda^2).$$

Таким образом  $\bar{\alpha}_s^{(1)}$  удается параметризовать единственным параметром  $\Lambda$  — *параметром шкалы*. Формально величина  $\Lambda^2$  отвечает значению  $Q^2$ , при котором  $\bar{\alpha}_s^{(1)}$  обращается в бесконечность.

Возникновение размерного параметра, заменяющего безразмерную константу связи, параметра, аналог которого отсутствует в классическом лагранжиане, называют размерной трансмутацией.

Формулу 2-петлевого приближения

$$\bar{\alpha}_s^{(2)} = \frac{\alpha_s}{1 + \alpha_s b_1 \ln x + \alpha_s (b_2/b_1) \ln(1 + \alpha_s b_1 \ln x)} \quad (24)$$

также можно параметризовать с помощью  $\Lambda$ . Получаем приближенно

$$\bar{\alpha}_s^{(2)}(L) \simeq \frac{1}{b_1 L} - \frac{b_2 \ln L}{b_1^2 L^2}. \quad (25)$$

Отметим, что формулы (23)–(25), в силу отмеченного выше в § 48.5 свойства схемной инвариантности 2-петлевой бета-функции имеют место не только для эффективного, но также и для инвариантного заряда в ультрафиолетовом пределе. Формула (25) является наиболее популярной в современной литературе. Параметр  $\Lambda$  в схеме «MS» примерно равен 0,2–0,4 ГэВ, что соответствует значениям  $\bar{\alpha}_s \simeq 0,2$  при  $10 \text{ ГэВ}^2 < Q^2 < 100 \text{ ГэВ}^2$ .

**51.5. Анализ двухзарядной модели.** В заключение рассмотрим двухзарядную пион-нуклонную модель

$$\mathcal{L} = g\bar{\Psi}\gamma^5\Psi\phi + h\phi^4. \quad (36.44)$$

С современной точки зрения она не представляет физического интереса и мы приведем результаты ее ультрафиолетового анализа в однопетлевом приближении из чисто методических соображений. Исторически она была первой двухзарядной моделью, для которой была записана и качественно проанализирована система дифференциальных уравнений Ли однопетлевого приближения

$$\frac{\partial \bar{g}^2}{\partial l} = a_1 (\bar{g}^2)^2, \quad l = \ln x, \quad (26a)$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial l} = b_1 (\bar{g}^2)^2 + b_2 \bar{g}^2 \bar{h} - b_3 \bar{h}^2 \quad (26b)$$

(см Ширков (1955)).

Как отмечалось в § 49.2, эту систему удобно исследовать методами качественной теории дифференциальных уравнений. Для этого нужно знать положительные однопетлевые коэффициенты  $a_1$ ,  $b_k$ , численные значения которых приведены ниже в таблице III.

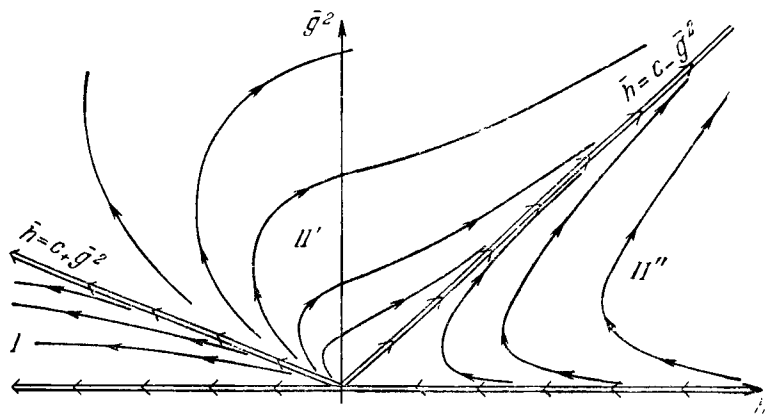


Рис. 65.

Результаты этого исследования (Гинзбург (1956)) удобно представить на фазовой плоскости переменных  $\bar{g}^2$  и  $\bar{h}$  (рис. 65). На этом рисунке изображены интегральные кривые  $\bar{h}(\bar{g}^2)$  в полуплоскости  $\bar{g}^2 \geq 0$ . Импульсная переменная  $l = \ln x$  является параметром, возрастающим вдоль кривых, в направлениях, указанных стрелками. Каждой паре значений констант связи  $\bar{h}$  и  $\bar{g}^2 \geq 0$  соответствует одна интегральная кривая, такая, что  $\bar{h}(\bar{g}^2) = \bar{h}$ . Исключение составляет начало координат  $\bar{h} = 0, \bar{g}^2 = 0$ , через которое проходит бесконечное множество интегральных кривых. Эта точка является особой. Переход от одной точки  $\bar{g}_1^2, \bar{h}_1$  данной интегральной кривой к другой точке  $\bar{g}_2^2, \bar{h}_2$  есть переход от одного значения

параметра  $l$  к другому или переход от одной пары констант связи  $g_1^2, h_1$  к другой  $g_2^2, h_2$  при преобразованиях (47.13).

Система обладает тремя особыми решениями:

$$\dot{h} = c_+ \bar{g}^2, \quad \dot{h} = c_- \bar{g}^2, \quad \dot{g}^2 = 0, \quad (27)$$

где

$$c_{\pm} = \frac{a_1 - b_2 \pm \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + 4b_1 b_3}}{-2b_3}.$$

Решения  $h = c_+ \bar{g}^2$  и  $\dot{g}^2 = 0, \dot{h} > 0$  являются неустойчивыми, а решения  $\dot{h} = c_- \bar{g}^2$  и  $\dot{g}^2 = 0, \dot{h} < 0$  — устойчивыми особыми решениями. Линия, соответствующая неустойчивому особому решению  $\dot{h} = c_+ \bar{g}^2$ , является границей раздела между областями I и II = II' + II'' фазовой плоскости. В области II ( $\dot{h} > c_+ \bar{g}^2$ ) все решения стремятся к устойчивому особому решению  $\dot{h} = c_- \bar{g}^2$ , которое поэтому является асимптотическим для этой области. В области слева от границы раздела при  $\dot{h} < c_+ \bar{g}^2$  решения асимптотически уходят в окрестность особого решения  $\bar{g}^2 = 0$ , т. е. в область  $\bar{g}^2 < |\dot{h}|$ .

Таким образом, для установления ультрафиолетовых асимптотик достаточно проанализировать два устойчивых решения.

а) *Особое решение  $\dot{h} = c_- \bar{g}^2$ .* Решая уравнения (26а), находим

$$\bar{g}^2(l) = \frac{g^2}{1 - a_1 g^2 l}, \quad \dot{h} = c_- \bar{g}^2. \quad (28)$$

Здесь определяющим является инвариантный заряд  $\bar{g}^2$ , по которому происходит выход за рамки слабой связи. В асимптотических расчетах эффективно можно полагать

$$\dot{h}_{\text{эфф}} = c_- g^2. \quad (29)$$

Решая уравнения (49.29) для функций Грина и вершинных функций, находим соответствующие симметричные асимптотики:

$$\begin{aligned} s(x, g^2, \dot{h}) &= \left(\frac{g^2}{\bar{g}^2}\right)^{\alpha_s}, & \Gamma(x, g^2, \dot{h}) &= \left(\frac{g^2}{\bar{g}^2}\right)^{\alpha_\Gamma}, \\ d(x, g^2, \dot{h}) &= \left(\frac{g^2}{\bar{g}^2}\right)^{\alpha_d}, & \square(x, g^2, \dot{h}) &= \left(\frac{g^2}{\bar{g}^2}\right)^{\alpha_\square}. \end{aligned} \quad (30)$$

Числовые значения параметров  $\alpha_i, \alpha_k, b_i, c_{\pm}$  для нейтрального и изотопически симметричного вариантов пион-нуклонного взаимодействия приведены в таблице III.

б) *Особое решение  $\bar{g}^2 = 0, \dot{h} < 0$ .* В этом случае следует решать уравнение (26б) при  $\bar{g}^2 = 0$ . Такое уравнение было нами изучено в § 51.1. Решение имеет вид

$$\dot{h}(l) = \frac{h}{1 + b_3 h l} \quad (h < 0), \quad \dot{g}^2 = 0. \quad (31)$$

Таблица III

Теория	$16\pi^2 a_1$	$16\pi^2 a_2$	$16\pi^2 b_1$	$16\pi^2 b_2$	$16\pi^2 b_3$	$\alpha_s$
Нейтральная	5	3	4	4	9	-0,1
Симметричная заряженная	5	5	8	8	11	-0,3
Теория	$\alpha_d$	$\alpha_\Gamma$	$\alpha_\square$	$c_-$	$c_+$	
Нейтральная	-0,4	-0,2	-0,2	$\frac{\sqrt{145}-1}{18}$	$-\frac{1+\sqrt{145}}{18}$	
Симметричная заряженная	-0,8	+0,2	+0,6	1	-8/11	

Здесь происходит выход за рамки слабой связи за счет роста  $\bar{h}$ . Для того, чтобы исследовать окрестность особого решения, в уравнении для  $\bar{g}^2$  следует учесть член, содержащий  $\bar{g}^2 \bar{h}^2$  (который не был учтен в (26а)) и опустить член  $\bar{g}^4$ :

$$\frac{\partial \bar{g}^2}{\partial l} = a_2 \bar{g}^2 \bar{h}^2, \quad a_2 > 0.$$

Решение этого уравнения, в котором  $\bar{h}$  определено по (31), имеет вид

$$\bar{g}^2(l) = g^2 \exp \left\{ \frac{a_2}{b_3} (h - \bar{h}) \right\} = g^2 x^{\frac{a_2 h^2}{b_3 h \ln x}} \simeq g^2. \quad (32)$$

В этом случае также

$$s(x) \sim \Gamma(x) \sim 1, \quad d(x) \sim \bar{g}^2/g^2, \quad \square(x) \sim \bar{h}/h. \quad (33)$$

Таким образом, как в области I, так и в области II при достаточно больших значениях аргумента  $l = \ln x$  происходит выход за рамки слабой связи, независимо от степени малости начальных значений  $g^2$  и  $h$ .

Отметим, что при  $h > 0$  для особого решения  $\bar{g}^2 = 0$  выход за рамки слабой связи не происходит. Однако это решение, соответствующее полному отсутствию юкавского взаимодействия в лагранжиане (36.44), неустойчиво и при сколь угодно малом  $g^2 > 0$  интегральные кривые уходят на асимптотику  $\bar{h} = c \cdot \bar{g}^2$ .

Итак, мы установили, что двухзарядовая модель (36.44) пион-нуклонных взаимодействий (так же как и спинорная электродинамика) приводит к выходу за рамки слабой связи, т. е. к ситуации эквивалентной положительности функции  $\beta$  в однозарядных моделях. Формально в нижнем приближении мы получили выражения для  $\bar{g}^2$  и  $\bar{h}$ , содержащие призрачные полюса. Однако на основании опыта, извлеченного из анализа модели  $\phi^4$ , мы можем сказать, что

для реального выбора между возможностями а), б) и в) (§ 49.2) у нас нет достаточных оснований. Достаточно убедительные аргументы такого сорта не могут быть получены на основе данных теории возмущений.

Качественно важным результатом здесь представляется то обстоятельство, что «нуль-зарядные» свойства взаимодействия юкавского типа (проявляющиеся и в электродинамике) не могут быть исправлены добавлением 4-скалярного взаимодействия независимо от его знака. Эта ситуация является типичной для широкого класса юкавских и 4-скалярных моделей, употребительных при феноменологическом описании адронных взаимодействий.

Таким образом, общий, довольно неутешительный вывод для всех таких моделей состоит в неизбежности выхода за рамки слабой связи и в принципиальной недостаточности теории возмущений для качественного анализа ультрафиолетовых асимптотик.

**51.6. Симметричные асимптотики высших функций Грина.** Как было показано в § 37.1, слабо-связные многочастичные функции Грина с  $b$  мезонными и  $2f$  фермионными внешними линиями могут быть определены на основе хронологических произведений типа (37.1)

$$G_{b, 2f}(x_1, \dots, x_b; y_1, \dots, y_f, z_1, \dots, z_f) \sim \\ \sim \langle T \Phi_1(x_1) \dots \Phi_b(x_b) \psi_1(y_1) \dots \psi_f(y_f) \bar{\psi}_1(z_1) \dots \bar{\psi}_f(z_f) S \rangle_0.$$

Соответственно сильно-связные (т. е. вершинные) многочастичные функции были там введены с помощью соответствующих вариационных производных (37.37).

Функции Грина  $G_{b, 2f}$  содержат собственно-энергетические вставки во внешних линиях. Мы рассмотрим сейчас симметричные ультрафиолетовые асимптотики, когда все инвариантные импульсные аргументы обезразмеренной функции  $G$  являются большими величинами одного порядка

$$|k_i k_j| \sim k^2, \quad k^2 \gg m^2. \quad (35)$$

Этот случай не имеет непосредственного отношения к реальным физическим процессам (в которых  $k_i^2 = m_i^2$ ). Однако, изучая его, мы выясняем характер взаимодействия «на малых расстояниях».

Относительная простота рассмотрения высших функций Грина обуславливается тем, что эти функции не содержат собственных расходимостей и перенормируются факторами  $z_2$  и  $z_3$ , перенормирующими одночастичные функции Грина:

$$G_{b, 2f} \rightarrow z_2^b z_3^{\frac{b}{2}} G_{b, 2f}. \quad (36)$$

Используя для определения  $z_2$  и  $z_3$  соотношения типа (47.26), получаем

$$G_{b, 2f}(x, g^2, h) = s^{-l}(x, g^2, h) d^{-\frac{b}{2}}(x, g^2, h) G_{b, 2f}(1, g^2(x), h(x)). \quad (37)$$

Замстим, что и симметричные асимптотики основных функции и  $\square$  также могут быть представлены в виде (37):

$$\Gamma(x) = s^{-1}(x) d^{-1/2}(x) \left[ \frac{\bar{g}^2(x)}{g^2} \right]^{1/2}, \quad \square(x) = d^{-2}(x) \frac{h(x)}{h}.$$

Соотношения (38) являются прямыми следствиями определений вариантных констант связи  $\bar{g}^2$  и  $\bar{h}$ .

В области слабой связи для решения (30) получаем из (37)

$$G_{b, 2f}(x) = \left( \frac{\bar{g}(x)}{g} \right)^{2\alpha_s l + \alpha_d b},$$

- а также

$$\Gamma(x) = \left( \frac{\bar{g}(x)}{g} \right)^{1 + \alpha_d + 2\alpha_s}, \quad \square(x) = \left( \frac{\bar{g}(x)}{g} \right)^{1 + 2\alpha_d}.$$

## ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

§ 52. Основные свойства  $S$ -матрицы в локальной теории поля

**52.1. Введение.** В этой главе мы изложим основы еще одного метода, не опирающегося на разложения по степеням интенсивности взаимодействия, т. е. на теорию возмущений.

Как уже отмечалось, метод теории возмущений оказывается совершенно непригодным для описания так называемых сильных взаимодействий (т. е. взаимодействий мезонов и барионов) из-за больших значений соответствующих констант связи. Как теперь известно, например, перенормированная константа связи псевдоскалярного взаимодействия пионов и нуклонов (8.8) является величиной большей единицы. Соответствующий безразмерный параметр разложения, аналогичный постоянной тонкой структуре  $\alpha$ , оказывается равным (см. ниже § 57.5)

$$\frac{g^2}{4\pi} \simeq 14,7.$$

Вследствие этого простейшие фейнмановские диаграммы, соответствующие низшим степеням в разложениях по параметру  $g^2$ , не дают даже качественного согласия с экспериментом.

Метод дисперсионных соотношений, которому посвящена эта глава, предложенный Гелл-Манном, Голдбергером, Тиррингом (1954) и строго обоснованный в квантовой теории поля Боголюбовым (1956), сыграл важную роль в развитии теории сильных взаимодействий. В течение двадцатилетия, предшествовавшего появлению квантовой хромодинамики, он являлся основным методом исследования в этой области. Помимо большого числа строгих результатов он вошел органической составной частью в разнообразные эвристические схемы полуженомонологического характера, а также явился исходным пунктом для ряда приближенных методов исследования динамики сильных взаимодействий, основанных на строго установленных или постулированных (как, например, двойное спектральное представление Манделстама (1958)) аналитических свойствах матричных элементов.

Ниже мы дадим сжатое, но достаточно полное и строгое изложение принципиальных основ метода и его главных приложений, базирующееся на общих физических принципах квантовой теории поля, таких как причинность, инвариантность, унитарность, т. е.



на принципах, лежащих в основе современной *аксиоматической формулировки* квантовой теории поля.

*Математической основой дисперсионных соотношений является интегральная формула Коши.* Как известно, эта формула позволяет представить аналитическую функцию  $f$  от комплексной переменной  $z$  через интеграл по замкнутому контуру  $\Gamma$ , ограничивающему область  $G$ , внутри которой  $f(z)$  аналитична. Согласно этой формуле

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \begin{cases} f(z), & \text{если } z \text{ лежит внутри } \Gamma, \\ 0, & \text{если } z \text{ лежит вне } \Gamma. \end{cases} \quad (1a)$$

$$(1b)$$

В промежуточном случае, когда точка  $z$  лежит на контуре интегрирования, рассмотрение интеграла Коши в смысле главного значения приводит к формуле \*)

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz'. \quad (2)$$

Рассматривая по отдельности действительную и мнимую части уравнения (2), приходим к соотношениям между  $\operatorname{Re} f$  и  $\operatorname{Im} f$ . Дисперсионные соотношения как раз и представляют собой соотношения подобного типа между действительной и мнимой частями матричных элементов матрицы рассеяния.

Поэтому ясно, что для установления дисперсионных соотношений весьма важным является *исследование свойств аналитичности* матричных элементов. С этой целью обычно рассматривается аналитическая природа матричных элементов рассеяния как функций энергии и возможность их аналитического продолжения на верхнюю полуплоскость.

Обратимся к случаю, когда в результате такого аналитического продолжения мы получим функцию  $g(E)$ , которая при  $|E| \rightarrow \infty$  на верхней полуплоскости убывает не медленнее, чем  $\operatorname{const} \cdot |E|^{-1}$ , т. е.

$$|g(E)| \leq \frac{A}{|E|} \quad \text{при } |E| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Составляя тогда контур интегрирования в (2) из действительной оси и дуги верхней полуокружности бесконечно большого радиуса, мы сможем отбросить интеграл по полуокружности и получим формулу вида

$$g(E) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(E')}{E' - E} dE'.$$

\*) Эта формула может быть получена из (1a) с помощью символического тождества (Г2А.6).

Беря действительную часть, приходим к соотношению между действительной и мнимой частями функции  $g$

$$\operatorname{Re} g(E) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} g(E')}{E' - E} dE'. \quad (4)$$

Следует отметить, что для физических приложений условие (3) оказывается несколько узким. Нетрудно, однако, распространить приведенные рассуждения и на случай функций  $g(E)$ , полиномиально возрастающих при больших  $|E|$ . Пусть, например,  $g(E)$  обладает на бесконечности полюсом  $n$ -го порядка, т. е.

$$g(E) \leq A |E|^n \quad \text{при} \quad |E| \rightarrow \infty.$$

Тогда величина

$$\tilde{g}(E) = \frac{g(E)}{(E - E_0)^{n+1}}$$

будет аналитической функцией в верхней полуплоскости, удовлетворяющей условию (3) для любых  $E_0$ , обладающих отрицательной мнимой частью. Подставляя  $\tilde{g}$  в (2), где контур  $\Gamma$  выбран как и ранее в (4), получим после перехода к пределу \*) при  $\operatorname{Im} E_0 \rightarrow 0$  соотношение, действительная часть которого имеет вид

$$\operatorname{Re} g(E) = \frac{(E - E_0)^{n+1}}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} g(E') dE'}{(E' - E)(E' - E_0)^{n+1}} + \\ + \operatorname{Re} g(E_0) + \dots + \frac{\operatorname{Re} g^{(n)}(E_0)}{n!} (E - E_0)^n \quad (-\infty < E, E_0 < \infty). \quad (5)$$

Соотношением такого типа является, например, полученное еще в 20-х годах Кронигом (1926) и Крамерсом (1927) дисперсионное соотношение в области классической электродинамики между вещественной и мнимой частями показателя преломления \*\*)

$$\operatorname{Re} [n(\omega) - n(0)] = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \operatorname{Im} n(\omega')}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)} d\omega'.$$

Соотношения типа (5) именуется дисперсионными, чтобы отметить преемственность с формулой Крамерса — Кронига.

\*) Этот предельный переход может быть выполнен с помощью формулы

$$\frac{1}{(E' - E + i\epsilon)^{n+1}} = \mathcal{P} \frac{1}{(E' - E)^{n+1}} - \frac{i\pi (-1)^n}{n!} \delta^{(n)}(E' - E),$$

получающейся из (П2А.6)  $n$ -кратным дифференцированием.

\*\*) Формула Крамерса — Кронига получается из (5) при

$$n=0, \quad E_0=0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} g(E') = -\operatorname{Im} g(-E').$$

Подчеркнем, что возможность аналитического продолжения на верхнюю полуплоскость энергетической переменной, а следовательно, и получения самих формул типа (4), обусловлена *соображениями причинности*, которые *представляют собой физическую основу дисперсионных соотношений*.

Чтобы пояснить указанную связь, предположим, несколько упростив реальное положение вещей, что

$$f(E) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{iEt} dt, \quad (6)$$

причем в силу «условия причинности» функция  $F$ , зависящая от времени  $t$ , обладает свойством

$$F(t) = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

При переходе на верхнюю полуплоскость, когда к  $E$  добавляется  $+i|\operatorname{Im} E|$ , а к интегралу (6) — множитель  $\exp(-t|\operatorname{Im} E|)$ , этот множитель будет играть роль обрезывающего фактора, обеспечивающего сходимость интеграла, поскольку при  $t < 0$ , когда  $\exp(-t|\operatorname{Im} E|)$  возрастает, функция  $F(t)$  вследствие условия причинности равна нулю.

Можно показать также, что если  $F(t)$  будет даже сингулярной функцией, но лишь бы интегрируемой в смысле определения § 19, интеграл (6) будет сходиться и определит функцию без существенных особенностей на бесконечности.

Иное положение будет иметь место, когда  $F(t)$  обращается в нуль лишь при  $t < -a$ , где  $a$  — некоторая «элементарная длина». Тогда, заменив под интегралом в (6)  $t$  на  $t - a$ , найдем, что

$$f(E) = e^{-iaE} f_1(E),$$

причем у функции  $f_1(E)$  на бесконечности не будет существенной особенности (ею будет обладать множитель  $\exp(-iaE)$ ). Поэтому, чтобы в данном случае получить функцию, для которой выполняется дисперсионное соотношение, необходимо умножить  $F(E)$  на  $\exp iaE$  с  $\alpha \geq a$ .

Разумеется, в действительности положение значительно более сложно, хотя бы потому, что в выражениях, которые заменят (6), будет большее число переменных интегрирования. Тем не менее, несмотря на необходимость существенного технического усовершенствования приведенного рассуждения, основа его сохранится неизменной.

**52.2. Общие свойства матрицы рассеяния.** Приступим теперь к формулировке в явном виде основных физических положений квантовой теории поля, необходимых для установления дисперсионных соотношений.

В этой монографии при построении разложений для матрицы рассеяния (глава IV) мы уже частично выполнили программу такого рода, рассматривая в качестве исходных положений явно сформулированные условия унитарности, причинности и ковари-

антности для  $S$ -матрицы. При этом построение теории было ограничено рамками теории возмущений.

Кроме этого, построение обладало еще одним серьезным недостатком, связанным с употреблением вспомогательной функции  $g(x)$ . С помощью этой функции было сформулировано общепринятое «псевдофизическое» представление об адиабатическом включении и выключении взаимодействия, а также была получена возможность исследовать локальные характеристики теории. Эта возможность технически была связана с операцией функционального дифференцирования  $S$ -матрицы по  $g(x)$ .

Представляется поэтому желательным произвести сейчас некоторый пересмотр системы наших основных положений, с тем чтобы освободиться от привлечения функции  $g(x)$ , которое, в сущности, необходимо лишь для получения разложений по степеням малости взаимодействия.

Как упоминалось в § 20.6, при описании локальной структуры теории вместо вариационных производных по  $g(x)$  можно использовать производные по функциям поля. Такие вариационные производные по бозе- и ферми-операторным аргументам были введены в §§ 37, 38. Их мы и будем использовать.

Мы откажемся также от введения  $S$ -матрицы с помощью общепринятого представления об адиабатическом включении и выключении взаимодействия и возвратимся к ее первоначальному определению, данному Гейзенбергом, как матрицы, элементами которой являются амплитуды вероятности перехода от одного состояния при  $t = -\infty$  к другому состоянию при  $t = \infty$ . В каждом из этих состояний может находиться как система «бесконечно» удаленных друг от друга отдельных элементарных частиц, так и их комплексов в связанных состояниях. Такое введение  $S$ -матрицы является более реалистичным, чем использованное нами ранее, так как не предполагает, что в реальных состояниях при  $t = \pm \infty$  отсутствует взаимодействие с виртуальными полями (см. § 20.1).

При этом возникают задачи описания начальных и конечных состояний пространственно разделенных реальных частиц и связанных состояний. Мы не будем, однако, заниматься этими сложными вопросами и приступим сейчас к формулировке интересующих нас основных необходимых физических посылок современной теории поля.

Все эти положения удобно разделить на две группы: а) *общие свойства*, характерные для весьма обширного класса возможных теорий, и б) *специальные свойства локальности*, связанные, в частности, с условием микроскопической причинности.

*Общие свойства.*

А \*). Асимптотические состояния системы содержат бесконечно удаленные реальные частицы и их связанные комплексы. Взаимо-

\*) Эти пункты цитируются ниже как 52.2А, 52.2Б и т. д.

действие между такими частицами и комплексами равно нулю, и потому основные динамические характеристики системы (типа энергии, импульса, момента и т. п.) являются аддитивными. Такие состояния описываются амплитудами  $|\dots\rangle$ , являющимися элементами некоторого линейного пространства.

Подчеркнем, что в отличие от предыдущего изложения, где асимптотические состояния соответствовали свободным невзаимодействующим частицам (и полям), здесь имеются в виду состояния с реальными наблюдаемыми (с точки зрения адиабатического подхода — перенормированными) характеристиками.

Б. Имеется группа  $G$  преобразований  $L$ , включающая группу Пуанкаре преобразований пространства-времени ( $G$  может включать и другие элементы, например, и изотопические преобразования). Под действием преобразований  $L$  из  $G$  амплитуды состояний  $|\dots\rangle$  преобразуются с помощью некоторого унитарного представления  $U_L$  группы.

В. Если в состоянии  $|p\rangle$  имеется определенный 4-вектор энергии-импульса  $p$ , то

$$U_{L_a} |p\rangle = e^{-ipa} |p\rangle, \quad (7)$$

где  $L_a$  — трансляция  $x \rightarrow x + a$ . Существует состояние вакуума  $|0\rangle$ , для которого

$$U_{L_a} |0\rangle = |0\rangle. \quad (8)$$

Отметим, что в соответствии с (9.23) из (7), в частности, следует

$$\langle p' | A(x) | p \rangle = e^{ix(p' - p)} \langle p' | A(0) | p \rangle \quad (9)$$

Г. Существует система амплитуд  $|n, k\rangle$ , которая вместе с амплитудой  $|0\rangle$  является замкнутой, так что

$$\langle \alpha | AB | \beta \rangle = \langle \alpha | A | 0 \rangle \langle 0 | B | \beta \rangle + \sum_n \int dk \langle \alpha | A | n, k \rangle \langle n, k | B | \beta \rangle, \quad (10)$$

и притом такая, что в состоянии  $|n, k\rangle$  имеется определенный импульс  $k$  и энергия  $E_n(k) > 0$ . Индекс  $n$  обозначает совокупность квантовых чисел, дискретных и непрерывных, которая вместе с  $k$  полностью характеризует состояние данной замкнутой системы. Аналогичные свойства могут быть сформулированы для неприводимых представлений других подгрупп  $G$ , в частности для представлений, соответствующих моменту.

Д. Амплитуда вероятности перехода от состояния  $|\alpha\rangle$  к состоянию  $|\beta\rangle$  дается матричным элементом  $\langle \beta | S | \alpha \rangle$  оператора  $S$  (матрицы рассеяния), удовлетворяющего условию унитарности

$$S^\dagger S = 1.$$

Е. При преобразовании  $L$  из группы  $G$  матрица рассеяния  $S$  преобразуется с помощью унитарного представления  $U_L$ .

Ж. Если  $|\alpha\rangle$  является амплитудой либо вакуума, либо состояния, содержащего одну реальную частицу или один стабильный комплекс, то условие стабильности таких состояний имеет вид

$$S|\alpha\rangle = |\alpha\rangle. \quad (11)$$

Условие (11) осуществляет не что иное, как фиксирование унитарного фазового множителя, с точностью до которого обычно определяется матрица рассеяния. Так, с точки зрения обычной теории, изложенной в главах VI, V, (11) сводится к условию стабильности состояния вакуума и одночастичных состояний.

Это условие могло быть получено там заменой обычной матрицы рассеяния  $S$  на оператор  $S'$ , получающийся из  $S$  вычитанием из лагранжиана взаимодействия вакуумного и одночастичных контрчленов. Например, для спинорной электродинамики

$$S' = T \left[ \exp i \int dp \{ \mathcal{L}(p) - (Z_2 - 1) \bar{\psi}(\not{p} - m) \psi - \delta m \bar{\psi} \psi \} - \right. \\ \left. - (Z_3 - 1) A_n (g^{mn} p^2 - p^m p^n) A_m - R_{\text{вак}} \right],$$

так что

$$\langle 0 | S' | 0 \rangle = 1,$$

а также

$$\langle 1 \text{ фотон} | S' | 1 \text{ фотон} \rangle = 1,$$

$$\langle 1 \text{ электрон} | S' | 1 \text{ электрон} \rangle = 1,$$

что эквивалентно (11).

Положения 52.2А—52.2Ж являются настолько общими, что, по-видимому, останутся неизменными и в возможных дальнейших модификациях теории элементарных частиц.

**52.3. Локальные свойства.** Прежде чем приступить к формулировке необходимых нам локальных свойств теории, напомним соответствующие моменты обычной схемы. Начнем с того, что представление  $S$ -матрицы рассеяния через  $T$ -экспоненту

$$S = T \left( \exp i \int \mathcal{L}(z) dz \right)$$

позволяет сразу же получить ее вариационные производные. Например,

$$\frac{\delta S}{\delta u_\alpha(x)} = iT \left( \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial u_\alpha(x)} \exp i \int \mathcal{L}(z) dz \right).$$

Выражения того же типа получают и для высших вариационных производных.

Условие причинности можно теперь записать в виде, аналогичном (20.31):

$$\frac{\delta}{\delta u_\alpha(x)} \left[ \frac{\delta S}{\delta u_\beta(y)} S \right] = 0 \quad \text{при } x \lesssim y \quad (12)$$

Заметим, далее, что амплитуда вероятности для процессов рассеяния свободных частиц (т. е. для процессов, в которых отсутствуют и не возникают связанные комплексы) выражается через вакуумные средние от вариационных производных  $S$ -матрицы по свобод-

ным полям. В самом деле, рассмотрим матричный элемент

$$\frac{3(r+s)}{(2\pi)^2} \frac{1}{S_0} \langle 0 | a_{\beta_1}(\mathbf{p}'_1) \dots a_{\beta_s}(\mathbf{p}'_s) S a_{\alpha_1}^+(\mathbf{p}_1) \dots a_{\alpha_r}^+(\mathbf{p}_r) | 0 \rangle \quad (13)$$

для процесса, в начале которого имеются частицы с импульсами  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r$  и другими квантовыми числами  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , а в конце — частицы с импульсами  $\mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}'_s$  и другими квантовыми числами  $\beta_1, \dots, \beta_s$  (при этом, как обычно, считается, что среди пар  $\mathbf{p}_i \alpha_i, \mathbf{p}'_j \beta_j$  нет совпадающих). Воспользуемся перестановочными соотношениями типа (24.11), (24.12)

$$\left. \begin{aligned} \{a_{\beta}(\mathbf{p}'), u_{\nu}(x)\}_{\pm} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}'x} v_{\nu}^{\beta}(\mathbf{p}'), \\ \{u_{\nu}(x), a_{\alpha}^+(\mathbf{p})\}_{\pm} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{p}x} v_{\nu}^{\alpha}(\mathbf{p}) \end{aligned} \right\}$$

и примем во внимание, что  $\mathcal{L}(x)$  должен быть четной функцией ферми-полей. Это даст (ср. (38.11) и (38.12)):

$$\left. \begin{aligned} [a_{\beta}(\mathbf{p}'), S] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} v_{\sigma}^{\beta}(\mathbf{p}') \int dx e^{i\mathbf{p}'x} \frac{\delta S}{\delta u_{\sigma}(x)}, \\ [S, a_{\alpha}^+(\mathbf{p})] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} v_{\sigma}^{\alpha}(\mathbf{p}) \int dx e^{-i\mathbf{p}x} \frac{\delta S}{\delta u_{\sigma}(x)}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Будем переносить в (13) все операторы уничтожения вправо до тех пор, пока они, подействовав на  $|0\rangle$ , не дадут нуль, а операторы рождения — влево. Тогда с помощью (14) мы сможем выразить матричный элемент (13) в виде суммы членов, пропорциональных интегралам

$$\int \langle 0 | \frac{\delta^{r+s} S}{\delta u_{\beta_1}(x'_1) \dots \delta u_{\alpha_r}(x_r)} | 0 \rangle \exp i \left( \sum_{\beta} \mathbf{p}' x' - \sum_{\alpha} \mathbf{p} x \right) dx'_1 \dots dx_r. \quad (15)$$

Исключая вакуумные петли, мы получим под интегралами матричные элементы вида

$$\frac{1}{S_0} \langle 0 | \frac{\delta^n S}{\delta u_1(x_1) \dots \delta u_n(x_n)} | 0 \rangle = \langle 0 | \frac{\delta^n S}{\delta u_1(x_1) \dots \delta u_n(x_n)} \hat{S} | 0 \rangle. \quad (16)$$

В справедливости написанного соотношения легко убедиться, если учесть, что амплитуда  $\hat{S} | 0 \rangle$  может отличаться от  $|0\rangle$  лишь на фазовый множитель, который как раз и равен  $(S_0)^{-1}$ .

Мы пришли, таким образом, к важному понятию *радиационного оператора n-го порядка*

$$H_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n S}{\delta u_1(x_1) \dots \delta u_n(x_n)} \hat{S}. \quad (17)$$

Как видно, под порядком оператора здесь понимается суммарная степень вариационных производных. Матричные элементы сводятся к вакуумным ожиданиям таких радиационных операторов (13).

Может возникнуть сомнение в законности перехода к вариационным производным по квантовым полям (38.9), поскольку свойство квантованных функций удовлетворять уравнениям поля никак не отражено в определении (38.9). Однако нетрудно убедиться, что каких-либо оснований для подобных сомнений нет. В самом деле, в  $S$ -матрице упомянутое свойство связано с процедурой вычисления матричных элементов и проявляется лишь для тех операторов поля, которые с точки зрения диаграмм Фейнмана соответствуют внешним линиям. При этом указанное свойство является тривиальным следствием перестановочных соотношений (4) между оператором  $u(x)$ , входящим в матрицу  $S$ , и оператором рождения (или уничтожения) свободной частицы  $a^{\pm}(k)$  в выражении для амплитуды состояния. Поэтому при рассмотрении  $S$ -матрицы и ее вариационных производных мы можем полностью отвлечься от указанного свойства (и считать, что здесь мы имеем дело с формальным расширением функционала  $S$  на класс функций, не подчиняющихся каким-либо уравнениям). При этом, разумеется, на конечном этапе при переходе к матричным элементам приходится рассматривать проекцию  $S$  на множество операторов, удовлетворяющих уравнениям свободных полей (речь идет лишь об операторах, соответствующих *внешним* линиям диаграмм Фейнмана!).

Для дальнейшего изложения не потребуется не только представление  $S$ -матрицы через  $T$ -экспоненту, но даже и понятие лагранжиана взаимодействия. Достаточно будет лишь сохранить возможность вариационного дифференцирования  $S$ -матрицы, условие причинности в форме (12) и возможность выражения амплитуды перехода (13) через интегралы типа (15). Поэтому мы приходим к возможности сформулировать следующие

*Локальные свойства.*

А \*). Реальные элементарные частицы характеризуются бозонными и фермионными полями  $u(x)$ , которые обладают теми же трансформационными и коммутационными свойствами, что и в теории свободных полей. Оператор  $S$  по этим полям обладает вариационными производными любого порядка. Вариационные производные имеют здесь все свои обычные свойства; так, их трансформационный характер обуславливается трансформационными свойствами полей. Производные по бозонным полям коммутируют, а по фермионным — антикоммутируют между собой.

Радиационные операторы (17) и произведения таких операторов с независимыми аргументами являются интегрируемыми (в смысле определения § 18), т. е. все матричные элементы

$$\langle \beta | H(x_1, \dots, x_n) \dots H(z_1, \dots, z_k) | \alpha \rangle$$

суть обобщенные функции, интегрируемые на одном из классов  $C(q, r, n)$ .

Б. Выполняется условие причинности в форме (12).

В. Пусть

$$|\alpha_1, p_1, \dots, \alpha_r, p_r\rangle = |\omega\rangle$$

\*) Эти пункты упоминаются ниже как 52.3А, 52.3Б, ...



обозначает амплитуду состояния системы бесконечно удаленных элементарных частиц с импульсами  $p_1, \dots, p_r$  и другими квантовыми числами  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . Тогда матричный элемент

$$S_{\omega'\omega} = \langle \omega' | S | \omega \rangle$$

может быть выражен через вакуумные средние радиационных операторов (12) с помощью следующего формального приема. Запишем

$$S_{\omega'\omega} = \langle 0 | a_{\alpha_1}^-(p'_1) \dots a_{\alpha_s}^-(p'_s) S a_{\alpha_1}^+(p_1) \dots a_{\alpha_r}^+(p_r) | 0 \rangle$$

и будем переносить операторы уничтожения  $a^-$  направо, а  $a^+$  налево, пока не получим членов, в которых  $a^-$  действуют на  $|0\rangle$ , а  $a^+$  — на  $\langle 0|$  и которые обращаются в нуль. При этом будем пользоваться для перестановки  $a^+$ ,  $a^-$  обычными соотношениями теории невзаимодействующих полей, а для перестановок  $a^+$ ,  $a^-$  и  $S$  — соотношениями типа (14).

Выразив таким путем  $S_{\omega'\omega}$  через вакуумные ожидания от вариационных производных  $S$ -матрицы и используя затем условие 52.2Ж, можно свести их к вакуумным средним от радиационных операторов.

Сформулированные общие и локальные свойства можно рассматривать как аксиомы, лежащие в основе наших представлений о квантовой теории взаимодействующих полей. Мы увидим ниже, что эти аксиомы позволяют получить большое число строгих следствий общего характера, таких как одномерные спектральные представления одночастичных функций Грина (§§ 53, 54), четырех- (и пяти-) мерные спектральные представления для амплитуды рассеяния (§ 55) и, наконец, дисперсионные соотношения для амплитуд рассеяния вперед (§§ 56, 57), связывающие между собой только наблюдаемые на опыте величины.

**52.4. Оптическая теорема.** Случай рассеяния вперед, с одной стороны, оказывается более простым теоретически (см. §§ 56.2, 56.4), а с другой стороны, он особенно удобен практически благодаря тому, что в силу так называемой *оптической теоремы* мнимая часть амплитуды рассеяния вперед пропорциональна полному поперечному эффективному сечению процесса.

Чтобы показать это, рассмотрим матричный элемент от  $SS^\dagger = 1$  между амплитудами состояний  $\langle p's', q'\rho' |$  и  $| ps, q\rho \rangle$ , содержащих нуклон с импульсом  $p'$  ( $p$ ) и дискретным индексом  $s'$  ( $s$ ) и мезон с импульсом  $q'$  ( $q$ ) и дискретным индексом  $\rho$  ( $\rho'$ ):

$$\langle p's', q'\rho' | SS^\dagger | ps, q\rho \rangle = \langle p's', q'\rho' | | ps, q\rho \rangle = \delta(p-p') \delta_{ss'} \delta(q-q') \delta_{\rho\rho'}.$$

Записывая левую часть этого выражения в виде суммы по полной системе амплитуд состояний  $|n\rangle$ , получим:

$$\langle p's', q'\rho' | SS^\dagger | ps, q\rho \rangle = \sum_n \langle p's', q'\rho' | S | n \rangle \langle n | S^\dagger | ps, q\rho \rangle. \quad (18)$$

Суммирование по  $n$  включает здесь как суммирование по дискретным характеристикам состояний  $|n\rangle$ , так и интегрирование по их непрерывным характеристикам.

Ограничиваясь в правой части (18) суммированием по состояниям, содержащим один нуклон ( $p''$ ,  $s''$ ) и один мезон ( $q''$ ,  $\rho''$ ), и переходя с помощью (25.21) к амплитуде рассеяния, имеем:

$$\begin{aligned} \langle p's', q'\rho' | S\bar{S} | ps, q\rho \rangle = & \delta(p-p') \delta_{ss'} \delta(q-q') \delta_{\rho\rho'} + \\ & + \frac{i\delta(p'+q'-p-q)}{2\pi\sqrt{q^0q'^0}} (f'_{s'\rho', s\rho}(p', q', p, q) - f^*_{s'\rho', s\rho}(p', q', p, q)) + \\ & + \frac{\delta(p'+q'-p-q)}{(2\pi)^2\sqrt{q^0q'^0}} \sum_{s'', \rho''} \int \frac{dp'' dq''}{q''^0} f_{s''\rho'', s''\rho''}(p', q', p'', q'') \times \\ & \times f^*_{s''\rho'', s\rho}(p'', q'', p, q) \delta(p''+q''-p-q). \end{aligned}$$

Принимая во внимание (18), получаем отсюда для случая рассеяния вперед, когда  $p'=p$ ,  $q'=q$ ,  $s'=s$ ,  $\rho'=\rho$ :

$$\begin{aligned} i(f_{s\rho, s\rho}(p, q, p, q) - f^*_{s\rho, s\rho}(p, q, p, q)) = \\ = - \sum_{s'', \rho''} \int \frac{dp'' dq''}{2\pi q''^0} \delta(p''+q''-p-q) |f_{s\rho, s''\rho''}(p, q, p'', q'')|^2 = \\ = - \int \frac{dq''}{2\pi q''^0} \delta(p''+q''-p-q) \sum_{s'', \rho''} |f_{s\rho, s''\rho''}(p, q, p'', q'')|^2 |p''=p+q-q''. \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с формулами § 25.4, получаем в лабораторной системе координат

$$\text{Im} f = \frac{|q|_{\text{л. с. к.}}}{4\pi} \sigma.$$

Здесь  $\sigma$  — полное эффективное сечение упругого пион-нуклонного рассеяния. Однако нетрудно показать, что учет остальных членов в сумме (18) приводит к тому, что под  $\sigma$  следует иметь в виду полное эффективное сечение  $\pi N$ -рассеяния:

$$\text{Im} f(\mathbf{k}, \theta=0) = \frac{|q|_{\text{л. с. к.}}}{4\pi} \sigma_{\text{tot}}(E). \quad (19)$$

Запишем еще оптическую теорему (19) в инвариантных переменных. Введем для этого инвариантную переменную, равную квадрату полной энергии  $\pi N$ -системы в с. ц. м.:

$$s = W^2 = (p+q)^2 = M^2 + \mu^2 + 2M\sqrt{\mu^2 + q^2} = M^2 + \mu^2 + 2ME.$$

Получим

$$\text{Im} f(s) = \frac{\{[s-(M+\mu)^2][s-(M-\mu)^2]\}^{1/2}}{8\pi M} \sigma_{\text{tot}}(s). \quad (20)$$

### § 53. Спектральное представление пионной функции Грина

В этом и следующем параграфах будут получены так называемые спектральные представления для пионной и нуклонной функций Грина. Впервые представления этого типа были получены Челленом

(1952) для квантовой электродинамики и Леманом (1954) для мезонной теории. Однако метод, использовавшийся в этих работах, не может считаться удовлетворительным, так как формально манипулирует с бесконечными постоянными ренормировок и т. д.

Ниже мы получим спектральные представления Челлена — Лемана для функций Грина псевдоскалярной мезонной теории, исходя из общих свойств локальной теории поля, сформулированных в § 52, и пользуясь методом аналитического продолжения на комплексную плоскость.

**53.1. Радиационные операторы первого и второго порядка.** Имея в виду дальнейшие приложения к процессам мезон-нуклонного рассеяния, мы ограничимся рассмотрением восьмикомпонентного спинорного нуклонного и трехкомпонентного мезонного полей, взаимодействующих друг с другом зарядово-симметричным образом, и не будем учитывать наличия электромагнитного поля и слабых взаимодействий с лептонами.

Кроме изотопической инвариантности, т. е. инвариантности относительно преобразований вращения в 3-мерном изотопическом пространстве, мы будем пользоваться представлением об инвариантности по отношению к фазовым преобразованиям

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\psi}(x), \quad (1)$$

т. е. будем считать, что оба эти преобразования входят в группу  $G$ , фигурирующую в условии 52.2Б.

Обратимся к исследованию вакуумных средних от радиационных операторов первого и второго порядка в рамках сформулированной теории.

Не составляет труда убедиться, что по соображениям ковариантности относительно вращений в обычном и изотопическом пространстве вакуумные ожидания от радиационных операторов первого порядка, а также от тех операторов второго порядка, в которых одно дифференцирование выполняется по бозонному, а другое — по фермионному полю, равны нулю. Инвариантность по отношению к фазовому преобразованию (1) требует обращения в нуль также вакуумных ожиданий от  $\delta^2 S / \delta\psi \delta\bar{\psi}$  и  $\delta^2 S / \delta\bar{\psi} \delta\psi$ . Таким образом, отличными от нуля оказываются лишь вакуумные ожидания от радиационных операторов  $\delta^2 S / \delta\varphi(x) \delta\varphi(y)$  и  $\delta^2 S / \delta\bar{\varphi}(x) \delta\bar{\varphi}(y)$ . В силу трансляционной инвариантности эти ожидания могут зависеть лишь от разности  $x - y$ ; поэтому запишем их в виде

$$\left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\alpha(x) \delta\varphi_\beta(y)} \hat{S}^\dagger \right| 0 \right\rangle = iQ_{\alpha\beta}(x - y), \quad (2)$$

$$i \left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\varphi}_\alpha(x) \delta\bar{\varphi}_\beta(y)} \hat{S}^\dagger \right| 0 \right\rangle = R_{\alpha\beta}(x - y). \quad (3)$$

Заметим, что на основании 52.2Ж  $\hat{S} |0\rangle = |0\rangle$ , так что множитель  $\hat{S}$  в (2) и (3) может быть опущен.

Для уяснения смысла выражений (2) и (3) в рамках обычной теории укажем, что они могут быть весьма просто связаны с полными функциями Грина с помощью следующего рассуждения, основанного на «обобщенной теореме Вика», сформулированной в § 38.1.

Применяя эту теорему к полной мезонной функции Грина

$$\Delta_{\sigma\rho}(x-y) = i \frac{\langle T(\varphi_{\sigma}(x) \varphi_{\rho}(y) S) \rangle_0}{S_0}, \quad (4)$$

получаем

$$\Delta_{\sigma\rho}(x-y) = i \overline{\varphi_{\sigma}(x)} \varphi_{\rho}(y) + \frac{i}{S_0} \sum_{\alpha} \int \left\langle \overline{\varphi_{\sigma}(x)} \varphi_{\rho}(y) \varphi_{\alpha}(z) \frac{\delta S}{\delta \varphi_{\alpha}(z)} \right\rangle_0 dz. \quad (5)$$

Применяя ее затем еще раз ко второму члену, находим

$$\Delta_{\sigma\rho}(x-y) = \Delta_{\sigma\rho}^0(x-y) + \sum_{\alpha, \beta} \int \Delta_{\sigma\alpha}^0(x-z) Q_{\alpha\beta}(z-t) \Delta_{\beta\rho}^0(t-y) dz dt, \quad (6)$$

где

$$\Delta_{\sigma\rho}^0(x-y) = i \overline{\varphi_{\sigma}(x)} \varphi_{\rho}(y).$$

Переходя в (6) с помощью формул типа

$$q_{\alpha\beta}(z-t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip(z-t)} q_{\alpha\beta}(p) dp \quad (7)$$

к импульсному представлению, получим

$$\Delta_{\sigma\rho}(p) = \frac{1}{\mu^2 - p^2} + \frac{1}{\mu^2 - p^2} q_{\sigma\gamma}(p) \frac{1}{\mu^2 - p^2}. \quad (8)$$

Аналогичным образом для нуклонной функции Грина  $G$  можно получить

$$G(p) = (M - \hat{p})^{-1} - (M - \hat{p})^{-1} r(p) (M - \hat{p})^{-1}. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь более подробно  $Q(x-y)$ . Введем для этого радиационный бозе-оператор первого порядка

$$j_{\sigma}(x) = i \frac{\delta S}{\delta \varphi_{\sigma}(x)} \hat{S}, \quad (10)$$

который будем называть оператором тока (в целях соответствия обычной псевдоскалярной мезонной теории). Оператор  $j$  эрмитов:

$$j_{\sigma}^{\dagger}(x) = j_{\sigma}(x),$$

что является следствием действительности  $\varphi$  и унитарности  $\hat{S}$ ; это можно показать с помощью элементарной выкладки (подобной той, которая была использована в § 21.2 в доказательстве эрмитовости обобщенного гамильтониана).

Теперь можно выразить входящий в (2) радиационный оператор через  $j$  и его вариационную производную. Варьируя (10), с учетом

унитарности  $S$ -матрицы и эрмитовости тока, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta j_{\sigma}(x)}{\delta \varphi_{\rho}(y)} &= i \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_{\sigma}(x) \delta \varphi_{\rho}(y)} \overset{\dagger}{S} + i \frac{\delta S}{\delta \varphi_{\sigma}(x)} \frac{\delta \overset{\dagger}{S}}{\delta \varphi_{\rho}(y)} = \\ &= i \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_{\sigma}(x) \delta \varphi_{\rho}(y)} \overset{\dagger}{S} + i j_{\sigma}(x) j_{\rho}(y). \end{aligned} \quad (11)$$

Принимая теперь во внимание, что согласно условию 52.3Б

$$\frac{\delta j_{\sigma}(x)}{\delta \varphi_{\rho}(y)} = 0 \quad \text{при } y \lesssim x,$$

находим

$$i \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_{\sigma}(x) \delta \varphi_{\rho}(y)} \overset{\dagger}{S} = -i j_{\sigma}(x) j_{\rho}(y) \quad \text{при } y \not\lesssim x. \quad (12)$$

Так как левая часть этого соотношения симметрична относительно перестановки  $(x, \sigma)$  с  $(y, \rho)$ , имеем также:

$$i \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_{\sigma}(x) \delta \varphi_{\rho}(y)} \overset{\dagger}{S} = -i j_{\rho}(y) j_{\sigma}(x) \quad \text{при } x \lesssim y. \quad (13)$$

Мы получаем, таким образом,

$$i \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_{\sigma}(x) \delta \varphi_{\rho}(y)} \overset{\dagger}{S} = -iT(j_{\sigma}(x) j_{\rho}(y)). \quad (14)$$

Отметим, что правая часть этой формулы, строго говоря, не определена при  $x = y$  (это замечание относится и к нижеследующим соотношениям (16), (18)).

Из (12) и (13) вытекает также, что

$$[j_{\sigma}(x), j_{\rho}(y)]_- = 0 \quad \text{при } x \sim y. \quad (15)$$

Отметим еще, что из формулы (14) вытекают следующие операторные соотношения:

$$\left( i \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} \overset{\dagger}{S} \right) + \left( i \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} \overset{\dagger}{S} \right)^{\dagger} = -i\varepsilon(x^0 - y^0) [j(x), j(y)]_-, \quad (16)$$

$$\left( i \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} \overset{\dagger}{S} \right) - \left( i \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} \overset{\dagger}{S} \right)^{\dagger} = -i \{j(x) j(y) + j(y) j(x)\}. \quad (17)$$

Для  $Q(x - y)$  получаем из (14):

$$Q_{\sigma\rho}(x - y) = i \langle T(j_{\sigma}(x) j_{\rho}(y)) \rangle_0 = \begin{cases} i \langle j_{\sigma}(x) j_{\rho}(y) \rangle_0 & \text{при } x \gtrsim y, \\ i \langle j_{\rho}(y) j_{\sigma}(x) \rangle_0 & \text{при } y \gtrsim x. \end{cases} \quad (18)$$

**53.2. Вакуумное ожидание произведения и коммутатора двух токов.** Мы выразили  $Q$  через вакуумные ожидания от произведения двух токов,  $\langle j_{\sigma}(x) j_{\rho}(y) \rangle_0$ .

Рассмотрим подробнее структуру этого выражения, воспользовавшись для его преобразования условием 52.2Г. Замечая, что, как было недавно установлено (§ 53.1), вакуумное ожидание тока равно нулю, можно теперь записать:

$$\langle j_{\sigma}(x) j_{\sigma}(y) \rangle_0 = \sum_n \int dk \langle 0 | j_{\sigma}(x) | n, \mathbf{k} \rangle \langle n, \mathbf{k} | j_{\sigma}(y) | 0 \rangle. \quad (19)$$

Воспользовавшись, далее, свойствами 52.2Б и 52.2В, имеем

$$\begin{aligned} \langle n, \mathbf{k} | j_{\sigma}(y) | 0 \rangle &= \langle n, \mathbf{k} | \hat{U}_{L_y} j_{\sigma}(0) U_{L_y} | 0 \rangle = \\ &= \langle n, \mathbf{k} | j_{\sigma}(0) | 0 \rangle e^{i[E_n(\mathbf{k})y^0 - \mathbf{k}y]}. \end{aligned} \quad (20)$$

Представляя аналогично  $\langle 0 | j_{\sigma}(x) | n, \mathbf{k} \rangle$ , получаем вместо (19)

$$\begin{aligned} \langle j_{\sigma}(x) j_{\sigma}(y) \rangle_0 &= \\ &= \sum_n \int dk e^{-i[E_n(\mathbf{k})(x^0 - y^0) - \mathbf{k}(x - y)]} \langle 0 | j_{\sigma}(0) | n, \mathbf{k} \rangle \langle n, \mathbf{k} | j_{\sigma}(0) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

Полагаем теперь, что в сумме (19) низшими после вакуума энергетическими состояниями являются состояния с одним, двумя и тремя мезонами (это соответствует предположению об отсутствии связанных комплексов мезонов и нуклонов с массой, меньшей  $3\mu$ , которое не противоречит эксперименту). Покажем, что для одно-мезонных состояний  $|n, \mathbf{k}\rangle$  матричные элементы

$$\langle n, \mathbf{k} | j_{\sigma}(0) | 0 \rangle \quad (22)$$

равны нулю. Введем для этого операторы уничтожения мезонов  $a_{\sigma}^{-}(p)$  с обычными перестановочными соотношениями (ср. (11.7) и (3.36))

$$[a_{\sigma}^{\mp}(p), \varphi_{\sigma}(x)] = \pm \frac{\delta_{0\sigma}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p^0}} e^{\pm i p x} \quad (p^0 = \sqrt{\mu^2 + p^2} > 0)$$

и воспользуемся условием 52.3В. Это даст:

$$a_{\sigma}^{\mp}(p) S - S a_{\sigma}^{\mp}(p) = \pm \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p^0}} \int e^{\pm i p x} \frac{\delta S}{\delta \varphi_{\sigma}(x)} dx. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь фурье-образ от матричного элемента тока  $\langle n, \mathbf{k} | j(x) | 0 \rangle$ . С помощью (20) получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-i p x} \langle n, \mathbf{k} | j(x) | 0 \rangle dx = \delta(k - p) \langle n, \mathbf{k} | j(0) | 0 \rangle. \quad (24)$$

Этот матричный элемент может быть отличен от нуля только для значений 4-импульса  $p$ , совпадающих с 4-импульсом  $k$  одного из состояний  $n$ .

Рассмотрим одно-мезонное состояние  $\langle 1, \mathbf{k} |$ , когда  $p^2 = k^2 = \mu^2$ . В этом случае, используя преобразование (52.14) и условия стабильности вакуума и одночастичного состояния (52.11), находим

последовательно

$$\int e^{-ipx} \langle n, \mathbf{k} | j(x) | 0 \rangle dx = i \int e^{-ipx} \left\langle n, \mathbf{k} \left| \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} \dot{S} \right| 0 \right\rangle dx = \\ = i (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\rho^0} \{ \langle n, \mathbf{k} | S a^\dagger(\rho) S | 0 \rangle - \langle n, \mathbf{k} | a^\dagger(\rho) | 0 \rangle \} = 0$$

Сравнивая с (24), заключаем, что матричный элемент (22) равен нулю для одномезонных состояний. Отсюда также вытекает, что

$$\int e^{-ipx} \langle n, \mathbf{k} | j(x) | 0 \rangle dx = 0 \quad \text{при} \quad \rho^2 = \mu^2 \quad (25)$$

для произвольных состояний  $\langle n, \mathbf{k} |$ . Равенство нулю (22) для вакуумного и двухмезонных состояний следует из псевдоскалярности мезонов. Таким образом, в разложении (19) состояния  $| n, \mathbf{k} \rangle$  включают по крайней мере три мезона и для них

$$E_n^2(\mathbf{k}) - \mathbf{k}^2 \geq (3\mu)^2. \quad (26)$$

Примем теперь во внимание, что на основании трансляционной и изотопической инвариантности

$$\langle j_\sigma(x) j_\rho(y) \rangle_0 = \delta_{\sigma\rho} u(x-y).$$

Функцию  $u$  можно представить в виде

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx} v(k) dk,$$

причем в соответствии с (21) функция  $v(k)$  имеет вид

$$v(k) = (2\pi)^3 \sum_n |\langle 0 | j_\sigma(0) | n, \mathbf{k} \rangle|^2 \delta(k^0 - E_n(\mathbf{k})). \quad (27)$$

На основании (26) и (27), с учетом соображений лоренцевой ковариантности, можно заключить, что

$$v(k) = \theta(k^0) J(k^2),$$

причем функция  $J$  обладает свойствами

$$\left. \begin{aligned} J(k^2) &\geq 0 \\ \text{и} \quad J(k^2) &= 0 \quad \text{при} \quad k^2 < (3\mu)^2. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Итак, мы получили:

$$\langle j_\sigma(x) j_\rho(y) \rangle_0 = \frac{\delta_{\sigma\rho}}{(2\pi)^3} \int e^{-ik(x-y)} \theta(k^0) J(k^2) dk. \quad (29)$$

Эта формула представляет собой, по существу, спектральное представление для  $\langle j_\sigma(x) j_\rho(y) \rangle_0$ .

Из (18) и (29) вытекает, что функция  $Q(x-y)$  обладает «свойствами причинности», подобно причинным функциям Грина; при  $x^0 > y^0$  она обладает лишь отрицательными частотами по отношению к аргументу  $x^0 - y^0$ , а при  $x^0 < y^0$  — лишь положительными. Поэтому мы будем обозначать ее ниже через  $Q^c$ :

$$Q_{\sigma\rho}(x-y) = \delta_{\sigma\rho} Q^c(x-y).$$

Отметим еще, что из формулы (29) вытекает спектральное представление для коммутатора токов:

$$[j_\sigma(x), j_\nu(y)]_0 = \frac{\delta_{\sigma\nu}}{(2\pi)^3} \int e^{-ik(x-y)} \varepsilon(k^0) J(k^2) dk. \quad (30)$$

**53.3. Аналитические свойства  $Q^r$  и  $Q^a$ .** Соотношения (18) и (29), однако, еще недостаточны для заключения об аналитических свойствах функции  $Q^c$ . Дело в том, что  $Q^c$  определена соотношением (18) лишь при  $x \neq y$ . Поэтому ее определение через вакуумные ожидания (29) не является однозначным. Для исследования этой неоднозначности удобно ввести в рассмотрение еще две функции:

$$\delta_{\sigma\nu} Q^r(x-y) = - \left\langle \frac{\delta j_\nu(y)}{\delta \Phi_\sigma(x)} \right\rangle_0, \quad \delta_{\sigma\nu} Q^a(x-y) = - \left\langle \frac{\delta j_\sigma(x)}{\delta \Phi_\nu(y)} \right\rangle_0. \quad (31)$$

Для записи левой части этих соотношений мы использовали соображения трансляционной и изотопической инвариантности. Индексы  $r$  и  $a$  соответствуют свойствам

$$Q^r(x-y) = Q^a(y-x) = 0 \quad \text{при} \quad x \lesssim y.$$

Ясно также, что вообще

$$Q^r(x-y) = Q^a(y-x). \quad (32)$$

Переходя к импульсному представлению

$$Q(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ikx} q(k) dk,$$

на основании (11) и (29) получаем, что

$$q^c(k) = i2\pi\theta(k^0) J(k^2) + q^a(k) = i2\pi\theta(-k^0) J(k^2) + q^r(k) \quad (33)$$

и потому, в частности,

$$q^c(k) = q^a(k) = q^r(k) \quad \text{при} \quad k^2 < (3\mu)^2. \quad (34)$$

Рассмотрим теперь аналитические свойства функции

$$q^r(k) = \int Q^r(x) e^{ikx} dx, \quad (35)$$

учитывая, что вследствие условия причинности

$$Q^r(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \lesssim 0. \quad (36)$$

Соотношение (35) определяет  $q^r(k)$  в области действительных значений компонент  $k$ . Из (36) следует, что  $q^r(k)$  может быть определенным образом продолжена в область комплексных  $k$ . Положим, что  $k$  обладает отличной от нуля мнимой частью, т. е.

$$\left. \begin{aligned} k &= \rho + i\Gamma, \\ \rho &= \text{Re } k, \quad \Gamma = \text{Im } k, \quad \Gamma^2 > 0, \quad \Gamma^0 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Тогда получим

$$q^r(\rho + i\Gamma) = \int Q^r(x) e^{i\rho x} e^{-\Gamma x} dx. \quad (38)$$



Множитель  $\exp(-\Gamma x)$  будет играть роль обрезającego фактора, обеспечивающего сходимость интеграла. В самом деле, согласно (36) интеграл (38) фактически берется по области, в которой

$$x^0 \geq 0, \quad x^2 \leq (x^0)^2,$$

а в этой области, по самой грубой оценке,

$$\Gamma x = \Gamma^0 x^0 - \Gamma \mathbf{x} > (\Gamma^0 - |\Gamma|) x^0 > \frac{1}{2} (\Gamma^0 - |\Gamma|) (|x^0| + |\mathbf{x}|),$$

так что

$$e^{-\Gamma x} \leq e^{-\alpha (|x^0| + |\mathbf{x}|)}, \quad (39)$$

где в соответствии с (37)  $\alpha = (1/2) (\Gamma^0 - |\Gamma|) > 0$ .

В то же время по условию 52.3А функция  $Q^r(x)$  является интегрируемой, и потому интеграл

$$\int Q^r(x) h(x) dx,$$

являющийся линейным функционалом в пространстве функций  $h(x)$  класса  $C(q, n, 1)$ , удовлетворяющих условию ограниченности величин

$$h_{mn} = \sup \left\{ |x|^m \frac{\partial^n h(x)}{(\partial x^0)^{\alpha_0} \dots (\partial x^3)^{\alpha_3}} \right\} \quad \begin{array}{l} m = 0, 1, \dots, r; \\ n = \alpha_0 + \dots + \alpha_3 = 0, 1, \dots, q, \end{array}$$

существует и ограничен по абсолютной величине линейной комбинацией величин  $h_{mn}$ .

В силу оценки (39) функция  $\exp\{ipx - \Gamma x\}$  во всяком случае принадлежит к классу  $C(q, r, 1)$  с любыми конечными значениями  $q, r$ , так что интеграл (38) и его производные по  $k$

$$\int Q^r(x) (x^0)^{\beta_0} \dots (x^3)^{\beta_3} e^{ikx} dx$$

будут сходящимися. Таким образом,  $q^r(k)$  является аналитической функцией  $k$  в области (37). При этом, поскольку производные по компонентам  $x$  от  $\exp ikx$  пропорциональны степеням  $k$ , функция  $q^r(k)$ , ограниченная комбинацией величин  $h_{mn}$ , на бесконечности не будет возрастать быстрее полинома по  $k$  степени не выше  $n$  (разумеется, мы имеем здесь дело с областью (37), в которой неравенство (39) не ослабляется).

Переход к действительному  $k$  осуществляется несобственным предельным переходом

$$q^r(p + i\Gamma) \rightarrow q^r(p); \quad \Gamma^2 \rightarrow +0, \quad \Gamma^0 \rightarrow +0. \quad (40)$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что функция  $q^a(k)$  может быть продолжена в комплексную область

$$k \rightarrow p - i\Gamma; \quad \Gamma^2 > 0, \quad \Gamma^0 > 0 \quad (41)$$

с теми же свойствами аналитичности, что и у  $q^r(k)$ .

Но так как в силу (34) при вещественных  $k$  в области, где  $k^2 < (3\mu)^2$ , обе эти функции совпадают, то их следует рассматривать как одну аналитическую функцию  $f$ , определенную в областях (37) и (41). Поскольку в указанной области эти функции совпадают также с  $q^c(k)$ , которая из-за ковариантности и инвариантности  $Q^c(x)$  относительно изменения знака времени зависит лишь от  $k^2$ , функция  $f$  также зависит лишь от  $k^2$ .

Следовательно, функция  $f(k^2)$  аналитична в области значений аргумента, которая соответствует комплексным компонентам  $k$  таким, что

$$\Gamma^2 = (\text{Im } k)^2 > 0. \quad (42)$$

Введем обозначения:

$$\text{Re } k^2 = \xi, \quad \text{Im } k^2 = \eta, \quad \text{т. е. } k^2 = \zeta = \xi + i\eta,$$

так что

$$\xi = \rho^2 - \Gamma^2, \quad \eta = 2(\rho\Gamma). \quad (43)$$

Теперь ясно, что условие (42) сводится к исключению из комплексной плоскости  $\zeta$  вещественной положительной полуоси \*)

$$\eta = 0, \quad 0 < \xi < \infty \quad (44)$$

Таким образом, функция  $f(\zeta)$  является аналитической функцией с линией разреза (44) и на бесконечности возрастает не быстрее полинома.

Определим граничные значения функции  $f$  на верхнем и нижнем берегах разреза как соответствующие несобственные пределы:

$$f_{\pm}(\rho^2) = \lim_{\eta \rightarrow \pm 0} f(k^2) \quad (45)$$

Из (4), (32), (37), (41) и (43) теперь вытекает, что

$$q^r(k) = q^a(-k) = \begin{cases} f_+(k^2) & \text{при } k^0 > 0, \\ f_-(k^2) & \text{при } k^0 < 0. \end{cases} \quad (46)$$

Принимая во внимание (33), получаем также:

$$f_+(k^2) - f_-(k^2) = 2\pi i J(k^2). \quad (47)$$

Замечая теперь, что на основании (34) разность (47) обращается в нуль при  $k^2 < (3\mu)^2$ , получаем, что линией разреза будет не вся вещественная положительная полуось, а лишь ее часть

$$\eta = 0, \quad (3\mu)^2 \leq \xi < \infty. \quad (48)$$

Эти предельные соотношения с учетом (43) можно записать в более компактном виде:

$$q^r(k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(k^2 + i\varepsilon k^0), \quad (49)$$

$$q^a(k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(k^2 - i\varepsilon k^0). \quad (50)$$

\*) В самом деле, если  $\xi > 0$ , то и  $\rho^2 = \Gamma^2 + \xi > 0$ . Но так как и  $\Gamma^2 > 0$ , то  $\eta = 2\rho\Gamma \neq 0$ .

Комбинируя эти выражения с (32), имеем:

$$q^c(k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(k^2 + i\varepsilon). \quad (51)$$

**53.4. Спектральное представление  $q'$ ,  $q^a$  и  $q^c$ .** Полученные заключения об аналитической функции  $f(\zeta)$  позволяют обратиться к получению спектральных представлений типа (29) для  $q'$ ,  $q^a$  и  $q^c$ . С этой целью мы воспользуемся интегральной теоремой Коши, подобно тому как это было сделано в § 52.1. Введем вспомогательную функцию

$$h(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \mu^2)^{n+1}}$$

с соответствующим  $n$  и в качестве замкнутого контура выберем контур, изображенный на рис. 66. Переходя к пределу при  $R \rightarrow \infty$ , а затем полагая  $\rho \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ , получаем:

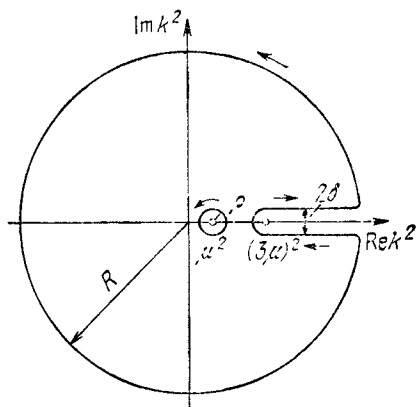


Рис. 66. Контур интегрирования при получении спектрального представления для функций Грина.

$$f(z) = \frac{(z - \mu^2)^{n+1}}{2\pi i} \int_{3\mu^2}^{\infty} \frac{I_+(z') - I_-(z')}{(z' - \mu^2)^{n+1} (z' - z)} dz' - \frac{(z - \mu^2)^{n+1}}{2\pi i} \oint_{\rho} \frac{dz'}{(z' - \mu^2)^{n+1}} \frac{f(z')}{z' - z}.$$

Вычисляя интеграл по малому кругу радиуса  $\rho$  вокруг точки  $\mu^2$  и используя (47), находим:

$$f(k^2) = (k^2 - \mu^2)^{n+1} \int_{(3\mu^2)^2}^{\infty} \frac{J(z) dz}{(z - \mu^2)^{n+1} (z - k^2)} + \sum_{m \leq n} \frac{(k^2 - \mu^2)^m}{m!} f^{(m)}(\mu^2), \quad (52)$$

$$f^{(m)}(\mu^2) = \left[ \frac{\partial^m f(z)}{\partial z^m} \right]_{z = \mu^2}.$$

Соотношения (49) — (51) позволяют сразу перейти в (52) к любой из функций  $q^a$ ,  $q'$ ,  $q^c$ . Так, например, имеем для  $q^c$ :

$$q^c(k^2) = (k^2 - \mu^2)^{n+1} \int_{(3\mu^2)^2}^{\infty} \frac{J(z) dz}{(z - \mu^2)^{n+1} (z - k^2 - i\varepsilon)} + \sum_{m \leq n} \frac{(k^2 - \mu^2)^m}{m!} f^{(m)}(\mu^2). \quad (53)$$

Аналогичные соотношения, отличающиеся от (53) заменой  $i\varepsilon$  на  $\pm i\varepsilon k^0$ , могут быть выписаны и для  $q^a$  и  $q'$ .

Заметим здесь, что спектральное представление (53) формально можно было бы получить непосредственно из (18), (29) с помощью «вычитательного

формализма». В самом деле, из указанных соотношений имеем:

$$Q(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx\theta} (k^0) J(k^2) dk = \int_{(3\mu)^2}^{\infty} dz' J(z') \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx\theta} (k^0) \delta(k^2 - z') dk = \\ = \int_{(3\mu)^2}^{\infty} dz' J(z') D_{z'}^-(x) \quad \text{при } x \geq 0. \quad (54)$$

Здесь  $D_{z'}^-$  — частотная часть функции Паули — Йордана для массы  $\sqrt{z'}$ :

$$D_{z'}^-(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx\theta} (k^0) \delta(k^2 - z') dk.$$

Комбинируя (54) с соответствующим представлением для  $Q(x)$  в области  $x \leq 0$ , получим:

$$Q(x) = \int_{(3\mu)^2}^{\infty} J(z') D_{z'}^c(x) dz' \quad \text{при } x \neq 0,$$

откуда вытекает:

$$q^c(k) = \int_{(3\mu)^2}^{\infty} \frac{J(z) dz}{z - k^2 - i\epsilon} + P(k^2). \quad (55)$$

где  $P(k^2)$  — некоторый полином по  $k^2$ .

Если функция  $J(z)$  не убывает достаточно быстро на бесконечности, то интеграл в (55) расходится. Однако посредством вычитательной процедуры его можно сделать сходящимся и тем самым придать (55) определенный смысл. Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{z - k^2} = \frac{1}{z - \mu^2 - (k^2 - \mu^2)} = \frac{1}{z - \mu^2} \left\{ 1 + \frac{k^2 - \mu^2}{z - \mu^2} + \dots + \left( \frac{k^2 - \mu^2}{z - \mu^2} \right)^n \right\} + \\ + \frac{(k^2 - \mu^2)^{n+1}}{(z - k^2)(z - \mu^2)^{n+1}},$$

с помощью которой представим (55) в виде

$$q^c(k) = (k^2 - \mu^2)^{n+1} \int_{(3\mu)^2}^{\infty} \frac{J(z) dz}{(z - k^2 - i\epsilon)(z - \mu^2)^{n+1}} + \\ + \sum_{0 \leq m \leq n} (k^2 - \mu^2)^m \int_{(3\mu)^2}^{\infty} \frac{J(z) dz}{(z - \mu^2)^{m+1}} + P(k^2). \quad (56)$$

Выберем число  $n$  достаточно большим, так, чтобы первый интеграл в (56) оказался сходящимся. Расходящиеся члены в сумме по степеням  $(k^2 - \mu^2)$  можно скомпенсировать за счет полинома  $P(k^2)$ . В результате такой «компенсации расходимостей», типичной для обычной вычитательной процедуры, мы приходим к формуле (53).

Покажем теперь, что в силу наших условий нулевой член в сумме в (53) отсутствует, т. е.

$$l(\mu^2) = 0. \quad (57)$$

Заметим для этого, что на основании условия 52.3В матричный элемент от  $S$  между двумя одномезонными состояниями  $\langle p' \sigma |$  и

$|p_Q\rangle$  может быть представлен с помощью (23) в виде

$$\langle p'\sigma | S | p_Q \rangle = \langle 0 | S a_{\sigma}^{-}(p') a_{\sigma}^{+}(p) | 0 \rangle + \\ + \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\rho'^0}} \int \langle 0 | \frac{\delta S}{\delta \varphi_{\sigma}(x)} a_{\sigma}^{-}(p) | 0 \rangle e^{i p' x} dx \quad \text{при } p^2 = p'^2 = \mu^2$$

Коммутируя под интегралом в правой части  $a^+$  с  $\delta S/\delta \varphi$  с учетом 52.2Ж и (2), получаем

$$\langle p'\sigma | S | p_Q \rangle = \\ = \langle a_{\sigma}^{-}(p') a_{\sigma}^{+}(p) \rangle_0 + \frac{i}{(2\pi)^3 2 \sqrt{\rho^0 \rho'^0}} \int Q_{\sigma\sigma}(x, y) e^{i(p'x - py)} dx dy = \\ = \langle p'\sigma | p_Q \rangle + \delta_{\sigma\sigma} \frac{i\pi}{\rho^0} \delta(p - p') q^c(p) \quad \text{при } p^2 = \mu^2.$$

С другой стороны, на основании того же условия мы можем непосредственно писать

$$\langle p'\sigma | S | p_Q \rangle = \langle p'\sigma | p_Q \rangle,$$

откуда с учетом (34) и (51) вытекает (57).

Покажем еще, что постоянные  $f^{(m)}(\mu^2)$  являются действительными. В самом деле, согласно определению (4) и действительности  $\varphi$  функция  $Q$  является эрмитовой, так что, учитывая четность  $q^c(k)$ , имеем:

$${}^* q^c(k^2) = q^c(k^2).$$

Но ввиду того, что согласно (34) и (51) в окрестности точки  $\mu^2$  функция  $q^c$  совпадает с  $f$ , это дает:

$${}^* \tilde{f}^{(m)}(\mu^2) = f^{(m)}(\mu^2).$$

Таким образом, доказано, что функции  $q'$ ,  $q^a$  и  $q^c$  допускают спектральные представления типа (52), в котором

$$f^{(0)}(\mu^2) = l(\mu^2) = 0 \quad (58)$$

и

$${}^* \tilde{f}^{(m)}(\mu^2) = f^{(m)}(\mu^2). \quad (59)$$

Известный результат Челлена — Лемана для бозонной функции Грина может быть получен из формул (53), (58), (59) с помощью (8) при дополнительном предположении, что «степень роста»  $n$  равна единице. Подставляя (53) в (8), получаем при этом:

$$\Delta(p) = \frac{1 + f^{(1)}(\mu^2)}{\mu^2 - p^2 - i\epsilon} + \int_{(3\mu)^2}^{\infty} \frac{I(z) dz}{z - p^2 - i\epsilon}, \quad I(z) = \frac{J(z)}{(z - \mu^2)^2}. \quad (60)$$

## § 54. Спектральное представление фермионной функции Грина

**54.1. Радиационные ферми-операторы.** Обратимся к построению спектрального представления для вакуумного ожидания фермиевского радиационного оператора второго порядка

$$R_{\alpha\beta}^c(x-y) = i \left\langle \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi}_\alpha(x) \delta \psi_\beta(y)} \dot{S} \right\rangle_0, \quad (1)$$

который, как было показано в § 53.1, является единственным радиационным ферми-оператором второго порядка, содержащим вторую вариационную производную и обладающим отличным от нуля вакуумным средним. Поскольку отличие нижеследующих рассуждений от материала в § 53 обусловлено лишь отличием трансформационных свойств  $R$  и  $Q$ , мы проведем изложение более конспективно.

Для вспомогательных целей введем радиационные ферми-операторы первого порядка

$$\vartheta(x) = iS \frac{\delta \dot{S}}{\delta \psi(x)} = -i \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}(x)} \dot{S} \quad (2)$$

и

$$\bar{\vartheta}(x) = i \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}(x)} \dot{S} = -iS \frac{\delta \dot{S}}{\delta \psi(x)}, \quad (3)$$

связанные между собой соотношением

$$\bar{\vartheta}(x) = [\vartheta(x)]^\dagger \gamma^0.$$

Определения (2), (3) выбраны таким образом, что введенные «фермионные токи» в низшем порядке теории возмущений соответствуют швингеровским источникам в лагранжиане взаимодействия

$$\mathcal{L}(x) \sim \bar{\psi}(x) \vartheta_0(x) + \vartheta_0(x) \psi(x)$$

Выражая вариационные производные по фермионным аргументам от фермионных токов  $\vartheta$ ,  $\bar{\vartheta}$  через вторые вариационные производные и произведения токов, получаем следующие соотношения:

$$\frac{\delta \vartheta(x)}{\delta \psi(y)} = i \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi}(x) \delta \psi(y)} \dot{S} - i \vartheta(x) \vartheta(y), \quad (4)$$

$$\frac{\delta \bar{\vartheta}(y)}{\delta \bar{\psi}(x)} = i \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi}(x) \delta \psi(y)} \dot{S} + i \vartheta(y) \vartheta(x). \quad (5)$$

Используя условие причинности, получаем отсюда

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi}(x) \delta \psi(y)} \dot{S} = T(\vartheta(x) \vartheta(y)), \quad (6)$$

$$[\vartheta(x), \vartheta(y)]_+ = 0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2 < 0. \quad (7)$$

Введем в рассмотрение вакуумные средние

$$\left. \begin{aligned} R^r(x-y) &= \left\langle \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)} \bar{\psi}(y) \right\rangle_0, \\ R^a(x-y) &= \left\langle \frac{\delta}{\delta \psi(y)} \psi(x) \right\rangle_0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} R^-(x-y) &= i \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_0, \\ R^+(x-y) &= i \langle \bar{\psi}(y) \psi(x) \rangle_0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

которые на основании (4) и (5) связаны с  $R^c$  соотношениями

$$\left. \begin{aligned} R^a(x) &= R^c(x) + R^-(x), \\ R^r(x) &= R^c(x) + R^+(x). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

При этом в силу условия причинности

$$\left. \begin{aligned} R^r(x) &= 0 \quad \text{при } x \lesssim 0, \\ R^a(x) &= 0 \quad \text{при } x \gtrsim 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

По соображениям изотопической и лоренцевой инвариантности все эти функции имеют следующую структуру:

$$R(x) = \delta_{st} (i\hat{d}u_1(x) + u_2(x)),$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — инвариантные скалярные функции,  $s$  и  $t$  — изотопические (протонно-нейтронные) индексы, а компоненты  $\hat{d}$  содержат обычные матрицы Дирака четвертого ранга.

Принимая затем во внимание свойства инвариантности выражений (8) — (9) относительно преобразования зарядового сопряжения (см. § 13.4), получаем, что функции  $u(x)$  связаны между собой соотношениями

$$\left. \begin{aligned} u_1^+(x) &= -u_1^-( -x), & u_2^+(x) &= u_2^-( -x), \\ u_1^r(x) &= -u_1^a( -x), & u_2^r(x) &= u_2^a( -x). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

**54.2. Вывод спектрального представления.** Рассмотрим функцию  $R^-$ . Согласно условию 52.2В можно записать ее в виде

$$R^-(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^3} \sum_n \int d\mathbf{k} \langle 0 | \psi(0) | n, \mathbf{k} \rangle \langle n, \mathbf{k} | \bar{\psi}(0) | 0 \rangle e^{-ik(x-y)}. \quad (13)$$

Ряд первых членов этой суммы, как и ранее в § 53.2, равен нулю. Так, по соображениям ковариантности

$$\langle 0 | \psi(0) | n, \mathbf{k} \rangle = 0 \quad (14)$$

для безнуклонных состояний  $|n, \mathbf{k}\rangle$  Кроме того, рассуждая, как и в § 53.2, убеждаемся, что (14) справедливо также для однонуклонного состояния; поэтому интеграл (13) фактически распространен на область, в которой  $k^2 \geq (M + \mu)^2$ . Теперь ясно, что  $R^-$  может

быть представлена в виде

$$R^-(x) = \frac{\delta_{\alpha\sigma}}{(2\pi)^3 i} \int e^{-ikx} \theta(k^0) [\hat{k} Q_1(k^2) + Q_2(k^2)] dk, \quad (15)$$

$$Q_{1,2}(k^2) = 0 \quad \text{при} \quad k^2 < (M + \mu)^2.$$

Вводя для  $R^a$ ,  $R^r$  и  $R^c$  аналогичные импульсные представления через скалярные функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$R(x) = \frac{\delta_{\alpha\sigma}}{(2\pi)^4} \int e^{-ikx} [\hat{k} \varphi_1(k) + \varphi_2(k)] dk, \quad (16)$$

с помощью (10) и (12) приходим к соотношениям

$$\varphi_i^c(k) = \varphi_i^r(k) - 2\pi i \theta(k^0) Q_i(k^2) = \varphi_i^a(k) + 2\pi i \theta(-k^0) Q_i(k^2) \quad (17)$$

$$(i = 1, 2).$$

Используя здесь (15), получаем также

$$\varphi_i^c(k) = \varphi_i^r(k) = \varphi_i^a(k) \quad \text{при} \quad k^2 < (M + \mu)^2. \quad (18)$$

Ввиду того, что (17) и (18) вполне аналогичны (53.33) и (53.35), можно теперь дословно повторить для функции  $\varphi_i$  рассуждения, относящиеся в § 53.3 к функциям  $q$ .

Этим путем получим:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i^r(k) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f_i(k^2 + i\varepsilon k^0), \\ \varphi_i^a(k) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f_i(k^2 - i\varepsilon k^0), \\ \varphi_i^c(k) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f_i(k^2 + i\varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где функции  $f_i$  — аналитические во всей комплексной плоскости своего аргумента, за исключением линии разреза

$$\text{Im } k^2 = 0, \quad \text{Re } k^2 > (M + \mu)^2,$$

и возрастают на бесконечности не быстрее полинома  $n$ -й степени, вследствие чего могут быть представлены в виде, аналогичном (53.52):

$$f_i(k^2) =$$

$$= (k^2 - M^2)^{n+1} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} \frac{Q_i(z) dz}{(z - M^2)^{n+1} (z - k^2)} + \sum_{0 \leq m \leq n} \frac{(k^2 - M^2)^m}{m!} f_i^{(m)}(M^2). \quad (20)$$

Установим теперь некоторые неравенства, которым должны удовлетворять функции  $Q_i$ . Заметим для этого, что на основании (13) и (15) имеет место соотношение

$$\hat{k}_{\alpha\beta} Q_1(k^2) + \delta_{\alpha\beta} Q_2(k^2) = \sum_{n, \omega} \langle 0 | \vartheta_{\alpha}(0) | n, \mathbf{k} \rangle \langle n, \mathbf{k} | \vartheta_{\omega}(0) | 0 \rangle \gamma_{\omega\beta}^0, \quad (21)$$



справедливое при всех  $k^2 = M_n^2$ ,  $k^0 > 0$ . Положим в нем \*)

$$\mathbf{k} = 0, \quad k^0 = v > 0, \quad k^2 = v^2, \quad \alpha = \beta$$

и воспользуемся тем \*\*), что в обычном представлении

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} v Q_1(v^2) + Q_2(v^2) &= \sum_n |\langle 0 | \vartheta_\alpha(0) | n, 0 \rangle|^2 > 0, \\ -v Q_1(v^2) + Q_2(v^2) &= -\sum_n |\langle 0 | \vartheta_\alpha(0) | n, 0 \rangle|^2 < 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Введем теперь функции

$$J_1(v) = \frac{Q_1(v^2) - \frac{Q_2(v^2)}{v}}{2}, \quad J_2(v) = \frac{Q_1(v^2) + \frac{Q_2(v^2)}{v}}{2},$$

которые в силу (22) являются неотрицательными:

$$J_1(v) \geq 0, \quad J_2(v) \geq 0, \quad (23)$$

и заметим, что

$$\hat{k} Q_1(v^2) + Q_2(v^2) = (\hat{k} - v) J_1(v^2) + (\hat{k} + v) J_2(v^2). \quad (24)$$

На основании (20) и (24) можем теперь заключить, что комбинации

$$R(\hat{k}) = \hat{k} f_1(k^2) + f_2(k^2) \quad (25)$$

обладают спектральным представлением вида

$$\begin{aligned} R(\hat{k}) &= (k^2 - M^2)^{n+1} \int_{v > M}^{\infty} \frac{(\hat{k} - v) J_1(v) + (\hat{k} + v) J_2(v)}{(v^2 - M^2)^{n+1}} \frac{dv^2}{v^2 - k^2} + \\ &+ \sum_{0 \leq m \leq n} \frac{(k^2 - M^2)^m}{m!} (\hat{k} f_1^{(m)}(M^2) + f_2^{(m)}(M^2)). \end{aligned} \quad (26)$$

При этом очевидно, что в силу (16) и (19) в качестве  $R(\hat{k})$  в (26) можно взять импульсное представление  $R^t$ ,  $R^a$  или  $R^c$ , выбирая лишь согласно (19) соответствующее правило обхода для полюса  $v^2 = k^2$ .

\*) То есть выберем  $k$  чисто временным и обозначим через  $v$  совокупность  $M_n$ , при которых правая часть (21) отлична от нуля.

\*\*\*) Обращение к конкретному представлению матриц Дирака не является обязательным и использовано ради простоты изложения.

Спектральное представление (26) можно несколько преобразовать. Заметим для этого, что разности

$$\left(\frac{k^2 - M^2}{v^2 - M^2}\right)^{n+1} \frac{1}{v \pm \hat{k}} - \left(\frac{\hat{k} - M}{v \pm M}\right)^{2n+2} \frac{1}{v \pm \hat{k}}$$

по отношению к  $\hat{k}$  являются полиномами степени  $2n + 1$ . Поэтому (26) можно записать в виде

$$R(\hat{k}) = (\hat{k} - M)^{2n+2} \int_{(v \geq M + \mu)} \left( -\frac{I_1(v)}{v + \hat{k}} + \frac{I_2(v)}{v - \hat{k}} \right) dv + \sum_{0 \leq m \leq 2n+1} B_m (\hat{k} - M)^m, \quad (27)$$

где

$$I_1(v) = \frac{2vJ_1(v)}{(v+M)^{2n+2}} \geq 0, \quad I_2(v) = \frac{2vJ_2(v)}{(v-M)^{2n+2}} \geq 0, \quad (28)$$

а  $B_m$  — постоянные, не содержащие матриц Дирака.

Как и в случае бозонной функции  $q$ , можно показать, что  $B_0 = 0$ , поскольку на основании (53.9) только в этом случае соответствующая функция Грина имеет полюс первого порядка в точке  $\hat{k} = M$ . Соответствующее доказательство может быть проведено путем рассмотрения матричного элемента  $S$  между двумя одноуклонными состояниями, так же как и в бозонном случае.

Наконец, используя вытекающее из определений (5) и (8) свойство сопряжения

$$\overline{R^r}(x-y) \equiv (R^r(x-y))^* \gamma^0 = R^a(y-x),$$

из которого также следует, что

$$\gamma^0 \overline{R^r}(k) \gamma^0 = R^a(k),$$

получим, что все  $B_m$  являются вещественными.

Представление Челлена — Лемана для фермионной функции Грина получается отсюда с помощью (53.9) при дополнительном предположении  $n = 0$ .

Мы опять (так же, как в § 53.4) встретились здесь с тем интересным фактом, что при наличии нашей системы условий (§ 52.2,3) задание «степени роста» эквивалентно заданию формы лагранжиана.

**54.3. Близость к противоречию.** Скажем в заключение несколько слов по поводу условия 52.3А, в соответствии с которым вакуумные средние от радиационных операторов должны быть «интегрируемыми функциями» в обобщенном смысле.

Попробуем выяснить, что получится, если мы наложим на эти вакуумные средние  $h(x_1, \dots, x_n)$  более жесткое условие, потребовав, чтобы они являлись обычными функциями, для которых существуют интегралы вида

$$\int |h(x_1, \dots, x_n)| Q(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (29)$$

с весовыми функциями  $q$ , убывающими на бесконечности, как

$$\left( \frac{1}{|x_1| + \dots + |x_n|} \right)^m \quad (|x| = |x^0| + |x|)$$

с достаточно высоким значением  $m$ .

Поскольку мы не ослабляем нашу систему условий, а, наоборот, делаем ее более сильной, все доказанные выше теоремы остаются в силе. По-прежнему выполняются, в частности, соотношения (53.52), (26), (27).

Перейдем, например, в (53.53) к  $x$ -представлению. Получим:

$$Q_{\sigma\sigma}^c(x-y) = \delta_{\sigma\sigma} (\square_x - \mu^2)^{n+1} \int_{(3\mu)^2}^{\infty} I(z) D_z^c(x-y) dz + \sum_{1 \leq m \leq n} c_m (\mu^2 - \square_x)^m \delta(x-y), \quad (30)$$

где

$$\square_x = \Delta_x - \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}, \quad I(z) = \frac{J(z)}{(z - \mu^2)^{i+1}} \geq 0,$$

а  $D_z^c$  — причинная функция для поля с массой  $\sqrt{z}$ .

Но, как известно (см. § 16.2), функция  $D_z^c(x-y)$  имеет на световом конусе особенность типа  $1/(x-y)^2$ . Благодаря положительности весовой функции  $I$  в интеграле (30) все эти особенности не компенсируются, а складываются. Действие оператора  $(\square - \mu^2)^m$  еще более усиливает характер сингулярности на световом конусе. Вследствие этого интегралы типа (29) расходятся для функций  $Q$ , принадлежащих к рассматриваемому классу — вакуумным ожиданиям радиационных операторов.

Итак, оказалось достаточным несколько сузить одно из условий системы §§ 52.2, 52.3, чтобы прийти к внутреннему противоречию. Разумеется, отсюда нельзя делать заключений о совместности самой «недеформированной» системы условий §§ 52.2, 3. Мы хотим лишь обратить внимание на то, что вопрос о внутренней непротиворечивости всей локальной теории не является вполне ясным.

## § 55. Представление Йоста — Лемана — Дайсона

**55.1. Постановка задачи.** При рассмотрении ряда важных задач квантовой теории поля (как, например, при изучении аналитических свойств амплитуд упругого рассеяния, некоторых особых свойств амплитуд так называемых глубоко неупругих процессов и т. д.) чрезвычайно полезным оказывается особое интегральное представление фурье-образа матричного элемента коммутатора токов

$$i(x) = \left\langle p', \alpha \left[ \left[ j_1\left(\frac{x}{2}\right), j_2\left(-\frac{x}{2}\right) \right] \right] \right\rangle_{p, \beta} \quad (1)$$

между произвольными состояниями с заданными значениями 4-векторов энергии импульса  $p, p'$  и остальными квантовыми числами  $\alpha, \beta$ . Токи  $j_1, j_2$ , которые могут относиться к различным полям, представляют собой операторные выражения вида (53.10) и удовлетворяют условию «слабой» локальной коммутативности вида (53.15):

$$\left[ j_1\left(\frac{x}{2}\right), j_2\left(-\frac{x}{2}\right) \right]_- = 0 \quad \text{при } x^2 < 0.$$

Интегральное представление для фурье-образа от (1)

$$f(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dx e^{iqx} f(x) \quad (2)$$

обладает рядом простых свойств в силу условия спектральности. Для детализации этих свойств подставим (1) в (2), используем общее свойство трансляционной инвариантности 52.2в в форме (52.19) и выполним интегрирование по конфигурационному 4-пространству. Получим

$$f(q) = f_1(q) - f_2(q),$$

$$f_1(q) = i \sum_{n_1} \delta\left(\frac{p+p'}{2} - q(n_1) + q\right) \langle p', \alpha | j_1(0) | n_1 \rangle \langle n_1 | j_2(0) | p, \beta \rangle, \quad (3)$$

$$f_2(q) = i \sum_{n_2} \delta\left(\frac{p+p'}{2} - q(n_2) - q\right) \langle p', \alpha | j_2(0) | n_2 \rangle \langle n_2 | j_1(0) | p, \beta \rangle. \quad (4)$$

Переходя для простоты в систему отсчета

$$p' + p = 0 \quad (5)$$

и обозначая

$$\frac{p'_0 + p_0}{2} = a,$$

закключаем, что

$$f(q) = 0 \quad \text{при } q \in R, \quad (6)$$

причем область  $R$  4-пространства  $q$  определяется условиями:

$$a - \sqrt{q^2 + m_1^2} < q^0 < \sqrt{q^2 + m_1^2} - a, \quad (7)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — минимальные массы промежуточных состояний  $n_1$  и  $n_2$  в правых частях (3) и (4). В случае, когда  $m_1 = m_2 = m$ , область  $R$  оказывается симметричной по  $q^0$ :

$$|q^0| < \sqrt{q^2 + m^2} - a. \quad (8)$$

Такой случай будем называть *симметричным*.

Интегральное представление для  $f(q)$  было получено Йостом и Леманом (1957) для симметричного случая. Оно имеет вид 4-крат-

ного интеграла

$$f(q) = \int du \int_0^\infty d\lambda^2 \varepsilon(q^0) \delta[(q^0)^2 - (q-u)^2 - \lambda^2] (\Phi_1(u, \lambda^2) + q^0 \Phi_2(u, \lambda^2)). \quad (9)$$

Для более общего несимметричного случая соответствующее обобщение (9) было установлено Дайсоном (1958) в виде 5-кратного интеграла

$$f(q) = \int d^4u d\lambda^2 \varepsilon(q^0 - u^0) \delta[(q-u)^2 - \lambda^2] \Psi(u, \lambda^2). \quad (10)$$

Ценность представлений (9) и (10) в физически важных случаях связана с тем обстоятельством, что область интегрирования по  $u$  оказывается конечной, а интегрирование по  $\lambda^2$  распространяется лишь на часть действительной положительной полуоси (см. ниже в § 55.4).

Общая форма представлений (9), (10), как будет показано ниже, основана на том существенном факте, что согласно (2) и (1)  $f(q)$  является фурье-образом функции, удовлетворяющей условию исчезновения вне светового конуса в конфигурационном пространстве:

$$\tilde{f}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 < 0. \quad (11)$$

Такие функции  $f(q)$  ниже будем называть «причинными».

В то же время ограничения на область интегрирования в (9), (10) являются отражением спектральных свойств (6) функции  $f(q)$  в импульсном  $q$ -пространстве.

Займемся сперва построением общего вида спектрального представления.

**55.2. Общая форма представления.** Поставим задачу построения интегрального представления для всех «причинных» функций  $f(q)$ .

Для этого расширим четырехмерные  $x$ - и  $q$ -пространства до шестимерных  $X$ - и  $Q$ -пространств

$$\{x\} \rightarrow \{X\} = \{x, y\}, \quad \{q\} \rightarrow \{Q\} = \{q, \lambda\},$$

где

$$y = \{y_1, y_2\}, \quad \lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

Таким образом, например,

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow$$

$$\rightarrow (X^0 = x^0, X^1 = x^1, X^2 = x^2, X^3 = x^3, X^4 = y_1, X^5 = y_2).$$

Дополнительные компоненты  $y_1, y_2, \lambda_1, \lambda_2$  будем считать пространственно-подобными в 6-мерном пространстве, так что

$$X^2 = x^2 - y^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - y_1^2 - y_2^2, \quad Q^2 = q^2 - \lambda^2, \quad XQ = xq - y\lambda.$$

Введем функцию  $\tilde{F}$  в 6-мерном конфигурационном представлении

$$F(X) = 4\pi \tilde{f}(x) \delta(x^2 - y^2) = 4\pi \tilde{f}(x) \delta(X^2). \quad (12)$$

В силу условия (11) операция умножения  $\tilde{f}$  на  $\delta(X^2)$  оказывается определенной и функция  $\tilde{F}$  однозначно определяет функцию  $\tilde{f}$ . В самом деле,

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \tilde{F}(X) dy^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int \tilde{F}(X) d^2y = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{при } x^2 \geq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Вычисляя шестимерный фурье-образ от (12), находим

$$F(Q) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int e^{iQX} \tilde{F}(X) d^6X = \frac{1}{\pi} \int f(q') D^1(Q - \tilde{q}') d^4q'. \quad (14)$$

Здесь символом  $\tilde{q}$  обозначен специальный 6-вектор  $(q^0, q^1, q^2, q^3, 0, 0)$ , а  $D^1$  — четная инвариантная функция

$$D^1(Q) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int e^{iQX} \delta(X^2) d^6X = \frac{1}{\pi^2 (Q^2)^2}, \quad (15)$$

удовлетворяющая 6-мерному волновому уравнению

$$\square_6 D^1(Q) = 0, \\ \square_6 = \frac{\partial^2}{\partial Q_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial Q_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial Q_5^2}.$$

Из (14) (см. также (12)) вытекает, что  $F(Q)$  также удовлетворяет 6-мерному волновому уравнению

$$\square_6 F(Q) = 0.$$

Отметим еще, что согласно (2), (13) и (14)

$$f(q) = F(\tilde{q}), \quad (16)$$

т. е.  $F(Q)$  является продолжением функции  $f(q)$  на большее число измерений.

Воспользуемся теперь известным свойством решения волнового уравнения, согласно которому это решение может быть выражено через свои (начальные) значения и значения своих производных на заданной пространственно-подобной поверхности (обобщение интегральной формулы Кирхгофа). Эта формула содержит нечетное решение однородного волнового уравнения, являющееся 6-мерным аналогом функции Паули — Йордана (10.18). В рассматриваемом случае эта функция есть

$$D(Q) = \frac{1}{(2\pi)^6 i} \int e^{iQX} \varepsilon(X^0) \delta(X^2) d^6X = \frac{\varepsilon(Q^0) \delta'(Q^2)}{2\pi^2}. \quad (17)$$

Обобщенная интегральная формула Кирхгофа может теперь быть записана в виде (см. § 31 в книге Владимирова (1964))

$$F(Q) = \int_{\Sigma} d\Sigma' \left[ D(Q - Q') \frac{\partial F(Q')}{\partial \Gamma'} + F(Q') \frac{\partial D(Q' - Q)}{\partial \Gamma'} \right]. \quad (18)$$

Здесь  $\Sigma$  — произвольная пространственно-подобная поверхность в 6-мерном пространстве, которая может быть задана уравнением

$$Q^0 = \omega(Q^1, \dots, Q^5), \quad (19)$$

$d\Sigma$  — элемент площади поверхности  $\Sigma$ , а оператор  $\partial/\partial\Gamma$  есть конормальная производная на  $\Sigma$ , определяемая соотношением

$$\frac{\partial}{\partial\Gamma} d\Sigma = \frac{\partial}{\partial Q^0} dQ^1 \dots dQ^5 + \dots + \frac{\partial}{\partial Q^5} dQ^0 \dots dQ^4. \quad (20)$$

Правую часть (18) можно интерпретировать как свертку обобщенных функций  $D$ ,  $F$  и их производных. Если ввести обобщенные функции (слон)

$$\delta(\Sigma) \frac{\partial F(Q)}{\partial\Gamma} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial\Gamma} (\delta(\Sigma) F(Q)),$$

связанные с пространственно-подобной поверхностью  $\Sigma$  и действующие по правилам:

$$\int d^6Q \delta(\Sigma) \frac{\partial F(Q)}{\partial\Gamma} \varphi(Q) = \int_{\Sigma} d\Sigma \frac{\partial F(Q)}{\partial\Gamma} \varphi(Q),$$

$$\int d^6Q \frac{\partial}{\partial\Gamma} [\delta(\Sigma) F(Q)] \varphi(Q) = - \int_{\Sigma} d\Sigma F(Q) \frac{\partial\varphi(Q)}{\partial\Gamma},$$

то (18) можно записать в виде

$$F(Q) = \int d^6Q' D(Q - Q') \left[ \delta(\Sigma') \frac{\partial F(Q')}{\partial\Gamma'} + \frac{\partial}{\partial\Gamma'} (\delta(\Sigma') F(Q')) \right]. \quad (21)$$

На основании (16) формулы (18), (21) при  $Q = \tilde{q}$  дают искомое интегральное представление  $f(q)$ . Выберем теперь пространственно-подобную поверхность  $\Sigma$  в специальном виде, когда уравнение поверхности (19) не зависит от координат  $Q^4 = \lambda_1$ ,  $Q^5 = \lambda_2$ . Тогда соответствующие производные выпадают из (20), вследствие чего интегрирование факторизуется:

$$\frac{\partial}{\partial\Gamma} d\Sigma = \frac{\partial}{\partial\gamma} d\sigma dQ^4 dQ^5 = \pi \frac{\partial}{\partial\gamma} d\sigma d\lambda^2, \quad \lambda^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2,$$

где  $\partial/\partial\gamma$  — конормальная производная к поверхности  $\sigma$  в 4-мерном пространстве:

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} d\sigma = \frac{\partial}{\partial Q^0} dQ^1 \dots dQ^3 + \dots + \frac{\partial}{\partial Q^3} dQ^0 \dots dQ^2,$$

и мы получаем

$$\left. \begin{aligned} f(q) &= \int d^4u \int_0^\infty d\lambda^2 \varepsilon(q^0 - u^0) \delta'((q - u)^2 - \lambda^2) \psi_1(u, \lambda^2), \\ \psi_1(u, \lambda^2) &= \frac{1}{2\pi^2} \left[ \delta(\sigma') \frac{\partial F(u, \lambda^2)}{\partial\gamma'} + \frac{\partial}{\partial\gamma'} (\delta(\sigma') F(u, \lambda^2)) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

При переходе от (21) к (22) мы использовали явный вид (17) функции  $D$  и произвели замену обозначений переменных интегрирования

$$(Q'_0, \dots, Q'_6) \rightarrow (u^0, u^1, u^2, u^3, \lambda_1, \lambda_2).$$

Отметим, что согласно (14) и (15) функция  $F(u, \lambda^2)$  формально представима в виде «интеграла»

$$F(u, \lambda^2) = \frac{1}{\pi^3} \int \frac{f(q) d^4q}{[(u-q)^2 - \lambda^2]^2}. \quad (23)$$

Рассматривая интегралы в правой части (22) как свертки обобщенных функций, можно выполнить интегрирование по частям по  $\lambda^2$  и привести (22) к виду (10). При этом

$$\Psi(u, \lambda^2) = \frac{\partial \psi_1(u, \lambda^2)}{\partial \lambda^2}.$$

Если еще более специализировать уравнение поверхности в виде

$$u^0 = 0,$$

то мы получим вместо (22)

$$f(q) = \frac{1}{2\pi} \int du \, du^0 \int_0^\infty d\lambda^2 \varepsilon(q^0 - u^0) \delta'((q^0 - u^0)^2 - (q - u)^2 - \lambda^2) \times \\ \times \left[ \delta(u^0) \frac{\partial F(u, \lambda^2)}{\partial u^0} + \frac{\partial}{\partial u^0} (\delta(u^0) F(u, \lambda^2)) \right]. \quad (24)$$

Выполняя здесь интегрирования по частям по  $\lambda^2$  и  $u^0$ , получим представление (9), причем

$$\Phi_1(u, \lambda^2) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\lambda^2} \left[ \theta(\lambda^2) \frac{\partial F(u, \lambda^2)}{\partial u^0} \right]_{u^0=0}, \\ \Phi_2(u, \lambda^2) = \frac{1}{\pi} \frac{d^2}{d(\lambda^2)^2} [\theta(\lambda^2) F(u, \lambda^2)]_{u^0=0}. \quad (25)$$

Получение общего вида интегральных представлений на этом закончено. Отметим, что представления (10) не обладают свойством однозначности (хотя бы за счет различного выбора поверхности  $\Sigma$ ). Однако представление (9) таким свойством обладает, т. е. связи между причинной функцией  $f(q)$  и весовыми функциями  $\Phi_i(u, \lambda^2)$  являются взаимно однозначными. Читателя, интересующегося соответствующим доказательством, мы отсылаем к оригинальной работе Йоста — Лемана (1957).

**55.3. Область интегрирования.** Рассмотрим теперь ограничения на область интегрирования по  $u$  и  $\lambda^2$ , вытекающие из свойства спектральности (6). Условия, определяющие область  $R$ , могут быть записаны в общем виде, включающем физически важный случай (7):

$$g_-(q) < q^0 < g_+(q). \quad (26)$$

Эти условия определяют две пространственно-подобные и достаточно гладкие поверхности  $\sigma_\pm$  ( $q^0 = g_\pm(q)$ ) в 4-мерном  $q$ -пространстве.



Как следует из (10), связь между пространствами  $q$  и  $u$ ,  $\lambda^2$  осуществляется с помощью условия

$$(q - u)^2 = \lambda^2 \geq 0. \tag{27}$$

Оно определяет в 4-мерном пространстве  $q$  двухполостный гиперboloид  $h(u, \lambda^2)$ , параметрически зависящий от переменных  $u, \lambda^2$ . Будем называть этот гиперboloид допустимым, если его верхняя полость  $h_+$  не имеет точек, лежащих ниже  $\sigma_+$ , а нижняя полость  $h_-$  не имеет точек, лежащих выше  $\sigma_-$  (см. рис. 67), т. е.

$$\left. \begin{aligned} u^0 + \sqrt{(q - u)^2 + \lambda^2} &\geq g_+(q), \\ u^0 - \sqrt{(q - u)^2 + \lambda^2} &\leq g_-(q). \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

Множество допустимых гиперboloидов соответствует множеству точек  $S$  в пятимерном  $U$ -пространстве

$$\begin{aligned} \{U\} = \\ = \{u^0, u^1, u^2, u^3, u^4 = \lambda^2\}, \\ u^4 \geq 0. \end{aligned}$$

Ясно теперь, что если интегрирование в (10) проводится только по множеству  $S$ , то  $f(q)$  удовлетворяет условию спектральности (6). Обратное утверждение также является справедливым, т. е. любая причинная функция  $f(q)$ , удовлетворяющая условию спектральности, представима в виде интеграла (10), причем область интегрирования содержится в  $S$ . Доказательство этого обратного утверждения основывается на единственности представления Йоста—Лемана (1957). Другое доказательство, более последовательно учитывающее сингулярный характер обобщенных функций, содержится в § 32 монографии Владиморова (1964).

Определим теперь в явном виде область  $S$ . Используя для  $g_+$  и  $g_-$  явные выражения (7), получаем из (28)

$$m(u, \lambda) \leq u^0 \leq M(u, \lambda), \tag{29}$$

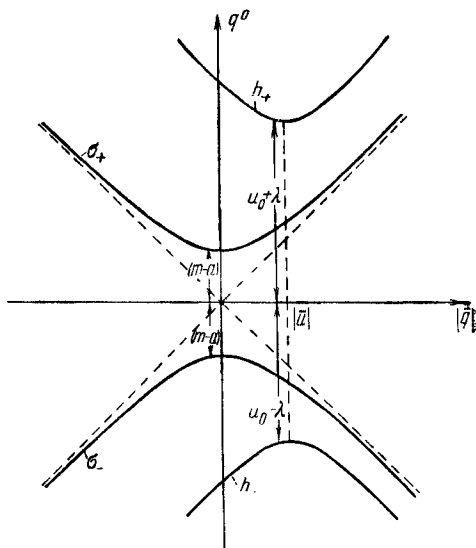


Рис. 67. Пример допустимого гиперboloида в симметричном случае.

причем

$$M(u, \lambda) = \min_q \{g_-(q) + \sqrt{(q-u)^2 + \lambda^2}\} = \begin{cases} a - \sqrt{u^2 + (m_2 - \lambda)^2} & \text{при } \lambda \leq m_2, \\ a - \sqrt{u^2} & \text{при } \lambda \geq m_2 \end{cases} \quad (30)$$

и

$$m(u, \lambda) = \max_q \{g_+(q) - \sqrt{(q-u)^2 - \lambda^2}\} = \begin{cases} \sqrt{u^2 + (m_1 - \lambda)^2} - a & \text{при } \lambda \leq m_1, \\ \sqrt{u^2} - a & \text{при } \lambda \geq m_1. \end{cases} \quad (31)$$

Для симметричного случая  $m_1 = m_2 = m$  находим отсюда

$$|u^0| + |u| \leq a, \quad \lambda^2 \geq (m - \sqrt{(a - |u^0|)^2 - u^2})^2. \quad (32)$$

Выбирая гиперплоскость интегрирования в виде  $u^0 = 0$ , получаем область  $S_0$  интегрирования для представления Йоста — Лемана (см. рис. 67)

$$|u| \leq a, \quad \lambda^2 \geq (m - \sqrt{a^2 - u^2})^2. \quad (33)$$

В несимметричном случае область  $S$  оказывается несимметричной относительно замены  $u^0 \rightarrow -u^0$  и выбрать поверхность интегрирования в виде  $u^0 = 0$  невозможно. В этом случае получим вместо (32) более общее ограничение, которое может быть записано в виде

$$|u^0| + |u| \leq a,$$

$$\lambda^2 \geq \max \left\{ (m_2 - \sqrt{(a - u^0)^2 - |u|^2})^2, (m_1 - \sqrt{(a + u^0)^2 - |u|^2})^2 \right\}. \quad (34)$$

**55.4. Некоторые следствия.** Из представлений типа (10) для фурье-образа матричного элемента коммутатора токов можно получить соответствующие представления для фурье-образов матричных элементов запаздывающего, опережающего и т. д. произведений токов. Такие представления оказываются полезными для ряда приложений.

Рассмотрим матричный элемент «запаздывающего коммутатора»

$$\tilde{f}^{\text{re}}(x) = i\theta(x^0) \left\langle p' \alpha \left[ j_1 \left( \frac{x}{2} \right), j_2 \left( -\frac{x}{2} \right) \right] \right\rangle p\beta. \quad (35)$$

Разумеется, операция умножения матричного элемента (1) на  $\theta(x^0)$ , как всегда, не является однозначной. Она, однако, может быть определена с точностью до конечной линейной комбинации  $\delta^4(x)$  и ее производных (см. §§ 53, 54). В импульсном представлении (формула (36) и далее) этому соответствует полиномиальный произвол. Соответствующие коэффициенты могут зависеть от  $p, p'$ ,

$\alpha, \beta$ . Вычисляя явно с помощью (1), (2), (10) фурье-образ

$$f^{\text{ret}}(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dx e^{iqx} \hat{f}^{\text{ret}}(x),$$

находим

$$f^{\text{ret}}(q) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^4u d\lambda^2 \Psi(u, \lambda^2)}{(q-u)^2 - \lambda^2 - i\epsilon (q^0 - u^0)}. \quad (36)$$

Аналогичным образом вычисляется фурье-образ матричного элемента «опережающего коммутатора». Его выражение может быть получено из (36) заменой  $-i\epsilon \rightarrow +i\epsilon$ . В симметричном случае (36) переходит в

$$f^{\text{ret}}(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_0} \frac{du d\lambda^2}{q_0^2 - (q-u)^2 - \lambda^2 - i\epsilon q^0} \{ \Phi_1(u, \lambda^2) + q^0 \Phi_2(u, \lambda^2) \}, \quad (37)$$

где область интегрирования  $S_0$  совпадает с областью интегрирования в представлении Йоста — Лемана (9) и определяется неравенствами (33).

Интегральные представления для матричного элемента обычного произведения токов

$$f_1(q) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int dx e^{iqx} \langle p', \alpha \left| j_1\left(\frac{x}{2}\right) j_2\left(-\frac{x}{2}\right) \right| p, \beta \rangle$$

и «причинного» матричного элемента

$$f^c(q) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int dx e^{iqx} \langle p', \alpha \left| T\left(j_1\left(\frac{x}{2}\right) j_2\left(-\frac{x}{2}\right)\right) \right| p, \beta \rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dx e^{iqx} \langle p', \alpha \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_1(x/2) \delta\varphi_2(-x/2)} \hat{S} \right| p, \beta \rangle, \quad (38)$$

$$f^c(q) = f^{\text{ret}}(q) + f_1(-q) \quad (39)$$

могут быть получены простым образом лишь при выполнении некоторых условий. Так, если в симметричном случае

$$m > a, \quad (40)$$

то  $f_1(q)$  содержит только положительные частоты, т. е.

$$f_1(q) = 0 \quad \text{при } q^0 < 0.$$

Поэтому, представляя  $f_1(q)$  в виде

$$f_1(q) = \theta(q^0) f(q),$$

с помощью (9) получаем

$$f_1(q) =$$

$$= \theta(q^0) \int du \int d\lambda^2 \delta(q_0^2 - (q-u)^2 - \lambda^2) [\Phi_1(u, \lambda^2) + q^0 \Phi_2(u, \lambda^2)]. \quad (41)$$

Используя связь (39), находим из (41) и (37)

$$f^c(q) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{du d\lambda^2}{q_0^2 - (q-u)^2 - \lambda^2 + i\epsilon} [\Phi_1(u, \lambda^2) + q^0 \Phi_2(u, \lambda^2)]. \quad (42)$$

Отметим, что полученные здесь интегральные представления являются непосредственными обобщениями интегральных представлений для вакуумных матричных элементов, рассмотренных в §§ 53, 54, и переходят в них в соответствующем предельном случае. Так, например, полагая в (1)

$$p = p' = 0, \quad j_1(x) = j_2(x) = i \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} \dagger,$$

получаем вакуумное ожидание от коммутатора псевдоскалярных токов (симметричный случай). В этом случае  $a = 0$  и в соответствии с (33) область интегрирования в представлении Йоста — Лемана имеет вид

$$u = 0, \quad \lambda^2 > m^2.$$

Полагая

$$\Phi_1(u, \lambda^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(u) J(\lambda^2), \quad \Phi_2 = 0,$$

получаем из (9)

$$f(q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \varepsilon(q^0) J(q^2),$$

что, с учетом (2), в точности соответствует спектральному представлению (53.30) для вакуумного ожидания коммутатора токов.

## § 56. Вывод дисперсионных соотношений для пион-нуклонного рассеяния

**56.1. Связь амплитуды рассеяния с «запаздывающим» и «опережающим» матричными элементами.** Считаем, что до акта рассеяния нуклон находится в состоянии, характеризуемом импульсом  $p$  и дискретными спиновым и изотопическим индексами, в совокупности обозначенными буквой  $s$ , и что пион находится в состоянии с импульсом  $q$  и дискретными индексами  $q$ . Соответствующие характеристики нуклона и пиона в состоянии после рассеяния обозначим штрихованными символами ( $p's'$  — для нуклона,  $q'q'$  — для пиона). Для дальнейшего будет удобным выделить особо импульсы пиона  $q$  и  $q'$ , обозначая совокупность остальных характеристик начального и конечного состояний одним символом:

$$\alpha = (p, s, q), \quad \omega = (p', s', q').$$

Амплитуда рассеяния указанного процесса будет выражаться через матричный элемент

$$\langle p's', q'q' | S | ps, qq \rangle.$$

Выделив из амплитуд начального и конечного состояний пионные операторы  $a_{\bar{q}}(q')$  и  $a_q^\dagger(q)$ , прокоммутируем  $a^\dagger$  с  $S$ -матрицей по

формуле (52.14):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}'s', q_0' | S | \mathbf{p}s, q_0 \rangle &= \langle \mathbf{p}'s' | a_{\bar{q}'}(q') S a_q^\dagger(q) | \mathbf{p}s \rangle = \\ &= \langle \mathbf{p}'s' | a_{\bar{q}'}(q') a_q^\dagger(q) S | \mathbf{p}s \rangle + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2q^0}} \int dy e^{-iqy} \langle \mathbf{p}'s' | a_{\bar{q}'}(q') \frac{\delta S}{\delta \varphi_q(y)} | \mathbf{p}s \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Для вычисления первого члена воспользуемся условием стабильности однонуклонного состояния. Выполняя затем коммутирование операторов, получим, что этот член равен произведению  $\delta$ -функций. Во втором члене следует коммутировать также  $a^-$  с  $\delta S/\delta \varphi$ . Принимая во внимание (25.21), получаем отсюда следующее выражение для амплитуды рассеяния:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{q}' - \mathbf{p}') f(\alpha \mathbf{q}, \omega \mathbf{q}') &= \\ &= \frac{\pi}{(2\pi)^3 i} \int dx dy e^{i(q'x - qy)} \langle \mathbf{p}'s' | \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_{q'}(x) \delta \varphi_q(y)} \hat{S}^\dagger | \mathbf{p}s \rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

$$p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}, \dots, q^0 = \sqrt{\mathbf{q}^2 + \mu^2}.$$

Используя условие трансляционной инвариантности (52.9) в подынтегральном выражении

$$\langle \mathbf{p}'s' | \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_{q'}(x) \delta \varphi_q(y)} \hat{S}^\dagger | \mathbf{p}s \rangle = e^{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2}} \langle \mathbf{p}'s' | \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{2}) \delta \varphi(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{2})} \hat{S}^\dagger | \mathbf{p}s \rangle$$

и выполняя явно одно интегрирование, получаем из (2)

$$f(\alpha \mathbf{q}, \omega \mathbf{q}') = \frac{2\pi^2}{i} \int dx e^{ix \cdot \frac{\mathbf{q}' + \mathbf{q}}{2}} \langle \mathbf{p}'s' | \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(\frac{\mathbf{x}}{2}) \delta \varphi(-\frac{\mathbf{x}}{2})} \hat{S}^\dagger | \mathbf{p}s \rangle. \quad (3)$$

Входящий под знак интеграла матричный элемент, по аналогии с рассмотренными в §§ 53, 54 вакуумными ожиданиями и введенными в § 55 одночастичными матричными элементами (ср. (55.38)), уместно назвать причинным матричным элементом

$$F^c(x) = \frac{2\pi^2}{i} \langle \mathbf{p}'s' | \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(\frac{\mathbf{x}}{2}) \delta \varphi(-\frac{\mathbf{x}}{2})} \hat{S}^\dagger | \mathbf{p}s \rangle. \quad (4)$$

В дальнейшем будет удобно использовать запаздывающий и опережающий матричные элементы

$$F_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}^{\text{ret}}(x) = \frac{2\pi^2}{i} \langle \mathbf{p}'s' | \frac{\delta}{\delta \varphi_{\mathbf{q}'}(\frac{\mathbf{x}}{2})} \left( \frac{\delta S}{\delta \varphi_{\mathbf{q}}(-\frac{\mathbf{x}}{2})} \hat{S}^\dagger \right) | \mathbf{p}s \rangle, \quad (5)$$

$$F_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}^{\text{adv}}(x) = \frac{2\pi^2}{i} \langle \mathbf{p}'s' | \frac{\delta}{\delta \varphi_{\mathbf{q}}(-\frac{\mathbf{x}}{2})} \left( \frac{\delta S}{\delta \varphi_{\mathbf{q}'}(\frac{\mathbf{x}}{2})} \hat{S}^\dagger \right) | \mathbf{p}s \rangle = F_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}^{\text{ret}}(-x), \quad (6)$$

обладающие свойствами

$$F^{\text{ret}}(x) = 0 \quad \text{при } x \lesssim 0, \quad (7)$$

$$F^{\text{adv}}(x) = 0 \quad \text{при } x \gtrsim 0, \quad (8)$$

а также «частотные» матричные элементы

$$F_{q'o'}^-(x) = \frac{2\pi^2}{i} \left\langle p's' \left| j_{o'}\left(\frac{x}{2}\right) j_{o'}\left(-\frac{x}{2}\right) \right| ps \right\rangle, \quad (9)$$

$$F_{qq'}^+(x) = \frac{2\pi^2}{i} \left\langle p's' \left| j_{o'}\left(-\frac{x}{2}\right) j_{o'}\left(\frac{x}{2}\right) \right| ps \right\rangle = F_{o'o}^-(x), \quad (10)$$

связанные с  $F^{\text{ret}}$ ,  $F^{\text{adv}}$  и  $F^c$  соотношениями

$$F^c = F^{\text{ret}} - F^+ = F^{\text{adv}} - F^-. \quad (11)$$

Целесообразно ввести представления Фурье для функций  $F(x)$

$$T_{\alpha\omega}(k) = \int dx e^{ikx} F(x). \quad (12)$$

Из определений (5) — (6) вытекают следующие соотношения для  $T(P_{qq'}$  — символ перестановки индексов  $q$  и  $q'$ ):

$$\left. \begin{aligned} T_{\alpha\omega}^{\text{ret}}(k) &= P_{qq'} T_{\alpha\omega}^{\text{adv}}(-k), \\ T_{\alpha\omega}^-(k) &= P_{qq'} T_{\alpha\omega}^+(-k), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

откуда с учетом (10) имеем также

$$T_{\alpha\omega}^c(k) = T_{\alpha\omega}^{\text{ret}}(k) - T_{\alpha\omega}^+(k) = T_{\alpha\omega}^{\text{adv}}(k) - T_{\alpha\omega}^-(k) \quad (14)$$

и

$$T_{\alpha\omega}^{\text{ret}}(k) - T_{\alpha\omega}^{\text{adv}}(k) = T_{\alpha\omega}^+(k) - P_{qq'} T_{\alpha\omega}^+(-k). \quad (15)$$

Заметим, что амплитуда рассеяния связана с  $T^c$  соотношением

$$f(\alpha q, \omega q') = T_{\alpha\omega}^c\left(\frac{q+q'}{2}\right). \quad (16)$$

Подобно вышеизложенному будем сводить причинную функцию  $T^c$  (или  $F^c$ ) к запаздывающей или опережающей, имея в виду, что в силу свойств (7) и (8) для аналитического продолжения более удобны функции  $F^{\text{ret}}$  и  $F^{\text{adv}}$ . С этой целью рассмотрим подробнее величину  $T^+$ :

$$T_{\alpha\omega}^+\left(\frac{q+q'}{2}\right) = \frac{2\pi^2}{i} \int dx e^{i\frac{q+q'}{2}x} \left\langle p's' \left| j_{o'}\left(\frac{-x}{2}\right) j_{o'}\left(\frac{x}{2}\right) \right| ps \right\rangle.$$

Используем свойство полноты системы функций (52.10). Совершая замены типа

$$j(z) = \hat{U}_{L_z}^\dagger j(0) U_{L_z}$$

и пользуясь свойством (52.9), получим после интегрирования по  $x$

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\omega}^+ \left( \frac{q+q'}{2} \right) &= \\
 &= \frac{2\pi^2}{i} \int dx e^{i \frac{q+q'}{2} x} \sum_n \int dk \langle p's' | j_0 \left( -\frac{x}{2} \right) | kn \rangle \langle kn | j_0 \left( \frac{x}{2} \right) | ps \rangle = \\
 &= \frac{(2\pi)^5 \pi}{i} \sum_n \delta \left( \sqrt{k^2 + M_n^2} + \frac{q^0 + q'^0 - p^0 - p'^0}{2} \right) \times \\
 &\quad \times \langle p's' | j_0(0) | kn \rangle \langle kn | j_0(0) | ps \rangle; \\
 k &= \frac{p+p'-q-q'}{2}. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Так как согласно (16) нас интересует область, в которой

$$p + q - p' - q' = 0,$$

то аргумент  $\delta$ -функции в сумме (17) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \sqrt{(p-q')^2 + M_n^2} + q'^0 - p^0 &= \\
 &= \sqrt{(p-q')^2 + M_n^2} + \sqrt{\mu^2 + q'^2} - \sqrt{M^2 + p^2}. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Поскольку выражение (18) находится под знаком  $\delta$ -функции, то должно быть

$$\sqrt{M_n^2 + (p-q')^2} + \sqrt{\mu^2 + q'^2} = \sqrt{M^2 + p^2}.$$

Это соотношение соответствует превращению частицы с массой  $M$  в две частицы с массами  $\mu$  и  $M_n$ . Но так как во всяком случае

$$M_n \geq M,$$

то такое превращение невозможно по соображениям сохранения энергии и импульса. Отсюда вытекает, что выражение (18) существенно положительно, вследствие чего  $T^+$  обращается в нуль.

Таким образом, в случае, когда матричные элементы берутся между состояниями реальных частиц, обладающими положительной энергией:

$$p^0 = \sqrt{p^2 + M^2} > 0 \quad \text{и т. д.,}$$

причем выполняется закон сохранения 4-импульса, то причинный матричный элемент совпадает с запаздывающим:

$$T_{\alpha\omega}^c(k) = T_{\alpha\omega}^{\text{ret}}(k) \quad \text{при } k^0 > \mu. \tag{19}$$

Принимая во внимание (16), находим отсюда

$$f(\alpha q, \omega q') = T_{\alpha\omega}^{\text{ret}} \left( \frac{q+q'}{2} \right). \tag{20}$$

Отметим, что соотношение (20) можно получить и непосредственно, если перед коммутированием  $a^-$  в (1) воспользоваться усло-

нием стабильности однонуклонного состояния  $|ps\rangle$  и коммутировать  $a^-$  не с  $\delta S/\delta\varphi(x)$ , а с  $i[\delta S/\delta\varphi(x)]\hat{S} = J(x)$ .

Совершенно аналогично можно установить, что

$$T_{\alpha\omega}^c(k) = T_{\alpha\omega}^{\text{adv}}(k) \quad \text{при } k^0 < -\mu. \quad (21)$$

**56.2. Переход к фиксированной системе отсчета. Трудности аналитического продолжения.** Как указывалось в § 52, для получения дисперсионных соотношений необходимо установить свойства аналитичности в комплексной плоскости энергетической переменной. Для запаздывающей функции одного аргумента на примере § 52 они были получены непосредственно из свойства, аналогичного (7).

В данном случае мы имеем дело с функциями большого числа независимых аргументов (импульсов различных частиц), причем в отличие от случая, рассмотренного в §§ 53, 54, эти аргументы не сводятся к одному скаляру (типа квадрата 4-импульса  $k^2$ ). Это приводит к существенному усложнению задачи.

Чтобы в явной форме выделить отдельные независимые переменные энергии и импульса, фиксируем теперь систему отсчета. Наиболее удобно воспользоваться общепринятой системой, в которой сумма импульсов нуклона до и после рассеяния равна нулю:

$$\mathbf{p} + \mathbf{p}' = 0 \quad (22)$$

(эта система переходит в лабораторную систему при рассеянии вперед, когда  $\mathbf{p} = \mathbf{p}' = 0$ ). В такой системе  $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}'^2$ , а также в силу закона сохранения энергии  $q^2 = q'^2$ . Закон сохранения импульса в свою очередь приводит к соотношениям

$$\mathbf{p} = \frac{q' - q}{2} \quad \text{и} \quad (q' + q)\mathbf{p} = 0. \quad (23)$$

Поэтому можно положить:

$$\frac{q' + q}{2} = \lambda e, \quad (24)$$

где  $e$  — единичный вектор, ортогональный  $\mathbf{p}$ :

$$e^2 = 1, \quad e\mathbf{p} = 0.$$

Из (23) и (24) вытекает, что

$$\mathbf{q} = -\mathbf{p} + \lambda e, \quad \mathbf{q}' = \mathbf{p} + \lambda e$$

и, следовательно,

$$q^2 = q'^2 = \mathbf{p}^2 + \lambda^2, \quad q^0 = q'^0 = \sqrt{\mu^2 + \mathbf{p}^2 + \lambda^2},$$

т. е. 4-векторный аргумент  $(q + q')/2$  можно заменить величинами  $\lambda$  и  $e$ . При этом наряду с  $\lambda$  удобно использовать энергию мезона

$$\frac{q^0 + q'^0}{2} = q^0 = E = \sqrt{\mu^2 + \mathbf{p}^2 + \lambda^2}. \quad (25)$$



При фиксированном  $p$  величины  $E$  и  $\lambda$  связаны взаимно однозначным образом.

Таким образом, в системе отсчета (22) интересующие нас величины  $T^{\text{ret}}$  могут быть представлены с помощью (12) в следующем виде:

$$T_{\alpha\omega}^{\text{ret}}(E, e) = \int dx e^{i(Ex^0 - ex\sqrt{E^2 - \mu^2 - p^2})} F_{\alpha\omega}^{\text{ret}}(x). \quad (26)$$

В соответствии с (7) интеграл в (26) фактически берется по верхнему световому конусу  $x^0 > |\mathbf{x}|$ .

Рассмотрим возможность аналитического продолжения выражения (26) на верхнюю половину комплексной плоскости переменной  $E$ . Заметим прежде всего, что для действительных положительных  $a$  всегда \*)

$$\text{Im} \sqrt{E^2 - a} > \text{Im} E. \quad (27)$$

Поэтому при добавлении к действительному  $E$  чисто мнимой величины  $i\Gamma$ :

$$E \rightarrow E + i\Gamma \quad (\Gamma > 0),$$

для каждого значения  $x^0$  всегда найдется область таких  $x$ , что

$$x^0\Gamma + ex \text{Im} \sqrt{E^2 - \mu^2 - p^2} > 0,$$

так что выражение (26) не будет обладать свойствами аналитичности в верхней полуплоскости переменной  $E$ .

Как видно, эта трудность полностью исключает возможность непосредственного аналитического продолжения (26) на область комплексных значений переменной  $E$ . Более того, выражение (26) имеет смысл для действительных  $E$  лишь при  $E^2 > \mu^2 + p^2$ , так как после перехода через точки ветвления  $E_0 = \pm \sqrt{\mu^2 + p^2}$  подынтегральное выражение приобретает возрастающий фактор  $\exp\{ex\sqrt{\mu^2 + p^2 - E^2}\}$  и теряет смысл.

Таким образом, (26) представляет функцию  $T$  лишь на двух отрезках действительной оси

$$-\infty < E < -\sqrt{\mu^2 + p^2}, \quad \sqrt{\mu^2 + p^2} < E < \infty$$

и не может быть непосредственно продолжена за их пределы.

Ясно также, что аналогичные трудности возникнут при попытке аналитического продолжения опережающей функции  $T^{\text{adv}}(E, e)$ . Поэтому для аналитического продолжения выражений  $T^{\text{ret}}$  и  $T^{\text{adv}}$  приходится прибегать к сложным искусственным приемам. Относительно более простой процедурой может считаться продолжение в случае рассеяния вперед, к рассмотрению которого мы сейчас перейдем.

\*) Непосредственное алгебраическое доказательство (27) громоздко. Проще воспользоваться графическими построениями в комплексной плоскости переменной  $E$ .

**56.3. Схема получения дисперсионных соотношений для амплитуды рассеяния вперед.** В случае рассеяния вперед, когда  $p = 0$ ,

$$T(E, e) = \int dx e^{i(Ex^0 - ex\sqrt{E^2 - \mu^2})} F(x), \quad (28)$$

а также

$$\begin{aligned} T^\pm \left( \frac{q+q'}{2} \right) &= T^\pm(q) = \\ &= \frac{(2\pi)^b \pi}{i} \delta(\sqrt{M^2 + q^2} - M \pm E) \sum_{s'} \langle 0s' | j_0(0) | qs' \rangle \langle qs' | j_{0'}(0) | 0s \rangle + \\ &+ \frac{(2\pi)^b \pi}{i} \sum_{(M_n > M + \mu)} \delta(\sqrt{M_n^2 + q^2} - M \pm E) \times \\ &\times \langle 0s' | j_0(0) | qn \rangle \langle qn | j_{0'}(0) | 0s \rangle. \end{aligned} \quad (29)$$

Формулу (28) можно использовать для аналитического продолжения амплитуды  $T$  на комплексные значения энергетической переменной  $E$ . Рассмотрим также соответствующее продолжение формулы (29), полагая

$$E^2 \neq \mu^2 + q^2$$

и рассматривая  $E$  как переменную, не зависящую от  $q$  (т. е. сойдем с массовой поверхности пи-мезона).

Первый член (29) дает вклад, отличный от нуля, при

$$E = \pm (\sqrt{M^2 + q^2} - M),$$

или, что то же, при

$$E = \pm \frac{E^2 - q^2}{2M} = \pm \frac{q^2}{2M}. \quad (30)$$

Вклад второго члена отличен от нуля при

$$|E| = \sqrt{M_n^2 + q^2} - M > \sqrt{(M + \mu)^2 + q^2} - M > (M + \mu) - M = \mu. \quad (31)$$

Таким образом, на отрезке действительной оси  $-\mu < E < \mu$  вклад в  $T$  дает лишь промежуточное однонуклонное состояние при двух значениях энергии, связанных с квадратом 4-импульса соотношением (30). Поэтому, если мы введем в рассмотрение вместо функций  $F$  выражение

$$\tilde{F}(x) = - \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^0} \right)^2 + \left( \frac{\square}{2M} \right)^2 \right] F(x), \quad (32)$$

что в импульсном представлении эквивалентно умножению на полином

$$\tilde{T}(q) = \left[ (q^0)^2 - \left( \frac{q^2}{2M} \right)^2 \right] T(q), \quad (33)$$

то при значениях  $-\mu < q^0 < \mu$  функции  $\tilde{T}^+$  и  $\tilde{T}^-$  будут равны нулю\*), вследствие чего\*\*)

$$\tilde{T}(q) = \tilde{T}^{\text{ret}}(q) = \tilde{T}^{\text{adv}}(q) \quad \text{при} \quad -\mu < q^0 < \mu. \quad (34)$$

Из (28) следует, что точки  $E = \pm \mu$  являются, вообще говоря, точками ветвления функций  $\tilde{T}$ . Чтобы устранить двужначность квадратного корня  $\pm \sqrt{E^2 - \mu^2}$ , проще всего рассматривать вместо функций  $T(E, e)$  их симметризованные и антисимметризованные комбинации

$$\left. \begin{aligned} S_+ T(E, e) &= \frac{T(E, e) + T(E, -e)}{2}, \\ S_- T(E, e) &= \frac{T(E, e) - T(E, -e)}{2\lambda}, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

совокупность которых мы в дальнейшем будем обозначать через  $ST$ . Функции  $ST^{\text{ret}}$  и  $ST^{\text{adv}}$  могут быть продолжены на область комплексных значений  $E$  следующим путем. Введем выражения

$$S \int \tilde{F}^{\text{ret}}(x) e^{i(Ex^0 - \epsilon x \sqrt{E^2 - \mu^2}) - \epsilon x^2} dx^0 dx = \Phi^r(E, e; \epsilon), \quad (36)$$

$$S \int \tilde{F}^{\text{adv}}(x) e^{i(Ex^0 - \epsilon x \sqrt{E^2 - \mu^2}) - \epsilon x^2} dx^0 dx = \Phi^a(E, e; \epsilon), \quad (37)$$

где в соответствии с (35)

$$S_+ e^{-i\epsilon x \sqrt{E^2 - \mu^2}} = \cos(\lambda \epsilon x), \quad S_- e^{-i\epsilon x \lambda} = \frac{\sin(\lambda \epsilon x)}{i\lambda}.$$

Ясно, во-первых, что из-за наличия множителя  $\exp(-\epsilon x^2)$  функция  $\Phi^r(E, e; \epsilon)$  будет аналитической в верхней полуплоскости комплексных значений  $E$ , а  $\Phi^a(E, e; \epsilon)$  — в нижней. Во-вторых, по (34)

$$\Phi^r(E, e; \epsilon) - \Phi^a(E, e; \epsilon) = 0 \quad \text{при} \quad -\mu \leq \text{Re } E < \mu, \quad \text{Im } E = 0.$$

Таким образом, совокупность функций  $\Phi^r$  и  $\Phi^a$  представляет собой функцию

$$\Phi(E, e; \epsilon) = \begin{cases} \Phi^r(E, e; \epsilon) & \text{при } \text{Im } E > 0, \\ \Phi^a(E, e; \epsilon) & \text{при } \text{Im } E < 0, \end{cases} \quad (38)$$

аналитическую во всей комплексной плоскости аргумента  $E$ , за исключением линий разреза

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} -\infty < \text{Re } E < -\mu & \quad \text{Im } E = 0 \\ \mu < \text{Re } E < \infty, & \quad \text{Im } E = 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

\*) В силу соотношений типа  $x\delta(x) = 0$ .

\*\*\*) Благодаря допущению  $p = 0$ , так как в противном случае неравенство (31) нарушается.

При этом значения  $\Phi$  на верхних берегах разрезов равны значениям  $\Phi^r$ , а на нижних — значениям  $\Phi^a$ .

Обозначая теперь порядок роста функции  $\Phi$  при больших  $E$  через  $n + 1$  можно использовать интегральную теорему Коши для выражения

$$\frac{\Phi(E, e; \varepsilon)}{(E - E_0)^{n+2}},$$

где  $E_0$  — некоторый вещественный параметр, значения которого находятся в интервале  $(-\mu, +\mu)$ .

Выберем контур интегрирования, состоящий из окружности малого радиуса  $\delta$  вокруг точки  $E_0$ , двух полуокружностей большого радиуса  $R$  и соединяющих их контуров вдоль линий разреза, отстоящих от последних на расстоянии  $\delta$  (рис. 68). Устремляя  $R$  к бесконечности, интегралы по большим

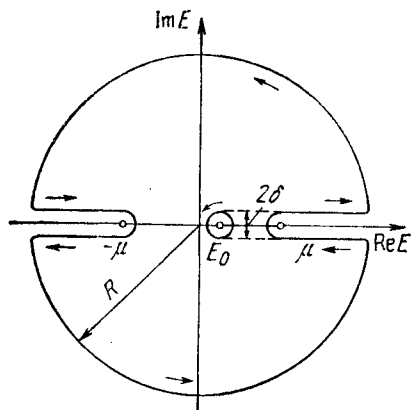


Рис. 68.

полуокружностям обратим в нуль. Переходя затем к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ , получим

$$\begin{aligned} \Phi(E, e; \varepsilon) = & \frac{(E - E_0)^{n+2}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\mu} \frac{\Phi(E' + i0, e; \varepsilon) - \Phi(E' - i0, e; \varepsilon)}{(E' - E)(E' - E_0)^{n+2}} dE' + \\ & + \frac{(E - E_0)^{n+2}}{2\pi i} \int_{\mu}^{\infty} \frac{\Phi(E' + i0, e; \varepsilon) - \Phi(E' - i0, e; \varepsilon)}{(E' - E)(E' - E_0)^{n+2}} dE' + \tilde{P}_{n+1}(E), \end{aligned} \quad (40)$$

где  $\tilde{P}_{n+1}(E)$  — полином  $(n + 1)$ -ой степени от  $E$ . В интегралах (40) перейдем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ввиду того, что интегрирование проводится по наблюдаемой области  $E'^2 > \mu^2$ , в соответствии с (36) и (37) числители подынтегральных выражений примут вид

$$\Phi^r(E', e; 0) - \Phi^a(E', e; 0) = S\tilde{T}^{\text{ret}}(E', e) - S\tilde{T}^{\text{adv}}(E', e).$$

При этом сами интегралы, умноженные на  $(E - E_0)^{n+2}$ , при  $\varepsilon = 0$  будут представлять функции, аналитические во всей плоскости комплексного переменного  $E$ , за исключением линий разреза (39). Из (40) следует поэтому, что при  $\varepsilon = 0$  правая часть определяет функцию  $\Phi(E, e; 0)$  аналитическую во всей плоскости  $E$ , за исключением двух упомянутых разрезов. Но, как следует из (33), (36), (37) и (40),  $\Phi(E, e; 0)$  отличается от функции

$$ST(E, e) = \begin{cases} S\tilde{T}^{\text{ret}}(E, e) & \text{при } \text{Im } E > 0, \\ S\tilde{T}^{\text{adv}}(E, e) & \text{при } \text{Im } E < 0 \end{cases} \quad (41)$$

лишь множителем

$$E^2 - \left(\frac{E^2 - q^2}{2M}\right)^2,$$

который на массовой поверхности (при  $E^2 = \mu^2 + q^2$ ) принимает вид

$$E^2 - \left(\frac{\mu^2}{2M}\right)^2 = \left(E - \frac{\mu^2}{2M}\right) \left(E + \frac{\mu^2}{2M}\right). \quad (42)$$

Итак, возвращаясь на массовую поверхность, получаем

$$\Phi(E, e, 0) = S\tilde{T}(E, e) = [E^2 - (\mu^2/2M)^2] ST(E, e).$$

Поэтому ясно, что функция  $ST(E, e)$  также будет аналитической во всей комплексной области переменной  $E$ , за исключением двух линий разреза (39) и точек, в которых множитель (42) обращается в нуль. В последних, лежащих вне разрезов, функция  $ST(E, e)$  будет иметь полюсы первой степени. При этом на бесконечности функция  $ST$  будет возрастать не быстрее полинома  $(n - 1)$ -го порядка.

Следовательно, к функции

$$ST(E, e)/(E - E_0)^n$$

можно применить интегральную формулу Коши, причем контур интегрирования следует выбирать с учетом наличия дополнительных полюсов, связанных с множителем (42):

$$E_1 = \frac{\mu^2}{2M} < \mu, \quad E_2 = -E_1 = -\frac{\mu^2}{2M},$$

т. е. добавить две окружности вокруг этих полюсов (см. рис. 69).

Переходя затем к пределу при  $R \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ , сведем интегральный член к интегралам по наблюдаемой области ( $-\infty < E < -\mu$ ), ( $\mu < E < \infty$ ) (аналогично (40)) и к вычетам в полюсах  $\pm E_1$ .

Получим

$$ST(E, e) = \frac{S\tilde{T}(E_1, e)}{2E_1(E - E_1)} + \frac{S\tilde{T}(E_2, e)}{2E_2(E - E_2)} + \frac{(E - E_0)^n}{2\pi i} \left( \int_{\mu}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\mu} \right) \frac{ST^{\text{ret}}(E', e) - ST^{\text{adv}}(E', e)}{(E' - E)(E' - E_0)^n} dE' + P_{n-1}(E). \quad (43)$$

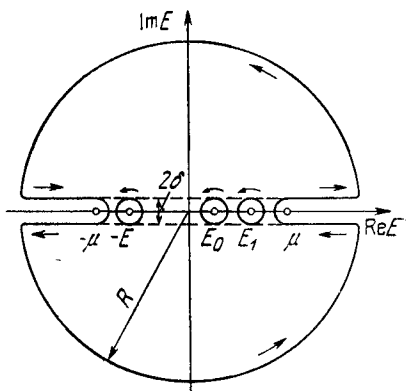


Рис. 69. Контур интегрирования при получении дисперсионного соотношения для рассеяния вперед.

При этом согласно (41), (20) и (16) физическая амплитуда рассеяния  $f$  выражается через предельные значения функции  $ST$  на верхнем берегу правого разреза

$$ST(E+i0, \mathbf{e}) = ST^{\text{ret}}(E, \mathbf{e}), \quad \text{Im } E = 0, \quad E > \mu. \quad (44)$$

Уравнение (43) представляет собой *спектральное представление* для амплитуды  $ST$ , продолженной на комплексную плоскость переменной  $E$ . Если с помощью (44) выполнить в (43) предельный переход к действительным физическим значениям  $E$ , лежащим на верхнем берегу правого (физического) разреза, то мы получим *дисперсионное соотношение* для амплитуды пион-нуклонного рассеяния, по своей общей структуре вполне аналогичное соотношениям (52.4) и (52.5). Мы приведем этот переход во всех деталях в § 57, где будут получены в явном виде так называемые физические дисперсионные соотношения для пион-нуклонного рассеяния вперед.

**56.4. Случай рассеяния при  $p \neq 0$ .** Рассмотрим теперь вкратце более общий случай рассеяния, отличного от рассеяния вперед. При этом мы будем обсуждать свойства амплитуды рассеяния по энергетической переменной  $E$  при фиксированном значении передачи импульса  $p \neq 0$  (а, скажем, не угла рассеяния  $\theta$ ). В § 56.2, амплитуда рассеяния была представлена интегралом

$$T^c(E, \mathbf{e}) = \int e^{i(Ex^0 - \lambda \mathbf{e} \cdot \mathbf{x})} F^c(x) dx, \quad (45)$$

причем

$$\lambda^2 = E^2 - p^2 - \mu^2.$$

Там было показано, что все трудности аналитического продолжения в область комплексных значений  $E$  были связаны с тем, что

$$\lambda^2 < E^2. \quad (46)$$

Можно ослабить неравенство (46), формально перейдя от  $\mu^2$  к новой переменной  $\tau$ ,

$$\lambda^2 = E^2 - p^2 - \tau, \quad (47)$$

ограниченной условием

$$\tau < -p^2, \quad (48)$$

т. е. рассматривая вместо  $T(E, \mathbf{e})$  функцию  $T(E, \mathbf{e}, \tau)$ . Такая операция эквивалентна выходу с массовой поверхности пи-мезона. Изучение аналитических свойств амплитуды  $T(E, \mathbf{e}, \tau)$  в комплексной плоскости переменной  $E$  теперь уже не встречает каких-либо существенных затруднений. Здесь оказывается возможным построить дисперсионные соотношения по  $E$  для  $T(E, \mathbf{e}, \tau)$ . На этом пути довольно сложным оказывается обратный переход на массовую поверхность пиона. Эта процедура выполняется с помощью довольно тонких математических рассуждений, использующих технику аналитического продолжения обобщенных функций. Впервые эта техника была развита Боголюбовым в середине 50-х годов.

Наиболее общим и классическим результатом здесь является теорема о возможности объединения опережающей и запаздывающей функций в единую аналитическую функцию (см. монографию Боголюбова — Медведева — Поливанова (1958) — дополнение А, теорема I). Впоследствии эта теорема получила название теоремы об «острие клина» («edge of the wedge»). Рассуждения, основанные на использовании этой теоремы, и позволяющие доказывать дисперсионные соотношения для разных случаев. Этим путем удалось доказать дисперсионные соотношения для пион-нуклонного рассеяния при фиксированном  $t = -(\Delta p)^2$  в интервале

$$t_{\min} < t < 0; \quad t_{\min} = -8\mu^2.$$

Дальнейшее развитие эти методы получили в работах Боголюбова, Владимирова (1958), Бремермана, Оме, Тейлора (1958), Лемана (1959), Владимирова, Логунова (1959), Оме, Тейлора (1959), Тодорова (1960) и др. В частности, Леман (1959), используя представление Йоста — Лемана — Дайсона увеличил  $|t_{\min}|$  до

$$t_{\min} \simeq -\frac{32}{3}\mu^2.$$

## § 57. Дисперсионные соотношения для пион-нуклонного рассеяния вперед

**57.1. Переход к вещественным величинам.** В § 56.3 было установлено, что для любого  $E$ , не лежащего на действительной оси ( $\text{Im } E \neq 0$ ), имеет место соотношение (56.43), причем функция  $ST(E, e)$  является продолжением амплитуды пион-нуклонного рассеяния вперед на комплексные значения энергетической переменной  $E$ . Согласно (56.44) физическим значениям амплитуды рассеяния соответствуют значения функции  $ST(E, e)$  на верхнем берегу правого разреза. Интеграл в правой части (56.43) распространяется на физическую область ( $\mu < E < \infty$ ), а также на левый разрез ( $-\infty < E < -\mu$ ). Покажем прежде всего, что числитель подынтегрального выражения в интеграле по физической области выражается через физическую амплитуду рассеяния.

Рассмотрим с этой целью свойства эрмитовости функций  $ST^{\text{ret}}$  и  $ST^{\text{adv}}$ . Заметим прежде всего, что из определения (56.5) непосредственно следует:

$$\tilde{F}_{\alpha\omega}^{\text{ret}*}(x) = P_{\varrho\varrho'} F_{\omega\alpha}^{\text{ret}}(x). \quad (1)$$

Отсюда в свою очередь вытекает соотношение эрмитовости в импульсном представлении

$$\tilde{T}_{\alpha\omega}^{\text{ret}*}(k) = P_{\varrho\varrho'} T_{\omega\alpha}^{\text{ret}}(-k). \quad (2)$$

С другой стороны, на основании (56.13) имеем

$$T_{\alpha\omega}^{\text{adv}}(k) = P_{\varrho\varrho'} T_{\omega\alpha}^{\text{ret}}(-k). \quad (3)$$

Комбинируя (2) и (3), получаем

$$T_{\alpha\omega}^{\dagger\text{adv}}(k) = T_{\alpha\omega}^{\text{ret}}(k). \quad (4)$$

Здесь введено обозначение

$$T_{\alpha\omega}^{\dagger}(k) \equiv \tilde{T}_{\omega\alpha}^*(k). \quad (5)$$

Переходя в (4) к аргументам  $E$  и  $\epsilon$ , получаем также

$$ST_{\alpha\omega}^{\dagger\text{adv}}(E) = ST_{\alpha\omega}^{\text{ret}}(E). \quad (6)$$

Соотношение (6) является очень важным, так как из него непосредственно вытекает, что линейные комбинации

$$\frac{ST_{\alpha\omega}^{\text{ret}}(E) + ST_{\alpha\omega}^{\text{adv}}(E)}{2} = D_{\alpha\omega}(E) \quad (7)$$

и

$$\frac{ST_{\alpha\omega}^{\text{ret}}(E) - ST_{\alpha\omega}^{\text{adv}}(E)}{2i} = A_{\alpha\omega}(E) \quad (8)$$

являются эрмитовыми:

$$\dot{D}_{\alpha\omega}(E) = D_{\alpha\omega}(E), \quad \dot{A}_{\alpha\omega}(E) = A_{\alpha\omega}(E), \quad (9)$$

и представляют собой эрмитову и антиэрмитову части функции  $ST^{\text{ret}}$ , т. е.

$$ST^{\text{ret}}(E) = D(E) + iA(E). \quad (10)$$

Таким образом, согласно (8), числитель подынтегрального выражения в физическом интеграле в правой части (56.43) представляет собой антиэрмитову часть физической амплитуды  $ST^{\text{ret}}$ .

Выберем теперь какое-либо значение комплексного аргумента  $E$  над физическим разрезом  $\text{Re}E > \mu$ ,  $\text{Im}E > 0$  и проведем предельный переход на действительную ось, т. е.

$$E \rightarrow E + i\epsilon, \quad E > \mu, \quad \epsilon \rightarrow +0.$$

Пользуясь для левой части уравнения (56.43) формулой (56.44), а для правой — (8), получаем

$$D_{\alpha\omega}(E) = \frac{\tilde{D}_{\alpha\omega}(E_1)}{2E_1(E-E_1)} + \frac{\tilde{D}_{\alpha\omega}(E_2)}{2E_2(E-E_2)} + \\ + \frac{(E-E_0)^n}{\pi} \left( \oint_{\mu}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\mu} \right) \frac{A_{\alpha\omega}(E') dE'}{(E'-E)(E'-E_0)^n} + P_{n-1}(E), \quad (11)$$

причем интеграл по физической области следует рассматривать как интеграл в смысле главного значения.

Полюсные члены в правой части (11) можно формально включить в интеграл, если положить, что антиэрмитова часть  $A_{\alpha\omega}$  со-



держит одночастичный подпороговый вклад

$$[A_{\alpha\omega}(E)]_1 = -\frac{\pi\tilde{D}_{\alpha\omega}(E_1)}{2E_1} \delta(E - E_1) - \frac{\pi\tilde{D}_{\alpha\omega}(E_2)}{2E_2} \delta(E - E_2). \quad (12)$$

Эта формула соответствует связям (8), (56.15) и представляет собой вклад однонуклонного члена из суммы (56.29) в антиэрмитову часть амплитуды.

Этот член содержит произведения однонуклонных матричных элементов тока  $j_0(0)$ , которые из соображений изотопической и лоренцевой ковариантности могут быть представлены в виде

$$\langle p's' | j_0(0) | ps \rangle = \frac{ig((p-p')^2)}{(2\pi)^3} \bar{v}^{s'} + (p') \gamma^5 \tau_0 v^s - (p), \quad (13)$$

где  $g$  — некоторая функция квадрата 4-вектора  $p - p'$ .

В интересующем нас случае матричные элементы типа (13) берутся между состояниями, для которых  $(p - p')^2 = \mu^2$ . Вещественную постоянную

$$g = g(\mu^2) \quad (14)$$

назовем *постоянной пион-нуклонного взаимодействия*. Отметим, что такое определение константы  $\pi N$ -взаимодействия является совершенно естественным. Если воспользоваться соображениями соответствия с лагранжианом пион-нуклонного взаимодействия в виде (8.8)

$$\mathcal{L}(x) = ig_0 : \bar{\Psi}(x) \gamma^5 \tau \Psi(x) \varphi(x) :$$

и вычислить левую часть для «свободного пионного тока»

$$(j_0(0))_0 = -ig_0 : \bar{\Psi}(0) \gamma^5 \tau_2 \Psi(0) :,$$

то мы получим в правой части (13)  $g_0$  вместо  $g((p - p')^2)$ . С другой стороны, матричный элемент  $\langle p's' | j_0(0) | ps \rangle$  в действительности содержит все высшие поправки и соответствует диаграмме, изображенной на рис. 70. Заштрихованный круг здесь описывает  $\pi NN$  вершинную функцию, а крестиком (X) символически обозначен пионный ток  $j_0(0)$ .

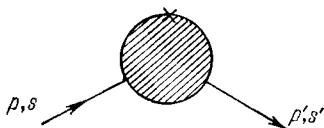


Рис. 70.

Таким образом, матричный элемент (13) описывает вершинную функцию, изображенную на рис. 70, которая в общем случае является функцией квадратов всех трех входящих в нее 4-импульсов  $p^2, p'^2, (p - p')^2$ . В случае (13) два из этих квадратов фиксированы  $p'^2 = p^2 = M^2$ , и мы приходим к функции одной переменной  $g((p - p')^2)$ . Эта функция известна как *пион-нуклонный формфактор*. При  $(p - p')^2 < (3\mu)^2$  она является действительной.

Следует отметить, что для действительных 4-векторов  $p$  и  $p'$ , лежащих на массовой поверхности ( $p^2 = p'^2 = M^2$ ), величина

$q^2 = (p - p')^2$  может принимать значения  $q^2 < 0$  и  $q^2 > 4M^2$ . Поэтому точка  $q^2 = \mu^2$  не является физической точкой. Выбор этой точки для определения перенормированной константы  $\pi N$ -взаимодействия является результатом соглашения и определяется соображениями формального удобства, так как именно величина (14) входит в одноуклонный член дисперсионных соотношений.

Как хорошо известно, процедура введения мезонного заряда и в обычной теории не является однозначной. Дело заключается в том, что из-за отличия массы мезона  $\mu$  от нуля радиус действия ядерных сил является конечным. Это приводит к невозможности (в противоположность электродинамике) построить классическую макроскопическую мезодинамику и связать процедуру определения мезонного заряда с макроскопическими экспериментами наподобие опыта Милликена и опыта с отклонением бузиновых шариков. Ввиду этого мезонный заряд  $g$  придется вводить тем или иным образом с помощью исходных величин теории и определять затем его численное значение путем сравнения результатов теории с данными микроскопических экспериментов. Ясно, что способ введения мезонного заряда сам по себе не является существенным, однако какой-либо конкретный способ определения численного значения  $g$  необходимо фиксировать.

В соответствии с (13) формула (14) с точки зрения обычной теории соответствует определению

$$g\gamma^5\tau_0 = g_0\Gamma_0^5(M^2, M^2; \mu^2), \quad (15)$$

где  $g_0$  — затравочный заряд, входящий в лагранжиан взаимодействия (8.8), а  $\Gamma_0^5$  — вершинный оператор. Фиксируя процедуру доопределения хронологических произведений так, чтобы

$$\Gamma_0^5(M^2, M^2; \mu^2) = \gamma^5\tau_0, \quad (16)$$

получаем возможность отождествить  $g_0$  с  $g$ .

Отметим еще, что функция  $\Gamma_0^5(M^2, M^2; \mu^2)$  не имеет прямого отношения к реальным процессам, поскольку испускание (или поглощение) реального мезона ( $q^2 = \mu^2$ ) реальным нуклоном ( $p^2 = M^2$ ,  $(p \pm q)^2 = M^2$ ) запрещено законом сохранения энергии-импульса.

Подставляя (13) в первый член правой части (56.17), получаем одноуклонные вклады в виде

$$(T^+(q))_1 = \frac{g^2}{2i} \left(1 - \frac{\mu^2}{2M^2}\right) \delta\left(E - \frac{\mu^2}{2M}\right) \{\dots\}_{qq'}^{s's}, \quad (17)$$

$$(T^-(q))_1 = \frac{g^2}{2i} \left(1 - \frac{\mu^2}{2M^2}\right) \delta\left(E + \frac{\mu^2}{2M}\right) \{\dots\}_{qq'}^{s's}, \quad (18)$$

причем

$$\begin{aligned} \{\dots\}_{qq'}^{s's} &= \bar{v}^{s'} + (p') \tau_0 \tau_0 \frac{\hat{k} - M}{2k^0} v^s - (p); \\ k^0 &= \sqrt{k^2 + M^2} = M - \frac{\mu^2}{2M}, \quad k = -\lambda e. \end{aligned} \quad (19)$$

Используя связи (56.15), (8), с помощью (17) и (18) можем теперь выразить коэффициенты в однополюсных членах (12) через  $g^2$ . Эту процедуру удобно выполнить, явно учитывая спиновую и изотопическую структуру амплитуды пион-нуклонного рассеяния.

**57.2. Изотопическая и спиновая структура.** Из соображений ковариантности в обычном трехмерном пространстве вытекает, что амплитуда  $T^{\text{rel}}$  может быть представлена в виде суммы члена, не зависящего от спина нуклона  $\sigma$  (диагонального по спиновым индексам  $s, s'$ ), и члена, линейного по  $\sigma$ . Линейный член должен содержать произведение  $\sigma$  на какой-либо аксиальный вектор. Из имеющихся векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{e}$  можно образовать только один аксиальный вектор  $[\mathbf{p} \times \lambda \mathbf{e}]$ . Имеем, таким образом,

$$T_{\alpha\omega}^{\text{rel}} = \delta_{s's} T_{(1)} + i (\sigma [\mathbf{p} \times \lambda \mathbf{e}])_{ss'} T_{(2)}. \quad (20)$$

Отметим, что второй член в (20), описывающий переворот спина нуклона, равен нулю для рассеяния вперед (при  $\mathbf{p} = 0$ ). Произведение  $[\mathbf{p} \times \lambda \mathbf{e}]$  пропорционально синусу угла рассеяния  $\sin \theta$  в лабораторной системе координат. Чтобы учесть главный вклад в амплитуду с переворотом спина, при малых углах рассеяния обычно рассматривают  $T_{(2)}$  для рассеяния вперед. Для того чтобы выделить соответствующую структуру в выражениях типа (19), следует рассмотреть малые члены, пропорциональные первым степеням  $\mathbf{p} = -\mathbf{p}'$ :

$$2k^0 \{ \dots \}_{\mathbf{e}'\mathbf{e}}^{s's} = \tau_{\mathbf{e}'} \tau_{\mathbf{e}} \left( \delta_{s's} E_1 + i \sigma_{s's} [\mathbf{p} \times \mathbf{e}] \frac{\lambda}{2M} \right). \quad (21)$$

Принимая еще во внимание изотопическую структуру функций  $T_{(1,2)}$  (см. Приложение I)

$$T_{(i)} = \delta_{\mathbf{e}'\mathbf{e}} \delta_{\mathbf{e}'\mathbf{e}} T_{(i)}^{(1)} + \frac{[\tau_{\mathbf{e}'}, \tau_{\mathbf{e}}]_{\mathbf{e}'\mathbf{e}}}{2} T_{(i)}^{(2)}, \quad (22)$$

приходим к четырем структурным функциям

$$T_{(i)}^{(k)} \quad (k, i = 1, 2) \quad (23)$$

амплитуды пион-нуклонного рассеяния.

Операция  $S$  при этом отделяет амплитуду с переворотом спина  $T_{(2)}$  от амплитуды  $T_{(1)}$ :

$$S_+ T = \delta_{s's} T_{(1)}, \quad S_- T = i \sigma [\mathbf{p} \times \mathbf{e}] T_{(2)}, \quad (24)$$

а операции симметризации и антисимметризации по изотопическому индексу отделяют амплитуды  $T^{(1)}$  от  $T^{(2)}$ :

$$\frac{1+P_{\mathbf{e}\mathbf{e}'}}{2} T = T^{(1)}, \quad \frac{1-P_{\mathbf{e}\mathbf{e}'}}{2} T = \frac{[\tau_{\mathbf{e}'}, \tau_{\mathbf{e}}]}{2} T^{(2)}. \quad (25)$$

Для одноуклонных вкладов с помощью (17), (18), (21) получаем вместо (12)

$$\begin{aligned} (A_{(i)}^{(1)})_1 &= \frac{1}{2i} S_+ \frac{1+P_{\sigma^*0}}{2} \{(T^+)_1 - (T^-)_1\} = \\ &= \frac{g^2 E_1}{4M} [\delta(E - E_1) - \delta(E + E_1)], \quad E_1 = \frac{\mu^2}{2M}, \\ (A_{(i)}^{(2)})_1 &= -\frac{g^2 E_1}{4\mu^2 M} [\delta(E - E_1) + \delta(E + E_1)], \\ (A_{(i)}^{(3)})_1 &= \frac{g^2 E_1}{4M} (\delta(E - E_1) + \delta(E + E_1)), \\ (A_{(i)}^{(4)})_1 &= -\frac{g^2 E_1}{4\mu^2 M} (\delta(E - E_1) - \delta(E + E_1)). \end{aligned} \quad (26)$$

**57.3. Свойства симметрии по энергии.** Учтем теперь свойства симметрии по  $E$  амплитуд (23). Комбинируя соотношения (3), (4), (7) и (8), имеем

$$(1 \pm P_{\sigma^*0}) D_{\alpha\omega}(q) = (P_{\sigma^*0} \pm 1) D_{\alpha\omega}(-q), \quad (27)$$

$$(1 \pm P_{\sigma^*0}) A_{\alpha\omega}(q) = -(P_{\sigma^*0} \pm 1) A_{\alpha\omega}(-q). \quad (28)$$

С учетом явной зависимости (20) от вектора  $q = \lambda e$  и соотношений (24) получаем теперь свойства четности действительных и мнимых частей структурных функций (23)

$$D_{\text{чет}}(E) = \{D_{(i)}^{(1)}(E), D_{(i)}^{(3)}(E)\}, \quad D_{\text{неч}}(E) = \{D_{(i)}^{(2)}(E), D_{(i)}^{(4)}(E)\}, \quad (29)$$

$$A_{\text{чет}}(E) = \{A_{(i)}^{(3)}(E), A_{(i)}^{(1)}(E)\}, \quad A_{\text{неч}}(E) = \{A_{(i)}^{(1)}(E), A_{(i)}^{(3)}(E)\} \quad (30)$$

Отметим, что одноуклонные вклады (26) в абсорбтивные части  $(A_{(k)}^{(l)})$ , обладают свойствами четности (30).

С помощью свойств четности  $A_{(k)}^{(l)}$  мы можем теперь выразить в (11) интегралы по области отрицательных энергий  $E' < -\mu$  через интегралы по области положительных физических значений энергии  $E' > \mu$ . Для того чтобы записать дисперсионные соотношения (11) в окончательном виде, необходимо еще фиксировать степень роста  $n + 1$ .

Мы положим  $n = 2$ , т. е. будем считать, что степень роста амплитуд  $T_{(k)}^{(l)}$  соответствует тому, что асимптотическое поведение амплитуды рассеяния в области больших энергий удовлетворяет условию

$$\frac{T_{(k)}^{(l)}(E)}{E^2} \rightarrow 0, \quad (31)$$

причем стремление к нулю происходит степенным образом. Условие (31) можно получить (см. Джин, Мартэн (1964); Логунов, Нгуен Ван Хьеу, Хрусталева (1969)), если предположить, что дисперсионные соотношения справедливы при конечном  $n$  для фиксированного  $l$ , лежащего в некоторой области  $0 > t > t_{\text{min}}$ . Существуют

щие экспериментальные данные по полным сечениям указывают, что эти сечения слабо меняются в области высоких энергий и, видимо, растут пропорционально  $\ln E$  (или  $\ln^2 E$ ), что не противоречит (31).

При  $n = 2$  дисперсионные соотношения (11) требуют двух вычитаний. Эти вычитания обычно делают в точке  $E = \mu$ , т. е. на физическом пороге. Такое вычитание удобно тем, что вводимые при этом константы вычитания выражаются через пороговые значения амплитуды рассеяния, которые в свою очередь сводятся к  $s$ - и  $p$ -волновым длинам рассеяния.

Полагая в (11)  $n = 2$  и  $E_0 = \mu$ , получаем с учетом (29) и (26)

$$D_{\text{чет}}(E) - D_{\text{чет}}(\mu) = \frac{E^2 - \mu^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{A_{\text{неч}}(E') dE'^2}{(E'^2 - E^2)(E'^2 - \mu^2)}, \quad (32)$$

$$D_{\text{неч}}(E) - \frac{E}{\mu} D_{\text{неч}}(\mu) = 2E \frac{E^2 - \mu^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{A_{\text{чет}}(E') dE'}{(E'^2 - E^2)(E'^2 - \mu^2)}. \quad (33)$$

**57.4. Физические дисперсионные соотношения.** Переходя к конкретным функциям  $T_{(k)}^{(i)}$  с учетом явного вида однонуклонных вкладов (26), получаем из (22) и (33) для амплитуд рассеяния без переворота спина

$$D_{(i)}^{(1)}(E) - D_{(i)}^{(1)}(\mu) = \frac{g^2}{2\pi} \frac{E_1^2 (M - E_1) q^2}{M^2 (E^2 - E_1^2) (\mu^2 - E_1^2)} + \frac{q^2}{\pi} \int_\mu^\infty \frac{A_{(i)}^{(1)}(E') dE'^2}{(E'^2 - E^2) q'^2}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} D_{(i)}^{(2)}(E) - \frac{E}{\mu} D_{(i)}^{(2)}(\mu) &= \\ &= -\frac{g^2}{2\pi} \frac{E_1 (M - E_1) q^2 E}{M^2 (E^2 - E_1^2) (\mu^2 - E_1^2)} + \frac{2E q^2}{\pi} \int_\mu^\infty \frac{A_{(i)}^{(2)}(E') dE'}{(E'^2 - E^2) q'^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Выразим теперь амплитуды  $T_{(i)}^{(j)}$  через амплитуды рассеяния заряженных пионов на протоне

$$T_{\pm} \equiv T(\pi^{\pm} p \rightarrow \pi^{\pm} p)$$

с помощью соотношений (см. Приложение 1, формулы (П. 1В. 11))

$$T_{(i)}^{(1)} = \frac{T_+ + T_-}{2}, \quad T_{(i)}^{(2)} = \frac{T_- - T_+}{2} \quad (36)$$

и воспользуемся оптической теоремой (52.19)

$$\text{Im } T_{\pm}(E) = \frac{q}{4\pi} \sigma_{\pm}(E), \quad q = \sqrt{E^2 - \mu^2},$$

Получим вместо (34), (35) физические дисперсионные соотношения для рассеяния  $\pi^+$ - и  $\pi^-$ -мезонов на протоне

$$D_{\pm}(E) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E}{\mu}\right) D_{\pm}(\mu) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E}{\mu}\right) D_{\mp}(\mu) + \\ + \frac{2f^2}{\mu^2} \frac{q^2}{E_{\mp} \frac{\mu^2}{2M}} + \frac{q^2}{4\pi^2} \int_{\mu}^{\infty} \frac{dE'}{q'} \left[ \frac{\sigma_{\pm}(E')}{E' - E} + \frac{j_{\mp}(E')}{E' + E} \right]. \quad (37)$$

В однонуклонном члене здесь мы перешли к новой константе связи

$$j^2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{g\mu}{2M}\right)^2 \quad (38)$$

и пренебрегли малыми членами  $\mu^2/M^2 \simeq 0,02$ . Постоянная  $f$  известна как константа векторного пион-нуклонного взаимодействия. Аналогичным образом можно записать дисперсионные соотношения для амплитуд с переворотом спина. Основной интерес, однако, представляют дисперсионные соотношения (37). Они содержат величины, непосредственно наблюдаемые на опыте: полные сечения рассеяния  $\pi^{\pm}$ -мезонов на протонах и действительные части упругих амплитуд  $\pi^{\pm}p$ -рассеяния на нулевой угол. Полные сечения  $\sigma_{\pm}(E)$  наблюдаются непосредственно, а для определения  $D_{\pm}(E)$  необходимо привлечь данные о дифференциальных упругих сечениях вперед:

$$\frac{d\sigma_{\pm}^{el}}{d\Omega} \Big|_{\theta=0} = |T_{\pm}(E)|^2 = D_{\pm}^2(E) + A_{\pm}^2(E) = D_{\pm}^2(E) + \frac{q^2}{16\pi^2} \sigma_{\pm}^2(E). \quad (39)$$

Знак  $D_{\pm}$  определяется по интерференции с кулоновским рассеянием. Пороговые значения амплитуд  $D_{\pm}(\mu)$  выражаются через  $s$ -волновые длины  $\pi N$ -рассеяния. Таким образом, единственным свободным параметром в (37) является  $f^2$ . Поэтому проверка дисперсионных соотношений (37) состоит в установлении того, что существует значение  $f^2$ , для которого левые и правые части обоих соотношений (37) равны друг другу. Такая процедура одновременно позволяет определить численное значение  $f^2$  (и  $g^2$ ).

Результаты проверки дисперсионных соотношений (см., например, § 36 в обзоре Хоргана и Жакоба (1981)) показывают, что дисперсионные соотношения хорошо согласуются с экспериментальными данными в широком интервале энергий при  $f^2 = 0,08$  ( $g^2/4\pi = 14,7$ ). Таким образом, общие принципы локальной квантовой теории поля, положенные в основу вывода дисперсионных соотношений, получают прямое экспериментальное подтверждение.

**57.5. Дальнейшее развитие метода.** Мы закончим наше изложение кратким обзором дальнейшего развития метода дисперсионных соотношений и его важнейших приложений.

Вскоре после возникновения в середине 50-х годов метод дисперсионных соотношений занял очень важное место в теории взаимодействия частиц и в первую очередь в теории сильных взаимодействий. Мы перечислим сейчас основные точные результаты, полученные этим методом.

Вслед за строгим доказательством дисперсионных соотношений для пион-нуклонного рассеяния (Боголюбов (1956), Симанчик (1957), Боголюбов, Медведев, Поливанов (1957)) они были доказаны для комптоновского рассеяния на нуклонах (Боголюбов, Ширков (1957)), для фоторождения пионов на нуклонах (Логунов, Степанов (1956); Логунов, Тавхелидзе, Соловьев (1957); Чу, Голдбергер, Лоу, Намбу (1957)), для ряда процессов виртуального рассеяния (т. е. когда одна или две частицы из четырех не находятся на массовой поверхности — см. работы Владимирова, Логунова (1959); Оме, Тейлора (1959); Логунова, Соловьева (1958, 1959)), а также для некоторых неупругих процессов типа 2 частицы  $\rightarrow$  3 частицы (см. работы Логунова, Тавхелидзе (1958), Логунова, Биленького, Тавхелидзе (1958)).

Следующая важная группа результатов относится к получению строгих ограничений на асимптотическое поведение амплитуд рассеяния в области высоких энергий. Первый важный шаг здесь был сделан Фруассаром (1961), который, исходя из гипотетических дисперсионных соотношений по квадрату переданного импульса  $t$ , показал, что полное сечение с ростом энергии не может возрасти быстрее  $\ln^2 E$ . Гринберг и Лоу (1961) показали, что для получения такого результата достаточно использовать аналитичность амплитуды по  $\cos \theta$  в эллипсе, большая полуось которого определяется ближайшей особенностью амплитуды при  $t = 4\mu^2$ . Надлежащие свойства аналитичности амплитуды были впоследствии установлены Мартэном (1963), который существенно использовал условие унитарности. В дальнейшем результат Фруассара был несколько улучшен, и в современном варианте (см. Синг, Рой (1970)) имеет вид

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \leq \frac{\pi}{\mu^2} \ln \frac{s}{\sigma_{\text{el}}(s)}. \quad (40)$$

Здесь  $\mu$  — масса частицы, переносящей взаимодействие в перекрестном  $t$ -канале (масса пиона). Этот результат имеет важное физическое значение, поскольку он явно отражает влияние свойств перекрестного канала на асимптотику прямого канала и дает оценку, довольно близкую к экспериментальным данным.

Дисперсионные соотношения были положены в основу известного рассуждения Померанчука (1958) об асимптотическом равенстве полных сечений рассеяния частиц и античастиц на одной и той же мишени (*теорема Померанчука*):

$$\sigma(\infty) = \bar{\sigma}(\infty). \quad (41)$$

Некоторое уточнение и более простое доказательство теоремы Померанчука на основе теоремы Фрагмена — Линделёфа из теории

аналитических функций было дано Сугаварой, Каназавой (1961) и Мейманом (1962). Результат (41) был обобщен Логуновым, Нгуен Ван Хьеу, Тодоровым, Хрустальевым (1963, 1965) и Ван Ховом (1963) (см. также обзоры Логунова, Нгуен Ван Хьеу, Тодорова (1966)) на дифференциальные упругие сечения. Здесь было доказано асимптотическое равенство

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{d\sigma}{d\Omega}(s, t)}{\frac{d\tilde{\sigma}}{d\Omega}(s, t)} = 1 \quad (42)$$

при фиксированном квадрате переданного импульса  $t$ .

Использованная при доказательстве дисперсионных соотношений система аксиом (§§ 52.2) оказалась имеющей более широкое значение. Как было показано в работах Медведева, Павлова, Поливанова, Суханова (1972) и других (см. также обзор Медведева, Поливанова (1964)) она оказалась очень удобной для систематического построения квантовой теории поля.

Отметим, наконец, некоторые наиболее важные результаты, полученные с помощью метода дисперсионных соотношений в теоретических схемах полуженноменологического характера.

Применение дисперсионного метода к слабым вершинам привело к известному соотношению Голдбергера — Тримана (1958). Оно позволило также связать вероятности гиперонных распадов с фазами  $\pi N$ -рассеяния (Окубо, Маршак, Сударшан (1959); Тодоров, Хрустальев (1959)).

Путем комбинирования дисперсионных соотношений при фиксированной передаче импульса с гипотезой об асимптотике реджевского типа Логунов, Соловьев, Тавхелидзе (1967) и Иги, Мацуда (1967) получили так называемые *правила сумм при конечной энергии*, явно отражающие связь свойств рассеяния в прямом и перекрестном каналах. Эти правила сумм впоследствии привели к возникновению концепции *дуальности*. Дисперсионные правила сумм были широко использованы при формулировке результатов гипотезы алгебры токов и приближения мягких пионов (правила сумм Адлера).

В работах Логунова, Нгуен Ван Хьеу, Мествиришвили (1967) метод дисперсионных соотношений был положен в основу изучения особого класса реакций, впоследствии получивших название *инклюзивных процессов*.



НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗОТОПИЧЕСКОМ ФОРМАЛИЗМЕ

Концепция изотопического спина была впервые введена Гейзенбергом (1932) для того, чтобы описать нейтрон и протон как два различных (зарядовых) состояния одной и той же частицы — нуклона. Нуклонная волновая функция при этом наделяется свойствами двухкомпонентного спинора относительно преобразований вращения в некотором фиктивном трехмерном пространстве — пространстве изотопического спина (изотопическом пространстве). Аналогичные свойства приписываются волновым функциям других зарядовых мультиплетов. Так, например, пионный триплет  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$  описывается тремя функциями, являющимися компонентами вектора в изотопическом пространстве и т. д.

Инвариантность относительно вращений в изотопическом пространстве физически соответствует равноправности частиц внутри мультиплетов. Очевидно, что эта равноправность нарушается электромагнитными взаимодействиями. Однако если отвлечься от последних, то свойство изотопической инвариантности оказывается справедливым для сильных (ядерных) взаимодействий.

Ниже мы дадим конспективный перечень основных формул изотопического формализма для нуклонов, пионов и амплитуды пион-нуклонного рассеяния. Для более детального ознакомления читателю может быть рекомендована глава 3 монографии Нишиджимы (1964).

**А. Дублет нуклонов.** Рассмотрим прежде всего изотопический дублет нуклонов. В соответствии с замечанием, сделанным в § 7.1, спинор трехмерного (изотопического) пространства имеет две компоненты, которые соответствуют протонной  $\psi_p$  и нейтронной  $\psi_n$  полевым функциям:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \Psi^* = \begin{pmatrix} \psi_p^* & \psi_n^* \end{pmatrix}. \quad (\text{П1А.1})$$

Операторы вращений в изотопическом пространстве строятся из матриц 2-го ранга, которые совпадают с матрицами Паули (7.10), но обозначаются другими символами:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{П1А.2})$$

Матрицы (П1А.2) антикоммутируют друг с другом

$$\tau_\alpha \tau_\beta + \tau_\beta \tau_\alpha = 0, \quad \alpha \neq \beta; \quad \tau_\alpha^2 = 1 \quad (\text{П1А.3})$$

и удовлетворяют соотношениям

$$\tau_1 \tau_2 = i \tau_3 \quad (\text{и циклические перестановки индексов 1, 2, 3}). \quad (\text{П1А.4})$$

Операторы изотопических вращений нуклонов связаны с матрицами  $\tau$  соотношением

$$I_\alpha = \frac{\tau_\alpha}{2}. \quad (\text{П1А.5})$$

В силу (П1А.3) и (П1А.4) они удовлетворяют коммутационным соотношениям для операторов вращения

$$[I_1, I_2] = i I_3 \quad (\text{и циклические перестановки индексов 1, 2, 3}), \quad (\text{П1А.6})$$

а также обладают свойством

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = 3/4, \quad (\text{П1А.7})$$

вследствие чего собственное значение полного изотопического момента вращения  $I$ , определяемого из квантовомеханического соотношения

$$I^2 = I(I+1), \quad (\text{П1А.8})$$

оказывается равным  $I = 1/2$ . Линейные комбинации матриц  $\tau_1$  и  $\tau_2$

$$\tau_+ = \tau_1 + i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_- = \tau_1 - i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{П1А.9})$$

переводят нейтронное состояние в протонное и наоборот

$$\tau_+ \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_- \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}, \quad (\text{П1А.10})$$

вследствие чего  $\tau_+$  и  $\tau_-$  иногда называют операторами «повышения» и «понижения» электрического заряда. Формулы преобразований спинора  $\Psi$  при вращении изотопического пространства вокруг оси  $z_\alpha$  на угол  $\varphi$  имеют вид, аналогичный (6.31):

$$\Psi' = \Lambda_\alpha(\varphi) \Psi, \quad \bar{\Psi}' = \Lambda_\alpha^{-1}(\varphi) \bar{\Psi}, \quad (\text{П1А.11})$$

$$\Lambda_\alpha(\varphi) = e^{-i\tau_\alpha \frac{\varphi}{2}} = \cos \frac{\varphi}{2} - i\tau_\alpha \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (\text{П1А.12})$$

Вилинейные формы  $\bar{\Psi}\tau_\alpha\Psi$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) образуют пространственную плотность вектора изотопического спина

$$I = \int \bar{\Psi}(x) \frac{\tau}{2} \Psi(x) dx, \quad (\text{П1А.13})$$

третья компонента которого с помощью формулы (2.21) связана с электрическим зарядом и гиперзарядом:

$$Q = I_3 = \frac{B+S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}. \quad (\text{П1А.14})$$

**Б. Триплет пионов.** Тройка псевдоскалярных пионов  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$  образует изотопический триплет, который описывается тремя псевдоскалярными полевыми функциями, образующими изотопический вектор. Обычно используют два представления этих функций. В первом из них функции поля действительны:

$$\pi(x) = \{\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x)\}, \quad \pi_\alpha^*(x) = \pi_\alpha(x). \quad (\text{П1Б.1})$$

Во втором представлении из двух действительных функций  $\pi_1, \pi_2$  образуют две комплексные комбинации

$$\varphi_1 = \frac{-\pi_1 + i\pi_2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_2 = \pi_3, \quad \varphi_3 = \frac{\pi_1 + i\pi_2}{\sqrt{2}}. \quad (\text{П1Б.2})$$

Преобразование (П1Б.2) к представлению

$$\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \quad (\text{П1Б.3})$$

может быть записано в матричном виде:

$$\varphi = O\pi; \quad O = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{П1Б.4})$$

где  $O$  — унитарная матрица

$$O^\dagger O = 1. \quad (\text{П1Б.5})$$

Формулы преобразования изотопического вектора (ПИБ.1) при вращениях трехмерного изотопического пространства имеют вид

$$\kappa \rightarrow \kappa' = \Lambda(\alpha) \kappa, \quad \Lambda(\alpha) = e^{-i\omega_{\nu}\alpha_{\nu}}, \quad (\text{ПИБ.6})$$

где  $\alpha_{\nu}$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ) — углы вращений, а  $\omega_{\nu}$  — матрицы изотопического спина в представлении (ПИБ.1)

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{ПИБ.7})$$

Квадрат матричного вектора  $\omega$  равен

$$\omega(\omega + 1) = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 2. \quad (\text{ПИБ.8})$$

Поэтому  $\omega$  является оператором момента вращения с собственными значениями 1, 0, -1.

Оператор преобразования вращения на угол  $\alpha$  вокруг оси  $z_3$  представим в виде

$$\Lambda(\alpha) = e^{-i\omega_3\alpha} = 1 - \omega_3^2 + \omega_3^2 \cos \alpha - i\omega_3 \sin \alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{ПИБ.9})$$

Компоненты матриц (ПИБ.7) могут быть выражены через совершенно антисимметричный единичный тензор третьего ранга

$$(\omega_{\alpha})_{\beta\gamma} = -ie_{\alpha\beta\gamma}. \quad (\text{ПИБ.10})$$

Матрицы  $\omega_{\alpha}$  удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\omega_1, \omega_2] = i\omega_3 \quad (\text{и циклические перестановки индексов } 1, 2, 3). \quad (\text{ПИБ.11})$$

Переход к представлению (ПИБ.3) достигается унитарным преобразованием

$$T_{\nu} = O\omega_{\nu}O^{\dagger}. \quad (\text{ПИБ.12})$$

Матрицы  $T_{\nu}$  имеют вид

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{ПИБ.13})$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям (ПИБ.11). Существенно, что матрица  $T_3$  диагональна. Это свойство отражает тот факт, что в представлении (ПИБ.3) компоненты  $\varphi_{\nu}$  соответствуют определенным значениям электрического заряда. На основании (ПИА.14) следует отождествить

$$\varphi_1 \sim \pi^+, \quad \varphi_2 \sim \pi^0, \quad \varphi_3 \sim \pi^-. \quad (\text{ПИБ.14})$$

**В. Амплитуда пион-нуклонного рассеяния.** Из соображений инвариантности относительно изотопических вращений вытекает, что амплитуда  $\pi N$ -рассеяния имеет следующую изотопическую структуру (см. обозначения §§ 56, 57):

$$T_{\alpha\omega} = \delta_{t't} \delta_{q'q} T^{(1)} + \frac{1}{2} \{ \tau_{q'} \tau_q - \tau_q \tau_{q'} \}_{t't} T^{(2)}. \quad (\text{ПИБ.1})$$

Здесь  $\tau_q$  — матрицы изотопического спина нуклонов (ПИА.2),  $t', t$  — изотопические индексы нуклонов, а  $q, q'$  — изотопические индексы пионов.

Формулу (ПИБ.1) можно записать иначе:

$$T_{\alpha\omega} = \delta_{t't} \delta_{q'q} T^{(1)} - \omega_{q'q} \tau_{t't} T^{(2)}, \quad (\text{ПИБ.2})$$

где

$$(\omega_\alpha)_{\alpha\alpha'} = -ie_{\alpha\alpha'}$$

— введенный в (П1В.10) оператор изотопического спина для пи-мезонов.

Для того чтобы определить возможные значения скалярного произведения  $\omega\tau$ , рассмотрим оператор полного изотопического момента пион-нуклонной системы

$$\Omega = \omega + \tau/2. \quad (\text{П1В.3})$$

Квадрат этого оператора выражается через полный изотопический момент  $T$  соотношением

$$\Omega^2 = T(T+1). \quad (\text{П1В.4})$$

Получаем из (П1В.3) и (П1В.4) с учетом (П1А.7) и (П1А.8)

$$\omega\tau = \Omega^2 - \omega^2 - \frac{\tau^2}{4} = T(T+1) - 2 - \frac{3}{4} = T(T+1) - 11/4. \quad (\text{П1В.5})$$

Отсюда следует, что собственное значение оператора  $\omega\tau$  в состоянии с полным изотопическим спином пион-нуклонной системы  $T = 3/2$  равно

$$\frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} + 1 \right) - \frac{11}{4} = 1,$$

а в состоянии с полным изотопическим спином  $T = 1/2$ :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{11}{4} = -2.$$

Вводя амплитуды  $T_{3/2}$  и  $T_{1/2}$ , относящиеся к состояниям с определенными значениями полного изотопического спина, равными  $3/2$  и  $1/2$ , находим из (П1В.2)

$$T_{3/2} = T^{(1)} - T^{(2)}, \quad T_{1/2} = T^{(1)} + 2T^{(2)}. \quad (\text{П1В.6})$$

Обратные соотношения имеют вид

$$T^{(1)} = \frac{T_{1/2} + 2T_{3/2}}{3}, \quad T^{(2)} = \frac{T_{1/2} - T_{3/2}}{3}. \quad (\text{П1В.7})$$

Амплитуды рассеяния заряженных пионов на протонах

$$T(\pi^\pm + p \rightarrow \pi^\pm + p) \equiv T_\pm \quad (\text{П1В.8})$$

связаны с амплитудами (П1В.6) соотношениями

$$T_+ = T_{3/2}, \quad T_- = \frac{T_{3/2} + 2T_{1/2}}{3}, \quad (\text{П1В.9})$$

вследствие чего

$$T_+ = T^{(1)} - T^{(2)}, \quad T_- = T^{(1)} + T^{(2)}, \quad (\text{П1В.10})$$

а также

$$T^{(1)} = \frac{T_+ + T_-}{2}, \quad T^{(2)} = \frac{T_- - T_+}{2}. \quad (\text{П1В.11})$$

СВОДКА СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ

**А. Вспомогательные сингулярные функции.** Одномерная  $\delta$  функция Дирака:

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha\tau} d\tau. \quad (\text{П2А.1})$$

Четырехмерная  $\delta$ -функция Дирака:

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk \quad (\text{П2А.2})$$

$$(kx \equiv k^0 x^0 - \mathbf{kx}, \quad dk = dk^0 d\mathbf{k}),$$

$$\delta(x) = \delta(x^0) \delta(\mathbf{x}) = \delta(x^0) \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3).$$

Разрывные функции  $\theta(\alpha)$  и  $\varepsilon(\alpha)$ :

$$\theta(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha\tau}}{\tau - i\varepsilon} d\tau = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha > 0, \\ 0 & \text{при } \alpha < 0, \end{cases} \quad (\text{П2А.3})$$

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha\tau}}{\tau} d\tau = \theta(\alpha) - \theta(-\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha > 0, \\ -1 & \text{при } \alpha < 0 \end{cases} \quad (\text{П2А.4})$$

( $\mathcal{P}$  — символ главного значения).

Частотные части  $\delta$ -функции:

$$\delta_{\pm}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{\pm i\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{2} \left( \delta(\alpha) \pm \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \frac{1}{\alpha} \right). \quad (\text{П2А.5})$$

Некоторые соотношения:

$$\frac{1}{\alpha + i\varepsilon} = \frac{2\pi}{i} \delta_+(\alpha) = \frac{\pi}{i} \delta(\alpha) + \mathcal{P} \frac{1}{\alpha} = -i \int_0^{\infty} e^{i\alpha t} dt, \quad (\text{П2А.6})$$

$$\frac{1}{\alpha - i\varepsilon} = 2\pi i \delta_-(\alpha) = \pi i \delta(\alpha) + \mathcal{P} \frac{1}{\alpha} = i \int_0^{\infty} e^{-i\alpha t} dt, \quad (\text{П2А.7})$$

$$\mathcal{P} \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\alpha) e^{i\alpha\tau} d\alpha. \quad (\text{П2А.8})$$

**Б. Функции скалярного поля.** *Перестановочная функция Паули — Йордана*  $D(x)$ :

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_- = \frac{1}{i} D(x-y); \quad (11.3)$$

$$(\square - m^2) D(x) = 0;$$

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx} \varepsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) dk = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{ikx} \sin(x^0 \sqrt{k^2 + m^2}), \end{aligned} \quad (10.18)$$

$$\left. \frac{\partial D(x^0, \mathbf{x})}{\partial x^0} \right|_{x^0=0} = \delta(\mathbf{x}). \quad (\text{П2Б.1})$$

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{m}{4\pi \sqrt{\lambda}} \varepsilon(x^0) \theta(\lambda) J_1(m\sqrt{\lambda}) \quad (16.12)$$

$$(\lambda = x^2 \equiv (x^0)^2 - x^2).$$

В окрестности светового конуса  $D(x)$  имеет вид

$$D(x) \approx \frac{1}{2\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{m^2}{8\pi} \varepsilon(x^0) \theta(\lambda). \quad (16.17)$$

*Частотные части функции Паули — Йордана*  $D^+(x)$  и  $D^-(x)$ :

$$[\varphi^-(x), \varphi^+(y)]_- = \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_0 = \frac{1}{i} D^-(x-y),$$

$$[\varphi^+(x), \varphi^-(y)]_- = \frac{1}{i} D^+(x-y) = iD^-(y-x); \quad (11.2)$$

$$(\square - m^2) D^-(x) = 0, \quad (\square - m^2) D^+(x) = 0;$$

$$\begin{aligned} D^+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} i \int e^{ikx} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) dk = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} i \int \frac{dk}{2\sqrt{k^2 + m^2}} e^{ix^0 \sqrt{k^2 + m^2} - i\mathbf{x}\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (16.1)$$

$$\begin{aligned} D^-(x) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{ikx} \theta(-k^0) \delta(k^2 - m^2) dk = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{2\sqrt{k^2 + m^2}} e^{-ix^0 \sqrt{k^2 + m^2} + i\mathbf{x}\mathbf{k}} = -D^+(-x); \end{aligned} \quad (16.2)$$

$$\begin{aligned} D^+(x) &= \frac{1}{4\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{mi}{8\pi \sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) [N_1(m\sqrt{\lambda}) - i\varepsilon(x^0) J_1(m\sqrt{\lambda})] - \\ &\quad - \frac{mi}{4\pi^2 \sqrt{-\lambda}} \theta(-\lambda) K_1(m\sqrt{-\lambda}), \end{aligned} \quad (16.10)$$

$$\begin{aligned} D^-(x) &= \frac{1}{4\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) + \frac{mi}{8\pi \sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) [N_1(m\sqrt{\lambda}) + i\varepsilon(x^0) J_1(m\sqrt{\lambda})] + \\ &\quad + \frac{mi}{4\pi^2 \sqrt{-\lambda}} \theta(-\lambda) K_1(m\sqrt{-\lambda}). \end{aligned} \quad (16.11)$$

В окрестности светового конуса  $D^+$  и  $D^-$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} D^+(x) &\approx \frac{1}{4\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) + \frac{i}{4\pi^2 \lambda} - \frac{im^2}{8\pi^2} \ln \frac{m|\lambda|^{1/2}}{2} - \frac{m^2}{16\pi} \varepsilon(x^0) \theta(\lambda), \\ D^-(x) &\approx \frac{1}{4\pi} \varepsilon(x^0) \delta(\lambda) - \frac{i}{4\pi^2 \lambda} + \frac{im^2}{8\pi^2} \ln \frac{m|\lambda|^{1/2}}{2} - \frac{m^2}{16\pi} \varepsilon(x^0) \theta(\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (16.16)$$

Четное решение однородного уравнения  $D^1$ :

$$D^1(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) dk, \quad (\square - m^2) D^1(x) = 0, \quad (12Б.2)$$

$$D^1(x) = i(D^+(x) - D^-(x)), \quad (12Б.3)$$

$$D^1(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{ikx} \cos(x^0 \sqrt{k^2 + m^2}), \quad (12Б.4)$$

$$\begin{aligned} D^1(x) &= \frac{m}{4\pi \sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) N_1(m\sqrt{\lambda}) + \\ &+ \frac{m}{2\pi^2 \sqrt{-\lambda}} \theta(-\lambda) K_1(m\sqrt{\lambda}) \approx -\frac{1}{2\pi^2 \lambda} + \frac{m^2}{4\pi^2} \ln \frac{m|\lambda|^{1/2}}{2} + \dots \end{aligned} \quad (12Б.5)$$

Причинная функция Грина  $D^c(x)$ :

$$\langle T(\varphi(x) \varphi(y)) \rangle_0 = \frac{1}{i} D^c(x-y); \quad (\square - m^2) D^c(x) = -\delta(x); \quad (15.15)$$

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ikx} D^c(k) dk, \quad D^c(k) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}; \quad (15.13)$$

$$\begin{aligned} D^c(x) &= \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) - \frac{m}{8\pi \sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) [J_1(m\sqrt{\lambda}) - iN_1(m\sqrt{\lambda})] + \\ &+ \frac{mi}{4\pi^2 \sqrt{-\lambda}} \theta(-\lambda) K_1(m\sqrt{-\lambda}). \end{aligned}$$

Поведение  $D^c(x)$  в окрестности светового конуса:

$$D^c(x) \approx \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) + \frac{1}{4\pi^2 i\lambda} + \frac{im^2}{8\pi^2} \ln \frac{m|\lambda|^{1/2}}{2} - \frac{m^2}{16\pi} \theta(\lambda). \quad (16.18)$$

Причинная функция при массе, равной нулю:

$$D_0^c(x) = D^c(x) |_{m=0} = \frac{1}{4\pi} \left( \delta(\lambda) - \frac{i}{\pi\lambda} \right) = \frac{1}{4\pi} \delta_+(-\lambda) \equiv \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty e^{ix(-\lambda)} dx. \quad (12Б.6)$$

Запаздывающая и опережающая функции Грина  $D^{\text{ret}}$  и  $D^{\text{adv}}$ :

$$D^{\text{ret}}(x) = 0 \text{ при } x^0 < 0; \quad D^{\text{adv}}(x) = 0 \text{ при } x^0 > 0;$$

$$(\square - m^2) D^{\text{ret}}(x) = -\delta(x); \quad (\square - m^2) D^{\text{adv}}(x) = -\delta(x);$$

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{m^2 - k^2 - i\epsilon k^0} dk, \quad (15.7)$$

$$D^{\text{adv}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx} dk}{m^2 - k^2 + i\epsilon k^0}, \quad (15.9)$$

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{2\pi} \theta(x^0) \left\{ \delta(\lambda) - \theta(\lambda) \frac{m}{2\sqrt{\lambda}} J_1(m\sqrt{\lambda}) \right\}, \quad (16.15)$$

$$D^{\text{adv}}(x) = \frac{1}{2\pi} \theta(-x^0) \left\{ \delta(\lambda) - \theta(\lambda) \frac{m}{2\sqrt{\lambda}} J_1(m\sqrt{\lambda}) \right\}.$$

Четное решение неоднородного уравнения  $D^s$ :

$$D^s(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \mathcal{P} \int \frac{e^{ikx}}{m^2 - k^2} dk, \quad (\square - m^2) D^s(x) = -\delta(x), \quad (\text{П2Б.7})$$

$$D^s(x) = \frac{1}{2\pi} \delta(\lambda) - \theta(\lambda) \frac{m}{2\sqrt{\lambda}} J_1(m\sqrt{\lambda}). \quad (\text{П2Б.8})$$

Связи между функциями  $D$ ,  $D^+$ ,  $D^-$ ,  $D^1$ ,  $D^c$ ,  $D^{\text{adv}}$ ,  $D^{\text{ret}}$ ,  $D^s$ :

$$D(x) = D^+(x) + D^-(x),$$

$$D^1(x) = i(D^+(x) - D^-(x)), \quad (\text{П2Б.9})$$

$$D^c(x) = \theta(x^0) D^-(x) - \theta(-x^0) D^+(x), \quad (\text{15.12})$$

$$D^{\text{ret}}(x) = \theta(x^0) D(x) = D^c(x) + D^+(x), \quad (\text{15.8})$$

$$D^{\text{adv}}(x) = -\theta(-x^0) D(x) = D^c(x) - D^-(x),$$

$$D(x) = D^{\text{ret}}(x) - D^{\text{adv}}(x),$$

$$D^s(x) = \frac{1}{2} [D^{\text{ret}}(x) + D^{\text{adv}}(x)] = \frac{\varepsilon(x^0)}{2} D(x). \quad (\text{П2Б.10})$$

**В. Сингулярные функции электромагнитного, векторного и спинорного полей.** *Электромагнитное поле:*

$$[A_m(x), A_n(y)]_- = ig^{mn} D_0(x-y); \quad \langle A_m(x) A_n(y) \rangle_0 = ig^{mn} D_0^-(x-y); \quad (\text{12.4})$$

$$\langle T(A_m(x) A_n(y)) \rangle_0 = ig^{mn} D_0^c(x-y) \quad (\text{24.3})$$

$$(g^{mn} = 0 \text{ при } m \neq n; \quad g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1).$$

Функции  $D_0$ ,  $D_0^-$ ,  $D_0^c$  и т. д. получаются из функций скалярного поля  $D$ ,  $D^-$ ,  $D^c$  при  $m = 0$ , например,

$$D_0^c(x) = D^c(x) |_{m=0} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon} dk. \quad (\text{15.16})$$

*Векторное поле:*

$$[U_m(x), U_n(y)]_- = iD_{mn}(x-y); \quad \langle U_m(x) U_n(y) \rangle_0 = iD_{mn}^-(x-y); \quad (\text{11.27})$$

$$\langle T(U_m(x) U_n(y)) \rangle = iD_{mn}^c(x-y). \quad (\text{15.19})$$

Функции  $D_{mn}$ ,  $D_{mn}^-$ ,  $D_{mn}^c$  и т. д. могут быть получены из соответствующих функций скалярного поля действием дифференциального оператора

$$g^{mn} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x^n \partial x^m},$$

например,

$$D_{nl}(x) = \left( g^{nl} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x^n \partial x^l} \right) D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \left( g^{nl} - \frac{k_n k_l}{m^2} \right) e^{-ikx} \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k^0) dk,$$

$$D_{nl}^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \left( g^{nl} - \frac{k_n k_l}{m^2} \right) \frac{e^{-ikx}}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} dk. \quad (\text{15.18})$$

*Спинорное поле:*

$$[\Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(y)]_+ = \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}(x-y); \quad \langle \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) \rangle_0 = \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}(x-y); \quad (\text{13.4})$$

$$\langle T(\Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y)) \rangle_0 = \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}^c(x-y). \quad (\text{15.21})$$



Функции  $S_{\alpha\beta}$ ,  $S_{\alpha\beta}^-$ ,  $S_{\alpha\beta}^+$  и т. д. могут быть получены из соответствующих функций скалярного поля действием оператора

$$(i\hat{\partial} + m)_{\alpha\beta} \equiv i\gamma_{\alpha\beta}^n \frac{\partial}{\partial x^n} + mI_{\alpha\beta}$$

(матрицы Дирака  $\gamma$  определены здесь соотношениями  $\gamma^n \gamma^m + \gamma^m \gamma^n = 2g^{mn}$ ) например,

$$S^-(x) = \left( i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} + m \right) D^-(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx} \theta(k^0) (m + \hat{k}) \delta(k^2 - m^2) dk = \\ = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{2\sqrt{k^2 + m^2}} (m + \gamma^0 \sqrt{k^2 + m^2} - \gamma k) e^{-ix^0 \sqrt{k^2 + m^2} + ixk}, \quad (\text{П2В.1})$$

$$S(x) = \left( i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} + m \right) D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx} \varepsilon(k^0) (\hat{k} + m) \delta(k^2 - m^2) dk = \quad (13.5)$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^3} \int dk e^{ikx} \left\{ i\gamma^0 \cos(x^0 \sqrt{k^2 + m^2}) + (\gamma k + m) \frac{\sin(x^0 \sqrt{k^2 + m^2})}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right\}, \quad (\text{П2В.2})$$

$$S(x)|_{x^0=0} = i\gamma^0 \delta(x), \quad (\text{П2В.3})$$

$$S^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{(m + \hat{p})}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} e^{-ipx} dp. \quad (15.17), (24.4)$$

Г. Связь с обозначениями других авторов.

Наши обозначения	Швингер (1948, 1949)	Ахиезер, Берестецкий (1969)	Швебер (1961)	Бьоркен, Дрелл (1965)
$D$	$-\Delta$	$\Delta_0$	$-\Delta$	$-\Delta$
$D^-$	$-\Delta^{(+)}$	$i\Delta_+$	$-\Delta^{(+)}$	$i\Delta_+$
$D^+$	$-\Delta^{(-)}$	$-i\Delta_-$	$-\Delta^{(-)}$	$-i\Delta_-$
$D^1$	$\Delta^{(1)}$	$\Delta_1$	$\Delta_1$	$\Delta_1$
$D_0$	$D$	$D_0$	$D$	$D$
$S$	$S$	$iS$	$S$	$S$
$D^c$	$\Delta_+$	$i\Delta_c$	$\frac{i}{2} \Delta_F$	$-\Delta_F$
$D_0^c$	$D_+$	$iD_c$	$\frac{1}{2i} D_F$	$D_F$
$S^c$	$S_+$	$iS_c$	$\frac{1}{2i} S_F$	$-S_F$

**СВОДКА ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ  
МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

**А. Формулы с матрицами и спинорами Дирака. Определения:**

$$\begin{aligned} \gamma^n \gamma^m + \gamma^m \gamma^n &= 2g^{mn} \quad (m, n = 0, 1, 2, 3, 5), \\ g^{mn} &= 0 \quad (m \neq n), \quad g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = g^{55} = 1. \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \gamma^5 &= -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \gamma^{\dagger 5} = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \\ \sigma^{mn} &= i \frac{\gamma^m \gamma^n - \gamma^n \gamma^m}{2}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Явный вид в представлении, где  $\gamma^0$  диагональна, а также связь с матрицами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $\varrho$  см. в § 6.2.

*Коммутационные свойства ( $\hat{a} \equiv a_n \gamma^n$ ):*

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{b} &= 2(ab) - \hat{b}\hat{a}, \\ \hat{a}\gamma^n &= 2a^n - \gamma^n \hat{a} \quad (n \neq 5), \\ \hat{a}\gamma^5 &= -\gamma^5 \hat{a}. \end{aligned}$$

*Шпуры:*

$$\begin{aligned} \text{Sp } \gamma^n &= 0, \quad \text{Sp } \hat{a} = 0, \\ \text{Sp } \gamma^n \gamma^m &= 4g^{mn}, \quad \text{Sp } \hat{a}\hat{b} = 4(ab), \\ \text{Sp } \gamma^k \gamma^l \gamma^m \gamma^n &= 4(g^{kl}g^{mn} + g^{nk}g^{lm} - g^{km}g^{ln}), \\ \text{Sp } \hat{a}\hat{b}\hat{c} &= 0, \\ \text{Sp } \hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} &= 4((ab)(cd) + (ad)(bc) - (ac)(bd)). \end{aligned}$$

*Спинорные функции:*

$$\begin{aligned} \psi^{\pm}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dp e^{\pm i p x} \sum_{\nu=1, 2} a_{\nu}^{\pm}(p) v^{\nu, \pm}(p), \\ \bar{\psi}^{\pm}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dp e^{\pm i p x} \sum_{\mu=1, 2} a_{\mu}^{*\pm}(p) \bar{v}^{\mu, \pm}(p), \end{aligned}$$

$$\bar{v}^{\mu, \pm}(p) = v^{*\mu, \pm}(p) \gamma_0, \quad v^{*\mu, \pm}(p) = (v^{\mu, \mp}(p))^*,$$

$$(m + \hat{p}) v^{\nu, +}(p) = 0, \quad (m - \hat{p}) v^{\nu, -}(p) = 0,$$

$$\bar{v}^{\nu, +}(p) (\hat{p} - m) = 0, \quad \bar{v}^{\nu, -}(p) (\hat{p} + m) = 0.$$

Спиноры  $v^{\nu, -}(p)$  ( $\bar{v}^{\nu, +}(p)$ ) описывают электрон в начальном (конечном) состоянии, а спиноры  $\bar{v}^{\nu, -}(p)$ ,  $v^{\nu, +}(p)$  описывают позитрон. В литературе эти функции часто обозначаются следующим образом:

$$v^{\nu, -}(p) = u(p, \nu), \quad v^{\nu, +}(p) = v(p, \nu),$$

$$\bar{v}^{\nu, -}(p) = \bar{v}(p, \nu), \quad \bar{v}^{\nu, +}(p) = \bar{u}(p, \nu).$$

Свойства ортонормированности:

$$\bar{v}^{\nu, \pm}(\rho) v^{\mu, \mp}(\rho) = \delta^{\nu\mu}, \quad (7.16)$$

$$\bar{v}^{\nu, \pm}(\rho) v^{\mu, \mp}(\rho) = \pm \frac{m}{\rho^0} \delta^{\nu\mu}, \quad (7.17)$$

$$\bar{v}^{\nu, \pm}(\rho) v^{\mu, \pm}(-\rho) = 0. \quad (7.18)$$

Формулы суммирования по спиновому индексу:

$$\sum_{\nu} v^{\nu, +}(\rho) \bar{v}^{\nu, -}(\rho) = \frac{\hat{\rho} - m}{2\rho^0}, \quad (7.20)$$

$$\sum_{\nu} v^{\nu, -}(\rho) \bar{v}^{\nu, +}(\rho) = \frac{\hat{\rho} + m}{2\rho^0}. \quad (7.21)$$

### Б. Вычисление интегралов.

Формула перехода в  $\alpha$ -представление:

$$\frac{1}{m^2 - \rho^2 - i\varepsilon} = i \int_0^{\infty} e^{i\alpha(\rho^2 - m^2 + i\varepsilon)} d\alpha, \quad (27.6)$$

и ее обобщение:

$$\frac{1}{(D - i\varepsilon)^k} = \frac{i^k}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} e^{i\alpha(-D + i\varepsilon)} \alpha^{k-1} d\alpha, \quad k > 0. \quad (\text{ПЗБ.1})$$

Основная четырехмерная гауссова квадратура ( $a$  — положительное число,  $b$  — 4-вектор):

$$\frac{i}{\pi^2} \int dk e^{i(ak^2 + 2bk)} = \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a} \equiv I(a, b^2). \quad (27.7)$$

Ее производные:

$$\frac{i}{\pi^2} \int dk e^{i(ak^2 + 2bk)} [k^n] = [-b^n/a] I(a, b^2), \quad (27.8)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int dk e^{i(ak^2 + 2bk)} [k^n k^m] = \left[ \frac{2b^n b^m + i a g^{nm}}{2a^2} \right] I(a, b^2), \quad (27.9)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int dk e^{i(ak^2 + 2bk)} [k^2] = \left[ \frac{b^2 + 2ia}{a^2} \right] I(a, b^2), \quad (27.10)$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int dk e^{i(ak^2 + 2bk)} [k^n k^2] = \left[ -\frac{b^n (b^2 + 3ia)}{a^3} \right] I(a, b^2). \quad (\text{ПЗБ.2})$$

Выделение бесконечного интегрирования:

$$\int_0^{\infty} d\alpha_1 \dots \int_0^{\infty} d\alpha_L = \int_0^1 \{dx\}_L \int_0^{\infty} d\lambda \lambda^{L-1}, \quad (\text{ПЗБ.3})$$

где

$$\lambda = \alpha_1 + \dots + \alpha_L, \quad x_{\nu} = \alpha_{\nu}/\lambda,$$

$$\{dx\}_L = dx_1 \dots dx_L \delta(1 - x_1 - x_2 - \dots - x_L). \quad (\text{ПЗБ.4})$$

Типичные интегралы по  $\lambda$ .

$$\frac{1}{i} \int_0^{\infty} d\lambda e^{i\lambda(A+i\epsilon)} = \frac{1}{A+i\epsilon}, \quad (\text{ПЗБ.5})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} (e^{i\lambda A} - e^{i\lambda B}) e^{-\epsilon\lambda} = \ln \frac{B+i\epsilon}{A+i\epsilon}, \quad (\text{27.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2} (e^{i\lambda A} - e^{i\lambda B}) (e^{i\lambda C} - e^{i\lambda D}) e^{-\epsilon\lambda} = \\ = (A+D) \ln(A+D+i\epsilon) + (B+C) \ln(B+C+i\epsilon) - \\ - (A+C) \ln(A+C+i\epsilon) - (B+D) \ln(B+D+i\epsilon). \end{aligned} \quad (\text{ПЗБ.6})$$

В случае, когда  $B$  и  $D$  пропорциональны большой массе  $M^2$  ( $B=bM^2$ ,  $D=dM^2$ ), получаем из (6) в пределе  $M^2 \rightarrow \infty$ :

$$\rightarrow M^2 \{b \ln b + d \ln d - (b+d) \ln(b+d)\} + (A+C) \ln M^2 + \\ + (A+C) [1 - \ln(A+C)] + A \ln d + C \ln b. \quad (\text{ПЗБ.7})$$

**В. Фейнмановская параметризация.** Исходная формула:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_L} = (L-1)! \int_0^1 \frac{\{dx\}_L}{(a_1 x_1 + \dots + a_L x_L)^L}, \quad (\text{ПЗВ.1})$$

причем символ  $\{dx\}_L$  определен в (ПЗБ.4).

Импульсные квадратуры имеют вид ( $L \geq 3$ )

$$F_L(D, k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dp}{[p^2 - 2kp + D]^L} = - \frac{(L-3)!}{(D-k^2+i\epsilon)^{L-2} (L-1)!}, \quad (\text{ПЗВ.2})$$

$$F_L^n(D, k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^n dp}{[p^2 - 2kp + D]^L} = k^n F_L(D, k) \quad (\text{ПЗВ.3})$$

$$F_L^{nm}(D, k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^n p^m dp}{[p^2 - 2kp + D]^L} = \left\{ \frac{g^{nm}(D-k^2)}{2(L-3)} + k^n k^m \right\} F_L(D, k), \quad (\text{ПЗВ.4})$$

$$F_L^{\frac{1}{2}}(D, k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^2 dp}{[p^2 - 2kp + D]^L} = \frac{2D - (L-1)k^2}{L-3} F_L(D, k) \quad (\text{ПЗВ.5})$$

и т. д.

**Г. Размерная регуляризация.**

$$\int dp = \int d^4 p \rightarrow \int d^N p = \mu^{2\epsilon} \int d\Omega \int_0^{\infty} p^{N-1} dp, \quad N=4-2\epsilon. \quad (\text{16.26})$$

Модификация гауссовых квадратур:

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^N k e^{i(ak^2 + 2bk)} = \left( \frac{i\mu^2}{\pi} \right)^\epsilon \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a} \equiv I_\epsilon(a, b^2), \quad (\text{ПЗГ.1})$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^N k e^{i(ak^2 + 2bk)} [k^n] = [-b^n/a] I_\epsilon(a, b^2), \quad (\text{ПЗГ.2})$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^N k e^{i(ak^2 + 2bk)} [k^n k^m] = \left[ \frac{2b^n b^m + i a g^{nm}}{2a^2} \right] I_\epsilon(a, b^2). \quad (\text{ПЗГ.3})$$

Три последние формулы отличаются от приведенных выше формул (27.7—9) лишь заменой  $l \rightarrow l_e$ , тогда как следующие формулы

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^N k e^{i(ak^2 + 2bk)} [k^2] = \left[ \frac{b^2 + ia(2 - \varepsilon)}{a^2} \right] I_e, \quad (\text{ПЗГ.4})$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^N k e^{i(ak^2 + 2bk)} [k^n k^2] = \left[ -\frac{b^n}{a^3} \{b^2 + ia(3 - \varepsilon)\} \right] I_e \quad (\text{ПЗГ.5})$$

отличаются от своих аналогов более существенно. Заметим в этой связи, что формула (ПЗГ.4) может быть получена либо из (ПЗГ.1) дифференцированием по  $a$ , либо из (ПЗГ.3) суммированием по лоренцевым индексам. В последнем случае необходимо принять во внимание, что

$$g^{nm} g_{nm} = \text{Sp } g_{nm} = N = 4 - 2\varepsilon. \quad (\text{ПЗГ.6})$$

С учетом этого обстоятельства при выполнении операций с матрицами Дирака следует пользоваться стандартными коммутационными соотношениями:

$$\gamma_n \gamma_m + \gamma_m \gamma_n = 2g_{mn} \quad (m, n = 0, 1, 2, \varepsilon).$$

Модификация формул фейнмановского интегрирования:

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^N p}{[p^2 - 2pk + D]^L} = - \left( \frac{i^2 \mu^2}{\pi} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(L + \varepsilon - 2)}{(D - k^2)^{L + \varepsilon - 2} \Gamma(L)} \equiv F_L^\varepsilon(D, k), \quad (\text{ПЗГ.7})$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^n d^N p}{[p^2 - 2pk + D]^L} = k^n F_L^\varepsilon(D, k), \quad (\text{ПЗГ.8})$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^n p^m d^N p}{[p^2 - 2pk + D]^L} = \left[ k^n k^m + \frac{g^{nm}(D - k^2)}{2(L + \varepsilon - 3)} \right] F_L^\varepsilon(D, k), \quad (\text{ПЗГ.9})$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^2 d^N p}{[p^2 - 2pk + D]^L} = \left[ k^2 + (D - k^2) \frac{2 - \varepsilon}{L + \varepsilon - 3} \right] F_L^\varepsilon(D, k^2), \quad (\text{ПЗГ.10})$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^n p^2 d^N p}{[p^2 - 2pk + D]^L} = k^n \left\{ k^2 + (D - k^2) \frac{3 - \varepsilon}{L + \varepsilon - 3} \right\} F_L^\varepsilon(D, k^2). \quad (\text{ПЗГ.11})$$

Из этих формул с учетом того, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\Gamma(\varepsilon) \rightarrow 1/\varepsilon - \mathbb{C}$  (где константа Эйлера  $\mathbb{C} = 0,5772 \dots$ ), вытекает:

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^N p}{p^2 - 2kp + D} = \frac{D - k^2}{\varepsilon} + \left[ \ln \frac{\mu^2}{(k^2 - D)\pi} + 1 - \mathbb{C} \right] (D - k^2), \quad (\text{ПЗГ.12})$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^N p}{[p^2 - 2pk + D]^2} = -\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{(k^2 - D)\pi}{\mu^2} + \mathbb{C}, \quad (\text{ПЗГ.13})$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^n d^N p}{[p^2 - 2pk + D]^2} = k^n \left[ -\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{(k^2 - D)\pi}{\mu^2} + \mathbb{C} \right], \quad (\text{ПЗГ.14})$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^n p^m d^N p}{[p^2 - 2pk + D]^2} = \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{(k^2 - D)\pi}{\mu^2} + \mathbb{C} \right\} \left\{ k^n k^m + g^{nm} \frac{k^2 - D}{2} \right\}, \quad (\text{ПЗГ.15})$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int \frac{p^n p^m d^N p}{[p^2 - 2pk + D]^3} = -\frac{g^{nm}}{4\varepsilon} + \frac{k^n k^m}{2(k^2 - D)} + \frac{g^{nm}}{4} \left\{ \ln \frac{(k^2 - D)\pi}{\mu^2} + \mathbb{C} \right\}. \quad (\text{ПЗГ.16})$$

## ЛИТЕРАТУРА

При указании русских переводов иностранных статей приняты следующие сокращения:

СУАЭ — Сборник переводов «Сдвиг уровней атомных электронов». — М.: ИЛ, 1950.

НРКЭ — Сборник переводов «Новейшее развитие квантовой электродинамики». — М.: ИЛ, 1954.

ПСФ — Сборник переводов из серии «Проблемы современной физики».

ВПКМ — Сборник переводов «Вопросы причинности в квантовой механике». — М.: ИЛ, 1955.

При цитировании иностранных работ, впоследствии переведенных на русский язык, указание года в основной, первой ссылке соответствует дате публикации оригинала. Год издания перевода указан в конце.

Цифры в конце строки, набранные курсивом, отсылают к страницам книги, на которых содержатся ссылки на данную работу.

*Аникин С. А., Завьялов О. И., Поливанов М. К.* 1973, ТМФ, т. 17, с. 188. 297  
*Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* 1981. — Квантовая электродинамика. Изд. 4-е. — М.: Наука. 156

*Бакер, Джонсон (Baker M., Johnson K.).* 1969, Phys. Rev., v. 183, p. 1242. 501  
*Барбьери, Ремидди (Barbieri R., Remiddi E.).* 1973, Nuovo Cim., v. 13 A, p. 99. 354

*Баранже, Бете, Фейнман (Baranger M., Bethe H. A., Feynman R. P.).* 1953, Phys. Rev., v. 92, p. 482. 434

*Березин Ф. А.*

1961, ДАН СССР, т. 137, с. 311; 445

1965, Метод вторичного квантования. — М.: Наука. 377, 445

*Бете (Bethe H. A.).* 1947, Phys. Rev., v. 72, p. 339 (СУАЭ, с. 82.). 435

*Бланк В. З.*

1957а, ЖЭТФ, т. 32, с. 932; 505

1957б. Кандидатская диссертация. Дубна, ОИЯИ. 506

*Бланк В. З., Ширков Д. В.* 1956, Nucl. Phys., v. 2, p. 356. 486

*Блейлер (Bleuler K.).* Helv. Phys. Acta, v. 23, p. 567. 123

*Блох, Нордсик (Bloch F., Nordsiek A.).* 1937, Phys. Rev., v. 52, p. 54. 355, 462

*Боголюбов Н. Н.*

1946. Проблемы динамической теории в статистической физике. — М.: Гос-техиздат; 375

1947, ДАН СССР, т. 65, с. 325; 375

1951а, ДАН СССР, т. 81, с. 757; 407

1961б, ДАН СССР, т. 81, с. 1015; 396

1952, ДАН СССР, т. 82, с. 217; 282, 396

1954, ДАН СССР, т. 99, с. 225; 437

1955, Изв. АН СССР, сер. физ., т. 19, с. 237; 190

1956, Доклад на Международном съезде физиков-теоретиков в Сиэттле. 518, 573

- Боголюбов Н. Н., Владимиров В. С. 1958, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 22, с. 15. 565
- Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. 1969. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука. 107, 141
- Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Ширков Д. В. 1959, ЖЭТФ, т. 37, с. 805. 318
- Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. 1958. Вопросы теории дисперсионных соотношений. — М.: Физматгиз. 565, 573
- Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С.  
1955а, ДАН СССР, т. 100, с. 25; 297  
1955б, ДАН СССР, т. 100, с. 429; 297  
1956, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, с. 585; 297  
1957, Acta Math., v. 97, p. 227. 297
- Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н., 1965, Препринт ОИЯИ, Д-1968. 511
- Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.  
1955а, ДАН СССР, т. 103, с. 203; 469, 480  
1955б, ДАН СССР, т. 103, с. 391; 470, 502  
1955в, ДАН СССР, т. 105, с. 685; 502  
1956, Nuovo Cim., v. 3, p. 845; 470  
1957, ДАН СССР, т. 113, с. 529; 573
- Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. 1980. Квантовые поля. — М.: Наука, 156, 157, 511
- Бремерман, Оме, Тейлор (Bremerman H., Oehme R., Taylor J. G.). 1958, Phys. Rev., v. 109, p. 2178. 565
- Броун, Фейнман (Brown L. M., Feynman R. P.), 1952, Phys. Rev., v. 85, p. 231. 360
- Бьеркен, Дрелл (Bjorken J. D., Drell S. D.). 1965. Релятивистская квантовая теория, т. 2. — М.: Наука. 1978. 583
- Вейль (Weyl H.). 1929, Zs. Phys., B. 56, Z. 330. 80
- Вентцель Г. 1942 Введение в квантовую теорию волновых полей. — М.: Гостехиздат, 1947. 45, 55
- Вигнер Е. 1959. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. — М.: ИЛ, 1961. 138
- Вик (Wick G.). 1959, Phys. Rev., v. 80, p. 268. 159
- Владимиров А. А., Ширков Д. В. 1979, УФН, т. 129, с. 407. 501, 510
- Владимиров В. С. 1964. Методы теории функций многих комплексных переменных. — М.: Наука. 284, 403, 548, 551
- Владимиров В. С., Логунов А. А. 1959, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 23, с. 661. 565, 573
- Гайтлер В. (Heitler W.). 1954. Квантовая теория излучения: Пер. с 3-го изд. — М.: ИЛ, 1956. 255, 259
- Гейзенберг (Heisenberg W.). 1932. Zs. f. Phys., B. 77, Z. 1. 575
- Гелл-Манн, Голдбергер, Тирринг (Gell-Mann M., Goldberger M., Thirring W.). 1954, Phys. Rev., v. 95, p. 1612. 518
- Гелл-Манн, Лоу (Gell-Mann M., Low F.). 1954, Phys. Rev., v. 95, p. 1300 (ПСФ, № 3, с. 195, 1955). 469, 491
- Гельфанд И. М., Минлос Р. А. 1954, ДАН СССР, т. 97, с. 209. 437
- Гинзбург И. Ф. 1956, ДАН СССР, т. 110, с. 535. 470, 513
- Голдбергер, Триман (Goldberger M., Treiman S.). 1958, Phys. Rev., v. 109, p. 193. 574
- Горишний С. Г. и др. 1983, Phys. Lett., v. 132B, p. 351. 510
- Граверт Г., Людере Г., Рольник Г. (Grawert G., Luders G., Rollnik G.). 1959, Fortschr. d. Physik, B. 7, Z. 291. 140, 141
- Гринберг, Лоу (Greenberg O., Low F.). 1961, Phys. Rev., v. 124, p. 2047. 573
- Гупта (Gupta S.). 1950, Proc. Roy. Soc., v. 63A, p. 681. 123

*Дайсон (Dyson F.).*

1949a, Phys. Rev., v. 75, p. 486 (СУАЭ, с. 94); 190

1949b, Phys. Rev., v. 75, p. 1736 (НПКЭ, с. 205); 190, 342

1952, Phys. Rev., v. 85, p. 631; 187

1958, Phys. Rev., v. 110, p. 1460. 547

*Джин, Мартэн (Jin Y., Martin A.).* 1964, Phys. Rev., v. 135 B, p. 1375. 570

*Дирак П.*

1958. Принципы квантовой механики. — М.: Физматгиз, 1960, 1979. 101, 121

1964. Лекции по квантовой механике. — М.: Мир, 1968. 121

*Дирак, Фок, Подольский (Dirac P. A. M., Fock W. A., Podolsky B.).* 1932, Phys. Zs. Sowiet, v. 2, p. 468. 55

*Дэффин (Duffin R. J.).* 1938, Phys. Rev., v. 54, p. 905. 50

*Ефимов Г. В.* 1977, Нелокальные взаимодействия квантованных полей, — М.: Наука. 317

*Завьялов О. И.*

1974, ТМФ, т. 21, с. 322; 299

1975, ТМФ, т. 23, с. 291; 303

1979, Перенормированные диаграммы Фейнмана. — М.: Наука. 298

*Завьялов О. И., Степанов Б. М.* 1965, ЯФ, т. I, с. 922. 299

*Иги, Мацуда (Igi K., Matsuda S.).* 1967, Phys. Rev. Lett., v. 18, p. 625. 574

*Йост Р. (Jost R.).* 1965. Общая теория квантованных полей. — М.: Мир, 1967. 141

*Йост, Леман (Jost R., Lehmann H.).* 1957, Nuov. Cim., v. 5, p. 1598. 546, 550, 551

*Казакоев Д. И.* 1983, Phys. Lett., v. 133, p. 406. 510

*Казакоев Д. И., Ширков Д. В.* 1980, Fortschr. d. Phys. B28, Z. 447. 197, 510

*Каллан (Callan C.).* 1970, Phys. Rev., v. D2, p. 1542. 492

*Карплус, Клейн, Швингер (Karplus R., Klein A., Schwinger J.).* 1952, Phys. Rev., v. 86, p. 288. 434

*Картан Э.* 1938, Теория спиноров. — М.: ИЛ, 1947. 72

*Кеттер (Ketner N.).* 1939, Proc. Roy. Soc., v. 173A, p. 91. 50

*Киношита, Линдквист (Kinoshita T., Lindquist W.).* 1981, Phys. Rev. Lett., v. 47, p. 1573. 426

*Крамерс (Kramers H.).* 1927, Atti Congr. Intern. Fisici Como, v. 2, p. 545. 520

*Крониг (Kronig R.).* 1926, J. Opt. Soc. Amer., v. 12, p. 547. 520

*Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М.*

1954a, ДАН СССР, т. 95, с. 773; 503

1954b, ДАН СССР, т. 95, с. 1177; 500

1954a, ДАН СССР, т. 96, с. 261. 503

*Ландау Л. Д., Померанчук И. Я.* 1955, ДАН СССР, т. 102, с. 489. 500

*Леман (Lehmann H.).*

1954, Nuovo Cim., v. II, p. 342 (ПСФ, № 3, с. 133, 1955); 353, 529

1959, Suppl. Nuovo Cim., v. 14, p. 153. 565

*Липатов Л. Н.* 1977, ЖЭТФ, т. 72, с. 411. 510

*Логунов А. А.* 1956, ЖЭТФ, т. 30, с. 793. 478

*Логунов А. А., Биленький С. М., Тавхелидзе А. Н.* 1958, Nuovo Cim., v. 10, p. 953. 573

*Логунов А. А., Нгуен Ван Хьеу, Мествиришвили М. А.* 1967, Proc. 1967 Rochester Conf., p. 258; Phys. Lett. v. 25B, p. 611. 574

*Логунов А. А., Нгуен Ван Хьеу, Хрусталева О. А.* 1969. Проблемы современной физики: Сборник, посвященный Н. Н. Боголюбову в связи с 60-летием. — М.: Наука. 570

*Логунов А. А., Нгуен Ван Хьеу, Тодоров И. Т.* 1966, УФН, т. 88, с. 51. 574

*Логунов А. А., Нгуен Ван Хьеу, Тодоров И. Т., Хрусталева О. А.*

1963, Phys. Lett., v. 7, p. 71; 574

1965, ЖЭТФ, т. 46, с. 1079. 574



- Логунов А. А., Соловьев Л. Д.  
1958, Научн. докл. высш. шк. № 4, с. 217. 573  
1959, Nucl. Phys., v. 10, p. 60. 573
- Логунов А. А., Соловьев Л. Д., Тавхелидзе А. Н., 1967, Phys. Lett., v. 24B, p. 181. 574
- Логунов А. А., Степанов Б. М. 1956, ДАН СССР, т. 110, с. 368. 573
- Логунов А. А., Тавхелидзе А. Н. 1958, ДАН СССР, т. 120, с. 739. 573
- Логунов А. А., Тавхелидзе А. Н., Соловьев Л. Д. 1957, Nucl. Phys., v. 4, p. 427. 573
- Манделстам (Mandelstam S.). 1958, Phys. Rev., v. 112, p. 1344. 518
- Мартэн (Martin A.). 1963, Phys. Rev., v. 129, p. 1432. 573
- Медведев Б. В., Поливанов М. К.  
1964, Труды Международной зимней школы по теоретической физике при ОИЯИ, т. 1, с. 77; 574  
1967, ЖЭТФ, т. 53, с. 1316. 340
- Медведев Б. В., Павлов В. П., Поливанов М. К., Суханов А. Д. 1972, ТМФ, т. 13, с. 3. 574
- Мейман Н. Н. 1962, ЖЭТФ, т. 43, с. 2277. 574
- Мор (Mohr P.). 1975, Phys. Rev. Lett., v. 34, p. 1050. 435
- Нётер Э. 1918. Статья в кн.: Вариационные принципы в механике. — М.: Физматгиз, 1959, с. 611. 25
- Нишиджима К. 1964. Фундаментальные частицы. — М.: Мир, 1965. 575
- Овсянников Л. В. 1956, ДАН СССР, т. 109, с. 1112. 481, 482
- Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В. 1961, ЖЭТФ, т. 41, с. 247. 54
- Окубо, Маршак, Сударшан (Okubo S., Marshak R., Sudarshan E.). 1959 Phys. Rev., v. 113, p. 944. 574
- Оме, Тейлор (Oehme R., Taylor J. G.). 1959, Phys. Rev., v. 113, p. 371. 565, 573
- Павлов В. П., Тавлуев Г. А. 1971, ТМФ, т. 9, с. 80. 213
- Парасюк О. С.  
1955, ДАН СССР, т. 100, с. 643. 297  
1956, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, с. 843. 297
- Паули (Pauli W.).  
1941. Релятивистская теория элементарных частиц. — М.: ИЛ, 1947. 45, 50, 84, 107  
1955. Статья в кн.: Нильс Бор и развитие физики. — М.: ИЛ, 1958. 141
- Паули, Вилларс (Pauli W., Willars F.). 1949, Rev. Mod. Phys., v. 21, p. 434 (СУАЭ, с. 139). 155, 190
- Поливанов М. К. 1955, ДАН СССР, т. 100, с. 1061. 382
- Померанчук И. Я. 1958, ЖЭТФ, т. 34, с. 725. 573
- Рафаэль, Рознер (de Rafael E., Rosner J. L.). 1974, Ann. of Phys., v. 82, p. 369. 501
- Редмонд, Урецкий (Redmond P. J., Uretski J. L.). 1958, Phys. Rev. Lett., v. 1, p. 147. 318
- Ривье, Штюкельберг (Rivier D., Stueckelberg E. C. G.). 1948, Phys. Rev., v. 74, p. 218. 144
- Салам (Salam A.). 1951, Phys. Rev., v. 82, p. 217. 130
- Свидзинский А. В. 1956, ЖЭТФ, т. 31, с. 324. 461
- Симанчик (Symanzik K.).  
1954, Zs. f. Naturforsch., B. 9a, Z. 809; 437  
1957, Phys. Rev., v. 105, p. 743; 573  
1970, Commun. Math. Phys., v. 18, p. 227. 492
- Синг, Рой (Singh V., Roy S.) 1970, Ann. of Phys., v. 57, p. 461, 573

- Славнов А. А.*  
 1972а, ТМФ, т. 10, с. 153; 451  
 1972б, ТМФ, т. 13, с. 174; 451  
 1975, ТМФ, т. 22, с. 177. 443
- Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* 1978. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука. 87, 511
- Соболев С. Л.* 1936, Матем. сборник I, т. 43, с. 39. 168
- Соколов Ю. Л., Яковлев В. П.* 1982, ЖЭТФ, т. 83, с. 15. 435
- Степанов Б. М.*  
 1955, ДАН СССР, т. 100, с. 889. 410  
 1963, ДАН СССР, т. 151, с. 84. 283  
 1965, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 29, с. 1037. 283, 284
- Стриттер Р., Вайтман А.* 1964, РСТ, спин, статистика и все такое. — М.: Наука, 1966. 107, 141
- Сугавара, Каназава (Sugawara M., Kanazawa A.)* 1961, Phys. Rev., v. 123, p. 1895. 574
- Суханов А. Д.*  
 1961, ЖЭТФ, т. 41, с. 1915; 213  
 1962а, ЖЭТФ, т. 43, с. 932; 402  
 1962б, ЖЭТФ, т. 43, с. 1400. 403
- Тарасов О. В. и др.* 1980, Phys. Rev., v. B93, p. 429. 512
- Тирринг (Thirring W.)*. 1958, Ann. Phys., v. 3, p. 91. 518
- Тодоров И. Т.* 1960, Nucl. Phys., v. 18, p. 521. 565
- Тодоров И. Т., Хрусталева О. А.* 1959, Nucl. Phys., v. 13, p. 675. 574
- Томонага (Tomonaga S.)*. 1946, Prog. Theor. Phys., v. 1, p. 27 (НРКЭ, с. 1). 189, 190
- Уорд (Ward J. C.)*. 1950, Phys. Rev., v. 78, p. 182. 279
- Фаддеев Л. Д., Попов В. Н.*  
 1967а, Phys. Lett., v. 25B, p. 29; 451  
 1967б, Препринт ИТФ-67-36, Киев. 451
- Фарри (Furry W.)*. 1937, Phys. Rev., v. 51, p. 125. 323
- Фейнман (Feynman R. P.)*.  
 1948а, Rev. Mod. Phys., v. 20, p. 367 (ВПКМ, с. 167); 437  
 1948б, Phys. Rev., v. 74, p. 1430; 153  
 1949а, Phys. Rev., v. 76, p. 749 (НРКЭ, с. 138); 222, 323  
 1949б, Phys. Rev., v. 76, p. 769 (НРКЭ, с. 161); 222  
 1951, Phys. Rev., v. 84, p. 108 (ПСФ, N 3, с. 37, 1955). 206
- Фок В. А.* 1937, Phys. Zs. Sowjetunion, B. 12, Z. 404. 463
- Фрадкин Е. С.*  
 1954, ДАН СССР, т. 98, с. 47; 437  
 1955, ЖЭТФ, т. 28, с. 750. 500
- Фроассар (Froissart M.)*. 1961, Phys. Rev., v. 123, p. 1053. 573
- Халатников И. М.* 1955, ЖЭТФ, т. 28, с. 633. 436
- Хан, Намбу (Han M., Nambu Y.)*. 1965, Phys. Rev., v. 139B, p. 1006. 511
- Хенн (Hepp K.)*. 1966, Commun. Math. Phys., v. 2, p. 301. 297
- Ван Хов (Van Hove L.)*. 1963, Phys. Lett., v. 5, p. 252. 574
- т'Хоофт (t'Hoofst G.)*. 1973, Nucl. Phys., v. B61, p. 455. 298
- т'Хоофт, Вельтман (t'Hoofst G., Veltman M.)*. 1972, Nucl. Phys., v. B44, p. 189. 156
- Хорган и Жакоб (Horgan R., Jacob M.)* 1981, УФН, т. 136, с. 219, 1982. 572
- Челлен (Kallen G.)*.  
 1951, Arkiv for Fys., B. 2, Z. 371; 292  
 1952, Helv. Phys. Acta, v. 25, p. 417. 353, 528

- Чу, Голдбергер, Лоу, Намбу (*Chew G., Goldberger M., Low F., Nambu Y.*). 1957, Phys. Rev., v. 106, p. 1337. 573
- Шварц (*Schwartz L.*). 1950. Theorie des distributions. — Paris. 168
- Швебер (*Schweber S.*). 1961. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. — М.: ИЛ, 1963. 185
- Швингер (*Schwinger J.*).  
1948, Phys. Rev., v. 74, p. 1439 (НРКЭ, с. 12); 189, 190, 412  
1949а, Phys. Rev., v. 75, p. 651 (НРКЭ, с. 40); 97, 375, 421  
1949б, Phys. Rev., v. 76, p. 790 (НРКЭ, с. 78); 425  
1951а, Proc. Natl. Acad. Sci., v. 37, p. 452 (ПСФ, № 3, с. 28, 1955); 390  
1951б, Proc. Natl. Acad. Sci., v. 37, p. 455 (ПСФ, № 3, с. 33, 1955). 390
- Ширков Д. В.  
1955, ДАН СССР, т. 105, с. 972; 470, 513  
1981, ТМФ, т. 49, с. 291; 486  
1982, ДАН СССР, т. 263, № 1, с. 64. 477
- Штюкельберг (*Stueckelberg E. C. G.*).  
1938, Helv. Phys. Acta, v. 11, p. 225, p. 299; 314  
1951, Phys. Rev., v. 81, p. 130. 403
- Штюкельберг, Грин (*Stueckelberg E. C. G., Green J.*). 1951, Helv. Phys. Acta, v. 24, p. 153. 190
- Штюкельберг, Ривье (*Stueckelberg E. C. G., Rivier D.*). 1949, Helv. Phys. Acta, v. 22, p. 215. 190
- Штюкельберг, Петерман (*Stueckelberg E. C. G., Peterman A.*). 1953, Helv. Phys. Acta, v. 26, p. 499. 469
- Щербина В. А. 1964. Депонировано в ВИНТИ, № 38-64. 299
- Эдвардс, Пайерлс (*Edwards S. F., Peierls R. E.*). 1954, Proc. Roy. Soc., v. 224A, p. 24 (ПСФ, т. 112, № 3, 1955). 436
- Янг, Миллс (*Yang C. N., Mills R. L.*). 1954, Phys. Rev., v. 96, p. 190. 86

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аксиоматическая формулировка 519  
Аксиомы локальные 526  
— общие 522  
Алгебра Грассмана 376, 445  
Альфа-представление 262, 290, 585  
Амплитуда рассеяния 248, 527  
— — пионов на нуклонах 528, 577  
— состояния 91  
— — вакуума 99  
— —, нормировка 99, 244  
Аномальная размерность 497, 509  
Антиунитарность 138  
Антихронологическое произведение 204  
Античастицы 130  
Асимптотика инфракрасная 504  
— — высших вертексов 505  
— ультрафиолетовая 469, 496, 499—503  
— — вершины симметричная 503  
— — высших вертексов 516  
— — двухзарядной модели 512—517  
— — квантовой хромодинамики 512  
— — пропагатора фотона 354, 500—502  
— — — электрона 357, 503  
— — скалярной модели 364, 506—509  
Асимптотическая свобода 495, 498, 507—512  
Бета-функция ренормгрупповая 480—485  
— — квантовой хромодинамики 512  
— — — электродинамики 501  
— — скалярной модели 510  
— —, схемная зависимость 487, 488  
Блоха—Нордсика метод 305, 355, 360  
— — модель 61  
Вариационная производная 194  
— — по ферми-полям 377  
Вектор состояния см Амплитуда состояния  
— тока 33, 413  
Векторное поле 44, 53  
— — калибровочное 85  
— —, квантование 115  
Вероятности переходов 246  
Вершинная функция 345, 348  
— — сильно-связная 381  
— — скалярной модели 366  
— — электродинамики 274, 357  
Взаимодействие полей 82  
— — калибровочное 88  
— — минимальное 85  
— — неперенормируемое (2-го рода) 314  
— — перенормируемое (1-го рода) 314  
Вика теорема 159, 218  
— — обобщенная 383  
Виртуальные состояния 239  
— частицы 239  
Гамильтониан 28, 185  
— взаимодействия 188  
— обобщенный 200, 309, 397  
— —, аналитические свойства 311  
— —, основные свойства 405  
— —, сингулярности 401  
Гамильтонов формализм 17, 118  
Гелл-Манна—Лоу формула 491  
Гиперзаряд 31  
Градиентная инвариантность 269  
— — матрицы рассеяния 326, 454  
Градиентные преобразования 54  
Группа изотопическая 30, 575  
— Лоренца 18  
— неабелева 86  
— Пуанкаре 18, 20  
— ренормировок см. Ренормализационная группа  
Диаграмма Фейнмана 222  
— —, вершина (узел) 224  
— — вершинная 227  
— —, дудерево 292  
— —, дерево 292  
— —, индекс 289  
— —, компонента связности 287  
— —, несвязная 287  
— —, петли 292  
— —, связная 287

- Диаграмма Фейнмана сильно связная 287  
 — — скелетная 347  
 — — слабо связная 287  
 — —, хорда дерева 299
- Заряд 30**  
 — барионный 90  
 — мезонный (константа связи) 369  
 Зарядовая инвариантность 322  
 — симметрия 105  
 — четность 136  
 Зарядовое сопряжение 105  
 — — операторов 130, 136  
 — — спинорного поля 130
- Изотопическая инвариантность 86**  
 — симметрия 575  
 — структура амплитуды рассеяния 569, 577  
**Изотопические преобразования 24, 86**  
**Изотопический вектор 42**  
 — дублет 31, 115, 575  
 — спин 30  
 — спинор 31, 115  
 — триплет 42, 118, 576  
 — формализм 369, 575  
 Инвариантный заряд 415  
 — —, асимптотики 492  
 Индекс вершины 313  
 — диаграммы 289  
 Индефинитная метрика 123  
 Инфракрасная асимптотика 357, 467, 504  
 — катастрофа 305, 355, 467, 506  
 — сингулярность 357, 360
- Калибровка диагональная 337**  
**Калибровка поперечная 338, 458**  
 —, фиксация 453  
 — электромагнитного поля 54  
 Калибровочные поля 85  
 — преобразования 84  
 Каллана—Симанчика уравнение 492  
 Канонические уравнения 119  
 Канонический импульс 119  
 — формализм см. Гамильтонов формализм  
 Каноническое квантование 118  
 Квантование полей 105—106  
 — — каноническое 118  
 — —, постулат 95  
 Квантовая хромодинамика 86, 511  
 — —, параметр шкалы 512  
 Континуальный интеграл 437  
 — — по ферми-полям 444  
 Контрчлены 272, 336  
 Коэффициентные функции 157, 167  
 — —, условие интегрируемости 169
- Лагранжев формализм 17  
 Лагранжиан 19  
 — взаимодействия 82  
 — локальный 19  
 — сингулярный 120  
 Локальная коммутативность (локальность) 203, 166  
 Лэмбовский сдвиг уровней 432
- Магнитный момент нейтрона 230**  
 — — электрона 423  
 — — — аномальный 424  
 Массовый оператор 261, 392  
 Матрица рассеяния 189  
 — — градиентная инвариантность 326, 454  
 — —, ковариантность 192, 198  
 — —, локальность 203  
 — —, локальные свойства 524  
 — —, общие свойства 522  
 — —, причинность 192, 195, 201  
 — —, унитарность 192, 200  
 Матрицы Дирака 60, 64  
 — — расщепленное представление 73  
 — Дэффина—Кеммера 52  
 — Паули 93  
 Минимальное вычитание 298, 501, 512
- Нейтринное поле 80**  
 — —, представление Майорана 134  
 Несобственные функции 168  
 — —, умножение 174  
 Нормальное произведение 107, 160  
 — — со спариваниями 160
- Обобщенные функции см. Несобственные функции**  
 Обращение времени 138  
**Оператор антиунитарный 138**  
 — квазилокальный 167  
 — локальный 166  
 — массовый 261, 392  
 — полилокальный 166  
 — поляризованный 267  
 — радиационный 529  
 — тока 413  
 — унитарный 93  
**Операторы взаимодействующих полей 416**  
 — свободных полей 94  
 Оптическая теорема 528  
 Осцилляторы поля 16, 40
- Перенормировка заряда 342, 345, 347, 498**  
 — — конечная 497  
 — массы 340, 346, 347  
 — полевой функции 340  
 — размерная 298  
 — функции Грина 340

- Перестановочная функция Паули —  
 Йордана 106, 580  
 — —, сингулярности 152  
 — —, явный вид 151, 580, 582  
 Перестановочные соотношения 101  
 — — Бозе—Эйнштейна 105  
 — — Ферми—Дирака 105  
 Поле Вейля 80  
 — Дирака 70  
 — Майорана 135  
 — Максвелла 53  
 — Янга—Миллса 86, 451, 495, 511  
 Поляризация вакуума 186, 267, 417,  
 431, 495  
 Правила соответствия графические 225  
 — сумм 574  
 — Фейнмана 232  
 Правило знаков 227  
 Представление взаимодействия 189  
 — Гейзенберга 92  
 — группы 21  
 — присоединенное 87  
 — фоковское 100  
 — Челлена—Лемана см. Спектраль-  
 ное представление  
 — Шредингера 92, 188  
 Преобразование градиентное 54  
 — Дайсона 342, 394  
 — зарядового сопряжения 105, 130  
 — калибровочное 54, 84  
 — Лежандра 380  
 — обращения времени 138  
 — спинорных билинейных форм 69  
 — фазовое 24, 32  
 Призрачный полюс 500, 502  
 Принцип Паули 112  
 Причинная функция Грина 146  
 Причинность см. Условие причинности  
 Производящий функционал 375  
 — — для вакуумных ожиданий 376  
 — — — связанных функций 379  
 — — — сильно-связных вертексов  
 380  
 Радиационные операторы 525  
 — поправки 351  
 — — к вершинной функции 357  
 — — — комптоновскому рассеянию  
 358  
 — — — фотонной функции 352  
 — — — электронной функции 356  
 Размерная перенормировка 298  
 — регуляризация 156, 586  
 — трансмутация 512  
 Распад двухчастичный 251  
 Рассеяние комптоновское 252  
 Расходимость инфракрасные 355  
 — поверхностные 403  
 — ультрафиолетовые 260  
 Регуляризация Паули—Вилларса 155,  
 328  
 — — —, свойства 172  
 — размерная 156, 586  
 — Фейнмана 153, 266  
 Редукционные формулы 388  
 Релятивистская инвариантность 18  
 Ренормализационная группа 348, 472  
 — — двухзарядная 473  
 — —, уравнения см. Уравнения ре-  
 нормгрупповые  
 Симметрии внутренние 33  
 Сингулярные лагранжианы см. Лаг-  
 ранжиан сингулярный  
 — функции см. Несобственные функ-  
 ции  
 Скобка Пуассона квантовая 93, 119  
 — — классическая 101, 119  
 Спаривание операторов 159  
 — — хронологическое 214  
 Спектральное представление 353  
 — — бозонного пропагатора 539  
 — — Йоста—Лемана—Дайсона 547  
 — — коммутатора токов 534  
 — — фермионного пропагатора 544  
 Спин 30  
 — векторного поля 49  
 — изотопический 31  
 — спинорного поля 77  
 —, тензор матричный 78  
 — электромагнитного поля 56  
 Спинорное поле 59  
 — —, законы преобразования 65  
 Спиральность 81, 134  
 Степень роста условная 289  
 Схемная зависимость 486  
 Тензор Минковского 13  
 — момента количества движения 29  
 — спина 30  
 — энергии-импульса 28  
 Теорема Вика 159  
 — — обобщенная 383  
 — — хронологическая 218  
 — Людерса—Паули (CPT) 140  
 — Нётер 25  
 — об «острие клина» 565  
 — о перенормировках (Парасюка) 297  
 — Паули 105  
 — Померанчука 573  
 — Фарри 322  
 Тождества Уорда 279, 336  
 — — обобщенные (Уорда—Такахаша)  
 333, 457  
 Тормозное излучение 257  
 Узел диаграммы (вершина) 224  
 — —, индекс 313  
 — — обобщенный 285

- Ультрафиолетовая асимптотика см  
 Асимптотика ультрафиолетовая  
 Унитарности условие 192  
 Уравнение Вейля 80  
 — Даламбера 54  
 — Дирака 64  
 — — обобщенное 431  
 — — сопряженное 65  
 — Дэффина — Кеммера 51  
 — Клейна — Гордона 35  
 — Максвелла 53  
 — Томонага — Швингера 401  
 — Шредингера 92, 185  
 — — в представлении взаимодействия 188, 399  
 Уравнения Дайсона 391  
 — ренормгруппы двухзарядные 480  
 — — дифференциальные (Ли, 480  
 — — — Овсянникова 481  
 — — функциональные 475, 477  
 — Швингера 389  
 Условие интегрируемости 169  
 — Лоренца 54, 415  
 — причинности 193  
 — — дифференциальное 195  
 Условная степень роста 289
- Фазовое преобразование 24, 82  
 — — локальное (калибровочное) 84  
 Формализм Дэффина — Кеммера 51, 85
- Формула Кирхгофа 548  
 — Клейна — Нишины — Тамма 255  
 — Крамерса — Кронига 520  
 Формфактор пион-нуклонный 567  
 Функциональная производная 375  
 Функциональный интеграл см. Континуальный интеграл  
 Функция Грина 142  
 — — полная 273, 295  
 — — причинная 144
- Хронологическое произведение 145  
 — — виково 148  
 — — дайсоново 148  
 — — локальных операторов 204
- Цвет 86, 511
- Четность 23, 137  
 — зарядовая 136
- Экранизация заряда 420  
 Электромагнитное взаимодействие 85  
 Энергии-импульса вектор 28  
 — тензор 28  
 Энергия собственная 431  
 Эффективная константа связи 488  
 — масса 503  
 Эффективное поперечное сечение 250  
 — — — дифференциальное 249

*Николай Николаевич Боголюбов,  
Дмитрий Васильевич Ширков*

## ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ

Редактор *В. Я. Дубнова*  
Техн. редактор *Л. В. Лихачева*  
Корректоры: *Т. С. Вайсберг, Л. С. Сомова*

ИБ № 12042

---

Сдано в набор 09.12.83. Подписано к печати 06.11.84. Т-21336.  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага книжно-журнальная. Литературная  
гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 37,5. Усл. кр.-отт. 37,5.  
Уч.-изд. л. 37,57. Тираж 6550 экз. Заказ № 123. Цена 4 р.

---

Издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

---

Отпечатано с матриц ордена Октябрьской Революции, ор-  
дена Трудового Красного знамени Ленинградского произ-  
водственно-технического объединения «Печатный Двор»  
имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государст-  
венном комитете СССР по делам издательств, полиграфии  
и книжной торговли. 197136 Ленинград П-136, Чкалов-  
ский пр., 15 в Ленинградской типографии № 4 ордена Тру-  
дового Красного Знамени Ленинградского объединения  
«Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполи-  
графпрома при Государственном комитете СССР по делам  
издательств, полиграфии и книжной торговли. 191126, Ле-  
нинград, Социалистическая ул., 14.



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

---

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ:

**ЕФИМОВ Г. В. Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий.**

В книге излагаются методы построения матрицы рассеяния в квантовой теории поля с нелокальным взаимодействием. Рассматриваются взаимодействия бозе- и ферми-полей, а также квантовая электродинамика. Формулируются методы изучения поведения плотности энергии вакуума для различных систем при асимптотически больших константах связи. Дается описание виртонного поля, лежащего в основе нелокальной модели кварков.

Для физиков-теоретиков и математиков, интересующихся принципиальными вопросами квантовой теории поля и физикой элементарных частиц, а также аспирантов и студентов старших курсов физико-математических специальностей.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

---

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ:

**ДЖЕММЕР М.** Эволюция понятий квантовой механики: Пер. с англ. /Под ред. Л. И. Пономарева.

Книга известного историка науки М. Джеммера о становлении квантовой физики — практически единственная в мировой литературе по полноте и точности. Она содержит исчерпывающую библиографию и анализ работы по квантовой физике от времени ее зарождения до момента завершения ее как непротиворечивой и концептуально независимой системы знаний. Книга основана на тщательном изучении первоисточников и на материалах «Архива истории квантовой физики», изданного в 1960—1963 гг. в Филадельфии, который включает переписку основателей квантовой физики (Н. Борь, А. Эйнштейн и др.) и их интервью основателям архива.

Для научных работников, студентов и преподавателей естественнонаучных специальностей и изучающих историю науки.

Список основных опечаток

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
36	ф-ла (9)	$\dots e^{ikl} \dots$	$\dots e^{ikx} \dots$
55	ф-ла (11)	$\dots  k^2 - 0 \dots  k^2 - 0 \dots$	$\dots  k^2 = 0 \dots  k^2 = 0 \dots$
64	ф-ла (21)	$i \frac{\partial \psi}{\partial x^n} \gamma^n + m\psi = 0,$	$i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^n} \gamma^n + m\bar{\psi} = 0,$
89	строки 14, 15, 16, 17 снизу	$\dots = \frac{l}{2} \dots$	$\dots = \frac{i}{2} \dots$
104	ф-ла (11)	$\dots a_{\beta}^{\dagger}(q) \dots$	$\dots a_{\beta}^{\dagger*}(q) \dots$
126	12 сверху	$F^{-}(k) = \dots$	$F^{-}(k) \Phi_{1,1} = \dots$
129	13 снизу	$\dots \psi(x) \gamma^k \dots$	$\dots \bar{\psi}(x) \gamma^k \dots$
130	12 снизу	$\dots \overset{!}{C}^{-1}.$	$\dots \overset{\uparrow}{C}^{-1}.$
235	1 снизу	$\overline{\psi(x) \psi(y)}$	$\overline{\psi(x) \bar{\psi}(y)}$
237	ф-ла (15)	$\dots \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet$ $\quad \quad \quad x \quad \quad \quad y$	$\dots \bullet \xleftarrow{\quad} \bullet$ $\quad \quad \quad x \quad \quad \quad y$
258	ф-ла (16)	$\dots \text{Sp } A,$	$\dots \text{Sp } \bar{A},$
376	5 снизу	$\dots \bar{\eta}(y) \bar{\eta}(x) = 0,$	$\dots \bar{\eta}(y) \eta(x) = 0,$
416	5 снизу	$\eta, \bar{\eta}$	$\eta, \bar{\eta}$
475	ф-ла (29)	$\dots h(t, y, h) \dots$	$\dots \bar{h}(t, y, h) \dots$
	ф-ла (32)	$\dots h\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, h(t, y, h)\right),$	$\dots \bar{h}\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \bar{h}(t, y, h)\right),$
	ф-ла (33)	$h(1, y, h) = h.$	$\bar{h}(1, y, h) = h.$
482	3 сверху	$\dots \frac{\partial h(x, y; g, h)}{\partial x}$	$\dots \frac{\partial \bar{h}(x, y; g, h)}{\partial x}$
	9 сверху	$\dots \} g(x, y; g, h) = 0,$	$\dots \} \bar{g}(x, y; g, h) = 0,$
	2 снизу	$h$	$\bar{h}$
507	ф-ла (4)	$h(x, h) = \dots$	$\bar{h}(x, h) = \dots$
513	ф-ла (26б)	$\frac{\partial h}{\partial l} = \dots$	$\frac{\partial \bar{h}}{\partial l} = \dots$
516	ф-ла (37)	$\dots (1, g^2(x), h(x)).$	$\dots (1, \bar{g}^2(x), \bar{h}(x)).$
542	ф-ла (21)	$\dots  \delta_{\omega}(0)  \dots$	$\dots  \bar{\delta}_{\omega}(0)  \dots$
581	2 сверху	$\dots - \frac{im^2}{8\pi^2} 1 \dots$	$\dots - \frac{im^2}{8\pi^2} \ln \dots$