

Ныне, в век бурного развития науки, разработка философских проблем современного естествознания на основе диалектического материализма приобретает особую актуальность. На это обстоятельство указывает Программа КПСС.

Целью серии «Философские проблемы естествознания» является исследование философских вопросов, поставленных развитием современной математики, астрономии, физики и смежных наук. Сюда относятся не только вопросы, касающиеся строения материи, форм ее существования, законов ее движения и т. п., но и вопросы методологии исследования в указанных областях науки, закономерностей развития научных теорий, путей образования и применения научных абстракций.

Учитывая большой интерес к этим проблемам широких кругов читателей, издательство стремится к тому, чтобы в книгах этой серии строгий научный анализ сочетался с необходимой простотой и доступностью изложения.

Д. И. БЛОХИНЦЕВ

ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ  
ВОПРОСЫ  
КВАНТОВОЙ  
МЕХАНИКИ

*Г. В. Рунин*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1966

## АННОТАЦИЯ

Автор известного курса квантовой механики посвящает эту монографию принципиальным вопросам квантовой механики, имеющим фундаментальное значение для понимания этой важной теории. Особое внимание автор уделяет анализу взаимоотношения микросистемы с окружающей ее макрообстановкой, в частности, анализу работы макроскопического прибора. Концепция автора не является общепринятой и общезвестной, и это делает книгу особенно интересной.

Книга предназначена для широкого круга физиков, теоретиков и экспериментаторов, интересующихся основами современной теории. Она будет также полезна и интересна для философов, занимающихся методологией современного естествознания.

*Дмитрий Иванович Блохинцев*

Принципиальные вопросы квантовой механики

М., 1966 г., 160 стр. с илл. автора

(Серия: «Философские проблемы естествознания»)

Редактор *В. А. Лешковцев*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *А. С. Бакулова*

Сдано в набор 25/V 1966 г. Подписано к печати 11/X 1966 г. Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>.

Физ. печ. л. 5. Условн. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 7,14.

Тираж 15 000 экз. Т-12757. Цена 48 коп. Заказ № 230.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой  
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.  
Измайловский проспект, 29.

## СОДЕРЖАНИЕ

От автора . . . . .	4
§ 1. Иллюзия детерминизма . . . . .	5
§ 2. Классическая механика и причинность . . . . .	8
§ 3. Ансамбль Гиббса . . . . .	22
§ 4. Квантовый ансамбль . . . . .	27
§ 5. Матрица плотности . . . . .	36
§ 6. Причинность в квантовой механике . . . . .	44
§ 7. Можно ли обойтись без волновой функции? . . . . .	54
§ 8. Измерима ли волновая функция? . . . . .	58
§ 9. Восстановление структуры микрообъекта по рассеянию частиц . . . . .	67
§ 10. Обратная задача в квантовой механике . . . . .	74
§ 11. Почему измерительный прибор есть макроскопическое устройство? . . . . .	80
§ 12. Схема макроскопического прибора . . . . .	88
§ 13. Теория измерения . . . . .	101
§ 14. Волновая функция -- записная книжка наблюдателя? . . . . .	121
§ 15. Является ли квантовая механика полной теорией? . . . . .	127
§ 16. Скрытые параметры . . . . .	133
§ 17. Возможна ли индивидуальная история частицы? . . . . .	148
Литература . . . . .	158

## ОТ АВТОРА

Эта монография посвящена принципиальным проблемам квантовой механики и базируется на концепции, первоначально изложенной в моем курсе «Основы квантовой механики». Объем и назначение этого курса не позволили с необходимой полнотой остановиться на принципиальных вопросах. К тому же вплоть до последнего времени некоторые важные пункты не были разработаны с достаточной степенью ясности. В особенности это относится к анализу работы измерительного прибора, двойная роль которого как анализатора квантового ансамбля и как детектора индивидуальных событий оставалась недостаточно разъясненной.

Читатель легко убедится, что эта монография является книгой по теоретической физике, а не философским трактатом. Однако я никогда не отделял мировоззрения от науки, особенно от теоретической физики; поэтому в этой книге немало и философии. Это обстоятельство явилось основанием для ее публикации в философской серии.

Что касается рисунков, то, на мой взгляд, немного юмора полезно даже в самом серьезном деле.



## § 1. ИЛЛЮЗИЯ ДЕТЕРМИНИЗМА

«С необходимостью этого рода мы тоже еще не выходим за пределы теологического взгляда на природу. Для науки почти безразлично, назовем ли мы это, вместе с Августином или Кальвином, извечным решением божьим, или, вместе с турками, кismetом, или же необходимостью. Ни в одном из этих случаев нет и речи о проследивании причинной цепи. Поэтому как в том, так и в другом случае мы ничуть не становимся умнее. Так называемая необходимость остается пустой фразой, а вместе с этим и случай остается тем, чем он был».

Ф. Энгельс

Мы могли бы сказать полнее: уютная иллюзия детерминизма, которая, кажется, началась с гордого, но пустого заявления Лапласа: «дайте мне начальные данные частиц всего мира и я предскажу вам будущее мира».

Сейчас, когда вспоминаешь эти знаменитые слова великого ученого XVIII столетия, его время представляется таким далеким, как если бы мы рассматривали его в перевернутый бинокль. Теперь мы более трезвы и очень далеки от этой надежды механистического века. Но даже и начало нашего века,

разрушившего наивные иллюзии девятнадцатого столетия, когда все казалось ясным, а наука — исчерпанной проблемой, кажется уже бесконечно далеким. Теперь мы вновь подходим к какому-то новому рубежу, вероятно очень революционному, контуры этого нового кажутся очень грандиозными, но еще скрытыми дымкой и далеко неясными.

Возможно, это только ощущение, основанное на страстном желании перемены устоявшихся принципов, принципов, которые явно устарели, но за которые мы держимся только потому, что у нас нет новых, и еще, может быть, и потому, что многие из нас опасаются этих перемен, могущих разрушить уют установившегося образа мыслей.

Самое удивительное в этом ощущимом движении нового заключается в том, что оно очевидным образом охватывает не только физику, но биологию и космологию, и готовится оказать существенное влияние на наше научное мировоззрение. В этой обстановке критическое отношение к самим основам современной теории является, по-видимому, самым разумным.

К числу таких основ теории относится и концепция классического детерминизма. Вернее сказать, не так сомнителен сам детерминизм, как сомнительно безотчетное преклонение перед идеалом детерминизма.

Человечество долго верило в предопределение божие и, позднее, в железную причинную связь. Близкое философское родство и неполноценность этих воззрений были поняты Энгельсом, а многовековое непонимание этого родства было поводом для трагедий и стоило жизни многим выдающимся людям.

Стремление к познанию истины составляет законную гордость человеческого рода, и перед этим стремлением должно отступить на задний план чувство естественной тревоги за возможную потерю уюта привычных представлений.

Мы должны теперь признать, что в жизни вселенной нельзя игнорировать элемент азартной игры: если бы мы и решились на минуту признать бога или другую направляющую силу, то всё же мы были бы обязаны признать, что бог или нечто ему эквивалентное имеет некоторую склонность к азартным играм. Его Величество Случай пользуется явной благосклонно-

стью Закона и подстраивает нам вещи неожиданные или маловероятные. Более того, можно даже указать область явлений, где он особенно чувствует себя привольно: я имею в виду атомную и молекулярную физику.

Великий физик-материалист Больцман первый заметил это важное обстоятельство и выдвинул изумительную гипотезу о том, что вся наблюдаемая нами область Вселенной есть результат огромной флуктуации, какой еще никогда прежде не видел и не мог видеть мир.

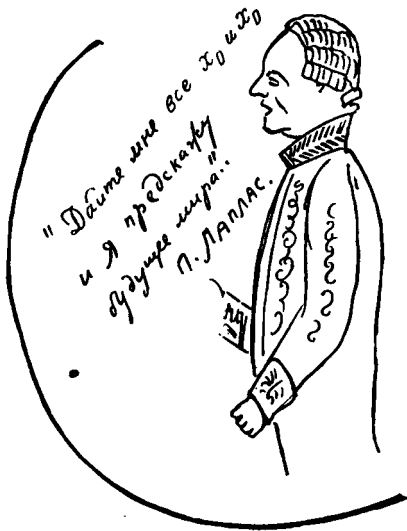
Итак, нам нужно привыкнуть к мысли, что мир не устроен очень прямолинейным образом и не так прост, как это хотелось бы приверженцам различных постулативных систем.

Для того чтобы привыкнуть, лучше всего увидеть недостатки в идеале, которому поклоняешься. Вот с этого мы и начнем.

Принцип детерминизма особенно просто выглядит в классической механике. Классическая механика учит, что по начальным данным можно определить полностью состояние механической системы в любом сколь угодно далеком будущем.

---





## § 2. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА И ПРИЧИННОСТЬ

Классическая механика является простейшим образцом теории, в которой детерминизм господствует самым безраздельным образом. Едва ли не со школьной скамьи, и уж, во всяком случае, с первого курса института, нас приучали к мысли, что с помощью законов классической механики можно предсказать будущее механической системы, если известны начальные данные этой системы. Это утверждение кажется тривиальной истиной, в которой на самом деле содержится заметная доля лжи, точнее — умолчания. Действительно, начальные данные не могут быть определены бесконечно точно. Строго говоря, мы имеем лишь некоторое распределение начальных данных, а «истинное» их значение известно нам только с некоторой степенью вероятности. Следовательно, необходимо было бы рассмотреть, в какой мере эта неопределенность в начальных данных влияет на предсказание состояния системы в будущем, при  $t \rightarrow \infty$ ?

Кроме того, в процессе движения системы на нее будут действовать случайные силы, которые мы не

в состоянии предсказать. Даже и в том случае, когда эти силы малы, их эффект может оказаться очень значительным для большого времени. Поэтому нельзя исключить влияние этих случайных сил из реального движения.

Третье обстоятельство заключается в гарантии того, что за время, в течение которого мы намерены предсказывать будущее системы, эта система будет оставаться изолированной. Это означает, что должны быть заданы граничные условия на границе той области, внутри которой движется наша система.

Все эти три обстоятельства обычно игнорируются при изложении классической механики.

Рассмотрим влияние этих обстоятельств на предсказания, вытекающие из законов классической механики. Однако сначала несколько слов о двух способах описания движения систем в классической механике.

Рассмотрим механическую систему, обладающую  $f$  степенями свободы. Ее состояние характеризуется набором значений координат системы  $q_1, q_2, \dots, q_f$  (кратко будем писать  $q$ ) и набором значений сопряженных им импульсов  $p_1, p_2, \dots, p_f$  (кратко  $p$ ). Множество точек  $q$  образует пространство *конфигураций*  $\mathfrak{R}(q)$ , а множество точек  $p$  — пространство *импульсов*  $\mathfrak{R}(p)$ . Совокупность обоих пространств  $\mathfrak{R}(q) \times \mathfrak{R}(p)$  называют *фазовым* пространством  $\mathfrak{R}(q, p)$ . Можно сказать, что состояние системы в классической механике характеризуется точкой в фазовом пространстве.

Первый способ описания заключается в том, что мы рассматриваем одну систему, которая в момент времени  $t=0$  находится в зоне фазового пространства  $q=q_0, p=p_0$ , и в дальнейшем вычисляем ее траекторию  $q=Q(t, q_0, p_0), p=P(t, q_0, p_0)$  в фазовом пространстве  $\mathfrak{R}(q, p)$ . Эта траектория вычисляется, как известно, из уравнений Гамильтона, которые описывают движение точки в фазовом пространстве [1, 2]:

$$\dot{q}_s = [H, q_s], \quad \dot{p}_s = [H, p_s], \quad s = 1, 2, \dots, f. \quad (2.1)$$

Здесь  $H = H(q, p, t)$  есть функция Гамильтона, которая равна сумме  $T + U$  кинетической энергии  $T = T(p, q)$  и силовой функции  $U(p, q, t)$ , характеризующей взаимодействие частей системы между собой и с внеш-

ним миром. В частном случае, когда  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ , силовая функция есть потенциальная энергия. Кинетическая энергия  $T(p, q)$  есть квадратичная функция импульсов  $p$ . Далее,  $[A, B]$  есть классическая скобка Пуассона. По определению:

$$[A, B] = \sum_{s=1}^f \left( \frac{\partial A}{\partial p_s} \frac{\partial B}{\partial q_s} - \frac{\partial B}{\partial p_s} \frac{\partial A}{\partial q_s} \right), \quad (2.2)$$

так что

$$[H, q_s] = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad [H, p_s] = -\frac{\partial H}{\partial q_s}. \quad (2.3)$$

Система уравнений (2.1) полностью описывает движение изолированной механической системы.

В случае, когда начальные данные системы неопределенны, более удобно другое описание движения.

Представим себе, что мы имеем дело с большим числом одинаковых систем, находящихся, однако, в различных состояниях.

Тогда изображающие их точки рассеются в пространстве фаз и при некоторых условиях, на которых мы не будем подробнее останавливаться, можно говорить о плотности этих точек  $\rho(q, p, t)$ , так что

$$\rho(q, p, t) \frac{dp dq}{2\pi\hbar}$$

будет числом систем, имеющих координаты и импульсы, лежащие около точки  $(p, q)$  в момент времени  $t$  ( $dpdq = dp_1, dp_2 \dots dp_f dq_1, dq_2 \dots dq_f$  есть элемент объема в фазовом пространстве, а множитель  $2\pi\hbar$  выбран в качестве единицы фазового объема). В силу сохранения числа систем плотность  $\rho(q, p, t)$  должна подчиняться уравнению непрерывности в пространстве фаз, т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{s=1}^f \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \rho}{\partial p_s} \dot{p}_s \right) = 0. \quad (2.4)$$

На основании (2.1) и (2.3) это уравнение можно записать в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [H, \rho] = 0. \quad (2.5)$$

С другой стороны, полная производная  $\rho$  по времени равна

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + [H, \rho].$$

Поэтому из (2.5) следует теорема Лиувилля:

$$\dot{\rho} = 0, \quad (2.6)$$

показывающая постоянство  $\rho$  вдоль траекторий.

В этом способе описания движения в момент времени  $t=0$  задаются не начальные данные, а функция  $\rho_0 = \rho(p, q, 0)$ , которая по самому своему смыслу описывает распределение начальных значений  $p$  и  $q$ , и далее ищется распределение  $p$  и  $q$  для  $t > 0$ . Это эквивалентно рассмотрению движения совокупности большего числа независимых механических систем, отличающихся друг от друга лишь начальными данными.

### А. Влияние начальных данных

Чтобы не затемнять сущность дела сложностью выкладок, ограничимся одной степенью свободы ( $f=1$ ). Рассмотрим сначала случай свободного движения, когда  $T = p^2/2m$  и  $U=0$  ( $m$  — масса частицы). В этом случае уравнение (2.5) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q} \frac{p}{m} = 0, \quad (2.7)$$

и его общее решение есть

$$\rho(q, p, t) = \rho_0\left(q - \frac{p}{m}t, p\right), \quad (2.8)$$

где  $\rho_0(q, p)$  есть начальное распределение  $q$  и  $p$ . Предположим для определенности, что начальное распределение имеет гауссову форму:

$$\rho_0(q, p) = \frac{1}{\pi ab} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{a^2} - \frac{(q-q_0)^2}{b^2}}. \quad (2.9)$$

В этом распределении среднее квадратичное отклонение  $\overline{\Delta p^2} = (p - \bar{p})^2 = \frac{1}{2} a^2$ , а  $\overline{\Delta q^2} = (q - \bar{q}_0)^2 = \frac{1}{2} b^2$ . На основании (2.8) при  $t > 0$  получаем:

$$\rho(q, p, t) = \frac{1}{\pi ab} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{a^2} - \frac{(q - \frac{p}{m}t - q_0)^2}{b^2}}. \quad (2.10)$$

Отсюда следует, что распределение по импульсам  $p$  при  $t > 0$  будет иметь вид:

$$\rho(p, t) = \int p(q, p, t) dq = \frac{1}{\sqrt{\pi} a} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{a^2}}, \quad (2.11)$$

а распределение по координатам  $q$  при  $t > 0$

$$\begin{aligned} \rho(q, t) &= \int \rho(q, p, t) dp = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{b^2 + \frac{a^2 t^2}{m^2}}} e^{-\frac{(q - \frac{p_0}{m} t - q_0)^2}{(b^2 + \frac{a^2 t^2}{m^2})}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Таким образом, распределение по импульсам остается неизменным, а распределение по координатам меняется. При этом среднее квадратичное отклонение  $\overline{\Delta q^2}$  возрастает со временем

$$\overline{\Delta q^2} = \frac{1}{2} \left( b^2 + \frac{a^2}{m^2} t^2 \right) \quad (2.13)$$

так, что при  $t \gg \frac{mb}{a}$  полностью теряет свое значение первоначальная информация о положении частицы; частицы, различавшиеся при  $t=0$  по их положению в пространстве, перепутываются. В дальнейшем информация о положении частиц в пространстве продолжает ухудшаться.

Этот вывод применим, согласно замечанию Борна [3], и к значительно более широкому классу систем, а именно к системам квазипериодическим.

В случае квазипериодических систем введем так называемые *циклические переменные*  $\varphi_s$  и соответствующие им действия  $I_s$  (\*). Функция Гамильтона в этих переменных есть постоянная, зависящая только от действия ( $I$ ), а уравнения Гамильтона гласят (для одной степени свободы):

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega, \quad \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.14)$$

так что

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad \omega = \text{const}. \quad (2.15)$$

\*) См., например, [1] или [2].

Координата  $q$  выражается через переменные  $\varphi$  и  $I$  в виде ряда Фурье:

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{in\varphi}, \quad (2.16)$$

где амплитуды  $A_n$  — функции  $I$ .

Уравнения (2.15) формально совпадают с уравнениями для свободного движения частицы:

$$q = \frac{p}{m} t + q_0, \quad \dot{q} = \frac{p}{m} = \frac{\partial H}{\partial p} = \text{const.}$$

Поэтому если первоначальное распределение величин  $\omega$  и  $\varphi$  есть гауссовское, то выводы, сделанные для свободного движения, полностью переносятся и на квазипериодические движения. Роль импульса (точнее, скорости  $\frac{p}{m}$ ) играет теперь угловая скорость  $\omega$ , роль координаты  $q$  — угол  $\varphi$ . Очевидно, что информация о положении системы будет полностью потеряна, если неопределенность в  $\varphi$  превзойдет  $2\pi$ . Если первоначальная неопределенность в  $\varphi$  определялась величиной  $b$ , а неопределенность в распределении  $\omega$  — величиной  $a$ , то сравнение с (2.13) показывает, что это произойдет при  $t > \frac{2\pi m}{a}$ .

Кстати сказать, в квантовой механике имеет место совершенно такая же ситуация, с той лишь существенной разницей, что очень узкое распределение по начальным координатам  $q$  неизбежно приведет к особенно быстрому расплыванию первоначального распределения.

Итак, мы видим, что в случае аperiodического движения всегда существует такое время  $t$ , что при  $t \gg \frac{bm}{a}$  неопределенность в координате частицы становится больше любой наперед заданной точности информации, определяемой величиной  $b$ , и тем самым разрушает ее.

В случае периодического движения информация о положении частиц полностью разрушается при  $t \gg \frac{2\pi}{a}$ .

## В. Случайные силы

Мы рассмотрели влияние некоторой неопределенности в начальных данных на предсказуемость состояния механической системы в будущем. Однако и в процессе самого движения частицы на нее будут действовать силы, которые не могут быть точно предсказаны. В реальных условиях эти силы неизбежны, они могут быть весьма малыми. Это могут быть, например, силы, вызванные толчками, сообщаемыми телу молекулами среды, или ее турбулентностью, или другими неоднородностями среды, носящими случайный характер.

В общем случае невозможно дать теорию таких явлений, хотя они и были предметом многих глубоких исследований математиков. Однако если основное движение подчиняется линейным уравнениям или если случайные силы малы по сравнению с основными, то учесть эффект этих сил не так уж трудно. В дальнейшем мы и рассмотрим подобный случай.

Выпишем уравнение движения в ньютоновской форме:

$$m\ddot{q}=F(q, t). \quad (2.17)$$

Предположим, что сила  $F(q, t)$  может быть разложена на регулярную часть  $F(q)$  и на случайную часть  $f(t)$ , зависящую лишь от времени.

Далее разложим соответствующим образом и координату  $q=Q+\Delta q$ , где  $\Delta q$  есть отклонение, вызванное случайной силой  $f$ . Пренебрегая теперь в уравнении (2.17) высшими степенями  $\Delta q$ , получим линейное уравнение для  $\Delta q$ :

$$\Delta\ddot{q} - \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial q} \Delta q = \frac{1}{m} f(t). \quad (2.18)$$

Это уравнение может быть решено с помощью функции Грина  $\mathfrak{G}(t-t')$ , которая подчиняется уравнению

$$\ddot{\mathfrak{G}}(t-t') - \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial q} \mathfrak{G}(t-t') = -\delta(t-t') \quad (2.19)$$

и граничному условию

$$\mathfrak{G}(t-t')=0 \quad \text{для} \quad t-t' < 0$$

Пользуясь функцией Грина, решение уравнения (2.18) напишем в виде

$$\Delta q = \frac{1}{m} \int_0^t \mathfrak{G}(t-t') f(t') dt'. \quad (2.20)$$

Обозначим среднее значение произведения случай-ной силы, взятой в два различных момента времени  $t$  и  $t'$ , через

$$a^2 \Delta(t-t') = \overline{f(t)f(t')}, \quad (2.21)$$

где  $a^2$  — размерной коэффициент; введенная величина имеет смысл корреляции  $f(t)$  для двух моментов времени  $t$  и  $t'$ . С помощью (2.20) и (2.21) вычислим среднее квадратичное отклонение  $\Delta q^2$ :

$$\overline{\Delta q^2(t)} = \frac{a^2}{m^2} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \mathfrak{G}(t-t') \mathfrak{G}(t-t'') \Delta(t'-t''). \quad (2.22)$$

Предположим, что функция корреляции  $\Delta(t)$  достаточно быстро убывает так, что она практически равна нулю для  $|t| > \tau$ . Если функция Грина изменяется плавно в течение времени  $\tau$ , то можно, интегрируя по  $t''$  и нормируя  $\Delta(t)$  так, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(t'-t'') dt'' = 1,$$

получить

$$\overline{\Delta q^2(t)} = \frac{a^2}{m^2} \int_0^t dt' \mathfrak{G}^2(t-t'). \quad (2.23)$$

Применим эту формулу к линейному уравнению

$$\ddot{q} + \lambda \dot{q} + \omega^2 q = \frac{1}{m} f(t); \quad (2.24)$$

здесь  $\lambda$  — коэффициент трения, а  $\omega$  — частота собственных колебаний,  $f(t)$  — случайная сила. Функция



Грина для этого уравнения равна [4]:

$$\mathfrak{G}(t) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}t}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}} \left( e^{t\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \omega^2}} - e^{-t\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \omega^2}} \right) \quad \text{для } t > 0 \quad (2.25)$$

и

$$\mathfrak{G}(t) = 0 \quad \text{для } t < 0. \quad (2.25^*)$$

Рассмотрим теперь два случая:

а) Свободное движение с трением ( $\omega=0$ ,  $\lambda \neq 0$ ).

При  $t \rightarrow \infty$ , пользуясь (2.23) и (2.25), получаем:

$$\overline{\Delta q^2(t)} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{a^2}{m^2} \int_0^t [1 - e^{-\lambda(t-t')}]^2 dt' = \frac{a^2}{\lambda^2 m^2} t + \dots \quad (2.26)$$

б) Гармонический осциллятор, также с трением, при  $t \rightarrow \infty$ . Находим из (2.23) и (2.25):

$$\overline{\Delta q^2(t)} = \frac{a^2}{2\lambda m^2 \omega^2} + \dots \quad (2.27)$$

В случае отсутствия трения для этих же систем получим:

$$\overline{\Delta q^2(t)} = \frac{a^2}{3m^2} t^3 + \dots, \quad (2.26^*)$$

$$\overline{\Delta q^2(t)} = \frac{a^2}{2m^2 \omega^2} t + \dots \quad (2.27^*)$$

Итак, мы видим из приведенных примеров, что случайные силы могут серьезно повлиять на предсказуемость движения в классической механике.

### С. Граничные условия

В механике обычно не принято упоминать о граничных условиях. Иногда говорят об условии изолированности системы. Под этим разумеется, что на систему не действует и не будет действовать в течение интересующего нас промежутка времени никаких сил кроме указанных в уравнении ее движения.

Фактически предполагается, что область пространства, где происходит движение нашей системы, можно окружить поверхностью, через которую не про-

никают внешние поля и тела. На рис. 1 изображена такая поверхность для случая одномерного движения по оси  $ox$ . Система изолирована, если можно гарантировать, что через поверхности  $S'$  и  $S''$  не будут вторгаться внешние поля или тела. Так, например, планетная система может считаться замкнутой только постольку, поскольку гарантируется, что в течение интересующего нас времени в ее пределах или вблизи нее не появится какое-либо непредусмотренное небесное тело.

Это обстоятельство крайне важно, так как показывает, что детерминистическое предсказание будущего является на самом деле условным: *будущее механической системы может быть предсказано только в том случае, если наперед гарантируется изолированность системы.* Эта гарантия не вытекает, однако, из уравнений движения, а является дополнительным условием, которое наносит серьезный ущерб репутации детерминизма. Грандиозное и мрачное «если» вырастает на пути того пророка, который по начальным данным намерен предсказать будущее реальной механической системы.

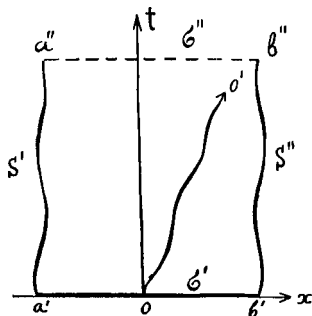


Рис. 1. Начальные данные даются на поверхности  $\sigma'$  (отрезок  $a'b'$ ); граничные — на поверхностях  $S'$  и  $S''$  (отрезки  $a'a''$  и  $b'b''$ ). Линия  $oo'$  есть траектория частицы.

#### Д. Несколько замечаний о поле

Рассмотрим теперь те же проблемы применительно к полю, подчиняющемуся линейному уравнению. Для простоты ограничимся случаем скалярного поля  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ . Такое поле подчиняется уравнению:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi - \kappa^2 \varphi = 0. \quad (2.28)$$

Общее решение этого уравнения может быть выражено через начальные данные  $\varphi(\mathbf{x}, 0)$  и  $\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, 0)}{\partial t}$  и

через граничные значения  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\frac{d\varphi(\mathbf{x}, t)}{dn}$  (здесь  $n$  — нормаль к граничной поверхности), которые задаются для всего будущего времени  $t > 0$ , по известной формуле Кирхгофа [5]

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, t) &= \int \left[ g(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}', t')}{\partial n'} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial g(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t')}{\partial n'} \varphi(\mathbf{x}', t') \right] d\sigma' = \\ &= \int \mathfrak{G}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \varphi(\mathbf{x}', t') d\sigma'. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Здесь  $g(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t')$  — функция Грина уравнения (2.28), удовлетворяющая неоднородному уравнению

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \nabla^2 g - \kappa^2 g = -\delta(t - t') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \quad (2.30)$$

$\mathfrak{G}$  означает оператор  $\mathfrak{G} = g \frac{\partial}{\partial n'} - \frac{\partial g}{\partial n'}$ . Поверхность  $\sigma'$ , по которой идет интегрирование ( $n'$  есть нормаль к этой поверхности), частично состоит из временных кусков  $S'$  и  $S''$  (см. рис. 1) и частично из пространственного  $\sigma'$ , на котором задаются начальные данные. Формула (2.29) предсказывает значения внутри объема, ограниченного поверхностями  $\sigma'$ ,  $\sigma''$ ,  $S'$  и  $S''$ .

Из формулы (2.29) непосредственно видно, что поле выражается не только через его начальные данные (на поверхности  $\sigma'$ ), но и через граничные значения (на поверхностях  $S'$  и  $S''$ ), которые мы обязаны задать для всего будущего времени. То «если», о котором мы говорили применительно к механике, в теории поля получает прямое математическое выражение в виде интегралов по временным поверхностям  $S'$  и  $S''$ . Физический смысл этих интегралов очевиден: они описывают влияние полей, приходящих из тех областей пространства, которые не вошли в начальные данные. Если бы мы отказались от учета начальных граничных данных, то мы расплатились бы за это тем, что область пространства, в которой мы предсказывали состояние поля, сокращалась бы со временем, как это показано на рис. 2. Непредвиденные сигналы врываются в рассматриваемую нами область пространства со скоростью света, и с такой же скоростью

сокращается эта область; по прошествии времени  $t=R/c$  вся область уже будет заполнена волнами, которые не предусматривались нашими расчетами; сила нашего предсказания была бы к этому времени полностью утрачена.

Линейный характер поля позволяет сразу написать выражение для квадратичных корреляций поля

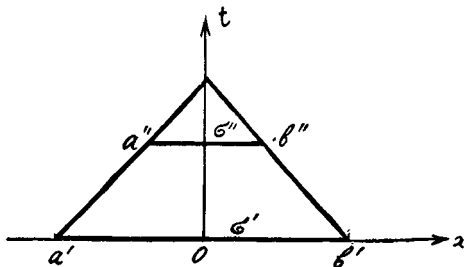


Рис. 2. Если даны только начальные данные на  $\sigma'$  ( $a'b'$ ) и неизвестны граничные данные, то область  $\sigma$ , в которой известно поле  $\varphi$ , сокращается со скоростью света  $c$  и при  $t = a'b'/c$ ,  $\sigma'' = 0!$

в двух точках  $\varphi(\mathbf{x}', t')$  и  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , если начальные данные и граничные значения флюктуируют. Как следует из (2.29):

$$\overline{\varphi(\mathbf{x}', t')\varphi(\mathbf{x}, t)} = \int \mathfrak{G}(\mathcal{P}, \mathcal{P}'')\mathfrak{G}(\mathcal{P}', \mathcal{P}''')D(\mathcal{P}'' - \mathcal{P}''')d\sigma''d\sigma''', \quad (2.31)$$

где

$$D(\mathcal{P}'' - \mathcal{P}''') = \overline{\delta\varphi(\mathcal{P}'')\delta\varphi(\mathcal{P}''')} \quad (2.32)$$

есть корреляция флюктуаций  $\delta\varphi(\mathcal{P}'')$  и  $\delta\varphi(\mathcal{P}''')$  поля в точках  $\mathcal{P}''(\mathbf{x}'', t'')$  и  $\mathcal{P}'''(\mathbf{x}''', t''')$ , лежащих на границе области интегрирования (на поверхностях  $S', S'', \sigma'$ ). Не будем вычислять это выражение для конкретных случаев, ибо оно аналогично выражению (2.22) в случае механики.

Рассмотрим специальный случай, когда флюктуации имеют место только в начальных данных. Тогда можно предложить более прямой путь для вычисления квадратичных флюктуаций поля. Именно, разложим

поле  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  в ряд по собственным колебаниям  $\psi_k(\mathbf{x})$ :

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \sum_k q_k(t) \psi_k(\mathbf{x}). \quad (2.33)$$

Амплитуды парциальных колебаний  $q_k(t)$  будут удовлетворять гармоническим уравнениям

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = 0, \quad (2.34)$$

где  $\omega_k$  — частота  $k$ -го колебания,  $q_k = a_k e^{i\omega_k t}$ . Напишем теперь среднее значение для произведения полей в точках  $\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathcal{P}(\mathbf{x}', t')$ :

$$\begin{aligned} D(\mathcal{P} - \mathcal{P}') &= \overline{\varphi(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}', t')} = \\ &= \sum_k \sum_{k'} \psi_k^*(\mathbf{x}') \psi_k(\mathbf{x}) \overline{a_k^* a_k} e^{-i\omega_k t' - i\omega_k t}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Если отдельные колебания статистически независимы, то

$$\overline{a_k^* a_k} = \alpha(k) \delta(k - k') \quad (2.36)$$

и выражение (2.35) принимает форму

$$D(\mathcal{P} - \mathcal{P}') = \sum_k \psi_k^*(\mathbf{x}') \psi_k(\mathbf{x}) \alpha(k) e^{i\omega_k(t-t')}. \quad (2.37)$$

Наконец, при постоянстве  $\alpha(k)$  (среднее значение  $a_k^* a_k$  для всех  $k$  одинаково) вместо (2.37) получаем:

$$D(\mathcal{P} - \mathcal{P}') = \alpha \sum_k \psi_k^*(\mathbf{x}') \psi_k(\mathbf{x}) e^{i\omega_k(t-t')}. \quad (2.37^*)$$

Это выражение совпадает с функцией Грина для уравнения (2.28), и при  $t=t'$  находим:

$$D(\mathcal{P} - \mathcal{P}') = \alpha \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}). \quad (2.38)$$

Вычисленное по формуле (2.37) среднее квадратичное отклонение не нарастает со временем. Это есть особенность линейных систем.

Рассмотрение нелинейных систем представляет значительные трудности. Однако можно получить некоторое представление о поведении нелинейного поля, если иметь в виду, что нелинейное поле можно рассматривать как совокупность связанных между собой осцилляторов, число которых бесконечно велико. Система из большого, но конечного числа связанных осцилляторов является квазипериодической системой,

и поэтому, если начальные данные такой системы не вполне определены, то средние квадратичные отклонения будут возрастать со временем. Если это заключение можно перенести на бесконечное число осцилляторов, то следует ожидать, что для нелинейного поля квадратичные флуктуации будут нарастать со временем.

## Е. Резюме

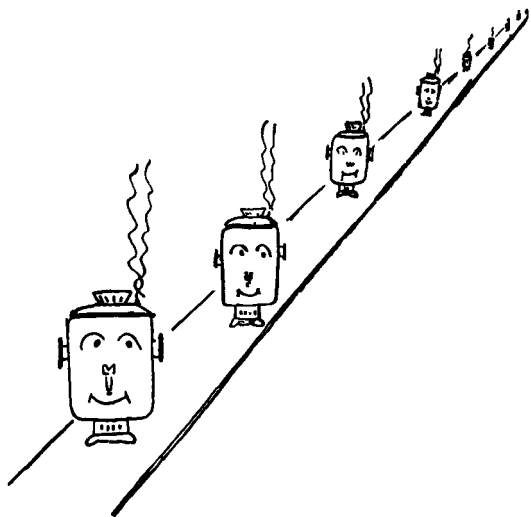
Мы видели, что основное предположение классической механики — возможность однозначного определения будущего состояния системы по ее начальным данным — основано на абстракции, исключающей случайность. Влияние этой случайности в общем случае не может быть игнорировано, так как с течением времени неопределенность в начальных данных возрастает и предсказание по прошествии некоторого конечного времени становится совершенно бессодержательным.

Практически хорошо известно, что даже в такой точной науке, как небесная механика, необходимо время от времени подправлять исходные данные, чтобы устранить накопившуюся ошибку.

Машины и станки также не могут работать долгое время без того, чтобы рука механика не вмешивалась для устранения накапливающейся ошибки в работе станка.

Поклонники безукоснительного детерминизма делают ошибку, избирая образцом классическую механику: движение, предсказываемое классической механикой, оказывается неустойчивым относительно малых случайных отклонений начальных данных или же в результате действия случайных сил. Как бы ни были малы эти воздействия, всегда можно найти такое время, при котором их эффект оказывается превалирующим. Эта нестабильность движения относительно малых случайностей полностью разрушает иллюзию о возможности однозначного предсказания будущего по начальным данным без того, чтобы в дальнейшем не вносить коррективов «по ходу дела».

---



### § 3. АНСАМБЛЬ ГИББСА

Как показывает опыт в системах, в которых действуют случайные факторы, при многократном повторении наблюдений можно обнаружить определенные закономерности, обычно называемые *статистическими*. Такого рода факторы в действительности являются совершенно неизбежными, однако их значение существенно зависит от характера системы. В тех случаях, когда система имеет большое число взаимодействующих между собой степеней свободы, эффект случайных воздействий может стать определяющим. При этих условиях сама динамическая закономерность (в механике детерминистическую закономерность часто называют динамической) становится слугой случая; однако сам случай порождает новый тип закономерности — закономерность статистическую.

Образец подобной ситуации представляет кинетическая теория вещества, созданная Максвеллом и Больцманом. Существование распределения Максвелла и температуры, связывающей молекулярные процессы с макроскопическими, является замечательным подарком от Его Величества Случая. В своей знаменитой *H*-теореме Больцман пытался показать, что

Случай, собственно говоря, и не имел другой возможности, как только создать распределение Максвелла.

Не существует способов «вывести» статистические закономерности из закономерностей детерминированных. В лучшем случае их удастся совместить. В тех системах, где случай начинает играть существенную роль, для «вывода» закономерностей всегда приходится делать особые предположения вероятностного характера. Например, ввести гипотезу «элементарного беспорядка» или какое-либо другое предположение о «равновероятности» тех или иных состояний динамической системы.

Мы не будем здесь вдаваться далеко в эти проблемы, над которыми не мало мудрых людей ломало голову. Примем «де факто», что *случай* способен создавать закономерность не хуже детерминизма.

Основатель молекулярной статистики Гиббс, видимо, первый понял, что не обязательно доискиваться пути, каким случай приводит ту или иную механическую систему к какому-либо определенному, в статистическом смысле слова, состоянию. Можно сделать некоторые общие предположения и позднее сравнить их с опытом.

Гиббс ввел понятие ансамбля систем, которое оказалось крайне важным для всей статистической физики [1].

Рассмотрим большую совокупность одинаковых и полностью изолированных друг от друга систем, каждая из которых, однако, слабо взаимодействует с большой, макроскопической системой, находящейся при определенной температуре (термостатом). Такую совокупность систем будем называть ансамблем. На рис. 3 схематически изображен такой ансамбль в виде уходящих в бесконечную даль, повторяющих друг друга термостатов  $M$  и взаимодействующих с ними систем  $\mu$ .

Заметим, что практически не обязательно иметь много термостатов  $M$  — достаточно иметь один, при условии, что системы, взаимодействующие с ним, не должны влиять друг на друга и на макроскопическое состояние термостата.

Произведем теперь измерение каких-либо динамических переменных, например импульсов  $p$  и координат



нат  $q$ , на большом числе экземпляров систем, составляющих наш ансамбль. Гиббс утверждает, что существует вполне определенная вероятность для того

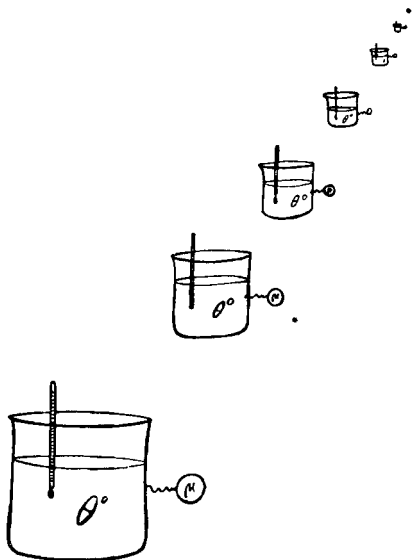


Рис. 3. Ансамбль Гиббса. Бесконечная последовательность тождественных микросистем  $\mu$ , слабо взаимодействующих с термостатами, находящимися при одной и той же температуре  $\Theta^\circ$ .

или иного результата опыта, именно имеет место так называемое каноническое распределение:

$$W_\Theta(p, q) dp dq = e^{\frac{\Psi(\Theta) - E(p, q)}{\Theta}} dp dq; \quad (3.1)$$

здесь  $W_\Theta(p, q) dp dq$  есть вероятность найти импульс системы  $p$  лежащим в интервале  $p, p+dp$  и координату  $q$  — в интервале  $q, q+dq$  (простоты ради мы явно выписываем все формулы для одной степени свободы);  $\Theta$  есть температура термостата,  $E(p, q)$  — энергия системы,  $e^{\Psi(\Theta)/\Theta}$  означает нормировочный множитель.

Существование этого распределения является постулатом. По этому поводу Д. Гиббс писал: «распре-

деление, представляемое выражением (3.1)..., по-видимому, является наиболее простым мыслимым случаем, так как оно обладает тем свойством, что, когда система состоит из частей с отдельными энергиями, закон распределения по фазам для отдельных частей обладает одинаковой природой — свойство, которое чрезвычайно упрощает исследование и которое является основанием для весьма важных отношений к термодинамике» [1].

Эту мысль Гиббса можно пояснить следующим рассуждением [2]. Согласно теореме Лиувилля плотность точек в фазовом пространстве  $\rho(p, q)$  постоянна вдоль траекторий. Это означает, что она должна быть функцией только интегралов движения. Представим себе, что нашу систему можно разбить на две слабо взаимодействующие части  $A$  и  $B$ . Тогда плотность  $\rho$  будет произведением плотностей подсистем  $A$  и  $B$ :

$$\rho_{A+B} = \rho_A \rho_B. \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что  $\rho$  может быть функцией только аддитивных интегралов движения. Если исключить из рассмотрения макроскопические движения всей системы (например, вращение, поступательное движение), то таким аддитивным интегралом движения является только энергия системы  $E_{A+B} = E_A + E_B$ .

Решение функционального соотношения (3.2) теперь гласит:

$$\rho = e^{\alpha + \beta E}. \quad (3.3)$$

Имея в виду, что число систем, имеющих бесконечно большую энергию, должно быть мало, мы заключаем, что  $\beta < 0$ . Обозначим  $\beta = -1/\Theta$  и заметим, что  $\alpha$  определяется из условия нормировки:

$$\int \rho(p, q) \frac{dp dq}{2\pi h} = 1. \quad (3.4)$$

Отсюда  $\alpha = \psi(\Theta)/\Theta$ . Предположим теперь, что одна из систем очень велика так, что ее можно рассматривать как термостат Гиббса. Тогда сравнение с (3.1) показывает, что  $\Theta$  есть температура, характеризующая ансамбль, находящийся в равновесии.

Иногда стремятся обосновать распределение Гиббса, рассматривая так называемые микроканонические ансамбли и вводя при этом новые постулаты.

Мы не будем удаляться в дебри аксиоматики и ограничимся первоначальной постановкой вопроса, исходящей от Гиббса, поскольку для наших целей она вполне достаточна. Мы хотим теперь обратить внимание на исключительно интересную особенность вероятности  $W_{\Theta}(p, q)$ , заключающуюся в том, что она связывает параметры *макроскопической* обстановки  $M$  (температуру термостата  $\Theta$ ) с параметрами *микросистемы*  $\mu$  (с ее импульсами  $p$  и координатами  $q$ ). Таким образом, мы можем сказать, что *вероятность  $W_{\Theta}(p, q)$  относится к микросистеме, находящейся в определенной макроскопической обстановке.* Ансамбль Гиббса представляет собой воспроизведение большого числа таких ситуаций и во многих случаях может быть осуществлен практически с большой степенью точности.

В связи с дальнейшим мы хотели бы отметить, что вопрос о том, относится ли вероятность  $W_{\Theta}(p, q)$  к одной частице или она является характеристикой многих частиц (вопрос, который задают из соображений главным образом сектантских: «какo верующи?»), не имеет большого значения. Суть дела заключается в том, что какой бы результат наблюдения ни осуществился, в одном-единственном измерении он меняет лишь наше субъективное отношение к обнаруженному факту: если произошло типичное явление, то разумно будет сказать, что «так и ожидалось», а если произошло редкое событие, то мы можем лишь выразить свое удивление или радость, как при хорошем выигрыше в лотерею. Все это относится к субъективным оценкам. Объективное значение имеет лишь распределение результатов измерения, возникающее при проведении большого числа измерений в ансамбле, и это распределение и предсказывается вероятностью  $W_{\Theta}(p, q)$ .

Существование этой вероятности есть один из замечательных и фундаментальных законов молекулярной статистической физики.

Здесь будет еще раз уместно поблагодарить игру случая, который, как бы в противоречие со своей собственной природой, порождает столь простые законы, как закон канонического распределения Гиббса.

---



#### § 4. КВАНТОВЫЙ АНСАМБЛЬ

Рассмотрим тот случай ансамбля Гиббса, когда температура термостата равна нулю. Согласно каноническому распределению энергия системы должна быть в этом состоянии наименьшей из возможных. Это означает, что кинетическая энергия  $T(p)$  должна равняться нулю, а потенциальная  $U(q)$  должна быть наименьшей. Отсюда следует, что импульсы системы должны равняться нулю, координаты  $q$  обязаны иметь одно-единственное значение, соответствующее минимуму потенциальной энергии. Иными словами, все динамические переменные при  $\Theta=0$  будут иметь одно-единственное значение и никакого статистического разброса не будет. В частности, не должно быть и рассеяния света, вызванного молекулярным тепловым движением. Однако опыт показывает, что на самом деле такое рассеяние существует и при низкой температуре, в пределе — при абсолютном нуле. Это указывает на то, что и при этой температуре, когда всякое движение должно бы прекратиться, на самом деле оно сохраняется в какой-то форме и приводит к рассеянию света. Одни из первых исследователей этого вопроса Джемс, Бриндли и Вуд писали в отчете о

своих опытах по рассеянию рентгеновских лучей в кристалле алюминия: «чтобы получить согласие с опытом, необходимо принять существование нулевой энергии...» (т. е. энергии движения при абсолютном нуле) [1].

Это «незамерзающее» движение есть новая форма движения — движение квантовое. Ансамбль Гиббса по мере приближения температуры к абсолютному нулю сам собою переходит в квантовый ансамбль. Возникают ли при этом какие-либо новые закономерности и какова их форма? Оказывается, что существует целая симфония новых статистических закономерностей, управляющих движением микрочастиц и в том случае, когда макроскопические тела, диктующие условия движения микрочастицам, на одяты при температуре абсолютного нуля. Эта симфония и есть квантовая механика. Квантовая механика изучает законы движения микрочастиц в квантовом ансамбле.

Важнейшая закономерность, характерная для квантового ансамбля, заключается в том, что среднее квадратичное отклонение для координаты  $x$ :  $\overline{\Delta x^2} = \overline{(x - \bar{x})^2}$  (здесь черта означает среднее по ансамблю; в частности,  $\bar{x}$  есть среднее значение какой-либо координаты  $x$  частицы или микросистемы) и среднее квадратичное отклонение сопряженного этой координате импульса  $p$ :  $\overline{\Delta p^2} = \overline{(p - \bar{p})^2}$  (здесь  $\bar{p}$  — среднее значение импульса) связаны знаменитым соотношением Гейзенберга:

$$\overline{\Delta p^2} \overline{\Delta x^2} \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (4.1)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка [2, 3].

До сих пор наши рассуждения были наводящими. Обратимся теперь к более строгому определению понятия квантового ансамбля. Рассмотрим некоторую совокупность макроскопических тел, которую в дальнейшем будем называть *макрообстановкой*  $M$ . Эта макрообстановка тем или иным образом определяет состояние движения микросистемы  $\mu$  (иногда попросту говорят «состояние», опуская слово движение). Представим теперь себе, что такая макрообстановка  $M$  вместе с микросистемой  $\mu$  повторяется беско-

нечное число раз, совершенно так же, как повторяется термостат и микросистемы в ансамбле Гиббса.

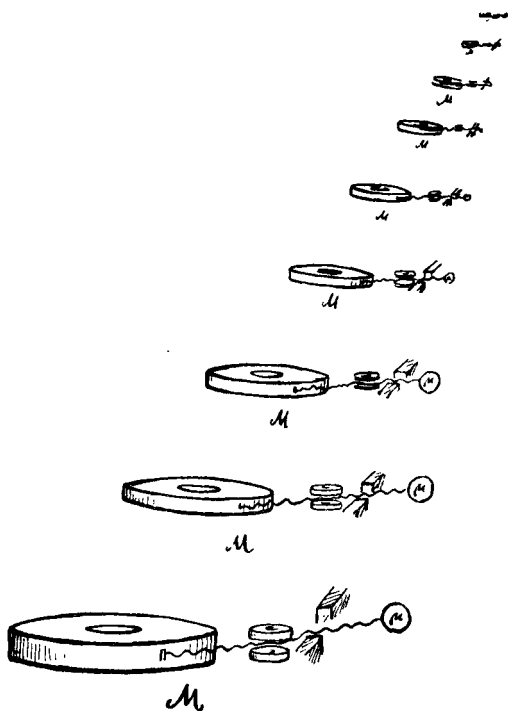


Рис. 4. Квантовый ансамбль. Бесконечная последовательность тождественных микросистем  $\mu$ , находящихся в одной и той же макроскопической обстановке  $M$  (например, ускоритель в заданном режиме, магнит-анализатор, щель, коллимирующая пучок, и т. п.).

Если в этой совокупности систем

$$\overline{\Delta p^2} \overline{\Delta x^2} \cong \frac{\hbar^2}{4} , \quad (4.2)$$

то такой ансамбль мы будем называть *квантовым ансамблем* [2—4].

На рис. 4 квантовый ансамбль иллюстрирован уходящей вдаль последовательностью повторяющих друг друга совокупностей макроскопических тел  $M$  и микросистем  $\mu$ .

Заметим, что макрообстановка образуется не только макроскопическими телами, но и макроскопическими полями и включает также условия генерации частиц (источники частиц).

Более точное определение квантового ансамбля не содержит предположения об абсолютном нуле температуры, которым ранее мы хотели подчеркнуть, что статистика квантовых явлений не связана с тепловым движением атомов или молекул. В действительности квантовые явления обнаруживаются также и в том случае, когда температура тел больше нуля. В этом случае речь пойдет о *квантовой статистике*, которая исправляет распределение Гиббса при низких температурах. Точнее, можно сказать, что если при соблюдении условия (4.2) кинетическая энергия частиц

$T(p) = \frac{p^2}{2m} \gg \Theta$  ( $m$  — масса частицы), то мы будем иметь дело с *квантовой механикой*, а если  $T(p) \cong \Theta$ , — с *квантовой статистикой*. Однако можно ли описать квантовый ансамбль с помощью вероятности вроде той, которая составляет основной закон ансамбля Гиббса? Априори, казалось бы, что нет причин, которые препятствовали этой возможности.

На самом деле это не так. Соотношение Гейзенберга (4.1) говорит нам о том, что такая возможность исключена. Действительно, согласно этому соотношению не существует такого квантового ансамбля, в котором дисперсии по координатам  $\overline{\Delta q^2}$  и импульсам  $\overline{\Delta p^2}$  одновременно равнялись бы нулю. Между тем если бы существовала вероятность вида  $W(p, q)$ , предсказывающая возможность найти микросистему в состоянии с координатой, равной  $q$ , и импульсом, равным  $p$ , то можно было бы указать и способ, с помощью которого можно отобрать эти системы и образовать из них новый ансамбль, в котором  $\overline{\Delta p^2} = 0$  и  $\overline{\Delta q^2} = 0$ . Но такой ансамбль противоречил бы соотношению Гейзенберга!

Поэтому мы должны заключить, что такая вероятность не существует. Что же заменяет вероятность  $W(p, q)$  в квантовых ансамблях? Как охарактеризовать квантовый ансамбль? Как вычислить вероятности различных результатов наблюдений?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, мы должны несколько общо сформулировать соотношение Гейзенберга. Это можно сделать с помощью так называемого *принципа дополнительности Бора*.

Мы формулируем этот принцип в следующей форме: *динамические переменные микросистемы могут быть разделены на две взаимно дополнительные группы: пространственно-временные и импульсно-энергетические. Не существует ансамблей, в которых обе группы динамических переменных имели бы определенные значения.* Этот принцип является прямым обобщением соотношения Гейзенберга.

Бор формулировал этот принцип в несколько иной форме, в которой отразились его философские позиции, далекие от материализма. Его формулировка послужила истоком для далеко идущих выводов о том, что современная механика атома несовместима с материализмом. Мы не будем сейчас касаться сколько-нибудь подробнее этой стороны дела. Ему посвящена обширная литература, представляющая различные точки зрения [5—7].

Кажется, что вообще было бы разумнее говорить не о принципе дополнительности, а о принципе *«исключительности»*: динамические переменные следовало бы разбить на группы взаимно исключających друг друга переменных, не осуществляющихся одновременно в реальных ансамблях. Но из уважения к великому Бору и к установленной им традиции мы сохраним обычную терминологию.

Принцип дополнительности исключает возможность описывать микросистемы с помощью фазового пространства  $\mathfrak{R}(p, q)$ , так как оно содержит дополнительные переменные  $p$  и  $q$ . Однако этот принцип, как следует из его содержания, не запрещает пользоваться пространством конфигураций  $\mathfrak{R}(q)$  или импульсным пространством  $\mathfrak{R}(p)$ , каждое из которых содержит переменные только пространственные  $q$  или только импульсные  $p$ . Если система имеет  $f$  степеней свободы, то, в отличие от классической механики, она описывается  $f$  переменными или в пространстве конфигураций  $\mathfrak{R}(q)$ , или в пространстве импульсов  $\mathfrak{R}(p)$ . Переменные  $q$  или  $p$  образуют так называемый *полный набор* переменных.



Точнее, мы определим полный набор динамических переменных, достаточный для исчерпывающего описания квантовой системы с  $f$  степенями свободы, как совокупность  $f$  одновременно измеримых и независимых переменных  $q_1, q_2, \dots, q_f$  — пространственный набор  $q$  или альтернативный, импульсный набор  $p$ :  $p_1, p_2, \dots, p_f$ . Такой набор динамических переменных, как следует из его смысла, содержит максимальную информацию о системе, совместимую с законами, господствующими в микромире.

Соответственно этому в квантовом ансамбле существует вероятность

$$W_M(q) dq \quad (4.3)$$

найти при измерении определенное значение этого набора величин  $q$ . Индекс  $M$ , которым мы снабдили эту вероятность, имеет тот же смысл, что и индекс  $\Theta$  температуры у вероятности (3.1) в классическом ансамбле Гиббса; он указывает ту макроскопическую обстановку  $M$ , которая диктует условия движения для микросистемы  $\mu$  и тем самым определяет ее состояние.

Мы вправе также поставить вопрос о вероятности того, что микросистема, принадлежащая тому же ансамблю, будет иметь то или иное значение дополнительного набора  $p$ . Эта вероятность может быть написана в виде

$$W_M(p) dp. \quad (4.4)$$

Вероятностей типа (4.3) или (4.4) должно существовать не мало, в принципе неограниченно много, столько, сколько возможно различных полных наборов  $q$  или сопряженных им наборов  $p$ .

Заметим, что практически для каждой реальной системы число наборов ограничено тем, что большинство из них попросту не очень удобны для описания системы. Однако это уже чисто практический вопрос. Итак, вероятностей типа (4.3) и (4.4) может быть неограниченно много. Их совокупность полностью характеризует состояние микросистемы в квантовом ансамбле, так как эта совокупность по самому своему смыслу исчерпывает все предсказания результатов

всех возможных измерений над микросистемой, принадлежащей данному ансамблю ( $M + \mu$ ).

Но как перечислить всю эту совокупность вероятностей, включая и неудобные для практических целей? Если бы мы нашли такую возможность, мы нашли бы способ описать состояние микросистемы в квантовом ансамбле!

Квантовая механика дает на этот вопрос совершенно неожиданный (с точки зрения классической теории) ответ: существует величина, характерная для данного ансамбля ( $M + \mu$ ), которая полностью характеризует квантовый ансамбль в том смысле, что, зная ее, можно вычислить все возможные вероятности типа  $W_M(q)$  или  $W_M(p)$ . Эта величина есть *волновая функция*

$$\psi_M = \psi_M(q). \quad (4.5)$$

В формуле (4.5) волновая функция  $\psi_M$  записана явно в виде функции координат  $q$ . В этом случае связь между волновой функцией и плотностью вероятности дается формулой

$$W_M(q) = |\psi_M(q)|^2. \quad (4.6)$$

Эта формула является совершенно общей в том смысле, что если волновая функция  $\psi_M$  дана как функция любого другого полного набора переменных, например  $\psi_M(p)$ , то плотность вероятности найти набор переменных  $p$  равным  $p$ , будет

$$W_M(p) = |\psi_M(p)|^2. \quad (4.6^*)$$

Вообще для полного набора переменных  $a$  будем иметь:

$$W_M(a) = |\psi_M(a)|^2, \quad (4.7)$$

для набора  $b$

$$W_M(b) = |\psi_M(b)|^2 \quad (4.7^*)$$

и т. д. Все эти функции  $\psi_M(q)$ ,  $\psi_M(p)$ ,  $\psi_M(a)$ ,  $\psi_M(b)$ , ... описывают один и тот же квантовый ансамбль, характеризуемый макрообстановкой  $M$  и микросистемой  $\mu$ .

Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, относительно этих волновых функций говорят, что волновая функция дана в  $q$ -представлении, или в  $p$ -представлении, или в  $a$ -представлении и т. д.

Математически эквивалентность волновых функций, данных в различных представлениях для описания квантового ансамбля, выражается в том, что волновую функцию  $\psi_M$  можно рассматривать как вектор в гильбертовом пространстве, а различные представления — как представление вектора в различных системах ортов, т. е. ортогональных единичных векторов в этом пространстве, линейная комбинация которых позволяет представить любой другой вектор [2].

В таком понимании переход от одного представления волновой функции к другому есть вращение в гильбертовом пространстве. Это вращение осуществляется посредством унитарной матрицы  $S$ , так что

$$\psi_M(b) = S\psi_M(a), \quad (4.8)$$

причем

$$SS^+ = 1, \quad (4.9)$$

где  $S$  — матрица, сопряженная с  $S$ . В раскрытом виде соотношения (4.8) или (4.9) гласят:

$$\psi_M(b) = \int S(b|a)\psi_M(a) da, \quad (4.8^*)$$

$$\int S(b|c)S^+(c|a)dc = \delta(b-a), \quad (4.9^*)$$

где интегралы в (4.8\*) и (4.9\*) понимаются в обобщенном смысле так, что пригодны для случаев, когда спектр возможных значений величин  $a$  и  $b$  может иметь разрывы или даже состоять из отдельных точек (дискретный спектр); в этом случае интеграл приводится к сумме. Сами матрицы  $S$  определяются из линейных уравнений \*).

Преобразование (4.8) позволяет рассматривать волновую функцию как объективную характеристику квантового ансамбля, которая, однако, может быть дана в различных представлениях. Именно это важное обстоятельство и лежит в основе концепции *квантовых ансамблей*: в этой концепции волновая функция  $\psi_M$  рассматривается как величина, заменяющая в квантовой теории классическую вероятность  $W_{\theta}(p, q)$  того или иного состояния системы в фазо-

---

\* ) См. курсы квантовой механики, например [4].

вом пространстве  $\mathfrak{R}(p, q)$ . Подобно тому как знание вероятности  $W_{\theta}(p, q)$  позволяет определить вероятность любого другого набора динамических переменных в фазовом пространстве  $(P, Q)$ , так знание волновой функции  $\psi_M$  в случае квантового ансамбля позволяет определить вероятности для любого полного набора динамических переменных  $a$ . Следовательно, *волновая функция не есть величина, определяющая статистику какого-либо специального измерения; она является величиной, определяющей статистику квантового ансамбля, т. е. статистику любого измерения, совместимого с природой микросистемы  $\mu$  и той макроскопической обстановки  $M$ , которая диктует условия движения для микросистемы  $\mu$ .*

---



## § 5. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ

В некоторых случаях макроскопическая обстановка не является достаточно определенной и сама по себе должна быть описана статистическим образом. Естественно, что при этом в квантовый ансамбль вносится дополнительная неопределенность. Возникающий при этом квантовый ансамбль называют *смешанным*, в отличие от *чистого* ансамбля, имеющего место в случае вполне определенной макроскопической обстановки (см. [2, 4] к § 4).

Простейшим примером подобной ситуации может быть случай, когда имеется несколько некогерентных источников частиц, при этом частицы могут отличаться друг от друга значением импульса или поляризации, или иными параметрами. Пусть первый источник порождает частицы с вероятностью  $P_{M_1}$ , а второй — с вероятностью  $P_{M_2}$  (значок  $M_1$  указывает макрообстановку, в которой имелся бы только первый источник, а значок  $M_2$  — обстановку, в которой имелся бы только второй источник). Первый источник порождал бы чистый квантовый ансамбль, описываемый волновой функцией  $\psi_{M_1}(q)$ , второй — волновой функцией

$\psi_{M_2}(q)$ . Таким образом, мы имеем квантовый ансамбль, который мы должны описывать набором вероятностей  $P_{M_1}$  и  $P_{M_2}$  и набором волновых функций  $\psi_{M_1}(q)$  и  $\psi_{M_2}(q)$ . Вероятности  $P_{M_1}$  и  $P_{M_2}$  указывают ( $P_{M_1} + P_{M_2} = 1$ ), в какой пропорции «смешаны» чистые ансамбли, описываемые волновыми функциями  $\psi_{M_1}$  и  $\psi_{M_2}$  в нашем смешанном ансамбле ( $M = M_1 + M_2$ ). Ясно, что в общем случае мы будем иметь дело с любым (в том числе и неограниченно большим) набором вероятностей

$$P_{M_1}, P_{M_2}, \dots, P_{M_s}, \dots, \sum_s P_{M_s} = 1 \quad (5.1)$$

и соответствующих волновых функций

$$\psi_{M_1}, \psi_{M_2}, \dots, \psi_{M_s}, \dots \quad (5.2)$$

Такое описание с помощью двух рядов величин  $P_{M_s}$  и волновых функций  $\psi_{M_s}$ , конечно, очень не удобно и на первый взгляд уводит нас очень далеко от аналогии с классическим ансамблем Гиббса. Однако эта аналогия восстанавливается, если ввести вместо волновой функции для описания смешанного квантового ансамбля квадратичную форму от волновой функции, а именно так называемую *матрицу плотности*:

$$\rho_M(q, q') = \sum_{M_s} P_{M_s} \psi_{M_s}^*(q') \psi_{M_s}(q); \quad (5.3)$$

здесь  $q$  и  $q'$  означают две различные точки в пространстве какого-либо полного набора динамических переменных (конфигурационных или импульсных). Точки  $q$  отмечают строки матрицы, а точки  $q'$  — ее колонки. Диагональный элемент этой матрицы ( $q' = q$ ) дает вероятность найти в смешанном ансамбле значение динамических переменных, равное  $q$ . Действительно, в этом случае мы получаем обычную формулу сложения вероятностей для независимых событий:

$$W_M(q) = \rho_M(q, q) = \sum_{M_s} P_{M_s} |\psi_{M_s}(q)|^2. \quad (5.4)$$

В частном случае  $P_{M_s} = 1$ , остальные  $P_{M_s} = 0$ , и мы возвращаемся к исходной формуле для чистого ансамбля:

$$W_M(q) = |\Psi_M(q)|^2. \quad (5.4^*)$$

Матричные элементы матрицы плотности удовлетворяют определенным условиям симметрии. Волновая функция  $\Psi_M(q)$  и сопряженная ей функция  $\Psi_M^*(q)$  описывают одно и то же состояние. Из формулы (5.3) следует, что матрица  $\rho(q, q')$  является эрмитовой матрицей:

$$\rho_M(q', q) = \rho_M^*(q, q') = \rho_M^+(q', q). \quad (5.5)$$

Далее, если наша микросистема состоит из тождественных частиц (или частью содержит тождественные частицы), то волновая функция  $\Psi_M(q)$  при перестановке пары тождественных частиц,  $i$ -й и  $k$ -й, или остается неизменной (если частицы подчиняются статистике Бозе), или меняет свой знак на противоположный (в случае статистики Ферми).

Если обозначить оператор перестановки динамических переменных  $q_i$  и  $q_k$  пары  $i$ -й и  $k$ -й частиц через  $\mathcal{P}_q$ , то для волновых функций имеем:

$$\mathcal{P}_q \Psi_M(q) = \pm \Psi_M(q). \quad (5.6)$$

Отсюда следует для матрицы плотности:

$$\mathcal{P}_q \rho_M(q', q) = \pm \rho_M(q', q), \quad (5.7)$$

$$\mathcal{P}_{q'} \rho_M(q', q) = \pm \rho_M(q', q), \quad (5.8)$$

$$\mathcal{P}_{qq'} \rho_M(q', q) = \rho_M(q', q). \quad (5.8^*)$$

Последнее соотношение показывает, что матрица плотности симметрична при перестановке частиц (оператор  $\mathcal{P}_{qq'} = \mathcal{P}_q \mathcal{P}_{q'}$ ).

Если некоторая функция динамических переменных изображается оператором  $\mathcal{L}$  (пусть его матричные элементы в  $q$ -представлении будут  $L(q', q)$ ), то, как известно из квантовой механики, среднее значение физической величины  $L$ , изображаемой оператором  $\mathcal{L}$ , будет

$$\bar{L} = \int \Psi_M^*(q') L(q', q) \Psi_M(q) dq' dq. \quad (5.9)$$

Отсюда и из формулы (5.3) видно, что среднее значение этой величины в смешанном ансамбле, описываемом матрицей  $\rho_M(q', q)$ , будет

$$\bar{L} = \int \rho_M(q, q') L(q', q) dq' dq = \text{Sp}(\rho_M \mathcal{L}), \quad (5.10)$$

где знак Sp означает след матрицы ( $\rho_M \mathcal{L}$ ).

Матрица плотности может быть дана и в смешанном представлении, когда ее строчки отмечаются значениями одних динамических переменных  $q$ , а колонки — значениями других переменных, например  $p$ . Именно:

$$\rho_M(q, p) = \sum_{M_s} P_{M_s} \psi_{M_s}^*(q) \psi_{M_s}(p), \quad (5.11)$$

причем, согласно общим правилам преобразования волновой функции от одних переменных к другим, имеем:

$$\psi_{M_s}(p) = \int S(p, q) \psi_{M_s}(q) dq, \quad (5.12)$$

где  $S$  — матрица унитарного преобразования от переменных  $q$  к переменным  $p$ .

Если под переменными  $q$  понимать координаты, а под переменными  $p$  — сопряженные им импульсы, то матрица становится прямым аналогом классической плотности в пространстве фаз  $[W(q, p)]$ .

Однако более прямая связь существует между классической плотностью в пространстве фаз и величиной [1]

$$R_M(q, p) = \rho_M(q, p) S^{-1}(q, p), \quad (5.13)$$

где  $S^{-1}(q, p)$  есть матричный элемент матрицы, обратной матрице  $S(q, p)$ . В случае, когда координаты  $q$  и импульсы  $p$  являются декартовыми, матрица  $S$  имеет элементы

$$S(q, p) = \frac{e^{i \frac{pq}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (5.14)$$



и все соотношения становятся особенно простыми. Из (5.11), (5.13) и (5.14) нетрудно вывести, что

$$R_M(q) = \int R_M(q, p) \frac{dp}{2\pi\hbar} \quad (5.15)$$

есть вероятность найти в ансамбле значение координат, равное  $q$ , а величина

$$R_M(p) = \int R_M(q, p) \frac{dq}{2\pi\hbar} \quad (5.16)$$

есть вероятность найти в этом же ансамбле значение импульсов, равное  $p$ . Формулы (5.15) и (5.16) в точности совпадают с формулами классической теории, если  $R_M(q, p)$  рассматривать как плотность в пространстве фаз  $\mathfrak{M}(q, p)$ . Наконец, имеет место формула для среднего значения физической величины  $\bar{L}$ , изображаемой оператором  $\mathcal{L}$  с матричными элементами  $L(q, p)$  в  $q, p$ -представлении:

$$\bar{L} = \int R_M^*(q, p) L(q, p) \frac{dq dp}{2\pi\hbar}, \quad (5.17)$$

где  $R_M^*(q, p)$  есть матрица, комплексно-сопряженная матрице  $R_M(q, p)$ , а величина  $L(q, p)$  равна

$$L(q, p) = \int L(q, q') S(q', p) dq' \cdot S^{-1}(q, p). \quad (5.18)$$

Аналогия между формулами (5.15)–(5.17) и соответствующими формулами классической, статистической механики настолько полна, что возникает большой соблазн положить в основу описания квантового ансамбля не волновую функцию, а матрицу плотности  $R(q, p)$ . Однако такая тенденция не оправдывается при более глубоком рассмотрении. К этому вопросу мы вернемся позднее. Сейчас лишь отметим, что простые условия для волновой функции и матрицы при перестановке аргументов — динамических переменных тождественных частиц и условия эрмитовости операторов, изображающих физические величины, на языке матрицы  $R(q, p)$  выглядят довольно громоздко. Имен-

но, нетрудно показать [1], что условие (5) приводит к интегральному соотношению:

$$R^*(q, p) = \int R(q + \xi, p + \eta) e^{i \frac{\xi \eta}{\hbar}} \frac{d\xi d\eta}{2\pi}, \quad (5.19)$$

а условия симметрии при перестановках тождественных частиц (5.8) и (5.8\*) выражаются соотношениями:

$$\mathcal{P}_q R(q, p) = \pm R(q, p) e^{-\frac{i}{\hbar} (p_i - p_k) (q_i - q_k)}, \quad (5.20)$$

$$\mathcal{P}_p R(q, p) = \pm R(q, p) e^{-\frac{i}{\hbar} (p_i - p_k) (q_i - q_k)}, \quad (5.20^*)$$

$$\mathcal{P}_{pq} R(q, p) = R(q, p), \quad \mathcal{P}_{pq} = \mathcal{P}_p \mathcal{P}_q, \quad (5.20^{**})$$

где  $q_i, q_k$  — координаты, а  $p_i, p_k$  — импульсы переставляемых частиц,  $i$ -й и  $k$ -й,  $\mathcal{P}_q$  — оператор перестановки координат, а  $\mathcal{P}_p$  — оператор перестановки импульсов.

Все эти соотношения легко удовлетворяются, если величину  $R(q, p)$  рассматривать как билинейную форму от волновой функции, данной в смешанном  $q, p$ -представлении.

Практическое значение матрицы плотности  $R(q, p)$  заключается в том, что если рассматриваемый квантовый ансамбль мало отличается от классического, то матрицу  $R(q, p)$  можно разложить по степеням постоянной Планка  $\hbar$ :

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n R_n. \quad (5.21)$$

Условие эрмитовости (5.19) тоже может быть представлено в виде ряда по степеням  $\hbar$ ; для этого следует разложить  $R(q + \xi, p + \eta)$  по степеням  $\xi$  и  $\eta$  и воспользоваться равенством

$$I_{nm} = \int \int \xi^n \eta^m e^{\pm i \frac{\xi \eta}{\hbar}} \frac{d\xi d\eta}{2\pi \hbar} = (\pm i \hbar)^{n+m} m! \delta_{nm}. \quad (5.22)$$

Тогда из (5.19) получаем:

$$R^*(q, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i \hbar)^n}{n!} \frac{\partial^{2n} R(q, p)}{\partial q^n \partial p^n} \quad (5.23)$$

и, подставляя сюда ряд (5.21), находим:

$$\begin{aligned} R_0 &= R_0^*, & R_1^* &= R_1 + \frac{i}{1!} \frac{\partial^2 R_0}{\partial q \partial p}, \\ R_2^* &= R_2 + \frac{i}{1!} \frac{\partial^2 R_1}{\partial q \partial p} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^4 R_0}{\partial q^2 \partial p^2}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Из этих соотношений видно, что матрица  $R(q, p)$  может быть действительной только в пределе классического ансамбля, т. е. при  $\hbar \rightarrow 0$ . При  $\hbar \neq 0$  матрица плотности  $R(q, p)$  обязательно имеет мнимую часть, не равную нулю. Поэтому при  $\hbar \neq 0$  матрица  $R(q, p)$  не является плотностью вероятности в пространстве фаз  $\mathfrak{R}(q, p)$ , как это и должно быть в силу соотношения Гейзенберга, запрещающего ансамбли с точно заданными значениями координат  $q$  и импульсов  $p$ .

Особая ситуация возникает в случае ансамбля, содержащего тождественные частицы. Действительно, условия симметрии (5.20) и (5.20\*) содержат постоянную Планка таким образом, что при  $\hbar \rightarrow 0$  возникает существенно особая точка. Поэтому разложение  $R$  в ряд по степеням  $\hbar$  невозможно. Выход из этого затруднения заключается в замене матрицы  $R$  на матрицу, усредненную по фазовому объему [2, 3]:

$$\tilde{R} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} R dp dq, \quad (5.25)$$

где  $\Omega$  есть объем области:

$$P - \Delta < p < P + \Delta, \quad Q - \delta < q < Q + \delta, \quad \Delta \delta = \Omega, \quad (5.25^*)$$

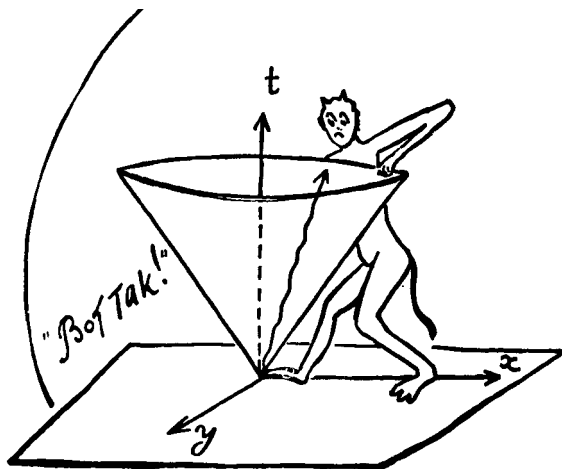
по которой производится усреднение. Значение этого усреднения заключается в следующем: из соотношений (5.20) и (5.20\*) следует, что в случае статистики Ферми матрица  $R$  обращается в нуль на всех гиперплоскостях в пространстве фаз, где  $p_i = p_k$  или  $q_i = q_k$  (не учитывая сейчас усложнений, связанных со спином); в случае статистики Бозе матрица имеет экстремум по относительным переменным  $p_i - p_k$  или  $q_i - q_k$  на поверхностях  $p_i = p_k$ ,  $q_i = q_k$  [матрица  $\rho$ , которую можно рассматривать как амплитуду матрицы  $R$ , имеет, согласно (5.13), экстремумы на поверхностях  $p_i = p_k$  и  $q_i = q_k$  порознь].

Обращение в нуль или достижение экстремума происходит примерно на протяжении длины волны частиц, т. е. на протяжении  $\lambda \sim \hbar/p$ . Роль этих областей, где происходит обращение в нуль или достигается экстремум, будет несущественна, если вероятность найти две частицы на расстоянии сравнимым с длиной волны будет мала. Если плотность частиц в единице объема есть  $n$ , то эта вероятность определяется величиной  $\lambda^3 n$ .

При условии  $\lambda^3 n \ll 1$  можно выбрать такой объем  $\Omega$ , что вклад от аномальных областей ( $q_i \cong q_k$ ,  $p_i \cong p_k$ ) во все фазовое пространство будет мал.

Условие  $\lambda^3 n \ll 1$  можно переписать в виде  $p^3 n \gg \hbar^3$ , и тогда оно означает, что фазовый объем, приходящийся на одну частицу, должен быть велик по сравнению с  $\hbar^3$ . При этом условии можно выбрать такой объем  $\Omega$  для усреднения  $R$ , что  $\Omega \gg \hbar^3$  и  $\Omega \ll p^3/n$ . Усредненная таким образом матрица плотности  $\check{R}$  (5.25) не будет уже иметь существенных особенностей по  $\hbar$  (см. [2, 3]).

---



## § 6. ПРИЧИННОСТЬ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Квантовая механика по своему существу является статистической теорией. Поэтому судьба отдельной частицы, ее история может быть прослежена только в весьма общих чертах \*). Как мы видели, в классической механике возникает необходимость время от времени восстанавливать начальные данные для того, чтобы исключить накапливающийся эффект первоначальной ошибки в их определении. В квантовой области этот эффект является уже крайне существенным: частицу можно лишь приближенно локализовать в пространстве, и эта локализация будет ухудшаться с течением времени тем скорее, чем точнее была первоначальная локализация — таково прямое следствие соотношения неопределенностей.

Это обстоятельство несколько не принижает ценность квантовой механики. Тем более не следует понимать подчеркивание статистического характера квантовой механики (а это иногда делается) как намек на ее неполноценность или на необходимость искать полностью детерминированную теорию — та-

\*) Ср. § 15.

кой теории может вовсе и не существовать, но разумеется, что никто не должен мешать другому «выдумать порох неподмокаемый».

Из того, что было сказано выше по поводу иллюзии детерминизма в классической теории, которая еще имеет там свои основания в том, что забывание начальных данных может происходить сравнительно медленно, естественно думать, что эта иллюзия в области микромира становится попросту вредным самообманом. Однако это не означает, что в статистических теориях не имеет места причинность.

*Причинность есть определенная форма упорядочения событий в пространстве и времени*, и эта упорядоченность накладывает свои ограничения даже на самые хаотические события. В статистических теориях она выражается двояким образом. Во-первых, сами статистические закономерности полностью упорядочены и величины, характеризующие ансамбль, сами по себе строго детерминированы. Во-вторых, индивидуальные элементарные события также упорядочены таким образом, что одно из них может повлиять на другое только в том случае, если их взаимное расположение в пространстве и времени позволяет сделать это без нарушения причинности (т. е. правила упорядочивающего события). В релятивистской теории эти события должны быть связаны световым сигналом или другим сигналом, распространяющимся со скоростью, меньшей скорости света. В нерелятивистской теории, которая сейчас и рассматривается нами, все скорости много меньше скорости света. Поэтому скорость света в нерелятивистской теории можно считать бесконечно большой и формально строить теорию таким образом, как если бы допускались сигналы, переносящие взаимодействия с бесконечно большой скоростью. На рис. 5 показаны области влияния в релятивистском и в нерелятивистском случаях. В последнем случае каждая точка плоскости  $t=0$  влияет на точки бесконечно близкой плоскости  $t+dt$ , так как световой конус при  $c \rightarrow \infty$  развернулся в плоскость.

Поэтому детерминизм в классическом случае означает попросту, что состояние системы в предшествующий момент времени полностью определяет ее состояние в последующий момент времени.

В квантовой теории состояние системы означает ее принадлежность к тому или иному квантовому ансамблю, который характеризуется волновой функцией (чистый случай, или более общо — матрицей плотности). Мы рассмотрим сначала чистый случай. Так как волновая функция  $\psi$  исчерпывающим образом описывает состояние ансамбля, то из изложенного выше

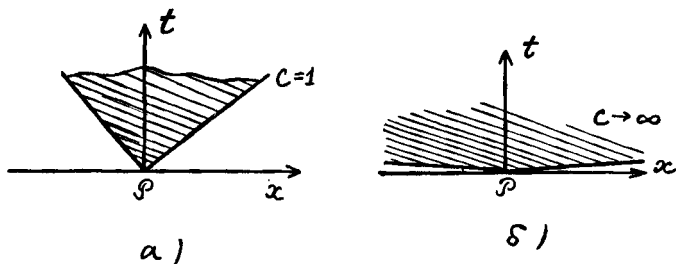


Рис. 5. Область влияния событий в точке  $P$  на события при  $t > 0$ :  $a$  — в релятивистской теории,  $b$  — в классической.

понимания принципа причинности следует, что последующее состояние ансамбля также должно определяться этой же волновой функцией. Обозначим волновую функцию в момент времени  $t$  через  $\psi$ . Тогда приращение этой функции  $d\psi$  за время  $dt$  должно выражаться через саму функцию  $\psi$ . Далее, так как волновая функция определена, по своему смыслу, только с точностью до произвольного множителя  $N$ , так что  $\psi$  и  $\psi' = N\psi$  изображают одно и то же состояние (для нормированной функции этот множитель по модулю должен быть равен 1, т. е.  $N = e^{i\alpha}$ , где  $\alpha$  — произвольное действительное число), то связь между  $d\psi$  и  $\psi$  должна быть линейной. Стало быть:

$$d\psi = \mathcal{L}\psi, \quad (6.1)$$

где  $\mathcal{L}$  — некоторый линейный оператор. Если обозначить волновую функцию в момент времени  $t + dt$  через  $\psi' = \psi + d\psi$ , то предыдущее соотношение можно записать в виде:

$$\psi' = S(dt)\psi,$$

где  $S(dt)$  означает некоторую матрицу, преобразующую  $\psi$  в  $\psi'$ . Ввиду сохранения  $\int |\psi|^2 dq$  эта матрица

должна быть унитарной, т.е.  $S^+(dt) \equiv \tilde{S}^*(dt) = S^{-1}(dt)$ . Полагая  $S = 1 + \mathcal{L} dt + \dots$ , мы находим, что

$\mathcal{L} = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}$ , где оператор  $\mathcal{H}$  является уже эрмитовым

( $\tilde{\mathcal{H}}^* = \mathcal{H}^+ = \mathcal{H}$ ), а постоянная Планка  $\hbar$  введена в качестве множителя из соображений размерности и соответствия с классической теорией. Оператор  $\mathcal{H}$  по самому своему смыслу является оператором смещения во времени и называется оператором Гамильтона. Если оператор  $\mathcal{H}$  не зависит от времени, то он является попросту оператором энергии микросистемы.

Из сказанного следует, что уравнение для изменения волновой функции во времени должно быть записано в виде:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi. \quad (6.2)$$

Это и есть знаменитое уравнение Шредингера, выражающее причинность в квантовой теории. Так как волновая функция  $\psi$  полностью описывает квантовый ансамбль, то можно сказать, что уравнение (6.2) описывает движение квантового ансамбля и притом причинным образом, т.е. так, что предыдущее во времени состояние ансамбля определяет его последующее состояние.

Заметим, что уравнение для сопряженной функции  $\psi^*$  имеет вид:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \mathcal{H}^* \psi^*, \quad (6.2^*)$$

и если  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$ , то

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \mathcal{H} \psi^*. \quad (6.2^{**})$$

Вместо дифференциального уравнения (6.2) можно написать соответствующее ему интегральное уравнение. Это может быть сделано с помощью функции Грина для системы невзаимодействующих частиц. Суть дела заключается в том, что функция Гамильтона  $\mathcal{H}$  обычно может быть представлена в виде суммы оператора кинетической энергии частиц  $T$  и оператора взаимодействия этих частиц между собой и с внешними полями  $V$ . В декартовой системе координат



оператор  $T$  имеет особенно простой вид:

$$T = - \sum_{s=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_s} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_s^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_s^2} \right), \quad (6.3)$$

где  $m_s$  — массы частиц,  $x_s, y_s, z_s$  — их декартовы координаты,  $s=1, 2, \dots, N$  ( $N$  — число частиц в системе). Функция Грина  $\mathfrak{G}$  по определению есть решение уравнения Шредингера с правой частью, носящей характер импульсного источника в точке  $x=x'$  и в момент времени  $t=t'$ :

$$i\hbar \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} - T\mathfrak{G} = -\delta(t-t')\delta(x-x') \quad (6.4)$$

и равна нулю для  $t < t'$  \*).

Это уравнение совпадает с уравнением диффузии в многомерном пространстве с мнимым, однако, коэффициентом диффузии и с импульсным источником частиц в точке  $x=x', t=t'$ .

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(x-x', t-t') &= \\ &= \prod_{s=1}^N \frac{1}{[i\hbar(t-t')]^{N/2}} e^{-\frac{m_s(x_s-x'_s)^2}{2i\hbar(t-t')}} \quad \text{для } t' < t \end{aligned} \quad (6.5)$$

и

$$\mathfrak{G}(x-x', t-t') = 0 \quad \text{для } t' > t. \quad (6.5^*)$$

Интересующее нас уравнение Шредингера (6.2) может быть переписано в виде:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x', t')}{\partial t'} - T(x')\psi(x', t') = V(x', t')\psi(x', t'). \quad (6.2^{***})$$

Умножая (6.4) на  $V(x', t')\psi(x', t')$  и интегрируя по  $x'$  и  $t'$ , находим, что искомая функция  $\psi(x, t)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \psi_0(x, t) + \\ &+ \int \mathfrak{G}(x-x', t-t') V(x', t') \psi(x', t') dx' dt', \end{aligned} \quad (6.6)$$

где  $\psi_0(x, t)$  есть решение свободного уравнения, т. е. уравнения при  $V=0$ .

Из этого уравнения видно, что если в какой-либо точке пространства  $x'$  в момент времени  $t'$  произошло

---

\* ) Здесь под  $x$  и  $x'$  мы разумеем всю совокупность координат частиц, так что  $\delta(x-x')$  есть  $3N$ -мерная  $\delta$  функция.

изменение волновой функции  $\delta\psi(x', t')$  или взаимодействия  $\delta V(x', t')$  и если момент времени  $t'$  является более поздним ( $t' > t$ ), то влияние этого события на состояние ансамбля, т. е. на волновую функцию  $\psi(x, t)$ , равно нулю: иными словами, влияние на состояние в момент времени имеют только те события, которые происходят ранее  $t$ , при  $t' < t$ .

Заметим, что уравнение (6.2) позволяет не только определить по данному состоянию ближайшее будущее состояние, но и ближайшее предшествующее. Для этого достаточно считать, что  $dt < 0$ . Соответственно этому наряду с «запаздывающей» функцией Грина (6.5) можно рассматривать и «опережающую» функцию Грина:

$$\mathfrak{G}(x - x', t - t') = \\ = \prod_{s=1}^N \frac{1}{[-i\hbar(t - t')]^{N/2}} e^{\frac{m_s(x_s - x'_s)^2}{2i\hbar(t - t')}} \quad \text{для } t' > t \quad (6.5^{**})$$

и

$$\mathfrak{G}(x - x', t - t') = 0 \quad \text{для } t' < t. \quad (6.5^{***})$$

Эта функция позволяет определить состояние в прошлом. Такая возможность связана с обратимостью квантовой механики во времени.

Рассмотрим теперь, как выглядят уравнения движения для смешанного ансамбля, описываемого матрицей плотности  $\rho(q, q')$ .

Дифференцируя (5.3) по времени (при этом предполагается, что условия, определяющие смесь, остаются неизменными, так что  $P_s = \text{const}$ ), получаем:

$$\frac{\partial \rho(q, q')}{\partial t} = \sum_s P_{M_s} \left[ \frac{\partial \psi_{M_s}^*(q')}{\partial t} \psi_{M_s}(q) + \psi_{M_s}^*(q') \frac{\partial \psi_{M_s}(q)}{\partial t} \right] \quad (6.7)$$

и, пользуясь уравнением (6.2) и сопряженным ему (6.2\*), найдем:

$$\frac{\partial \rho(q, q'')}{\partial t} = \\ = \sum_s P_{M_s} \frac{1}{i\hbar} [-\mathcal{H}^* \psi_{M_s}^*(q') \psi_{M_s}(q) + \psi_{M_s}^*(q') \mathcal{H} \psi_{M_s}(q)]. \quad (6.7^*)$$

или, имея в виду, что  $\mathcal{H}(q', q'') = \tilde{\mathcal{H}}^*(q', q'') = = \mathcal{H}^+(q', q'')$ , найдем:

$$\frac{\partial \rho(q, q')}{\partial t} + [\mathcal{H}, \rho] = 0, \quad (6.8)$$

где  $[\mathcal{H}, \rho]$  означает квантовые скобки Пуассона

$$[A, B] = \frac{1}{i\hbar} (AB - BA). \quad (6.9)$$

Уравнение (6.8) можно записать в форме

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad (6.10)$$

которая выражает теорему Лиувилля в квантовой механике. Уравнение (6.8) или (6.10) выражают причинность, по самому своему смыслу эквивалентную той, которая выражается уравнением Шредингера (6.2): первая производная матрицы плотности  $\rho$  определяется самой матрицей плотности, т. е. ближайшее состояние определяется предыдущим.

Если от матрицы плотности  $\rho(q, q')$  перейти к матрице  $R(q, p)$ , то после несложных выкладок получим следующее уравнение для матрицы  $R^*$ ):

$$\frac{\partial R(q, p)}{\partial t} + [\mathcal{H}, R] \equiv \frac{dR}{dt} = 0, \quad (6.11)$$

где

$$[\mathcal{H}, R] = \frac{1}{i\hbar} \int \frac{d\xi d\eta}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i\xi\eta}{\hbar}} [H(q, p + \eta) R(q + \xi, p) - - H(q + \xi, p) R(q, p + \eta)]. \quad (6.11^*)$$

Разлагая этот интеграл в ряд по степеням  $\hbar$  [для этого следует использовать формулу (5.22)], найдем:

$$\frac{\partial R(q, p)}{\partial t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^{n-1}}{n!} [H, R]_n = 0, \quad (6.12)$$

где

$$[H, R]_n = \frac{\partial H}{\partial p^n} \frac{\partial R}{\partial q^n} - \frac{\partial H}{\partial q^n} \frac{\partial R}{\partial p^n} \quad (6.13)$$

есть классическая скобка Пуассона  $n$ -го порядка. Если оператор функции Гамильтона  $\mathcal{H}$  равен сумме

\*) См. [1—3] к § 5.

$T(p) + V(q)$ , то в смешанном  $q, p$ -представлении матричные элементы оператора  $\mathcal{H}$  попросту равны соответствующей классической функции Гамильтона, т. е.

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q). \quad (6.14)$$

Поэтому уравнение (6.12) приобретает вид:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial R}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 R}{\partial q^2} - \sum_{n \geq 2}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^{n-1}}{n!} \frac{\partial^n V}{\partial q^n} \frac{\partial^n R}{\partial p^n}. \quad (6.15)$$

В этом уравнении первые два члена в точности совпадают с классическим уравнением для плотности  $\rho(q, p)$  [(4.4) или (4.5)], а следующие члены можно рассматривать как квантовые поправки. Эти поправки зависят от высших производных как самой плотности  $R$ , так и потенциала  $V$ , при этом входят как производные по координатам  $q$ , так и производные по импульсам  $p$ . Поэтому эти уравнения могут быть полезны в тех случаях, когда функция плотности является достаточно гладкой функцией в пространстве фаз  $\mathfrak{R}(p, q)$ .

Первые два классических члена в уравнении (6.15) показывают, что движение в классическом приближении определяется скоростью в данном месте  $p/m$  и силой  $\frac{\partial V}{\partial q}$ , действующей в этом же месте. Следующие квантовые члены указывают на возрастающее значение всей окрестности точки фазового пространства  $(p, q)$ , причем член с  $\frac{\partial^2 R}{\partial q^2}$  приводит к диффузии плотности  $R(q, p)$  (с мнимым коэффициентом диффузии), а члены типа  $\frac{\partial^n V}{\partial q^n} \frac{\partial^n R}{\partial p^n}$  указывают на то, что движение ансамбля в квантовой механике определяется характером потенциала не только в данном месте, но во всем пространстве, доступном для частиц ансамбля.

Приведем еще явный вид уравнения для матрицы плотности  $\rho(q, q')$  в координатном представлении.

Для этого заметим, что матричные элементы оператора Гамильтона  $\mathcal{H}$  в  $q$ -представлении имеют вид:

$$H(q, q') = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q \partial q'} \delta(q - q') + V(q') \delta(q - q'). \quad (6.16)$$

Подставляя это выражение в (6.8) и вводя переменные  $Q = \frac{q + q'}{2}$ ,  $\xi = q - q'$ , найдем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial^2 \rho}{\partial Q \partial \xi} - \frac{1}{i\hbar} \left[ V\left(Q + \frac{\xi}{2}\right) - V\left(Q - \frac{\xi}{2}\right) \right] \rho. \quad (6.17)$$

Эта форма уравнения движения для матрицы плотности  $\rho(q, q') \equiv \rho(Q, \xi)$  соответствует в классической механике уравнениям движения для Фурье-образа классической плотности  $\rho_{\text{кл}}(Q, P)$  в пространстве фаз [1]:

$$\rho_{\text{кл}}(Q, \xi) = \int \rho_{\text{кл}}(Q, P) e^{-i\xi P/\hbar} dP \quad (6.18)$$

(здесь постоянная  $\hbar$  пока введена чисто формально).

Действительно, переходя в (2.4) от  $\rho_{\text{кл}}(Q, P)$  к  $\rho_{\text{кл}}(Q, \xi)$  и полагая

$$H(Q, \xi) = \int H(Q, P) e^{-i\xi P/\hbar} dP, \quad (6.19)$$

найдем.

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{\text{кл}}(Q, \xi)}{\partial t} = \int \left[ u H(Q, u) \frac{\partial \rho_{\text{кл}}(Q, \xi - u)}{\partial Q} - u \rho_{\text{кл}}(Q, u) \frac{\partial H(Q, \xi - u)}{\partial Q} \right] du \quad (6.20)$$

и, в частности, при  $H(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$  получим из (6.20) в явной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{\text{кл}}(Q, \xi)}{\partial t} &= \\ &= -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial^2 \rho_{\text{кл}}(Q, \xi)}{\partial Q \partial \xi} + \frac{1}{i\hbar} \xi \frac{\partial V(Q)}{\partial Q} \rho_{\text{кл}}(Q, \xi). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Сравнение этого уравнения с квантовым уравнением (6.17) показывает, что уравнение (6.17) переходит в (6.21) при условии, что

$$\left| \frac{\partial V}{\partial Q} \right| \gg \xi^2 \left| \frac{\partial^3 V}{\partial Q^3} \right|,$$

т. е. если потенциал  $V(Q)$  есть достаточно гладкая функция координат  $Q$ .

Таким образом, мы видим, что метод описания состояния ансамбля парами точек  $q, q'$  в пространстве конфигураций  $\mathfrak{H}(q)$  может быть введен и в классическую механику.

---



## § 7. МОЖНО ЛИ ОБОЙТИСЬ БЕЗ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ?

Основное уравнение квантовой механики — уравнение Шредингера, а также и уравнения матрицы плотности могут быть записаны в форме, которая очень напоминает уравнения классической статистической механики, или уравнения механики роя частиц. Это порождает соблазнительную мысль, которая не раз завлекала исследователей на путь попыток рассматривать квантовую механику как некоторую форму классической механики, дополненную своеобразной «квантовой» силой [1]. Автор этой монографии сам надеялся одно время, что изящные аналогии между уравнениями для матрицы  $R(q, p)$  и уравнениями классической статистической физики может быть позволят развить квантовую механику как статистическую механику одновременно неизмеримых величин, т. е. имелось в виду положить в основу теории не волновую функцию, а матрицу  $R(q, p)$  — аналога классической плотности  $\rho_{\text{кл}}(q, p)$  в пространстве фаз  $\mathcal{H}(q, p)$ . Заметим, что все упомянутые попытки так или иначе используют уравнения, которые на языке волновой функции нелинейны относительно волновой функции. В этом обстоятельстве и кроется серьезный подвох для таких попыток.

Рассмотрим сначала ту форму уравнения Шредингера, которую иногда называют «гидродинамической». В этом случае в основу теории пытаются положить плотность вероятности  $\rho(x) = |\psi(x)|^2$  и фазу волновой функции  $\theta(x) = \arg \psi(x)$ . Обе эти величины имеют классическую интерпретацию:  $\rho(x)$  можно рассматривать как среднюю плотность частиц, а  $\frac{1}{m} \nabla \theta(x)$  как их среднюю скорость в точке  $x$ , так что  $J = \frac{1}{m} \rho \nabla \theta$  имеет смысл плотности потока частиц. Однако уравнения для этих величин нелинейны. Действительно, если в уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi \quad (7.1)$$

(для простоты мы рассматриваем случай одной частицы) подставить волновую функцию в виде  $\psi = \rho^{1/2} e^{i\theta/\hbar}$ , то получим два уравнения для  $\rho$  и  $\theta$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \rho \frac{1}{m} \nabla \theta \right) = 0, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla \theta)^2 + V + \frac{\hbar^2}{m} \left[ \frac{\nabla^2 \rho}{\rho} + \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} \right] = 0. \quad (7.2^*)$$

Оба уравнения могут рассматриваться как классические: первое как уравнение непрерывности для плотности частиц  $\rho$  и для тока  $J = \frac{1}{m} \rho \nabla \theta$ , а второе — как уравнение для функции действия  $\theta$ . Это второе уравнение совпадает с классическим, если «квантовый» член  $\frac{\hbar^2}{m} \left[ \frac{\nabla^2 \rho}{\rho} + \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} \right]$  рассматривать как дополнительный «квантовый» потенциал, зависящий от плотности частиц  $\rho$  и ее производных.

На первый взгляд кажется, что подобная интерпретация уравнений ничему не противоречит, а сами уравнения, как это следует из их вывода, эквивалентны исходному уравнению Шредингера (7.1).

Однако это совсем не так. В квантовой механике фундаментальную роль играет принцип суперпозиции состояний. Согласно этому принципу, если имеются два состояния квантового ансамбля, изображаемые волновыми функциями  $\psi_{M_1}$  и  $\psi_{M_2}$ , то можно осуществить такую макрообстановку ( $M = M_1 + M_2$ ),



что новый ансамбль будет представляться волновой функцией такой, что

$$\Psi_M = c_1 \Psi_{M_1} + c_2 \Psi_{M_2}, \quad (7.3)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные числа [при сохранении нормировки  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ ]. Этот простой и важный принцип не может быть выражен на языке величин  $\rho$  и  $\theta$  без того, чтобы не возвратиться к волновой функции.

Еще большее неудобство возникает при формулировке условий симметрии для системы тождественных частиц. Эти условия для волновой функции гласят:

$$P_{ik} \Psi = \pm \Psi, \quad (7.4)$$

где  $P_{ik}$  есть оператор перестановки частиц  $i$ -й и  $k$ -й, а знак  $\pm$  выбирается в зависимости от типа статистики (Ферми или Бозе). Это простое условие, которое отличным образом вписывается в линейный аппарат квантовой механики, получает лишь крайне неуклюжее отражение на языке функций  $\rho$  и  $\theta$ . Действительно, пусть мы имеем две одинаковые частицы. Тогда мы можем рассматривать уравнение (7.1) и (7.2) как уравнения для функций, описывающих относительное движение этих частиц, а движение их центра тяжести выделить обычным приемом разделения переменных. Тогда условие симметрии (7.4) переносится на функцию относительного движения (функция, описывающая движение центра тяжести, автоматически симметрична относительно перестановки частиц) и означает, что функция  $\psi(x)$  должна быть четной или нечетной при замене  $x$  на  $-x$ ; при этом из условия (7.4) следует, что

$$\rho(-x) = \rho(x), \quad \theta(-x) = \theta(x) + \pi s, \quad (7.5)$$

где  $s=0, 2, 4, \dots$  или  $s=1, 3, 5, \dots$

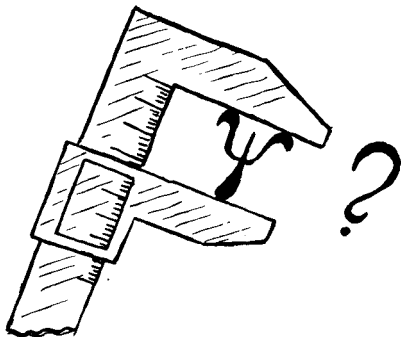
Если требование к функции  $\rho(x)$  оказывается математически вполне удобным, то второе из требований весьма неказисто, и уж если и искать пути удовлетворения этому требованию, то возвращение к волновой функции и к условию четности или нечетности этой функции есть наиболее прямой путь для соблюдения условий (7.5).

Другая форма уравнений квантовой механики, близкая к классической статистической механике, основывается на применении матрицы плотности  $R(q, p)$ . Из формул (5.15), (5.16) и (6.12) видна далеко идущая аналогия между уравнениями классической статистической физики и уравнениями для квантовой плотности  $R(q, p)$ . Однако, как было показано выше (§ 5), матрица  $R(q, p)$ , в отличие от классической плотности, обязательно имеет мнимую часть, не равную нулю, и поэтому в прямом смысле слова не может быть ни вероятностью, ни плотностью в пространстве фаз  $\mathfrak{R}(q, p)$ , которые положительно-дефинитны. Как было отмечено, комплексный характер  $R(q, p)$  есть выражение принципа дополнительности. Однако могла бы быть надежда рассматривать величину  $R(q, p)$  как обобщение понятия плотности вероятности на случай одновременно неизмеримых величин  $q$  и  $p$  и положить в основу теории эту матрицу вместо волновой функции. Само по себе это ничему не противоречило бы. Однако матрица  $R(q, p)$  есть нелинейное образование относительно волновой функции, и поэтому все трудности, которые были отмечены в связи с описанием посредством  $\rho$  и  $\theta$ , находят свое выражение и в этом случае. В частности, указанная выше трудность с формулировкой принципа суперпозиции состояний (7.3) при использовании величин  $\rho$  и  $\theta$  остается в силе и в случае использования матрицы  $R$ .

Далее, условия эрмитовости матрицы (5.19) и условия симметрии [в случае тождественных частиц (5.20)] весьма хитро удовлетворить, не прибегая к понятию волновой функции, и, вероятно, в общем виде их можно удовлетворить только на основе понимания  $R(q, p)$  как билинейной формы из  $\psi^*(p)$  и  $\psi(q)$ .

Эти трудности являются общими для всех попыток формулировать квантовую механику на языке величин, нелинейных относительно волновой функции. Волновая функция, будучи изгнана через дверь, влетает обратно через окно: эта настойчивость волновой функции есть выражение того факта, что язык линейной теории есть язык, имманентный самой природе квантовой механики.

---



## § 8. ИЗМЕРИМА ЛИ ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ?

Мы защитили честь волновой функции, но что соответствует ей в реальности? Можно ли ее измерить, установить ее значение из опыта, скажем, так, как можно измерить плотность частиц или температуру газа? Часто на этот вопрос отвечают отрицательно — ведь волновая функция по самому своему смыслу определена лишь с точностью до постоянной фазы; две волновые функции  $\psi$  и  $\psi'$ , связанные соотношением

$$\psi' = \psi e^{i\alpha}, \quad (8.1)$$

где  $\alpha$  — произвольное действительное число, изображают один и тот же квантовый ансамбль. Поэтому, говоря об измеримости волновой функции, мы с самого начала не будем требовать невозможного (или лучше сказать бессмысленного) и будем подразумевать под измерением волновой функции измерение с точностью до постоянной фазы  $\alpha$ .

Чтобы не усложнять обсуждение, будем рассматривать волновую функцию в явном виде как функцию координат  $x$  одной частицы (под  $x$  можно также подразумевать относительные координаты двух частиц). Волновая функция является, вообще говоря, комплексной величиной, и мы запишем ее в виде:

$$\psi(x) = |\psi(x)| e^{i\theta(x)}, \quad (8.2)$$

где  $|\psi(x)|$  — действительная амплитуда функции, а  $\theta(x)$  — ее фаза. Из опыта по определению средней плотности частиц  $\rho(x)$ , выполнение которого не встречает каких-либо принципиальных возражений, можно определить амплитуду  $|\psi(x)|$  функции, так как по определению

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2, \quad |\psi(x)| = \rho(x)^{1/2}. \quad (8.3)$$

Далее, помимо средней плотности частиц, можно также измерить и среднюю плотность тока

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{m} \rho \nabla \theta. \quad (8.4)$$

Тогда фаза  $\theta(x)$  равна:

$$\theta(x) = \frac{m}{\hbar} \int_{x_0}^x \frac{\mathbf{J}}{\rho} ds, \quad (8.5)$$

где  $ds$  — элемент длины, а  $x_0$  — некоторая произвольная точка. Этот произвол соответствует произволу в выборе фазы в (8.1). Для определенности мы можем представить себе, что дело идет об измерении  $\rho(x)$  и  $\theta(x)$  в атоме или ионе с одним электроном, находящимся в  $s$ - или  $p$ -состоянии. В первом случае волновая функция сферически симметрична и токи отсутствуют, так что

$$\psi(x) = \sqrt{\rho(x)}, \quad (8.6)$$

и измерение  $\rho(x)$  дает нам прямо значение волновой функции.

Во втором случае волновая функция в полярных координатах  $(r, \theta, \varphi)$  имеет вид:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = A(r, \theta) e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1; \quad (8.7)$$

при этом два знака фазы соответствуют двум возможным ориентациям атома в магнитном поле; допустим, что посредством магнитного поля установлена одна из возможных ориентаций. Тогда, измеряя

$\rho(x)$ , мы найдем модуль функции

$$A(r, \theta) = \sqrt{\rho(r, \theta)}, \quad (8.8)$$

а измеряя магнитный момент атома, равный

$$M = \frac{e\hbar}{2\mu c} m, \quad (8.9)$$

где  $\mu$  — масса электрона, найдем и фазу волновой функции  $\theta = m\varphi$ . Эти простые примеры показывают, что *волновая функция может быть измерена*.

Приведенный пример измерения волновой функции относится к случаю связанного состояния. Рассмотрим теперь случай рассеяния частиц. Волновая функция в этом случае имеет вид:

$$\psi(x) = e^{ikx} + u(x), \quad (8.10)$$

где  $e^{ikx}$  есть первичная, падающая волна ( $k = 1/\lambda$  — волновой вектор для этой волны), а  $u(x)$  есть волна рассеянная. Для больших расстояний от точки рассеяния рассеянная волна имеет вид:

$$u(x) = \frac{e^{ikr}}{r} A(k, \vartheta), \quad (8.11)$$

$$A(k, \vartheta) = \frac{1}{2ik} \sum_0^{\infty} (e^{2i\eta_l} - 1) P_l(\cos \vartheta), \quad (8.12)$$

где  $\eta_l(k)$  суть фазы рассеянных волн, а  $P_l(\cos \vartheta)$  — полиномы Лежандра. Допустим, что мы измеряем опять плотность частиц (можно было бы ближе к практическому исполнению опыта говорить об измерении плотности тока частиц). Эта плотность есть  $|\psi|^2 = |\psi_0 + u|^2$  и содержит интерференционный член  $\psi_0 u^* + \psi_0^* u$ , который усложняет все дело. Однако от него легко избавиться, если представить себе, что описание падающей волны посредством плоской волны представляет собою абстракцию и строго говоря должен быть взят ограниченный в пространстве пучок (волновой пакет). Тогда наблюдая частицы, рассеянные вдали от первичного пучка, мы избежим интерференции первичных и рассеянных волн (заметим, что эти волны когерентны).

В такой реалистической постановке опыта можно непосредственно измерять  $|u|^2$ , как это обычно и делается. Итак, опыт дает нам величину

$$|u|^2 = \frac{1}{r^2} |A(k, \vartheta)|^2. \quad (8.13)$$

Отсюда находим амплитуду рассеянной волны  $A(k, \vartheta)$ , но увы, без фазы. Действительно, в общем случае  $A(k, \vartheta) = |A(k, \vartheta)| e^{i\alpha(k, \vartheta)}$  и из измеряемой величины фаза  $\alpha(k, \vartheta)$  выпадает.

Дополнительное измерение плотности тока рассеянных частиц ничего нового в этом случае не дает. Действительно, из известной формулы для плотности тока

$$J = \frac{i\hbar}{m} (u^* \nabla u - u \nabla u^*) \quad (8.14)$$

следует, что  $j = \frac{\hbar k}{m} |u|^2$  и, таким образом,  $j$  попросту пропорциональна  $|u|^2$ . Неопределенность фазы порождает серьезную и трудную проблему восстановления фазы из опытных данных [при этом речь идет о той части фазы  $\alpha(k, \vartheta)$ , которая может зависеть от угла  $\vartheta$  и импульса  $k$ ].

Для того чтобы обсудить эту проблему, рассмотрим два частных случая. Пусть сначала среди фаз отлична от нуля только первая фаза ( $S$ -рассеяние) В этом простейшем случае получаем из (8.12):

$$|A(k, \eta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \sin^2 \eta_0, \quad (8.15)$$

$$\sin \eta_0 = \pm |A(k, \eta)| 2k, \quad (8.15^*)$$

и, следовательно, фаза  $S$ -рассеяния определяется с точностью до знака. Таким образом возникает неоднозначность. Эта неоднозначность не является совсем безобидной; за ней скрывается, например, вопрос о том, действуют ли между частицами силы отталкивания или силы притяжения.

Действительно, фаза  $\eta_0$  связана с потенциалом взаимодействия частиц  $V(r)$  (в случае несильного взаимодействия) соотношением [1]

$$\eta_0 = -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) \left[ \left( \frac{\pi}{2kr} \right)^{1/2} I_{1/2}(kr) \right]^2 r^2 dr$$

[здесь  $I_{1/2}(z)$  — функция Бесселя] так, что знак  $V(r)$  определяет знак  $\eta_0$ .

Обратимся теперь к более сложному случаю, когда отличны от нуля две фазы, например  $S$ -фаза и  $P$ -фаза. В этом случае имеем:

$$|A(k, \vartheta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \{ \sin^2 \eta_0 + [2 \cos(\eta_0 - \eta_1) - 2 \cos 2\eta_0 - 2 \cos 2\eta_1] \times \\ \times \cos \vartheta + \sin^2 \eta_1 \cos^2 \vartheta \}. \quad (8.16)$$

Определяя коэффициенты при  $\cos \vartheta$  в нулевой степени,  $\cos \vartheta$  и  $\cos^2 \vartheta$ , мы найдем фазы  $\eta_0$  и  $\eta_1$  опять-таки с точностью до знака. Таким образом, из этих простых примеров видно, что задача восстановления волновой функции, даже асимптотической, не является простой, но трудности не носят принципиального характера. Поясним эту мысль замечанием, что, например, в случае рассеяния протонов друг на друге знак фазы  $\eta_0$  может быть определен из интерференции ядерного рассеяния с рассеянием вызванным кулоновским полем ядра. При учете ядерного взаимодействия дифференциальный поперечник для упругого рассеяния протонов в телесный угол  $d\Omega$  (после усреднения по спидам, см. [2]) равен:

$$d\sigma(\vartheta) = \frac{e^4}{E^2} \cos \vartheta \left( \frac{1}{\sin^4 \vartheta} + \frac{1}{\cos^4 \vartheta} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{1}{\cos^2 \vartheta} - \right. \\ \left. - \frac{\hbar v}{e^2} \frac{\sin 2\eta_0}{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta} + \frac{2\hbar v}{e^2} \sin^2 \eta_0 \right) d\Omega, \quad (8.17)$$

где  $E$  — энергия протона,  $v$  — их относительная скорость,  $e$  — элементарный заряд,  $\eta_0$  — фаза ядерного взаимодействия. Мы можем считать, что из опыта нам известно это сечение и, стало быть, известна добавка к чисто кулоновскому рассеянию, вызванная ядерным взаимодействием в  $S$ -состоянии. Эта добавка равна:

$$f(E, \vartheta) d\Omega = - \frac{e^4}{E^2} \cos \vartheta \left[ \frac{\hbar v}{e^2} \frac{\sin 2\eta_0}{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta} - \left( \frac{2\hbar v}{e^2} \right)^2 \sin^2 \eta_0 \right] d\Omega. \quad (8.18)$$

Дифференцируя  $f(E, \vartheta)$  по углу  $\vartheta$  при данной энергии получаем:

$$\frac{\partial f(E, \vartheta)}{\partial \vartheta} = -\frac{e^4}{E^2} \frac{\hbar v}{e^2} \sin 2\eta_0 \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1}{\sin^2 \vartheta \cos \vartheta} \right), \quad (8.18^*)$$

откуда и определяется фаза  $\eta_0$ .

При более высоких энергиях протонов потребуются учет более высоких фаз и задача усложнится.

Приведенные простые примеры показывают, что *волновая функция может быть измерена*.

Рассмотрим теперь подробнее характер необходимых измерений. Обратимся сначала к рассеянию частиц. Для простоты предположим, что рассеяние упругое. Непосредственно измеряемой величиной является дифференциальное сечение  $\sigma(\vartheta, k)$ , которое связано с искомой амплитудой рассеяния известным соотношением:

$$\sigma(\vartheta, k) = |A(\vartheta, k)|^2. \quad (8.19)$$

Вопрос о том, как определить отсюда саму амплитуду, только что обсуждался. Теперь мы сосредоточим наше внимание на определении самого сечения. По определению этой величины имеем:

$$dN = \sigma j \frac{dS}{r^2} = \sigma j d\Omega, \quad (8.20)$$

где  $j$  — плотность тока в падающей волне, а  $dN$  есть число частиц, рассеянных в единицу времени в элемент телесного угла  $d\Omega$ . Отсюда непосредственно следует, что для измерения сечения  $\sigma$  недостаточно наблюдения единичного акта рассеяния. Такое наблюдение ровно ничего не говорит о сечении  $\sigma(\vartheta, k)$  как функции угла рассеяния. Этот единичный акт рассеяния может быть как типичным (вероятным), так и редким (маловероятным событием). Для того чтобы получить из опыта сечение  $\sigma(\vartheta, k)$  как функцию угла рассеяния  $\vartheta$ , необходимо наблюдать большое число рассеяний и при разных углах, так, чтобы исключить статистические флуктуации. Это в сущности тривиальное обстоятельство, хорошо известное каждому экспериментатору, и о нем приходится напоминать только по той причине, что во многих курсах квантовой механики подчеркивается, что волновая функция



есть характеристика состояния *отдельной частицы*. Если это так, то, будьте любезны, укажите такое измерение на отдельной частице, скажем, на электроне, которое позволяло бы определить его «персональную» волновую функцию. Такого измерения не существует.

Это противоречие отпадает, если понимать волновую функцию как характеристику принадлежности частицы к квантовому ансамблю, т. е. если рассматривать частицу  $\mu$  вместе с макроскопической обстановкой  $M$ , диктующей ей условия движения.

Обратимся теперь к измерению волновой функции в случае связанного состояния. Здесь мы встретимся с рядом обстоятельств, заслуживающих внимания.

В ранее рассмотренном опыте по определению асимптотического поведения волновой функции при упругом рассеянии частиц число рассеянных частиц измерялось непосредственно тем или иным макроскопическим прибором, например счетчиком Гейгера

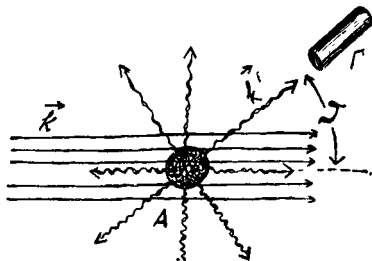


Рис. 6. Первичная волна  $k$  рассеивается на микросистеме  $A$ , рассеянная волна  $k'$  показана волнистыми линиями.  $\Gamma$  — счетчик частиц, рассеянных на угол  $\varphi$ .

(рис. 6), что в данном случае вполне возможно, так как речь идет о наблюдении свободных рассеянных частиц вдали от центра рассеяния, от того места, где варится вся кухня микроскопических процессов. Такое измерение мы будем называть *прямым измерением*. В случае связанного состояния положение дел принципиально иное: волновая функция в этом случае сосредоточена в микроскопических масштабах и

внутри этих масштабов нельзя втиснуть какой-либо макроскопический измерительный прибор. Поэтому для измерения волновой функции в этом случае необходимо найти путь для *косвенного измерения* [3] этой функции посредством взаимодействия изучаемой системы с другой, которая допускает прямое измерение. Такой системой может служить свободная частица, рассеивающаяся на изучаемой системе.

Таким образом, эксперимент по косвенному измерению волновой функции связанного состояния (а прямого измерения здесь не существует) сводится к ранее рассмотренному эксперименту по рассеянию свободной частицы. Следует ли еще раз подчеркивать, что никакое единичное измерение не способно дать нам хоть какую-нибудь информацию об искомой волновой функции связанного состояния. Как первый шаг по пути этого косвенного измерения, мы должны найти поперечное сечение рассеянной частицы, которая служит нам зондом, с помощью которого изучается внутренность атомной системы. Для этого необходимо набрать, как говорят экспериментаторы, «хорошую» статистику, т. е. сделать большое число наблюдений акта рассеяния пробной частицы на изучаемой атомной системе.

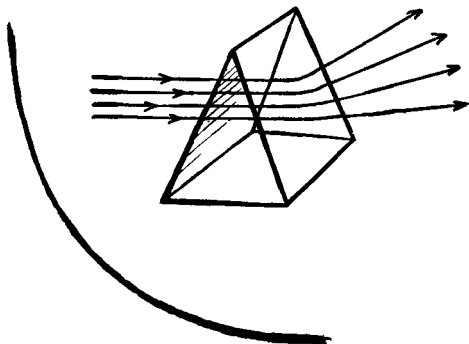
Из прямых измерений числа рассеянных пробных частиц мы определим дифференциальное поперечное сечение для этого рассеяния: чтобы теперь сделать заключения о волновой функции изучаемой системы, необходимо восстановить амплитуду рассеяния  $A(\vartheta, k)$ .

Мы знаем из приведенных выше обсуждений, что эта задача далеко не всегда допускает однозначное решение. Допустим, что нам все же удалось найти амплитуду рассеяния зондирующей частицы. Тогда вся информация об изучаемой атомной системе содержится в бесконечном наборе фаз:  $\eta_0(k), \eta_1(k), \dots, \eta_l(k)$ , которые являются функциями энергии относительного движения зондирующей частицы и изучаемой системы. Но и в этом весьма оптимистическом случае возникает сложная математическая задача восстановления структуры изучаемого объекта по его оптическому изображению, которое теперь считается заданным посредством амплитуды  $A(\vartheta, k)$ . (Напомним,

что в исходных экспериментальных данных оно задано распределением интенсивностей рассеянных частиц по углам или, что эквивалентно, дифференциальным сечением.) Однако мы хотели бы подчеркнуть, что как бы ни была сложна математическая задача восстановления структуры объекта, она оказывается разрешимой, по крайней мере в некоторых случаях, и тем самым доказывается, что путь *косвенного измерения в принципе проходим*.

Ввиду того что связанное состояние есть состояние изолированной микросистемы, нам будет удобнее в дальнейшем говорить об изучении структуры атомной микросистемы (мы уже употребили эту терминологию), так как в общем случае изучается не только волновая функция системы, но и характер ее взаимодействия с зондирующей частицей. Восстановление структуры микросистемы по ее изображению будет рассмотрено в следующем параграфе.

---



## § 9. ВОССТАНОВЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ МИКРООБЪЕКТА ПО РАССЕЯНИЮ ЧАСТИЦ

В основу обсуждения проблемы восстановления структуры микрообъекта мы положим уравнение Шредингера для зондирующей частицы. Пусть  $m$  — приведенная масса этой частицы (напомним, что если  $\mu$  есть масса рассеиваемой частицы, а  $M$  — масса рассеивателя, то приведенная масса находится из равенства  $\frac{1}{m} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{M}$ ); пусть, далее,  $x$  есть относительная координата рассеиваемой частицы и центра тяжести изучаемой системы. Тогда уравнение Шредингера для волновой функции относительного движения  $\psi(x)$  (общее движение центра тяжести не представляет интереса) гласит:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x), \quad (9.1)$$

где  $V(x)$  есть функция, описывающая взаимодействие изучаемой микросистемы и зондирующей частицы, а  $E$  — энергия зондирующей частицы. Соответственно поставленной задаче волновая функция должна иметь вид:

$$\psi(x) = e^{ikz} + u(x), \quad (9.2)$$

где  $e^{ikhz}$  — первичная плоская волна, а  $u(x)$  — рассеянная волна. Эта волна для больших расстояний  $r = |x| \rightarrow \infty$  имеет вид:

$$u(x)_{r \rightarrow \infty} = \frac{e^{ikr}}{r} A(k, \vartheta); \quad (9.3)$$

здесь  $A(k, \vartheta)$  есть амплитуда этой волны, которая по формуле (8.19) определяет дифференциальное сечение рассеяния, т. е. наблюдаемую на опыте величину.

Под восстановлением структуры объекта мы будем понимать определение из данных по рассеянию зондирующей частицы функции взаимодействия  $V(x)$ . Терминология «структура объекта» имеет оптическое происхождение. Если мы перепишем уравнение (9.1) в виде:

$$\nabla^2 \psi(x) + k^2 n^2(x) \psi(x) = 0, \quad n^2(x) = \frac{E - V(x)}{E}, \quad (9.4)$$

то величину  $n^2(x)$  можно рассматривать как показатель преломления рассеивающей среды, которую образует наша микросистема.

Рассмотрим случай, когда рассеяние невелико, так что первичная волна мало искажается внутри области, где происходит рассеяние. В этом особо простом случае применимо так называемое борновское приближение, суть которого состоит в замене в произведении  $V(x)\psi(x)$  функции  $\psi(x)$  на первичную, не искаженную рассеиванием волну  $\psi_0(x) = e^{ikhz}$ . Это позволяет переписать уравнение (9.2) в форме уравнения с заданной правой частью:

$$\nabla^2 u + k^2 u = \frac{2m}{\hbar^2} V(x) \psi_0(x). \quad (9.5)$$

Уравнение для функции Грина уравнения (9.5) имеет вид:

$$\nabla^2 \mathfrak{G} + k^2 \mathfrak{G} = -\delta(x - x'), \quad (9.6)$$

а его решение для расходящихся волн может быть записано в форме:

$$\mathfrak{G} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|}. \quad (9.7)$$

Поэтому решением неоднородного уравнения (9.5) будет

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int V(x') \psi_0(x') \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|} d^3x', \quad (9.8)$$

и при  $|x-x'| \rightarrow \infty$  получаем:

$$u(x) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \frac{2m}{\hbar^2} \int V(x') e^{iqx'} d^3x', \quad (9.9)$$

где  $q = k' - k$  есть изменение волнового вектора при рассеянии. Заметим, что  $|q| = 2k \sin \frac{\theta}{2}$ , где  $\theta$  есть угол рассеяния между направлением первичной волны и направлением рассеянного луча (см. рис. 6). Сравнение с (9.3) показывает, что амплитуда рассеянной волны равна:

$$A(k, \theta) = A(q) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int V(x) e^{iqx} d^3x. \quad (9.10)$$

Отсюда видно, что в борновском приближении амплитуда рассеянной волны попросту равна компоненте Фурье от функции взаимодействия  $V(x)$ .

Обратимся теперь к восстановлению этой функции по данной амплитуде рассеяния  $A(q)$ . Амплитуду представим в виде:  $A(q) = a(q) e^{i\alpha(q)}$ , где  $a(q) = |A(q)|$ , а  $\alpha(q)$  есть ее фаза; далее, отметим, что функцию  $V(x)$  мы считаем действительной (отсутствие поглощения, только упругое рассеяние). Тогда чисто формально из Фурье-обращения имеем:

$$V(x) = -\frac{8\pi m}{\hbar^2} \int A(q) e^{iqx} d^3q, \quad (9.11)$$

где интеграл по передаваемому импульсу взят в бесконечных пределах.

Первое ограничение в отношении знания функции  $V(x)$  вытекает из того обстоятельства, что из измерений при энергии зондирующей частицы, не превышающей  $E$ , мы знаем амплитуду  $A(q)$  только для  $q < 2k$ , где  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ , и поэтому вместо (9.11) мы обязаны написать другой интеграл, распространенный в пределах  $|q| < 2k$ . При этом мы получим вместо истинной функции  $V(x)$  только не вполне точно определенный ее образ  $\bar{V}(x)$ :

$$\bar{V}(x) = \int_{q < 2k} A(q) e^{iqx} d^3q. \quad (9.12)$$

Это обстоятельство выражает тот факт, что нельзя видеть деталей объекта, размер которых  $a$  меньше применяемой для «освещения» объекта длины волны  $\lambda$ .

Второе ограничение связано с невозможностью определить фазу амплитуды  $\alpha(q)$ . Из формулы обращения (9.12) видно, что эта фаза счастливым образом равна нулю для того случая, когда функция взаимодействия симметрична относительно преобразования инверсии  $x \rightarrow -x$ . Если это взаимодействие содержит еще и несимметричную относительно этого преобразования часть, то фаза  $\alpha(q)$  не равна нулю и определить функцию  $V(x)$ , зная лишь дифференциальное сечение рассеяния, однозначным образом невозможно. Поэтому успех формулы обращения (9.12) существенно зависит от предположений о характере симметрии взаимодействия, которые можно высказать *до измерения*.

Обратимся теперь к связи этого восстановления структуры микрообъекта с проблемой измерения волновой функции связанного состояния. Предположим, что изучаемый микрообъект есть тяжелый ион, или атом с одним электроном. Волновую функцию этого электрона, движущегося внутри атома, обозначим через  $\varphi_0(x)$ . Тогда средняя плотность электрического заряда, создаваемая этим электроном в точке  $x$  ( $x$  есть координата электрона по отношению к ядру атома или иона) будет равна  $e\rho(x) = e|\varphi_0(x)|^2$ ; если заряд ядра есть  $+eZ$ , то потенциальная энергия второго электрона, используемого в качестве зондирующей частицы, в поле ядра атома и атомного электрона, очевидно, будет равна:

$$V(x) = -\frac{e^2Z}{r} + e^2 \int \frac{|\varphi_0(x')|^2}{|x-x'|} d^3x'. \quad (9.13)$$

Ее фурье-образ имеет вид:

$$\tilde{V}(q) = -\frac{4\pi e^2Z}{q^2} + \frac{4\pi e^2}{q^2} \tilde{\rho}(q), \quad (9.14)$$

где  $\tilde{\rho}(q)$  есть фурье-образ от величины  $\rho(x)$ .

Если  $\rho(x)$  четно относительно инверсии  $x \rightarrow -x$ , то согласно изложенному выше мы можем определить приближительный образ величины  $\bar{\rho}(x)$ :

$$\bar{\rho}(x) = \int_{q < 2k} \rho(q) e^{iqx} d^3q. \quad (9.15)$$

Если далее известно, что из соображений симметрии волновая функция  $\varphi_0(x)$  является действительной функцией, то мы получаем для приближенного образа этой функции:

$$\bar{\varphi}_0(x) = \sqrt{\bar{\rho}(x)}. \quad (9.16)$$

Таким образом, мы видим, что и в случае связанного состояния волновая функция в принципе измерима, по крайней мере в некоторых простейших случаях, когда косвенное измерение может быть расшифровано однозначным образом. Заметим, что при всех обстоятельствах в качестве первого шага необходимо получить дифференциальное сечение упругого рассеяния зондирующих изучаемую систему частиц, т. е. необходимо набрать «хорошую» статистику актов рассеяния, а значит много раз воспроизвести рассеяние электрона на атоме, находящемся в заданном исходном состоянии. На первый взгляд может показаться, что в такой серии опытов, повторяющих акт рассеяния, по крайней мере в принципе, можно обойтись одним и тем же атомом в качестве объекта, на котором производится рассеяние зондирующих атом частиц. Однако это не так: суть дела заключается в том, что для изучения структуры объекта, размеры которого имеют порядок  $a$ , необходимо иметь зондирующий пучок с длиной волны  $\lambda = \frac{1}{k} \ll a$ . Энергия связи частицы, заключенной в изучаемом объекте, будет порядка  $I \cong \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ , т. е. эта энергия меньше, чем кинетическая энергия зондирующей частицы  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \gg I$ . Поэтому в потоке зондирующих частиц атом будет ионизироваться и его необходимо обновлять. Это рассуждение нуждается в уточнении для того случая, когда массы частицы (зондирующей  $m$  и внутриатомной  $\mu$ ) различны. Если  $m < \mu$ , то прежнее условие  $E \gg I$  остается в силе; если же  $m > \mu$ , то надо учесть, что борновское приближение становится непригодным при  $v < v_0$ , где  $v$  — скорость зондирующей частицы, а  $v_0$  — скорость частицы внутри изучаемой



системы, например скорость электрона в атоме. По порядку величины имеем  $v_0 \sim h/a\mu$ , откуда вместо  $E > I$  находим  $E > \frac{m}{\mu} I$ . Таким образом, кинетическая энергия зондирующих частиц  $E$  превосходит энергию ионизации атома  $I$  и в процессе облучения атом будет ионизоваться. Если это перевести на язык фотографа, то можно было бы сказать, что атом очень беспокойный клиент для получения хорошего портрета: в процессе экспозиции его лицо меняется самым неузнаваемым образом.

Количественно это положение может быть описано следующим образом: пусть  $\sigma_0$  — сечение упругих столкновений, а  $\sigma_i$  — сечение неупругих столкновений; тогда отношение числа неупругих рассеяний  $N_i$  к числу упругих  $N_0$  будет равно  $Q_i/Q_0$ . Для получения хорошей «фотографии» атома необходимо, чтобы  $N_i \ll N_0$ . Однако это условие не может быть выполнено, так как условие  $E \gg I$  означает, что электрон, находящийся внутри атома, по отношению к зондирующей частице может рассматриваться как почти свободный, так как его энергия связи  $I$  мала по сравнению с кинетической энергией зондирующей частицы. При этом условии сечение неупругих процессов  $\sigma_i$  превосходит сечение упругих процессов  $\sigma_0$ ; именно при  $E \gg I$  имеем [1]:

$$\sigma_i = 2\pi a^2 I \lg \frac{E^3}{2I^2 m}, \quad (9.17)$$

$$\sigma_0 = \frac{7\pi}{3} a^2 \frac{I}{E},$$

так что при  $E \gg I$

$$\frac{N_0}{N_i} = \frac{\sigma_0}{\sigma_i} \rightarrow 0.$$

Поэтому невозможно получить четкое изображение атома, если облучать *один и тот же атом*. Отсюда ясно, что нельзя также и восстановить волновую функцию электрона в атоме, если зондировать *один и тот же атом*, когда, как мы видим, нет гарантий в том, что в процессе измерения атом не будет ионизован.

Заметим, что это не означает, что в принципе невозможно обнаружить отдельный атом, скажем, на предметном столике электронного микроскопа.

Если поставить более скромную задачу — ограничиться констатированием факта наличия атома на «столике», не считаясь с возможными изменениями атома при неупругих процессах, то по крайней мере для достаточно тяжелых атомов можно получить тысячи рассеяний без того, чтобы выбить атом из той позиции, где он был первоначально закреплен (абсорбирован) [2].

---



## § 10. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Обычная постановка задачи в квантовой механике сводится к отысканию собственных волновых функций  $\psi(x, E)$  и собственных значений  $E$  оператора Гамильтона  $\mathcal{H}(x)$ , который предполагается известным — это *прямая задача*. Однако можно представить себе другую постановку задачи, когда имеются определенные экспериментальные данные о спектре энергетических состояний системы  $E$  и ее собственных функциях  $\psi(x, E)$  и желательно найти гамильтониан системы  $\mathcal{H}(x)$ . Мы видели, как решается эта задача в случае возможности применения борновского приближения. Такую задачу мы будем называть *обратной*. В последние годы в ряде математических работ [1—4] был найден метод решения этой задачи, который не предполагает использования малости взаимодействия, как это необходимо для применения метода Борна (см. § 9).

Для того, чтобы иллюстрировать этот метод, будем рассматривать задачу рассеяния в  $s$ -состоянии для системы, обладающей гамильтонианом:

$$\mathcal{H}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(r). \quad (10.1)$$

Обозначая волновое число через  $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$  и полагая  $\frac{2m}{\hbar^2} U(r) = V(r)$ , получим уравнение Шредингера для  $s$ -волны  $\varphi(r, k)$ :

$$-\frac{d^2\varphi}{dr^2} + V(r)\varphi = k^2\varphi \quad (10.2)$$

с граничными условиями

$$\varphi(0, k) = 0, \quad \frac{d\varphi(0, k)}{dr} = k. \quad (10.3)$$

Предположим также, что  $\int_0^\infty r |V(r)| dr < M$  (сходимость интеграла).

При  $r \rightarrow \infty$   $\varphi(r, k)$  имеет вид:

$$\varphi(r, k) = A(k) \sin[kr + \delta(k)], \quad (10.4)$$

где  $A(k)$  — амплитуда, а  $\delta(k)$  — фаза рассеянной волны.

Фаза  $\delta(k)$  есть наблюдаемая величина, так как полное сечение  $\sigma$  для упругого  $s$ -рассеяния равно

$$\sigma(k) = \frac{\pi}{k^2} \sin^2 \delta(k). \quad (10.5)$$

Что же касается амплитуды  $A(k)$ , то она может быть найдена из дисперсионного соотношения \*):

$$\lg A(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(k') dk'}{(k' - k)}. \quad (10.6)$$

Это дисперсионное соотношение легко выводится, если вместо решения  $\varphi(r, k)$  с асимптотическим поведением (10.4) рассмотреть решение, которое при  $r \rightarrow \infty$  имеет вид:

$$u(r, k) = \frac{A(k)}{2i} e^{i[kr + \delta(k)]} \quad (10.4^*)$$

---

\*) Здесь мы предположили ради простоты, что в рассматриваемой системе нет связанных состояний. Если такие состояния имеются, то соотношение (10.6) выглядит несколько сложнее (см., например, [2, 4]).

и граничные условия

$$u(0, k) = \frac{1}{2i}, \quad u'(0, k) = \frac{k}{2}. \quad (10.3^*)$$

Тогда имеем для величины

$$f(k) = \frac{2i}{A(k)} e^{-i\delta(k)} u(0, k), \quad S(k) = e^{2i\delta(k)} = \frac{f^*(k)}{f(k)}, \quad (10.7)$$

где  $S(k)$  — матрица рассеяния для  $s$ -волны.

Из (10.7) следует, что

$$\text{Im} \lg f(k) = 2\delta(k), \quad (10.8)$$

и так как  $f(k)$  есть аналитическая функция (в случае отсутствия связанных состояний) для  $\text{Im} k > 0$  и  $\text{Re} \lg f(k) = -A(k)$ , то на основании (10.8) путем применения теоремы Коши к контуру, состоящему из бесконечно большого полукруга и действительной оси, с обходом точки  $k$  получаем соотношение (10.6).

Решение уравнения (10.2), удовлетворяющее условиям (10.3), может быть представлено в виде:

$$\varphi(r, k) = \sin kr + \int_0^r K(r, t) \sin kt \cdot dt, \quad (10.9)$$

где ядро  $K(r, t)$  при  $0 \leq t \leq r$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 K(r, t)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 K(r, t)}{\partial t^2} = V(r) K(r, t) \quad (10.10)$$

с условиями

$$K(r, 0) = 0, \quad K(r, r) = \frac{1}{2} \int_0^r V(z) dz, \quad (10.11)$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой (10.9) в (10.2). В силу условий (10.11) потенциал  $V(r)$  может быть исключен из уравнения (10.10):

$$V(r) = 2 \frac{dK(r, r)}{dr}. \quad (10.12)$$

Однако мы этого делать сейчас не будем, а выпишем решение уравнения (10.10), которое нетрудно получить

методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned}
 K(r, t) = & \\
 = & \frac{1}{2} \int_{\frac{r-t}{2}}^{\frac{r+t}{2}} V(z) dz + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{r-t}{2}}^{\frac{r+t}{2}} du_n \int_0^{\frac{r-t}{2}} dv_n V(u_n + v_n) \times \\
 \times & \int_0^{u_n} du_{n-1} \int_0^{v_n} dv_{n-1} V(u_{n-1} + v_{n-1}) \dots \int_{u_1}^{v_1} V(z) dz. \quad (10.13)
 \end{aligned}$$

Отсюда можно получить и выражение для производной  $\frac{\partial K(r, t)}{\partial r}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial K(r, t)}{\partial r} = & -\frac{\partial K(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} V\left(\frac{r+t}{2}\right) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{r-t}{2}} dv_n V\left(\frac{r+t}{2} + v_n\right) \int_0^{\frac{r+t}{2}} du_{n-1} \times \\
 \times & \int_0^{v_n} dv_{n-1} V(u_{n-1} + v_{n-1}) \dots \int_{u_1}^{v_1} V(z) dz. \quad (10.14)
 \end{aligned}$$

Далее, возьмем производную  $\frac{\partial \varphi(r, k)}{\partial r}$  из (10.9) и заменим в ней  $\frac{\partial K(r, t)}{\partial r}$  рядом (10.14).

Интегрируя по частям, находим:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi(r, k)}{\partial r} = & k \left( \cos kr + \int_0^r K(r, t) \cos kt dt \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^r V\left(\frac{r+t}{2}\right) \sin kt dt +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin kt \left[ \int_0^{\frac{r-t}{2}} dv_n V\left(\frac{r+t}{2} + v_n\right) \int_0^{\frac{r+t}{2}} du_{n-1} \times \right. \\
& \times \left. \int_0^{\frac{r-t}{2}} dv_{n-1} V(u_{n-1} + v_{n-1}) \dots \int_{u_1}^{v_1} V(z) dz \right]. \quad (10.15)
\end{aligned}$$

Образум теперь выражение

$$\left[ \frac{1}{k} \frac{\partial \varphi(r, k)}{\partial r} + i\varphi(r, k) \right] e^{-ikr} \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Из (10.15) и (10.9) можно показать после не очень сложных выкладок, что этот предел равен

$$1 + \int_0^{\infty} K_0(u) e^{-iku} du,$$

где  $K_0(u)$  есть предел  $K(r, t)$  при  $r$  и  $t \rightarrow \infty$  вдоль прямой  $r - t = u > 0$ . С другой стороны, из начальных условий (10.3) и асимптотического выражения для  $\varphi(r, k)$  (10.4) следует, что этот предел равен  $A(k) e^{i\delta(k)}$ . Таким образом,

$$1 + \int_0^{\infty} K_0(u) e^{-iku} du = A(k) e^{i\delta(k)} = \psi(k). \quad (10.16)$$

Ядро  $K(r, t)$  может быть продолжено нечетным образом по  $t$  для  $t < 0$  ( $-r \leq t \leq 0$ ), а функция  $\psi(k)$  может быть продолжена для  $k < 0$  таким образом, что  $A(k) = A(-k)$ , а  $\delta(k) = -\delta(-k)$ .

Можно доказать [2], что уравнение (10.10) с учетом соотношения (10.11) имеет единственное решение в треугольнике  $-r \leq t \leq 0$ ,  $r \geq 0$ , для которого  $K(r, t) = -K(r, -t)$  и  $K(r, t) \rightarrow K_0(u)$ , когда  $r$  и  $t \rightarrow \infty$  вдоль прямой  $u = r - t$ .

Этим самым доказывается возможность, зная  $K_0(u)$ , найти  $K(r, t)$  и, далее, по формуле (10.11) восстановить искомый потенциал  $V(r)$ .

Этот весьма изящный математический метод определения структуры объекта по изучению рассеяния

частиц в  $S$ -состоянии (или в другом состоянии с определенным моментом  $l$ ) по фазе  $\delta_l(k)$  оказался на практике не очень эффективным.

Суть дела заключается в том, что из опыта мы знаем фазу  $\delta(k)$  не во всем интервале  $0 < k < \infty$ , а только в некотором конечном интервале  $0 < k < k_{\text{макс}}$ . Между тем потенциал  $V(r)$  весьма чувствителен к поведению фазы  $\delta(k)$  при больших  $k$ . В этом обстоятельстве отражается великий закон оптики: нельзя видеть детали объекта размером  $a$ , если длина волны «света»  $\lambda$  больше  $a$ .

Для изучения формы  $V(r)$  при  $r \sim a$  необходимо, чтобы длина волны рассеиваемых частиц  $\lambda$  была бы меньше  $a$ , т. е.  $k \gg 1/a$ . Однако при больших  $k$  фаза  $\delta(k)$  (в пределах упругого рассеяния) становится малой и можно применять более простой метод Борна.

Практически при попытках определить потенциал взаимодействия нуклонов столкнулись с тем обстоятельством, что при больших  $k$  начинается рождение мезонов и вступают в силу релятивистские эффекты.

Действительно, радиус действия ядерных сил по порядку величины равен комptonовской длине мезона  $a = h/mc$  ( $m$  — масса мезона,  $c$  — скорость света). Следовательно, для изучения структуры  $V(r)$  — потенциала взаимодействия нуклонов — необходимо

$$k = \frac{1}{\lambda} \gg \frac{1}{a} = \frac{mc}{\hbar},$$

т. е. относительный импульс нуклонов  $p = \hbar k \gg mc$ . Отсюда следует, что энергия нуклонов

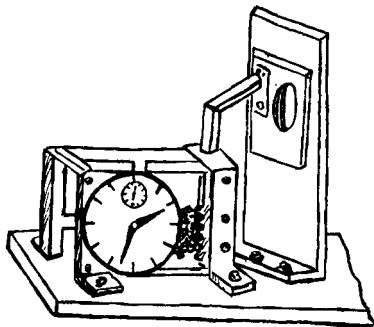
$$2E = \frac{2p^2}{M} \gg \frac{2m}{M} mc^2 \cong \frac{2}{7} mc^2,$$

а их скорость

$$v \gg \frac{mc}{M} = \frac{1}{7} c.$$

Иными словами, мы находимся у порога рождения мезонов и в области, где вступают в силу релятивистские эффекты. Ни то, ни другое не предусмотрено в излагаемой здесь нерелятивистской теории.





" Установка состоит из прибора, в котором затвор жестко соединен с солидными часами!... Н. Бор

## § 11. ПОЧЕМУ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЙ ПРИБОР ЕСТЬ МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ УСТРОЙСТВО?

Квантовая механика, подобно тому как это делается и в классической механике, приписывает микросистемам различные, характерные для них динамические переменные. Более того, в самых грубых чертах положение дел можно охарактеризовать тем, что эти динамические переменные имеют свое продолжение и в классической механике, например координата частицы, ее импульс, полная энергия и многие другие величины. Исключение составляют некоторые специфические квантовые переменные, которые либо вообще не имеют аналогов в классической теории, либо эти аналоги оказываются весьма бессодержательными. К числу подобных величин относится, например, спин частицы  $\sigma$  или ее изотопический спин  $\tau$ . Что же касается большинства динамических переменных, то они сохраняют свое значение как в классической, так и в квантовой механике, по крайней мере в том смысле, что они становятся тождественными друг другу, когда физическое явление происходит в области, где обе теории перекрываются. Формально эта область характеризуется тем, что все наблюдаемые величины

могут быть представлены в виде рядов по степеням постоянной Планка  $h$ :

$$L = L_0(p, q) + \sum_{s=1}^{\infty} h^s \cdot a_s(p, q), \quad (11.1)$$

где первый член соответствует классическому значению величины  $L$ .

В том круге явлений, где такое разложение невозможно, происходит распадение динамических переменных на *дополнительные* друг к другу: пространственно-временные  $q$  и импульсно-энергетические  $p$ . Это распадение динамических переменных на два класса дополнительных друг к другу величин является фундаментальной особенностью квантовой механики и ведет к *неустранимой статистичности* в квантовых ансамблях.

Поясним, что это значит. Суть дела заключается в том, что если мы имеем классический ансамбль, в котором есть статистический разброс какой-то механической величины, пусть это будет величина  $L$ , так что среднее квадратичное отклонение

$$\overline{\Delta L^2} = \overline{(L - \bar{L})^2} > 0 \quad (11.2)$$

(здесь черта означает среднее по ансамблю; в частности,  $\bar{L}$  есть среднее значение величины  $L$ ), то, производя измерения этой величины и отбирая экземпляры систем с одним и тем же значением  $L$ , скажем,  $L=L'$ , мы образуем из этих отобранных систем новый ансамбль, в котором  $\overline{\Delta L^2} = 0$ . При этом процесс отбора, вообще говоря, никак не влияет на состояние системы в отношении других динамических переменных, например переменной  $M$ . Следуя этому пути, мы можем образовать ансамбль, в котором для всех величин  $\overline{\Delta L^2} = 0$ ,  $\overline{\Delta M^2} = 0$ , т. е. ансамбль, в котором все динамические переменные имеют вполне определенное значение. В частности, такой ансамбль мог бы быть образован классическими системами, находящимися при температуре абсолютного нуля. В этом случае импульс системы  $p=0$ , а координата имеет значение, соответствующее минимуму потенциальной энергии  $q=q_{\text{мин}}$ , и при соответствующем выборе начала

координат можно считать, что  $q=0$ . Все остальные величины являются функциями переменных  $p$  и  $q$  и поэтому будут также иметь определенные значения, соответствующие  $p=0$  и  $q=0$ .

Ничего подобного нет в той области явлений, где господствуют законы квантовой механики. Квантовый ансамбль с определенным значением какой-либо механической величины  $L$  ( $\overline{\Delta L^2}=0$ ) никогда не может быть ансамблем, в котором все другие динамические переменные также имеют определенное значение. Если величина  $L$  изображается оператором  $\mathcal{L}$ , а некоторая другая механическая величина  $M$  изображается оператором  $\mathcal{M}$ , то на основании неравенства Шварца, справедливого для линейных и самосопряженных операторов  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{L}$  [1, 2]:

$$\overline{\Delta M^2} \overline{\Delta L^2} \geq \frac{1}{4} |\overline{C}|^2, \quad (11.3)$$

где  $C = \mathcal{M}\mathcal{L} - \mathcal{L}\mathcal{M}$  и черта сверху означает среднее по ансамблю. Это соотношение есть соотношение неопределенностей в самой общей форме. В частности, если  $M$  и  $L$  означают канонически сопряженные импульс  $p$  и координату  $q$ , так что для операторов  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$  имеем:

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} - \mathcal{Q}\mathcal{P} = ih, \quad (11.4)$$

то из (2) следует:

$$\overline{\Delta p^2} \overline{\Delta q^2} \geq \frac{1}{4} h^2, \quad (11.5)$$

т. е. соотношение неопределенностей для  $p$  и  $q$ . Из (11.3) видно, что только для величин, изображаемых коммутирующими операторами

$$\mathcal{M}\mathcal{L} - \mathcal{L}\mathcal{M} = 0, \quad (11.6)$$

квадратичные отклонения  $\overline{\Delta M^2}$  и  $\overline{\Delta L^2}$  не связаны между собой и поэтому можно выбирать экземпляры микросистем из ансамбля таким образом, что в новом ансамбле будем иметь  $\overline{\Delta M^2}=0$  и  $\overline{\Delta L^2}=0$ . В случае величин, изображаемых некоммутирующими операторами

$$\mathcal{M}\mathcal{L} - \mathcal{L}\mathcal{M} \neq 0, \quad (11.7)$$

кроме исключительных состояний ансамбля (состояний, в которых случайно  $c\psi=0$ ), нельзя получить такой ансамбль, где  $\overline{\Delta M^2}=0$  и  $\overline{\Delta L^2}=0$ . Поэтому если мы имеем ансамбль с определенным значением некоторой динамической переменной  $L$ , изображаемой оператором  $\mathcal{L}$ , то всегда найдутся такие динамические переменные  $M$ , которые изображаются оператором  $\mathcal{M}$ , не коммутирующим с оператором  $\mathcal{L}$ . Это означает, что в этом ансамбле  $\overline{\Delta M^2} \neq 0$  в соответствии с общим соотношением неопределенности (2). Попытка устранить статистический разброс величины  $M$  путем отбора экземпляров микросистем с определенным значением  $M'$  приведет к новому статистическому коллективу, в котором в силу общего соотношения неопределенностей (11.2) появится статистический разброс величины  $L$  ( $\overline{\Delta L^2}$  теперь не будет равно нулю). Статистика в квантовой области неустранима. Это обстоятельство приводит к весьма фундаментальному требованию по отношению к принципу работы всех измерительных приборов, которые претендуют на измерения в квантовом ансамбле. Дело в том, что при изучении явлений статистическими методами измерительные приборы, служащие как для фиксации самих ансамблей, так и для анализа распределений в этих ансамблях, должны сами стоять за пределами этих ансамблей: они должны быть лишены элементов случайного, свойственного исследуемому с их помощью статистическим совокупностям. Между тем любой измерительный прибор, как и любое тело, состоит из атомов, молекул и подобных микробразований, совершающих случайные, хаотические движения, которые обнаруживаются в броуновском движении. До возникновения квантовой механики предполагали, что этот хаос молекулярных движений может быть «заморожен». Теперь мы знаем, что это движение не прекращается и при абсолютном нуле, так что случайные флуктуации в положении микрочастиц остаются и в абсолютно холодном теле. Мир микрочастиц слишком оживлен и неупорядочен, чтобы какая-нибудь его часть могла бы быть использована в качестве измерительного прибора. Такой «микроприбор» постоянно подвергался бы многочисленным случайным воздей-

ствиям и сам нуждался бы в постоянном контроле. Нужно найти «островок спасения» в хаосе микромира, среди бушующего моря микроявлений. Квантовая механика находит такой «островок» в *макроскопическом приборе*.

На «выходе» всякого прибора всегда происходит макроскопическое явление: поворот стрелки счетчика, образование капелек тумана в камере Вильсона, почернение зерна в фотоэмульсии и тому подобное. Это понятие макроскопичности прибора квантовая теория отождествляет с понятием *классичности* прибора; иными словами, *измерительный прибор должен быть устроен таким образом, что для осуществления его действия, в конечном счете, используются только его классические свойства, т. е. такие свойства, в которых постоянная Планка не играет роли*. Такой прибор максимально освобожден от квантовой статистичности [3]. Поэтому будет правильным сказать, что *квантовая механика изучает микромир в его отношении к макромиру. Макроскопические (классические) приборы являются теми системами отсчета, по отношению к которым в квантовой теории определяется состояние микросистем*.

В реальности такие системы отсчета могут быть осуществлены лишь приближенно, но в этом отношении уже нет никакой разницы с классикой. Так, механик-классик сказал бы «мои выводы строго справедливы лишь применительно к измерениям абсолютно жесткими масштабами и равномерно идущими часами». Если таких нет на самом деле, то может быть найдется что-нибудь подходящее к ним так, чтобы выводы теории все же в какой-то мере соответствовали реальным ситуациям.

Теперь несколько замечаний о самом *человеке* как об измерительном приборе. Несомненно, что, обращаясь к человеку, мы вступаем на весьма шаткую почву, так как при современном состоянии наших знаний о живом нельзя с такой же степенью ясности и полноты анализировать человека, как это можно сделать применительно к какому-либо физическому прибору. Мы, например, не можем сказать в отношении живого существа, в каких случаях следует игнорировать постоянную Планка, а в каких этого нельзя

сделать. Поэтому приходится обращаться к менее точным критериям и фактам.

Важным является то обстоятельство, что органы чувств человека воспринимают микроявления сглаженно, т. е. как макроскопический процесс. Мы, например, чувствуем тепло или холод. Это ощущение вызывается микропроцессами — неупорядоченным движением молекул окружающей нас среды, но воспринимается этот процесс сглаженно: ударов отдельных молекул мы не чувствуем и за судьбой отдельных молекул следить не можем. То же можно сказать и о восприятии света. Даже в крайних условиях, которые реализуются в опытах Вавилова [4], глаз устанавливает лишь факт флюктуаций света при очень малых интенсивностях. Важно, что и в этом случае окончательный процесс внутри человека носит упорядоченный, макроскопический характер: экспериментатор делает заметку о наблюдаемой флюктуации, и в этом он не отличается от счетчика частиц, передвигающего на деление свою стрелку. Мы даже не в состоянии представить, как чувствовало бы себя воображаемое живое существо, которое было бы способно воспринимать непосредственно движение микрочастиц. Сознание такого существа должно было бы совершать нечто вроде броуновского движения. Следовало бы завидовать его способности или сожалеть о его несчастьи? Даже на этот вопрос мы не в состоянии дать уверенного ответа.

При пуске атомных реакторов при малом уровне средней мощности хаос микроявлений проявляется в неумеренно больших флюктуациях цепной реакции, которые значительно превосходят средний уровень. Это проявление атомного хаоса способно действовать на нервы участников пуска, так как может казаться, что процесс становится неуправляемым. Однако эти угрожающие флюктуации сглаживаются, когда уровень мощности становится большим.

Нельзя освободиться от ощущения, что человеческое восприятие более приспособлено к спокойному течению явлений в макромире.

Таким образом, хотя и невозможно применить к человеку простой критерий макроскопичности, которым пользуется квантовая механика, тем не менее

мы можем утверждать, что человеческое восприятие сглаживает атомистичность мира и в этом смысле является макроскопическим.

Поэтому человека с точки зрения физики следует рассматривать как макроскопический прибор, далекий к тому же от совершенства. Для изучения микромира он нуждается в расширении возможностей своих органов чувств. Такое расширение достигается с помощью различных измерительных приборов, которые дают возможность *микроявлению заговорить на языке макроявлений*. В этой связи не раз дискутировался вопрос: в какой мере такая постановка вопроса «ограничивает» познание микромира?

Мы не намерены здесь углубляться в эту сторону дела, которая скорее имеет дело с гносеологией, чем с физикой. Однако трудно удержаться от нескольких замечаний.

Критерием истинности познания является практика — это старая и хорошая сама по себе истина. Однако конкретный механизм познания может быть весьма различным у различных живых существ. В этом механизме есть и совершенно общие черты, свойственные любым существам, как бы парадоксально ни выглядело их сознание с точки зрения человека. Эти общие черты, быть может, лучше всего выразить на языке кибернетики: *сознание* (общее знание) дает команду *исполнительным органам* самого живого существа (или находящимся в его ведении машинам или аппаратам). Исполнительный орган производит *действие*: после этого действия в сознание поступает *обратный сигнал*, сообщающий сознанию *результат* действия. Этот сигнал *обратной связи* подсказывает сознанию дальнейшие действия. Познание внешнего мира строится именно на этой обратной связи, и формы ее могут быть крайне различны. Ясно, что если обратная связь работает неправильно, не «отображает действительность», то ни отдельный организм, ни целое общество, страдающее таким недостатком, не могут сколько-нибудь длительно существовать. Однако способ «отображения» может быть весьма различным. Так, например, в приборах ночного видения не воспринимаемый глазом человека инфракрасный свет преобразуется в свет видимый; цвет предмета может

быть передан как световым сигналом (фотохимическое действие света на глаз), так и звуком — если с помощью фотоэлементов преобразовать свет в звук и подать его к слуховым органам.

Слепая от рождения Иоланта, будь она физиком, нашла бы способ отличить красную розу от белой.

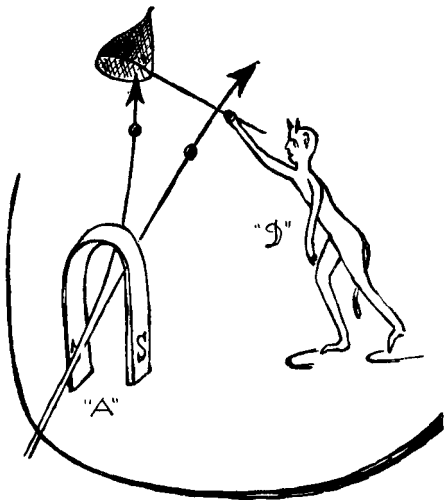
Из приведенных примеров видно, что не столь важен способ восприятия сигнала, поступающего от объекта, сколь важен *однозначный характер этого сигнала*.

С этой точки зрения мы не должны подозревать квантовую механику в неполноценности только за то, что она предлагает слушать музыку микромира на языке макроскопических явлений.

Это тем более резонно, что практика физического эксперимента и практика прикладной атомной физики показывают, что этот язык нигде не является препятствием для научного и технического прогресса. Да и может ли человек без существенного переустройства своего организма воспринимать мир иначе, чем он воспринимает его сейчас, т. е. как *существо макроскопического мира?*

---





## § 12. СХЕМА МАКРОСКОПИЧЕСКОГО ПРИБОРА

Обратимся сначала к теории. Что означает измерение с теоретической точки зрения? Допустим, что мы намерены измерить некоторую динамическую переменную  $L$ , принадлежащую микросистеме  $\mu$ . Сама эта микросистема  $\mu$  принадлежит квантовому ансамблю, определенному макрообстановкой  $M$ . Для простоты будем считать ансамбль чистым, так что состояние микросистемы будет описываться волновой функцией  $\psi_M(q)$ . Пусть динамическая переменная  $L$  изображается оператором  $\mathcal{L}$  и имеет собственные значения  $L=L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$  и соответствующие собственные функции  $\psi_1(q), \psi_2(q), \dots, \psi_n(q), \dots$ . Тогда волновую функцию  $\psi_M(q)$  можно представить в виде спектрального разложения по собственным функциям оператора  $\mathcal{L}$ :

$$\psi_M(q) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(q). \quad (12.1)$$

Напомним, что совокупность коэффициентов  $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$  следует рассматривать как волновую функцию  $\psi_M$ , взятую в  $L$ -представлении, т. е. отнесенную

к системе отсчета динамической переменной  $L$ . В этой связи мы могли бы законно применить обозначение

$$c_n = \Psi_M(L_n), \quad (12.2)$$

которое и подчеркивает в явной форме это обстоятельство. Однако мы будем пользоваться более простым обозначением  $c_n$  и используем индекс  $n$  в двойном смысле: как знак собственного значения  $L_n$  величины  $L$  и как знак, указывающий макрообстановку, которая фиксирует это значение.

Допустим, что произведено измерение и найдено, что значение динамической переменной  $L$  равно  $L_m$ . Тогда система после этого измерения будет принадлежать новому ансамблю, в котором переменная  $L$  имеет одно-единственное значение  $L_m$ , так что  $\overline{\Delta L^2} = 0$  (если ранее до измерения  $\overline{\Delta L^2} \neq 0$ ). Соответствующее состояние системы будет теперь  $\psi_m(q)$  и будет принадлежать некоторой новой макрообстановке, возникшей в результате измерения.

Сравнивая новое состояние  $\psi_m(q)$  с исходным  $\Psi_M(q)$ , мы видим, что на математическом языке теории измерение свело спектральное разложение (12.1) к одной функции  $\psi_m(q)$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(q) \rightarrow \psi_m(q). \quad (12.3)$$

Этот процесс обычно называют «стягиванием волнового пакета» или «стягиванием волновой функции». Коэффициенты спектрального разложения  $c_n$  определяют интенсивность  $|c_n|^2$ , с которой представлено в суперпозиции (12.1) частное состояние  $\psi_M(q)$ , и тем самым определяют вероятность того, что при измерении величины  $L$  будет найдено ее значение, равное  $L_m$ , или, иными словами, что при измерении динамической величины  $L$  волновая функция  $\psi_M(q)$  «стянется» к функции  $\psi_m(q)$  \*).

Такова чисто формальная сторона дела. Посмотрим теперь на примерах, как эта механика осуществляется в реальных условиях.

\*) См. любой курс квантовой механики.

## А. Анализ поляризованного пучка

Пусть мы имеем источник света  $S$  (рис. 7), коллиматор  $C$  и поляризатор  $P$ . После поляризатора мы имеем пучок поляризованного света, распространяющегося вдоль оси  $ox$ . Всю эту часть макрообстановки мы можем рассматривать как «приготовление» микросистемы, в данном примере кванта света, в определенном чистом состоянии  $\psi_M$ . Здесь  $M$  — индекс

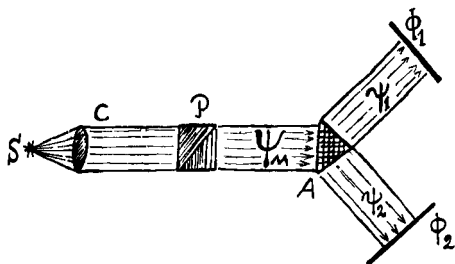


Рис. 7. Опыт с поляризованными пучками света.  $C$  — коллиматор,  $P$  — поляризатор — это «приготавливающая» часть макрообстановки. Возникает ансамбль  $\psi_M$ .  $A$  — анализатор, разделяющий  $\psi_M$  на два пучка:  $\psi_1$  и  $\psi_2$ ;  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — детекторы фотонов. Итак  $S + C + P = M$ ,  $A + \Phi_1 + \Phi_2$  — измерительный прибор.

макрообстановки (макрообстановка включает в себя перечисленные выше источник света, коллиматор, поляризатор, возможные диафрагмы и т. п., в частности, включает в себя и тот факт, что в области распространения пучка света нет других микро- или макротел, которые могли бы повлиять на распространение света). Состояние линейно-поляризованного света  $\psi_M$  может быть представлено в виде суперпозиции двух взаимно-перпендикулярных состояний поляризации, скажем,  $\psi_1$  и  $\psi_2$  [1]:

$$\psi_M = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \quad (12.4)$$

(как известно,  $c_1 = \cos \vartheta$ ,  $c_2 = \sin \vartheta$ , где  $\vartheta$  есть угол между направлением поляризации пучка  $M$  и направлением поляризации в состоянии 1. Чтобы осуществить на практике спектральное разложение (12.3),

мы поставим вдали от поляризатора  $P$  анализатор  $A$ , который будет посылать пучки света  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , имеющие различные поляризации 1 и 2 в различных направлениях. На пути этих пучков поставим приемники света  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , которые будут регистрировать факт попадания кванта света в одно из возможных направлений  $\psi_1$  или  $\psi_2$ . Таким детектором мог бы быть, например, фотоумножитель, который способен, в принципе, зарегистрировать один фотон и произвести электронную лавину — макроскопически регистрируемый электрический импульс. В зависимости от того, в каком канале произойдет этот импульс, мы будем знать, какую поляризацию имел фотон (1 или 2). При большом числе повторных измерений числа фотонов в обоих каналах  $N_1$  и  $N_2$  согласно (12.3) будет относиться друг к другу как

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{|c_1|^2}{|c_2|^2} = \operatorname{ctg}^2 \vartheta. \quad (12.5)$$

Все описанное устройство мы и называем *измерительным прибором*. Как видно, он состоит из двух частей, которые имеют различные назначения: во-первых, это *анализатор*, который на самом деле осуществляет спектральное разложение (12.4), и *детекторы*  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , в данном случае фотоумножители. При этом видно, что для успешной работы этих детекторов необходимо, чтобы пучки света  $\psi_1$  и  $\psi_2$  были ограничены в поперечном направлении, иначе анализатор, фотоумножители  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  перепутают принадлежность кванта к тому или иному пучку.

Ясно, что все это устройство, именуемое *прибором*, на самом деле входит в макрообстановку и возможность разделения макрообстановки на часть «приготавливающую», которую мы обычно обозначаем через  $M$ , и на часть «измеряющую» — прибор, основана на пространственном удалении области « $M$ » и «области прибора  $A + \Phi_1 + \Phi_2$ ».

## В. Измерение импульса

На рис. 8 изображена схема другого опыта. Имеет источник частиц  $S$ , которые могут находиться в сфере действия внешних электромагнитных полей  $\mathcal{E}$

и диафрагм  $C$ , коллимирующие пучок частиц, покидающих область действия полей  $\mathcal{E}$ .

На выходе из диафрагм мы будем иметь пучок электронов, ограниченный в поперечных размерах и, вообще говоря, с неопределенным импульсом  $p$ . Причина этой неопределенности может быть двойкой: она

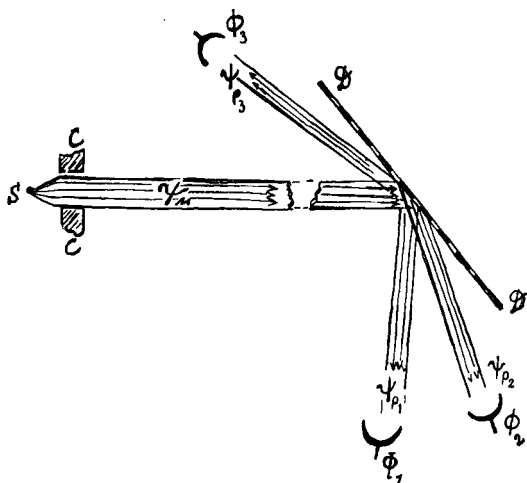


Рис. 8. Измерение импульса дифракционной решеткой  $D$ .  $S$  — источник частиц,  $C$  — диафрагма. Макрообстановка «приготавливающая» есть  $M = S + C$ . Дифракционная решетка  $D$  разлагает  $\psi_M$  в спектр  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ ;  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$  — детекторы частиц.  $ИП = D + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots$

может быть обусловлена немонохроматичностью источника для различных импульсов частиц; в этом случае мы имели бы дело со смешанным ансамблем. Будем считать, что эта причина несущественна — разброс импульсов, вызванный ею, может быть мал; другой причиной для неопределенности импульса может быть действие внешних переменных полей  $\mathcal{E}$ .

В этом случае ансамбль может быть чистым, но иметь разброс по импульсам. В дальнейшем мы будем иметь в виду именно этот случай и предположим, что этот чистый ансамбль описывается волновой

функцией  $\psi_M(x, y)$ . Эту функцию мы разложим в спектр по собственным функциям оператора импульса

$$\psi_p(x) = \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}};$$

$$\psi_M(x, y) = \sum_p a_p(y) \psi_p(x); \quad (12.6)$$

при этом, чтобы учесть ограниченность пучка в поперечном направлении, мы считаем коэффициенты  $a_p(y)$  медленными функциями координаты  $y$ , исчезающими для  $|y| \gg d/2$ , где  $d$  есть ширина пучка.

Всю только что описанную часть макрообстановки  $M$  можно рассматривать как «приготавливающую» исходный ансамбль  $\psi_M$ .

Если теперь на пути этого пучка поставить дифракционную решетку  $D$ , то она осуществит пространственное разделение пучков, имеющих различный импульс, т. е. разложит первичную волну  $\psi_M(x, y)$  в спектр.

Дифракционная решетка, разлагая в спектр первичную волну, изменяет направление первичного пучка и, в сущности, меняет исходный ансамбль, именно исходное состояние  $\psi_M(x, y)$  после установки дифракционной решетки  $D$  переходит в совокупность первичной волны  $\psi_M(x, y)$  и волн, рассеянных решеткой  $b_p(x, y)\psi_p(x, y)$  [на рисунке они изображены отдельными пучками  $\psi_{p_s}(x, y)$ ]:

$$\psi_M(x, y) \rightarrow \psi'_M(x, y) = \psi_M(x, y) + \sum_s b_s(x, y) \psi_{p_s}(x, y), \quad (12.7)$$

где сумма взята по пучкам  $\psi_{p_s}(x, y)$ , рассеянным решеткой. При этом в силу пространственного разделения пучков коэффициенты для разных значений  $p_s$  удовлетворяют соотношениям

$$b_s(x, y) b_{s'}(x, y) \cong 0. \quad (12.8)$$

Если операция разложения в спектр происходит вдали от «приготавливающей» части, то всю макрообстановку можно разделить на «приготавливающую» часть и на «прибор» — в данном случае дифракционную решетку вместе с устройством  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$  для

детектирования частиц в том или ином пучке после рассеяния на дифракционной решетке.

По факту локализации частицы в том или ином детекторе мы можем судить о ее импульсе до вмешательства дифракционной решетки, т. е., как обычно говорят, «до вмешательства прибора в состояние объекта». Детектором в рассматриваемом примере мог бы служить счетчик, в котором электрон вызывает лавину электрического разряда, т. е. производит макроявление.

Другим видом детектора могла бы быть фотопластинка. В этом случае электрон инициирует химическую реакцию в зерне фотоэмульсии и вызывает макроскопическое явление образования «скрытого» изображения.

Как видно из этого примера, дифракционная решетка, разделяя пространственно пучки с различными импульсами, разрушает интерференцию между ними, а частица, заставляя срабатывать детектор того или другого канала, рассказывает о своем прежнем (до рассеяния) импульсе. В этом заключается физическая суть «стягивания» волнового пакета: *микрочастица вмешивается в состояние макроприбора.*

### С. Определение квантового состояния атома

Рассмотрим пучок атомов, вылетающих в направлении оси  $ox$  из «черного ящика»  $S$  (рис. 9). Мы не будем входить в конкретное устройство этого ящика и отметим лишь, что ширина пучка предполагается ограниченной диафрагмой  $D$  шириной  $\Delta z_0$ , так что по оси  $oz$ , перпендикулярной оси  $ox$ , имеется неопределенность в импульсе  $p_z$ :

$$\Delta p_z > \frac{\hbar}{2 \Delta z_0}. \quad (12.9)$$

Импульс же атомов в направлении оси  $ox$  мы можем считать неограниченно точным и равным  $p_x = Mv$ , где  $M$  — масса атома, которую будем считать достаточно большой. Далее, будем считать, что внутреннее состояние атомов, покидающих «черный ящик», может быть различным и описывается волновыми функциями  $\psi_n(x)$ , где под  $(x)$  понимаются внутренние координаты

атома, например координаты его электронов. Энергия этих состояний пусть будет  $E_n$  соответственно. Если атом в этих состояниях обладает различными электрическими или магнитными моментами, то, действуя на наш пучок неоднородным электрическим или магнитным полем, мы можем разделить его на пучки, в которых атомы находятся во вполне определенных

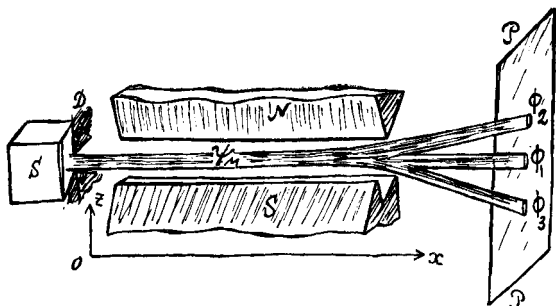


Рис. 9. Измерение внутренней энергии атома (опыт Штерна и Герлаха).  $S$  — «черный ящик»,  $D$  — диафрагма.  $M = S + D$  prepares  $\psi_M$ .  $NS$  — магнит, являющийся анализатором;  $P$  — пластинка, являющаяся детектором.  $ИП = NS + P$ ;  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  — разделенные пучки.

внутренних состояниях  $\psi_n(x)$ . Такое разделение осуществляется, например, в опытах Штерна и Герлаха по измерению магнитного момента атома (заметим, что в этих опытах фактически изменяется энергия атома во внешнем магнитном поле  $H$  (см. [2, 3]). После помещения атома во внешнее неоднородное поле его внутренняя энергия  $E_n$  станет зависеть от положения атома в пространстве:

$$E_n \rightarrow E_n(X, Y, Z), \quad (12.10)$$

где под  $(X, Y, Z)$  понимаются координаты центра тяжести атома; в частности, если имеется в виду, что в состояниях  $n$  атом обладает различным магнитным моментом  $M_n$ , то

$$E_n(X, Y, Z) = E_n - M_n H, \quad (12.11)$$

где  $M_n$  есть проекция магнитного момента атома на направление внешнего магнитного поля  $H$ , которое



является функцией координат  $|X, Y, Z|$ . Для определенности будем считать его направленным по оси  $oz$ , зависящим от  $z$ . Проекция магнитного момента атома  $\mathcal{M}_n$  равна магнетону Бора  $eh/2\mu c$ , умноженному на некоторый числовой фактор  $g$ , зависящий от структуры атома (множитель Ланде, см. [2]). Если внешнее поле невелико, то оно не изменяет внутренней структуры атома, и поэтому волновые функции  $\psi_n(x)$  в этом приближении можно считать не зависящими от положения атома в пространстве, т. е. от координат  $X, Y, Z$ . Эти функции образуют полную систему функций, так что волновую функцию всего атома в целом  $\Psi(X, Y, Z, x)$ , зависящую как от внутренних координат  $x$ , так и от координат центра тяжести атома  $X, Y, Z$ , можно разложить в ряд по функциям  $\psi_n(x)$ :

$$\Psi_M(X, Y, Z, x) = \sum_n \Psi_n(X, Y, Z) \psi_n(x). \quad (12.12)$$

Представляя состояние атомов в нашем ансамбле в виде суперпозиции состояний  $\psi_n(x)$ , мы тем самым в явной форме допускаем, что наш «черный ящик» готовит чистый ансамбль  $\Psi_M$ , но с неопределенной энергией атомов  $E_n$ , так что  $\overline{\Delta E^2} \neq 0$ . Этот «черный ящик» и есть приготовляющая часть макрообстановки  $M$ . Наш измерительный прибор будет состоять из магнита  $NS$ , создающего неоднородное магнитное поле  $H$ , направленное по оси  $oz$  и зависящее от  $z$ , и из детекторов  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ , а также, как мы увидим далее, сам атом в данном случае является частью измерительного устройства.

Волновая функция  $\Psi(X, Y, Z, x)$  должна удовлетворять уравнению Шредингера:

$$ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H} \Psi, \quad \mathcal{H}(X, Y, Z, x) = \\ = T(X, Y, Z) + \mathcal{H}_0(x, X, Y, Z), \quad (12.13)$$

где  $\mathcal{H}_0(x, X, Y, Z)$  — гамильтониан, описывающий внутреннее движение атома.

При наличии внешнего поля мы имеем:

$$\mathcal{H}_0(x, X, Y, Z) \psi_n(x) = E_n(X, Y, Z) \psi_n(x), \quad (12.14)$$

причем здесь использовано предположение, что внешнее поле не деформирует атома. [Функция  $\psi_n(x)$

осталась неизменной.] Далее,  $T(X, Y, Z)$  есть гамильтониан для движения центра тяжести атома; так как никакого другого взаимодействия атома с внешним полем, кроме того, которое вызвано наличием у атома магнитного (или электрического) момента, не предполагается, то гамильтониан  $T(X, Y, Z)$  есть попросту гамильтониан кинетической энергии всего атома в целом.

Подставляя теперь (12.12) в уравнение (12.13), умножая результат на какую-либо из функций  $\psi_m^*(x)$  и интегрируя по внутренним переменным  $(x)$ , мы получим в силу условия ортогональности этих функций

$$\int \psi_m^*(x) \psi_n(x) dx = \delta_{nm} \quad (12.15)$$

систему уравнений для функций  $\Psi_m(X, Y, Z)$ :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_m}{\partial t} = [T + E_m(X, Y, Z)] \Psi_m. \quad (12.16)$$

В этих уравнениях зависящая от координат  $X, Y, Z$  энергия атома  $E_m(X, Y, Z)$  играет роль потенциальной энергии для движения атома как целого. Ввиду макроскопического характера внешнего поля  $H$  оно меняется совсем плавно на протяжении длины волны  $\lambda = \frac{h}{Mv}$  атома, так что  $\frac{\partial H}{\partial z} \lambda \ll H$ .

Это условие и есть как раз условие применимости классической механики к движению атома как целого. Поэтому мы представим функцию  $\Psi_m(X, Y, Z)$  в виде:

$$\Psi_m(X, Y, Z) = \sqrt{\rho_m(X, Y, Z)} e^{\frac{i}{\hbar} S_m(X, Y, Z)}, \quad (12.17)$$

где  $S_m(X, Y, Z)$  — классическая функция действия, а  $\rho_m(X, Y, Z)$  — плотность атомов в пространстве  $X, Y, Z$ . Подставляя (12.17) в уравнение Шредингера (12.16) и пренебрегая высшими степенями постоянной Планка  $\hbar$ , после отделения мнимой части от действительной получим:

$$\frac{\partial S_m}{\partial t} = \frac{1}{2M} (\nabla S_m)^2 + E_m(X, Y, Z) S_m, \quad (12.18)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} - \frac{1}{M} (\rho_m \nabla S_m) = 0. \quad (12.18^*)$$

Первое из этих уравнений есть уравнение Гамильтона — Якоби для функции действия  $S_m$ , а второе — уравнение непрерывности для плотности  $\rho_m$  атомов в  $m$ -м пучке. Отношение  $-\frac{1}{M} \nabla S_m$  есть не что иное, как скорость атомов  $v_m$  пучка; поэтому уравнение (12.18\*) утверждает, что частицы будут двигаться так, что их поток через любое сечение трубки, образованной траекториями частиц, будет постоянен. Нам нет необходимости решать эти уравнения. Проще, имея в виду классический характер движения, воспользоваться прямо уравнениями Ньютона:

$$M \frac{d^2 X_m}{dt^2} = 0, \quad M \frac{d^2 Y_m}{dt^2} = 0, \quad M \frac{d^2 Z_m}{dt^2} = -\frac{\partial E_m}{\partial Z}. \quad (12.19)$$

Из этих уравнений находим:

$$X_m = vt + X_0, \quad Y_m = Y_0, \quad Z_m = \frac{1}{2M} \frac{\partial E_m}{\partial Z} t^2 + Z_0, \quad (12.19^*)$$

где  $X_0, Y_0, Z_0$  суть начальные значения координат  $X, Y, Z$ , а  $v$  — скорость атома вдоль оси  $ox$ . Напомним, что наше решение приближенно. В действительности атомы, проходящие диафрагму  $D$ , не будут двигаться по классическим траекториям; пучок будет расплзаться. Чтобы учесть это квантовое явление, следует сделать еще один шаг в приближенном решении уравнения (12.16), учтя члены, содержащие первые степени  $\hbar$ . Мы не будем этого делать и ограничимся оценками. В силу соотношения неопределенностей (12.9) ширина пучка в направлении  $oz$  будет возрастать. Именно, из соотношения (12.9) следует, что  $v_z > \frac{\hbar}{2M \Delta Z_0}$ , стало быть,  $\Delta Z_t = v_z t > \frac{\hbar}{2M \Delta Z_0} t$ . Для того чтобы пучки, принадлежащие разным внутренним состояниям  $n$  и  $m$ , разделились, необходимо, чтобы

$$\left| \frac{\partial E_m}{\partial Z} - \frac{\partial E_n}{\partial Z} \right| \frac{t^2}{2M} > \frac{\hbar t}{2M \Delta Z_0},$$

или

$$\left| \frac{\partial E_m}{\partial Z} - \frac{\partial E_n}{\partial Z} \right| \Delta Z_0 t > \hbar. \quad (12.20)$$

В силу слабой зависимости  $E_n$  от  $z$  можно написать

$$|E_n - E_m| t > \hbar, \quad (12.21)$$

т. е. возникает известное соотношение между энергией измеряемого состояния  $E$  и длительностью измерения  $t$ . Это соотношение не следует смешивать с соотношением неопределенностей для  $p$  и  $q$  [4].

Обратимся теперь к работе детекторов  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ , стоящих на пути пучков.

Для дальнейшего нам будет удобнее считать, что функции, описывающие движение центра тяжести атома  $\Psi_n(X, Y, Z)$ , также нормированы на 1 во всем пространстве  $X, Y, Z$ ; для этого достаточно положить  $\Psi_n(X, Y, Z) = c_n \Phi_n(X, Y, Z)$ ; тогда суперпозиция (12.12) переписывается в виде:

$$\Psi_n(X, Y, Z, x) = \sum_n c_n \Phi_n(X, Y, Z) \psi_n(x). \quad (12.22)$$

Отсюда следует, что вероятность того, что атом находится в окрестности точки  $X, Y, Z$  будет равна:

$$\begin{aligned} W(X, Y, Z) dX dY dZ &= \int |\Psi_M(X, Y, Z, x)|^2 dx = \\ &= \sum_n |c_n|^2 |\Phi_n(X, Y, Z)|^2 dX dY dZ. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Найдем теперь вероятность того, что атом принадлежит пучку  $m$ . Это эквивалентно тому, что он имеет энергию  $E_m$ . Согласно (12.23) эта вероятность равна интегралу от  $W(X, Y, Z)$ , распространенному по объему  $V_m$  пучка  $m$ ; если пучки для разных  $m$  не перекрываются друг с другом [что возможно при выполнении условия (12.21)], то этот интеграл равен:

$$W_m = \sum_n |c_n|^2 \int_{V_m} |\Phi_n(X, Y, Z)|^2 dX dY dZ = |c_m|^2 \quad (12.24)$$

в полном соответствии с интерпретацией коэффициентов  $c_m$ , как указывающих относительное участие состояний  $\psi_m$  с определенной энергией в исходном ансамбле  $\Psi_M$  (12.22).

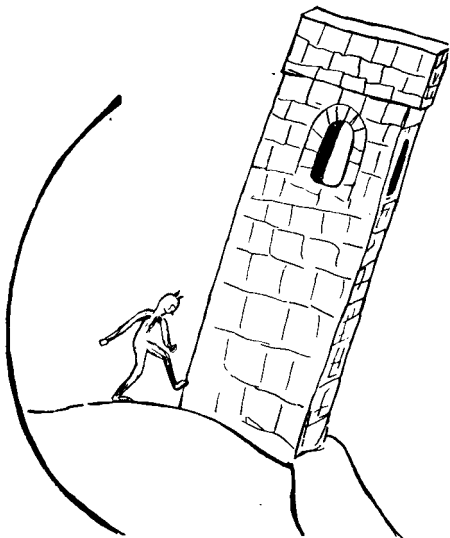
Обратимся теперь к детекторам, которые регистрируют факт принадлежности атома тому или иному пучку. Таким детектором могут служить холодные пластинки, поставленные на пути пучков (на рис. 9 пластинки  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ ). Атом, попадая на такую

пластинку, будет отдавать ей всю энергию и абсорбироваться на ней.

Было бы нетрудно показать, что поток атомов на пластинку в каждом пучке пропорционален вероятности  $W_m$ . Поэтому, определяя концентрацию налета и атомов на пластинке, мы можем определить величину  $|c_m|^2$ . «Классичность» прибора, его макроскопичность определяются в нашем примере не только уже отмеченной макроскопичностью полей, отклоняющих атомы, но и классическим характером движения центра тяжести самого атома. В этом любопытном примере сам атом используется как часть макроскопических устройств, направленных на выяснение внутреннего состояния атома. Атом, будучи относительно тяжелой системой, не обнаруживает существенных дифракционных эффектов, движется почти по классической траектории и прилипает в хорошо определенном месте «холодной» пластинки. Поэтому само прилипание атома в нашем примере есть уже макроскопическое явление, хотя быть может и не очень большого масштаба.

Итак, в этом примере мы снова обнаруживаем отмеченные ранее характерные черты процесса измерения: с помощью макроскопических полей и макроскопического движения центра тяжести атома разрушается интерференция различных состояний  $\psi_n(x)$ , образующих исходный квантовый ансамбль  $\Psi_M(X, Y, Z, x)$ . Прилипание тяжелого атома в определенном месте пластинки служит основанием для «стягивания» исходной волновой функции  $\Psi_M$  (12.22) к одному из частных состояний  $\psi_n(x)$ :  $\Psi_M \rightarrow \psi_n$ .

---



### § 13. ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЯ

Сущность измерительного прибора (ИП) может быть выражена лаконичной формулой

$$\text{ИП} = A + D,$$

где  $A$  означает *анализатор*, а  $D$  — *детектор*.

В предыдущем мы ограничились в основном теорией анализатора и оставили в тени описание детектора. В частности, мы подробно описали действие неоднородного магнитного поля на движение атома, который в приведенном примере (см. § 12) служил тем классическим механизмом, с помощью которого и осуществлялось спектральное разложение исходного ансамбля. Мы не излагали подробно математическую теорию дифракционной решетки, которая использовалась для спектрального разложения ансамбля по волнам с определенным импульсом  $p$ , по той простой причине, что эта теория хорошо известна и в основном сводится к теории брегговских отражений. По этой же причине мы не входили в математическую теорию действия поляризатора света, использованного в примере разложения световых волн на пространственно разделенные поляризованные пучки. Это тем более

было бы неуместно, что приведенный пример, строго говоря, относится скорее к теории электромагнитного поля, чем собственно к квантовой механике.

Однако мы уклонились от математического описания работы детектора по совершенно противоположным причинам: механика работы детектора, вообще говоря, весьма сложна и ее целесообразно рассмотреть отдельно, что мы и намерены сделать в этом разделе. Эта сложность, вероятно, является причиной того, что в курсах квантовой механики обычно не излагают теории детектора. Этот существенный пробел является источником многих недоразумений и неправильных представлений.

Итак, обратимся к математической теории измерения. Вся макрообстановка  $\mathfrak{M}$  может быть представлена в виде условной суммы ее частей:

$$\mathfrak{M} = M + A + D,$$

здесь  $M$  — та часть макрообстановки, которая диктует состояние исходного ансамбля; чтобы не усложнять изложение, мы будем считать, что исходный ансамбль возникает в чистом состоянии, описываемом волновой функцией  $\Psi_M(x)$  [здесь  $(x)$  означает совокупность динамических переменных изучаемой микросистемы  $\mu$ ].  $A$  означает ту часть макрообстановки, которая выполняет роль анализатора, осуществляющего спектральное разложение  $\Psi_M(x)$  по чистым состояниям измеряемой динамической переменной — пусть это будет переменная  $L$ . Для определенности мы будем считать, что эта величина имеет дискретный спектр собственных значений  $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$  и соответствующие им чистые состояния микросистемы  $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots$ .

Далее идет часть макрообстановки, содержащая детектор  $D$ . По самой сути детектор под действием микрочастицы изменяет свое состояние. Это изменение есть макроскопическое явление. Динамические переменные детектора, с помощью которых описываются его состояние и изменение этих состояний, обозначим через  $Q$ . Поскольку детектор является макроскопической системой (в частности, ему можно приписать температуру  $\theta$ ), то его целесообразней описывать не волновыми функциями  $\Psi(Q)$ , а матрицей плотности

$\rho_D(Q, Q')$ . В связи с этим нам удобнее и нашу микросистему  $\mu$ , взаимодействующую с детектором, также описывать не волновой функцией  $\psi_M(x)$ , а матрицей плотности  $\rho_M(x, x')$ . При наличии взаимодействия обе матрицы должны быть объединены в одну общую матрицу плотности, которая теперь зависит от времени:

$$\rho_{D+\mu} = \rho_{D+\mu}(Q, x; Q', x', t). \quad (13.1)$$

Эта матрица плотности подчиняется уравнению движения

$$\frac{\partial \rho_{D+\mu}}{\partial t} + [\mathcal{H}, \rho_{D+\mu}] = 0, \quad (13.2)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_D(Q) + \mathcal{H}_\mu(x) + W_{D\mu}(Q, x),$$

причем здесь  $\mathcal{H}_\mu(x)$  — гамильтониан микросистемы  $\mu$ ,  $\mathcal{H}(Q)$  — гамильтониан детектора  $D$ , а  $W_{D\mu}(Q, x)$  — оператор, описывающий их взаимодействие.

Это уравнение нетрудно написать, но в интересных случаях крайне трудно решить. Достаточно вспомнить, что детекторы обычно представляют собой крайне сложные макроскопические системы: это чувствительное зерно фотоэмульсии, переохлажденный пар в камере Вильсона, электронная лавина в счетчике Гейгера и т. п.! Впоследствии мы все же приведем некоторые схематические примеры работы условных детекторов, а сейчас рассмотрим формально работу детектора на основе матрицы  $\rho_{D+\mu}$ .

Общую матрицу плотности  $\rho_{D+\mu}(Q, x; Q', x')$  можно без всяких ограничений представить в виде:

$$\rho_{D+\mu}(Q, x; Q', x') = \sum_{m,n} \psi_m^*(x) \rho_{mn}(Q; Q') \psi_n(x'), \quad (13.3)$$

где  $\psi_n(x)$  — собственные функции измеряемой величины  $L$ . В общем случае эта матрица, конечно, недиагональна по переменной  $L$ .

Если наш измерительный прибор хорошо выполняет свое назначение, то при достаточно большом  $t$  возникает такая ситуация, что если динамические переменные детектора  $Q$  лежат в некотором интервале  $Q'_n < Q < Q''_n$ , то в этой области переменных  $Q$  (это, например, может быть положение стрелки макропри-



бора на определенном месте его шкалы!) все элементы матрицы при  $t \rightarrow \infty$

$$\rho_{mn}(Q, Q', t) = 0, \quad (13.3^*)$$

кроме

$$\rho_{nn}(Q, Q', t) \neq 0 \quad (13.3^{**})$$

при

$$Q'_n < Q, \quad Q' < Q''_n. \quad (13.3^{***})$$

Это условие означает, во-первых, разрушение интерференции отдельных частных состояний микросистемы  $\psi_n(x)$ , во-вторых, однозначное соответствие значения измеряемой динамической переменной  $L = L_n$  состоянию детектора  $Q$ . Изложенная теория является наиболее общей схемой измерения в квантовой механике, включающей не только микросистему, но обе части макрприбора — анализирующую и детектирующую.

Условие (13.3\*), (13.3\*\*) и (13.3\*\*\*) можно рассматривать как «техническое условие» на хороший макроскопический прибор.

### А. Определение внутреннего состояния атома

Рассмотрим теперь с учетом работы детектора пример определения состояния атома путем отклонения во внешнем поле, описанный в § 12.

Мы должны теперь пополнить нашу систему атом+электрон еще детектором, которым в данном примере являлась холодная пластинка, абсорбирующая на своей поверхности атом. Обозначим через  $q$  совокупность динамических переменных, описывающих пластинку; это, например, могут быть нормальные координаты, описывающие колебания ее атомов. Температура пластинки пусть будет  $\Theta$ . Тогда вся матрица плотности, описывающая систему атом+электрон+детектор, может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \rho(Q, x, q; Q', x', q', \Theta, t) = \\ = \sum_{m, n} \Psi_m^*(Q, t) \Psi_m^*(x) \rho_{mn}(q, q', \Theta, t) \times \\ \times \Psi_n(Q', t) \Psi_n(x'), \quad (13.4) \end{aligned}$$

где  $\Psi_n(Q, t)$  и  $\psi_n(x)$  имеют то же значение, что и в § 12: волновая функция  $\psi_n(x)$  описывает состояние

электронов в атоме, а функция  $\Psi_n(Q, t)$  — состояние движения атома в целом; наконец, матричный элемент  $\rho_{mn}(q, q', \Theta, t)$  описывает состояние детектора  $D$ .

Под действием внешнего поля пучки, описываемые функциями  $\Psi_n(Q)$ , разделятся в пространстве так, что матрица (13.4) в течение достаточно большого времени  $t$  перейдет в матрицу

$$\begin{aligned} \rho(Q, x, q; Q', x', q', \Theta, t) &= \\ &= \sum_n |\Psi_n(Q)|^2 |\Psi_n(x)|^2 \rho_{nn}(q, q', \Theta, t). \end{aligned} \quad (13.5)$$

В этой матрице функции  $\Psi_n(Q)$  имеют вид:

$$\Psi_n(Q) = e^{-\frac{(Q-Q_n)^2}{2a^2}} H\left(\frac{Q-Q_n}{a}\right), \quad (13.6)$$

описывающий состояние атома, абсорбированного на пластинке около точки  $Q=Q_n$ . Такой атом колеблется около этой точки с амплитудой, равной  $a = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_0}}$ , где  $M$  — масса атома, а  $\omega_0$  — частота его колебаний. Матричный элемент  $\rho_{nn}(q, q', \Theta, t)$  описывает возбужденное состояние решетки атомов пластинки, которое возникло в результате передачи энергии абсорбированного атома атомам пластинки. Тот факт, что функция, описывающая  $n$ -й пучок, перешла в функцию  $\Psi_n(Q)$ , означает, что «стрелка» прибора (в нашем случае тяжелый атом) заняла определенное положение на «шкале» прибора — на холодной пластинке! Действительно, в соответствии с общей теорией, развитой в предыдущем параграфе, в силу пространственного разделения пучков, при заданном значении координат атома, абсорбированного около  $Q \cong Q_n \pm a$ , все члены матрицы (13.5) равны нулю, кроме  $n$ -го.

Заметим, что для того, чтобы наш детектор был достаточно эффективным, необходимо, чтобы при каждом попадании атома из пучка на пластинку атом адсорбировался бы. Необходимым условием такой адсорбции является низкая температура пластинки  $\Theta^0$ . При этом условии система пластинка + атом пучка является нестабильной в том смысле, что

отдача энергии атома атомам пластинки ведет к ее нагреванию, т. е. к увеличению энтропии системы. Обратный же процесс маловероятен, так как сопровождался бы уменьшением энтропии пластинки.

### Б. Определение импульса микрочастицы по ее взаимодействию с макроскопическим телом

Рассмотрим теперь простой, но несколько формальный пример определения импульса  $k$  микрочастицы  $\mu$  по ее взаимодействию с макроскопическим телом [1].

С самого начала очевидно, что это тело должно находиться в неустойчивом (или в почти неустойчивом) равновесии, иначе микрочастица не сможет «сдвинуть» его с места.

В качестве такого тела мы предложим шарик массы  $M$ , координата его центра тяжести пусть будет  $Q$ ,

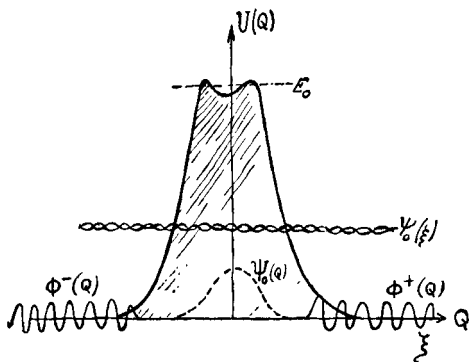


Рис. 10. Здесь изображена потенциальная энергия  $U(Q)$  тяжелого шарика  $M$ .  $E_0$  — исходное состояние. На этом же графике приведем волновые функции  $\psi_0(Q)$ ,  $\Phi^\mp(Q)$  и  $\psi_0(\xi)$ .

имеющий потенциальную энергию  $U(Q)$  вида, изображенного на рис. 10. Мы, следовательно, предполагаем, что шарик находится в максимуме потенциальной энергии  $U$ . Его относительная устойчивость обусловлена небольшим относительным минимумом энергии  $U(Q)$ . Достаточно сообщить ему незначительную

энергию  $\Delta E > U_0 - E_0$ , и шарик покатится под «откос». Таким образом, потенциальная энергия  $U(Q)$  имеет вид высокого вулкана с неглубоким кратером (см. рис. 10). Этот шарик и будет являться детектором, определяющим направление импульса микрочастицы (она может толкнуть этот шарик *направо* или *налево*).

Ввиду того что шарик, преследуя максимальную простоту, мы приписываем лишь одну степень свободы  $Q$ , нам будет удобнее описывать всю задачу не матрицей плотности, а волновыми функциями.

Предположим, что в начальный момент времени  $t=0$  микрочастица  $\mu$  описывается волновой функцией

$$\Psi_0(\xi) = A^+ e^{ik\xi} + A^- e^{-ik\xi}, \quad (13.7)$$

где  $\xi$  — координата микрочастицы,  $k$  — ее импульс. Таким образом предполагается, что имеется чистое состояние, однако с неопределенным импульсом  $\pm k$ . Задача нашего прибора заключается в определении знака импульса (направления движения частицы).

Волновую функцию макроприбора (шарика  $M$ ) при  $t=0$  обозначим через

$$\Psi_0(Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-Q^2/2a^2}, \quad (13.8)$$

где  $a = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_0}}$ ,  $\omega_0$  — частота колебаний шарика в глубине кратера. Таким образом, при  $t=0$  волновая функция всей системы (микрочастица  $\mu$  + шарик  $M$ ) будет:

$$\Phi(Q, \xi, 0) = \Phi_0(Q, \xi) = \Psi_0(Q) \psi_0(\xi). \quad (13.9)$$

Гамильтониан, описывающий эту систему, очевидно, будет:

$$\mathcal{H}(Q, \xi) = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial Q^2} + U(Q) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + W(Q, \xi), \quad (13.10)$$

где  $W(Q, \xi)$  — энергия взаимодействия шарика и микрочастицы. Микрочастицу мы считаем свободной, а шарик  $\mu$  имеет потенциальную энергию  $U(Q)$ . Для простоты предположим, что  $W(Q, \xi)$  имеет вид:

$$W(Q, \xi) = g \cdot \delta(Q - \xi) \quad (13.11)$$

и волновая функция  $\Phi(Q, \xi, t)$  для любого момента времени  $t$  подчиняется уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathcal{H}(Q, \xi) \Phi. \quad (13.12)$$

Будем искать эту функцию в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(Q, \xi, t) = \\ = \Phi_0(Q, \xi) + \Phi^+(Q, \xi, t) + \Phi^-(Q, \xi, t). \end{aligned} \quad (13.13)$$

Считая, что константа связи  $g$  мала, найдем функции  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  в первом приближении теории возмущений. В этом приближении

$$\begin{aligned} \Phi^+(Q, \xi, t) = \int U_{p'k'}^+(t) \Psi_{p'}(Q') e^{ik'\xi} e^{i(\omega_{p'} + \omega_{k'})t} dp' dk' = \\ = e^{i(\omega_0 + \omega_k)t} \int U_{p'k'}^+(t) \Psi_{p'}(Q) e^{ik'\xi} e^{-i\Omega t} dp' dk', \end{aligned} \quad (13.14)$$

$$\Omega = \omega_0 + \omega_k - \omega_{p'} - \omega_{k'} = \frac{z}{t}. \quad (13.15)$$

Здесь  $\omega_0 = E_0/\hbar$  — энергия шарика в начальном состоянии,  $\omega_{p'} = E_{p'}/\hbar$ ,  $E_{p'}$  — его энергия в конечном состоянии,  $p'$  — импульс шарика после перехода в возбужденное состояние,  $\omega_k = \mathcal{E}_k/\hbar$  и  $\omega_{k'} = \mathcal{E}_{k'}/\hbar$  — энергия частицы до взаимодействия и после взаимодействия с шариком.

Функция  $\Phi^-(Q, \xi, t)$  имеет аналогичный вид.

Далее, интегрирование уравнения (13.12) после подстановки в него функции (13.13) с учетом (13.14) дает:

$$U_{p'k'}^+(t) = \frac{1}{\hbar} \frac{(e^{i\Omega t} - 1)}{\Omega} U_{p'k', 0k}^+, \quad (13.16)$$

где матричный элемент  $U_{p'k', 0k}^+$  равен:

$$\begin{aligned} U_{p'k', 0k}^+ = gA^+ \int \Psi_{p'}^*(Q) e^{-ik'\xi} \times \\ \times \delta(Q - \xi) \Psi_0(Q) e^{+ik\xi} dQ d\xi. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Функция шарика в возбужденном состоянии  $\Psi_{p'}(Q)$  может быть записана в квазиклассическом приближении в виде

$$\Psi_{p'}(Q) \sim N_{p'} e^{\frac{i}{\hbar} S_{p'}(Q)}, \quad (13.18)$$

где  $N_{p'}$  — нормирующий множитель, а  $S_{p'}(Q)$  — функция действия, приближенно равная  $S_{p'}(Q) \cong p'Q$ . По этой причине интеграл в (13.17) равен фурье-образу  $\tilde{\Psi}_0(\alpha)$  от  $\Psi_0(Q)$  при  $\alpha = p' + k' - k$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi^+(Q, \xi, t) = & \\ = e^{i(\omega_0 + \omega_k)t} \frac{gA^+}{\hbar} \int N_{p'}^* \tilde{\Psi}_0(p' + k' - k) \frac{(1 - e^{-i\Omega t})}{\Omega} \times & \\ \times \Psi_{p'}(Q) e^{ik'\xi} dp' dk'. & \quad (13.19) \end{aligned}$$

Пусть теперь  $P$  есть то значение импульса шарика, которое отвечает сохранению энергии при взаимодействии. Из (13.15) следует, что это будет при  $\frac{z}{t} = 0$  и

$$\omega_p = \frac{E_p}{\hbar} = \omega_0 + \omega_k - \omega_{k'}, \quad E_p = \frac{P^2}{2M} + \text{const}; \quad \text{поэтому}$$

$$\frac{P'^2}{2M} - \frac{P^2}{2M} = -\frac{z}{t}. \quad (13.20)$$

Отсюда находим, что  $P' - P = -\frac{z}{vt}$ ,  $dP' = -\frac{dz}{vt}$ , где  $v = P/M$  есть скорость шарика. Далее, при  $z \cong 0$

$$\frac{k'^2}{2\mu} - \frac{k^2}{2\mu} = \omega_0 - \frac{P'^2}{2M}, \quad (13.21)$$

или

$$(k' - k)(k' + k) = 2\mu\omega_0 - \frac{\mu}{M} P'^2. \quad (13.21^*)$$

Если функция  $\Psi_0(Q)$  не слишком острая (амплитуда не очень мала, что будет при не очень глубоком кратере!), то ее образ Фурье  $\tilde{\Psi}_0(p' + k' - k)$  будет заметно отличен от нуля только при

$$p' + k' - k \cong 0. \quad (13.22)$$

Из (13.21) и (13.22) при  $M \rightarrow \infty$  следует:

$$k' = -k, \quad (13.23)$$

$$P = 2k, \quad (13.24)$$

что и следовало ожидать при столкновении легкой частицы с тяжелым, *слабо* связанным шариком: произошло упругое отражение легкой микрочастицы с малой (при  $M \rightarrow \infty$ , исчезающе малой) передачей энергии.

Обозначим теперь

$$p' + k' - k = P + k' - k - \frac{z}{vt} = q,$$

так что

$$dk' = dq, \quad k' = q - P + k + \frac{z}{vt}.$$

Вводя в интеграл (13.19) новые переменные интегрирования  $q$  и  $z$ , получим из (13.19):

$$\begin{aligned} \Phi^+(Q, \xi, t) &= \\ &= \frac{gA^+}{h} e^{i(\omega_0 + \omega_k)t} \frac{|N_p|^2}{v} \Psi_0(\xi) e^{iPQ} e^{i(k-P)\xi} I^+ \left( \frac{Q-\xi}{vt} \right), \end{aligned} \quad (13.25)$$

где

$$I^+ \left( \frac{Q-\xi}{vt} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{-lz}}{z} e^{-\frac{lz}{vt}(Q-\xi)} dz. \quad (13.26)$$

Если обозначить известный разрывный интеграл

$$J(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iaz}}{z} dz = \begin{cases} \pi i, & a > 0, \\ -\pi i, & a < 0, \end{cases} \quad (13.27)$$

то

$$I^+ \left( \frac{Q-\xi}{vt} \right) = J \left( \frac{\xi-Q}{vt} \right) - J \left( \frac{vt+\xi-Q}{vt} \right). \quad (13.28)$$

Заметим, что для  $I^+$ ,  $vt > 0$ , так как в этом случае  $P = 2k > 0$ . Поэтому из (13.28) следует, что  $I^+ = -2\pi i$  для  $vt > Q - \xi$  и  $Q - \xi > 0$ ; иначе  $I^+ = 0$ . Напомним, что ввиду наличия в  $\Phi^+$  множителя  $\Psi_0(\xi)$  важны только малые значения  $|\xi| \lesssim a$ . Поэтому полученный результат означает, что  $\Phi^+(Q, \xi, t)$  отлично от нуля при  $t \rightarrow \infty$  только в области  $0 < Q < +\infty$ , т. е. справа от вершины кратера, что соответствует полученному от микрочастицы положительному импульсу  $P = 2k$ .

Совершенно подобным же образом протекает вычисление функции  $\Phi^-(Q, \xi, t)$ . В этом случае  $P < 0$ ,  $v < 0$  и вместо множителя  $I^+$  получим множитель

$$I^- \left( \frac{Q-\xi}{vt} \right) = J \left( \frac{Q-\xi}{vt} \right) - J \left( \frac{vt+\xi-Q}{vt} \right), \quad (13.28^*)$$

отличный от нуля для  $vt < Q - \xi < 0$ . В этом случае шарик вывалится из кратера налево.

Построим теперь матрицу плотности для нашего случая:

$$\begin{aligned} \rho(Q, \xi; Q', \xi', t) &= \Phi^*(Q, \xi, t) \Phi(Q', \xi', t) = \\ &= \Phi_0^*(Q, \xi, t) \Phi_0(Q', \xi', t) + \Phi_0^*(Q, \xi, t) \Phi^+(Q', \xi', t) + \\ &+ \Phi_0^*(Q, \xi, t) \Phi^-(Q', \xi', t) + \Phi^{+*}(Q, \xi, t) \Phi_0(Q', \xi', t) + \\ &+ \Phi^{-*}(Q, \xi, t) \Phi_0(Q', \xi', t) + \Phi^{+*}(Q, \xi, t) \Phi^-(Q', \xi', t) + \\ &+ \Phi^{-*}(Q, \xi, t) \Phi^+(Q', \xi', t) + \Phi^{+*}(Q, \xi, t) \Phi^+(Q', \xi', t) + \\ &+ \Phi^{-*}(Q, \xi, t) \Phi^-(Q', \xi', t). \quad (13.29) \end{aligned}$$

При  $t \rightarrow \infty$  и  $|Q|, |Q'| > a$  все члены этой матрицы исчезают, кроме двух последних. Именно, члены, содержащие  $\Phi_0$ , исчезают при  $Q, Q' \rightarrow +\infty$  как  $e^{-Q^2/a^2}$  или  $e^{-Q'^2/a^2}$ , а интерференционные члены, содержащие произведения типа  $\Phi^{+*}\Phi^-$ , исчезают при  $t \rightarrow \infty$  из-за свойств функции  $I^\pm\left(\frac{Q-\xi}{vt}\right)$ . Поэтому при  $t \rightarrow \infty$  и для  $|Q|, |Q'| \gg a$  получаем:

$$\begin{aligned} \rho(Q, \xi; Q', \xi', t) &= \Phi^{+*}(Q, \xi, t) \Phi^+(Q', \xi', t) + \\ &+ \Phi^{-*}(Q, \xi, t) \Phi^-(Q', \xi', t), \\ t \rightarrow \infty, |Q|, |Q'| &\gg a. \quad (13.30) \end{aligned}$$

Мы видим, что макроскопический прибор разрушает интерференцию состояний микрочастицы  $A^+ e^{ik\xi}$  и  $A^- e^{-ik\xi}$ ; далее, при  $Q, Q' \rightarrow +\infty$

$$\rho(Q, \xi; Q', \xi', t) \rightarrow \Phi^{+*}(Q, \xi, t) \Phi^+(Q', \xi', t) \quad (13.31)$$

и при  $Q, Q' \rightarrow -\infty$

$$\rho(Q, \xi; Q', \xi', t) \rightarrow \Phi^{-*}(Q, \xi, t) \Phi^-(Q', \xi', t). \quad (13.31^*)$$

Эти два случая отвечают наблюдению шарика либо справа от кратера (13.31), либо слева от него (13.31\*).

При  $Q \rightarrow +\infty$  и  $Q' \rightarrow -\infty$  или  $Q \rightarrow -\infty$  и  $Q' \rightarrow +\infty$  (это случай интерференции результатов наблюдений справа и слева)  $\rho(Q, \xi; Q', \xi', t) \rightarrow 0$ . Этого



и следовало ожидать от «хорошего» прибора: его «стрелка» должна занимать одно из возможных, определенных положений. В нашем примере «стрелкой» служит тяжелый макроскопический шарик.

### В. Термодинамически неустойчивый детектор

Рассмотрим схематический прибор термодинамически неустойчивого детектора микрочастицы. В качестве микрочастицы будем иметь в виду атом, имеющий один валентный электрон, так что весь атом имеет магнитный момент, равный магнитному моменту этого электрона:  $M_B \sigma$ , где  $M_B$  — магнетон Бора, а  $\sigma$  ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ) есть спиновая матрица Паули. Волновая функция атома  $\Psi$  может быть записана в виде:

$$\Psi(Q, x) = \Psi_1(Q) \psi_1(x) + \Psi_2(Q) \psi_2(x), \quad (13.32)$$

где  $\Psi_1(Q)$  и  $\Psi_2(Q)$  суть функции, описывающие движение атома в целом;  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  — функции, описывающие внутреннее состояние атома и соответствующие двум возможным ориентациям магнитного момента атомного электрона.

Для определенности будем считать, что магнитное поле направлено по оси  $Oz$ , так что функция  $\psi_1$  отвечает ориентации момента по оси  $Oz$ , а функция  $\psi_2$  — ориентации против направления этой оси. Предположим, что под действием внешнего магнитного поля  $H$ , которое мы считаем неоднородным, пучки атомов, имеющих различную ориентацию магнитных моментов, уже разделены пространственно, так что

$$\Psi_1(Q) \Psi_2(Q) = 0, \quad (13.33)$$

как это было описано в § 12. Таким образом, будем считать, что первая функция измерительного прибора — разрушение интерференции состояний  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$ , соответствующих различным ориентациям спина валентного электрона, уже выполнена. Иными словами, после прохождения неоднородного магнитного поля нам остается только «подставить» под каждый из пучков свой детектор, который бы зарегистрировал факт попадания частицы, принадлежащей соответ-

ствующему пучку, т. е. фактически зарегистрировал бы то или иное состояние частицы («состояние» — в смысле ориентации ее спина).

В качестве такого детектора рассмотрим систему из большего числа осцилляторов  $s=1, 2, \dots, N$  ( $N \rightarrow \infty$ ), которые, чтобы не отяжелять расчет дополнительными обозначениями, будем считать двумерными, совершающими колебания в плоскости  $xu$ .

Далее, предположим, что колебания типа « $x$ » и колебания типа « $y$ » практически не взаимодействуют друг с другом. Это позволит нам приписать различную температуру  $\Theta_{\langle x \rangle}$ - и « $y$ »-колебаниям. Именно, мы будем считать, что в исходном состоянии детектора (в «исходном» — в смысле до взаимодействия с микрочастицей  $\mu$ ) « $x$ »-колебания связаны с термостатом Гиббса, имеющим температуру  $\Theta$ ; поэтому и сами « $x$ »-колебания имеют при  $t=0$  ту же температуру; что касается « $y$ »-колебаний, то мы предположим, что в момент  $t=0$  они находятся при температуре абсолютного нуля. Таким образом, детектор находится в термодинамически неустойчивом состоянии: всякое, даже небольшое, воздействие, связывающее « $x$ »- и « $y$ »-колебания, немедленно приведет к интенсивной передаче энергии от « $x$ »-колебаний к « $y$ »-колебаниям [2].

Факт нагревания « $y$ »-колебаний и есть то макроскопическое явление, которое *удостоверяет* состояние данной индивидуальной микрочастицы, в нашем примере — атома.

Рассмотрим теперь математически работу такого детектора. Гамильтониан невозмущенной системы наших осцилляторов напомним в виде:

$$H_0 = \sum_{s=1}^N H_0(x_s, y_s) - E_0, \quad (13.34)$$

$$H_0(x_s, y_s) = -\frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_s^2} \right) + \frac{M\omega_0^2}{2} (x_s^2 + y_s^2), \quad (13.35)$$

где  $E_0$  — нулевая энергия,  $E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} N$ ,  $M$  — масса осцилляторов,  $\omega_0$  — частота их собственных колебаний.

Энергию взаимодействия  $W$  этих осцилляторов с микрочастицей из пучка, падающего на детектор,

примем в виде:

$$W = \omega \sum_{s=1}^N \mathcal{M}_s \sigma_s = -i\hbar\omega \sum_{s=1}^N \sigma_z \frac{\partial}{\partial \varphi_s}, \quad (13.36)$$

где  $\mathcal{M}_s$  — механический момент осциллятора, а  $\sigma_z$  — спиновая матрица оптического электрона атома. Так как мы предположили, что спины атомов в пучке ориентированы по оси  $OZ$ , то вместо  $\mathcal{M}\sigma$  мы написали  $\mathcal{M}_z\sigma_z$ , где

$$\mathcal{M}_z = -i\hbar \left( x_s \frac{\partial}{\partial y_s} - y_s \frac{\partial}{\partial x_s} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_s},$$

и вместо  $\sigma$  просто

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

очевидно, для одного детектора нужно вместо  $\sigma_z$  взять  $+1$ , а для другого  $-1$ .

Заметим, что

$$x_s = r_s \cos \varphi_s, \quad y_s = r_s \sin \varphi_s, \quad (13.37)$$

$$r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2}. \quad (13.37^*)$$

Детектор  $D$  будем описывать матрицей плотности  $\rho$ , которую возьмем в  $x, y$ -представлении. Подразумевая под  $x$  всю совокупность  $x$ -координат осцилляторов  $(x_1, x_2, \dots, x_s, \dots, x_N)$ , а под  $y$  — таким же образом все координаты  $(y_1, y_2, \dots, y_s, \dots, y_N)$ , мы можем записать матрицу  $\rho$  в виде:

$$\rho = \rho(x, y; x', y', t).$$

Матрица  $\rho$  удовлетворяет уравнению (см. § 6)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [H_0 + W, \rho] = 0. \quad (13.38)$$

Нам удобнее будет вместо матрицы  $\rho$  иметь дело с матрицей

$$\tilde{\rho} = e^{iH_0 t/\hbar} \rho e^{-iH_0 t/\hbar}. \quad (13.39)$$

Заметим, что  $[W, H_0] = 0$ , поэтому  $\tilde{W} = W$ , и, подставляя вместо  $\rho$  ее выражение через  $\tilde{\rho}$ , мы получим для  $\tilde{\rho}$ :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + [W, \tilde{\rho}] = 0. \quad (13.40)$$

При подстановке сюда оператора  $\mathcal{W}$  из (13.36) следует придерживаться правила умножения матриц с непрерывными строками и колонками. Для этого надо записать  $\mathcal{W}$  в матричной форме. Например, вместо оператора  $-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$  следует писать:

$$\mathfrak{K}_{q'q''} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial q'} \delta(q' - q''). \quad (13.41)$$

Умножение  $\mathfrak{K} \cdot \rho$  означает:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{K}\rho)_{q'q''} &= \int \mathfrak{K}_{q'q'''} \rho(q''', q'') dq''' = \\ &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial q'} \rho(q', q'') \end{aligned} \quad (13.41^*)$$

и т. п.

Если воспользоваться этими простыми правилами, то подстановка  $\mathcal{W}$  в (13.40) приводит в раскрытом виде к простому уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \omega \sum_{s=1}^N \left( \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \varphi_s} + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \varphi'_s} \right) = 0. \quad (13.42)$$

Это уравнение решается элементарно. Его общий интеграл есть

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\omega t + \varphi_1, \omega t + \varphi_2, \dots, \omega t + \varphi_s, \dots, \omega t + \varphi_N; \\ r_1, r_2, \dots, r_s, \dots, r_N; \omega t + \varphi'_1, \\ \omega t + \varphi'_2, \dots, \omega t + \varphi'_s, \dots, \omega t + \varphi'_N, \\ r'_1, r'_2, \dots, r'_s, \dots, r'_N), \end{aligned} \quad (13.43)$$

где  $r_1, r_2, \dots, r_N$  и  $r'_1, r'_2, \dots, r'_N$  входят как параметры.

Обратимся теперь к начальным данным для этой матрицы. Чтобы избежать загромождающих формулы множителей, введем в качестве единицы длины величину  $l = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_0}}$  и вместо температуры  $\Theta$  обратную ей величину  $\beta = \frac{\hbar\omega_0}{\Theta}$ . В этих единицах все наши величины станут безразмерными. При  $t=0$  матрица  $\tilde{\rho}(x, y; x', y', 0) = \rho_\Theta(x, x') \rho_\Theta(y, y')$ .

Соответственно сделанным предположениям об абсолютном нуле температуры  $y$ -колебаний имеем:

$$\rho_0(y, y') = C_0 \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (y_s^2 + y_s'^2)}, \quad (13.44)$$

где  $C_0$  — некоторый постоянный нормировочный множитель, а  $e^{-\frac{1}{2} y_s^2}$  — волновая функция, описывающая нулевое колебание  $s$ -го осциллятора по оси  $oy$ .

Значительно сложнее обстоит дело с вычислением матрицы  $\rho_\Theta(x, x')$ , так как  $x$ -колебания находятся при температуре  $\Theta$ . В этом случае состояние является смешанным и веса отдельных состояний  $\psi_n(x)$ , имеющих энергию  $E_n$ , будут  $e^{-E_n/\Theta} = e^{-\beta E_n}$ . Поэтому матрица  $\rho_\Theta(x, x')$ , описывающая ансамбль, находящийся в равновесии с термостатом Гиббса при температуре  $\Theta$ , запишется в виде:

$$\rho_\Theta(x, x') = e^{\beta F(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \psi_n^*(x) \psi_n(x') = e^{\beta F(\beta)} Z_\Theta(x, x'), \quad (13.45)$$

где

$$Z_\Theta(x, x') = \sum_n e^{-\beta E_n} \psi_n^*(x) \psi_n(x). \quad (13.46)$$

Здесь сумма распространена сначала по всем состояниям  $n$ , имеющим энергию  $E_n$ , а затем по всем состояниям с различной энергией  $E_n$ .

Даже в случае осцилляторов прямое вычисление такой суммы весьма затруднительно. Поэтому мы применим обходной маневр, основанный на том факте, что если  $\mathcal{H}(x)$  есть оператор Гамильтона рассматриваемой системы, а  $\psi_n^*(x)$  — его собственная функция, то

$$\mathcal{H}(x) \psi_n^*(x) = E_n \psi_n^*(x)$$

и, стало быть,

$$f(\mathcal{H}) \psi_n^*(x) = f(E_n) \psi_n^*(x). \quad (13.47)$$

Поэтому мы можем записать (13.46) в виде:

$$Z_\Theta(x, x') = \sum_n e^{-\beta \mathcal{H}(x)} \psi_n^*(x) \psi_n(x'), \quad (13.46^*)$$

и, дифференцируя по  $\beta$ , найдем, что сумма  $Z_\Theta(x, x')$  удовлетворяет дифференциальному уравнению [1]:

$$\frac{\partial Z_\Theta}{\partial \beta} + \mathcal{H} Z_\Theta = 0. \quad (13.48)$$

Вместо  $\mathcal{H}(r)$  мы должны подставить сюда невозмущенный оператор Гамильтона для  $x$ -колебаний, т. е.

$$\mathcal{H}_0(x) = \sum_{s=1}^N \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \frac{1}{2} x_s^2 \right) - \frac{1}{2} N, \quad (13.49)$$

который мы заимствуем из (13.34) и (13.35), учитывая новые единицы измерения длины  $x$ .

Переменные в уравнении (13.48) в силу аддитивности гамильтониана (13.49) разделятся, и мы можем решать (13.48) в явном виде для одной переменной  $x$ . В этом случае (13.48) гласит:

$$\frac{\partial Z_\Theta(x, x')}{\partial \beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z_\Theta(x, x')}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) Z(x, x') = 0. \quad (13.50)$$

Будем искать решение этого уравнения в форме

$$Z_\Theta(x, x') = \exp \{ a + bx^2 + cx x' + bx'^2 \} \quad (13.51)$$

с граничным условием

$$Z_\Theta(x, x') \underset{\substack{\Theta \rightarrow \infty \\ \beta \rightarrow 0}}{\sim} \frac{1}{V\beta} e^{-\frac{1}{2\beta} (x-x')^2}, \quad (13.52)$$

что соответствует испарению осцилляторов при  $\Theta \rightarrow \infty$ , так как (13.52) имеет вид суммы для частиц идеального газа.

Подстановка (13.51) в (13.50) приводит к уравнению:

$$\frac{\partial a}{\partial \beta} = b - \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial b}{\partial \beta} = 2b^2 - \frac{1}{2}, \quad (13.53)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \beta} = 2bc, \quad \frac{\partial b}{\partial \beta} = \frac{1}{2} c^2. \quad (13.53^*)$$

Эта система совместна и имеет решение:

$$b = -\frac{1}{2} \frac{e^{2\beta} + 1}{e^{2\beta} - 1} \rightarrow -\frac{1}{2\beta}, \quad (13.54)$$

$$a = \int \left(b - \frac{1}{2}\right) d\beta = -\frac{\beta}{2} + \int b d\beta \rightarrow -\frac{1}{2} \lg \beta, \quad (13.54^*)$$

$$c^2 = (4b^2 - 1), \quad c = -\sqrt{4b^2 - 1}; \quad (13.54^{**})$$

введем еще  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{c}{2b} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4b^2}} \rightarrow -1. \quad (13.54^{***})$$

Из этих данных для  $a$ ,  $b$ ,  $c$  видно, что начальное условие (13.52) удовлетворено.

На основании (13.51) и (13.54), (13.54\*), (13.54\*\*), (13.54\*\*\*) можем теперь записать матрицу  $\rho_\theta(x, x')$  в явном виде:

$$\rho_\theta(x, x') = C_\theta e^{b \sum_{s=1}^N (x_s^2 - 2\gamma x_s x'_s + x'^2_s)}. \quad (13.55)$$

Здесь  $C_\theta$  — некоторый нормирующий множитель, именно  $C_\theta = e^{\beta F(\beta)}$ , где  $F(\beta)$  — свободная энергия осциллятора.

Учитывая теперь еще (13.44), получим полную матрицу плотности  $\tilde{\rho}$ , описывающую состояние детектора при  $t=0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(x, y; x', y', 0) &= \\ &= C_0 C_\theta \exp \left\{ b \sum_{s=1}^N (x_s^2 - 2\gamma x_s x'_s + x'^2_s) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (y_s^2 + y'^2_s) \right\}. \end{aligned} \quad (13.56)$$

Чтобы найти теперь матрицу  $\tilde{\rho}$  в момент времени  $t$ , надо учесть (13.57) и (13.57\*) и заменить всюду в (13.56), согласно (13.43), углы  $\varphi_s$  на  $\varphi_s + \omega t$  и углы  $\varphi'_s$  на  $\varphi'_s + \omega t$ . В результате получим:

$$\tilde{\rho}(x, y; x', y', t) = C_0 C_\theta \exp \{ \Delta + A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t \}, \quad (13.57)$$

где

$$\Delta = \frac{b}{2} \sum_{s=1}^N [r_s^2 + r'_s{}^2 - 2\gamma r_s r'_s \cos(\varphi_s - \varphi'_s)] - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (r_s^2 + r'_s{}^2), \quad (13.58)$$

$$A = \frac{b}{2} \sum_{s=1}^N [r_s^2 \cos 2\varphi_s + r'_s{}^2 \cos 2\varphi'_s - 2\gamma r_s r'_s \cos(\varphi_s + \varphi'_s)] - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (r_s^2 \cos 2\varphi_s + r'_s{}^2 \cos 2\varphi'_s), \quad (13.59)$$

$$B = -\frac{b}{2} \sum_{s=1}^N [r_s^2 \sin 2\varphi_s + r'_s{}^2 \sin 2\varphi'_s - 2\gamma r_s r'_s \sin(\varphi_s + \varphi'_s)] + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (r_s^2 \sin 2\varphi_s + r'_s{}^2 \sin 2\varphi'_s). \quad (13.60)$$

Этот несколько громоздкий результат следует усреднить за период  $1/2\omega$ , если мы считаем, что частота, характеризующая связь атома с детектором, достаточно велика. Поэтому наблюдаемый результат будет определяться матрицей

$$\overline{\tilde{\rho}(x, y; x', y', t)} = C_0 C_\theta \exp \left\{ \Delta \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{(A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t)} dt \right\} dt. \quad (13.61)$$

Последний интеграл приводится к функции Бесселя:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{(A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t)} dt = I_0(R), \quad (13.62)$$



где  $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ . Поэтому усредненная по времени матрица  $\overline{\tilde{\rho}(x, y; x', y', t)}$  равна:

$$\overline{\tilde{\rho}(x, y; x', y', t)} = C_0 C_\Theta e^\Delta \cdot I_0(R), \quad (13.63)$$

$$I_0(R) = 1 + \frac{1}{4} R^2 + \dots, \quad |R| \ll 1, \quad (13.64)$$

$$I_0(R) \cong \frac{e^R}{\sqrt{2\pi R}} + \dots, \quad |R| \gg 1. \quad (13.64^*)$$

При малых  $R$  имеем:

$$\overline{\tilde{\rho}(x, y; x', y', t)} = C_0 C_\Theta e^\Delta, \quad (13.65)$$

а при больших  $R$

$$\overline{\tilde{\rho}(x, y; x', y', t)} = C_0 C_\Theta \frac{e^{(\Delta+R)}}{\sqrt{2\pi R}}. \quad (13.65^*)$$

Если вспомнить, что  $b = -\frac{1}{2\beta} = -\frac{\theta}{2}$ , то появление множителя  $e^\Delta$  с  $\Delta$  из (13.58) указывает на то, что энергия перемешалась между  $x$ -колебаниями и  $y$ -колебаниями, а температура понизилась с  $\Theta$  до  $\Theta/2$ .

При больших значениях  $R$  результат также свидетельствует о перераспределении энергии между  $x$ - и  $y$ -колебаниями, но не является столь наглядным, как при малых  $R$ .

Итак, мы видим, что микрочастица, вторгнувшись в термодинамически неустойчивый детектор, произвела там полное перераспределение энергии, т. е. *макроскопическое явление*.

Из приведенных примеров видно, что макроскопический измерительный прибор должен быть *неустойчивой системой* (точнее, *почти неустойчивой*). Только в этом случае микрочастица способна изменить его состояние, а это изменение и есть макроскопическое явление. Микрочастица бессильна воздействовать на прибор, представляющий собой устойчивую макроскопическую систему. Она не сможет «сдвинуть» его «стрелку» с нулевого положения!

$$\Psi = a_1 \cdot \left( \text{живой кот} \right) + a_2 \cdot \left( \text{мертвый кот} \right)$$

"Суперпозиция состояний живой и мертвой кошки ..."

Э. Шрёдингер

#### § 14. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ — ЗАПИСНАЯ КНИЖКА НАБЛЮДАТЕЛЯ?

Правильно ли представление о том, что волновая функция есть записная книжка наблюдателя? Книжка, в которую он записывает результаты своих измерений, произведенных над микросистемами? Вспомним, как обычно излагается этот вопрос в учебниках. Пусть из каких-либо предыдущих измерений известно, что волновая функция, представляющая состояние микросистем в ансамбле, будет  $\Psi_M(x)$ . Тогда наблюдатель запишет в свою книжку лаконичный знак:

$$\Psi_M(x). \quad (14.1)$$

Этот знак есть тот справочник, который в принципе позволяет наблюдателю предсказать вероятности результатов всевозможных измерений над микросистемой  $\mu$ .

Предположим, что наблюдатель намерен измерять величину  $L$ , имеющую (чтобы не усложнять дела) только два собственных значения  $L_1$  и  $L_2$ ; соответствующие им собственные функции пусть будут  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  (это, например, могут быть состояния спина частицы). Тогда исходную функцию  $\Psi_M(x)$  можно представить в виде суперпозиции частных состояний  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$ :

$$\Psi_M(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x), \quad (14.2)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — коэффициенты, определяющие относительное участие состояний с определенными значениями величины  $L=L_1$  и  $L=L_2$ .

Допустим, что измерение сделано и установлено:  $L=L_1$ . После этого наблюдатель припишет частицу, прошедшую контрольный пункт — измерительный аппарат, к новому ансамблю, характеризуемому новой волновой функцией  $\psi_1(x)$ . Наблюдатель возьмет свою записную книжку и зачеркнет в ней функцию  $\Psi_M(x)$ , как устаревшую, непригодную для дальнейших предсказаний результатов и новых измерений над «пострадавшей» при измерении частицей. Вместо  $\Psi_M(x)$  наблюдатель запишет теперь в свою книжку

$$\psi_1(x). \quad (14.3)$$

Переход от  $\Psi_M(x)$  к  $\psi_1(x)$ :

$$\Psi_M(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) \rightarrow \psi_1(x) \quad (14.4)$$

и есть процесс «стягивания» волнового пакета. С изложенной точки зрения «стягивание» есть прямое следствие изменения информации наблюдателя. Сама волновая функция есть не что иное, как лаконичная запись информации наблюдателя о состоянии ансамбля микросистем.

В этом весьма распространенном понимании волновой функции и процесса «стягивания» нет неправды, и оно удобно как рецепт, против которого трудно возражать. Употребляя слова: наблюдатель, измерение, информация и т. п., мы отдаем лишь дань профессиональному жаргону физиков, который совсем не является лучшим языком для обсуждения принципиальных вопросов физики и методологии физики. Вся теория измерения приобретает при этом сомнительный привкус субъективизма, который становится совсем неприемлемым, если мы хотим ответить на вопрос: *«будет ли квантовая механика применима к описанию физических явлений, протекающих без участия наблюдателя?»*

Наблюдатель не является абсолютно обязательным существом в этом мире и возможно, что мир мог бы обходиться без него. Квантовые закономерности вряд ли пострадали бы даже на иоту от того, если бы беспокойный наблюдатель совсем бы исчез со сцены.

В одной из своих работ, посвященных квантовой механике, Шредингер приводит пример суперпозиции состояний, который многим читателям неприятно подействовал на нервы. Именно, Шредингер рассматривает микросистему, которая имеет два состояния:  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Первое из них заставляет срабатывать счетчик Гейгера; второе оставляет его в покое. Срабатывание счетчика Гейгера через усилители разбивает ампулу с синильной кислотой в камере, где находится... кошка [1].

Итак, дело начинается с того, что наблюдатель, заглядывая в свою записную книжку с целью предсказать результат будущего измерения, среди возможных результатов наблюдения находит «факт» возможной интерференции состояний живой и мертвой кошки! В самом деле, из (14.4) следует:

$$|\Psi_M|^2 = |c_1\psi_1|^2 + |c_2\psi_2|^2 + 2 \operatorname{Re} c_1^* c_2 \psi_1 \psi_2, \quad (14.5)$$

и последний член указывает на такую странную возможность.

После наблюдения фактического события ( $\psi_1$  или  $\psi_2$ ) судебная медицина свидетельствует о смерти несчастной кошки или о ее здоровье, а волновая функция «стягивается» в судебном протоколе к  $\psi_1$  или к  $\psi_2$ !

Нетрудно видеть, что этот страшный пример можно сделать еще более волнующим, если на место кошки поставить самого наблюдателя вместе с медицинскими чиновниками. Тогда в случае « $\psi_1$ » уже некому будет «стягивать» волновую функцию.

Обратимся, однако, к более реалистическим примерам. Представим себе, что речь идет о распаде радиоактивного атома. Пусть состояние  $\psi_1$  есть состояние нераспавшегося атома, а состояние  $\psi_2$  — распавшегося. Теория показывает, что  $c_1 \cong e^{-\lambda t}$ , где  $t$  — время, а  $T = 1/\lambda$  — период полураспада;  $|c_2|^2 = 1 - |c_1|^2$ , так что коэффициент  $c_2$  возрастает со временем, а коэффициент  $c_1$  уменьшается.

Вообразим себе, что речь идет о далеком прошлом, когда ни один наблюдатель не мог бы передать нам информацию о фактической судьбе радиоактивного атома. Пусть это происходит во времена ихтиозавров! Если период  $t$ , отделяющий нас от этого времени,

значительно превосходит период полураспада атома  $T$ , то мы можем с большой степенью вероятности утверждать, что атом распался. Однако для окружения атома совсем не безразлично, когда именно он распался на самом деле.

Уместно вспомнить рассказ писателя — фантаста Роя Бредбери, который описывает, как путешественники в доисторическое прошлое по неосторожности раздавили бабочку и это малое событие повлияло на исход президентских выборов в США в 2000 году!

Распад атома мог вызвать ту или иную цепочку событий, содержание которой могло существенно зависеть от того момента времени, когда произошел этот распад. Между тем современный нам наблюдатель все еще не имел случая «стянуть» волновую функцию из функции  $\Psi$ , содержащую суперпозицию двух возможностей: атом распался ( $\psi_2$ ) или он еще находится в исходном состоянии ( $\psi_1$ ).

Если же современный наблюдатель все же даст себе труд измерить состояние атома, то скорее всего он найдет, что атом распался и находится в состоянии  $\psi_2$ . Однако если  $t \gg T$ , то наш современник серьезно опаздывает со своим заключением, так как какой-либо другой наблюдатель пришел бы к тому же выводу намного раньше нашего современника. Таким образом, хотелось бы выразить на языке квантовой механики утверждение: «*атом распался*» независимо от наблюдателя. Действительно, это событие ведет к различным следствиям в зависимости от момента распада атома и поэтому не может быть связано с изменениями информации наблюдателя. Наблюдатель не участвует в событиях, о которых идет речь, и поэтому должен быть исключен из игры.

Если вообразить себе последовательность наблюдателей, из которых один — наш современник, а другие предшествуют ему, то в этой последовательности наблюдателей один будет выделен тем, что он первым отметит факт распада атома. Этот момент должен иметь объективное значение и находить свое отражение в аппарате квантовой механики без привлечения наблюдателя.

Из того, что было сказано выше о физическом смысле измерения как о макроскопическом процессе,

вызванном к жизни микросистемой, ответ на описанные выше несколько парадоксальные проблемы весьма очевиден. Все же ввиду важности «проблемы» наблюдателя мы остановимся на этой стороне дела подробнее и резюмируем сказанное ранее о сущности измерения.

Обозначим всю макроскопическую обстановку, в которой разыгрываются интересующие нас микроявления, символом  $\mathfrak{M}$ .

Представим эту обстановку в виде суммы

$$\mathfrak{M} = M + (A + D) + H; \quad (14.6)$$

здесь  $M$  означает ту часть макрообстановки, которую мы называли *приготавливающей* и которая диктует исходное состояние ансамбля микрочастиц  $\Psi_M$ , сумма  $(A + D)$  есть та часть макрообстановки, в которой микрочастица вызывает *микроявление* и тем самым свидетельствует о своем состоянии. Эту часть мы несколько условно разложили на две:  $A$  — *анализатор*, который обуславливает то, что частица в разном состоянии будет вызывать разные микроявления, и  $D$  — *детектор* — ту часть макрообстановки, которая сама изменяет свое состояние под действием микрочастицы; наконец, мы еще включили в макрообстановку  $H$  — *наблюдателя* на тот случай, если он и в самом деле вздумает вмешиваться в поведение квантового ансамбля (заметим, что экспериментатор обычно ставит одним из первых условий эксперимента минимум своего влияния на изучаемое явление).

Очевидно, что мы могли бы вообще убрать из суммы последний член  $H$  — уважаемого наблюдателя.

Вся сущность «стягивания» волновой функции выражается в том, что *микрочастица производит микроявление и это событие имеет совершенно объективное значение*, вовсе не связанное с той или иной степенью информации наблюдателя о совершившемся событии.

В определенных условиях экспериментатор может использовать или специально организовать часть макрообстановки  $(A + D)$  так, чтобы она служила *измерительным прибором*, и это дело его воли и его желания. Более того, он имеет право по своему усмотрению устраивать часть  $(A + D)$ , т. е. производить желаемые измерения, с тем, однако, ограничением,

что он обязан избегать какого бы то ни было влияния на часть макрообстановки  $M$  — в противном случае он может изменить сам исходный ансамбль. Поскольку разделение на слагаемые в сумме  $\mathfrak{M}$  приближенно, то и перемена прибора  $(A+D)$  должна производиться с некоторой осторожностью.

Учитывая интерес наблюдателя к различным измерениям, мы можем записать совокупность возможных измерений в виде такой символической записи макрообстановок:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M} &= M + (A + D) + H, \\ \mathfrak{M}' &= M + (A + D)' + H, \\ \mathfrak{M}'' &= M + (A + D)'' + H, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

где штрихи у скобок  $(A+D)$ ,  $(A+D)'$ ,  $(A+D)''$ , ... означают, что поставлены различные измерительные приборы, а часть макрообстановки  $M$ , определяющая исходный ансамбль, оставлена по возможности неизменной. Этим простым столбцом мы хотели еще раз подчеркнуть отличие концепции *квантовых ансамблей* от других подходов к пониманию квантовой механики: одному и тому же квантовому ансамблю, определяемому *макрообстановкой*  $M$  (математически этот ансамбль может быть задан волновой функцией  $\Psi_M$  или матрицей плотности  $\rho_M$ ), принадлежит бесчисленное число статистических коллективов *результатов измерений*, относящихся к различным измерительным приборам  $(A+D)$ ,  $(A+D)'$ ,  $(A+D)''$ , ..., среди которых могут быть и приборы, измеряющие дополнительные динамические переменные — такие, которые в принципе вообще не могут быть измерены одним и тем же прибором, т. е. измерения пространственно-временные и измерения импульсно-энергетические.

Если считать, что наблюдатель вправе по своему усмотрению менять часть макрообстановки  $(A+D)$  — измерительный прибор, то ясно, что *объективно* (в смысле «*независимо от наблюдателя*») квантовый, статистический коллектив макросистем задается тем, что остается *неизменным* при замене одного прибора на другой, т. е. *волновой функцией*  $\Psi_M$  или *матрицей плотности*  $\rho_M$ .



## § 15. ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ПОЛНОЙ ТЕОРИЕЙ?

Такой вопрос поставил однажды Эйнштейн и не только поставил, но и привел пример, из которого, как ему казалось, следовал отрицательный ответ на вопрос о полноте квантовой механики. Этот пример, известный под именем «парадокса» Эйнштейна, Розена и Подольского [1], в свое время привлек внимание всех физиков, интересовавшихся принципиальными вопросами квантовой теории. Сейчас, когда пишутся эти строки, кажется более трудным сформулировать сам «парадокс», чем дать его объяснение. Попробуем все же обратиться к парадоксу трех авторов.

Пусть волновая функция системы двух частиц 1 и 2 имеет вид:

$$\psi(x_1 - x_2) = \int e^{ip(x_1 - x_2 + a)} dp, \quad (15.1)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — координаты рассматриваемых частиц,  $p$  — их импульсы:  $p_1 = p$  и  $p_2 = -p$ . Та же функция в  $x$ -представлении может быть написана в форме:

$$\psi(x_1 - x_2) = \int \delta(x_1 - x'_1) \delta(x'_1 - x_2 + a) dx'_1. \quad (15.2)$$

Предположим, что мы измеряем импульс первой частицы и оказывается, что  $p_1 = p'$ . Тогда из (15.1)



следует, что импульс второй частицы  $p_2$  равен  $-p'$ . Таким образом, хотя никакого воздействия на вторую частицу не было оказано, все же произошло стягивание пакета (15.1) к функции  $e^{ip'(x_1-x_2+a)}$  и координата  $x_2$  частицы 2 стала совершенно неопределенной.

Подобное же происходит при измерении координаты  $x_1$ . Пусть установлено, что  $x_1 = x'_1$ . Тогда из (15.2) следует, что  $x_2 = a + x'_1$ , т. е. произошло стягивание пакета (15.2) к функции  $\delta(x'_1 - x_2 + a)$ . Опять мы встречаемся с ситуацией, когда измерение, произведенное на первой частице, привело к изменению состояния второй частицы, хотя, измеряя координату  $x'_1$ , мы, по крайней мере в принципе, можем избежать воздействия прибора на вторую частицу.

Таким образом, измерения, производимые на одной из частиц, меняют состояние другой частицы и притом таким способом, что первоначальная функция  $\psi(x_1-x_2)$  переходит одним из способов:

$$\psi(x_1 - x_2) \begin{cases} \nearrow e^{ip'(x_1 - x_2 + a)}, \\ \searrow \delta(x'_1 - x_2 + a). \end{cases} \quad (15.3)$$

Итак, устанавливается, что:

а) состояние частицы 2 меняется без того, чтобы измерительный прибор оказывал какое-либо влияние на эту частицу, и

б) новые состояния частицы 2 взаимно исключают друг друга; это либо состояния с определенным импульсом  $p_2 = -p'$ , либо состояния с определенной координатой  $x_2 = a + x'_1$ .

Эйнштейн, Розен и Подольский исходили из распространенного в то время мнения, что частица может иметь координату и импульс одновременно, но вмешательство измерительного прибора, притом, по терминологии Бора, *неконтролируемое вмешательство*, не позволяет установить одновременные значения  $x$  и  $p$ . Поэтому считалось, что понятие одновременного существования импульса  $x$  и координаты частицы  $p$  должны быть исключены из теории, как не соответствующие *возможностям наблюдателя*.

Пример, приведенный Эйнштейном, Розеном и Подольским, показывал, что, несмотря на отсутствие вмешательства прибора, пара сопряженных канонически переменных  $x$  и  $p$  все же не может быть измерена; эта невозможность обуславливается изменением состояния частицы 2, происходящем без воздействия прибора. Поскольку прибор на вторую частицу не действует, нет оснований для того, чтобы нельзя было измерить одновременно  $x$  и  $p$ , а стало быть, эта пара  $(x, p)$  является физической реальностью, которую, однако, квантовая механика не в состоянии описать на своем языке. Иными словами, квантовая механика *неполна* — таково было заключение авторов парадокса.

Парадокс Эйнштейна, Розена и Подольского был разъяснен Бором [2] и Мандельштамом [3], исходя из различной, но не противоречащей друг другу аргументации.

Бор исходил в своем ответе Эйнштейну и его коллегам из *принципа дополненности*. Он подчеркнул значение этого принципа как нового физического принципа, исключающего возможность состояний частицы с одновременно определенными канонически сопряженными переменными — такими, как, например,  $x$  и  $p$ . С этой точки зрения как бы ни был хитроумен прием измерения прямого или косвенного (в примере Эйнштейна переменные, принадлежащие второй частице,  $x$  и  $p$ , измеряются косвенно, по измерению, произведенному на первой частице), не может быть такого измерения, которое привело бы к состоянию с одновременно определенными значениями  $x$  и  $p$ , *независимо* от того, есть ли *вмешательство прибора* или его нет. Такое измерение противоречило бы *принципу дополненности*.

В этом объяснении Бора нет никакой неправды, но толкование, данное рассматриваемому парадоксу Мандельштамом, более полно вскрывает суть дела.

Согласно этому толкованию изменение состояния второй частицы «без вмешательства прибора» на самом деле обусловлено корреляцией состояний частиц 1 и 2 в исходном ансамбле и то, что из установленного факта  $p_1 = p'$  следует  $p_2 = -p'$ , есть прямое следствие такой корреляции. Таким образом, Мандель-

штам привлекает для объяснения статистическую интерпретацию квантовой механики.

Поясним подробнее смысл этой корреляции на более общем примере двух частиц. Пусть состояние двух частиц 1 и 2 характеризуется принадлежностью к квантовому ансамблю, описываемому в начальный момент времени  $t=0$  волновой функцией:

$$\Psi(x_1, x_2, 0) = \psi_a(x_1) \psi_b(x_2), \quad (15.4)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — координаты частиц, а  $a$  и  $b$  — значения некоторых других динамических переменных, задание которых определяет начальный ансамбль.

В результате взаимодействия частиц при  $t > 0$ , возникает новое состояние, которое будет описываться волновой функцией:  $\Psi(x_1, x_2, t)$ . Разложим эту функцию в спектр по собственным функциям операторов  $A$  и  $B$ , изображающих динамические переменные  $a$  и  $b$ :

$$\Psi(x_1, x_2, t) = \int C(a', b') \psi_{a'}(x_1) \psi_{b'}(x_2) da' db'. \quad (15.5)$$

Из (15.5) видно, что если измерено  $a=a'$ , то из этого результата еще ничего нельзя сказать о значении переменной  $b$ , а следовательно, и о «состоянии» частицы 2 после измерения, произведенного на частице 1 с результатом  $a=a'$ . Ситуация меняется, если в системе частиц 1+2 действуют некоторые специальные закономерности: например, динамические переменные  $a$  и  $b$  могут подчиняться закону сохранения, так что

$$\frac{d}{dt}(A+B) = [H(A+B)] = 0, \quad (15.6)$$

где  $H$  — гамильтониан системы 1+2. В этом случае коэффициенты  $C(a', b', t)$  в спектральном разложении (15.5) будут иметь вид:

$$C(a', b', t) = d(a', b', t) \delta(a' + b' - a - b), \quad (15.7)$$

указывающий на то, что сумма  $a' + b'$  должна сохраняться и вместо (15.5) в этом случае будем иметь:

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2, t) &= \\ &= \int d(a', a + b - a', t) \psi_a(x_1) \psi_{a+b-a'}(x_2) da', \quad (15.8) \end{aligned}$$

так что измерение, дающее результат  $a=a'$ , автоматически ведет к  $b'=a+b-a'$ .

Корреляция состояний частиц 1 и 2 в приведенном примере есть следствие законов взаимодействия частиц — закона сохранения величины, описываемой оператором  $(A+B)$ . Поэтому любое измерительное устройство, которое разлагает исходное состояние в спектр по состояниям  $\psi_{a'}(x_1) \psi_{b'}(x_2)$ , автоматически даст разложение по состояниям  $\psi_{a'}(x_1) \psi_{a+b-a'}(x_2)$ , так как в исходном ансамбле нет состояний с  $b' \neq a+b-a'$ .

Сама динамика взаимодействия дает жесткую связь между значениями  $A$  и  $B$ ! В примере Эйнштейна  $a=p_1$  и  $b=p_2$ , причем при  $t=0$   $p_1+p_2=0$ . Вид функции  $\psi(x_1, x_2)$ , приведенной в примере Эйнштейна (15.1), указывает, что при взаимодействии частиц 1 и 2 имеет место закон сохранения импульса, который и обеспечивает корреляцию состояний частиц 1 и 2.

Таким образом, парадокс Эйнштейна, Розена и Подольского возникает в силу того, что опускается статистический характер квантовой механики и факт обусловленности статистической корреляции состояний частиц 1 и 2 самой динамикой их взаимодействия остается в тени.

Представим себе общество, в котором, в силу особых законов наследственности, рождаются только блондины и блондинки с голубыми глазами и брюнеты и брюнетки только с черными глазами (светлых людей с темными глазами и темноволосых людей со светлыми глазами в рассматриваемой популяции не встречается). Поэтому тот факт, что, наблюдая на выбор индивидуума с голубыми глазами, мы автоматически убеждаемся в наличии у изучаемого лица светлых волос, не следует рассматривать как стремление субъекта подкраситься под вкус наблюдателя — обнаруживаемая корреляция цвета волос и глаз есть результат динамики наследственности в изучаемом обществе.

Возвращаясь к примеру Эйнштейна, Розена и Подольского, мы видим, что нет никакой мистики в кажущемся влиянии прибора на состояние той частицы, на которую он фактически не влиял: это «влияние» подготовлено внутри самой системы ее внутренними

законами и не является следствием «вмешательства» прибора.

Кстати, напомним то, что мы уже неоднократно подчеркивали: микрочастица вмешивается всегда в состояние прибора, прибор же иногда вмешивается в состояние микрочастицы, а иногда и не вмешивается. Поэтому идея о том, что квантовая механика есть прямое следствие возможностей, заложенных в макроприборах, должна быть признана неудовлетворительной. Квантовая механика отражает объективные закономерности, господствующие в микромире, и рассказывает о них на языке макромира. В частности, невозможность измерять одновременно  $x$  и  $p$  у микрочастицы есть следствие основных принципов самой квантовой механики и любой прибор обязан с ними считаться: согласно этим принципам пара  $x$  и  $p$  не относится к «физической реальности» и поэтому не может быть наблюдаема ни при каких условиях.

В силу этих соображений предположение Эйнштейна, Розена и Подольского о том, что пара  $x$  и  $p$  реально существует и только неполнота квантовой механики не позволяет «добраться» до этой пары, должно быть отвергнуто.

---



## § 16. СКРЫТЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Классическая механика в ее абстрактной форме позволяет предсказать однозначно будущее системы, если известны начальные данные. Мы не будем напоминать о том, насколько иллюзорна вера в это всемогущество классической механики.

Важно то, что именно на основе этой веры классическую статистическую механику часто рассматривают как теорию второго сорта, к помощи которой приходится прибегать по необходимости в тех случаях, когда механическая система становится слишком сложной, чтобы можно было прямо применять уравнения механики.

Физиков и философов, придерживающихся этого взгляда на статистическую механику, обычно радует принципиальная возможность резервировать за собой применение строго детерминированных уравнений классической механики, так что статистическая механика выглядит лишь как некоторая уступка слишком сложной вычислительной задаче.

Эта наивная точка зрения с трудом мирится с тем фактом, что квантовая механика, в которой динамика и статистика неразделимы, не позволяет в принципе даже самому усидчивому математику или вычислительной машине, какой бы совершенной она ни была,

освободиться от статистического описания микромира. Возникает желание думать, что квантовая механика есть лишь статистический метод для описания микросистем, которые «на самом деле» подчиняются динамическим закономерностям, если их описывать более полно с помощью неизвестных квантовой механике переменных — «скрытых параметров»  $\lambda$ . Задание таких параметров должно бы устранить статистику из квантовой теории. Точнее сказать, статистика квантового ансамбля возникла бы как результат неточного задания этих замечательных параметров.

Проблема «скрытых параметров»  $\lambda$  не раз была предметом теоретических обсуждений.

Фон Нейман был, по-видимому, первым, кто обратился к этой проблеме. В своей замечательной монографии, посвященной математическим основам квантовой механики, которая оказала большое влияние на развитие идеи квантовых ансамблей в нашей стране, фон Нейман стремился доказать несовместимость скрытых параметров с основными положениями квантовой механики [1].

Тем не менее кажется, что полной ясности в этой проблеме не достигнуто и она нуждается в дополнительном анализе.

Весьма трудно обсуждать эту проблему в очень общем виде. В одной из своих работ я заметил, что было бы неосновательно думать, что термодинамика может содержать внутри самой себя предпосылки для сомнений в абсолютной значимости второго начала термодинамики. Ведь второе начало термодинамики лежит в самых основах этой теории. Однако развитие кинетической теории показало, что без противоречия с термодинамикой можно все же встретиться со случаями, когда второе начало явно нарушается, как это имеет место, например, в броуновском движении. Противоречие в этом случае было устранено более широкой точкой зрения на второе начало термодинамики, допускаемой кинетической теорией материи. Я имею в виду понимание энтропии  $S$  как величины, определяемой вероятностью состояния  $W$ :  $S = k \lg W$  (где  $k$  — постоянная Больцмана).

Возможно ли введение в квантовую механику каких-либо «скрытых параметров», которые могли бы

сделать осмысленной пропорцию вида:

$$\frac{x}{\text{квантовая механика}} = \frac{\text{кинетическая теория материи}}{\text{термодинамика}}, \quad (16.1)$$

где  $x$  — неизвестная, более полная теория?

Строго говоря, в столь общей, чисто методологической постановке вопроса нельзя отвергнуть возможность разрешимости символической пропорции (16.1) или какой-либо другой, ей подобной.

В дальнейшем мы попытаемся избрать более узкие, но и более определенные пути обсуждения проблемы «скрытых параметров».

Разделим прежде всего эти параметры на два возможные класса:

1) класс *A*, когда параметры ( $\lambda$ ) являются *в принципе наблюдаемыми* переменными, но не входят в число динамических переменных, рассматриваемых квантовой механикой;

2) класс *B*, когда параметры ( $\lambda$ ) являются *в принципе ненаблюдаемыми*.

Обсуждение этих двух классов должно происходить совершенно раздельно. Обратимся сначала к классу *A*.

### **A. Наблюдаемые скрытые параметры**

Допустим, что наряду с переменными, которые характеризуют макроскопическую обстановку  $M$ , и динамическими переменными микрочастицы  $L$ ,  $P$ ,  $Q$  и т. п. существуют еще некоторые дополнительные переменные  $\lambda$  — скрытые параметры, которые позволяют доопределить состояние квантовой системы, так что уменьшится статистический разброс, свойственный этим обычным динамическим и другим переменным квантового ансамбля ( $M + \mu$ ).

Фон Нейман различает два типа статистических ансамблей: *неоднородные* и *однородные* ансамбли. В первом типе ансамблей среднее значение  $\bar{A}$  положительной случайной величины  $A$  может быть представлено в виде разложения:

$$\bar{A} = a_1 \bar{A}_1 + a_2 \bar{A}_2, \quad (16.2)$$



где  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  и  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$  суть средние, взятые по подансамблям путем некоторого специального отбора систем, входящих в ансамбль: именно путем отбора по признакам, определяющим вероятности  $\alpha_{1,2}$ .

Для *однородного ансамбля* при *любом* отборе систем имеем:

$$\bar{A} = \bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \dots \quad (16.3)$$

Очевидно, что *смешанный* квантовый ансамбль является неоднородным. Простейшим случаем такого смешанного ансамбля может быть ансамбль, образованный частицами, происходящими от двух некогерентных источников (например,  $\alpha$ -частицы от двух радиоактивных препаратов). Любое среднее, относящееся к этим частицам, представится в виде (16.2), причем  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  имеют смысл вероятности того, что частица излучена первым или, соответственно, вторым источником.

Если же ансамбль описывается одной волновой функцией  $\Psi_M$  и, следовательно, является чистым ансамблем, то такое разложение невозможно по самому определению чистого ансамбля.

Действительно, по определению чистого ансамбля он образован бесконечной последовательностью тождественных макроскопических обстановок  $M$ , которые создают условия для существования микрочастицы  $\mu$ . Представим себе, что совокупность таких  $M$  в количестве  $N \rightarrow \infty$  разбита на две подсовокупности:

$N_1 + N_2 = N$ ,  $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ , причем в каждой такой подсовокупности  $N_1$  и  $N_2$  обстановка  $M$  и микрочастица  $\mu$  тождественны. При этом под словом «тождественны» мы понимаем, что макроскопические параметры, определяющие  $M$ , совпадают и микрочастицы  $\mu$ , определенные их макроскопически измеряемыми параметрами (массой  $m$ , зарядом  $e$ , спином  $\sigma$  и т. д.), также совпадают. Тогда волновая функция  $\Psi_M$ , определяющая квантовый ансамбль для обеих подсовокупностей  $N_1$  и  $N_2$ , при любом выборе этих подсовокупностей одна и та же по определению волновой функции, и поэтому для любой величины  $A$  выполняется

условие  $\bar{A}_1 = \bar{A}_2$ , так что разложение (16.2) оказывается невозможным.

Этот вывод противоречит возможности введения скрытых параметров  $\lambda$ , так как по смыслу этих параметров измерение их должно «уточнить» значение квантовых переменных, например изменить статистический разброс какой-либо динамической переменной  $L$ . Пусть, например, в области скрытых параметров  $\mathfrak{G}_1(\lambda)$  среднее значение величины  $\bar{L}$  есть  $L_1$ , а среднее квадратичное отклонение  $\overline{\Delta L}_1^2$ ; в области параметров  $\mathfrak{G}_2(\lambda)$  те же величины имеют значение  $L_2$  и  $\overline{\Delta L}_2^2$ . Тогда среднее  $\bar{L}$  и  $\overline{\Delta L}^2$  во всем ансамбле будет:

$$\bar{L} = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2, \quad (16.4)$$

$$\overline{\Delta L}^2 = \alpha_1 \overline{\Delta L}_1^2 + \alpha_2 \overline{\Delta L}_2^2 + \alpha_1 (L_1 - \bar{L})^2 + \alpha_2 (L_2 - \bar{L})^2, \quad (16.4^*)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — относительные веса областей  $\mathfrak{G}_1(\lambda)$  и  $\mathfrak{G}_2(\lambda)$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ .

Иными словами, чистый ансамбль оказывается *неоднородным* (по параметрам  $\lambda$ ), что противоречит его определению.

Если мы будем уточнять определенность параметров  $\lambda$ , разбивая всю область возможных значений параметров  $\lambda$  на все более малые области  $\mathfrak{G}_1(\lambda)$ ,  $\mathfrak{G}_2(\lambda), \dots, \mathfrak{G}_s(\lambda), \dots, \mathfrak{G}_N(\lambda)$  со статистическими весами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_N$ ,  $\sum_1^N \alpha_s = 1$ , то в пределе бесконечно малых областей  $\mathfrak{G}_s(\lambda)$  получим вместо (16.4\*)

$$\overline{\Delta L}^2 = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} (L_{\lambda} - \bar{L})^2, \quad (16.5)$$

где  $\alpha_{\lambda} = \frac{\mathfrak{G}_s(\lambda)}{\sum_{s=1}^N \mathfrak{G}_s(\lambda)}$  и  $L_{\lambda}$  есть среднее значение величины  $L$  в  $\mathfrak{G}_s(\lambda)$ .

При  $N \rightarrow \infty$   $L_{\lambda}$  равно «точному» значению величины  $L$  в области  $\mathfrak{G}_s(\lambda)$ .

Формула (16.5) показывает, что весь статистический разброс величины  $L$  идет теперь за счет неопределенности в скрытых параметрах  $\lambda$ . Если эти пара-

метры определены точно (узкая область  $\mathfrak{G}(\lambda)$ !), то и квантовые динамические переменные должны принять вполне определенные значения.

Это ведет к дальнейшим противоречиям; действительно, не существует микросистем, которые могли бы быть описаны в терминах только пространственно-временных переменных (обозначим их через  $Q$ ) или в терминах только импульсно-энергетических переменных (обозначим их через  $P$ ).

Согласно принципу дополнительности операторы  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$ , изображающие эти величины, некоммутативны:

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} - \mathcal{Q}\mathcal{P} = ih, \quad (16.6)$$

так что если в квантовом ансамбле, определенном макрообстановкой  $M$ ,  $\overline{\Delta Q^2} = 0$ , то  $\overline{\Delta P^2} \neq 0$ ; если же  $\overline{\Delta P^2} = 0$ , то  $\overline{\Delta Q^2} \neq 0$ . Поэтому, если в квантовом ансамбле какая-то динамическая переменная  $L$  определена точно так, что  $\overline{\Delta L^2} = 0$ , то либо  $\overline{\Delta P^2} > 0$ , либо  $\overline{\Delta Q^2} > 0$ , либо  $\overline{\Delta P^2} > 0$  и  $\overline{\Delta Q^2} > 0$  одновременно. Следовательно, если найдется область скрытых параметров  $\mathfrak{G}(\lambda)$ , которая выделяет подансамбль с  $\overline{\Delta Q^2} = 0$  и  $\overline{\Delta P^2} = 0$ , то мы очевидным образом приходим к противоречию с принципом дополнительности.

Приведем еще одно рассуждение, которое подчеркивает трудности введения скрытых параметров  $\lambda$  [2].

Пусть изучаемой динамической переменной будет спин электрона  $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ . Как известно,

$$[S_x, S_y] = ihS_z. \quad (16.7)$$

Переменные  $S_x, S_y, S_z$  принимают только два возможных значения:  $\pm h/2$ .

Допустим, удалось установить, что проекция спина на ось  $Oz$  равна  $S_z = h/2$ . Пусть это значение квантовой переменной есть следствие того, что скрытые параметры  $(\lambda)$  лежат в области  $\mathfrak{G}_z^+(\lambda)$ .

Изменим теперь в суммарной обстановке  $\mathfrak{M} = M + (A + D)_z$  группу  $(A + D)_z$  на группу  $(A + D)_x$  и будем сортировать частицы  $\mu$  по значениям переменной  $S_x$ . При этом мы будем получать значения  $S_x$ , равные как  $h/2$ , так и  $-h/2$ .

Пусть область параметров  $(\lambda)$ , приводящих к значению  $S_x = \hbar/2$ , будет  $\mathfrak{G}_x^+(\lambda)$ . Тогда область  $\mathfrak{G}_z^+(\lambda)$  распадается на сумму:

$$\mathfrak{G}_z^+(\lambda) = \mathfrak{G}_x^+(\lambda) + \mathfrak{G}_x^-(\lambda). \quad (16.8)$$

Допустим, что получено  $S_x = \hbar/2$ . Это означает, что параметры  $(\lambda)$  лежат в области  $\mathfrak{G}_x^+(\lambda)$ .

Измерим теперь вновь проекцию  $\mathcal{S}$  на ось  $Oz$ ; для этого вновь переменим группу  $(A+D)_x$  на исходную  $(A+D)_z$ . Тогда мы будем получать для  $S_z$  как  $\hbar/2$ , так и  $-\hbar/2$ . Поэтому

$$\mathfrak{G}_x^+(\lambda) = \mathfrak{G}_z^+(\lambda) + \mathfrak{G}_z^-(\lambda). \quad (16.9)$$

Сопоставляя (16.9) и (16.8), мы приходим к противоречию:

$$\mathfrak{G}_x^+(\lambda) + \mathfrak{G}_z^-(\lambda) = 0. \quad (16.10)$$

Мы можем формально выйти из этого противоречия, если будем считать, что параметры  $(\lambda)$  относятся не к  $(M+\mu)$ , а к измерительному прибору  $(A+D)$ , так что при замене измерительного прибора [группа  $(A+D)$ ] с  $(A+D)_x$  на  $(A+D)_z$  и обратно скрытые параметры  $\lambda$  меняют свой физический смысл: скрытые параметры при измерении величины  $S_z$  не те, что при измерении величины  $S_x$ , так что в равенстве (16.8) параметры  $\lambda$  справа и слева физически различны. Иными словами, параметры  $\lambda$  различны для различных измерительных устройств  $A+D$  [в нашем примере  $(A+D)_z$  и  $(A+D)_x$ ]. Априори нельзя отвергнуть такую возможность. Однако при таком понимании параметров  $\lambda$  они не относятся к классу величин, дополняющих динамические переменные квантовой механики; напротив, они очевидным образом входят в круг величин, рассматриваемых квантовой механикой: это могут быть, например, переменные, характеризующие само измерительное устройство. По самой сути измерительного устройства существует однозначное соответствие между областью  $\mathfrak{G}(\lambda)$  динамических переменных  $\lambda$ , характеризующих это устройство с любой степенью достоверности, и значением измеряемой величины  $L$ , именно, если  $\lambda \in \mathfrak{G}_L(\lambda)$ , то динамическая переменная  $L$  равна  $L'$ .

Итак, мы видим, что невозможно ввести в принципе наблюдаемые скрытые параметры  $\lambda$  в часть  $\mathfrak{M}$ , равную  $M + \mu$ , без противоречия с принципом дополненности.

## Б. Ненаблюдаемые скрытые параметры

Допустим теперь, что скрытые параметры  $\lambda$  принципиально ненаблюдаемы. Слово «принципиально» напоминает злополучное «начало принципиальной ненаблюдаемости», которое некоторые исследователи рассматривали как философскую основу квантовой механики (см. об этом в [2]). Поэтому следует подчеркнуть, что когда мы употребляем слово «принципиально», то имеем в виду определенную теорию и ее принципы, которые что-то допускают и что-то запрещают. В обсуждении «принципиально ненаблюдаемых скрытых параметров» мы также обязаны иметь в виду принципы определенной теории, а не море возможностей, ограниченных только фантазией. В качестве такой теоретической основы для обсуждения мы возьмем квантовую механику и будем считать, что термин «принципиально ненаблюдаемая величина» определяет величину, наблюдаемость которой запрещена принципами квантовой механики. Нетрудно видеть, что в таком понимании скрытые параметры ( $\lambda$ ) не противоречат принципам квантовой механики.

Обратимся теперь к обсуждению скрытых параметров для чистого квантового ансамбля.

Если параметры ( $\lambda$ ) не наблюдаемы, то нельзя указать способ, пользуясь которым мы могли бы выделить из чистого квантового ансамбля какой бы то ни было подансамбль со средними значениями  $\bar{L}$ ,  $\overline{\Delta L^2}$ , отличными от значений, характерных для всего ансамбля в целом, т. е. разложение вида (16.4) и (16.4\*) неосуществимо. Следовательно, никакого противоречия ни с определением чистого ансамбля, ни с соотношениями неопределенностей вида  $\overline{\Delta P^2} \overline{\Delta Q^2} \gg \hbar^2$  при рассматриваемых предположениях о скрытых параметрах ( $\lambda$ ) не возникает. Более того, мы покажем, что такие «ненаблюдаемые скрытые параметры»  $\lambda$  существуют в современной

квантовой механике. В дальнейшем мы будем следовать идеям Фейнмана [3], который показал, что волновая функция, описывающая чистый ансамбль, может быть представлена в виде функционального интеграла по «идеальным» (ненаблюдаемым) траекториям частиц:

$$x = x(t), \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t),$$

где  $x(t)$  — координаты частицы в момент времени  $t$ , а  $\dot{x}(t)$  — ее скорость.

Для того чтобы изложить идею Фейнмана, напомним, что движение квантового ансамбля может быть представлено как последовательность унитарных преобразований. Пусть состояние микрочастицы характеризуется динамической переменной  $a$  (которая имеет непрерывный спектр). Пусть, далее, волновая функция, описывающая состояние ансамбля в момент времени  $t=t_0$ , есть  $\psi(a_0, t_0)$ , где  $a_0$  есть переменная  $a$  при  $t=t_0$  (по самому смыслу волновой функции). Тогда волновая функция  $\psi(a, t)$  в момент  $t>0$ , как известно, может быть представлена в виде:

$$\psi(a, t) = \int U(a, t; a_0, t_0) \psi(a_0, t_0) da_0, \quad (16.11)$$

где  $U(a, t; a_0, t_0)$  есть унитарная матрица канонического преобразования от переменных  $a_0$  к переменным  $a$ . Она удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = HU, \quad (16.12)$$

где  $H$  — гамильтониан системы. Если для  $U$  выбрать начальные условия так, что

$$U = \delta(a - a_0) \quad \text{при} \quad t = t_0, \quad (16.13)$$

$$U = 0 \quad \text{при} \quad t < t_0, \quad (16.13^*)$$

то  $U$  совпадает с рассмотренной ранее функцией Грина  $\mathcal{G}$  для уравнения Шредингера (16.12).

Возьмем в (16.11) вместо момента  $t$  (который произволен) какой-нибудь момент времени  $t_1$ ,  $t_0 < t_1 < t$ . Тогда (16.11) будет преобразовывать функцию  $\psi(a_0, t_0)$  в функцию  $\psi(a_1, t_1)$ . Мы можем теперь взять

$\Psi(a_1, t_1)$  за начальную функцию и с помощью  $U(a, t; a_1, t_1)$  получить вновь функцию  $\Psi(a, t)$  для  $t > t_1$ ; очевидно, что при этом мы будем иметь:

$$\Psi(a, t) = \int da_1 \int da_0 U(a, t; a_1, t_1) \times \\ \times U(a_1, t_1; a_0, t_0) \Psi_0(a_0, t_0). \quad (16.14)$$

Повторяя эту процедуру введения промежуточных моментов времени  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = t$  и соответствующих этим моментам значений динамической переменной  $a_1, a_2, \dots, a_N = a_t = a$ , мы можем представить матрицу преобразования  $U(a, t; a_0, t_0)$  в виде:

$$U(a, t; a_0, t_0) = \\ = \int \dots \int da_1 da_2 \dots da_{N-1} U(a, t; a_{N-1}, t_{N-1}) \times \\ \times U(a_{N-1}, t_{N-1}; a_{N-2}, t_{N-2}) \dots \\ \dots U(a_2, t_2; a_1, t_1) U(a_1, t_1; a_0, t_0), \quad (16.15)$$

т. е. как последовательность «переходов»  $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_{N-1} \rightarrow a_N$  при возможных значениях промежуточных переменных  $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$ . Эта формула аналогична классической формуле для цепи Маркова [4]:

$$\mathcal{P}(a, t/a_0, t_0) = \\ = \int \dots \int da_1 da_2 \dots da_{N-1} \mathcal{P}(a, t; a_{N-1}, t_{N-1}) \times \\ \times \mathcal{P}(a_{N-1}, t_{N-1}; a_{N-2}, t_{N-2}) \dots \\ \dots \mathcal{P}(a_2, t_2; a_1, t_1) \mathcal{P}(a_1, t_1; a_0, t_0), \quad (16.16)$$

где  $\mathcal{P}(a_k, t_k; a_{k-1}, t_{k-1})$  есть *вероятность* перехода за время  $t_k - t_{k-1}$  из состояния  $a_{k-1}$  в состояние  $a_k$ .

Формула (16.16) представляет вероятность перехода из состояния  $a_0$  в момент  $t_0$  в состояние  $a$  в момент  $t (t > t_0)$  как результат всевозможных переходов по промежуточным значениям переменной  $a$ .

В квантовую формулу (16.15) вместо вероятности  $\mathcal{P}$  входят амплитуды вероятностей  $U$ , которые связаны с вероятностью  $\mathcal{P}$  соотношением

$$\mathcal{P}(a_k, t_k; a_{k-1}, t_{k-1}) = |U(a_k, t_k; a_{k-1}, t_{k-1})|^2. \quad (16.17)$$

Благодаря этому различию внешне схожие формулы (16.15) и (16.16) принципиально отличаются друг от друга.

Вернемся теперь к формулам (16.14) и (16.15) и будем считать, что переменная  $a$  есть декартова координата микрочастицы  $x$ . Обозначим, далее,  $t_{k+1} - t_k = \Delta t$  и положим, что для малых  $\Delta t$  функцию преобразования  $U$  можно представить в виде:

$$U(x_{k+1}, t_{k+1}; x_k, t_k) = \frac{1}{A} e^{\frac{i}{\hbar} S(x_{k+1}, x_k, \Delta t)}, \quad (16.18)$$

где  $A$  — нормирующий множитель (не зависящий от  $x_k, t_k$ ), а  $S(x_{k+1}, x_k, \Delta t)$  — фаза  $U$ .

Для свободного движения эта фаза в точности совпадает с *классической функцией действия*, поэтому можно допустить, что это окажется верным и для случая наличия внешнего поля, описываемого потенциалом  $V(x)$ . Предположим, что это верно. Тогда

$$S(x_{k+1}, x_k, \Delta t) = \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} \right)^2 - V(x_{k+1}) \right] \Delta t, \quad (16.19)$$

где  $m$  — масса микрочастицы.

В пределе бесконечно мелкого дробления интервала  $(t_0, t)$  получим:

$$S(\dot{x}, x, dt) = \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right] dt. \quad (16.20)$$

Эта величина есть элемент классического действия за время  $dt$ ;  $\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t}$  — есть скорость частицы в момент времени  $t$ ,  $L(\dot{x}, x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$  — классическая функция Лагранжа.

Покажем, что волновая функция  $\psi(x, t)$ , полученная с помощью преобразования (16.11), при предположениях (16.18) и (16.19), удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t). \quad (16.21)$$



Для доказательства \*) рассмотрим преобразование от  $\psi(x, t)$  к  $\psi(x, t + \Delta t)$ :

$$\psi(x, t + \Delta t) = \frac{1}{A} \int \exp \left( \frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m}{2} \left[ \frac{x_{N+1} - x_N}{\Delta t} \right]^2 - V(x_{N+1}) \right\} \Delta t \right) \psi(x_N, t) dx_N. \quad (16.22)$$

Положим  $x_{N+1} - x_N = \xi$ ,  $x_{N+1} = x$ . Тогда вместо (16.12) получим:

$$\psi(x, t + \Delta t) = \frac{1}{A} \int e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{\xi^2}{\Delta t} - \frac{i}{\hbar} V(x) \Delta t} d\xi \psi(x - \xi, t). \quad (16.22^*)$$

Разлагая  $\psi(x - \xi, t) = \psi(x, t) - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \xi^2 + \dots$  и выполняя простое интегрирование по  $\xi$ , получим:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \Delta t + \dots = \\ = e^{-\frac{i}{\hbar} V(x) \Delta t} \left( \frac{2\pi i \hbar}{m} \Delta t \right)^{1/2} \frac{1}{A} \left[ \psi(x, t) + \right. \\ \left. + \frac{i \hbar}{m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \Delta t + O(\Delta t^2) \right]. \quad (16.22^{**}) \end{aligned}$$

Выбирая нормировочный множитель  $A$  равным  $\left( \frac{2\pi i \hbar \Delta t}{m} \right)^{1/2}$  и разлагая еще в ряд  $e^{-(i/\hbar) V(x) \Delta t} = 1 - \frac{i}{\hbar} V(x) \Delta t + \dots$ , убедимся, что при  $\Delta t \rightarrow 0$   $\psi(x, t)$  действительно удовлетворяет уравнению Шредингера (16.21). Это позволяет написать (16.15) в виде:

$$\begin{aligned} U(x, t; x_0, t_0) = \\ = \underbrace{\int \dots \int}_N e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^N S(x_k, x_{k-1}, \Delta t)} \frac{dx_N}{A} \frac{dx_{N-1}}{A} \dots \\ \dots \frac{dx_k}{A} \dots \frac{dx_1}{A}, \quad (16.23) \end{aligned}$$

\*) Это доказательство принадлежит Фейнману [3]. Впервые на связь фазы  $S$  с классическим действием  $L$ , видимо, указал Дирак [5].

где  $S(x_k, x_{k-1}, \Delta t)$  — классическое действие за время  $\Delta t$ , определяемое (16.19).

Если заменить  $1/h$  на  $\frac{1+i\delta}{\hbar}$ ,  $\delta > 0$ , то интеграл (16.23) имеет смысл и при  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta t = \frac{t-t_0}{N} \rightarrow 0$ , как функциональный интеграл по мере Винера.

Интеграл (16.23) при  $N \rightarrow \infty$  есть предел этого функционального интеграла при  $\delta \rightarrow 0$  (см. [6]). При  $\Delta t \rightarrow 0$

сумма  $\sum_{k=1}^N S(x_k, x_{k-1}, \Delta t)$  переходит, согласно (16.20), в интеграл классического действия за время от  $t_0$  до  $t$ :

$$\int_{t_0}^t L[\dot{x}(\tau), x(\tau)] d\tau = S(x, t, x_0, t_0);$$

объем  $\frac{dx_N}{A} \frac{dx_{N-1}}{A} \dots \frac{dx_1}{A}$  при  $N \rightarrow \infty$  запишем символически как  $dW\{x(\tau)\}$ . Тогда вместо (16.23) получим:

$$U(x, t; x_0, t_0) = \int dW\{x(\tau)\} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t L(\dot{x}(\tau), x(\tau)) d\tau}. \quad (16.24)$$

Иными словами, функция преобразования «амплитуда вероятности»  $U(x, t; x_0, t_0)$  может быть представлена как функциональный интеграл по *всем траекториям*, ведущим из точки  $(x_0, t_0)$  в точку  $(x, t)$ . Каждая траектория  $x(\tau), \dot{x}(\tau), t_0 \leq \tau \leq t$  дает вклад в амплитуду  $U(x, t; x_0, t_0)$ , равный

$$dU = dW\{x(\tau)\} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t L(\dot{x}, x) d\tau}. \quad (16.25)$$

В силу постоянства множителей  $A$  амплитуда вклада каждой траектории  $dW\{x(\tau)\}$  одинакова, а фазы

$\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t L(\dot{x}, x) d\tau$  для разных траекторий различны.

Ясно, что ввиду осциллирующего характера множителей  $e^{(i/\hbar)S(x, t, t_0)}$ ,  $S(x, t, t_0) = \int_{t_0}^t L(\dot{x}, x) d\tau$  наибольший вклад в (16.24) будет получаться от слагаемых вида (16.25), для которых  $S(x, t, t_0)$  минимально, т. е. для тех траекторий, для которых

$$\delta \int_{t_0}^t L(\dot{x}, x) d\tau = 0, \quad (16.26)$$

где  $\delta$  означает вариацию траектории  $x(\tau)$ . Но условие (16.26) есть как раз то условие, которое определяет *классическую траекторию частицы*. Таким образом, мы можем следующим образом интерпретировать замечательный результат Фейнмана, выраженный формулами (16.24), (16.25) и (16.26): микрочастица предпочитает двигаться по классической траектории  $x(\tau)$ , удовлетворяющей принципу наименьшего действия (16.26); она не избегает и других возможных

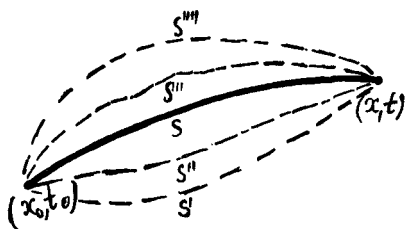


Рис. 11. Классическая траектория частицы  $S$ , соответствующая минимуму функции действия  $S$ . Траектории  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$ , ... — «идеальные» квантовые траектории, которые также фигурируют в движении микрочастицы.

траекторий, ведущих из  $x_0, t_0$  в  $x, t$  (рис. 11). Согласно (16.24) все эти возможности дают определенный вклад в движение квантового ансамбля. Однако «идеальные» траектории  $x(t)$  и скорости  $\dot{x}(t) = p(t)/m$  ( $p$  — импульс частицы), фигурирующие в (16.24), являются *ненаблюдаемыми*, так как согласно

основным принципам квантовой механики не существует такого квантового ансамбля, в котором были бы одновременно определены переменная  $x$  и переменная  $\dot{x} = p/m$ .

Таким образом, переменные  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  в (16.24) являются примером «скрытых параметров», и притом ненаблюдаемых. Однако, как мы видели, нет никакого противоречия между принципами квантовой механики и существованием этих скрытых параметров  $\lambda = x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ , определяющих «идеальную» траекторию микро-частицы.

---



## § 17. ВОЗМОЖНА ЛИ ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ИСТОРИЯ ЧАСТИЦЫ?

Есть люди, которых беспокоит невозможность методами современной квантовой механики описать судьбу отдельного электрона. Такая тревога за судьбы отдельной микрочастицы, отдельного индивидуума микромира кажется все же здоровым ханжеством, так как на самом деле и в макромире судьба конкретного объекта не может быть предсказана на длительное время.

Вероятно, эта тенденция к предсказаниям основана на естественном стремлении человека знать свое будущее. Желание это бывает настолько острым, что иные люди прибегают даже к услугам гадалок. Однако нетрудно представить себе психическое состояние мыслящего человека, которому в точности известно расписание всей его жизни: не потеряла ли бы она для него всякий интерес, как теряется интерес к фильму, содержание которого заранее известно во всех деталях?

Это замечание не имеет прямого отношения к проблемам квантовой механики, но может быть оно

несколько успокоит тех, кто очень огорчается, что нельзя однозначно предсказать будущее, в частности и будущее элементарной частицы.

Вернемся теперь к проблеме истории индивидуума микромира. Постараемся сначала уточнить саму постановку вопроса об этой истории. Что значит история частицы? Видимо, правильно понимать историю частицы как *последовательность ее состояний во времени*. Следовательно, мы должны прежде всего начать с понятия *состояния частицы*.

Из основ квантовой теории известно, что мы можем описать состояние частицы либо с помощью пространственно-временных переменных (условно  $Q$ ), либо с помощью импульсно-энергетических переменных (условно  $P$ ), причем каждая совокупность переменных  $Q$  или  $P$  должны образовывать *полный набор* динамических переменных, т. е. они должны изображаться коммутирующими между собой операторами:

$$[Q_s, Q_r]=0, \quad s, r=1, 2, \dots, f, \quad (17.1)$$

или для импульсного набора

$$[P_s, P_r]=0, \quad s, r=1, 2, \dots, f; \quad (17.1^*)$$

они также должны быть независимы друг от друга, и число их должно равняться числу степеней свободы нашей микросистемы  $f$ . Таким образом, состояние частицы задается полным набором динамических переменных  $(Q)=Q_1, Q_2, \dots, Q_f$  или  $(P)=P_1, P_2, \dots, P_f$ .

Предсказание истории частицы означало бы предсказание последовательности  $Q(t)$  или  $P(t)$  для моментов времени  $t: t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_N$ .

Прежде чем перейти к анализу возникающих здесь проблем, приведем интересную теорему, принадлежащую Мандельштаму [1].

Положим в общем соотношении неопределенностей (11.3)  $A=L$ ,  $B=\mathcal{H}$ , где  $\mathcal{H}$  — оператор энергии  $E$ ; тогда получим:

$$\overline{\Delta L^2} \overline{\Delta E^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} \overline{|\mathcal{H}, \mathcal{L}|^2}, \quad (17.2)$$

где  $\overline{\Delta L^2}$  и  $\overline{\Delta E^2}$  — как обычно, средние квадратичные отклонения величины  $L$  и  $E$ ,  $|\mathcal{H}, \mathcal{L}| = \frac{1}{i\hbar} (\mathcal{H}\mathcal{L} - \mathcal{L}\mathcal{H})$ .

С другой стороны,

$$\overline{[\mathcal{H}, \mathcal{L}]} = \frac{d\bar{L}}{dt}. \quad (17.3)$$

Поэтому

$$\overline{\Delta L^2} \overline{\Delta E^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} \left| \frac{d\bar{L}}{dt} \right|^2. \quad (17.4)$$

Из (17.4) следует, что если за время  $\Delta t$  среднее значение  $\bar{L}$  величины  $L$  изменяется на  $\Delta \bar{L}$  такое, что  $\overline{\Delta L} \cong \sqrt{\overline{\Delta L^2}}$ , то имеет место «соотношение неопределенностей» вида:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (17.5)$$

где

$$\Delta E = \sqrt{\overline{\Delta E^2}}.$$

Обратимся теперь к описанию истории частицы импульсно-энергетическими переменными ( $P$ ). Пусть одна из переменных, скажем,  $P_f = \mathcal{H}$ , так что  $\Delta E = 0$ , и согласно (17.5) время  $\Delta t$ , в течение которого заметно изменяются средние значения любой из динамических переменных, равно бесконечности ( $\Delta t \geq \frac{\hbar}{2\Delta E}$ ).

Таким образом, *при описании импульсно-энергетическими переменными микрочастица вообще не имеет никакой истории*. Этот вывод, конечно, не является неожиданным, так как описание состояния частицы импульсно-энергетическими переменными в классической механике соответствовало бы описанию движения частицы с помощью *интегралов* движения, которые по самой своей сути не зависят от времени.

Совершенно иная ситуация возникает в случае описания истории частицы посредством полного набора пространственных переменных ( $Q$ ). Эти переменные в силу принципа дополнительности не коммутируют с гамильтонианом  $H$ , поэтому средние значения  $\frac{dQ}{dt}$ , вообще говоря, отличны от нуля. Тогда из (17.4) следует, что  $\overline{\Delta E^2} > 0$ :

$$\overline{\Delta E^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} \left| \frac{dQ}{dt} \right|^2 \frac{1}{\overline{\Delta Q^2}}, \quad (17.6)$$

так что состояния ансамбля в случае, если пространственные динамические переменные  $Q$  заданы с конечной точностью (т. е.  $\Delta Q^2 \neq 0$ ), будут нестационарными: все вероятности, средние значения, средние квадратичные отложения и т. п. для всех величин будут меняться с течением времени: возникает история ансамбля, а следовательно, и история отдельной микрочастицы.

Предсказание этой истории микрочастицы будет состоять в предсказании вероятности некоторой *определенной* траектории микрочастицы:

$$(Q_0, t_0), (Q_1, t_1), \dots, (Q_k, t_k), \dots, (Q_N, t), \quad (17.7)$$

Согласно (16.16) вероятность такой траектории равна [2]:

$$\begin{aligned} dW(Q_0, t_0; Q_1, t_1, \dots, Q_k, t_k, \dots, Q_N, t) = \\ = P(Q_N, t; Q_{N-1}, t_{N-1}) P(Q_{N-1}, t_{N-1}; Q_{N-2}, t_{N-2}), \dots \\ \dots, P(Q_k, t_k; Q_{k-1}, t_{k-1}), \dots, P(Q_1, t_1; Q_0, t_0) \times \\ \times dQ_1 dQ_2 \dots dQ_{N-1}, \quad (17.8) \end{aligned}$$

где отдельные множители определяются формулой (16.17).

В простейшем случае свободного движения, согласно (16.19), имеем:

$$P(Q_k, t_k; Q_{k-1}, t_{k-1}) dQ_k = \frac{dQ_k}{A} \left| e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_k - x_{k-1})}{\Delta t}} \right|^2, \quad (17.9)$$

где  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ .

Произведение (17.8) имеет смысл вероятности того, что при последовательных измерениях координаты микрочастицы  $Q$  в моменты времени  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_N$  получаются значения координаты  $Q_0 \pm \frac{1}{2} dQ_0, Q_1 \pm \frac{1}{2} dQ_1, \dots, Q_k \pm \frac{1}{2} dQ_k, \dots, Q_N \pm \frac{1}{2} dQ_N$ , соответственно. Каждое такое измерение есть макроскопическое событие. Поэтому вероятность (17.8) есть вероятность определенной последовательности макроскопических событий, с помощью которых и описывается история индивидуальной части (рис. 12).



Эта цепочка событий могла бы быть весьма привлекательной, если бы каждое измерение координаты  $Q$  не приводило к состояниям с бесконечно большой

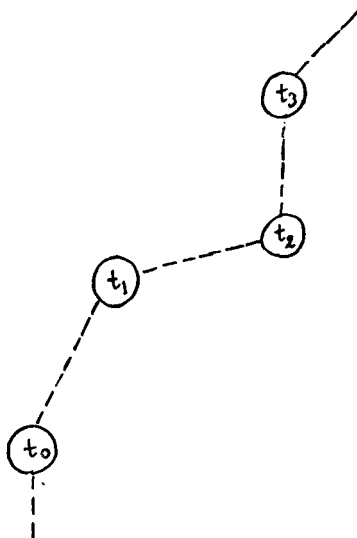


Рис. 12. Траектория микрочастицы как последовательность макроскопических событий: каждый кружок означает макроскопические явления, вызванные микрочастицей. Например, кружок может означать пузырек пара в пузырьковой камере.

энергией  $E$ . Действительно, в этом случае оператор энергии микрочастицы  $\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$ , а волновая функция равна:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{A} e^{\frac{im}{2\hbar \Delta t} (x-x_0)^2}, \quad (17.10)$$

где  $x_0$  — координата, полученная из предыдущего измерения. Среднее значение энергии микрочастицы  $\bar{E}$  в состоянии (17.10) согласно обычным формулам

квантовой механики получим из формулы:

$$\bar{E} = \frac{\int \psi^* \mathcal{E} \psi dx}{\int \psi^* \psi dx}. \quad (17.11)$$

Эти интегралы легко вычисляются, если заменить в (17.10)  $m$  на  $m + i\delta$ ,  $\delta > 0$  и потом перейти к пределу  $\delta \rightarrow 0$ . Тогда получим:

$$\bar{E} = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{m^2}{\delta} \cdot \frac{1}{\hbar \Delta t}, \quad \delta \rightarrow +0, \quad (17.12)$$

так что  $\bar{E}$  стремится к  $+\infty$  при  $\delta \rightarrow +\infty$ . Поэтому для осуществления траектории, описываемой формулой (17.8), необходимо откуда-то черпать бесконечную энергию: или из измерительного прибора ( $A + D$ ), или из энергии самой микрочастицы  $\mu$ .

В связи с этим обстоятельством мы рассмотрим более реалистичную схему описания траектории индивидуальной микрочастицы, в которой не предполагается бесконечно точного измерения координаты  $Q$ .

Допустим, что микрочастица взаимодействует с бесконечно тяжелыми атомами, расположение которых в пространстве известно, и возбуждает их, переводя из нормального состояния  $\psi_0(x)$  в возбужденное  $\psi_n(x)$ ; здесь  $x$  — координата электрона в атоме, а  $\psi(x)$  — его волновая функция. Энергию взаимодействия  $W(x-Q)$  нашей микрочастицы с электроном атома мы будем считать  $\delta$ -образной:

$$W(x-Q) = g \cdot \delta(x-Q), \quad (17.13)$$

где  $Q$  — координата микрочастицы,  $g$  — константа взаимодействия. Энергия возбуждения атома пусть будет  $\varepsilon = E_n - E_0$ , энергия микрочастицы  $E = \frac{1}{2M}$ ,  $M$  — масса частицы,  $P$  — ее импульс до столкновения с атомом, а импульс после столкновения с атомом будет  $P'$ .

Будем считать, что  $E \gg \varepsilon$ ; таким образом, источником большой энергии, необходимой для локализации микрочастицы, будет служить энергия самой микрочастицы.

Предположим, что матричный элемент плотности электрона в атоме

$$\rho_n(x) = \psi_n^*(x) \psi_0(x) \quad (17.14)$$

исчезает для  $|x| \gg a$ , так что  $a$  играет роль размера атома. Его Фурье-образ

$$\tilde{\rho}_n(q) = \int \rho_n(x) e^{iqx} d^3x \quad (17.15)$$

будет исчезать в области  $|q| \gg \frac{1}{a}$ .

Для простоты расчета предположим далее, что существует лишь один матричный элемент  $\rho_n(x)$ ; остальные пренебрежем, считая их малыми.

Возбуждение  $E_0 \rightarrow E_n$  локализованного в пространстве атома играет роль анализатора  $A$ , сортирующего микрочастицы по их координатам  $Q$  с точностью до размеров атома  $a$ . В дальнейшем возбужденный атом может инициировать скрытое изображение в зерне фотоэмульсии, или локальное вскипание пара в пузырьковой камере, конденсацию пара в камере Вильсона и подобные макроскопические явления. Эти или подобные процессы играют роль макроскопического детектора  $D$ , разрушающего интерференцию различных состояний микрочастиц.

Мы не будем входить в расчет работы этих детекторов и ограничимся расчетом первой функции измерительного устройства — анализом частиц по координатам  $A$ . Макроскопичность анализатора  $A$ , которым в нашем примере является тяжелый атом, способный к возбуждению, выражается в нашем расчете в том, что масса атома предполагается бесконечной, так что положение его центра тяжести в пространстве вполне определено.

Волновая функция рассматриваемой системы  $\mu + A$  в начальный момент времени  $t=0$  будет равна:

$$\varphi_0(x, Q) = \psi_0(x) e^{iPQ/\hbar}. \quad (17.16)$$

В момент  $t > 0$  волновую функцию этой же системы представим в виде:

$$\varphi(x, Q, t) = \varphi_0(x, Q) e^{i\omega_0 t} + \varphi(x, Q, t), \quad (17.17)$$

где  $\omega_0 = (E + E_0)/\hbar$ . Функцию  $\varphi(x, Q, t)$  будем считать малой и вычислим ее по теории возмущения. Следуя расчету, приведенному в § 11 [см. (11.14)], получим:

$$\varphi(x, Q, t) = \frac{g e^{i\omega_0 t}}{i\hbar} \int \rho_n(x') e^{(i/\hbar)(P-P', Q)} \delta(x' - Q') \times \\ \times \frac{1 - e^{-i\Omega t}}{\Omega} d^3P' \cdot dx' dQ' \cdot \psi_n(x) e^{(i/\hbar)QP'}, \quad (17.18)$$

$$\Omega = \frac{z}{t} = \frac{1}{\hbar} (E_P + E_0 - E_{P'} - E_n = E_P - E_{P'} - \mathcal{E}). \quad (17.19)$$

Мы считаем, что  $E_P \gg \mathcal{E}$ , поэтому приближенно

$$\Omega \cong \frac{1}{\hbar} (E_P - E_{P'}) = \Omega_{PP'}.$$

Рассмотрим теперь функцию  $\varphi(x, Q, t)$  при  $0 < t \ll \frac{1}{\Omega_{PP'}}$ , т. е. вскоре после возможного столкновения микрочастицы и атома. Из (17.18) находим:

$$\varphi(x, Q, t) \cong \\ \cong t \frac{g e^{i\omega_0 t}}{\hbar} \psi_n(x) \int \tilde{\rho}_n(q') e^{(\frac{iQP}{\hbar} + \frac{iQq}{\hbar})} d^3q, \quad (17.20)$$

где  $q = P' - P$ , или

$$\varphi(x, Q, t) = t \frac{g e^{i\omega_0 t}}{\hbar} \psi_n(x) \rho_n(Q) e^{\frac{iQP}{\hbar}} \cong t \psi_n(x) \varphi_n(Q). \quad (17.20^*)$$

Иными словами, при малых  $t$  состояние микрочастицы, возбудившей переход в атоме  $E_0 \rightarrow E_n$ , изображается волновой функцией

$$\varphi_n(Q) = \rho_n(Q) e^{(i/\hbar)QP}. \quad (17.21)$$

Эта функция есть волновой пакет с распределением вероятности координаты микрочастицы

$$W_n(Q) = |\rho_n(Q)|^2 \quad (17.22)$$

и с начальным средним импульсом

$$P \cong -i\hbar \int \varphi_n^*(Q) \nabla_Q \varphi_n(Q) dQ. \quad (17.23)$$

(Здесь знак  $\cong$  означает равенство с точностью до импульса электрона в атоме, равного по порядку величины  $p = \frac{h}{a} \ll P$ .)

Таким образом, акт ионизации атома сопровождается локализацией исследуемой микрочастицы в

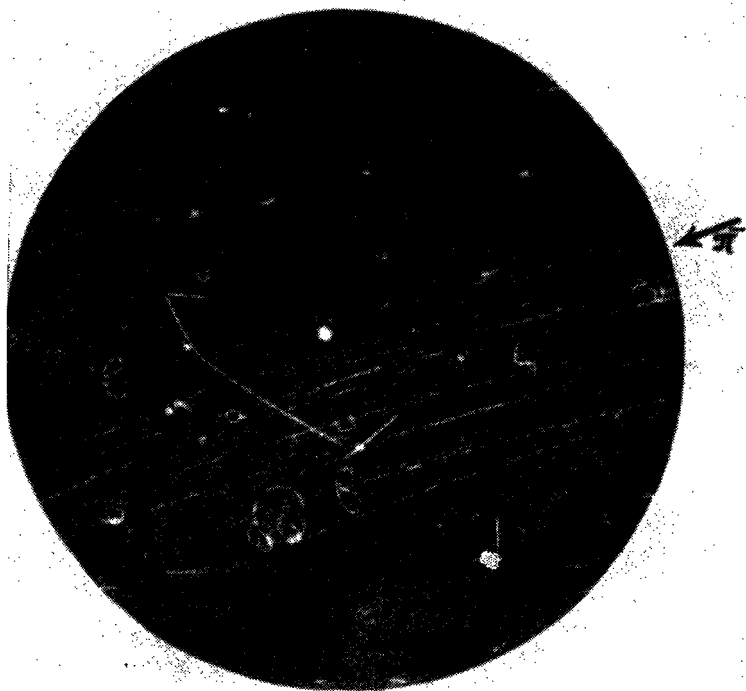


Рис. 13. Фотография реальной истории микрочастицы в пузырьковой камере.

волновом пакете (17.21), так что ионизацию атома можно рассматривать как переход частицы из состояния  $e^{(i/\hbar) Q_0 P}$  при  $t_0=0$  в состояние  $\varphi_n(Q_1)$  при  $t=t_1$  (мы применяли здесь обозначения, которыми пользовались ранее для обозначения точек траектории

микрочастицы). При  $t \gg \frac{1}{\Omega_{pp'}}$  пакет (17.21) расплывается до следующего акта ионизации в момент  $t_2$ . Для  $t - t_2 \ll \frac{1}{\Omega_{pp'}}$  вновь возникает пакет вида (17.21) и т. д.

Таким образом, в рассмотренном примере траектория микрочастицы описывается последовательностью возбуждений тяжелых атомов  $A$ , приводящих к локализации микрочастицы, с последующим инициированием процессов в детекторе  $D$ .

Несмотря на нарочитую схематичность примера, он является весьма общим по своему содержанию: *индивидуальная история частицы выражается в последовательности макроскопических событий.*

На рис. 13 изображена «история»  $\pi$ -мезона, который сталкивается с протоном и порождает два новых  $\pi$ -мезона. Траектории мезонов образованы последовательностью пузырьков в жидком водороде.

Можно ли надеяться на возможность более «тонкого» описания истории отдельной микрочастицы? Можно ли оторваться при таком описании от цепи макроскопических событий, от языка катастроф в микромире, на котором микрочастица рассказывает о своей истории? Ведь каждый пузырек, возникающий в пузырьковой камере, — это целая катастрофа в микромире.

Кажется, ничто не обнадеживает поиски подобного, более тонкого описания истории микрочастицы: в самом деле, нельзя указать ни одного опытного факта, который указывал бы на неполноту квантовой механики в том круге атомных явлений, который образует подвластная ей территория микромира.

Но будем все же осторожными и вспомним Козьму Пруткува: «кто мешает выдумать порох неподмокаемый?»

---

## ЛИТЕРАТУРА

### § 1

- 1 Ф. Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат, 1941.

### § 2

- 1 Э. Т. Уиттекер, Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937.
- 2 А. Зоммерфельд, Строение атома и спектры, Гостехиздат, 1956.
- 3 М. Борн, Успехи физических наук **69**, 173 (1959).
- 4 Э. Маделунг, Математический аппарат физики, Физматгиз, 1961.

### § 3

- 1 Дж. Гиббс, Основные принципы статистической механики, Гостехиздат, 1946.
- 2 Л. Ландау и Е. Лифшиц, Статистическая физика, гл. I, Гостехиздат, 1951.

### § 4

- 1 R. W. James, G. W. Brindley, R. J. Wood, Proc. Roy. Soc (A), **125**, 401 (1929).
- 2 И. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, «Наука», 1964.
- 3 К. В. Никольский, Квантовые процессы, Гостехиздат, 1940.
- 4 Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, «Высшая школа», 1963.
- 5 Н. Бор, Успехи физических наук **66**, 571 (1958); N. Bohr, The library of living philosophers, A. Einstein, стр. 201, 1949.
- 6 В. А. Фок, Успехи физических наук **62**, 461 (1957).
- 7 Д. И. Блохинцев, Успехи физических наук **45**, 195 (1956).

### § 5

- 1 П. Дирак, Принципы квантовой механики, § 33, Физматгиз, 1960.
- 2 D. Blokhintsev, Journ. of Phys. USSR **2**, 71 (1940).
- 3 D. Blokhintsev and P. Nemirowsky, Journ. of Phys. USSR **3**, 191 (1940); ЖЭТФ **10**, 1263 (1940).

### § 6

- 1 Д. Блохинцев, Ч. Брискина, Вестник МГУ, № 10, стр. 115 (1942).

### § 7

1. Сборник «Причинность в квантовой механике», ИЛ, 1955.

### § 8

1. Н. Мотт и Г. Месси, Теория атомных столкновений, ИЛ, 1951.
2. А. Ахиезер и И. Померанчук, Некоторые вопросы теории ядра, Гостехиздат, 1948.
3. Л. И. Мандельштам, Лекции по квантовой механике, Собрание сочинений, т. V, Изд. АН СССР, 1950.

### § 9

1. Н. Мотт и Г. Месси, Теория атомных столкновений, ИЛ, 1951.
2. Д. Блохинцев, Журнал экспериментальной и теоретической физики 17, 814 (1947).

### § 10

1. И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан, Известия Академии наук СССР, серия математическая, 15, стр. 309 (1951).
2. В. К. Мельников, Успехи математических наук, 14, 121 (1959).
3. М. Г. Крейн, Доклады Академии наук СССР 105, § 3 (1955).
4. R. Jost and W. Kohn, Phys. Rev. 87, № 6 (1952).

### § 11

1. К. В. Никольский, Квантовые процессы, гл. II, Гостехиздат, 1940.
2. В. Гейзенберг, Физические принципы квантовой теории (см. дополнения), ГТТИ, 1932.
3. Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, § 17, «Высшая школа», 1963.
4. С. И. Вавилов, Микроструктура света, Изд. АН СССР, 1950.

### § 12

1. П. Дирак, Принципы квантовой механики, § 2, Физматгиз, 1960.
2. Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, «Высшая школа», 1963.
3. В. Паули, Общие принципы волновой механики, Гостехиздат, 1947.
4. Л. И. Мандельштам, Собрание сочинений, т. III, стр. 397, Изд. АН СССР, 1950.

### § 13

1. Д. Блохинцев, Вопросы философии, № 9, 108 (1963).
2. H. S. Green, Nuovo Cimento IX, 880 (1958).

### § 14

1. E. Schrödinger, Reports of Solvay Congress, 1928.
2. Н. Бор, Успехи физических наук 66, 571 (1958); N. Bohr, The Library of Living Philosophers A. Einstein, стр. 201, 1949.

### § 15

1. А. Эйнштейн, Б. Подольский, Н. Розен, Успехи физических наук 16, 436 (1936).



2. Н. Бор, Ответ А. Эйнштейну, Успехи физических наук **16**, 446 (1936).
3. Л. И. Мандельштам, Лекции по квантовой механике, Собрание сочинений, т. V, Изд. АН СССР, 1950.

#### § 16

1. И. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, «Наука», 1964.
2. Д. Блохинцев, Успехи физических наук **45**, 195 (1951).
3. Р. Фейнман, Вопросы причинности в квантовой механике, ИЛ, 1955; Rev. Mod. Phys. **20**, № 2, 367 (1948).
4. Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, Физматгиз, 1963.
5. П. Дирак, Принципы квантовой механики, § 32, Физматгиз, 1960.
6. И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, Успехи математических наук **11**, 76 (1956).

#### § 17

1. Л. И. Мандельштам, Собрание сочинений, т. III, стр. 397, Изд. АН СССР, 1950.
  2. Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, Физматгиз, 1963.
-

Цена 48 коп.

**Эта книга посвящена одной из наиболее актуальных проблем современного естествознания и содержит ряд оригинальных исследований автора по основным проблемам квантовой механики. Несомненным достоинством книги является то, что она написана крупным физиком-теоретиком, вложившим немалую долю своего труда в развитие и истолкование квантовой механики.**

**Автор убедительно показывает ограниченность механистического понятия причинности даже там, где оно, казалось бы, должно безгранично властвовать,—в обычной механике. Подробно разбираются такие вопросы, как природа и сущность волновой функции, полнота квантовой механики и возможность существования скрытых параметров, взаимоотношение объекта и прибора в процессе измерения и т. п.**

**В основу книги положены оригинальные исследования автора. Книга написана в форме, доступной каждому, кто знаком с квантовой механикой хотя бы в объеме вузовского курса.**

**Оригинальные рисунки автора в значительной мере оживляют книгу.**