ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

под редакцией У. Мэзона

Том I

МЕТОДЫ И ПРИБОРЫ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Часть А

Перевод с английского
под редакцией
Л. Д. РОЗЕНБЕРГА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1966

УДК 534.2

Настоящая книга является первой из серии коллективных монографий по физической акустике и ее применениям, выходящих в США под общей редакцией известного американского ученого Уоррена Мэзона. Каждый из томов этой серии написан группой крупных специалистов, посвящен определенной теме и может использоваться читателями независимо от остальных томов.

В первом томе (часть А) рассматриваются следующие вопросы: распространение упругих волн в жидких и твердых средах, волноводное распространение в цилиндрах и пластинках, свойства пьезоэлектрических и пьезомагнитных материалов и их применение в генераторах и приемниках ультразвука, а также в фильтрах и резонаторах, ультразвуковые методы измерения механических характеристик жидкостей и твердых тел и, наконец, ультразвуковые линии задержки, широко используемые в современной вычислительной технике.

Книга содержит много ценного теоретического и практического материала, отражающего зарубежный опыт применения ультразвука. Она полезна для научных работников и инженеров, занимающихся исследованиями в области физической акустики и применением ультразвука в различных отраслях физики, химии и техники.

Редакция литературы по физике

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В настоящее время в США осуществляется издание четырехтомной монографии «Физическая акустика». Инициатором и редактором этого фундаментального труда является один из крупнейших специалистов в области физической и технической акустики проф. У. Мэзон, известный советскому читателю по книге «Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике» (ИЛ, 1952). Кроме того, его перу принадлежат еще две книги по физической акустике [1]); он является также автором большого числа статей, опубликованных в специальной периодической литературе, и ряда широко используемых в промышленности патентов.

В США уже вышли из печати первые два тома этой монографии; третий том, посвященный акустическим методам исследования дефектов кристаллической структуры и динамики решетки, ожидается в ближайшее время. Готовится к печати четвертый том, в котором будут изложены вопросы акустики твердого тела и применения акустических методов в квантовой физике.

В своем предисловии проф. Мэзон пишет: «Эта область науки, получившая название физической акустики, является мощным инструментом исследования и открывает широкие возможности для различных технических применений». С этим нельзя не согласиться. Действительно, акустические методы все шире проникают в самые разнообразные отрасли физики, техники и технологии. Дефектоскопия материалов и деталей, измерение упругих констант сред, исследование свойств вещества на молекулярном уровне, линии задержки, контроль химических реакций и физико-

[1]) «Electromechanical Transducers and Wave Filters», New York, 1942; «Physical Acoustics and the Properties of Solids», Princeton, 1958.

химических процессов, медицинская диагностика, гомогенизация вязких жидкостей, очистка и обезжиривание деталей точного машиностроения и приборостроения, обработка твердых и хрупких материалов, холодная сварка металлов и пластмасс, ускорение тепло- и массообмена — вот далеко не полный перечень тех направлений, в которых применение акустических колебаний открыло совершенно новые горизонты.

Возникшая в связи с этим обстоятельством потребность ознакомить широкие круги научных работников и инженеров с современным состоянием физической акустики явилась основным стимулом как к составлению настоящей монографии, так и к переводу ее на русский язык.

Эта монография относится к модному в последнее время типу так называемых коллективных монографий, в которых каждая глава написана узким специалистом в данной области. Недостатком такого метода является разностильность и различный уровень изложения отдельных глав, а также неизбежные «белые пятна» на стыках между ними. Однако преимущества — высокий средний уровень изложения и сравнительно короткий срок подготовки рукописи к печати, определяемый возможностью параллельной работы авторов,— являются решающими. Классические «индивидуальные» монографии требуют для своего написания неизмеримо больше времени, и известны случаи, когда книга, к сожалению, оказывается устаревшей уже к моменту выхода ее в свет.

Первый том носит общее название «Методы и приборы ультразвуковых исследований»; настоящий полутом (часть А) содержит семь глав. Первая глава «Распространение волн в жидкостях и твердых телах», написанная Терстоном, и вторая «Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках», написанная Микером и Мейтцлером, являются вводными. В них в сжатой форме изложены основы механики сплошных сред, главным образом для колебаний малых амплитуд. Авторам удалось в сравнительно небольшом объеме дать основные сведения, на которых базируется содержание последующих специальных глав.

Третья глава «Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях» написана ведущими научными сотрудниками фирмы «Кливайт»— Берлинкуром, Кераном и Жаффе. В этой главе описываются пьезоэлектрические

свойства монокристаллов и пьезоэлектрических керамик, приводятся подробные справочные данные, относящиеся к наиболее употребляемым материалам, и необходимые сведения об особенностях распространения упругих волн в пьезоэлектрических моно- и поликристаллах. Особенно следует отметить параграф, где рассматривается поведение пьезоэлектриков при колебаниях большой амплитуды: уменьшение эффективности, вызываемое диэлектрическими и механическими потерями, динамические деформации материалов, деполяризация керамики под действием нагрева и электрического поля. Последний параграф главы посвящен пьезомагнитным материалам — ферритам. Этим перспективным материалам отведено незаслуженно мало места, что, по-видимому, объясняется фирменными интересами: фирма «Кливайт», являющаяся практически монополистом в области разработки и производства пьезоэлектрической керамики в США, ферритов не производит.

Четвертая глава называется «Ультразвуковые методы измерения механических характеристик жидкостей и твердых тел». Автор ее Мак-Скимин является известным специалистом в этой области; глава представляет существенный интерес для лиц, работающих в этом направлении.

Пятая глава «Применение пьезоэлектрических кристаллов и механических резонаторов в фильтрах и генераторах» написана Мэзоном, являющимся одним из основоположников этого практически важного направления. В главе приводятся теоретические основы рассматриваемого вопроса и многочисленные примеры практических применений, включая конструктивные чертежи и фотографии готовых изделий.

Две последние главы (шестая и седьмая) посвящены линиям задержки — приборам, получившим в настоящее время широкое распространение и являющимся неотъемлемой частью электронных вычислительных, управляющих и логических машин, систем накопления и выбора информации и т. д. Шестая глава «Волноводные ультразвуковые линии задержки» (автор Мей) посвящена линиям с использованием продольных и поперечных колебаний, крутильных волн, дисперсионным линиям, а также преобразователям, применяемым в линиях задержки. Седьмая глава (автор Мэзон) носит название «Ультразвуковые линии задержки с многократными отражениями».

Как видно из краткого содержания глав, данный полутом представляет собой сжатое, но достаточно полное, написанное на абсолютно современном уровне изложение ряда разделов физической акустики от теории сплошных сред до конкретных практических применений. Некоторым недостатком, свойственным, как уже говорилось выше, всем подобным изданиям, является разностильность и различная «насыщенность» изложения отдельных глав. Другим недостатком следует считать слабое знакомство некоторых авторов с работами советских ученых, что понизило в ряде мест научный уровень изложения. Если, например, в седьмой главе изложено большинство работ советских авторов в области линий задержки, то в третьей главе цитируются лишь две такие работы, причем содержание одной из них (как это указано в примечании редактора перевода) изложено неверно. В этой же главе полностью отсутствует указание на основополагающие работы Б. М. Вула и его сотрудников, на очень интересные исследования Г. А. Смоленского, Р. Е. Пасынкова и других советских ученых.

В целом данная книга, несомненно, представляет большой интерес для научных работников и инженеров, соприкасающихся с широким кругом вопросов физической акустики, физики твердого тела, разнообразных применений ультразвука и т. д.

Перевод книги выполнили: гл. 1 — А. Л. Полякова, гл. 2 — И. А. Викторов, гл. 3 — Р. Е. Пасынков, гл. 4 — В. Ф. Казанцев и гл. 5 — 7 — Ю. Я. Борисов.

Проф. Л. Розенберг

ПРЕДИСЛОВИЕ У. МЭЗОНА

Высокочастотные звуковые волны в газах, жидкостях и твердых телах являются мощным средством исследования движений молекул, дефектов кристаллов, доменных границ и прочих типов движений, возможных в этих средах. Более того, волны большой и малой амплитуды в этих средах находят важные применения в различных технических устройствах. Сюда относятся линии задержки для накопления информации, механические и электромеханические фильтры для разделения каналов связи, приборы для ультразвуковой очистки, дефектоскопии, контроля, измерения, обработки, сварки, пайки, полимеризации, гомогенизации и др., а также устройства, используемые в медицинской диагностике, хирургии и терапии. Контрольно-аналитические применения звуковых волн, так же как и их использование в технических устройствах, быстро разрастаются. За последние пять лет изучены такие явления, как затухание звука вследствие фонон-фононного взаимодействия, взаимодействие звука с электронами и магнитным полем, взаимодействие звуковых волн со спинами ядер и спинами электронов, затухание, вызываемое движением точечных и линейных дефектов (дислокаций), а также такие крупномасштабные движения, как движение полимерных сегментов и цепочек и движение доменных границ. Таким образом, очевидно, что эта область науки, получившая название физической акустики, является мощным инструментом исследования и открывает широкие возможности для различных технических применений.

В связи с тем, что эта область науки так быстро развивается, возникла необходимость в создании серии книг, которые могли бы дать общую трактовку технических, прикладных и аналитических результатов, полученных с использованием методов физиче-

ской акустики. Поскольку все применения аналитического и прикладного порядка зависят от инструментов и методов, используемых для генерации и измерения механических напряжений и упругих волн в газах, жидкостях и твердых телах, этот первый том посвящен генерации, приему и практическому применению акустических волн в таких средах. Так как практические применения непрерывно развиваются, основное внимание уделено физике явлений, а не техническим деталям. Однако даны исчерпывающие ссылки на литературу по этим применениям.

Поскольку для изложения всех этих вопросов потребовалось привести большой материал, первый том разделен на две части — А и Б. В томе I, А описываются распространение волн бесконечно малой и конечной амплитуды в жидкостях и твердых телах; изменения, вызываемые границами; преобразователи, необходимые для генерации волн малой и большой амплитуды; методы определения свойств таких волн; использование ультразвуковых колебаний в дисперсионных линиях задержки и в линиях задержки без дисперсии, в механических и электромеханических фильтрах, а также для стабилизации частоты генераторов и создания эталонов времени и частоты.

Том I, Б посвящен использованию волн большой амплитуды в жидкостях и твердых телах, а также целому ряду новых полупроводниковых устройств, которые получают широкое применение для измерения давлений, сил и деформаций. Высокочувствительные устройства для измерения давления, использующие транзисторы, позволяют превращать звуковые колебания в воздухе в электрические колебания в цепи и, следовательно, действуют как микрофоны. Они обладают большей чувствительностью, чем угольные микрофоны, и большей эффективностью преобразования постоянного напряжения на входе в переменное электрическое напряжение на выходе. Полупроводниковые преобразователи с запирающим, диффузионным и эпитаксиальным слоями позволяют создать сверхвысокочастотные устройства, способные генерировать сдвиговые и продольные волны в диапазоне тысяч мегагерц. Они применяются для прикладных целей и для фундаментального исследования очень быстрых движений в жидкостях и твердых телах. В заключительной главе рассматриваются новые способы получения больших деформаций в твердых образцах.

В следующих трех томах, которые находятся в процессе написания и редактирования, основные представления первого тома применяются к анализу молекулярного взаимодействия в газах, жидкостях, полимерах и в других типах твердых тел и кристаллов. Во втором томе рассматривается распространение волн в газах, жидкостях, растворах и полимерах и описываются возникающие при этом эффекты.

В томе III, А рассматривается влияние точечных, линейных (дислокации) и поверхностных (границы кристаллитов) несовершенств на акустические потери и скорость звука в поликристаллах, а также в монокристаллических металлах и диэлектриках. В томе III, Б рассматривается динамика решетки; последняя глава этого тома посвящена механизмам потерь в земной коре.

Четвертый том посвящен преимущественно таким вопросам, которые вносят вклад в развитие физики твердого тела.

Вопросы теории во всех томах излагаются последовательно и систематически, и мы надеемся, что эти книги сохранят свою ценность и после того, как темы, к которым они относятся, получат дальнейшее развитие. Хотя нашей основной целью является составление справочника, охватывающего все главные разделы физической акустики, мы полагаем, что эти книги будут полезны как учебные пособия студентам или достаточно подготовленным читателям, интересующимся физической акустикой.

Редактор благодарит многочисленный коллектив авторов этих томов и издателей за их неизменную помощь и советы.

Уоррен П. Мэзон

Декабрь, 1963.

Глава 1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ЖИДКОСТЯХ И ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Р. ТЕРСТОН[1])

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей главе приводятся основные уравнения, необходимые для описания волн, распространяющихся в жидкостях и твердых телах. В качестве иллюстрации рассматривается приложение этих уравнений в некоторых простых случаях, когда элементарный волновой процесс незатемнен слишком многими явлениями, усложняющими картину.

Среду, в которой распространяются волны, за редким исключением, удобно рассматривать как *континуум*, т. е. как сплошную среду. Даже в тех случаях, когда волны используются для исследования молекулярной или атомной структуры вещества, параметры, характеризующие структуру вещества, часто связывают со свойствами эквивалентной сплошной среды.

В этой главе сначала излагаются некоторые основные положения механики сплошных сред, а затем рассматриваются волны малой амплитуды в ряде относительно простых случаев.

§ 2. ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

При рассмотрении сплошной среды вводятся понятия *полей*: поля плотности, поля скоростей, напряжений и т. д. Эти поля должны удовлетворять основным законам сохранения, или *уравнениям баланса* массы, импульса, момента количества движения и энергии. Основные уравнения баланса выполняются в любой среде. Кроме того, имеются некоторые специальные соотношения, характеризующие конкретные свойства той или иной среды; они устанавливают связь между механическими напряжениями и другими параметрами, определяют поток немеханической энергии, связывают друг с другом различные термодинамические перемен-

[1]) «Белл телефон леборатриз», Мерри-Хилл, Нью-Джерси.

ные. Примерами таких соотношений являются закон Гука, закон Ньютона для вязкости, закон Фурье для теплопроводности и уравнение состояния идеального газа. Конкретные уравнения для вязких или идеальных жидкостей, для упругого или вязкоупругого твердого тела и т. п. могут быть получены при подстановке соответствующих соотношений, описывающих свойства той или иной среды, в основные уравнения баланса.

1. *Материальное и пространственное описания*

Представим себе фиксированную систему декартовых координат с осями x_i ($i = 1, 2, 3$). Положение любой точки в пространстве определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$ с компонентами (x_1, x_2, x_3). Точка, которая всегда движется вместе с веществом, называется *частицей* или *материальной точкой*. Линии и поверхности, состоящие из частиц, называются *материальными* линиями и поверхностями. Вещество, находящееся внутри замкнутой материальной поверхности, называется *телом*.

Припишем каждой частице ее координаты в некоторый момент времени t_0, который примем в качестве начала отсчета времени. Эти начальные координаты в той же декартовой системе будем обозначать (a_1, a_2, a_3), а соответствующий радиус-вектор обозначим $\mathbf{a}$. Вектор $\mathbf{a}$ может служить для определения той частицы, которая в момент времени t_0 находилась в данной точке пространства. Момент времени t_0 и радиус-вектор $\mathbf{a}$ иногда называют *начальными* значениями.

Как вектор $\mathbf{r}$, так и вектор $\mathbf{a}$ могут служить для обозначения положения частицы в фиксированной декартовой системе отсчета. Векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$ в некоторый момент времени t связаны между собой следующим условием: радиус-вектор $\mathbf{r}$ определяет положение той частицы в момент времени t, которая в начальный момент находилась в точке $\mathbf{a}$. Эта связь между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$ может быть записана в следующем виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{a}), \quad \text{или} \quad x_i = x_i(t, a_1, a_2, a_3), \tag{1.1}$$

где

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(t_0, \mathbf{a}), \quad \text{или} \quad a_i = x_i(t_0, a_1, a_2, a_3). \tag{1.2}$$

Координаты a_i, связанные с частицами, называются *материальными* координатами. Такое описание процессов, в котором в качестве независимых переменных используются величины (t, a_1, a_2, a_3), как, например, в уравнении (1.1), называется *материальным* описанием.

Обращая уравнения (1.1) и (1.2), можно написать

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t, \mathbf{r}), \quad \text{или} \quad a_i = a_i(t, x_1, x_2, x_3), \tag{1.3}$$

где

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}(t_0, \mathbf{r}), \quad \text{или} \quad x_i = a_i(t_0, x_1, x_2, x_3). \tag{1.4}$$

В *пространственном* описании в качестве независимых переменных используются величины (t, x_1, x_2, x_3), где x_i называются *пространственными* координатами. Величины x_i, используемые как независимые переменные, определяют просто точку в пространстве. Часто представляет интерес пространственное описание поля давлений или поля скоростей, а не начальное положение частиц. В подобных случаях при использовании пространственного описания обычно ограничиваются определением требуемых характеристик полей и не определяют функций a_i из уравнения (1.3).

Обычно материальные и пространственные переменные называют *переменными Лагранжа* и *Эйлера* соответственно, хотя Эйлер использовал оба эти вида переменных раньше, чем Лагранж [1]. В настоящей книге, следуя Трусделлу и Тупину [2], мы используем названия материальные и пространственные переменные [1]).

Скорость. Если материальные координаты (a_1, a_2, a_3) в уравнении (1.1) фиксированы, то величины (x_1, x_2, x_3) являются текущими координатами той частицы, которая в начальный момент времени находилась в точке, определяемой вектором $\mathbf{a}$. Координаты этой частицы зависят теперь только от времени, так как вектор $\mathbf{a}$ обозначает лишь, какая именно частица рассматривается. Следовательно, если ограничиться рассмотрением одной частицы, то компоненты ее скорости представляют собой просто обычные производные по времени $\dot{x}_i = dx_i/dt$. Если учитывать также наличие других частиц, то нужно взять частную производную при постоянных значениях параметров a_i:

$$v_i = \dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt} \equiv \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)_{a_1, a_2, a_3}. \tag{1.5}$$

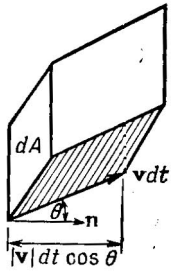
Вектор скорости

$$\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} \equiv \mathbf{i}_i v_i \quad \text{(суммирование по } i\text{)}. \tag{1.6}$$

Здесь $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ и $\mathbf{i}_3$ — единичные векторы, направленные вдоль осей координат. В выражении (1.6) и всюду далее подразумевается суммирование по повторяющимся дважды индексам. Таким образом, $\mathbf{i}_i v_i$ обозначает $\sum_{i=1}^{3} \mathbf{i}_i v_i$, а $v_j(\partial F/\partial x_j)$ обозначает $\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} F$.

[1]) В русской литературе более принятыми являются названия переменные Лагранжа и Эйлера.— *Прим. перев.*

Интерпретация величин $\iint \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA$ **и** $\operatorname{div}\mathbf{v}$. Вычислим скорость, с которой вещество пересекает фиксированный элемент поверхности площади dA с единичным вектором, направленным по нормали $\mathbf{n}$. За малый интервал времени dt каждая частица смещается приблизительно на расстояние $\mathbf{v}\,dt$. Следовательно, как видно из фиг. 1, вещество, которое за время dt пересекает элемент поверхности, т. е. перетекает со стороны $-\mathbf{n}$ на сторону $+\mathbf{n}$, находится в объеме, приближенно равном объему призмы, имеющей в основании элемент площади dA и ребро, равное $\mathbf{v}\,dt$. Объем призмы



Фиг. 1. Смысл скалярного произведения $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$: 1) объем вещества, протекающего через фиксированную поверхность единичной площади за единицу времени; 2) объем пространства, через который проходит материальная поверхность единичной площади за единицу времени.

$\mathbf{v}$ — материальная скорость, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к площади dA

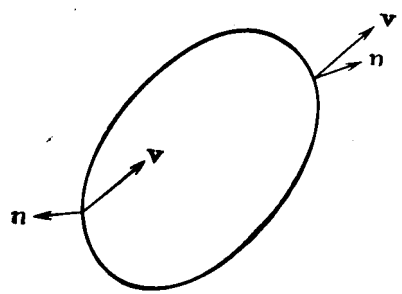
$$\text{объем} = |\mathbf{v}|\cos\theta\,dt\,dA = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA\,dt.$$

равен $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA\,dt$, а масса вещества, содержащегося в этой призме, равна $\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA\,dt$, где ρ — плотность вещества. Объемная скорость потока через элемент поверхности $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA$ равна объему вещества, протекающего через элемент dA за единицу времени. Массовая скорость равна $\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA$. Следует ясно представлять себе, что даже тогда, когда величины $\mathbf{v}$ и ρ изменяются, величины $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ и $\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ являются точными выражениями для локальных объемной и массовой скоростей потока через единичную площадку.

Если обозначить через $\mathbf{n}$ единичный вектор *внешней* нормали к *замкнутой* поверхности, как это показано на фиг. 2, то полный поток скорости через замкнутую поверхность будет равен $\iint \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA$; он представляет собой объем вещества, вытекающего из замкнутой поверхности. Полный поток массы $\iint \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA$ равен массе вещества, вытекающего наружу через эту поверхность.

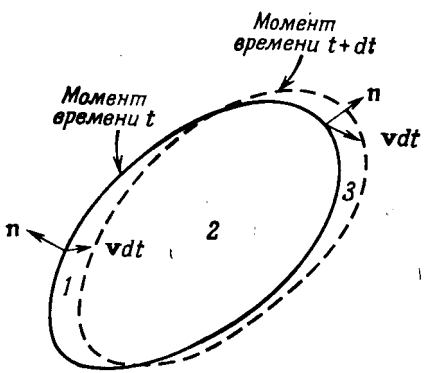
С другой стороны, фиг. 1 можно интерпретировать иначе: величина $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA\,dt$ представляет собой также тот объем, через который элемент материальной поверхности проносится за малый интервал времени dt. Этот объем положителен, если в конце данного интервала времени он оказывается расположенным со стороны отрицательной нормали — $\mathbf{n}$ по отношению к движущемуся элементу поверхности.

На фиг. 3 показано положение замкнутой материальной поверхности в моменты времени t и $t + dt$. Эти два положения



Фиг. 2. Скорость, с которой вещество вытекает из замкнутой фиксированной поверхности, равна $\oiint \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA$.

v — материальная скорость, n — единичный вектор нормали.



Фиг. 3. Скорость увеличения объема внутри замкнутой материальной поверхности равна $\oiint \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA$.

v — скорость движения поверхности, n — единичный вектор нормали.

материальной поверхности определяют три области пространства: объем *1*, который остался позади движущейся материальной поверхности, объем *2*, который является общим для обеих материальных поверхностей в моменты t и $t + dt$, и объем *3*, который только что попал внутрь движущейся поверхности. Этот последний объем можно получить, интегрируя величину $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA\,dt$ по той части поверхности, где величина $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ положительна. Если распространить интегрирование на остальную часть поверхности, то объем, оставшийся позади движущейся поверхности, войдет со знаком минус и вычтется из величины захваченного объема. Следовательно, величина $\oiint \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA$ есть скорость изменения объема внутри замкнутой материальной поверхности с единичным вектором внешней нормали $\mathbf{n}$, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$.

Это можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_V dV = \iint \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dA, \tag{1.7}$$

где V — объем области, занятой движущимся телом, т. е. объем, ограниченный замкнутой материальной поверхностью.

Таким образом, мы имеем две разные интерпретации величины $\iint \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dA$: 1) поток скорости через фиксированную замкнутую поверхность и 2) скорость изменения объема тела. Используя теорему Гаусса

$$\iint \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dA = \int\int\int \operatorname{div}\mathbf{v}\, dV \tag{1.8}$$

и замечая, что эта теорема должна выполняться для любой сколь угодно малой области пространства, получаем соответственно две интерпретации величины $\operatorname{div}\mathbf{v}$. А именно $\operatorname{div}\mathbf{v}$ в некоторой точке пространства есть: 1) предел плотности потока скорости вещества, вытекающего наружу из фиксированного объема, взятого в той точке пространства, где оценивается $\operatorname{div}\mathbf{v}$, при стремлении этого объема к нулю, и 2) предел скорости расширения частицы, находящейся в той точке, где оценивается $\operatorname{div}\mathbf{v}$, отнесенной к единице объема. Если через dV обозначить зависящий от времени объем малого тела, то вторая интерпретация дает

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \lim_{dV\to 0} \frac{1}{dV}\frac{d}{dt}(dV). \tag{1.9}$$

Материальная производная. Важно различать изменение во времени какой-либо из характеристик поля в фиксированной точке пространства и изменение той же характеристики во времени для некоторой фиксированной частицы, т. е. когда изменения поля рассматриваются, как бы следуя за движением фиксированной частицы. Скорость изменения параметров для фиксированной частицы, которая называется *материальной производной*, имеет фундаментальное значение.

Мы можем следить за какой-либо частицей, если фиксируем величину $\mathbf{a}$. Следовательно, в материальном описании (переменные Лагранжа) материальная производная есть частная производная по времени $(\partial/\partial t)$. В пространственном описании (переменные Эйлера) материальная производная обозначается как d/dt или точкой над символом соответствующей величины.

Пусть одно и то же поле обозначается символом F в пространственном описании и символом f в материальном описании. Тогда

$$f(t, a_1, a_2, a_3) = F[t, x_1(t, a_1, a_2, a_3), x_2(t, a_1, a_2, a_3), x_3(t, a_1, a_2, a_3)]. \tag{1.10}$$

По определению, материальная производная

$$\dot{F} \equiv \frac{dF}{dt} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{a_1, a_2, a_3}. \tag{1.11}$$

Чтобы получить выражение для материальной производной в пространственном описании, продифференцируем уравнение (1.10) и используем (1.11):

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} F. \tag{1.12}$$

Частные производные от F взяты в пространственном описании, а производные от f и x_i — в материальном описании. Величина $\partial F/\partial t$ представляет собой ту часть материальной производной, которая описывает изменение F со временем в фиксированной точке пространства, тогда как член $\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} F$ возникает вследствие движения частицы в поле F, величина которого меняется от точки к точке. Произведение $\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} F$ иногда называют *конвекцией* величины F.

Ускорение. Ускорение частицы есть быстрота изменения ее скорости; следовательно, ускорение представляет собой материальную производную поля скоростей

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{i}_i \dot{v}_i. \tag{1.13}$$

Если компоненты скорости записать как функции пространственных координат $v_i(t, x_1, x_2, x_3)$, то компоненты ускорения могут быть выражены в форме, аналогичной (1.12):

$$\frac{dv_i}{dt} = \dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} v_i. \tag{1.14}$$

Изменение объема. Рассмотрим некоторое тело, которое в начальный момент времени представляло собой прямоугольный параллелепипед с объемом $dV_0 = da_1\, da_2\, da_3$. В некоторый момент t объем этого тела будет равен dV, причем этот объем удовлетворяет соотношению

$$\lim_{dV_0 \to 0}\left(\frac{dV}{dV_0}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} \equiv J. \tag{1.15}$$

Детерминант в (1.15) представляет собой *функциональный детерминант*, или *якобиан* J переменных (x_1, x_2, x_3) по переменным (a_1, a_2, a_3). На основании уравнения (1.15) потребуем, чтобы выполнялось условие $J > 0$. Поскольку $dV \to 0$ при $dV_0 \to 0$ и поскольку начальный объем dV_0 не зависит от времени, уравнение (1.9) можно переписать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{dV_0 \to 0} \left(\frac{dV_0}{dV}\right) \frac{d}{dt} \left(\frac{dV}{dV_0}\right) = \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt}. \tag{1.16}$$

Уравнение (1.16) можно получить формально, если продифференцировать якобиан (1.15), записать величину $1/J$, которая является якобианом переменных (a_1, a_2, a_3) по переменным (x_1, x_2, x_3), и использовать следующие соотношения:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial a_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial a_j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v_s}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial x_s} = \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Скорость изменения свойств тела. Чтобы применить законы баланса массы, импульса и энергии для тела конечных размеров, нам нужно выражение для скорости изменения свойств этого тела. Пусть V — объем области пространства, занятой движущимся телом в текущий момент времени t, а $F(t, x_1, x_2, x_3)$ — некоторая материальная характеристика, отнесенная к единице объема. Тогда величина

$$P(t) \equiv \iiint_V F \, dV \tag{1.17}$$

представляет собой *свойство этого тела*. Если каждая частица движется со скоростью $v(t, x_1, x_2, x_3)$, то искомое выражение для скорости изменения свойства тела имеет вид

$$\frac{dP}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \iiint_V F \, dV = \iiint_V \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div} F\mathbf{v}\right) dV. \tag{1.18}$$

Применяя теорему Гаусса для векторного поля $F\mathbf{v}$, мы можем привести выражение (1.18) к следующему виду:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V F \, dV = \iiint_V \frac{\partial F}{\partial t} \, dV + \iint F\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA. \tag{1.19}$$

Это выражение носит название *теоремы переноса*.

Чтобы более наглядно представить себе последние выражения, обратимся снова к фиг. 3 и напомним, что величина $\iint \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$ есть скорость изменения объема, вызванная движением его поверх-

ности. Аналогично этому величина $\oint\!\!\oint F\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA$ есть скорость изменения параметра P, вызванная движением поверхности. С другой стороны, если бы поверхность не двигалась, то скорость изменения величины P определялась бы интегралом $\int\int\int_V (\partial F/\partial t)\,dV$. Складывая эти два выражения, получаем выражение (1.19). Применяя теорему Гаусса к (1.19), получаем выражение (1.18).

Выражение (1.18) можно получить, если преобразовать (1.17) к материальным переменным. Используя правила преобразования переменных интегрирования в многократном интеграле, можно представить (1.17) в виде

$$P(t) = \int\int\int_{V_0} f(t,\ a_1,\ a_2,\ a_3)\,J\,da_1\,da_2\,da_3, \tag{1.20}$$

где f и J — функции, заданные выражениями (1.10) и (1.15) соответственно, а V_0 — первоначальный объем рассматриваемого тела. Поскольку в (1.20) область интегрирования не зависит от t, можно написать

$$\frac{dP}{dt} = \int\int\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t}(fJ)\,da_1\,da_2\,da_3, \tag{1.21}$$

где f и J — функции от $(t,\ a_1,\ a_2,\ a_3)$. Перейдем теперь обратно к пространственным переменным $(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$. Тогда новое подынтегральное выражение будет равно $(1/J)(\partial/\partial t)(fJ)$, где f и J все еще выражены в материальных переменных. В пространственном описании частная производная по времени становится материальной производной. Поэтому, используя (1.10) и (1.16), найдем

$$\frac{dP}{dt} = \int\int\int_V \left(\frac{dF}{dt} + F\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right) dV, \tag{1.22}$$

что эквивалентно выражению (1.18), если учесть (1.12) и векторное тождество

$$\mathrm{div}\,F\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,F + F\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}. \tag{1.23}$$

2. Баланс массы, импульса, момента количества движения и энергии

Здесь даны уравнения, выражающие четыре хорошо известных закона сохранения в применении к материальному телу: 1) масса тела остается постоянной, 2) скорость изменения импульса тела равна действующей силе, 3) скорость изменения момента

количества движения тела равна моменту действующей силы и 4) увеличение энергии тела равно работе внешних сил, произведенной над этим телом, плюс тепловая энергия и другие виды немеханической энергии, которые сообщаются телу. Эти законы баланса массы, импульса, момента количества движения и энергии обычно называют *законами сохранения*.

Фундаментальные формулы (1.18) и (1.19) позволяют выразить эти законы в виде уравнений.

Уравнение непрерывности. Подставляя в выражение (1.18) вместо F плотность ρ, получаем общее выражение для скорости изменения массы тела. Приравнивая это выражение нулю, получаем уравнение сохранения массы. Поскольку интеграл должен быть равен нулю для произвольного объема V, само подынтегральное выражение должно всюду равняться нулю. Таким образом,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \tag{1.24}$$

Уравнение, выражающее закон сохранения массы, обычно называют уравнением непрерывности. Напишем также уравнение непрерывности в форме, соответствующей уравнению (1.22):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{1.25}$$

Используя формулу (1.15), закон сохранения массы можно также записать в следующем виде:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = J. \tag{1.26}$$

Иногда для удобства математического описания потоков вводят некоторые гипотетические источники и стоки. Уравнение непрерывности в обычной форме приложимо к тем областям, из которых подобные источники и стоки исключены.

Другая формула для скорости изменения свойств тела. Применим (1.22) к функции ρF вместо F. Тогда подынтегральное выражение примет вид

$$\frac{d}{dt}(F\rho) + F\rho \operatorname{div} \mathbf{v} = F\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}\right) + \rho \frac{dF}{dt}.$$

Если плотность ρ удовлетворяет уравнению непрерывности, то подынтегральное выражение сводится к величине $\rho\, dF/dt$. Таким образом, получим

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho F \, dV = \iiint_V \rho \frac{dF}{dt} \, dV. \tag{1.27}$$

В этом уравнении величину F следует рассматривать как некоторую материальную характеристику, отнесенную к единице массы, так что (1.27) также дает скорость изменения некоторого свойства материального тела.

Рассмотрим теперь какую-нибудь векторную характеристику тела F, отнесенную к единице массы. Поскольку к каждой компоненте этого вектора можно применить уравнение вида (1.27), получим аналогичное *векторное* уравнение

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\mathbf{F}\,dV = \iiint_V \rho\frac{d\mathbf{F}}{dt}\,dV. \tag{1.28}$$

Уравнение движения, или уравнение для импульса. Уравнениями движения, или уравнениями для импульса тела, называются обычно уравнения, в которых выражается закон, гласящий, что сила, действующая на тело, равна скорости изменения импульса этого тела или, что то же самое, его количества движения.

Импульс некоторого элементарного объема dV равен $\rho\mathbf{v}\,dV$, где $\rho\mathbf{v}$ — импульс единицы объема, а $\mathbf{v}$ — импульс единицы массы. Из уравнения (1.27), примененного к каждой декартовой компоненте импульса, или прямо из уравнения (1.28) имеем

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\mathbf{v}\,dV = \iiint_V \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dV. \tag{1.29}$$

Записывая вектор скорости в виде $\mathbf{v} = \mathbf{i}u = \mathbf{j}v + \mathbf{k}w$ и используя уравнение (1.19), можно также получить уравнение для одной из компонент скорости

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho u\,dV = \iiint_V \frac{\partial(\rho u)}{\partial t}\,dV + \iint \rho u\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA. \tag{1.30}$$

Аналогичные уравнения можно получить для других компонент. Это приводит к векторному уравнению

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\mathbf{v}\,dV = \iiint_V \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t}\,dV + \iint \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dA. \tag{1.31}$$

Уравнение (1.31) особенно полезно при вычислении скорости изменения импульса тела в стационарном потоке, где исчезают все частные производные по времени. В этом случае скорость возрастания импульса тела сводится к потоку импульса, выходящего наружу из замкнутой поверхности, которая совпадает с границами тела в текущий момент времени.

Следует различать объемные силы, пропорциональные массе или объему элемента dV, и поверхностные силы, действующие на поверхность этого элемента объема. Наиболее известным

примером объемных сил является сила тяготения. Введем следующие обозначения:

$\mathbf{F}$ — объемная сила, отнесенная к единице объема,

$\overset{n}{\mathbf{T}}$ — вектор напряжения (сила, отнесенная к единице площади).

Поверхностная сила $\overset{n}{\mathbf{T}}$ есть та сила, с которой среда, расположенная со стороны положительной нормали $+\mathbf{n}$ от элемента поверхности с единичной нормалью $\mathbf{n}$, действует в сторону отрицательной нормали $-\mathbf{n}$. По аналогии с третьим законом Ньютона о равенстве действия и противодействия имеем

$$\overset{-n}{\mathbf{T}} = -\overset{n}{\mathbf{T}}. \tag{1.32}$$

Результирующая сила, действующая на тело, равна векторной сумме всех объемных и поверхностных сил, действующих на каждый элемент объема dV. Согласно (1.32), поверхностные силы для всех участков поверхности, которые являются общими для двух элементов объема, взаимно уничтожаются. Поэтому нужно рассматривать только поверхностные силы, действующие на поверхность, ограничивающую тело. Таким образом, результирующая сила, действующая на тело, которое занимает движущийся объем V, равна

$$\int\int\int_V \mathbf{F}\,dV + \oiint \overset{n}{\mathbf{T}}\,dA. \tag{1.33}$$

В выражении (1.33) принято, что нормаль $\mathbf{n}$, входящая в определение вектора $\overset{n}{\mathbf{T}}$, есть единичная нормаль к элементу поверхности dA, направленная *наружу* относительно замкнутой поверхности, окружающей тело.

Приравнивая выражения (1.33) и (1.29) или (1.31), мы можем получить уравнение движения в весьма общей форме. Например,

$$\int\int\int_V \mathbf{F}\,dV + \oiint \overset{n}{\mathbf{T}}\,dA = \int\int\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dV. \tag{1.34}$$

Уравнение для момента количества движения. В механике системы, состоящей из точечных масс, закон, связывающий внешний вращающий момент с изменением момента количества движения, обычно выводят, применяя к каждой точечной массе второй закон Ньютона. При этом предполагается, что сила взаимодействия между любыми двумя массами 1) действует вдоль линии, соединяющей эти две массы, и 2) удовлетворяет закону равенства действия и противодействия. В данном изложении меха-

ники сплошной среды принимается в качестве отдельного общего принципа, что вращающий момент равен скорости изменения момента количества движения.

В механике точечных масс момент количества движения есть момент импульса линейного движения, а вращающий момент есть момент силы. Эти моменты должны определяться относительно одной и той же точки.

Теперь мы должны ответить на вопрос, являются ли понятия момента линейного импульса и момента силы, введенные в механике точечных масс, тождественными понятиям момента количества движения и вращающего момента, используемым в механике сплошных сред. Напомним, что на магнитный диполь с магнитным моментом $\mathbf{m}$, помещенный в однородное магнитное поле $\mathbf{B}$, действует не сила, а вращающий момент, равный $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$, который стремится расположить диполь вдоль поля. Это наводит на мысль, что если вещество обладает магнитным моментом на единицу объема $\mathbf{M}$, то на единицу объема тела действует *объемный вращающий момент* $\mathbf{G} = \mathbf{M} \times \mathbf{B}$. Чтобы включить в рассмотрение подобные объемные вращающие моменты, допустим, что на каждый элемент объема действует *объемная пара сил* $\mathbf{G}\, dV$, которая не может быть выражена как момент какой-либо объемной силы в механике сплошных сред. Мы включим в рассмотрение также *пару напряжений*, которая создает вращающий момент $\overset{n}{\mathbf{M}}\, dA$, действующий на каждый элемент поверхности, ограничивающей тело. Таким образом, мы обобщили понятие «вращающий момент» так, что оно включает в себя не только момент силы, но и пары сил. Чтобы получить подобное обобщение момента количества движения, введем *плотность спина* $\rho\mathbf{S}$, которая определяется как разность между моментом количества движения и моментом линейного импульса на единицу объема.

Если $\mathbf{r}$ — радиус-вектор некоторого элемента объема dV, то линейный импульс этого элемента объема равен $\rho\mathbf{v}\, dV$, а момент количества движения равен $\mathbf{r} \times \rho\mathbf{v}\, dV$. Введя добавочно спин, или момент собственного вращения $\rho\mathbf{S}\, dV$, можно записать скорость изменения полного момента количества движения в виде

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_V \rho\,(\mathbf{S} + \mathbf{r} \times \mathbf{v})\, dV = \int\int\int_V \rho\left[\dot{\mathbf{S}} + \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v})\right] dV.$$

Поскольку $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, а векторное произведение вектора на самого себя равно нулю, получим $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}$.

На каждый элемент объема действуют объемная сила $\mathbf{F}\, dV$, момент которой равен $\mathbf{r} \times \mathbf{F}\, dV$, и добавочная объемная пара

сил $\mathbf{G}\,dV$. Со стороны каждого элемента поверхности, окружающей тело, на него действуют сила $\overset{n}{\mathbf{T}}\,dA$, момент которой равен $\mathbf{r}\times\overset{n}{\mathbf{T}}\,dA$, и добавочная пара сил $\overset{n}{\mathbf{M}}\,dA$.

Окончательно мы получаем следующее выражение для закона, согласно которому вращающий момент, действующий на тело, равен скорости изменения момента количества движения:

$$\int\int\int_V (\mathbf{G}+\mathbf{r}\times\mathbf{F})\,dV+\oint\oint(\overset{n}{\mathbf{M}}+\mathbf{r}\times\overset{n}{\mathbf{T}})\,dA=$$

$$=\int\int\int_V \rho(\dot{\mathbf{S}}+\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{v}})\,dV. \qquad (1.35)$$

Обычно мы имеем дело с неполярной средой, в которой величины $\mathbf{S}$, $\mathbf{G}$ и $\overset{n}{\mathbf{M}}$ равны нулю по определению. Если весь момент количества движения есть момент линейного импульса, то $\mathbf{S}=0$. Если весь вращающий момент есть момент силы, то обе величины $\mathbf{G}$ и $\overset{n}{\mathbf{M}}$ равны нулю.

Уравнение для энергии. Рассмотрим снова тело, которое занимает область V, ограниченную замкнутой материальной поверхностью. Закон сохранения энергии для этого тела гласит, что скорость, с которой тело получает энергию извне (вследствие того, что над телом совершается работа внешними силами или вследствие поглощения тепла или других форм энергии), равна скорости возрастания кинетической и внутренней энергии тела. Мы напишем уравнение сохранения энергии только для неполярной среды.

Объемная сила $\mathbf{F}\,dV$, действующая на элемент объема dV, который движется со скоростью $\mathbf{v}$, в единицу времени совершает работу $\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}\,dV$.

Поверхностная сила $\overset{n}{\mathbf{T}}\,dA$, действующая на элемент поверхности dA, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$, в единицу времени совершает работу $\mathbf{v}\cdot\overset{n}{\mathbf{T}}\,dA$. Эта мощность передается от вещества, находящегося со стороны $+\mathbf{n}$, к веществу, находящемуся со стороны $-\mathbf{n}$ от элемента поверхности dA, поскольку сила $\overset{n}{\mathbf{T}}\,dA$ давит на вещество в направлении $-\mathbf{n}$.

Если $\mathbf{h}$ — *поток немеханической энергии*, то $\mathbf{n}\cdot\mathbf{h}$ — немеханическая мощность, проходящая через элемент поверхности dA в направлении $\mathbf{n}$. Если передача немеханической энергии осуществляется только посредством теплопроводности, то

$\mathbf{h} = \mathbf{q} = -K \operatorname{grad} T$, где K — теплопроводность, не зависящая от направления, а $\mathbf{q}$ — тепловой поток.

Кинетическая энергия на единицу объема равна $^1/_2 \rho \mathbf{v}^2$. Обозначим через U внутреннюю энергию на единицу массы; тогда $E = \rho\,(^1/_2\,\mathbf{v}^2 + U)$ — *полная* энергия на единицу *объема*. Следовательно, используя уравнение (1.27), получаем

$$\text{Скорость возрастания энергии} = \frac{d}{dt}\iiint_V E\,dV =$$

$$= \iiint_V \rho\left(\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dU}{dt}\right)dV. \tag{1.36}$$

Баланс энергии в данном случае имеет вид

Скорость, с которой объемные силы совершают работу над телом + Скорость, с которой поверхностные силы совершают работу над телом + Скорость, с которой тело получает энергию вследствие потока немеханической энергии через поверхность, ограничивающую тело = Скорость увеличения кинетической энергии тела + Скорость увеличения внутренней энергии тела.

Это можно записать в виде следующего уравнения:

$$\iiint_V \mathbf{v}\cdot\mathbf{F}\,dV + \oiint (\mathbf{v}\cdot\overset{n}{\mathbf{T}} - \mathbf{n}\cdot\mathbf{h})\,dA = \iiint_V \rho\left(\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dU}{dt}\right)dV, \tag{1.37}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль, направленная наружу.

Для преобразования правой части этого уравнения используем уравнение (1.19):

$$\frac{d}{dt}\iiint_V E\,dV = \iiint_V \frac{\partial E}{\partial t}\,dV + \oiint E\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA.$$

Подстановка дает

$$\iiint_V \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F} - \frac{\partial E}{\partial t}\right)dV + \oiint \left[\mathbf{v}\cdot\overset{n}{\mathbf{T}} - \mathbf{n}\cdot\mathbf{h} - \right.$$

$$\left. - \rho\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + U\right)\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right]dA = 0. \tag{1.38}$$

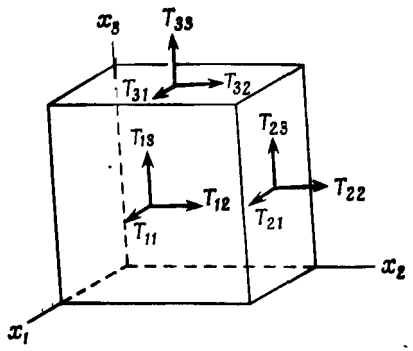
Это последнее уравнение особенно удобно использовать в тех случаях, когда объемный интеграл исчезает и остается только интеграл по поверхности.

Формула для напряжения, действующего на произвольно ориентированную поверхность. Если взять поверхность, нормаль

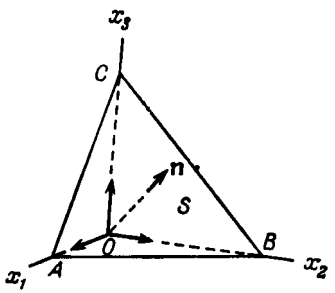
к которой $\mathbf{n}$ направлена вдоль оси $\mathbf{i}_1$, т. е. $\mathbf{n} = \mathbf{i}_1$, то вектор $\overset{n}{\mathbf{T}}$ можно записать просто как $\overset{1}{\mathbf{T}}$; аналогичные обозначения можно ввести для направлений *2* и *3*. Декартовы компоненты векторов напряжения $\overset{1}{\mathbf{T}}$, $\overset{2}{\mathbf{T}}$ и $\overset{3}{\mathbf{T}}$ называются компонентами напряжения; они могут быть представлены в виде

$$\overset{i}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{i}_j = \overset{i}{T}_j = T_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{1.39}$$

Таким образом, T_{ij} есть j-я компонента вектора напряжения $\overset{i}{\mathbf{T}}$. Мы видим, что первый индекс обозначает направление нормали



Ф и г. 4. Обозначение компонент напряжения.



Ф и г. 5. Тетраэдр с основанием ABC, площадь которого равна S, единичным вектором нормали $\mathbf{n}$ и расстоянием от вершины O до основания h.

к поверхности, на которую действует данная компонента силы, а второй индекс — ориентацию этой компоненты (фиг. 4). Ясно также, что

$$\overset{i}{\mathbf{T}} = T_{i1}\mathbf{i}_1 + T_{i2}\mathbf{i}_2 + T_{i3}\mathbf{i}_3 = T_{ij}\mathbf{i}_j \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.40}$$

Рассмотрим малый тетраэдр, расположенный так, как это показано на фиг. 5. Стороны тетраэдра AO, OB и OC направлены вдоль осей координат, а его основание ABC имеет единичную нормаль $\mathbf{n}$, площадь S и находится на расстоянии h от точки O. Площади боковых граней тетраэдра равны проекциям площади S на координатные плоскости. Объем тетраэдра равен $^1/_3Sh$. Пусть S_i — площадь грани, расположенной перпендикулярно оси x_i. Тогда

$$S_i = S\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_i = Sn_i. \tag{1.41}$$

Пусть $\mathbf{F}$ — объемная сила на единицу объема в точке O, а T_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$— компоненты напряжения в точке O. Рассмотрим i-ю компоненту результирующей силы, действующей на вещество, находящееся внутри тетраэдра:

$$(\text{Объемная сила})_i = \frac{1}{3} ShF_i + \text{члены более высокого порядка по } h, \text{ учитывающие изменение } F_i \text{ в теле,}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Поверхностная}\\ \text{сила}\end{pmatrix}_i = \overset{n}{T}_i S - T_{1i}S_1 - T_{2i}S_2 - T_{3i}S_3 + \text{члены более высокого порядка} =$$

$$= S(\overset{n}{T}_i - T_{ji}n_j) + \text{члены более высокого порядка.}$$

Отбрасывая члены более высокого порядка, получаем уравнение движения для i-й компоненты

$$\frac{1}{3} ShF_i + S(\overset{n}{T}_i - T_{ji}n_j) = \frac{1}{3} Sh\rho \frac{dv_i}{dt}. \tag{1.42}$$

Разделив это уравнение на S и перейдя к пределу при $h \to 0$, получим соотношение

$$\overset{n}{T}_i = T_{ji}n_j, \tag{1.43}$$

которое выполняется в точке O. Поскольку члены более высокого порядка исчезают при стремлении h к нулю, соотношение (1.43) является точным. Как показывает весьма элементарное рассмотрение, соотношение (1.43) является условием *статического* равновесия тетраэдра в отсутствие объемных сил. Вывод, приведенный здесь, показывает, что это справедливо и в общем случае, даже при наличии объемных сил и ускорений.

Дифференциальная форма уравнений для импульса и энергии. Действующая на тело сила, обусловленная наличием упругих напряжений, выражается через интеграл по поверхности, ограничивающей это тело. Поверхностный интеграл можно преобразовать к объемному, используя соотношение (1.43) и формулу Грина. В результате можно получить уравнения для импульса и энергии в дифференциальной форме.

Учитывая, что по повторяющимся дважды индексам проводится суммирование, запишем формулу Грина в виде

$$\int\int\int_V \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dV = \oint\oint F_i n_i \, dA. \tag{1.44}$$

Если величины F_1, F_2, F_3 считать компонентами векторного поля, то уравнение (1.44) представляет собой теорему дивергенции.

Однако такая интерпретация функций F_i не является необходимой.

Используя уравнения (1.43) и (1.44), получаем

$$\oiint \overset{n}{T}_i\, dA = \oiint T_{ji} n_j\, dA = \iiint_V \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}\, dV. \tag{1.45}$$

При этом величины F_1, F_2 и F_3 в (1.44) заменены на T_{1i}, T_{2i} и T_{3i} соответственно.

Учитывая, что $\overset{n}{T}_i$ есть компонента вектора $\overset{n}{\mathbf{T}}$ по оси x_i, и используя (1.45), можно записать x_i-ю компоненту общего уравнения движения (1.34) в виде

$$\iiint_V \left(F_i + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} - \rho \frac{dv_i}{dt}\right) dV = 0. \tag{1.46}$$

Поскольку это уравнение должно выполняться для произвольного тела объема V, подынтегральное выражение должно быть всюду равно нулю. Это приводит к уравнению

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = F_i + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1.47}$$

Аналогично, поскольку

$$\mathbf{v} \cdot \overset{n}{\mathbf{T}} = v_i \overset{n}{T}_i = v_i T_{ji} n_j,$$

имеем

$$\oiint \mathbf{v} \cdot \overset{n}{\mathbf{T}}\, dA = \oiint v_i T_{ji} n_j\, dA = \iiint_V \frac{\partial (v_i T_{ji})}{\partial x_j}\, dV.$$

Используем также формулу Грина в следующей форме:

$$\oiint \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}\, dA = \iiint_V \frac{\partial h_i}{\partial x_i}\, dV.$$

Тогда уравнение (1.37) можно записать в виде

$$\iiint_V \left(v_i F_i + \frac{\partial (v_i T_{ji})}{\partial x_j} - \frac{\partial h_i}{\partial x_i} - \rho v_i \frac{dv_i}{dt} - \rho \frac{dU}{dt}\right) dV = 0.$$

Поскольку это уравнение должно выполняться для любого тела объема V, подынтегральное выражение должно всюду обращаться в нуль. Отсюда имеем

$$\rho \left(v_i \frac{dv_i}{dt} + \frac{dU}{dt}\right) = v_i F_i + \frac{\partial (v_i T_{ji})}{\partial x_j} - \frac{\partial h_i}{\partial x_i}. \tag{1.48}$$

Используя уравнение для импульса (1.47), можно исключить из уравнения (1.48) члены, содержащие объемную силу и кинетическую энергию. Если (1.47) умножить на v_i (и просуммировать по i), то получим второе уравнение для энергии

$$\rho v_i \frac{dv_i}{dt} = v_i F_i + v_i \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} . \tag{1.49}$$

Вычитая уравнение (1.49) из (1.48), получаем

$$\rho \frac{dU}{dt} = T_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial h_i}{\partial x_i} . \tag{1.50}$$

Если $T_{ji} = T_{ij}$, то величину $T_{ji}(\partial v_i/\partial x_j)$ можно записать в виде

$$\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} T_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = T_{ij} d_{ij},$$

где

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) . \tag{1.51}$$

Тогда уравнение (1.50) примет вид

$$\rho \frac{dU}{dt} = T_{ij} d_{ij} - \operatorname{div} \mathbf{h}. \tag{1.52}$$

Величина $T_{ij}d_{ij}$ представляет собой *часть* отнесенной к единице объема полной мощности, затрачиваемой напряжением. Входящая в уравнение (1.48) полная мощность на единицу объема, которая расходуется при приложении напряжения, может быть представлена в виде двух членов:

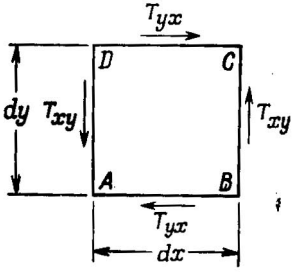
$$\frac{\partial}{\partial x_j}(v_i T_{ji}) = v_i \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + T_{ij} d_{ij}.$$

Уравнение (1.49) дает связь первого члена этого выражения с кинетической энергией и работой, совершаемой против объемных сил, тогда как уравнение (1.52) дает связь второго члена, т. е. величины $T_{ij}\, d_{ij}$, с внутренней энергией и потоком немеханической энергии.

Доказательство равенства $T_{ij} = T_{ji}$ для неполярной среды. Покажем теперь, что для неполярной среды (т. е. когда весь вращающий момент представляет собой момент силы, а весь момент количества движения — момент линейного импульса) величины T_{ij} и T_{ji}, взятые в одной и той же точке, равны между собой. Фиг. 6 подсказывает элементарный вывод этого равенства, который частично исходит из условия *статического* равновесия и не всегда учитывает вращающие моменты, возникающие вследствие наличия объемных сил и распределения *нормальных* напряжений

по граничной поверхности. Ниже приводится общее доказательство этого равенства.

Это доказательство основано на законе сохранения момента количества движения (1.35) при условии, что величины G, $\overset{n}{\mathbf{M}}$ и S равны нулю. Перепишем уравнение (1.35) для неполярной среды, используя представление векторов и тензоров через их компоненты.



Фиг. 6. Схема, иллюстрирующая элементарный вывод равенства $T_{ji} = T_{ij}$.

Компонента вектора $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ вдоль оси x_3 равна $(x_1F_2 - x_2F_1)$; в общем виде компоненту вектора такого типа можно записать как $(x_iF_j - x_jF_i)$. Следовательно, положив величины G, $\overset{n}{\mathbf{M}}$ и S равными нулю, запишем уравнение (1.35) в виде

$$\iiint_V (x_iF_j - x_jF_i)\,dV + \oiint (x_i\overset{n}{T}_j - x_j\overset{n}{T}_i)\,dA = \iiint_V \rho\,(x_i\dot{v}_j - x_j\dot{v}_i)\,dV. \quad (1.53)$$

Используя уравнение (1.43) и формулу Грина (1.44), можно преобразовать поверхностный интеграл в (1.53) в объемный. Таким образом,

$$\oiint (x_i\overset{n}{T}_j - x_j\overset{n}{T}_i)\,dA = \oiint (x_iT_{kj} - x_jT_{ki})\,n_k\,dA = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_k}(x_iT_{kj} - x_jT_{ki})\,dV =$$

$$= \iiint_V \left(x_i\frac{\partial T_{kj}}{\partial x_k} - x_j\frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} + T_{ij} - T_{ji}\right)dV. \quad (1.54)$$

Последнее выражение получается, если учесть, что $\partial x_i/\partial x_k = 1$ при $k = i$ и $\partial x_i/\partial x_k = 0$ в остальных случаях.

Подставляя (1.54) в (1.53), получаем

$$\iiint_V \left[x_i\left(F_j + \frac{\partial T_{kj}}{\partial x_k} - \rho\frac{dv_j}{dt}\right) - x_j\left(F_i + \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} - \rho\frac{dv_i}{dt}\right) + \right.$$
$$\left. + (T_{ij} - T_{ji}) \right] dV = 0.$$

Однако, как это следует из общего уравнения движения (1.47), коэффициенты при x_i и x_j всюду равны нулю. Поэтому получаем уравнение

$$\iiint_V (T_{ij} - T_{ji})\, dV = 0. \tag{1.55}$$

Поскольку уравнение (1.55) должно выполняться для произвольного объема, само подынтегральное выражение должно обращаться в нуль. Поэтому в каждой точке

$$T_{ij} = T_{ji}. \tag{1.56}$$

3. Деформация

Поле смещений. Смещение частицы из некоторого начального положения в новое положение описывается вектором смещения, компоненты которого равны

$$u_i = x_i - a_i \tag{1.57}$$

Компоненты смещения u_i могут быть представлены в материальных координатах, если вместо x_i подставить выражения (1.1), или в пространственных координатах, если a_i заменить выражениями (1.3).

Компоненты деформации. Термин деформация используется всегда, когда говорят об изменении *относительных* положений материальных точек в любом теле. Рассмотрим некоторую «конечную» конфигурацию материальных точек, выраженную через параметры начальной конфигурации. Это можно сделать, положив величину t в уравнении (1.1) равной некоторой константе. Тогда величина t не будет фигурировать как переменная, и уравнения (1.1) и (1.3) можно будет переписать в виде

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3), \tag{1.58}$$

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3). \tag{1.59}$$

Если независимыми переменными являются величины a_i, то da_i рассматриваются как независимые *приращения*, а *дифферен-*

циалы величин x_i *определяются* выражениями

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}\, da_j. \tag{1.60}$$

В пространственном описании независимыми приращениями являются dx_i, а дифференциалы da_i определяются выражениями

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\, dx_j. \tag{1.61}$$

Различием между деформацией и движением твердого тела как целого является наличие изменений расстояний между частицами тела при деформации. Пусть частица, находившаяся сначала в точке (a_1, a_2, a_3), переместилась в точку (x_1, x_2, x_3). Квадрат начального расстояния между двумя соседними частицами, находившимися в точках a_i и $a_i + da_i$, равен

$$ds_0^2 = da_i\, da_i.$$

При *материальном* описании компоненты деформации η_{jk} определяются с помощью следующего уравнения, где a_i являются независимыми переменными:

$$dx_i\, dx_i - da_i\, da_i = 2\eta_{jk}\, da_j\, da_k. \tag{1.62}$$

При пространственном описании квадрат расстояния между соседними частицами, находящимися в конечном состоянии в точках x_i и $x_i + dx_i$, равен

$$ds^2 = dx_i\, dx_i.$$

Компоненты деформации в *пространственном* описании ε_{jk} определяются с помощью следующего уравнения, в котором величины x_i являются независимыми переменными:

$$dx_i\, dx_i - da_i\, da_i = 2\varepsilon_{jk}\, dx_j\, dx_k. \tag{1.63}$$

Подставляя (1.60) в (1.62), получаем выражения для компонент η_{jk}; подставляя (1.61) в (1.63), получаем выражения для компонент ε_{jk}. Используя определение смещения (1.57), каждый из этих наборов компонент деформации можно выразить через компоненты вектора смещения. В результате получим

$$\eta_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\frac{\partial x_i}{\partial a_k} - \delta_{jk}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j}\right)\left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial a_k}\right) - \delta_{jk}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial a_k} + \frac{\partial u_k}{\partial a_j} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j}\frac{\partial u_i}{\partial a_k}\right), \tag{1.64}$$

$$\varepsilon_{jk}=\frac{1}{2}\left(\delta_{jk}-\frac{\partial a_l}{\partial x_j}\frac{\partial a_l}{\partial x_k}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\delta_{jk}-\left(\delta_{lj}-\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right)\left(\delta_{lk}-\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}-\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right). \quad (1.65)$$

Если пренебречь произведениями и квадратами производных от смещений (по сравнению с членами первого порядка), то выражения для компонент деформации упростятся и примут известную форму выражений для «бесконечно малых деформаций». Отличие заключается лишь в том, что сдвиговые компоненты, используемые обычно в технике, равны удвоенным значениям соответствующих компонент определенного здесь тензора деформаций.

Поскольку $\delta_{jk}=\delta_{ij}\delta_{ik}$ и

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_s}\frac{\partial a_s}{\partial x_j}=\delta_{ij},$$

можно показать, что

$$\varepsilon_{jk}=\eta_{st}\frac{\partial a_s}{\partial x_j}\frac{\partial a_t}{\partial x_k}. \quad (1.66)$$

Аналогично

$$\eta_{jk}=\varepsilon_{st}\frac{\partial x_s}{\partial a_j}\frac{\partial x_t}{\partial a_k}. \quad (1.67)$$

Очевидно, если компоненты тензора деформации равны нулю для какой-либо частицы в одном описании, то для этой же частицы в другом описании они также равны нулю. Если имеется смещение вещества в той области, где компоненты деформации всюду равны нулю, то такое смещение будет *жестким* смещением, т. е. смещением тела как целого.

Тензоры η_{ij} и ε_{ij} имеют то преимущество, что они равны нулю для жесткого смещения и что для достаточно малых градиентов смещения $\partial u_i/\partial x_j$ они сводятся к классическому «тензору бесконечно малой деформации». Однако исследование больших деформаций иногда проще проводить, используя другие меры деформации, такие, как тензор деформации Грина

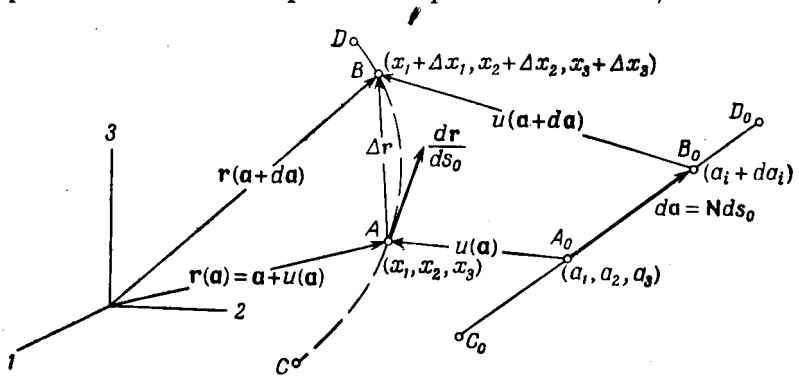
$$C_{jk}=\frac{\partial x_s}{\partial a_j}\frac{\partial x_s}{\partial a_k}=\delta_{jk}+2\eta_{jk} \quad (1.68)$$

или тензор деформации Коши

$$c_{jk}=\frac{\partial a_s}{\partial x_j}\frac{\partial a_s}{\partial x_k}=\delta_{jk}-2\varepsilon_{jk}. \quad (1.69)$$

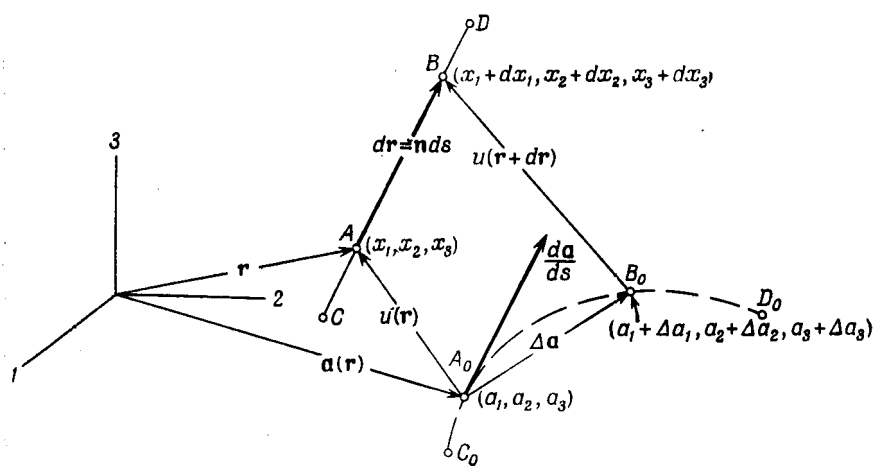
Вращение и растяжение элементарных нитей. Трусделл и Тупин [2] называют наборы величин $\partial a_i/\partial x_j$ и $\partial x_i/\partial a_j$ *градиен-*

тами деформации в пространственном и материальном описании соответственно. Такие наборы производных можно интерпретировать как векторные операторы, определяющие вращение и растяжение элементарных материальных линий, или нитей.



Ф и г. 7. Деформации в материальном описании.

Это является существенным содержанием выражений (1.60) и (1.61), которые дают связь между векторами da и dr. Когда деформация однородна, векторы da и dr могут обозначать непосредственно



Ф и г. 8. Деформации в пространственном описании.

начальную и конечную длину и направление элементарных материальных линий ограниченной длины. На фиг. 7 и 8 дано пояснение геометрической интерпретации этих величин для случая неоднородной деформации.

Рассмотрим две частицы, начальные положения которых определяются векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a} + d\mathbf{a}$ (фиг. 7). Пусть $\mathbf{N}$ — единичный вектор в направлении $d\mathbf{a}$, а ds_0 — абсолютная величина вектора $d\mathbf{a}$. Тогда

$$d\mathbf{a} = \mathbf{N}\, ds_0, \qquad \text{или} \qquad da_i = N_i\, ds_0.$$

После смещения те же частицы образуют новую конфигурацию и находятся в точках $\mathbf{r}(\mathbf{a})$ и $\mathbf{r}(\mathbf{a} + d\mathbf{a})$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, компоненты которого x_i определяются выражением (1.58). Вектор, соединяющий обе эти частицы и равный в начальном положении $d\mathbf{a}$, после такого смещения равен

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a} + d\mathbf{a}) - \mathbf{r}(\mathbf{a}).$$

[Как и в выражении (1.60), величины da_i являются приращениями независимых переменных, т. е. $da_i \equiv \Delta a_i$, или $d\mathbf{a} \equiv \Delta\mathbf{a}$. Но $d\mathbf{r} \equiv \mathbf{i}_i\, dx_i \neq \Delta\mathbf{r}$. Мы различаем дифференциал и приращение для *зависимых* переменных; для независимых переменных такого различия не существует.] Компоненты нового вектора $\Delta\mathbf{r}$ есть Δx_i. Очевидно,

$$\frac{dx_i}{ds_0} \equiv \lim_{ds_0 \to 0} \frac{\Delta x_i}{ds_0} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} N_j. \tag{1.70}$$

Мы видим, что девять величин $\partial x_i/\partial a_j$ являются компонентами векторного оператора, который действует на единичный вектор $\mathbf{N}$ так, что в результате получается вектор $d\mathbf{r}/ds_0$, компоненты которого определяются выражением (1.70). Эта операция описывает вращение и растяжение элементарной нити, или *материальной линии* бесконечно малой длины, которая сначала была расположена вдоль вектора $\mathbf{N}$. Абсолютная величина вектора $d\mathbf{r}/ds_0$ является предельным значением (при $ds_0 \to 0$) отношения конечного расстояния между теми частицами, которые в начальный момент находились в точках $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a} + \mathbf{N}\, ds_0$, к начальному расстоянию между ними. Эта величина, обозначаемая $\lambda_{\mathbf{N}}$, называется *растяжением* элементарной нити с начальным направлением $\mathbf{N}$:

$$\lambda_{\mathbf{N}} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds_0} \right|. \tag{1.71}$$

Направление вектора $d\mathbf{r}/ds_0$ совпадает с конечным направлением касательной к той материальной линии, касательная к которой в начальный момент в точке $\mathbf{a}$ была $\mathbf{N}$.

Проведем теперь аналогичное рассмотрение в пространственных переменных. Пусть две частицы находятся в точках $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ (фиг. 8) и пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $d\mathbf{r}$, а ds — абсолютная величина вектора $d\mathbf{r}$. Тогда $d\mathbf{r} = \mathbf{n}\, ds$, или

$dx_i = n_i ds$, и

$$\frac{da_i}{ds} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} n_j. \tag{1.72}$$

Девять величин $\partial a_i/\partial x_j$ являются компонентами векторного оператора, который, действуя на единичный вектор $\mathbf{n}$, в результате дает вектор $d\mathbf{a}/ds$. Абсолютная величина вектора $d\mathbf{a}/ds$ является предельным значением (при $ds \to 0$) отношения начального расстояния между частицами, которые в конечном состоянии находятся в точках $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} + \mathbf{n}ds$, к конечному расстоянию между ними. Это растяжение обозначается $\lambda_{\mathbf{n}}$, если конечное направление материальной линии совпадает с $\mathbf{n}$. Следовательно,

$$\frac{1}{\lambda_{\mathbf{n}}} = \left| \frac{d\mathbf{a}}{ds} \right|. \tag{1.73}$$

Направление вектора $d\mathbf{a}/ds$ совпадает с начальным направлением касательной к той материальной линии, касательная к которой в конечный момент в точке $\mathbf{r}$ совпадает с $\mathbf{n}$.

Растяжение в некотором направлении можно вычислить, используя девять градиентов деформации или шесть независимых компонент одного из тензоров деформации:

$$\lambda_{\mathbf{N}}^2 = \frac{d\mathbf{r}}{ds_0} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds_0} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} N_j N_k =$$

$$= C_{jk} N_j N_k = (\delta_{jk} + 2\eta_{jk}) N_j N_k, \tag{1.74}$$

$$\frac{1}{\lambda_{\mathbf{n}}^2} = \frac{d\mathbf{a}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{ds} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} n_j n_k = c_{jk} n_j n_k = (\delta_{jk} - 2\varepsilon_{jk}) n_j n_k. \tag{1.75}$$

Далее, для любого симметричного тензора S_{ij} выражение $S_{ij} n_i n_j$ имеет стационарное значение, если вектор $\mathbf{n}$ направлен вдоль одной из главных осей тензора. Поэтому из выражений (1.74) и (1.75) следует, что больше всего растянутыми или сжатыми оказываются те элементарные нити (по сравнению с элементарными нитями, находящимися в той же точке, но иначе ориентированными), которые вначале были ориентированы вдоль главных осей тензора деформации в материальном описании (тензоров C_{ij} или η_{ij}), а в конце оказались ориентированными вдоль главных осей тензора деформации в пространственном описании (тензоров c_{ij} и ε_{ij}). Такие элементы называются *главными* элементарными нитями, а их растяжение — *главным растяжением*.

Элементарная нить, имевшая некоторое начальное направление $\mathbf{N}$, поворачивается на угол φ, который может быть вычислен по формуле $\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r}/ds_0 = \lambda_{\mathbf{N}} \cos\varphi$. Следовательно, используя выражение (1.70), получаем

$$\cos\varphi = \frac{1}{\lambda_{\mathbf{N}}} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} N_j N_i. \tag{1.76}$$

При деформации общего вида в качестве меры локального вращения могут быть выбраны вращения трех взаимно перпендикулярных главных элементарных нитей. Иначе говоря, такой мерой являются углы поворота от главных осей тензора деформации в материальных координатах к главным осям тензора деформации в пространственных координатах. Если эти два набора главных осей совпадают, то такая деформация называется *чистой* деформацией (без вращения).

Обозначим единичные собственные векторы, направленные вдоль главных осей тензора деформации в материальном описании, через $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{N}_3$, а соответствующие собственные векторы в пространственном описании через $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$. Пусть N_{kj} и n_{kj} означают j-е компоненты векторов $\mathbf{N}_k$ и $\mathbf{n}_k$ соответственно. Тогда вращение характеризуется *тензором вращения* с компонентами

$$R_{ij} = n_{si} N_{sj}. \tag{1.77}$$

Каждый набор единичных собственных векторов может быть выражен через другой набор собственных векторов и тензор вращения с помощью соотношений

$$n_{ki} = R_{ij} N_{kj}, \qquad N_{ki} = R_{ji} n_{kj}. \tag{1.78}$$

Кроме растяжения и вращения Ляв [3] вводит еще две другие величины: относительное приращение длины элементарной нити $\delta_{\mathbf{N}} = \lambda_{\mathbf{N}} - 1$ и относительное приращение проекции вдоль начального направления, которое определяется выражением

$$\mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds_0} - 1 = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} N_j N_i - 1 = \frac{\partial u_i}{\partial a_j} N_j N_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i}\right) N_i N_j.$$

Относительное приращение проекции вдоль конечного направления, отнесенное к конечной проекции, равно

$$1 - \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{ds} = 1 - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} n_j n_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j n_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) n_i n_j.$$

Тензоры с компонентами

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i}\right), \qquad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.79}$$

представляют собой *тензоры удлинения* в материальном и пространственном описании соответственно. Важным преимуществом этих тензоров является то, что они линейны относительно градиентов смещения, однако их недостаток состоит в том, что они являются мерой удлинения, а не деформации. Они не обращаются в нуль при вращении тела как целого, а если они равны нулю, то дефор-

мация еще не обязательно обращается в нуль. Эти тензоры главным образом применяются как приближенные выражения для тензоров деформации η_{ij} и ε_{ij}, когда градиенты смещений достаточно малы.

Другие тензоры деформации. Представляют интерес еще четыре другие тензора, которые появляются в соотношениях, связывающих тензор вращения с градиентами деформации. Эти тензоры равны квадратным корням из тензоров деформации Грина и Коши и из обратных им величин.

Симметричный тензор S_{ij} считается положительно определенным, если все его собственные значения положительны. Тензор, представляющий собой p-ю степень от положительно определенного симметричного тензора S_{ij}, имеет компоненты

$$\overset{p}{S}_{ij} = \sum_k (S_k)^p N_{ki} N_{kj}, \tag{1.80}$$

где N_{ki} — i-я компонента k-го собственного вектора тензора S_{ij}, S_k — k-е собственное значение тензора S_{ij}, $(S_k)^p$ — единственное действительное положительное значение p-й степени от S_k, а $\overset{p}{S}_{ij}$ — ij-я компонента тензора, являющегося p-й степенью от S_{ij}. Тензор $\overset{p}{S}_{ij}$ имеет те же собственные векторы, что и S_{ij}. Следовательно, (1.80) для любого действительного значения p определяет симметричный тензор, выраженный через его собственные значения и собственные векторы.

Как видно из уравнения (1.74), собственные значения тензора C_{ij} представляют собой квадраты главных растяжений. Обозначая главные растяжения через λ_k, имеем

$$\lambda_k^2 = C_k = 1 + 2\eta_k = \frac{1}{c_k} = \frac{1}{1 - 2\varepsilon_k},$$

$$C_{ij} = \sum_k \lambda_k^2 N_{ki} N_{kj}, \qquad \overset{1/2}{C}_{ij} = \sum_k \lambda_k N_{ki} N_{kj}. \tag{1.81}$$

Аналогично если n_{kj} обозначает j-ю компоненту k-го собственного вектора тензора c_{ij}, то

$$\overset{1/2}{c}_{ij} = \sum_k \left(\frac{1}{\lambda_k}\right) n_{ki} n_{kj}. \tag{1.82}$$

Тензор, соответствующий показателю степени $-1/2$, определяется аналогично.

Поскольку главные элементарные нити поворачиваются от направления $\mathbf{N}_k$ к направлению $\mathbf{n}_k$ и подвергаются растяжениям,

равным главным растяжениям λ_k, можно написать

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_s} N_{ks} = \lambda_k n_{ki} \text{ (суммирование по } k \textit{ не} \text{ производится)},$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \frac{\partial x_i}{\partial a_s} \delta_{sj} = \frac{\partial x_i}{\partial a_s} N_{ks} N_{kj} = \sum_k \lambda_k n_{ki} N_{kj}.$$

Подставляя n_{ki} из (1.78) и используя выражения (1.81), получаем

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_j} = R_{is} \sum_k \lambda_k N_{ks} N_{kj} = R_{is} C_{sj}^{1/2}.$$

С другой стороны, если мы выразим N_{kj} с помощью (1.78) и используем определение тензора $c_{ij}^{-1/2}$, то получим

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \sum_k \lambda_k n_{ki} n_{ks} R_{sj} = c_{is}^{-1/2} R_{sj}.$$

Производя аналогичные преобразования, получаем следующие соотношения:

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_j} = R_{is} C_{sj}^{1/2} = c_{is}^{-1/2} R_{sj}, \qquad \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = R_{js} C_{si}^{-1/2} = c_{js}^{1/2} R_{si}, \tag{1.83}$$

$$R_{qj} = c_{qi}^{1/2} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = C_{sj}^{-1/2} \frac{\partial x_q}{\partial a_s} = C_{js}^{1/2} \frac{\partial a_s}{\partial x_q} = c_{qs}^{-1/2} \frac{\partial a_j}{\partial x_s}, \tag{1.84}$$

$$C_{pi}^{-1/2} = R_{jp} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = R_{jp} c_{js}^{1/2} R_{si} = \frac{\partial a_p}{\partial x_s} R_{si}, \tag{1.85}$$

$$C_{ij}^{1/2} = R_{si} \frac{\partial x_s}{\partial a_j} = R_{pi} c_{ps}^{-1/2} R_{sj} = \frac{\partial x_s}{\partial a_i} R_{sj}, \tag{1.86}$$

$$c_{ij}^{1/2} = R_{js} \frac{\partial a_s}{\partial x_i} = R_{is} C_{sk}^{-1/2} R_{jk} = R_{is} \frac{\partial a_s}{\partial x_j}, \tag{1.87}$$

$$c_{ij}^{-1/2} = R_{js} \frac{\partial x_i}{\partial a_s} = R_{is} C_{sp}^{1/2} R_{jp} = R_{is} \frac{\partial x_j}{\partial a_s}. \tag{1.88}$$

При выводе этих соотношений использована симметрия тензоров C и c.

Изменение угла между элементарными нитями. Выделим в недеформированной среде два направления, которые обозначим через $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}'$. Косинус угла между ними

$$\cos\theta = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}' = N_i N_i'. \tag{1.89}$$

Пусть под действием деформации $\mathbf{N}$ переходит в $d\mathbf{r}/ds_0$, а $\mathbf{N}'$ — в $d\mathbf{r}'/ds_0$. Из уравнений (1.71), (1.70) и (1.68) следует, что в конечном состоянии угол θ_f между двумя элементарными нитями

удовлетворяет соотношению

$$\lambda_N \lambda_{N'} \cos\theta_f = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}\frac{\partial x_i}{\partial a_k} N_j N'_k = C_{jk} N_j N'_k = \cos\theta + 2\eta_{jk} N_j N'_k. \quad (1.90)$$

Уменьшение угла $\gamma \equiv \theta - \theta_f$ называется *сдвигом* направлений **N**, **N′**.

Интерпретация компонент деформации. Если направления **N** и **N′** взаимно перпендикулярны и совпадают с осями *1* и *2* ($\mathbf{N} = \mathbf{i}_1$, $\mathbf{N}' = \mathbf{i}_2$), то соотношения (1.74) и (1.90) принимают вид

$$\lambda_{i_1}^2 = C_{11} = (1 + 2\eta_{11}), \qquad \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cos\theta_f = C_{12} = 2\eta_{12}. \quad (1.91)$$

Отсюда видно, что диагональные компоненты тензоров C_{ij} и η_{ij} могут быть выражены через растяжения вдоль осей координат. Недиагональные компоненты содержат не только изменения углов между элементарными нитями, вначале направленными вдоль соответствующих осей координат, но также и их растяжения.

Интерпретация величины rot u. Легко показать, что при *жестком* вращении, т. е. при вращении тела как целого, вектор rot **u** направлен вдоль оси вращения и его величина составляет $2 \sin\theta$, где θ — угол поворота. Новожилов ([4], стр. 27—32; см. также [2], стр. 275—277) показал, что величина rot **u** связана со *средним вращением* в деформации общего вида. Однако в общем случае rot **u** не описывает вращения как такового, т. е. он не дает оси и угла вращения главных элементарных нитей в некоторой точке.

Различные описания поля смещений. Поле смещений в окрестности частицы характеризуется смещением самой частицы и девятью добавочными величинами, в качестве которых могут быть взяты девять градиентов деформации или девять градиентов смещения. Возможен также другой выбор этих величин, а именно можно взять три параметра, описывающие вращение, и шесть компонент одного из тензоров деформации. Наиболее простой выбор этих величин содержит три числа, определяющие первоначальную ориентацию главных элементарных нитей, три числа, определяющие их вращение, и три главные растяжения.

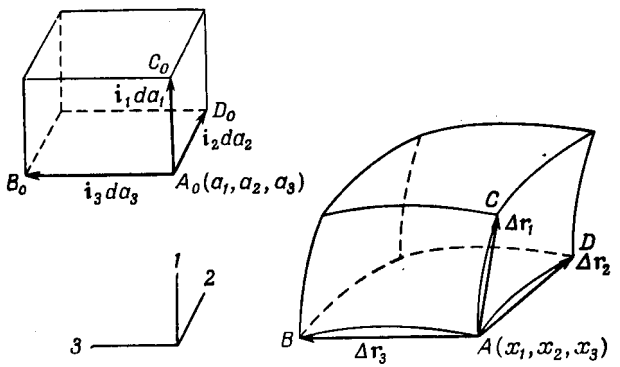
Изменение объема. В заключение этого раздела, посвященного деформации, мы дадим иллюстрацию вывода соотношения (1.15). Выберем элемент объема в недеформированном материале в виде прямоугольного параллелепипеда с гранями $\mathbf{i}_1 da_1$, $\mathbf{i}_2 da_2$, $\mathbf{i}_3 da_3$. Его объем

$$dV_0 = \mathbf{i}_1 \cdot (\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3)\, da_1\, da_2\, da_3 = da_1\, da_2\, da_3.$$

Используя выражения (1.70) и (1.71) и полагая $d\mathbf{a} = \mathbf{N}\,ds_0 = \mathbf{i}_1\,da_1$, можно получить вектор

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{da_1} = \mathbf{i}_i \frac{\partial x_i}{\partial a_1} = \mathbf{i}_1 \frac{\partial x_1}{\partial a_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial x_2}{\partial a_1} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial x_3}{\partial a_1}.$$

Интерпретация этого вектора дана на фиг. 7. Аналогичные выражения могут быть написаны для векторов, направленных



Фиг. 9. Изменение объема в материальном описании. Предельное значение отношения нового объема к старому равно

$$\lim_{da_i \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}_1 \cdot (\Delta\mathbf{r}_2 \times \Delta\mathbf{r}_3)}{da_1\, da_2\, da_3} = J.$$

в начальный момент времени вдоль других граней параллелепипеда, а именно

$$\frac{d\mathbf{r}_2}{da_2} = \mathbf{i}_i \frac{\partial x_i}{\partial a_2}, \qquad \frac{d\mathbf{r}_3}{da_3} = \mathbf{i}_i \frac{\partial x_i}{\partial a_3}.$$

Как видно из фиг. 9, предельное значение (при стремлении к нулю величин da_1, da_2, da_3) отношения конечного объема этого элемента к начальному объему равно

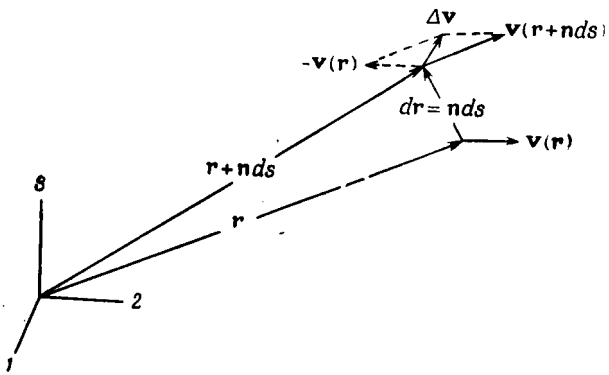
$$\lim_{dV_0 \to 0} \left(\frac{dV}{dV_0}\right) = \frac{d\mathbf{r}_1}{da_1} \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{da_2} \times \frac{d\mathbf{r}_3}{da_3} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial a_3} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} = J. \qquad (1.92)$$

В выражении (1.92) фигурирует тот же детерминант, что и в (1.15), поскольку детерминант не меняется при замене его строк столбцами и наоборот. Подобный вывод может быть проведен для прямоугольного элемента объема, выбранного в деформированном веществе. При этом предельное значение отношения dV_0/dV будет равно детерминанту $|\partial a_i/\partial x_j|$. Очевидно, оба эти детерминанта являются обратными друг другу.

4. Скорость деформации и вихрь

При рассмотрении скоростей движения время t уже не является постоянной величиной, а становится одной из независимых переменных. Ниже дается разложение поля скоростей на угловую скорость и скорость деформации в пространственном описании.

Пусть $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r}) + \Delta\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{n}ds)$ — векторы материальной скорости для двух частиц, находящихся в точках, соединенных друг с другом радиусом-вектором $d\mathbf{r} = \mathbf{n}ds$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор (фиг. 10). Предельное значение (при $ds \to 0$)



Фиг. 10. Растяжение $d_{\mathbf{n}}$ в направлении $\mathbf{n}$ равно

$$\lim_{ds\to 0} \frac{\mathbf{n}\cdot\Delta\mathbf{v}}{ds} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_i n_j.$$

отношения относительной скорости этих двух частиц к расстоянию между ними равно

$$\overset{n}{\mathbf{d}} \equiv \left(\frac{d\mathbf{v}}{ds}\right)_{\mathbf{n}} \equiv \lim_{ds\to 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathbf{n}\,ds) - \mathbf{v}(\mathbf{r})}{ds} = \lim_{ds\to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{ds}. \qquad (1.93)$$

Если равенство $\mathbf{n}\cdot\Delta\mathbf{v} = 0$ не выполняется, то расстояние между двумя частицами изменяется со скоростью $\dot{l} = \dot{ds} = \mathbf{n}\cdot\Delta\mathbf{v}$ и тело деформируется. Поскольку компоненты вектора (1.93) равны

$$\overset{n}{d}_i = \left(\frac{dv_i}{ds}\right)_{\mathbf{n}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j,$$

его проекция на направление $\mathbf{n}$ равна

$$d_{\mathbf{n}} = \mathbf{n}\cdot\overset{n}{\mathbf{d}} = n_i \overset{n}{d}_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j n_i. \qquad (1.94)$$

Величина $d_{\mathbf{n}}$, которую Трусделл и Тупин ([2], стр. 348—349) называют растяжением, представляет собой скорость относительного

удлинения. Она равна

$$d_{\mathbf{n}} = \lim_{l \to 0} \frac{\dot{l}}{l} = \lim_{ds \to 0} \frac{\dot{ds}}{ds},$$

т. е. эта величина есть предел при $l \to 0$ скорости изменения длины, отнесенной к единице длины, для материальной линии, длина которой равна l, а касательная к которой направлена вдоль единичного вектора $\mathbf{n}$. Если для какого-либо поля скоростей величины $d_{\mathbf{n}}$ исчезают для каждого вектора $\mathbf{n}$, то такое поле скоростей соответствует жесткому движению тела как целого, поскольку в этом случае расстояние между любой парой частиц остается неизменным.

Выделим в тензоре $\partial v_i/\partial x_j$ симметричную и антисимметричную части. Тогда

$$d_{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \overset{\mathbf{n}}{\mathbf{d}} = (d_{ij} + w_{ij}) n_j n_i = d_{ij} n_i n_j, \tag{1.95}$$

где

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \qquad w_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{1.96}$$

Симметричный тензор d_{ij} называется тензором скорости растяжения, или тензором *скорости деформации*; тензор w_{ij} называется спиновым тензором. Сумма $w_{ij} n_i n_j$ тождественно обращается в нуль и, следовательно, не дает вклада в растяжение тела.

Можно дать простую интерпретацию градиентов скорости $\partial v_i/\partial x_j$, используя элементарные материальные линии, которые в некоторый момент времени оказываются параллельными осям координат. Например, $\partial v_1/\partial x_1$ есть просто скорость растяжения элементарной материальной линии, параллельной оси x_1, а $\partial v_2/\partial x_1$ — скорость, с которой эта линия *поворачивается* по направлению к оси x_2, т. е. скорость, с которой уменьшается угол между ней и осью $\mathbf{i}_2$.

На основании этой интерпретации можно сделать следующие выводы: 1) диагональные компоненты тензора d_{ij} представляют собой величины, характеризующие скорость растяжения вдоль осей координат; 2) любая недиагональная компонента d_{ij} равна половине скорости уменьшения угла между элементарными материальными линиями, расположенными в данный момент времени вдоль осей $\mathbf{i}_i$ и $\mathbf{i}_j$; 3) величина $w_{12} = {}^1/_2(\partial v_2/\partial x_1 - \partial v_1/\partial x_2)$ есть средняя скорость *правовинтового* вращения вокруг оси $\mathbf{i}_3$ двух материальных линий, мгновенно расположенных вдоль осей $\mathbf{i}_1$ и $\mathbf{i}_2$. Второй из этих выводов показывает, что материальные линии, мгновенно расположенные вдоль главных осей растяжения, не вращаются друг относительно друга. Следовательно, эти

направления в каждый момент времени поворачиваются как жесткое тело. Из третьего вывода следует, что угловая скорость этого вращения равна

$$\mathbf{i}_1 w_{32} + \mathbf{i}_2 w_{13} + \mathbf{i}_3 w_{21} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Векторная величина rot v называется вихрем. В добавление к приведенным выше выводам можно показать, что: 1) rot v является суммой угловых скоростей трех взаимно ортогональных элементарных материальных линий; 2) компонента вектора rot v, взятая вдоль одного из трех взаимно перпендикулярных направлений, равна удвоенному среднему значению таких же компонент для двух элементарных материальных линий, расположенных вдоль двух других перпендикулярных направлений; 3) компонента rot v в некотором направлении равна удвоенному среднему значению такой же компоненты угловой скорости для *всех* элементов, перпендикулярных этому направлению.

Хотя величину d_{ij} иногда называют «скоростью деформации», она *не* является материальной производной ни от одного из тензоров деформации, за исключением случая нулевой деформации, т. е. того случая, когда начальное состояние совпадает с конфигурацией тела в текущий момент. Непосредственные вычисления показывают, что

$$2\dot{\eta}_{ij} = \dot{C}_{ij} = 2 d_{km} \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_m}{\partial a_j}, \tag{1.97}$$

$$2\dot{\varepsilon}_{ij} = -\dot{c}_{ij} = \frac{\partial a_k}{\partial x_m} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_j} + \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right) =$$

$$= 2 \left(d_{ij} - \varepsilon_{mi} \frac{\partial v_m}{\partial x_j} - \varepsilon_{mj} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right). \tag{1.98}$$

Градиенты скорости $\partial v_i / \partial x_j$ в некоторой точке пространства характеризуют локальные свойства поля скоростей. Если $\partial v_i / \partial x_j = 0$, то движение представляет собой однородный перенос. В общем случае

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = d_{ij} + w_{ij}. \tag{1.99}$$

Величины d_{ij} и w_{ij} характеризуют соответственно скорость растяжения (или скорость деформации) и угловую скорость элементарных материальных линий, направленных в данный момент вдоль главных осей растяжения. Таким образом, движение в некоторый момент времени в каждой точке может быть разложено на *перенос*, три *растяжения* вдоль главных осей растяжения и три *жестких вращения* элементарных материальных линий, направленных в данный момент параллельно этим осям.

5. *Нелинейная термоупругость твердых тел*

Рассмотрим теперь термомеханические взаимодействия в идеально упругих материалах. Предполагается, что состояние термодинамического равновесия можно определить, задавая компоненты тензора деформации тела η_{ij} и еще какую-нибудь одну независимую переменную, в качестве которой можно взять энтропию S или температуру T. Для определения напряжений требуются еще три дополнительные переменные, характеризующие вращение. Как деформация, так и вращение могут быть, конечно, получены из девяти градиентов деформации.

Термодинамические напряжения. Поскольку деформация определяется по отношению к первоначальному недеформированному состоянию тела, а напряжение вычисляется на единицу площади деформированного тела, зависимость между деформацией и напряжением имеет сложный вид. При этом дифференциал работы, произведенной напряжением, не равен компонентам напряжения, умноженным на дифференциалы соответствующих компонент деформации. Для удобства записи уравнений введем величины t_{ij}, которые Трусделл [2] назвал *термодинамическими напряжениями*. Эти величины определяются таким образом, чтобы сумма $t_{ij}\, d\eta_{ij}$ была равна дифференциалу работы, производимой недиссипативной частью напряжения при растяжении тела, отнесенной к единице первоначального объема. [Работа, затрачиваемая на перенос тела, которая входит в уравнение (1.49), здесь не учитывается.]

Термодинамические напряжения связаны с механическими напряжениями через девять градиентов $\partial a_i/\partial x_j$, а с деформациями — через соответствующее число коэффициентов упругости. Они связаны также с температурой или энтропией. Если заданы девять градиентов $\partial a_i/\partial x_j$ и температура (или энтропия), то напряжение и все термодинамические функции могут быть выражены через величины, определяемые экспериментально, а именно через коэффициенты упругости, коэффициенты теплового расширения и теплоемкость при нулевом напряжении.

Предположим, что напряжение T_{ij} можно представить как сумму диссипативной части T'_{ij} и недиссипативной части σ_{ij}:

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + T'_{ij}. \tag{1.100}$$

Предположим далее, что соотношения, описывающие свойства среды, таковы, что диссипативная часть исчезает, когда скорости деформации равны нулю. Определим *диссипативную функцию* Φ следующим образом:

$$\Phi \equiv T'_{ij}\, d_{ij}. \tag{1.101}$$

Тогда уравнение для энергии (1.52), в котором мы положим $\mathbf{h}=\mathbf{q}$, принимает вид

$$\rho\dot{U}=\sigma_{ij}d_{ij}+\Phi-\operatorname{div}\mathbf{q}. \tag{1.102}$$

Учитывая соотношение (1.97), мы можем написать

$$d_{ij}=\dot{\eta}_{st}\frac{\partial a_s}{\partial x_i}\frac{\partial a_t}{\partial x_j}, \tag{1.103}$$

откуда

$$J\sigma_{ij}d_{ij}=t_{st}\dot{\eta}_{st}, \tag{1.104}$$

где

$$t_{st}\equiv J\sigma_{ij}\frac{\partial a_s}{\partial x_i}\frac{\partial a_t}{\partial x_j}. \tag{1.105}$$

Энтропия. Определим *энтропию* тела как некоторую функцию, скорость изменения которой в течение любого обратимого процесса равна скорости притока тепла к телу, деленной на абсолютную температуру тела T. Рассматривая тело объемом dV и переходя к пределу при $dV\to 0$, находим, что для *обратимого процесса*

$$\rho\dot{S}=-\frac{1}{T}\operatorname{div}\mathbf{q}, \tag{1.106}$$

где S — энтропия единицы массы. Если ограничиться рассмотрением обратимых процессов, то в уравнении (1.102) нужно положить $\Phi=0$ и подставить $\operatorname{div}\mathbf{q}$ из (1.106). Результат можно записать в виде

$$\dot{U}-T\dot{S}=\frac{1}{\rho}\sigma_{ij}d_{ij}=\frac{1}{\rho_0}t_{ij}\dot{\eta}_{ij}, \tag{1.107}$$

где использованы уравнения (1.26) и (1.104). Поскольку свободная энергия Гельмгольца $A=U-TS$, уравнение (1.107) дает

$$\rho_0(\dot{A}+S\dot{T})=t_{ij}\dot{\eta}_{ij}. \tag{1.108}$$

До сих пор мы ограничивались рассмотрением обратимых процессов. Введем теперь более слабое предположение о *локальном* термодинамическом равновесии; согласно этому предположению, мгновенные значения всех термодинамических функций всегда являются одними и теми же однозначными функциями своих независимых термодинамических переменных. Хотя состояние среды меняется в пространстве и во времени, термодинамические функции вычисляются так, как если бы в каждой точке имело место термодинамическое равновесие. Чтобы получить уравнения (1.107) и (1.108) для этого более общего случая, пред-

положим, что энтропия S всегда является одной и той же однозначной функцией U и компонент деформации η_{ij}. Тогда из уравнения (1.107) видно, что по крайней мере для обратимых процессов

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{\eta} = \frac{1}{T}, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial \eta_{ij}}\right)_{U} = -\frac{t_{ij}}{T\rho_0}. \tag{1.109}$$

Если S всегда одна и та же функция, то и ее частные производные также одни и те же функции, и, следовательно, соотношения (1.109) имеют место при этом предположении. Но соотношения (1.109) предполагают справедливость уравнения (1.107). Поэтому уравнения (1.107) и (1.108) справедливы даже для необратимых процессов при единственном предположении о локальном термодинамическом равновесии, причем $S = S(U, \eta_{ij})$.

Из уравнения (1.107) и уравнения для энергии (1.102) имеем

$$\rho T\dot{S} = \Phi - \operatorname{div}\mathbf{q}. \tag{1.110}$$

Уравнение (1.110) является обобщением уравнения (1.106) для необратимых процессов с локальным термодинамическим равновесием и при $S = S(U, \eta_{ij})$.

Скорость изменения полной энтропии Σ конечного объема может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint \rho S\,dV = \iiint \rho\frac{dS}{dt}\,dV = \iiint \frac{1}{T}(\Phi - \operatorname{div}\mathbf{q})\,dV = \\ = \iiint\left(\frac{\Phi}{T} - \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) - \frac{1}{T^2}\,\mathbf{q}\cdot\operatorname{grad}T\right)dV = \\ = \iiint_V \frac{\Phi}{T}\,dV - \oiint_A \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}}{T}\,dA - \iiint_V \frac{\mathbf{q}\cdot\operatorname{grad}T}{T^2}\,dV.\end{aligned} \tag{1.111}$$

Для *изолированного* объема $\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = 0$. Поскольку на основании второго закона термодинамики полная энтропия Σ изолированного объема никогда не может убывать и поскольку каждый из объемных интегралов, входящих в выражение (1.111), может изменяться независимо от других, каждый из этих интегралов в отдельности должен быть неотрицательным. Таким образом, поскольку V — произвольный изолированный объем, а T — всегда положительно, выполнение второго закона термодинамики требует, чтобы

$$\Phi \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{q}\cdot\operatorname{grad}T \leqslant 0. \tag{1.112}$$

Первое из этих неравенств означает, что диссипативная функция не может быть отрицательной, а из второго неравенства следует, что поток тепла и градиент температуры имеют противоположные направления.

Соотношение между деформацией и напряжением. Предположим теперь, что внутреннюю энергию U и энтропию S можно рассматривать как функции компонент деформации в материальном описании η_{ij} и температуры T. Тогда свободная энергия Гельмгольца A также является функцией переменных (η_{ij}, T) и, следовательно,

$$\dot{A} = \left(\frac{\partial A}{\partial \eta_{ij}}\right)\dot{\eta}_{ij} + \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)\dot{T}. \tag{1.113}$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.108), получаем

$$\left(\rho_0 \frac{\partial A}{\partial \eta_{ij}} - t_{ij}\right)\dot{\eta}_{ij} + \rho_0\left(S + \frac{\partial A}{\partial T}\right)\dot{T} = 0, \tag{1.114}$$

откуда

$$t_{ij} = \rho_0\left(\frac{\partial A}{\partial \eta_{ij}}\right)_T, \qquad S = -\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_\eta. \tag{1.115}$$

Из уравнений (1.105) и (1.115) следует, что недиссипативная часть напряжения равна

$$\sigma_{km} = \frac{1}{J}\frac{\partial x_k}{\partial a_j}\frac{\partial x_m}{\partial a_i} t_{ij} = \rho \frac{\partial x_k}{\partial a_j}\frac{\partial x_m}{\partial a_i}\frac{\partial A}{\partial \eta_{ij}}. \tag{1.116}$$

Эквивалентное соотношение между деформацией и напряжением было получено Мурнаганом [5, 6] с использованием принципа виртуальных перемещений.

Аналогично этому, полагая $U = U(\eta_{ij}, S)$, из уравнения (1.107) находим

$$t_{ij} = \rho_0\left(\frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}}\right)_S, \qquad T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_\eta. \tag{1.117}$$

Термодинамические напряжения t_{ij} являются величинами, сопряженными переменным η_{ij}/ρ_0. Уравнения (1.105) и (1.116) связывают эти величины с компонентами недиссипативной части напряжения. Наиболее важное утверждение относительно этих величин содержится в уравнении (1.104): термодинамическое напряжение, умноженное на скорость деформации, дает скорость, с которой недиссипативная часть напряжения производит работу по растягиванию среды, отнесенную к единице первоначального объема. При жестком вращении тела, подвергнутого напряжению, компоненты t_{ij} не меняются, тогда как компоненты σ_{ij} меняются таким образом, что они остаются инвариантными относительно осей, вращающихся вместе с телом. Если σ_{ij} представляют собой компоненты полного напряжения T_{ij}, то величины t_{st}, определяемые выражением (1.105), являются по определению Трусделла и Тупина [2] компонентами второго тензора напряжения Пиолы — Кирхгофа.

Термодинамические функции и коэффициенты. *Термодинамические потенциалы.* Чтобы исключить вращение как термодинамическую переменную, термодинамические потенциалы выражают через термодинамические напряжения, а не через сами напряжения. В табл. 1 приведены определения этих потенциалов и некоторые соотношения, в которые входят эти потенциалы. В табл. 1 даны также простые выражения для полных дифференциалов термодинамических потенциалов относительно тех независимых переменных, которые указаны в первом столбце. Термодинамические соотношения, приведенные в последнем столбце таблицы, получены путем изменения порядка дифференцирования в смешанных частных производных типа $\partial^2 U/\partial\eta_{ij}\,\partial S$.

Определения термодинамических потенциалов, приведенные в табл. 1, аналогичны обычным определениям, приведенным в табл. 2 для случая, когда тензор напряжения сводится к скаляру. Соотношения табл. 1 могут быть получены из обычных определений термодинамических потенциалов, если заменить p на $-t_{ij}$ и удельный объем V на величину η_{ij}/ρ_0. Если тензор σ_{ij} имеет вид $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, то из уравнения (1.104) и уравнения непрерывности следует, что

$$\frac{1}{\rho_0} t_{st}\dot{\eta}_{st} = -\frac{p}{\rho} d_{ss} = \frac{p}{\rho^2}\dot{\rho} = -p\dot{V}. \tag{1.118}$$

Отсюда для скалярного напряжения имеем

$$p\,dV = -t_{ij} d\left(\frac{\eta_{ij}}{\rho_0}\right).$$

Как следует из вышеизложенного, когда напряжение представляет собой гидростатическое давление, внутренняя энергия и свободная энергия, определенные в табл. 1, точно переходят в обычные выражения. Однако это не справедливо для энтальпии H и свободной энтальпии Гиббса, так как сумма $-t_{ij}\eta_{ij}/\rho_0$ переходит в $pV\varepsilon_{ss}$, а не в pV.

Коэффициенты упругости и податливости. Термодинамические напряжения можно рассматривать как функции компонент деформации η_{ij} в материальном описании и температуры или энтропии. Обычные коэффициенты упругости определяются как первые производные термодинамических напряжений по компонентам деформации, т. е.

$$c^T_{ijkm} = \left(\frac{\partial t_{ij}}{\partial\eta_{km}}\right)_T = \rho_0\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\eta_{ij}\,\partial\eta_{km}}\right)_T, \tag{1.119}$$

$$c^S_{ijkm} = \left(\frac{\partial t_{ij}}{\partial\eta_{km}}\right)_S = \rho_0\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\eta_{ij}\,\partial\eta_{km}}\right)_S. \tag{1.120}$$

Таблица 1

Термодинамические потенциалы и соответствующие термодинамические соотношения

Термодинамический потенциал	Полный дифференциал	Первые производные	Термодинамические соотношения
Внутренняя энергия $U(\eta_{ij}, S)$	$dU=\frac{1}{\varrho_0}t_{ij}d\eta_{ij}+T\,dS$	$t_{ij}=\varrho_0\frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}}$, $T=\frac{\partial U}{\partial S}$	$\frac{\partial t_{ij}}{\partial S}=\varrho_0\frac{\partial T}{\partial \eta_{ij}}$
Энтальпия $H(t_{ij}, S)$ $H=U-t_{ij}\eta_{ij}/\varrho_0$	$dH=-\frac{1}{\varrho_0}\eta_{ij}dt_{ij}+T\,dS$	$\eta_{ij}=-\varrho_0\frac{\partial H}{\partial t_{ij}}$, $T=\frac{\partial H}{\partial S}$	$\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial S}=-\varrho_0\frac{\partial T}{\partial t_{ij}}$
Свободная энергия Гельмгольца $A(\eta_{ij}, T)$ $A=U-TS$	$dA=\frac{1}{\varrho_0}t_{ij}d\eta_{ij}-S\,dT$	$t_{ij}=\varrho_0\frac{\partial A}{\partial \eta_{ij}}$, $S=-\frac{\partial A}{\partial T}$	$\frac{\partial t_{ij}}{\partial T}=-\varrho_0\frac{\partial S}{\partial \eta_{ij}}$
Свободная энтальпия Гиббса $G(t_{ij}, T)$ [1] $G=H-TS=A-t_{ij}\eta_{ij}/\varrho_0$	$dG=-\frac{1}{\varrho_0}\eta_{ij}dt_{ij}-S\,dT$	$\eta_{ij}=-\varrho_0\frac{\partial G}{\partial t_{ij}}$, $S=-\frac{\partial G}{\partial T}$	$\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial T}=\varrho_0\frac{\partial S}{\partial t_{ij}}$

[1] Эта величина часто называется также термодинамическим потенциалом в узком смысле.— *Прим. перев.*

Таблица 2

Термодинамические потенциалы и соответствующие термодинамические соотношения в случае, когда тензор напряжения сводится к скаляру

Термодинамический потенциал	Полный дифференциал	Первые производные	Термодинамические соотношения
Внутренняя энергия $U(V, S)$	$dU = -pdV + T\,dS$	$p = -\left(\frac{dU}{\partial V}\right)_S$, $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$	$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S$
Энтальпия $H(p, S)$ $H = U + pV$	$dH = V\,dp + T\,dS$	$V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S$, $T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p$	$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S$
Свободная энергия Гельмгольца $A(V, T)$ $A = U - TS$	$dA = -p\,dV - S\,dT$	$p = -\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_T$, $S = -\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_V$	$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$
Свободная энтальпия Гиббса $G(p, T)$ $G = H - TS = A + pV$	$dG = V\,dp - S\,dT$	$V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$, $S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$	$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$

Индексы T и S означают, что при вычислении этих производных температура и энтропия соответственно остаются постоянными. Эти обычные коэффициенты упругости называются коэффициентами *второго порядка*, поскольку они содержат вторые производные от энергии.

Поскольку тензор деформации симметричен, возможна перестановка индексов как внутри первой, так и внутри второй пары, т. е. $c_{ijkm} = c_{jikm} = c_{ijmk} = c_{jimk}$. Кроме того, поскольку порядок дифференцирования несуществен, можно поменять местами первую и вторую пары индексов, т. е. $c_{ijmk} = c_{mkij}$.

Коэффициенты упругости n-го порядка могут быть определены как частные производные n-го порядка от энергии по деформации. Например, изоэнтропические коэффициенты упругости третьего порядка имеют вид

$$c^S_{ijkmpq} = \rho_0 \frac{\partial^3 U}{\partial \eta_{ij}\, \partial \eta_{km}\, \partial \eta_{pq}}. \tag{1.121}$$

Если начальное состояние тела выбрано так, что в этом состоянии напряжения равны нулю, то термодинамические напряжения также равны нулю и первые производные от U или A по деформациям должны исчезать при деформации, равной нулю. Следовательно, разложение энергии U в ряд вблизи состояния, в котором деформации равны нулю, имеет вид

$$\rho_0 U(\eta_{ij}, S) = \rho_0 U(0, S) + \frac{1}{2} c^S_{ijkm}\eta_{ij}\eta_{km} + \frac{1}{6} c^S_{ijkmpq}\eta_{ij}\eta_{km}\eta_{pq} + \ldots, \tag{1.122}$$

где коэффициенты упругости взяты при деформации, равной нулю. Коэффициенты упругости при нулевых деформациях являются функциями энтропии (или температуры). Подобное разложение имеет место и для $A(\eta_{ij}, T)$, но в него входят изотермические коэффициенты упругости.

Другой набор величин, так называемых коэффициентов податливости, можно определить, если рассматривать компоненты деформации как функции термодинамических напряжений и температуры (или энтропии). Выражения для коэффициентов податливости имеют вид

$$s^T_{ijkm} = \left(\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial t_{km}}\right)_T, \qquad s^S_{ijkm} = \left(\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial t_{km}}\right)_S. \tag{1.123}$$

Коэффициенты податливости высшего порядка можно определить как величины, равные производным соответствующего порядка.

Теплоемкость. Используя определение энтропии, мы можем связать величину TdS с количеством тепла, полученным едини-

цей массы в каком-либо необратимом процессе. Тогда, учитывая выражения для dU и dH, приведенные в табл. 1, получаем

$$C_\eta \equiv \lim_{dT\to 0}\left(\frac{T\,dS}{dT}\right)_\eta = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\eta = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\eta, \qquad (1.124)$$

$$C_t \equiv \lim_{dT\to 0}\left(\frac{T\,dS}{dT}\right)_t = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_t = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_t. \qquad (1.125)$$

Обозначим через α_{km} коэффициенты теплового расширения при постоянном термодинамическом напряжении и через $-\lambda_{ij}$ температурные коэффициенты термодинамических напряжений при постоянной деформации:

$$\alpha_{km} \equiv \left(\frac{\partial \eta_{km}}{\partial T}\right)_t, \qquad \lambda_{ij} \equiv \left(-\frac{\partial t_{ij}}{\partial T}\right)_\eta. \qquad (1.126)$$

Индекс η означает, что все компоненты деформации постоянны, а индекс t означает, что постоянны все термодинамические напряжения.

Из выражения (1.125) и последнего термодинамического соотношения в табл. 1 имеем

$$\left(\frac{\partial C_t}{\partial t_{ij}}\right)_T = T\frac{\partial^2 S}{\partial t_{ij}\,\partial T} = \frac{T}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2 \eta_{ij}}{\partial T^2}\right)_t = \frac{T}{\rho_0}\left(\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial T}\right)_t. \qquad (1.127)$$

Аналогично из (1.124) и третьего термодинамического соотношения в табл. 1 имеем

$$\left(\frac{\partial C_\eta}{\partial \eta_{ij}}\right)_T = T\frac{\partial^2 S}{\partial \eta_{ij}\,\partial T} = -\frac{T}{\rho_0}\frac{\partial^2 t_{ij}}{\partial T^2} = \frac{T}{\rho_0}\left(\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial T}\right)_\eta. \qquad (1.128)$$

Связь между величинами C_η и C_t можно получить следующим образом. Из выражения (1.125) и определения величины H имеем

$$C_t = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_t = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_t - \frac{\alpha_{ij}t_{ij}}{\rho_0}. \qquad (1.129)$$

Принимая, что U является функцией вида $U = U[\eta(t, T), T]$, и используя выражение (1.124), находим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_t = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\eta + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}}\right)_T\left(\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial T}\right)_t = C_\eta + \alpha_{ij}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}}\right)_T. \qquad (1.130)$$

Из выражения для dU и третьего термодинамического соотношения в табл. 1 получим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}}\right)_T = \frac{t_{ij}}{\rho_0} + T\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_{ij}}\right)_T = \frac{1}{\rho_0}(t_{ij} + T\lambda_{ij}). \qquad (1.131)$$

Принимая, что S является функцией вида $S[t(\eta, T), T]$, и используя третье и четвертое термодинамические соотношения, получаем

$$\lambda_{ij} = \rho_0 \left(\frac{\partial S}{\partial \eta_{ij}}\right)_T = \rho_0 \left(\frac{\partial S}{\partial t_{km}}\right)_T \left(\frac{\partial t_{km}}{\partial \eta_{ij}}\right)_T = \alpha_{km} c^T_{kmij} = \alpha_{km} c^T_{ijkm}. \tag{1.132}$$

Наконец, из (1.126) и (1.129) — (1.132) имеем

$$\rho_0 (C_t - C_\eta) = T \alpha_{ij} \alpha_{km} c^T_{kmij} = T \alpha_{ij} \lambda_{ij}. \tag{1.133}$$

Скорость изменения термодинамических функций. Из выражения для dH и последнего термодинамического соотношения в табл. 1 имеем

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t_{km}}\right)_T = -\frac{\eta_{km}}{\rho_0} + T \left(\frac{\partial S}{\partial t_{km}}\right)_T = \frac{1}{\rho_0} (-\eta_{km} + T\alpha_{km}). \tag{1.134}$$

Выражения для $\dot{U}$ и $\dot{H}$ получаются из уравнений (1.124), (1.131), (1.132) и (1.125), (1.134):

$$\dot{U} = C_\eta \dot{T} + \frac{1}{\rho_0} (t_{ij} + T\lambda_{ij}) \dot{\eta}_{ij}, \tag{1.135}$$

$$\dot{H} = C_t \dot{T} + \frac{1}{\rho_0} (-\eta_{ij} + T\alpha_{ij}) \dot{t}_{ij}. \tag{1.136}$$

Комбинируя выражения (1.135) и (1.136) с уравнением (1.107) и с определением величины H, можно получить различные выражения для $\dot{S}$:

$$T\dot{S} = \dot{U} - \frac{1}{\rho_0} t_{ij} \dot{\eta}_{ij} = C_\eta \dot{T} + \frac{T}{\rho_0} \lambda_{ij} \dot{\eta}_{ij} =$$

$$= \dot{H} + \frac{1}{\rho_0} \eta_{ij} \dot{t}_{ij} = C_t \dot{T} + \frac{T}{\rho_0} \alpha_{ij} \dot{t}_{ij}. \tag{1.137}$$

Изоэнтропические коэффициенты. Различные изоэнтропические коэффициенты можно получить, если в (1.137) положить $\dot{S} = 0$. Например,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_{ij}}\right)_S = -\frac{T\lambda_{ij}}{\rho_0 C_\eta}, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial t_{ij}}\right)_S = -\frac{T\alpha_{ij}}{\rho_0 C_t}. \tag{1.138}$$

Далее, считая величину t_{ij} функцией вида $t_{ij}[\eta, T(\eta, S)]$, получаем для изоэнтропических коэффициентов упругости

$$c^S_{ijkm} \equiv \left(\frac{\partial t_{ij}}{\partial \eta_{km}}\right)_S = \left(\frac{\partial t_{ij}}{\partial \eta_{km}}\right)_T + \left(\frac{\partial t_{ij}}{\partial T}\right)_\eta \left(\frac{\partial T}{\partial \eta_{km}}\right)_S =$$

$$= c^T_{ijkm} + \frac{T\lambda_{ij}\lambda_{km}}{\rho_0 C_\eta}. \tag{1.139}$$

Чтобы получить связь между изоэнтропическими и изотермическими коэффициентами податливости, будем считать η_{ij} функ-

цией вида $\eta_{ij}[t, T(t, S)]$; тогда получим

$$s^S_{ijkm} \equiv \left(\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial t_{km}}\right)_S = \left(\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial t_{km}}\right)_T + \left(\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial T}\right)_t \left(\frac{\partial T}{\partial t_{km}}\right)_S = s^T_{ijkm} - \frac{T\alpha_{ij}\alpha_{km}}{\rho_0 C_t}. \quad (1.140)$$

Можно получить другую формулу для $(\partial T/\partial \eta_{ij})_S$, если считать T функцией от $[t(\eta, S), S]$. Тогда

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_{ij}}\right)_S = \left(\frac{\partial T}{\partial t_{km}}\right)_S \left(\frac{\partial t_{km}}{\partial \eta_{ij}}\right)_S = -\frac{T\alpha_{km}}{\rho_0 C_t} c^S_{kmij}. \quad (1.141)$$

Сравнивая это равенство с соотношениями (1.138), получаем

$$\lambda_{ij} \equiv -\left(\frac{\partial t_{ij}}{\partial T}\right)_\eta = \frac{C_\eta}{C_t}\alpha_{km} c^S_{kmij}. \quad (1.142)$$

С помощью соотношения (1.142) мы можем привести (1.133) и (1.139) к следующему виду:

$$\gamma \equiv \frac{C_t}{C_\eta} = 1 + \frac{T c^S_{kmpq}\alpha_{km}\alpha_{pq}}{\rho_0 C_t}, \quad (1.143)$$

$$c^T_{ijkm} = c^S_{ijkm} - \frac{T\alpha_{st}\alpha_{pq}c^S_{stij}c^S_{pqkm}}{\rho_0 \gamma C_t}. \quad (1.144)$$

Сокращенные обозначения. Удобно ввести упрощенные обозначения, в которых число индексов в два раза меньше, чем приведенное выше; при этом каждый индекс в сокращенной записи соответствует паре индексов в полной записи. Поскольку индексы внутри каждой пары в полной записи всегда могут быть переставлены, новые индексы должны пробегать значения от 1 до 6. Замена индексов происходит по следующей схеме:

$$\begin{aligned} 11 &\sim 1, & 23 = 32 &\sim 4, \\ 22 &\sim 2, & 13 = 31 &\sim 5, \\ 33 &\sim 3, & 12 = 21 &\sim 6. \end{aligned} \quad (1.145)$$

Каждая компонента напряжения, термодинамического напряжения или температурного коэффициента термодинамического напряжения с одним индексом полагается равной соответствующей величине с двумя индексами; однако компоненты сдвиговой деформации и коэффициенты расширения с одним индексом полагаются равными соответствующим величинам с двумя индексами, умноженным на 2. Следовательно,

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= \eta_1, & \eta_{22} &= \eta_2, & \eta_{33} &= \eta_3, \\ 2\eta_{23} &= \eta_4, & 2\eta_{13} &= \eta_5, & 2\eta_{12} &= \eta_6 \end{aligned} \quad (1.146)$$

и аналогично для коэффициентов расширения. Введение таких обозначений приводит к тому, что сдвиговые деформации с одним индексом оказываются равными соответствующим величинам, обычно используемым в технике. Коэффициенты упругости и податливости второго и более высоких порядков обозначаются двумя и большим количеством индексов:

$$c_{\lambda\mu} = \frac{\partial t_\lambda}{\partial \eta_\mu}, \qquad s_{\lambda\mu} = \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial t_\mu},$$
$$c_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial^2 t_\lambda}{\partial \eta_\mu \partial \eta_\nu}, \qquad s_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial^2 \eta_\lambda}{\partial t_\mu \partial t_\nu} \text{ и т. д.} \tag{1.147}$$

Такое определение коэффициентов упругости высших порядков было введено Браггером [1]). Греческие буквы используются для обозначения индексов, пробегающих значения от 1 до 6, тогда как латинские индексы пробегают значения от 1 до 3. Поскольку порядок дифференцирования в уравнениях (1.119) и (1.120) несуществен, имеем $c_{\lambda\mu} = c_{\mu\lambda}$. Аналогично имеем $s_{\lambda\mu} = s_{\mu\lambda}$, поскольку $s_{\lambda\mu}$ есть вторая производная от H или G, умноженная на $-\rho_0$. Эти величины с двумя индексами, так же как и соответствующие величины с четырьмя индексами, могут быть как изоэнтропическими, так и изотермическими.

При дифференцировании по деформациям или термодинамическим напряжениям с двумя индексами все девять компонент этих тензоров рассматриваются как независимые переменные, и различные функции выражаются через них симметрично, например $\partial/\partial t_{12} = \partial/\partial t_{21}$. Чтобы перейти к функциям от термодинамических напряжений с одним индексом, следует вместо *обеих* величин t_{12} и t_{21} всюду подставить t_6. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t_6} = 2\frac{\partial}{\partial t_{12}} = 2\frac{\partial}{\partial t_{21}}. \tag{1.148}$$

Однако вследствие наличия множителя 2 в соотношениях (1.146) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \eta_6} = \frac{\partial}{\partial \eta_{12}} = \frac{\partial}{\partial \eta_{21}}. \tag{1.149}$$

Отсюда следует, что $t_\lambda = \rho_0 (\partial U/\partial \eta_\lambda)$ и что каждый из коэффициентов c в сокращенных обозначениях равен соответствующему коэффициенту c в полных обозначениях, тогда как каждый из коэффициентов s в сокращенных обозначениях равен соответствующему коэффициенту s в полных обозначениях, умноженному на 2^n, где n равно числу появлений любого из индексов 4, 5

[1]) K. Brugger, частное сообщение (1962). См. также Phys. Rev., 133, A1611, A1612 (1964). (Эта ссылка была любезно сообщена автором.— *Прим. перев.*)

или 6. Коэффициенты более высокого порядка могут быть записаны в сокращенных обозначениях при помощи такого же правила. Автор благодарен К. Браггеру за указание этого и некоторых других преимуществ данных определений. Поскольку коэффициенты более высокого порядка также пропорциональны производным от термодинамических функций, их индексы в сокращенных обозначениях могут быть расположены в произвольном порядке. Например,

$$c_{123} = c_{231} = c_{312} = c_{132} = c_{321} = c_{213}. \tag{1.150}$$

Пользуясь этими обозначениями, Браггер указал простое правило определения коэффициентов в разложении энергии (1.122) при сокращенной записи индексов величин c и η:

$$\rho_0 [U(\eta, S) - U(0, S)] = \frac{1}{2}\sum_{\lambda} c_{\lambda\lambda}\eta_\lambda^2 + \sum_{\lambda<\mu} c_{\lambda\mu}\eta_\lambda\eta_\mu + \frac{1}{6}\sum_{\lambda} c_{\lambda\lambda\lambda}\eta_\lambda^3 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\lambda\neq\mu} c_{\lambda\lambda\mu}\eta_\lambda^2\eta_\mu + \sum_{\lambda<\mu<\nu} c_{\lambda\mu\nu}\eta_\lambda\eta_\mu\eta_\nu + \ldots. \tag{1.151}$$

Численный коэффициент любого члена разложения в общем случае равен $1/n!$, где n — число одинаковых индексов у компонент деформации, входящих в этот член.

Соотношение между коэффициентами упругости и податливости. Величины c и s с двумя индексами являются взаимно обратными матрицами, поскольку

$$\frac{\partial t_\lambda}{\partial \eta_\mu}\frac{\partial \eta_\mu}{\partial t_\nu} = \delta_{\lambda\nu} = c_{\lambda\mu}s_{\mu\nu}. \tag{1.152}$$

Отсюда имеем

$$c_{\lambda\mu} = \frac{(-1)^{\lambda+\mu}\Delta^s_{\lambda\mu}}{\Delta^s}, \tag{1.153}$$

$$s_{\mu\nu} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}\Delta^c_{\mu\nu}}{\Delta^c}, \tag{1.154}$$

где Δ^s — детерминант матрицы 6×6, состоящей из величин s, а $\Delta^s_{\lambda\mu}$ — минор, полученный вычеркиванием λ-й строки и μ-го столбца. Величина $(-1)^{\lambda+\mu}\Delta^s_{\lambda\mu}$ представляет собой алгебраическое дополнение величины $s_{\lambda\mu}$ в детерминанте Δ^s. Величины Δ^c и $\Delta^c_{\mu\nu}$ определяются аналогично.

Уравнение для энергии. Чтобы получить уравнение для энергии, достаточно в соответствии с (1.110) любое из выражений (1.137)

приравнять величине $(1/\rho)(\Phi - \operatorname{div}\mathbf{q})$. Например,

$$\rho\dot{U} - \frac{\rho}{\rho_0} t_{ij}\dot{\eta}_{ij} = \Phi - \operatorname{div}\mathbf{q}, \tag{1.155}$$

$$\rho\dot{H} + \frac{\rho}{\rho_0} \eta_{ij}\dot{t}_{ij} = \Phi - \operatorname{div}\mathbf{q}, \tag{1.156}$$

$$\rho C_\eta \dot{T} + T\frac{\rho}{\rho_0} \lambda_{ij}\dot{\eta}_{ij} = \Phi - \operatorname{div}\mathbf{q}, \tag{1.157}$$

$$\rho C_t \dot{T} + T\frac{\rho}{\rho_0} \alpha_{ij}\dot{t}_{ij} = \Phi - \operatorname{div}\mathbf{q}. \tag{1.158}$$

Теплопроводность. Обычно предполагается, что поток тепла, обусловленный теплопроводностью, *линейно* зависит от градиентов температуры $\partial T/\partial x_i$. Таким образом, пренебрегая другими возможными формами потока немеханической энергии, запишем

$$q_i = -K_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}. \tag{1.159}$$

Коэффициенты теплопроводности K_{ij}, вообще говоря, могут зависеть от температуры, деформации и вращения.

Пусть тензор K_{ij} изотропен, т. е. является скаляром:

$$K_{ij} = K\delta_{ij}, \tag{1.160}$$

где K — скаляр, который может зависеть от термодинамического состояния системы. Тогда уравнение (1.159) сводится к закону Фурье для теплопроводности, в соответствии с которым поток $\mathbf{q}$ пропорционален $\operatorname{grad} T$ с коэффициентом пропорциональности, не зависящим от направления:

$$\mathbf{q} = -K \operatorname{grad} T. \tag{1.161}$$

В соответствии с вторым неравенством в (1.112) $K \geqslant 0$. Условие для тензора K_{ij} сводится к тому, что он должен быть положительно полуопределенным.

Если градиент температуры выразить в материальных координатах, но при условии, что поток тепла берется через единицу площади деформированного тела, то уравнение (1.159) с учетом (1.83) примет вид

$$q_i = -K_{ij}\frac{\partial a_s}{\partial x_j}\frac{\partial T}{\partial a_s} = -K_{ij}R_{jm}\overline{C}_{ms}^{-1/2}\frac{\partial T}{\partial a_s}. \tag{1.162}$$

Хотя в большинстве практических случаев предположение о линейной зависимости потока тепла от градиента температуры оказывается полностью соответствующим действительности, его, конечно, можно обобщить с разных точек зрения. В книге Грина и Адкинса [7] рассмотрение теплопроводности начинается с предположения о том, что каждая компонента вектора потока тепла $\mathbf{q}$ может быть представлена в виде полинома по величинам

$(\partial T/\partial x_i,\ \partial x_s/\partial a_m)$ с коэффициентами, которые являются непрерывными функциями температуры T. Далее там показано, что без существенного нарушения общности рассмотрения можно положить

$$q_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_r} L_r\left(\frac{\partial T}{\partial a_j},\ \eta_{km}\right), \tag{1.163}$$

где L_r — полином от независимых переменных $(\partial T/\partial a_j,\ \eta_{km})$ с коэффициентами, являющимися непрерывными функциями температуры T.

Если мы определим новый набор величин $\varkappa_{rq}$ с помощью соотношений

$$K_{ij} = \varkappa_{rq} \frac{\partial x_i}{\partial a_r} \frac{\partial x_j}{\partial a_q}, \tag{1.164}$$

то соотношение (1.162) примет вид

$$q_i = -\frac{\partial x_i}{\partial a_r} \varkappa_{rq} \frac{\partial T}{\partial a_q}. \tag{1.165}$$

Это соотношение представляет собой специальный вид соотношения (1.163) для случая, когда $\varkappa_{rq}$ есть полином по η_{km} с коэффициентами, являющимися непрерывными функциями температуры T. Зависимость теплопроводности от деформации может быть выражена через коэффициенты

$$\frac{\partial \varkappa_{rq}}{\partial \eta_{km}} \equiv \gamma_{rqkm}. \tag{1.166}$$

6. *Термодинамика жидкостей и твердых тел под гидростатическим давлением*

Выпишем теперь в явном виде уравнения для случая изотропного тензора напряжения, когда скорости деформаций исчезающе малы. Эти уравнения применимы для жидкостей или твердых тел, подвергнутых гидростатическому сжатию или изотропному растяжению.

Если напряжение является гидростатическим давлением, удобно использовать обычные определения энтальпии H и свободной энтальпии G, а именно $H = U + pV$ и $G = A + pV$, где $V = 1/\rho$ — удельный объем (объем единицы массы). В табл. 2 приведены термодинамические соотношения, которые получаются в этом случае. При этом величины σ_{ij} (но не всегда t_{ij}) равны $-p\delta_{ij}$, хотя соотношение между табл. 1 и 2 таково, что величины t_{ij} и η_{ij}/ρ_0 могут быть одновременно заменены на величины $-p$ и V соответственно.

Термодинамическое давление. Для случая когда *скорость деформации равна нулю и среда находится в термодинамическом равновесии*, обозначим компоненты T_{11}, T_{22} и T_{33}, которые равны друг другу, через $-p$. Предположим, что уравнение состояния $f(p, \rho, T) = 0$ позволяет выразить одну из величин p, ρ, T через две другие. Подобно этому, предположим, что все термодинамические функции являются функциями двух независимых переменных, в качестве которых обычно выбирают величины (p, T). Чтобы выразить какую-либо из термодинамических функций через какие-нибудь две другие переменные (φ, ψ), для которых якобиан $\varphi_T\psi_p - \varphi_p\psi_T \neq 0$, т. е. через две другие величины, не зависящие друг от друга, нужно обратить соответствующую функцию от (p, T) и сделать необходимые подстановки.

Предположим далее, что, когда *скорость деформации равна нулю*, напряжение равно своему равновесному значению $-p\delta_{ij}$, т. е.

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + T'_{ij}. \tag{1.167}$$

Здесь каждая из величин T'_{ij} есть такая функция от d_{ij}, которая исчезает, когда исчезают все d_{ij}. Мы называем величину p *термодинамическим* давлением, чтобы отличать ее от $-{}^1/_3 T_{ss}$. Из уравнений (1.167) и (1.100) имеем

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}. \tag{1.168}$$

Следовательно, используя уравнение непрерывности, можно получить уравнение (1.102) в виде

$$\rho\frac{dU}{dt} = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + T'_{ij}d_{ij} - \operatorname{div}\mathbf{q}. \tag{1.169}$$

Изменение энтропии. Предполагая наличие локального термодинамического равновесия и считая энтропию функцией вида $S = S(U, \rho)$, запишем

$$T\frac{dS}{dt} = \frac{dU}{dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}, \tag{1.170}$$

или, используя удельный объем $V = 1/\rho$,

$$Tds = dU - \frac{p}{\rho^2}d\rho = dU + p\,dV. \tag{1.171}$$

Выражения для полных дифференциалов, приведенные в табл. 2, следуют из уравнения (1.171). Из уравнения (1.171) можно получить соотношения, аналогичные (1.109), а именно

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_\rho = \frac{1}{T}, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)_U = -\frac{p}{T\rho^2}. \tag{1.172}$$

Соотношения (1.111) и (1.112), выведенные выше, применимы как для жидкостей, так и для твердых тел.

Термодинамические функции и коэффициенты. Выведем теперь формулы, которые позволят вычислять термодинамические функции, исходя из следующих экспериментальных данных:

1) $\rho\,(p,\ T)$, т. е. плотность или удельный объем $V = 1/\rho$ как функция давления и температуры;

2) $C_p\,(p_0,\ T)$, т. е. теплоемкость при постоянном давлении как функция температуры для некоторого фиксированного давления p_0, например 1 *атм*.

Сжимаемость и тепловое расширение. Соотношение между величинами p, ρ и T (или p, V и T) называется уравнением состояния. Изотермический модуль объемной упругости B, изотермическая сжимаемость $\chi \equiv 1/B$ и изобарический коэффициент объемного расширения β определяются выражениями

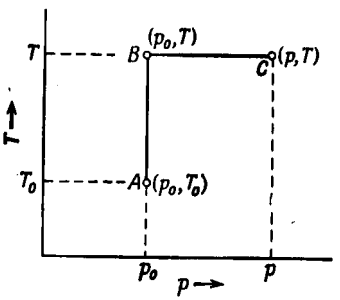
$$\frac{1}{\chi} \equiv B \equiv -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \equiv \rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \equiv \frac{1}{(1/\rho)\,(\partial\rho/\partial p)_T} \equiv -\frac{1}{(1/V)\,(\partial V/\partial p)_T}, \tag{1.173}$$

$$\beta \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \equiv -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \equiv -\left[\frac{\partial}{\partial T}(\ln\rho)\right]_p. \tag{1.174}$$

Отметим следующие соотношения:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho = B\beta, \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \frac{B}{\rho}, \tag{1.175}$$

которые соответствуют уравнениям (1.132) и (1.119). Коэффициенты χ, B и β являются функциями двух независимых термодинамических переменных, например $(p,\ T)$. Они могут быть вычислены путем дифференцирования известного уравнения состояния.



Фиг. 11. Путь интегрирования в плоскости $(p,\ T)$.

Наоборот, уравнение состояния может быть получено интегрированием сжимаемости и коэффициента расширения. Например, для того чтобы найти $\rho\,(p,\ T)$ или $p\,(\rho,\ T)$, мы можем проинтегрировать сжимаемость и коэффициент расширения на плоско-

сти (p, T) вдоль пути, указанного на фиг. 11. Результаты имеют вид

$$\ln\frac{\rho(p, T)}{\rho(p_0, T_0)} = -\int_{T_0}^{T}\beta(p_0, T')\,dT' + \int_{p_0}^{p}\chi(p', T)\,dp', \quad (1.176)$$

$$p(\rho, T) - p(\rho_0, T_0) = \int_{T_0}^{T} B(\rho_0, T')\,\beta(\rho_0, T')\,dT' + \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{B(\rho', T)}{\rho'}\,d\rho'. \quad (1.177)$$

Дифференцируя (1.176), находим $\beta(p, T)$ из $\beta(p_0, T)$ и $\chi(p, T)$:

$$\beta(p, T) = -\left[\frac{\partial}{\partial T}(\ln\rho)\right]_p = \beta(p_0, T) + \int_{p_0}^{p}\frac{\partial}{\partial T}\chi(p', T)\,dp'. \quad (1.178)$$

Теплоемкости. Аналогично выражениям (1.124), (1.125), (1.127)—(1.131) и (1.133) имеем

$$C_V \equiv \lim_{dT\to 0}\left(\frac{TdS}{dT}\right)_V \equiv T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V, \quad (1.179)$$

$$C_p \equiv \lim_{dT\to 0}\left(\frac{TdS}{dT}\right)_p \equiv T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p, \quad (1.180)$$

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = T\frac{\partial^2 S}{\partial T\,\partial p} = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p, \quad (1.181)$$

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\frac{\partial^2 S}{\partial T\,\partial V} = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V, \quad (1.182)$$

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \quad (1.183)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = C_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \quad (1.184)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -p + T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = TB\beta - p, \quad (1.185)$$

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = TV\beta^2 B. \quad (1.186)$$

Вычисление термодинамических функций на основании уравнения состояния и теплоемкости $C_p(p_0, T)$. Из выражений для dU и dH и последнего термодинамического соотношения в табл. 2 получим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = -p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T + T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V\left(\frac{p}{B} - T\beta\right), \quad (1.187)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V + T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V(1 - T\beta). \quad (1.188)$$

Мы видим, что, зная уравнение состояния, можно вычислить величину $C_p - C_V$ и зависимость U и H от давления.

Энтальпию $H(p, T)$ можно вычислить из уравнений (1.188) и (1.183). Путь интегрирования показан на фиг. 11. Результат имеет вид

$$H(p, T) - H(p_0, T_0) = \int_{T_0}^{T} C_p(p_0, T')\,dT' + \int_{p_0}^{p} V(p', T)[1 - T\beta(p', T)]\,dp'. \quad (1.189)$$

Из уравнения (1.180) и последнего термодинамического соотношения в табл. 2 находим

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp + \frac{C_p}{T} dT.$$

Производя интегрирование по пути, указанному на фиг. 11, получаем

$$S(p, T) - S(p_0, T_0) = \int_{T_0}^{T} \frac{C_p(p_0, T')}{T'} dT' - \int_{p_0}^{p} \frac{\partial V(p', T)}{\partial T} dp'. \quad (1.190)$$

Зная зависимость между величинами p, V и T и определив H и S, можно легко вычислить другие термодинамические функции $U = H - pV$, $A = U - TS$ и $G = H - TS$.

Из уравнений (1.176), (1.178), (1.189) и (1.190) мы видим, что, зная величины $\chi(p, T)$, $\beta(p_0, T)$ и $C_p(p_0, T)$, можно определить уравнение состояния и все термодинамические функции.

Скорости изменения термодинамических функций. Предполагая наличие локального термодинамического равновесия и составляя соответствующие комбинации из выражений, полученных выше, находим

$$\dot{U} = C_V\dot{T} + \frac{\dot{\rho}}{\rho^2}(p - TB\beta), \quad (1.191)$$

$$\dot{H} = C_p\dot{T} + \frac{\dot{p}}{\rho}(1 - T\beta), \quad (1.192)$$

$$\dot{T} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\dot{p}}{B} - \frac{\dot{\rho}}{\rho}\right). \quad (1.193)$$

Далее выражения (1.170) и (1.186), определение величины H и уравнения (1.191)—(1.193) дают

$$\rho T\dot{S} = \rho\dot{U} - \frac{p}{\rho}\dot{\rho} = \rho C_V \dot{T} - \frac{TB\beta}{\rho}\dot{\rho} =$$

$$= \rho\dot{H} - \dot{p} = \rho C_p \dot{T} - T\beta\dot{p} = \frac{\rho C_V}{B\beta}\dot{p} - \frac{C_p}{\beta}\dot{\rho}. \quad (1.194)$$

Изоэнтропические коэффициенты. Полагая $\dot{S} = 0$ в (1.194), получаем

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S = \frac{TB\beta}{\rho^2 C_V}, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{T\beta}{\rho C_p}, \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \frac{BC_p}{\rho C_V}. \quad (1.195)$$

Изоэнтропический модуль объемной упругости B' и изоэнтропическая сжимаемость χ' (обычно называемые *адиабатическими*) даются выражением

$$\frac{1}{\chi'} \equiv B' \equiv -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \equiv \rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = B\frac{C_p}{C_V}. \quad (1.196)$$

Следовательно,

$$\frac{B'}{B} = \gamma \equiv \frac{C_p}{C_V} = \text{(отношение теплоемкостей)}. \quad (1.197)$$

Уравнение для энергии. В соответствии с соотношением (1.110), чтобы получить уравнение для энергии, любое из выражений (1.194) можно приравнять величине $\Phi - \operatorname{div}\mathbf{q}$. Например, по аналогии с уравнениями (1.155)—(1.158) получим

$$\rho\frac{dU}{dt} - \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \Phi - \operatorname{div}\mathbf{q}, \quad (1.198)$$

$$\rho\frac{dH}{dt} - \frac{dp}{dt} = \Phi - \operatorname{div}\mathbf{q}, \quad (1.199)$$

$$\rho C_V\frac{dT}{dt} - \frac{T\beta B}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \Phi - \operatorname{div}\mathbf{q}, \quad (1.200)$$

$$\rho C_p\frac{dT}{dt} - T\beta\frac{dp}{dt} = \Phi - \operatorname{div}\mathbf{q}. \quad (1.201)$$

На основании уравнения непрерывности величину $(-1/\rho)\,(d\rho/dt)$ в уравнениях (1.198) и (1.200) можно заменить на $\operatorname{div}\mathbf{v}$.

Соотношение между скалярными и тензорными коэффициентами. При вычислении коэффициента расширения и сжимаемости твердого тела в исходном состоянии, когда напряжения и деформации равны нулю, эти величины легко выражаются через соответствующие тензорные коэффициенты. Из уравнения (1.92)

следует, что

$$J^2 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 = \left|\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right|^2 = \left|\frac{\partial x_k}{\partial a_i}\frac{\partial x_k}{\partial a_j}\right| = |\delta_{ij} + 2\eta_{ij}|. \quad (1.202)$$

Дифференцируя это выражение, находим, что *при деформации, равной нулю*,

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \eta_{ij}}\right)_{\eta=0} = \delta_{ij}, \quad (1.203)$$

$$\beta_0 = \left(\frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial T}\right)_{\eta=0} = \left(\frac{\partial J}{\partial \eta_{ij}}\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial T}\right)_{\eta=0} = \alpha_{ij}\delta_{ij} = \alpha_{ss}, \quad (1.204)$$

где величины α_{ij} взяты при нулевой деформации.

Если $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, то уравнение (1.105) принимает вид

$$t_{st} = -\frac{\partial a_s}{\partial x_i}\frac{\partial a_t}{\partial x_i}pJ = -\overset{-1}{C}_{st}pJ. \quad (1.205)$$

Дифференцируя, получаем

$$\left(\frac{\partial t_{st}}{\partial p}\right)_{p=0} = \left(-\overset{-1}{C}_{st}J\right)_{p=0} = -\delta_{st}. \quad (1.206)$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial p}\right)_{\substack{T\\p=0}} = \left(\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial t_{km}}\frac{\partial t_{km}}{\partial p}\right)_{\substack{T\\p=0}} = -s^T_{ijkm}\delta_{km} = -s^T_{ijss}, \quad (1.207)$$

где коэффициенты податливости взяты для среды, находящейся в исходном состоянии. Затем, используя (1.203) и (1.207), получаем

$$\frac{1}{B_0} = \chi_0 = \left(-\frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial p}\right)_{p=0} = \delta_{ij}s^T_{ijss} = s^T_{iijj}. \quad (1.208)$$

Аналогично изоэнтропическая сжимаемость

$$\frac{1}{B_0'} = \chi_0' = s^S_{iijj}. \quad (1.209)$$

В сокращенных обозначениях суммы в выражениях (1.208) и (1.209) имеют вид

$$s_{iijj} = s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{23} + s_{31}). \quad (1.210)$$

Наконец, из уравнений (1.205) и (1.202) следует, что нулевое давление соответствует нулевому термодинамическому напряжению, а нулевая деформация — постоянному объему. Следовательно, *в исходном состоянии*

$$C_t = C_p, \quad C_\eta = C_V. \quad (1.211)$$

7. *Изотропные жидкие среды*

Если мы называем среду *жидкостью*, то подразумеваем при этом, что она податлива под действием сколь угодно малого сдвигового напряжения. Отсюда следует, что сдвиговые напряжения равны нулю, если скорость деформации равна нулю. Это условие содержится в соотношении (1.167), где установлено, что каждая из величин T'_{ij} исчезает, когда все d_{ij} равны нулю.

Если не оговорено противное, то жидкость обычно считается изотропной, т. е. в ней не существует выделенного направления. Трусделл и Тупин [2] показали, что если напряжение зависит только от скорости деформации, то среда обязательно является изотропной по отношению к связи между напряжением и скоростью деформации. Изотропия среды здесь означает, что тензоры T_{ij} и d_{ij} всегда имеют одни и те же главные оси. Доказательство этого положения можно начать с предположения о том, что напряжение зависит от $\mathbf{v}$, вихря $\mathbf{w}$ и d_{ij}. Поведение вещества должно быть независимым от выбора системы отсчета, связанной с наблюдателем. Однако наблюдатель, движущийся с материальной скоростью $\mathbf{v}$ и вращающийся с угловой скоростью $\mathbf{w}/2$, наблюдает те же самые напряжения и скорости деформации, что и покоящийся наблюдатель. Но скорость и вихрь в движущейся системе отсчета равны нулю. Поэтому напряжение не должно зависеть от $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$. Предположим теперь, что тензор d_{ij} преобразован к его главным осям, так что его компоненты остаются неизменными при повороте осей на 180°. Поскольку поворот на 180° вокруг k-й оси приводит к изменению знака T_{km} на обратный для $k \neq m$, тогда как главные скорости деформации [1]) остаются неизменными, имеем $T_{km} = 0$ при $k \neq m$. Отсюда следует, что главные оси тензора напряжения всегда совпадают с главными осями тензора скорости деформации. Это совпадение главных осей указывает на отсутствие какого-либо выделенного направления.

Тензор теплопроводности в жидкости, подвергнутой деформации, не обязательно является изотропным. Если бы теплопроводность зависела от скорости деформации, тогда величина K_{ij} была бы изотропной при изотропной d_{ij}, но она не обязательно была бы изотропной для скоростей деформации общего вида. Однако для упрощения обычно предполагается, что K_{ij} — изотропный тензор, равный $K\delta_{ij}$, где величина K зависит только от термодинамического состояния среды.

Невязкие жидкости. *Идеальная* жидкость представляет собой некоторую идеализированную среду, в которой нет сдвиговых

[1]) Главные скорости деформации равны диагональным компонентам тензора T_{km}. — *Прим. перев.*

напряжений и не существует пар сил. Определим жидкость без трения, или *невязкую* жидкость, как идеальную жидкость, в которой выполняется предположение о локальном термодинамическом равновесии (см., например, п. 5 данного параграфа) и напряжение всегда равно термодинамическому давлению. Последнее получается, если в (1.167) положить $T'_{ij} = 0$:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij}. \tag{1.212}$$

Чтобы конкретизировать уравнение для импульса (1.47) для случая невязкой жидкости, подставим вместо T_{ij} выражение (1.212). Тогда получим уравнение Эйлера

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \operatorname{grad} p. \tag{1.213}$$

Поскольку $T'_{ij} \equiv 0$, имеем $\Phi = 0$. Предполагая справедливость закона Фурье (1.161) и подставляя $\Phi = 0$ и $\mathbf{q} = -K \operatorname{grad} T$ в уравнения (1.198) — (1.201), получаем различные формы уравнения для энергии.

Жидкости с ньютоновской вязкостью. Для случая когда движение является простым сдвигом, т. е. когда компонента скорости вдоль оси x задается выражением $u = u(y)$, ньютоновский закон вязкости имеет вид

$$T_{yx} = \eta \frac{du}{dy}, \tag{1.214}$$

где η — коэффициент вязкости, который может зависеть от термодинамического состояния жидкости, но не зависит от du/dy. Если имеет место другая зависимость напряжения от du/dy, то такая жидкость называется неньютоновской. Обобщение ньютоновского закона вязкости для движения более общего вида обычно получают следующим образом. Произведем сначала разделение тензоров напряжения и скорости деформации на изотропную часть и девиатор:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{1}{3} T_{kk}\delta_{ij} + \tau_{ij}, \\ d_{ij} &= \frac{1}{3} d_{kk}\delta_{ij} + D_{ij}. \end{aligned} \tag{1.215}$$

Эти уравнения определяют девиаторы τ_{ij} и D_{ij}. Запишем далее

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= 2\eta D_{ij}, \\ T_{kk} &= 3\left[-p(\rho, T) + \zeta d_{kk}\right], \end{aligned} \tag{1.216}$$

где ζ — второй коэффициент вязкости, называемый также *объемной* вязкостью, а $p(\rho, T)$ — *термодинамическое* давление, определяемое уравнением (1.167).

Из уравнений (1.216) и (1.215) находим

$$T_{ij}=\left[-p(\rho,\ T)+\left(\zeta-\frac{2}{3}\eta\right)d_{kk}\right]\delta_{ij}+2\eta d_{ij}. \quad (1.217)$$

Из сравнения с уравнением (1.167) видно, что *диссипативная*, или *вязкая* часть напряжения равна

$$T'_{ij}=\left(\zeta-\frac{2}{3}\eta\right)d_{kk}\delta_{ij}+2\eta d_{ij}=$$

$$=\left(\zeta-\frac{2}{3}\eta\right)\frac{\partial v_s}{\partial x_s}\delta_{ij}+\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \quad (1.218)$$

Если коэффициенты вязкости η и ζ не зависят от скорости деформации, то жидкости, подчиняющиеся уравнению (1.218), называются *ньютоновскими* жидкостями, или жидкостями с *линейной вязкостью*.

Подставляя (1.217) в уравнение для импульса (1.47), получаем уравнение движения для сжимаемой жидкости с ньютоновской вязкостью. Из (1.218) имеем

$$\frac{\partial T'_{ji}}{\partial x_j}=\left(\zeta+\frac{1}{3}\eta\right)\frac{\partial d_{kk}}{\partial x_i}+\eta\nabla^2 v_i+d_{kk}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta-\frac{2}{3}\eta\right)+2d_{ji}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}. \quad (1.219)$$

Таким образом, уравнение для импульса имеет вид

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial T'_{ji}}{\partial x_j}, \quad (1.220)$$

где величина $\partial T'_{ji}/\partial x_j$ определяется выражением (1.219). Упрощенные уравнения могут быть получены в следующих важных частных случаях: 1) если величина η или ζ постоянна, 2) если $\zeta=0$ и 3) если $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$.

Если $\eta=\text{const}$ и $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$, то получаем

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\eta\nabla^2 v_i. \quad (1.221)$$

В этом частном случае (а иногда и при более общих предположениях) уравнение для импульса называется *уравнением Навье — Стокса*.

Из уравнений (1.101) и (1.218) имеем

$$\Phi=\zeta d_{kk}^2+2\eta D_{ij}D_{ij}=\left(\zeta-\frac{2}{3}\eta\right)d_{kk}^2+2\eta d_{ij}d_{ij}=$$

$$=\left(\zeta-\frac{2}{3}\eta\right)d_{kk}^2+\eta\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \quad (1.222)$$

Таким образом, подставляя (1.222) и (1.161) в уравнения (1.198) — (1.201), можно получить уравнения для энергии в случае сжимаемой жидкости с ньютоновской вязкостью и теплопроводностью, подчиняющейся закону Фурье. В первом из равенств (1.222)

величина Ф для жидкости с ньютоновской вязкостью представлена как сумма квадратов. Следовательно, мы видим, что если коэффициенты вязкости ζ и η не отрицательны, то $\Phi \geqslant 0$ в соответствии с соотношениями (1.112).

Уравнение (1.218) является наиболее общим *линейным* соотношением между тензорами T'_{ij} и d_{ij}. Поэтому их собственные векторы всюду совпадают.

В общем случае два симметричных тензора T_{ij} и e_{ij}, связанные между собой соотношением

$$T_{ij} = c_{ijkm} e_{km}, \tag{1.223}$$

тогда, и только тогда, имеют одни и те же главные оси при произвольном e_{km}, если тензор c_{ijkm} является изотропным:

$$c_{ijkm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}). \tag{1.224}$$

Изотропным декартовым тензором называется такой тензор, компоненты которого не зависят от выбора декартовой прямоугольной системы координат. Подстановка (1.224) в (1.223) дает

$$T_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \tag{1.225}$$

Это соотношение имеет ту же форму, что и (1.218). Соотношение (1.225) может быть преобразовано к следующему виду:

$$T_{kk} = (3\lambda + 2\mu) e_{kk},$$

$$\left(T_{ij} - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij}\right) = 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij}\right).$$

Из этого следует, что два симметричных тензора T_{ij} и e_{km}, связанные между собой соотношением (1.223), имеют одни и те же собственные векторы для произвольного тензора e_{km} тогда, и только тогда, когда след тензора T_{ij} равен следу тензора e_{km}, умноженному на постоянную величину, а девиатор тензора T_{ij} равен умноженному на скаляр девиатору тензора e_{km}. Последняя фраза дает в легко запоминаемой форме изотропное линейное соотношение между симметричными тензорами второго ранга.

Более общее описание изотропных жидкостей. Если положить, что величина Ф зависит только от трех инвариантов тензора d_{ij} и не зависит от направления главных осей тензора, то изотропия жидкости будет обеспечена. При этом можно использовать любые три инварианта, например собственные значения тензора или три главных инварианта тензора I_d, II_d и III_d, которые появляются в характеристическом уравнении для собственных значений; k-й *главный инвариант* тензора второго ранга, по определению, равен сумме главных миноров k-го порядка этого тензора. В трехмерном пространстве главными инвариантами являются

след тензора $I_d = d_{ss}$, сумма главных миноров с двумя строками II_d и детерминант III_d. Для целей настоящего изложения несколько более удобными являются следующие три инварианта:

$$\begin{aligned} d_{kk} &= I_d, \\ d_{ij}d_{ij} &= I_d^2 - 2\,II_d, \\ d_{ij}d_{jk}d_{ki} &= I_d^3 - 3I_dII_d + 3III_d. \end{aligned} \tag{1.226}$$

Третье из этих соотношений получается в результате свертки по индексам i и m в тождестве Кейли — Гамильтона:

$$d_{ij}d_{jk}d_{km} \equiv d_{ij}d_{jm}I_d - d_{im}II_d + \delta_{im}III_d$$

с учетом первых двух соотношений (1.226).

Предположим теперь, что величина Φ может быть представлена в виде степенного ряда по трем инвариантам (1.226) с коэффициентами Φ_{PQR}, которые могут зависеть от термодинамического состояния среды:

$$\Phi = \sum \Phi_{PQR} (d_{kk})^P (d_{ij}d_{ij})^Q (d_{ij}d_{jk}d_{ki})^R. \tag{1.227}$$

Поскольку величина Φ должна быть равна нулю, когда d_{ij} равно нулю, имеем $\Phi_{000} = 0$. Поскольку каждый из членов степенного ряда содержит в качестве множителя один из трех инвариантов d_{kk}, $d_{ij}d_{ij}$, $d_{ij}d_{jk}d_{ki}$, выражение (1.227) может быть представлено в виде

$$\Phi = (F_0\delta_{ij} + F_1d_{ij} + F_2d_{ik}d_{kj})\,d_{ij}, \tag{1.228}$$

где F_0, F_1, F_2 — функции инвариантов и термодинамического состояния жидкости. Наконец, вспоминая выражение (1.101), находим

$$T_{ij} = F_0\delta_{ij} + F_1d_{ij} + F_2d_{ik}d_{kj}. \tag{1.229}$$

Это общее соотношение имеет место для жидкости, которая может быть *неньютоновской*, или обладать *нелинейной вязкостью*, но для которой величина Φ зависит только от инвариантов тензора d_{ij}. Предполагая, что выполняется соотношение (1.167), мы можем написать выражение для полного напряжения в виде

$$T_{ij} = (-p + F_0)\,\delta_{ij} + F_1d_{ij} + F_2d_{ik}d_{kj}. \tag{1.230}$$

8. *Малые деформации*

Чтобы получить линейные уравнения классической теории упругости и акустики, нужно пренебречь квадратами и произведениями производных от смещений, а также пренебречь различием между материальными и пространственными координатами.

Условие пренебрежения различием между материальными и пространственными координатами означает, что если $f(a_1, a_2, a_3)$ — непрерывная дифференцируемая функция, то мы пренебрегаем разностью $(\partial f/\partial a_k - \partial f/\partial x_k)$, а также разностью

$$\Delta f = f(\mathbf{a}+\mathbf{u}) - f(\mathbf{a}) = u_i \frac{\partial f}{\partial a_i} + \frac{u_i u_k}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_k} + \ldots . \quad (1.231)$$

В разложении в ряд безразмерной ошибки $\Delta f/f$ главные члены равны $(u_i/f)\,(\partial f/\partial a_i)$. Следовательно, для того чтобы эта аппроксимация была справедлива, каждая из величин u_i должна быть малой по сравнению $[(1/f)\,(\partial f/\partial a_i)]^{-1}$. Очевидно, ошибка стремится к нулю, когда смещения стремятся к нулю.

Запишем теперь

$$\frac{\partial f}{\partial a_k} = \frac{\partial x_s}{\partial a_k}\frac{\partial f}{\partial x_s} = \left(\delta_{sk} + \frac{\partial u_s}{\partial a_k}\right)\frac{\partial f}{\partial x_s} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial u_s}{\partial a_k}\frac{\partial f}{\partial x_s}$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial a_s}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial a_s} = \left(\delta_{sk} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right)\frac{\partial f}{\partial a_s} = \frac{\partial f}{\partial a_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial a_s}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial f}{\partial a_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial u_s}{\partial a_k}\frac{\partial f}{\partial x_s} = \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial a_s}. \quad (1.232)$$

Мы видим, что, когда градиенты смещений (или производные) $\partial u_i/\partial a_j$ стремятся к нулю, $\partial f/\partial a_k \to \partial f/\partial x_k$. Когда градиенты смещений малы, любая производная по a_k может быть заменена соответствующей производной по x_k, причем ошибка точно определяется выражением (1.232).

Если градиенты смещений $\partial u_i/\partial a_j$ стремятся к нулю, мы можем отбросить их квадраты и произведения по сравнению с линейными членами. Для каждой компоненты тензоров η_{ij} и S_{ij} имеем $(\eta_{ij}/S_{ij}) \to 1$ (здесь нет суммирования по повторяющимся индексам), и можно считать, что $\eta_{ij} \approx S_{ij}$, $\varepsilon_{ij} \approx e_{ij}$. Кроме того, из выражения (1.232) имеем $S_{ij} \approx e_{ij}$:

$$\eta_{ij} \approx S_{ij} \approx e_{ij} \approx \varepsilon_{ij}. \quad (1.233)$$

Таким образом, тензоры деформации сводятся к тензорам удлинения.

Очевидно, как деформация, так и вращение стремятся к нулю с уменьшением градиентов смещений.

В линейной теории упругости и в акустике обычно предполагают, что малыми являются как *смещения*, так и *градиенты смещений*. Тогда различие между материальными и пространственными координатами становится несущественным, и компоненты тензора деформации оказываются линейными функциями градиентов смещений.

Для малых изотермических или изоэнтропических деформаций относительно исходного естественного состояния термодинамические напряжения могут быть разложены в ряд

$$t_{ij} = \left(\frac{\partial t_{ij}}{\partial \eta_{km}}\right) \eta_{km} + \ldots = c_{ijkm}\eta_{km} + \ldots, \qquad (1.234)$$

где коэффициенты c_{ijkm} вычисляются для исходного состояния и представляют собой изотермические или изоэнтропические коэффициенты, в зависимости от того, какой случай рассматривается. При учете величин первого порядка относительно градиентов смещений тензор η_{km} сводится к тензору S_{km}. Кроме того, из уравнения (1.116) следует, что компоненты тензора напряжения равны термодинамическим напряжениям при учете величин первого порядка по градиентам смещений. Таким образом, если напряжение имеет только недиссипативную часть ($T_{ij} = \sigma_{ij}$), то

$$T_{ij} = c_{ijkm}S_{km} + \left\{\begin{matrix}\text{члены высшего порядка} \\ \text{по градиентам смещений}\end{matrix}\right\}. \qquad (1.235)$$

Величину $\partial T_{ji}/\partial x_j$, которая появляется в уравнении движения, с учетом соотношения (1.232) можно записать в виде

$$\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} c_{jikm} \frac{\partial a_s}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial a_s}\left(\frac{\partial u_k}{\partial a_m} + \frac{\partial u_m}{\partial a_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} c_{jikm}\left(\delta_{sj} - \frac{\partial u_s}{\partial a_j} + \frac{\partial u_t}{\partial x_j}\frac{\partial u_s}{\partial a_t}\right)\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial a_s\, \partial a_m} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial a_s\, \partial a_k}\right).$$

При достаточно малых градиентах смещений достаточно оставить только линейные члены. Тогда имеем

$$\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} c_{jikm}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial a_j\, \partial a_m} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial a_j\, \partial a_k}\right) = \frac{\partial T_{ji}}{\partial a_j}. \qquad (1.236)$$

Это соотношение следует также непосредственно из (1.232). Кроме того, поскольку $c_{jikm} = c_{jimk}$, уравнение (1.236) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial T_{ji}}{\partial a_j} = \frac{1}{2}(c_{jikm} + c_{jimk})\frac{\partial^2 u_k}{\partial a_j\, \partial a_m} = c_{jikm}\frac{\partial^2 u_k}{\partial a_j\, \partial a_m}.$$

В заключение умножим приближенное уравнение движения

$$\rho \ddot{u}_i = F_i + \frac{\partial T_{ji}}{\partial a_j}$$

на величину $\rho_0/\rho = J$, причем величину J разложим в ряд по градиентам смещений. Тогда получим

$$\rho_0 \ddot{u}_i = JF_i + c_{ijkm}\frac{\partial^2 u_k}{\partial a_j\, \partial a_m}, \qquad (1.237)$$

где в сумме $J(\partial T_{ji}/\partial a_j)$ оставлены только линейные члены. Если деформация производится адиабатически или изотермически, то в уравнении (1.237) нужно использовать соответственно изоэнтропические или изотермические коэффициенты c.

Если объемная сила на единицу объема F_i является силой тяжести g, то мы имеем $F_i = \rho g_i$ и, следовательно, $JF_i = \rho_0 g_i$.

§ 3. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

1. Комплексное описание осциллирующих величин

Поскольку $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$, любая величина, колеблющаяся по синусоидальному закону $|A|\cos(\omega t + \varphi)$, может быть записана в виде

$$|A|\cos(\omega t+\varphi) = \mathrm{Re}\,(Ae^{j\omega t}),$$

$$A = |A|e^{j\varphi} = |A|e^{j\angle A}.$$

Величина A называется *комплексной амплитудой*. Модуль этой величины $|A|$ представляет собой действительную амплитуду колебательного процесса, а ее угол $\angle A = \varphi$ есть фаза колебания, т. е. угол, на который колебательный процесс опережает $\cos\omega t$. В распределенной системе величина A зависит от положения в пространстве. Мы обычно будем опускать символ Re.

Отношение двух таких комплексных функций ведет себя подобно сопротивлению или проводимости. Запишем

$$Z = \frac{Ne^{j\omega t}}{De^{j\omega t}} = \frac{N}{D} = \frac{|N|}{|D|}\,e^{j(\angle N-\angle D)} = |Z|e^{j\angle Z}.$$

Мы видим, что абсолютная величина отношения равна отношению действительных амплитуд, а угол представляет собой сдвиг фазы между числителем и знаменателем (угол, на который колебание, представленное числителем, опережает колебание, представленное знаменателем).

2. Бегущие волны

Незатухающая синусоидальная бегущая волна имеет постоянную амплитуду $|A|$, а ее фаза φ уменьшается по мере распространения волны на 2π радиан на каждой длине волны, взятой в направлении распространения. Если λ — длина волны, то сдвиг фазы на единицу длины равен $2\pi/\lambda$. Таким образом, амплитуда незатухающей синусоидальной волны, распространяющейся

в направлении x, равна

$$A = Ce^{-j\beta x}, \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{\omega}{V}, \tag{1.238}$$

где $V = \lambda f$ — скорость распространения волны, C — некоторая постоянная.

Если фактическая амплитуда затухающей волны представлена в виде $|C|e^{-\alpha x}$, то отношение амплитуды волны в некоторой точке x к ее амплитуде в точке $(x + 1)$ равно e^{α}, а величина α равна натуральному логарифму этого отношения. Натуральный логарифм отношения двух амплитуд, по определению, представляет собой уменьшение амплитуды знаменателя по сравнению с амплитудой числителя, выраженной в неперах. Таким образом, величина α есть затухание в неперах на единицу длины. Соответствующее затухание, выраженное в децибелах на единицу длины, равно $20 \lg (e^{\alpha}) = 8{,}686\alpha$.

Окончательно выражение для затухающей синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси x с фазовым сдвигом β *рад* на единицу длины и затуханием α *непер* на единицу длины можно записать в виде

$$|C|e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x + \angle C) = Ce^{j\omega t-(\alpha+j\beta)x} = Ce^{j\omega t-\Gamma x}.$$

Действительную константу затухания α и действительный сдвиг фазы β часто объединяют в одну *комплексную* константу

$$\Gamma = \alpha + j\beta. \tag{1.239}$$

Величину Γ обычно называют постоянной распространения. Величины α и β обычно считают положительными, и волна, бегущая в направлении оси x, описывается выражением $C\exp(j\omega t + \Gamma x)$. Если волна распространяется вдоль произвольного направления, характеризуемого единичным вектором $\mathbf{n}$, то плоская бегущая волна в этом направлении дается выражением $C\exp[j(\omega t - \beta \mathbf{n}\cdot\mathbf{r})]$. Очевидно, что если одновременно поменять знак перед $j\omega t$ и перед фазовой постоянной, то направление распространения волны не изменится.

Волны с одинаковыми частотами и постоянными распространения, но с разными амплитудами и фазами могут быть легко представлены как одна волна:

$$A_1e^{j\omega t-\Gamma x} + A_2e^{j\omega t-\Gamma x} = (A_1 + A_2)\,e^{j\omega t-\Gamma x}.$$

3. *Стоячие волны*

Идеальная стоячая волна представляет собой сумму двух незатухающих волн одной и той же частоты, скорости и амплитуды, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\mathrm{Re}[Ae^{j(\omega t-\beta x)} + Ae^{j(\omega t+\beta x)}] = 2|A|\cos(\omega t + \angle A)\cos\beta x.$$

Следовательно, на некотором фиксированном расстоянии x имеются синусоидальные колебания во времени с действительной амплитудой, равной $2|A||\cos \beta x|$. Поэтому распределение амплитуды такого колебания в пространстве имеет узлы и пучности.

Если амплитуды волн не равны друг другу, например $|A_1| > |A_2|$, то колебание все же оказывается стационарным. Однако амплитуда его не постоянна: там, где колебания взаимно компенсируют друг друга, амплитуда минимальна и равна $|A_1| - |A_2|$, а там, где они усиливают друг друга, амплитуда равна максимальной величине $|A_1| + |A_2|$. Отношение $(|A_1| + |A_2|)/(|A_1| - |A_2|)$ называется коэффициентом стоячей волны.

4. *Добротность*

Для характеристики качества материала как среды, в которой распространяется волна, часто используется механическая добротность Q. Эта величина определяется иногда как отношение энергии, переносимой волной, к энергии, поглощаемой в среде на 1 *рад* фазового сдвига, или как умноженное на 2π отношение энергии, переносимой волной, к энергии, поглощаемой на расстоянии, равном 1 длине волны. Поскольку энергия пропорциональна квадрату амплитуды, а амплитуда пропорциональна величине $e^{-\alpha x}$, локальная потеря энергии на 1 *рад* равна

$$-\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}e^{-2\alpha x}.$$

Тогда отношение энергий на 1 *рад* равно

$$\frac{\text{Поглощенная энергия}}{\text{Энергия волны}} = \frac{-\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}e^{-2\alpha x}}{e^{-2\alpha x}} = \frac{2\alpha}{\beta}.$$

Определим добротность Q следующей формулой:

$$Q \equiv \frac{\beta}{2\alpha}. \tag{1.240}$$

Тогда затухание *на 1 длину волны* равно

$$\alpha\lambda = \frac{2\pi\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{Q} \text{ непер} \approx \frac{27{,}3}{Q} \text{ дб}. \tag{1.241}$$

Имеются другие определения величины Q, которые эквивалентны этому определению при высоких значениях Q, но не эквивалентны ему, когда Q мало. Из уравнения (1.241) видно, что величина Q есть число длин волн, которые волна должна пройти для того, чтобы ее энергия уменьшилась в $e^{2\pi}$ раз по сравнению с первоначальным значением (или амплитуда уменьшилась в e^{π} раз).

Следовательно, Q равно числу длин волн, на котором волна затухает на π *непер*, или на 27,3 *дб*. Такая формулировка приводит нас к соответствующей формулировке для затухания во времени, что имеет место, например, при затухании свободных колебаний: Q есть число периодов, в течение которых амплитуда колебаний уменьшается в e^{π} раз по сравнению со своим первоначальным значением.

Это определение величины Q можно сопоставить с хорошо известным определением «отношения реактивного сопротивления к активному» для простой системы масса — пружина — трение. Такая система состоит из сосредоточенной массы L, сосредоточенной податливости C и силы трения $-R\dot{x}$. Уравнение вынужденных колебаний для такой системы

$$L\ddot{x}+R\dot{x}+\frac{x}{C}=F(t)$$

можно переписать в виде

$$\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q_l}\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{1}{L}F(t),$$
$$\omega_0^2=\frac{1}{LC},\quad Q_l=\frac{\omega_0 L}{R}. \tag{1.242}$$

Из решения уравнения для *свободных* колебаний ($F=0$)

$$x=Ae^{pt},\qquad p=j\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q_l^2}}-\frac{\omega_0}{2Q_l} \tag{1.243}$$

видно, что амплитуда колебаний уменьшается до значения, составляющего $e^{-\pi}$ первоначального значения, за время, равное $2\pi Q_l/\omega_0$, что соответствует Q_l периодам незатухающих колебаний с частотой $\omega_0/2\pi$. Следовательно, $Q_l \to Q$ в предельном случае высоких значений Q.

Хорошо известно также соотношение между Q и шириной резонансной кривой для вынужденных колебаний сосредоточенной системы. Если вынуждающая сила равна $Fe^{j\omega t}$, то колебания системы описываются выражением $x = A(\omega)\,e^{j\omega t}$, где амплитуда

$$A(\omega)=\frac{F/L}{\omega_0^2-\omega^2+j\omega(\omega_0/Q_l)}.$$

Комплексный импеданс такой системы равен отношению комплексной силы к комплексной скорости:

$$\frac{F}{j\omega A}=\frac{\omega_0 L}{Q_l}+j\left(\omega L-\frac{\omega_0^2 L}{\omega}\right)=R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}.$$

Действительная амплитуда смещения при колебаниях равна

$$|A(\omega)|=\frac{F/L}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega^2\omega_0^2/Q_l^2)}}. \tag{1.244}$$

При $\omega = \omega_0$ амплитуда равна своему максимальному значению

$$|A(\omega_0)| = \frac{Q_l F}{L\omega_0^2} = Q_l FC. \qquad (1.245)$$

Определим ширину резонансной кривой $\Delta\omega$ как разность тех частот, при которых амплитуда колебаний составляет $1/\sqrt{2}$ амплитуды при частоте $\omega = \omega_0$ (т. е. точек половинной мощности). Пренебрегая в (1.244) величиной $|\omega - \omega_0|$ по сравнению с ω_0, находим, что ширина резонансной кривой $\Delta\omega$ удовлетворяет хорошо известному соотношению

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q_l}. \qquad (1.246)$$

Еще одно определение величины Q, также иногда полезное, легко выводится из этого описания сосредоточенной системы. Статическая сила F, приложенная к пружине с податливостью C, производит смещение FC. Из выражения (1.245) видно, что если на систему действует переменная сила с амплитудой F и с частотой, равной резонансной частоте системы, то амплитуда смещения системы в динамическом режиме будет в Q_l раз больше, чем в статическом. Хотя этот результат получен для идеализированной системы, описываемой дифференциальным уравнением (1.242), он может служить для грубой ориентировки в реальных ситуациях.

§ 4. ВОЛНЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В ЖИДКОСТЯХ

1. *Тепловая релаксация в невязкой теплопроводящей жидкости*

Для описания движения невязкой жидкости мы имеем уравнение непрерывности (1.25) и уравнение движения (1.213). Уравнение для энергии удобно взять в форме (1.201), где следует положить $\Phi = 0$ и считать, что поток тепла задается законом Фурье (1.161). Для удобства ссылок перепишем здесь эти уравнения:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{(масса)},$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \operatorname{grad} p \quad \text{(импульс)},$$

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} - T\beta \frac{dp}{dt} = \operatorname{div}(K \operatorname{grad} T) \quad \text{(энергия)}.$$

Рассмотрим малые колебания вблизи равновесных значений (p_0, T_0, ρ_0), которые соответствуют ускорениям, равным нулю. Наличие объемной силы приводит к тому, что давление p_0 изменяется в пространстве таким образом, что $F = \nabla p_0$. Это делает

среду по крайней мере слабо неоднородной. Внутренние градиенты температуры также приводят к неоднородности среды. Мы рассмотрим такое приближение, в котором среда является однородной и величины p_0, T_0, ρ_0 постоянны.

Предположим, что плоская волна распространяется вдоль оси x; тогда

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_\omega e^{j\omega t - \Gamma x}, & u &= u_\omega e^{j\omega t - \Gamma x}, \\ T &= T_0 + T_\omega e^{j\omega t - \Gamma x}, & \rho &= \rho_0 + \rho_\omega e^{j\omega t - \Gamma x}. \end{aligned} \tag{1.247}$$

Здесь через u обозначена компонента скорости вдоль оси x. Истинные значения этих величин представляют собой действительные части комплексных выражений. Не теряя общности, одну из комплексных амплитуд, например u_ω, можно считать положительной действительной величиной.

Мы увидим, что выражения (1.247) представляют собой решение только линеаризованной системы уравнений, а не полной системы точных уравнений. Для получения таких уравнений в производных по времени необходимо пренебречь конвективным членом $u\,(\partial/\partial x)$ по сравнению с $\partial/\partial t$. Мы пренебрежем также ρ_ω по сравнению с ρ_0, T_ω по сравнению с T_0, а также изменением теплоемкости C_p, коэффициента расширения β, теплопроводности K и модуля объемной упругости B. Величины ρ_ω/ρ_0 и T_ω/T_0 будут вычислены ниже.

Начнем со сравнения величин $u\,(\partial u/\partial x)$ и $\partial u/\partial t$. Продифференцировав выражение (1.247), получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = j\omega u_\omega e^{j\omega t - \Gamma x},$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{Re}\left(u_\omega e^{j\omega t - \Gamma x}\right)\operatorname{Re}\left(-\Gamma u_\omega e^{j\omega t - \Gamma x}\right) =$$

$$= u_\omega^2 e^{-2\alpha x}\left[\beta \sin(\omega t - \beta x)\cos(\omega t - \beta x) - \alpha\cos^2(\omega t - \beta x)\right].$$

Здесь α и β — коэффициент затухания и фазовая постоянная, входящие в постоянную распространения $\Gamma = \alpha + j\beta$. Ускорение имеет составляющую только по оси x, равную $\partial u/\partial t + u\,(\partial u/\partial x)$. Если предположить, что $u = u_\omega \exp(j\omega t - \Gamma x)$, то величина $\partial u/\partial t$ будет осциллировать с действительной амплитудой, равной $\omega u_\omega e^{-\alpha x}$. Предполагая $\alpha \ll \beta$, мы видим, что $u\,(\partial u/\partial x)$ является осциллирующей величиной (с частотой 2ω) с действительной амплитудой, равной $^1/_2\beta u_\omega^2 e^{-2\alpha x}$. Поскольку то выражение (1.247), которое было выбрано для p, не содержит членов с удвоенной частотой, (1.247) может представлять собой «решение» только в том случае, если величина $u\,(\partial u/\partial x)$ отброшена по сравнению с $\partial u/\partial t$. Чтобы пренебречь величиной $u\,(\partial u/\partial x)$ по сравнению с $\partial u/\partial t$, предположим, что $\beta u_\omega \ll \omega$, или, учитывая соотноше-

ние (1.238), что

$$\frac{u_\omega}{V} \ll 1. \tag{1.248}$$

Подобно этому, сравнение величин $u\,(\partial T/\partial x)$ и $\partial T/\partial t$, $u\,(\partial\rho/\partial x)$ и $\partial\rho/\partial t$, $u\,(\partial p/\partial x)$ и $\partial p/\partial t$ также приводит к условию (1.248). *Это условие является основным критерием малости амплитуды: амплитуда скорости частиц должна быть мала по сравнению со скоростью распространения.*

Теперь мы можем использовать уравнение непрерывности для определения ρ_ω, уравнение импульса для нахождения p_ω и уравнение энергии для нахождения T_ω. Пренебрегая произведениями малых величин, получаем

$$\frac{\rho_\omega}{\rho_0} = \frac{\Gamma u_\omega}{j\omega}, \tag{1.249}$$

$$\rho_0 j\omega u_\omega = \Gamma p_\omega, \tag{1.250}$$

$$\rho_0 C_p j\omega T_\omega - T_0\beta j\omega p_\omega = K\Gamma^2 T_\omega. \tag{1.251}$$

Поскольку β теперь обозначает коэффициент объемного расширения, мы будем записывать фазовую постоянную волны в виде ω/V или $2\pi/\lambda$. Далее, уравнение состояния, которое устанавливает связь между величинами p, ρ и T, позволяет написать

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho dT = \frac{B}{\rho} d\rho + B\beta\, dT.$$

Отсюда следует, что

$$p_\omega = \frac{B}{\rho_0}\rho_\omega + B\beta T_\omega. \tag{1.252}$$

Комбинируя уравнения (1.249), (1.250) и (1.252), получаем

$$T_\omega = \left(\frac{j\omega\rho_0}{\Gamma B\beta} + \frac{j\Gamma}{\omega\beta}\right) u_\omega \tag{1.253}$$

и

$$p_\omega = \frac{B\beta T_\omega}{1 + (B\Gamma^2/\rho_0\omega^2)}. \tag{1.254}$$

Подстановка выражения (1.254) в (1.251) приводит к квадратному уравнению для величины Γ^2, которое с помощью (1.186) может быть приведено к виду

$$\frac{\Gamma^2 V_T^2}{\omega^2}\left[1 + \frac{\gamma - 1}{1 + (j\gamma\varkappa\Gamma^2/\omega)}\right] = -1, \tag{1.255}$$

где

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_V} = \frac{B'}{B} = \frac{V_S^2}{V_T^2},$$

константа тепловой диффузии $\varkappa = \dfrac{K}{\rho_0 C_p}$,

адиабатический модуль объемной упругости $B'=\gamma B$,

$$V_T^2=\frac{B'}{\gamma\rho_0}=\frac{B}{\rho_0}, \quad V_S^2=\frac{B'}{\rho_0}=\frac{\gamma B}{\rho_0}. \tag{1.256}$$

Здесь V_T — изотермическая скорость, а V_S — адиабатическая скорость. Как видно из уравнения (1.255), эти значения скоростей соответствуют распространению волны в предельных случаях $\varkappa=0$ и $\varkappa\to\infty$. Удобно ввести безразмерные переменные

$$Z_T\equiv\frac{\Gamma^2V_T^2}{\omega^2}, \quad n\equiv\frac{\gamma\varkappa\omega}{V_T^2}=\frac{\gamma K\omega}{\rho_0C_pV_T^2}. \tag{1.257}$$

Тогда уравнение (1.255) принимает вид

$$Z_T\left(1+\frac{\gamma-1}{1+jnZ_T}\right)=-1. \tag{1.258}$$

Уравнение (1.258) может быть решено относительно Z_T, а зная Z_T, можно непосредственно определить действительную и мнимую части постоянной распространения Г. В результате имеем

$$Z_T=-\frac{1}{2}-a(n)+j\left[\frac{\gamma}{2n}-b(n)\right], \tag{1.259}$$

$$\alpha=\frac{\omega}{V_T}\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}\right)^{1/2}[c(n)-1]^{1/2}, \tag{1.260}$$

$$\frac{V_T}{V}=\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}\right)^{1/2}[c(n)+1]^{1/2}, \tag{1.261}$$

$$\frac{1}{Q}=\frac{2\alpha V_T/\omega}{V_T/V}=2\left[\frac{c(n)-1}{c(n)+1}\right]^{1/2}, \tag{1.262}$$

где

$$c(n)=\left\{1+\frac{[(\gamma/2n)-b]^2}{(1/2+a)^2}\right\}^{1/2},$$

$$a(n)=\begin{cases}\left(\dfrac{\gamma^2-n^2}{8n^2}\right)^{1/2}[g(n)-1]^{1/2}, & \text{если } n<\gamma,\\ \left(\dfrac{n^2-\gamma^2}{8n^2}\right)^{1/2}[g(n)+1]^{1/2}, & \text{если } n>\gamma,\end{cases}$$

$$b(n)=\begin{cases}\left(\dfrac{\gamma^2-n^2}{8n^2}\right)^{1/2}[g(n)+1]^{1/2}, & \text{если } n<\gamma,\\ \left(\dfrac{n^2-\gamma^2}{8n^2}\right)^{1/2}[g(n)-1]^{1/2}, & \text{если } n>\gamma,\end{cases} \tag{1.263}$$

$$g(n)=\left\{1+\frac{16n^2[1-(\gamma/2)]^2}{(\gamma^2-n^2)^2}\right\}^{1/2}.$$

Величины g, a, b, c, α и V_T/V всегда действительны и положительны.

Непосредственный анализ этих выражений, который слишком сложен, чтобы воспроизводить его здесь, показывает, что величина Q имеет минимум точно при $n=\gamma$, или $\omega=V_T^2/\varkappa$, т. е. при частоте

$$f_t=\frac{V_S^2}{2\pi\gamma\varkappa}. \tag{1.264}$$

Следовательно, случай $n=\gamma$ представляет особый интерес. В этом специальном случае имеем

$$a=b=\left(\frac{1}{2\gamma}-\frac{1}{4}\right)^{1/2}, \qquad c=\frac{1}{\gamma^{1/2}\left(1/2+a\right)},$$

$$Z_T=-\frac{1}{2}-a+j\left(\frac{1}{2}-a\right), \tag{1.265}$$

$$\frac{aV_T}{\omega}=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}-\frac{1}{2}-a\right)\right]^{1/2}, \tag{1.266}$$

$$\frac{V_T}{V}=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}+\frac{1}{2}+a\right)\right]^{1/2}, \tag{1.267}$$

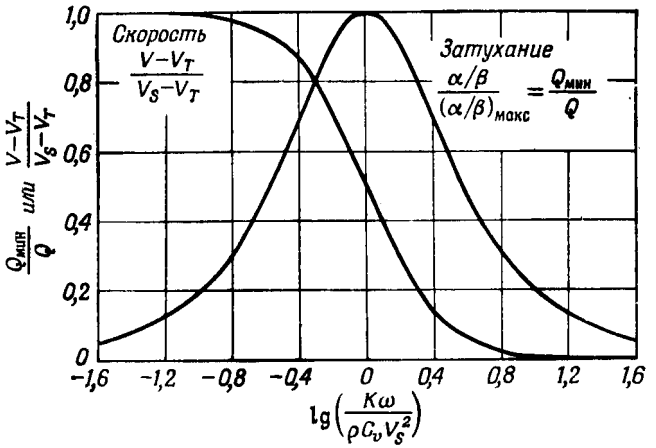
Для расчета без применения вычислительных машин удобно разложить величину $1/Q_{\text{мин}}$ в ряд по $(\gamma-1)$. В результате имеем

$$\frac{1}{Q_{\text{мин}}}=\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\left[1+\frac{3}{4}\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^2+\frac{49}{32}\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^4+\ldots\right]. \tag{1.268}$$

На фиг. 12 показано, как изменяются скорость и относительное поглощение на длину волны в зависимости от $\lg(n/\gamma)$. При $n=0$ и при $n\to\infty$ потери на длину волны равны нулю; они возрастают до максимального значения при $n=\gamma$. Изменение скорости происходит практически в том интервале частот, который определяется неравенством $-1<\lg(n/\gamma)<+1$. Этот интервал частот составляет две декады, а его центр совпадает с той частотой, на которой потери максимальны. Для более низких частот скорость по существу постоянна и равна адиабатической скорости звука, а для высоких частот — изотермической скорости. Такое изменение скорости является примером так называемой «нормальной» дисперсии, при которой скорость уменьшается с повышением частоты.

Максимальные потери тем больше, чем больше отношение теплоемкостей γ. Для газов потери могут быть весьма значительными: так, для одноатомного газа ($\gamma=5/3$) затухание равно приблизительно 10 *дб* на длину волны, а для воздуха ($\gamma=1{,}4$) оно составляет 5,65 *дб* на длину волны. Такое сильное затухание препятствует распространению волны в обычном смысле этого слова. Частота, при которой потери на длину волны максимальны,

много выше частот обычного ультразвука; она равна приблизительно 640 *Мгц* для воздуха при комнатной температуре и около 26 000 *Мгц* для воды.



Ф и г. 12. Тепловые потери и дисперсия.

Для частот, много меньших, чем частота максимального поглощения, выражение (1.260) можно разложить в ряд по n. В результате получим

$$b = \frac{\gamma}{2n} - \frac{n(\gamma-1)}{\gamma^3} + \ldots, \qquad c = 1 + \frac{n^2(\gamma-1)^2}{2\gamma^4} + \ldots$$

и, следовательно, поскольку $a \to [(1/\gamma) - {}^1/_2]$, имеем

$$\frac{\alpha V_T}{\omega} \to \frac{n(\gamma-1)}{2\gamma^{5/2}}.$$

Учитывая, что $\gamma = V_S^2/V_T^2$, и используя определение величины n, окончательно находим

$$\alpha \to \frac{\varkappa(\gamma-1)\omega^2}{2V_S^3} = \frac{4\pi^2\varkappa(\gamma-1)f^2}{2V_S^3}. \qquad (1.269)$$

Аналогично

$$\frac{1}{Q} \to \frac{\varkappa(\gamma-1)\omega}{V_S^2} = \frac{2\pi\varkappa(\gamma-1)f}{V_S^2} = \frac{(\gamma-1)f}{\gamma f_t}. \qquad (1.270)$$

Если бы потери продолжали описываться этой низкочастотной аппроксимацией при частоте $f_t = (V_T^2/2\pi\varkappa)$, на которой Q минимально, то на этой частоте Q было бы равно величине $\gamma/(\gamma-1)$.

Если $\gamma = 1$, как, например, для воды при температуре $\sim 4°$ С, то, как видно в общем случае из уравнения (1.255), а для низкочастотной аппроксимации из (1.269), никаких тепловых потерь нет.

Величина ρ_ω/ρ_0 получена в виде (1.249). Однако мы должны еще проверить, удовлетворяет ли отношение T_ω/T_0 условию малости амплитуд. Это отношение может быть найдено из уравнений (1.251) и (1.250):

$$\frac{T_\omega}{T_0} = -\frac{\omega^2 \beta u_\omega}{\Gamma C_p (j\omega - \varkappa\Gamma^2)} \approx \frac{\beta V^2}{C_p}\left(\frac{u_\omega}{V}\right). \tag{1.271}$$

Приближенное равенство в (1.271) получено в предположении, что $\varkappa\omega \ll V^2$; оно также содержит в себе условие $\Gamma \approx j\omega/V$. Используя уравнение (1.186), безразмерную величину $\beta V^2/C_p$ можно привести к виду

$$\frac{V^2}{V_S^2}\frac{\beta V_S^2}{C_p} = \frac{V^2}{V_S^2}\frac{\beta B\nu}{\rho C_p} = \frac{V^2}{V_S^2}\frac{(\gamma-1)}{T\beta}.$$

Для идеального газа $\beta = 1/T$ и эта безразмерная величина становится равной $(\gamma - 1)\, V^2/V_S^2$. Следовательно, отношение T_ω/T_0 имеет тот же порядок величины, что u_ω/V.

2. Сдвиговые волны в ньютоновской жидкости

Поскольку в вязкой жидкости могут быть сдвиговые напряжения, интересно исследовать вопрос о возможности существования сдвиговых волн в вязкой жидкости. Такие волны обязательно будут затухающими, поскольку деформация, создавая сдвиговые напряжения, вызывает также диссипацию энергии. Предположим, что для плоских сдвиговых волн, распространяющихся в направлении оси x, в которых движение частиц происходит вдоль оси y, компонента скорости в направлении оси y

$$v = v_\omega e^{j\omega t - \Gamma x}. \tag{1.272}$$

Такая волна может быть возбуждена, если плоскость $x = 0$ колеблется в направлении оси y. Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, уравнению непрерывности можно удовлетворить постоянным значением плотности ρ, т. е. плотность не будет испытывать колебаний. Если в уравнении энергии пренебречь функцией Ф, то тогда ни T, ни p также не будут испытывать колебаний. Влияние диссипации энергии исследуется ниже.

Поскольку v не зависит от y, конвективные члены в выражении для ускорения исчезают и уравнение движения (1.221) сводится к *уравнению диффузии*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{1.273}$$

где $\nu \equiv \eta/\rho$ – кинематическая вязкость. Подставив сюда выражение (1.272), получим

$$j\omega = \nu\Gamma^2,$$

откуда

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, e^{j\pi/4} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

и

$$\alpha = \frac{\omega}{V} = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}, \tag{1.274}$$

$$Q = \frac{\omega}{2\alpha V} = \frac{1}{2}. \tag{1.275}$$

Скорость распространения и длина волны даются выражениями

$$V = \sqrt{2\nu\omega} = 2\sqrt{\pi\nu f}, \qquad \lambda = 2\sqrt{\frac{\pi\nu}{f}}. \tag{1.276}$$

Расстояние, на котором амплитуда волны убывает в e раз по сравнению с ее начальным значением, называется *глубиной проникновения*; оно равно

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} = \sqrt{\frac{\nu}{\pi f}} = \frac{\lambda}{2\pi}. \tag{1.277}$$

Поглощение на 1 длину волны не зависит от частоты и равно очень высокому значению 2π *непер* $\approx 54{,}5$ *дб* на 1 длину волны. Это означает, что амплитуда убывает в $e^{2\pi} = 535$ раз на расстоянии, равном длине волны. Такое сильное затухание типично для «волн», которые описываются не волновым уравнением, а уравнением диффузии.

Проникновение сдвиговых волн в вязкую жидкость имеет аналогии в электродинамике и термодинамике. Величина δ аналогична глубине скин-слоя, т. е. глубине проникновения переменного тока или поля вглубь проводника. Она аналогична также глубине проникновения переменного градиента температуры внутрь теплопроводящего тела.

Сдвиговые волны в жидкостях так сильно затухают, что их трудно наблюдать непосредственно. Однако имеются различные способы, которые позволяют обнаружить реакцию этих волн на источник (см. гл. 4, § 4, п. 3). Из этих данных можно вычислить вязкость жидкости. Вообще говоря, можно показать, что получаемые результаты нельзя объяснить одной лишь вязкостью; необходимо ввести в рассмотрение также сдвиговую упругость. В случае синусоидальных волн этот эффект формально может быть описан комплексным коэффициентом вязкости.

Обратимся теперь снова к уравнению для энергии. Диссипативная функция в данном случае сводится к выражению

$$\Phi = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \eta\,[\mathrm{Re}\,(-\Gamma v)]^2 = \\ = \rho\omega e^{-2x/\delta} v_\omega^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega x}{V} + \frac{\pi}{4}\right). \qquad (1.278)$$

Чтобы оценить, насколько среда нагревается вследствие вязкости, рассмотрим идеализированный случай, когда теплопроводность и коэффициент объемного расширения равны нулю. Тогда уравнение для энергии принимает вид

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \Phi.$$

Это уравнение можно проинтегрировать, используя выражение (1.278). В результате получим

$$T(x, t) = T_0 + \frac{\omega v_\omega^2}{2C_p} e^{-2x/\delta}\left[t + \frac{1}{2\omega}\sin 2\left(\omega t - \frac{\omega x}{V} + \frac{\pi}{4}\right)\right]. \qquad (1.279)$$

Таким образом, зависимость температуры от времени представляет собой осциллирующую функцию, которая накладывается на линейную зависимость. Амплитуда осциллирующей части равна периоду волны $2\pi/\omega$, умноженному на $1/4\pi$.

Мгновенная мощность, сообщаемая среде колеблющейся плоскостью при $x = 0$, равна $-\eta v\,(\partial v/\partial x)$ на единицу площади. Отсюда находим среднюю мощность; она равна $[1/(2\sqrt{2})]\,v_\omega^2\sqrt{\omega\rho\eta}$ на единицу площади. Средняя скорость повышения температуры на стенке такая же, какая была бы, если бы мощность рассеивалась однородно в слое жидкости толщиной $\delta/2 = \lambda/4\pi$.

Плоские волны, которые рассматривались выше, могут быть возбуждены плоскостью $x = 0$, колеблющейся как одно целое вдоль оси y. Волнообразное движение «плоскости» может возбуждать несколько более сложные волны, в которых не происходит изменений объема и которые распространяются одновременно в направлениях x и y. Предположим, что компонента скорости вдоль оси y имеет вид

$$v = v_\omega e^{-\alpha x}\exp\left[j\omega\left(t - \frac{y}{V_y} - \frac{x}{V_x}\right)\right], \qquad (1.280)$$

где V_y задано. Условие отсутствия изменений объема ($\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$) предполагает, что компонента скорости вдоль оси x равна

$$u = -\frac{j\omega v}{V_y\,[\alpha + (j\omega/V_x)]}. \qquad (1.281)$$

Следовательно, для возбуждения такой волны «плоскость» должна изгибаться и растягиваться. Используя линеаризованное уравнение движения

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{v},$$

получаем условие

$$j\omega\rho = \eta \left[-\frac{\omega^2}{V_y^2} + \alpha^2 + \frac{2j\omega\alpha}{V_x} - \frac{\omega^2}{V_x^2} \right],$$

где

$$V_x = \frac{2\alpha\eta}{\rho} = 2\alpha\nu, \qquad \alpha^2 = \omega^2 \left(\frac{1}{V_y^2} + \frac{1}{V_x^2} \right). \tag{1.282}$$

Если величина V_y задана, из этих двух уравнений можно найти V_x и α. Простое решение, полученное выше, соответствует предельному случаю $V_y \to \infty$.

3. *Плоские волны сжатия, распространяющиеся в жидкости с постоянными сдвиговой и объемной вязкостями*

Мы рассмотрим здесь влияние члена, обусловленного вязкостью, в уравнении движения, но отбросим диссипативный член в уравнении для энергии.

Если коэффициенты вязкости η и ζ постоянны, а объемные силы отсутствуют, то, согласно (1.219) и (1.220), уравнение движения имеет вид

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \frac{\partial d_{kk}}{\partial x_i} + \eta \nabla^2 v_i. \tag{1.283}$$

Предполагая, что условия (1.247) и (1.248) выполняются, и пренебрегая конвективным членом в ускорении, получаем снова выражение (1.249); однако вместо уравнения (1.250) находим

$$\left[j\omega\rho_0 - \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right) \Gamma^2 \right] u_\omega = \Gamma p_\omega. \tag{1.284}$$

Уравнения (1.251) и (1.252) по-прежнему остаются справедливыми. Отношения T_ω/u_ω и p_ω/T_ω определяются выражениями

$$\frac{T_\omega}{u_\omega} = \frac{j\omega\rho_0}{\Gamma B\beta} \left[1 + \frac{B\Gamma^2}{\rho_0\omega^2} + \frac{j\Gamma^2}{\rho_0\omega} \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right) \right], \tag{1.285}$$

$$\frac{p_\omega}{T_\omega} = \frac{B\beta}{1 + \dfrac{B\Gamma^2/\rho_0\omega^2}{\{1 + (j\Gamma^2/\omega\rho_0)\,[\zeta + (4\eta/3)]\}}}. \tag{1.286}$$

Подставляя (1.286) в уравнение для энергии (1.251), после простых преобразований получаем

$$0=1+Z_T\left[\gamma+jn\left(1+\frac{4\sigma}{3\gamma}\right)\right]+Z_T^2\left[jn\left(1+\frac{j4\sigma n}{3\gamma}\right)\right], \qquad (1.287)$$

где

$$\sigma\equiv\frac{3C_p}{4K}\left(\zeta+\frac{4\eta}{3}\right), \qquad (1.288)$$

а значения других символов даны в формулах (1.256) и (1.257). Параметр σ представляет собой обобщенное число Прандтля, соответствующее одномерному случаю. Уравнение (1.287) квадратично по Z_T, а Z_T в свою очередь пропорционально Γ^2. Непосредственные, хотя и утомительные, вычисления позволяют получить точные выражения для затухания и фазовой константы. Однако мы удовлетворимся тем, что приведем точные результаты для $K=0$, а для общего случая ограничимся лишь низкочастотным приближением.

При $K=0$ имеем $n=0$, но

$$n\sigma\longrightarrow\frac{3\gamma\omega}{4V_T^2\rho_0}\left(\zeta+\frac{4\eta}{3}\right)\equiv\frac{3}{4}\gamma^2 m; \qquad (1.289)$$

формула (1.289) является определением величины m. Тогда уравнение (1.287) дает

$$Z_T=-\frac{1/\gamma}{(1+jm)}=-\frac{1-jm}{\gamma(1+m^2)}. \qquad (1.290)$$

Отсюда мы получим следующие точные выражения для плоских волн сжатия малой амплитуды, распространяющихся в нетеплопроводящей жидкости с линейной вязкостью:

$$\frac{\alpha V_T}{\omega}=\left[\frac{(1+m^2)^{1/2}-1}{2\gamma(1+m^2)}\right]^{1/2}, \qquad (1.291)$$

$$\frac{V_T}{V}=\left[\frac{(1+m^2)^{1/2}+1}{2\gamma(1+m^2)}\right]^{1/2}, \qquad (1.292)$$

$$\frac{1}{Q}=2\left[\frac{(1+m^2)^{1/2}-1}{(1+m^2)^{1/2}+1}\right]^{1/2}. \qquad (1.293)$$

Поглощение на длину волны есть монотонно возрастающая функция от m, которая изменяется от нуля при $m=0$ до предельного значения, равного 2π *непер* на длину волны при $m\longrightarrow\infty$. В предельном случае низких частот имеем

$$\alpha\longrightarrow\frac{\omega m}{2V_T\sqrt{\gamma}}=\frac{\omega^2}{2V_S^3\rho_0}\left(\zeta+\frac{4\eta}{3}\right), \qquad (1.294)$$

$$\frac{1}{Q}\longrightarrow m=\frac{\omega}{\rho_0 V_S^2}\left(\zeta+\frac{4\eta}{3}\right). \qquad (1.295)$$

Чтобы получить низкочастотное приближение при наличии как вязкости, так и теплопроводности, можно в уравнении (1.287) пренебречь членом, содержащим n^2. Тогда, сделав подстановку

$$Z_T = \left(1 + \frac{4\sigma}{3\gamma}\right) Z,$$
$$n = n' \left(1 + \frac{4\sigma}{3\gamma}\right)^{-2}, \qquad (1.296)$$
$$\gamma = \gamma' \left(1 + \frac{4\sigma}{3\gamma}\right)^{-1},$$

приведем уравнение (1.287) к виду

$$0 = 1 + Z(\gamma' + jn') + jn'Z^2. \qquad (1.297)$$

Сравнение уравнений (1.297) и (1.287) показывает, что если $\sigma = 0$, то Z — такая же функция от n' и γ', как Z_T от n и γ. Решение этих уравнений для случая $\sigma = 0$ получено в п. 1 настоящего параграфа. Следовательно, в этом решении достаточно просто заменить Z_T на Z, γ на γ', а n на n'. Замена Z_T на Z означает замену α на $\alpha[1 + (4\sigma/3\gamma)]^{-1/2}$ и замену V_T/V на $[1 + (4\sigma/3\gamma)]^{-1/2} V_T/V$. После всех этих подстановок и восстановления первоначальных переменных найдем, что в пределе низких частот $V \to V_s$ и

$$\frac{\alpha V_T}{\omega} \to \frac{n[\gamma + (4\sigma/3) - 1]}{2\gamma^{5/2}},$$

откуда следует

$$\alpha \to \frac{4\pi^2 f^2 \varkappa [\gamma - 1 + (4\sigma/3)]}{2V_S^3} = \frac{4\pi^2 f^2}{2V_S^3} \left[\varkappa(\gamma - 1) + \frac{1}{\rho_0}\left(\zeta + \frac{4\eta}{3}\right)\right], \qquad (1.298)$$

$$\frac{1}{Q} \to \frac{2\pi f \varkappa [\gamma - 1 + (4\sigma/3)]}{V_S^2} = \frac{2\pi f}{V_S^2} \left[\varkappa(\gamma - 1) + \frac{1}{\rho_0}\left(\zeta + \frac{4\eta}{3}\right)\right].$$

Правые части этих соотношений следуют из равенства $4\sigma\varkappa/3 = (1/\rho_0)(\zeta + {}^4/_3\eta)$.

Сравнение (1.298) с формулой (1.294), полученной для одной вязкости, и с формулой (1.269) для одной теплопроводности показывает, что в низкочастотном приближении оба эти эффекта дают просто аддитивные вклады в поглощение. Оба эффекта приводят к возрастанию α пропорционально квадрату частоты f^2.

Относительную роль вкладов вязкости и теплопроводности можно определить из безразмерного отношения

$$\frac{\zeta + (4\eta/3)}{\rho_0 \varkappa (\gamma - 1)} = \frac{4\sigma}{3(\gamma - 1)}. \qquad (1.299)$$

Для воздуха при комнатной температуре $\sigma \approx 0{,}72$ и $\gamma = 1{,}4$.

Следовательно, в этом случае в низкочастотном приближении вязкость дает примерно в 2,4 раза больший вклад в поглощение, чем теплопроводность.

4. *Отражение от поверхности раздела между двумя жидкостями*

Рассмотрим классическую задачу отражения и преломления плоской звуковой волны на поверхности раздела между двумя жидкостями. При этом мы будем пренебрегать диссипативными эффектами в обеих жидкостях. Пусть поверхность раздела представляет собой плоскость $y = 0$. Плоская волна, распространяющаяся в направлении, которое характеризуется единичным вектором $\mathbf{n}_I$ в среде *1*, падает на поверхность раздела и переходит в среду *2*, расположенную при $y > 0$. Примем, что плоскость (x, y) является плоскостью падения; θ — угол падения волны. Тогда

$$\mathbf{n}_I = \mathbf{j}\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta. \tag{1.300}$$

Падающая волна описывается уравнением

$$\mathbf{v}_I = \mathbf{n}_I A_I \exp\left[j\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}_I\cdot\mathbf{r}}{V_1}\right)\right] = \mathbf{n}_I A_I \exp\left[j\omega\left(t - \frac{x\sin\theta + y\cos\theta}{V_1}\right)\right], \tag{1.301}$$

где V_1 — скорость распространения волны в среде *1*, а действительная скорость движения частиц равна действительной части комплексного выражения (1.301).

Граничными условиями являются условия непрерывности давления и нормальной компоненты скорости частиц на поверхности раздела $y = 0$. Для удовлетворения этим условиям введем прошедшую волну в среде *2* в виде

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{n}_t A_t \exp\left[j\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}_t\cdot\mathbf{r}}{V_2}\right)\right] \tag{1.302}$$

и отраженную волну в среде *1* в виде

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{n}_r A_r \exp\left[j\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}_r\cdot\mathbf{r}}{V_1}\right)\right]. \tag{1.303}$$

В случае отсутствия диссипации амплитуды изменения давления для этих волн можно определить из уравнения (1.250), положив $\Gamma = j\omega/V$. Получим

$$p_I = \rho_1 V_I A_I, \quad p_t = \rho_2 V_2 A_t, \quad p_r = \rho_1 V_1 A_r. \tag{1.304}$$

Тогда граничные условия при $y = 0$ можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{j}\cdot(\mathbf{v}_I + \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_t) = 0, \qquad p_I + p_r = p_t. \tag{1.305}$$

Запишем теперь единичные векторы в виде

$$\mathbf{n}_t = \mathbf{j}\cos\theta_t + \mathbf{i}\sin\theta_t, \qquad \mathbf{n}_r = -\mathbf{j}\cos\theta_r + \mathbf{i}\sin\theta_r. \quad (1.306)$$

Тогда граничное условие для скорости принимает вид

$$A_I\cos\theta\exp\left[j\omega\left(t-\frac{x\sin\theta}{V_1}\right)\right]-A_r\cos\theta_r\exp\left[j\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_r}{V_1}\right)\right]=$$
$$=A_t\cos\theta_t\exp\left[j\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_t}{V_2}\right)\right]. \quad (1.307)$$

Условие для давления дает

$$\rho_1V_1(A_I+A_r)=\rho_2V_2A_t. \quad (1.308)$$

Для удовлетворения этим граничным условиям при всех x потребуем, чтобы

$$\theta=\theta_r \qquad \text{и} \qquad \frac{\sin\theta_t}{V_2}=\frac{\sin\theta_r}{V_1}. \quad (1.309)$$

На фиг. 13 показано соотношение между углами для случая, когда $V_2 > V_1$.

Отсюда следует, что угол θ_t может быть действительным только в том случае, если $(V_2/V_1)\sin\theta \leqslant 1$. Когда это условие не удовлетворяется, происходит полное внутреннее отражение. В случае полного внутреннего отражения в среде *2* возникает добавочное возмущение, которое требует специального рассмотрения, приведенного ниже.

Определим коэффициент отражения r, коэффициент прохождения t и рассогласование импедансов Z следующими выражениями:

$$r\equiv\frac{A_r}{A_I}, \qquad t\equiv\frac{A_t}{A_I}, \qquad Z\equiv\frac{\rho_2V_2\cos\theta}{\rho_1V_1\cos\theta_t}. \quad (1.310)$$

Тогда с учетом (1.309) условия (1.307) и (1.308) примут вид

$$(1-r)\cos\theta=t\cos\theta_t, \qquad 1+r=Zt\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta}, \quad (1.311)$$

откуда

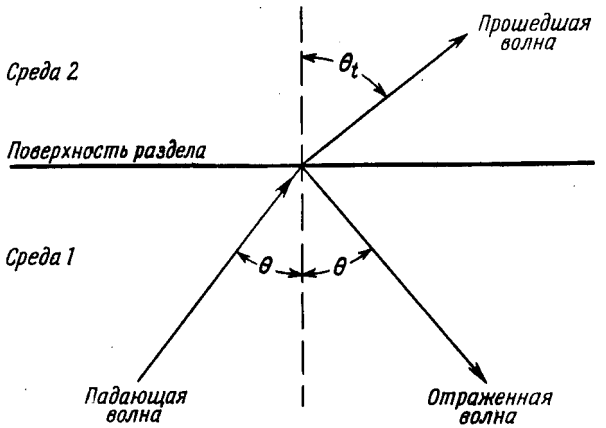
$$r=\frac{Z-1}{Z+1}, \qquad t=\frac{2}{Z+1}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_t}\right). \quad (1.312)$$

Полагая $Z=0$, получаем предельный случай свободной поверхности (среды *2* не существует). Тогда $r=-1$. Формально $t\neq 0$; однако это не вызывает трудностей, поскольку прошедшая «волна» существует только на поверхности.

В противоположном предельном случае абсолютно жесткой поверхности должно быть $t=0$. Формально это получается при $Z\to\infty$.

Отметим, что полученное здесь решение, за исключением случая $\theta=0$, содержит скольжение по поверхности. При $y=0$

тангенциальная компонента скорости на поверхности имеет разрыв, комплексная амплитуда которого равна $A_I\,[(1+r)\sin\theta - t\sin\theta_t]$. Обычно полагают, что скольжения не существует. Если скольжения нет или если имеется лишь частичное проскальзывание, то, кроме рассмотренной выше волны сжатия, должна существовать (преломляться и отражаться) сдвиговая волна,



Фиг. 13. Отражение и преломление волн на границе раздела двух жидкостей.

похожая на те, которые рассмотрены в п. 2 настоящего параграфа. При последовательном анализе этого явления нужно учитывать как влияние вязкости на продольные волны, так и возбуждение сдвиговых волн на поверхности раздела.

Вернемся теперь к случаю полного внутреннего отражения, т. е. к случаю, когда в уравнении (1.309) $\sin\theta_t > 1$. Из (1.309) и формул

$$\sin(x+jy) = \sin x\,\mathrm{ch}\,y + j\cos x\,\mathrm{sh}\,y,$$
$$\cos(x+jy) = \cos x\,\mathrm{ch}\,y - j\sin x\,\mathrm{sh}\,y \tag{1.313}$$

можно заключить, что угол θ_t в этом случае является комплексной величиной с действительной частью, равной $\pi/2$, и чисто мнимым значением косинуса. При этих условиях можно считать, что

$$\sin\theta_t = |\sin\theta_t|, \quad \cos\theta_t = -j\,|\cos\theta_t|.$$

Здесь $\sin\theta_t$ задается уравнением (1.309), а $|\cos\theta_t|$ может быть получен из тождества $\sin^2\theta_t + \cos^2\theta_t = 1$. Полученное выше решение применимо при такой интерпретации угла θ_t, поскольку

граничные условия при этом выполняются. Компоненты скорости вдоль осей x и y в среде 2 равны соответственно действительным частям выражений

$$u = A_t \sin\theta_t \exp\left[j\omega\left(t - \frac{x}{V_x}\right) - \alpha y\right], \tag{1.314}$$

$$v = -jA_t |\cos\theta_t| \exp\left[j\omega\left(t - \frac{x}{V_x}\right) - \alpha y\right],$$

где

$$V_x = \frac{V_1}{\sin\theta} = \frac{V_2}{\sin\theta_t}, \tag{1.315}$$

$$\alpha = \frac{\omega |\cos\theta_t|}{V_2} = \frac{\omega}{V_2}\sqrt{\frac{V_2^2 \sin^2\theta}{V_1^2} - 1} = \frac{\omega}{V_1}\sqrt{\sin^2\theta - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2}. \tag{1.316}$$

Множитель $e^{-\alpha y}$ показывает, что, за исключением критического угла, когда $\alpha = 0$, возмущение во второй среде ограничено тонким слоем вблизи поверхности раздела двух сред. Если волна падает на поверхность раздела под критическим углом, то, как видно из решения, плоская продольная волна распространяется во второй среде в направлении оси x. Такая маловероятная ситуация появляется в решении потому, что неявно предполагается наличие состояния равновесия, а также бесконечная протяженность падающей волны.

§ 5. ВОЛНЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В ИЗОТРОПНОМ ЛИНЕЙНОМ УПРУГОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

1. Основные уравнения

Мы видели, что величины t_{ij}, определенные выражением (1.105), представляют собой *термодинамические напряжения*, которые определяются формулами (1.115) и (1.117). Их можно рассматривать как функции компонент тензора деформации η_{ij} и одной из величин T или S. Условимся отсчитывать деформацию от некоторого естественного начального состояния, в котором $T = T_0$, $S = S_0$ и все компоненты напряжения равны нулю. Поскольку в начальном состоянии напряжения равны нулю, должны быть равны нулю также и термодинамические напряжения. Разложим теперь t_{ij} в ряд по степеням η_{ij} и $(S - S_0)$, оставив только члены первого порядка. Из уравнения (1.120), табл. 1 и уравнений (1.138), (1.142) и (1.211) имеем

$$t_{ij} = c^S_{ijkm}\left[\eta_{km} - \frac{T\alpha_{km}}{C_p}(S - S_0)\right] + \ldots. \tag{1.317}$$

Используя выражения (1.119), (1.126) и (1.132), можно получить соответствующее разложение в ряд по степеням η_{ij} и $(T - T_0)$:

$$t_{ij} = c^T_{ijkm}[\eta_{km} - \alpha_{km}(T - T_0)] + \ldots. \tag{1.318}$$

В этих выражениях подразумевается, что коэффициенты вычисляются в начальном состоянии.

Теперь мы выпишем эти уравнения для частных случаев кубического кристалла и изотропного твердого тела. В обоих случаях в начальном состоянии величина α_{km} является диагональным тензором. Согласно соотношению (1.204), каждая компонента этого тензора равна $^1/_3\beta_0$. Таким образом,

$$\alpha_{km} = \frac{1}{3}\beta_0\delta_{km}. \tag{1.319}$$

Для кристаллов кубической симметрии [8, 9] имеем

$$\|c_{\mu\nu}\| = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{Vmatrix}. \tag{1.320}$$

Отсюда можно получить упругие константы для изотропного случая, если положить

$$c_{11} = \lambda + 2\mu, \qquad c_{12} = \lambda, \qquad c_{44} = \mu, \tag{1.321}$$

где λ и μ — постоянные Ламе. Величину μ называют также модулем сдвига. Из уравнений (1.144), (1.319) и (1.320) имеем

$$c^S_{1212} - c^T_{1212} = \frac{1}{9}\beta_0^2\frac{T\delta_{st}\delta_{pq}c^S_{st12}c^S_{pq12}}{\rho_0\gamma C_p} = \frac{\beta_0^2 T\,(c^S_{ii12})^2}{9\rho_0\gamma C_p} = 0.$$

Эта величина исчезает, если в сумме c_{ii12} исчезают все три члена (т. е. все три величины c_{16}, c_{26} и c_{36} равны нулю). Тогда

$$c^S_{44} = c^T_{44} \equiv c_{44}. \tag{1.322}$$

Для изотропного случая запишем

$$\begin{gathered} c^S_{44} = c^T_{44} = \mu, \qquad c^T_{12} = \lambda, \qquad c^S_{12} = \lambda', \\ c^T_{11} = \lambda + 2\mu, \qquad c^S_{11} = \lambda' + 2\mu. \end{gathered} \tag{1.323}$$

Для перехода от одной пары независимых коэффициентов упругости для изотропной среды к другой возможной паре удобно обратиться к табл. 3. Соотношения между адиабатическими коэффициентами такие же, как между изотермическими.

Таблица 3

Упругие константы и скорости для изотропной среды

	$(\mu=\rho V_s^2)$ μ	λ	B	E	σ	$(c_{11}^S=\rho V_p^2)$ c_{11}
μ, λ	μ	λ	$\lambda+\frac{2}{3}\mu$	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\lambda+2\mu$
μ, B	μ	$B-\frac{2}{3}\mu$	B	$\frac{9B\mu}{3B+\mu}$	$\frac{3B-2\mu}{6B+2\mu}$	$B+\frac{4}{3}\mu$
μ, E	μ	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$	E	$\frac{E-2\mu}{2\mu}$	$\frac{\mu(4\mu-E)}{3\mu-E}$
μ, σ	μ	$\frac{2\mu\sigma}{1-2\sigma}$	$\frac{2\mu(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)}$	$2\mu(1+\sigma)$	σ	$\frac{2\mu(1-\sigma)}{1-2\sigma}$
B, λ	$\frac{3}{2}(B-\lambda)$	λ	B	$\frac{9B(B-\lambda)}{3B-\lambda}$	$\frac{\lambda}{3B-\lambda}$	$3B-2\lambda$
B, E	$\frac{3BE}{9B-E}$	$\frac{3B(3B-E)}{9B-E}$	B	E	$\frac{9B-E}{6B}$	$\frac{3B(3B+E)}{9B-E}$
B, σ	$\frac{3B(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)}$	$\frac{3B\sigma}{1+\sigma}$	B	$3B(1-2\sigma)$	σ	$\frac{3B(1-\sigma)}{1+\sigma}$
E, λ [1]	$\frac{b-3\lambda}{4}$	λ	$\frac{b+3\lambda}{6}$	E	$\frac{2\lambda}{b+\lambda}$	$\frac{1}{2}(b-\lambda)$
E, σ	$\frac{E}{2(1+\sigma)}$	$\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$	$\frac{E}{3(1-2\sigma)}$	E	σ	$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$
λ, σ	$\frac{\lambda(1-2\sigma)}{2\sigma}$	λ	$\frac{\lambda(1+\sigma)}{3\sigma}$	$\frac{\lambda(1+\sigma)(1-2\sigma)}{\sigma}$	σ	$\frac{\lambda(1-\sigma)}{\sigma}$
μ, c_{11}	μ	$c_{11}-2\mu$	$c_{11}-\frac{4}{3}\mu$	$\frac{9\mu(c_{11}-4/3\mu)}{3c_{11}-5\mu}$	$\frac{c_{11}-2\mu}{2(c_{11}-\mu)}$	c_{11}

1) $b \equiv E+\sqrt{E^2+2E\lambda+9\lambda^2}$.

Следовательно, для изотропной упругой среды разложения (1.317) и (1.318) принимают вид

$$t_{ij} = \lambda' \eta_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \eta_{ij} - \frac{T}{C_p} \beta_0 B_0' (S - S_0)\, \delta_{ij} + \ldots, \qquad (1.324)$$

$$t_{ij} = \lambda \eta_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \eta_{ij} - \beta_0 B_0 (T - T_0)\, \delta_{ij} + \ldots, \qquad (1.325)$$

Компоненты напряжения даются выражениями (1.116). Появляющийся в (1.116) множитель $1/J$ может быть разложен в ряд по компонентам деформации. В результате из (1.202) имеем

$$\frac{1}{J} = 1 - I_\eta + \ldots = 1 - \eta_{kk} + \ldots. \qquad (1.326)$$

Подстановка (1.326) и (1.324) или (1.325) в (1.116) дает соотношения, применимые в случае малых деформаций и малых изменений термодинамического состояния, но для произвольно больших вращений. Если в деформациях оставлены только линейные члены, то результат получается таким, как если бы величина J была приравнена единице. Вместе с тем результаты все еще остаются нелинейными относительно градиентов смещений по двум причинам: 1) вследствие нелинейности выражений (1.116) и 2) из-за нелинейных членов в самих компонентах деформации. Предположим, что *градиенты смещений* малы. Это предположение включает в себя как малость деформаций, так и малость вращений. Разложим результат в ряд по градиентам смещений и по $(T - T_0)$ или $(S - S_0)$ и оставим только линейные члены. Получится тот же результат, как при замене величин σ_{ij} на t_{ij}, а η_{ij} на E_{ij}:

$$\sigma_{ij} = \left[\lambda' \frac{\partial u_k}{\partial a_k} - \frac{T_0}{C_p} \beta_0 B_0' (S - S_0) \right] \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right), \qquad (1.327)$$

$$\sigma_{ij} = \left[\lambda \frac{\partial u_k}{\partial a_k} - \beta_0 B_0 (T - T_0) \right] \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right). \qquad (1.328)$$

Уравнение движения (1.47) содержит сумму $\partial T_{ji}/\partial x_j$. Из уравнения (1.232) мы видим, что эту сумму можно заменить суммой $\partial T_{ij}/\partial a_j$, причем допускаемая при этом ошибка будет величиной более высокого порядка малости по градиентам смещений, чем оставшиеся величины. В этом приближении, полагая $T_{ij} = \sigma_{ij}$ и учитывая выражения (1.327) и (1.329), можно привести уравнение движения (1.47) к виду

$$\rho \ddot{u}_i = F_i + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_k \partial a_k} + (\lambda' + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial a_k \partial a_i} - \frac{T_0}{C_p} \beta_0 B_0' \frac{\partial S}{\partial a_i}, \qquad (1.329)$$

$$\rho \ddot{u}_i = F_i + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_k \partial a_k} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial a_k \partial a_i} - \beta_0 B_0 \frac{\partial T}{\partial a_i}. \qquad (1.330)$$

Статическая объемная сила $\mathbf{F}$ производит такую изотермическую деформацию относительно положения статического равновесия, при которой возникают напряжения, уравновешивающие объемную силу, так что не возникает ускорений. Отсчитывая $\mathbf{u}$ от положения статического равновесия, а S от равновесного значения энтропии, получаем уравнения для новых величин $\mathbf{u}$, S и T, которые подобны уравнениям (1.329) и (1.330), но в них отсутствует объемная сила. Кроме того, если плотность ρ заменить на ρ_0, то в соответствии с формулой (1.202) эти уравнения будут по-прежнему справедливы в первом порядке по градиентам смещений. Для удобства мы сохраним те же символы ρ, $\mathbf{u}$, S, но теперь под $\mathbf{u}$ будем понимать смещение относительно положения статического равновесия, под S — изменение энтропии по отношению к значению энтропии при статическом равновесии; при этом коэффициенты вычисляются для величин, характеризующих исходное равновесное состояние. Имея это в виду, получим уравнения движения в следующей форме:

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \beta B\nabla T, \tag{1.331}$$

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda'+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \frac{T_0\beta B'}{C_p}\nabla S. \tag{1.332}$$

Эти уравнения получены в материальных координатах. Однако из (1.232) видно, что такие же уравнения могут быть получены и в пространственных координатах.

Из уравнений (1.132), (1.319), (1.320) и (1.321) и табл. 3 найдем, что в исходном состоянии

$$\lambda_{ij} = \beta_0 B_0 \delta_{ij}. \tag{1.333}$$

Предположим, что теплопроводность описывается законом Фурье (1.161) с постоянным значением K. Тогда уравнение для энергии (1.157) для малых отклонений от исходного состояния принимает вид

$$\rho C_V\dot{T} + \frac{T}{J}\beta_0 B_0\dot{\eta}_{kk} = \Phi + K\nabla^2 T. \tag{1.334}$$

Заметим в дополнение, что если $t_{ij} = 0$, то уравнение (1.325) дает $\dot{\eta}_{kk} = \beta_0\dot{T}$. В соответствии с (1.186) уравнение (1.334) при условии $\Phi = 0$ принимает обычный вид

$$\rho C_p\dot{T} = K\nabla^2 T. \tag{1.335}$$

В уравнениях (1.334) и (1.335) лапласиан берется в пространственных координатах. Однако, как видно из уравнения (1.232), разность между лапласианами в пространственных и материальных координатах является величиной более высокого порядка

малости по градиентам смещений. Если положить Ф равным нулю, разложить уравнение (1.334) в ряд по степеням градиентов смещений и по $(T - T_0)$ и отбросить члены более высокого порядка, то получим

$$\rho C_V \dot{T} + T_0 \beta B \frac{\partial \dot{u}_l}{\partial a_l} = K \frac{\partial^2 T}{\partial a_i \, \partial a_i} . \qquad (1.336)$$

Здесь также опущен индекс 0 у величин ρ, β и B.

Теперь все уравнения, с которыми мы будем в дальнейшем иметь дело, а именно уравнения (1.331), (1.332) и (1.336), записаны в материальных координатах. Чтобы упростить запись, мы обозначим материальную координату a_1 символом X, а координаты a_2 и a_3 — символами Y и Z. Координату Z и величину, обозначенную тем же символом в уравнениях (1.296) и (1.310), будем различать, исходя из контекста.

2. *Тепловые потери*

Предположим, что плоская волна распространяется в направлении оси X, и положим

$$\begin{aligned} u &= u_0 e^{j\omega t - \Gamma X}, \\ (T - T_0) &= T_v e^{j\omega t - \Gamma X}, \end{aligned} \qquad (1.337)$$

где u — компонента *смещения* вдоль оси X. Уравнение для энергии (1.336) принимает вид

$$\rho C_V j\omega (T - T_0) - j\omega \Gamma u T_0 \beta B = K\Gamma^2 (T - T_0),$$

откуда

$$(T - T_0) = \frac{j\omega \beta B T_0 \Gamma u}{j\omega \rho C_V - K\Gamma^2} . \qquad (1.338)$$

Используя (1.186) и определения $\gamma = C_p/C_V$, $\varkappa = K/\rho C_p$, получаем

$$\beta B \frac{\partial T}{\partial X} = - \frac{j\omega (\beta B \Gamma)^2 T_0 u}{j\omega \rho C_V - K\Gamma^2} = - \frac{(\gamma - 1) B\Gamma^2 u}{[1 + (j\gamma\varkappa\Gamma^2/\omega)]} . \qquad (1.339)$$

Уравнение движения (1.331) с учетом соотношений, приведенных в табл. 3, дает

$$-1 = Z_T \left(1 + \frac{m-1}{1 + jnZ_T} \right) , \qquad (1.340)$$

где Z_T и n по-прежнему определяются выражениями (1.257), но

$$\rho V_T^2 = c_{11}^T = \lambda + 2\mu \quad \text{и} \quad m = \frac{c_{11}^S}{c_{11}^T} = \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{V_S^2}{V_T^2} .$$

Если заменить γ в уравнении (1.258) и m в уравнении (1.340) на величину V_S^2/V_T^2, то оба эти уравнения будут идентичны. Следовательно, мы можем использовать решение, полученное в § 4, п. 1 и приведенное на фиг. 12. Для большинства твердых тел полное изменение скорости от адиабатической до изотермической невелико; оно составляет величину порядка 2%. Вместе с тем при обычных температурах частота, на которой тепловые потери максимальны, очень высока, порядка 10^{10} *гц*. Поэтому при обычных частотах и температурах классические тепловые потери весьма малы и обычно маскируются другими механизмами потерь. При понижении температуры константа тепловой диффузии $K/\rho C_p$ возрастает настолько, что частота максимальных потерь, вычисленная из уравнения (1.264), попадает в тот диапазон частот, в котором обычно проводятся ультразвуковые измерения.

В поликристаллических материалах более важным видом тепловых потерь являются потери, возникающие вследствие анизотропии зерен [8, 10].

В случае изгибных колебаний стержня или бруска максимум потерь, вызванных теплопроводностью, также оказывается в том диапазоне частот, в котором обычно проводятся измерения. Это обусловлено тем, что горячие и холодные участки (соответствующие областям сжатия и разряжения) отделены друг от друга расстоянием, соответствующим толщине стержня, а не половине длины волны. Это расстояние остается постоянным при изменении частоты. Таким образом, в противоположность неограниченной среде стержень, совершающий изгибные колебания, колеблется изотермически в пределе низких частот и адиабатически при высоких частотах. Результирующий максимум на кривой поглощения аналогичен тому, который показан на фиг. 12, однако ход скорости обратный. Этот случай рассмотрен в книге Мэзона [8], где приводится кривая потерь, полученная экспериментально. Теория таких потерь впервые была дана Зинером [11, 12].

Для нас наиболее важным выводом из вышеизложенного является то, что в идеально упругой, но теплопроводящей среде волны низкой частоты распространяются адиабатически. Подстановка в уравнение (1.332) выражения для волны, распространяющейся вдоль оси X, в предположении, что $S - S_0 = S_v \exp(j\omega t - \Gamma X)$, дает

$$(S-S_0) = -\frac{C_p(m-1)\Gamma u}{T_0\beta q}\left[1-\frac{1}{1-(\gamma\varkappa\Gamma^2/j\omega)}\right] = -\frac{C_p(m-1)\Gamma u}{T_0\beta q}(jnZ_T + n^2Z_T^2 + \ldots),$$

где n и Z_T определяются выражениями (1.257), а $q = B'/c_{11}^T$.

3. Волны в неограниченной среде

Пренебрежем теперь малым влиянием теплопроводности и рассмотрим адиабатическое распространение волн в неограниченной среде. Отбросив в адиабатическом приближении член с ∇S в уравнении (1.332), получим

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda' + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}. \tag{1.341}$$

Согласно теореме Гельмгольца (см. [13], стр. 187), любое кусочно дифференцируемое векторное поле может быть представлено как сумма двух векторных полей, одно из которых соленоидально, а второе является безвихревым. Поэтому можно записать

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_p, \tag{1.342}$$

где

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u}_s = 0, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{u}_p = 0. \tag{1.343}$$

Из уравнения (1.341) видно, что чисто соленоидальное возмущение ($u_p = 0$, т. е. $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0$) описывается волновым уравнением

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}_s = \mu\nabla^2\mathbf{u}_s. \tag{1.344}$$

Это означает, что распространение такой волны происходит со скоростью сдвиговой волны, равной

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{1.345}$$

Использовав векторное тождество

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \nabla^2\mathbf{u} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}, \tag{1.346}$$

уравнение (1.341) можно переписать в виде

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = (\lambda' + 2\mu)\,\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda' + \mu)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}. \tag{1.347}$$

Поэтому безвихревое возмущение ($\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0$, т. е. $u_s = 0$) описывается волновым уравнением

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}_p = (\lambda' + 2\mu)\,\nabla^2\mathbf{u}_p. \tag{1.348}$$

Отсюда видно, что распространение безвихревого поля происходит со скоростью волны сжатия V_p, которая удовлетворяет соотношению

$$\rho V_p^2 = \lambda' + 2\mu = B' + \frac{4}{3}\mu = c_{11}^S. \tag{1.349}$$

Поскольку $\rho V_s^2 = \mu$ и $\rho V_p^2 = c_{11}^S$, в первом и последнем столбцах табл. 3 приведены величины ρV_s^2 и ρV_p^2, выраженные через другие

комбинации коэффициентов упругости, тогда как в нижнем ряду табл. 3 приведены различные коэффициенты упругости, выраженные через ρV_s^2 и ρV_p^2.

В работе [14] показано, что вектор смещения удовлетворяет простому волновому уравнению типа (1.344) или (1.348) при несколько более общих условиях, чем было указано выше. Из уравнения (1.341) легко видеть, что для того, чтобы получить уравнение (1.344), не обязательно должно выполняться условие $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$; достаточно, чтобы выполнялось условие $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Аналогично этому, для того чтобы из уравнения (1.347) получалось уравнение (1.348), достаточно, чтобы выполнялось условие $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$. Первое из этих условий допускает, чтобы дивергенция была постоянной или линейно менялась со временем. Во втором случае разрешенными являются статические значения $\operatorname{rot} \mathbf{u}$, а также значения $\operatorname{rot} \mathbf{u}$, линейно меняющиеся со временем. Очевидно, что наличие членов, линейно меняющихся со временем, вскоре приходит в противоречие с предположением о малости градиентов смещений. Более того, оно связано с невероятным распределением начальных скоростей.

Взяв дивергенцию от уравнения (1.347), найдем, что расширение, которое характеризуется величиной $\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{u}_p$, удовлетворяет скалярному волновому уравнению со скоростью распространения V_p:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{div} \mathbf{u}) = V_p^2 \nabla^2 (\operatorname{div} \mathbf{u}). \tag{1.350}$$

Аналогично, взяв rot от уравнения (1.341), найдем волновое уравнение для $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ со скоростью распространения V_s:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{rot} \mathbf{u}) = V_s^2 \nabla^2 (\operatorname{rot} \mathbf{u}). \tag{1.351}$$

Поскольку $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ распространяется со скоростью $V_s < V_p$, безвихревая часть возмущения, такого, например, как землетрясение, распространяется быстрее, чем его вихревая часть. Следовательно, индексы p и s соответствуют *первичной* и *вторичной* волнам землетрясения. Безвихревая первичная волна приходит раньше вторичной вихревой, или сдвиговой волны.

Общий случай одновременного распространения волн двух типов с различными скоростями распространения был рассмотрен Лявом [3] и другими. В книге Лява приведены формулы для смещения в некоторый момент времени t, выраженного через начальные смещения и скорость в предположении, что начальное возмущение локализовано в конечной области.

Поле смещений, возникающих в плоской продольной волне, можно получить из уравнения (1.337), если положить $\Gamma = j\omega/V_p$.

Плоская сдвиговая волна, распространяющаяся вдоль оси X, в которой движение частиц происходит вдоль оси Y, описывается выражением

$$v = v_0 e^{j\omega(t - X/V_s)}. \tag{1.352}$$

4. Отражение и преломление плоских волн на поверхности раздела

Если волна отражается от некоторой поверхности раздела, то в общем случае граничные условия требуют, чтобы в отраженной и в преломленной волнах были составляющие, соответствующие как волне сжатия, так и вихревому возмущению, т. е. волне сдвига. Это требование должно выполняться даже в том случае, если падающая волна была чистой волной одного какого-либо типа. Важнейшими исключениями из этого правила являются случай нормального падения и сдвиговые волны с движением частиц параллельно поверхности раздела.

Сдвиговые волны с движением частиц параллельно поверхности раздела. Это простейший случай: угол падения равен углу отражения, а угол преломления определяется законом Снеллиуса (1.309). В частном случае не закрепленной поверхности амплитуды падающей и отраженной волн равны друг другу. Пусть поверхность раздела расположена в плоскости $Y = 0$, причем среда *1* находится при $Y < 0$, а среда *2* при $Y > 0$. Падающая плоская сдвиговая волна, в которой движение частиц происходит в направлении оси Z, а нормаль $\mathbf{n}_I$ задается выражением (1.300), имеет компоненту смещения вдоль оси Z

$$w_I = A_I \exp\left[j\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}_I \cdot \mathbf{r}}{V_1}\right)\right] = A_I \exp\left[j\omega\left(t - \frac{X\sin\theta + Y\cos\theta}{V_1}\right)\right]. \tag{1.353}$$

Непрерывность скорости и напряжения на границе раздела может быть обеспечена, если в среде *2* распространяется прошедшая волна

$$w_t = A_t \exp\left[j\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{r}}{V_2}\right)\right], \tag{1.354}$$

а в среде *1* — отраженная волна

$$w_r = A_r \exp\left[j\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{r}}{V_1}\right)\right]. \tag{1.355}$$

Поскольку в этих волнах нет деформаций расширения и сжатия, они распространяются со скоростью сдвиговой волны, как это видно из уравнения (1.341). Таким образом, V_1 и V_2 представляют собой скорости сдвиговых волн в средах *1* и *2*.

Если $\mathbf{n}_t$ и $\mathbf{n}_r$ заданы выражениями (1.306), то граничное условие, выражающее непрерывность смещения, снова приводит к уравнению (1.309). Непрерывность смещения в дополнение к (1.309) требует, чтобы выполнялось условие

$$A_I + A_r = A_t. \tag{1.356}$$

Полагая $S = S_0$ в уравнении (1.327) и считая, что отлична от нуля только компонента смещения вдоль оси Z, получаем, что сдвиговое напряжение $T_{ZY} = \mu \partial w/\partial Y$. Требование непрерывности сдвигового напряжения приводит к условию

$$\mu_1 \frac{\cos\theta}{V_1}(A_I - A_r) = \mu_2 \frac{\cos\theta_t}{V_2} A_t. \tag{1.357}$$

Введя обозначения

$$r \equiv \frac{A_r}{A_I}, \qquad t \equiv \frac{A_t}{A_I}, \qquad z = \frac{\rho_2 V_2 \cos\theta_t}{\rho_1 V_1 \cos\theta}, \tag{1.358}$$

запишем условия (1.356) и (1.357) в виде

$$1 + r = t, \qquad 1 - r = zt; \tag{1.359}$$

при этом величины μ_1 и μ_2 исключены с помощью соотношений $\mu_1 = \rho_1 V_1^2$, $\mu_2 = \rho_2 V_2^2$. Решение уравнений (1.359) относительно r и t дает

$$r = \frac{1-z}{1+z}, \qquad t = \frac{2}{1+z}. \tag{1.360}$$

Предельный случай свободной поверхности можно формально получить, если положить $z = 0$. В этом случае амплитуда смещения на свободной поверхности равна $2\,|A_I|$. Однако падающая и отраженная волны комбинируются таким образом, что величина $\partial w/\partial Y$ равна нулю, поэтому сдвиговое напряжение равно нулю на границе.

Распределение смещений в среде *2* при полном внутреннем отражении, которое, как и в случае жидкости, осуществляется при $(V_2/V_1)\sin\theta \geqslant 1$, заслуживает отдельного рассмотрения. Как и в § 4, п. 4, мы можем получить действительное решение, рассматривая угол θ_t как комплексное число с действительной частью, равной $\pi/2$. Синус этого угла определяется выражением (1.309), тогда как косинус является величиной чисто мнимой, так же как в уравнении (1.314). Величина $\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{r}$, появляющаяся в экспоненте, описывающей прошедшую волну, сводится к

$$Y\cos\theta_t + X\sin\theta_t = -j\,|\cos\theta_t|\,Y + X\sin\theta_t.$$

Отсюда следует, что смещение в среде *2* имеет вид

$$w_t = A_t \exp\left[j\omega\left(t - \frac{X}{V_X}\right) - \alpha Y\right], \tag{1.361}$$

где V_X и α определяются выражениями (1.315) и (1.316). Замечания, которые были сделаны по поводу соотношения (1.316), относятся и к этому случаю. Когда волна падает под критическим углом, $z = 0$ в соотношении (1.358) и, следовательно, $r = 1$, $t = 2$. Это показывает, что амплитуды падающей и отраженной волн равны, а амплитуда возмущения в среде *2* равна удвоенной амплитуде падающей волны. При углах, больших критического, z является чисто мнимой величиной. Условие $|r| = 1$ сохраняется, но фазы таковы, что $|t| < 2$.

Сдвиговые волны с движением частиц в плоскости падения. Будем использовать величины $\mathbf{n}_I$, $\mathbf{n}_t$ и $\mathbf{n}_r$, определяемые выражениями (1.300) и (1.306), и представим векторы смещений в падающей, прошедшей и отраженной сдвиговых волнах следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_I &= (-\mathbf{k} \times \mathbf{n}_I) S_I \exp\left[j\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}_I \cdot \mathbf{r}}{V_1}\right)\right], \\
\mathbf{u}_{st} &= (-\mathbf{k} \times \mathbf{n}_t) S_t \exp\left[j\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{r}}{V_2}\right)\right], \\
\mathbf{u}_{sr} &= (\mathbf{k} \times \mathbf{n}_r) S_r \exp\left[j\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{r}}{V_1}\right)\right].
\end{aligned} \tag{1.362}$$

Добавим также выражения для прошедшей и отраженной продольных волн:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{lt} &= \mathbf{l}_t L_t \exp\left[j\omega\left(t - \frac{\mathbf{l}_t \cdot \mathbf{r}}{V_{p2}}\right)\right], \\
\mathbf{u}_{lr} &= -\mathbf{l}_r L_r \exp\left[j\omega\left(t - \frac{\mathbf{l}_r \cdot \mathbf{r}}{V_{p1}}\right)\right].
\end{aligned} \tag{1.363}$$

Здесь векторы $\mathbf{l}_t$ и $\mathbf{l}_r$ — единичные векторы в направлении распространения прошедшей и отраженной волн соответственно, а L_t и L_r — соответствующие комплексные амплитуды. Знак минус введен в некоторые из этих выражений для того, чтобы учесть тот факт, что при нормальном падении имеет место сдвиг фазы на 180° и соответствующие отношения амплитуд имеют отрицательные действительные части. Эти выражения удовлетворяют уравнениям движения, если V_1 и V_2 — скорости распространения сдвиговых волн в двух средах, а V_{p1} и V_{p2} — скорости распространения волн сжатия. Граничными условиями являются условия непрерывности смещения и напряжения на границе. Положим

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}_t &= \mathbf{j}\cos\theta_{lt} + \mathbf{i}\sin\theta_{lt}, \\
\mathbf{l}_r &= -\mathbf{j}\cos\theta_{lr} + \mathbf{i}\sin\theta_{lr}.
\end{aligned} \tag{1.364}$$

Тогда величины $\mathbf{u}_I$, $\mathbf{u}_{st}$, $\mathbf{u}_{sr}$, $\mathbf{u}_{lt}$, $\mathbf{u}_{lr}$ принимают вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_I &= (\mathbf{i}\cos\theta - \mathbf{j}\sin\theta)\, S_I \exp\left[j\omega\left(t - \frac{Y\cos\theta + X\sin\theta}{V_1}\right)\right],\\
\mathbf{u}_{st} &= (\mathbf{i}\cos\theta_t - \mathbf{j}\sin\theta_t)\, S_t \exp\left[j\omega\left(t - \frac{Y\cos\theta_t + X\sin\theta_t}{V_2}\right)\right],\\
\mathbf{u}_{sr} &= (\mathbf{i}\cos\theta_r + \mathbf{j}\sin\theta_r)\, S_r \exp\left[j\omega\left(t - \frac{-Y\cos\theta_r + X\sin\theta_r}{V_1}\right)\right],\\
\mathbf{u}_{lt} &= (\mathbf{i}\sin\theta_{lt} + \mathbf{j}\cos\theta_{lt})\, L_t \exp\left[j\omega\left(t - \frac{Y\cos\theta_{lt} + X\sin\theta_{lt}}{V_{p2}}\right)\right],\\
\mathbf{u}_{lr} &= (-\mathbf{i}\sin\theta_{lr} + \mathbf{j}\cos\theta_{lr})\, L_r \exp\left[j\omega\left(t - \frac{-Y\cos\theta_{lr} + X\sin\theta_{lr}}{V_{p1}}\right)\right].
\end{aligned} \tag{1.365}$$

Граничным условиям можно удовлетворить только в том случае, если

$$\frac{\sin\theta}{V_1} = \frac{\sin\theta_t}{V_2} = \frac{\sin\theta_r}{V_1} = \frac{\sin\theta_{lt}}{V_{p2}} = \frac{\sin\theta_{lr}}{V_{p1}}. \tag{1.366}$$

Эти соотношения содержат в себе условия (1.309). Если какие-либо из синусов оказываются больше единицы, то такой случай может быть рассмотрен так же, как и выше.

Если принять во внимание соотношения (1.309) и (1.366), то зависимость различных величин от (X, t) определяется множителем

$$\exp\left[j\omega\left(t - \frac{X}{V_X}\right)\right],$$

где $V_X = V_1/\sin\theta$. На фиг. 14 показаны те углы, которые фигурируют в соотношениях (1.366).

Чтобы получить выражения для компонент смещения, введем сокращенные обозначения

$$\begin{aligned}
\beta_{1Y} &= \frac{\omega\cos\theta}{V_1}, \qquad B_{1Y} \quad \frac{\omega\cos\theta_{lr}}{V_{p1}},\\
\beta_{2Y} &= \frac{\omega\cos\theta_t}{V_2}, \qquad B_{2Y} = \frac{\omega\cos\theta_{lt}}{V_{p2}}.
\end{aligned} \tag{1.367}$$

Компоненты смещения в среде *1* ($Y < 0$) содержат вклады падающей и двух отраженных волн:

$$\begin{aligned}
u &= \exp\left[j\omega\left(t - \frac{X}{V_X}\right)\right][\cos\theta\,(S_I e^{-jY\beta_{1Y}} + S_r e^{jY\beta_{1Y}}) - \\
&\qquad - L_r e^{jYB_{1Y}}\sin\theta_{lr}],\\
v &= \exp\left[j\omega\left(t - \frac{X}{V_X}\right)\right][\sin\theta\,(-S_I e^{-jY\beta_{1Y}} + S_r e^{jY\beta_{1Y}}) + \\
&\qquad + L_r e^{jYB_{1Y}}\cos\theta_{lr}].
\end{aligned} \tag{1.368}$$

Компоненты смещения в среде 2 ($Y>0$) содержат вклады обеих прошедших волн:

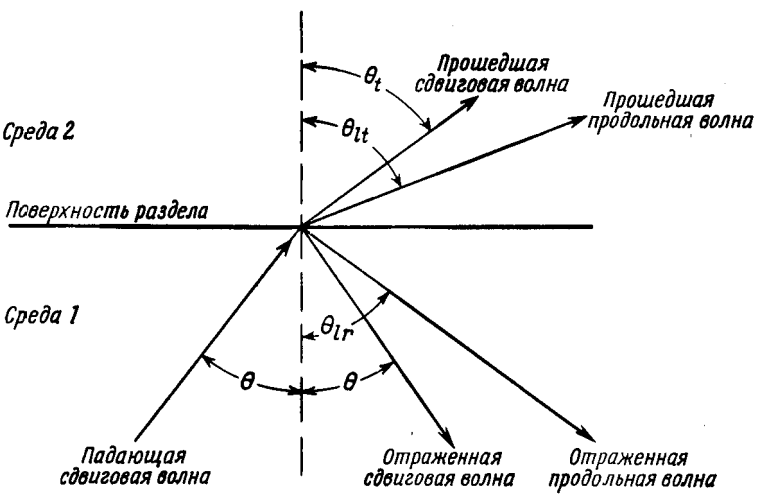
$$u=\exp\left[j\omega\left(t-\frac{X}{V_X}\right)\right][S_t\cos\theta_t e^{-jY\beta_{2Y}}+L_t e^{-jYB_{2Y}}\sin\theta_{lt}], \tag{1.369}$$

$$v=\exp\left[j\omega\left(t-\frac{X}{V_X}\right)\right][-S_t\sin\theta_t e^{-jY\beta_{2Y}}+L_t e^{-jYB_{2Y}}\cos\theta_{lt}].$$

Полагая в уравнении (1.327) $T_{ij}=\sigma_{ij}$ и $S=S_0$, получаем, что сдвиговое и нормальное напряжения на поверхности равны

$$\begin{aligned} T_{XY}&=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial Y}+\frac{\partial v}{\partial X}\right),\\ T_{XX}&=\lambda'\left(\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{\partial v}{\partial Y}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial X}. \end{aligned} \tag{1.370}$$

Условие непрерывности величин u, v, T_{XY} и T_{XX} на границе приводит к системе четырех линейных алгебраических уравнений,



Ф и г. 14. Отражение и преломление падающей сдвиговой волны на границе раздела двух твердых тел.

из которых могут быть определены отношения амплитуд. Обозначим комплексные отношения амплитуд через

$$t\equiv\frac{S_t}{S_I},\qquad r\equiv\frac{S_r}{S_I},\qquad T\equiv\frac{L_t}{S_I},\qquad R\equiv\frac{L_r}{S_I} \tag{1.371}$$

и введем сокращенные обозначения

$$Z=\frac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1}, \qquad f_2=\frac{V_{p2}}{V_2}\left[1+2\left(\frac{V_2^2}{V_1^2}\sin^2\theta-\frac{V_2^2}{V_{p2}^2}\right)\right],$$
$$f_1=\frac{V_{p1}}{V_1}\left[1+2\left(\sin^2\theta-\frac{V_1^2}{V_{p1}^2}\right)\right]. \tag{1.372}$$

Тогда систему уравнений для отношений амплитуд можно записать в следующей матричной форме:

$$\begin{Vmatrix} Z\sin 2\theta_t & -\sin 2\theta & Zf_2 & f_1 \\ Z\cos 2\theta_t & \cos 2\theta & 2Z\sin\theta_t\cos\theta_{lt} & -2\sin\theta\cos\theta_{lr} \\ -\cos\theta_t & \cos\theta & -\sin\theta_{lt} & -\sin\theta_{lr} \\ \sin\theta_t & \sin\theta & -\cos\theta_{lt} & \cos\theta_{ir} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} t \\ r \\ T \\ R \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sin 2\theta \\ \cos 2\theta \\ -\cos\theta \\ \sin\theta \end{Vmatrix}. \tag{1.373}$$

Если падающая волна задана, то направления отраженной и преломленной волн могут быть получены из уравнений (1.366), а их амплитуды можно получить из (1.373). Дальнейшее обсуждение будет ограничено наиболее важным частным случаем незакрепленной поверхности, т. е. случаем, когда среда *2* отсутствует.

В этом случае легко показать, что величины r и R могут быть получены из уравнения (1.373), если положить $Z = 0$. Тогда мы имеем два уравнения

$$-r\sin 2\theta + f_1 R = \sin 2\theta,$$
$$r\cos 2\theta - 2R\sin\theta\cos\theta_{lr} = \cos 2\theta. \tag{1.374}$$

Существуют два угла падения, для которых $R = 0$: нормальное падение ($\theta = 0$, $r = 1$) и падение под углом 45° ($\theta = 45°$, $r = -1$).

При падении под углом, точно равным критическому углу ($\sin\theta = V_1/V_{p1}$), имеем $f_1 = 1/\sin\theta$, $\cos\theta_{lr} = 0$ и уравнение (1.374) дает $r = 1$ и $R = 2\sin\theta\sin 2\theta$. Это означает, что продольная волна распространяется параллельно свободной поверхности и ее амплитуда равна величине, несколько меньшей, чем удвоенная амплитуда падающей сдвиговой волны.

При углах, больших критического, решение формально применимо, причем величина $\sin\theta_{lr}$ определяется из (1.366). Но, поскольку $\sin\theta_{lr} > 1$, сам угол θ_{lr} является комплексной вели-

чиной в соответствии с уравнением (1.313) и чисто мнимый косинус дается выражением

$$\cos\theta_{lr} = -j\left|\sqrt{\sin^2\theta_{lr} - 1}\right|.$$

Таким образом,

$$jYB_{1Y} = jY\left(-j\frac{\omega}{V_{p1}}\left|\cos\theta_{lr}\right|\right) = \frac{Y\omega}{V_{p1}}\left|\cos\theta_{lr}\right|.$$

Это означает, что та часть возмущения, которая в выражениях (1.368) соответствует сжатию, экспоненциально убывает с увеличением расстояния от поверхности.

Продольные волны. Так же как и в предыдущем случае, падающая продольная волна вызывает появление отраженных и преломленных волн обоих типов. Представим падающую волну в виде

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{n}_I L_I \exp\left[j\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}_I\cdot\mathbf{r}}{V_{p1}}\right)\right],$$

где $\mathbf{n}_I$ снова определяется выражением (1.300). Прошедшие и отраженные сдвиговые и продольные волны можно представить выражениями (1.362) и (1.363). Тогда выражения (1.365) остаются в силе, за исключением первого выражения, которое нужно заменить на

$$\mathbf{u}_I = (\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta)\, L_I \exp\left[j\omega\left(t - \frac{Y\cos\theta + X\sin\theta}{V_{p1}}\right)\right].$$

Вместо уравнений (1.366) находим

$$\frac{\sin\theta}{V_{p1}} = \frac{\sin\theta_t}{V_2} = \frac{\sin\theta_r}{V_1} = \frac{\sin\theta_{lt}}{V_{p2}} = \frac{\sin\theta_{lr}}{V_{p1}}. \qquad (1.375)$$

Отсюда $\theta_{lr} = \theta$. Значения синусов, превышающие единицу, можно рассматривать, как и выше. Однако это возможно только для *прошедшей* волны, поскольку $V_1 < V_{p1}$. На фиг. 15 показаны углы, фигурирующие в уравнениях (1.375). В этом случае удобно определить величину

$$V_X \equiv \frac{V_{p1}}{\sin\theta}. \qquad (1.376)$$

Тогда зависимость смещений от величин (X, t) всегда определяется множителем

$$e^{j\omega(t - X/V_X)}.$$

Компоненты смещения в среде *2* по-прежнему определяются формулами (1.369). Чтобы выразить компоненты смещения в среде *1*, определим величину

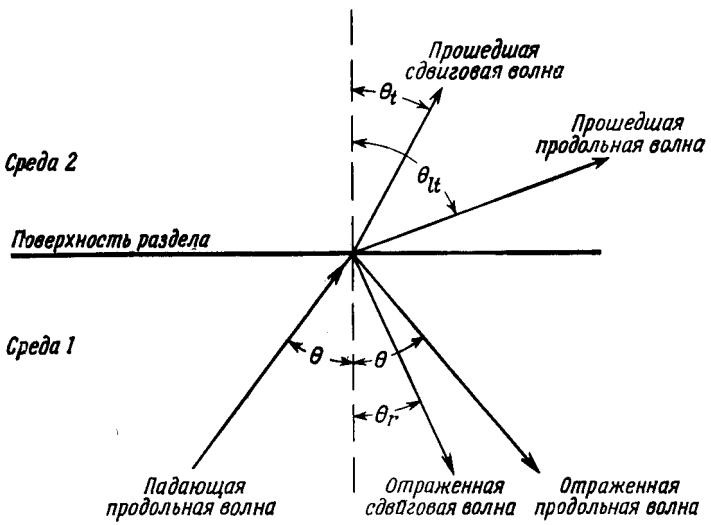
$$\beta_{1Y} \equiv \frac{\omega\cos\theta_r}{V_1}. \qquad (1.377)$$

Используя другие сокращенные обозначения, введенные в (1.367), и вспоминая, что $\theta = \theta_{lr}$, получаем

$$u = \exp\left[j\omega\left(t - \frac{X}{V_X}\right)\right][\sin\theta\,(L_l e^{-jYB_{1Y}} - L_r e^{jYB_{1Y}}) + S_r e^{jY\beta_{1Y}}\cos\theta], \quad (1.378)$$

$$v = \exp\left[j\omega\left(t - \frac{X}{V_X}\right)\right][\cos\theta\,(L_l e^{-jYB_{1Y}} + L_r e^{jYB_{1Y}}) + S_r e^{jY\beta_{1Y}}\sin\theta].$$

Условие непрерывности величин u, v, T_{XY} и T_{XX} на поверхности раздела снова приводит к системе четырех линейных



Фиг. 15. Отражение и преломление падающей продольной волны на границе раздела двух твердых тел.

алгебраических уравнений для отношений амплитуд. Вводя сокращенные обозначения

$$t \equiv \frac{S_t}{L_I}, \qquad r \equiv \frac{S_r}{L_I} \qquad T = \frac{L_t}{L_I}, \qquad R = \frac{L_r}{L_I},$$

$$Z = \frac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1}, \qquad f_2 = \frac{V_{p2}}{V_1}\left[1 - 2\frac{V_2^2}{V_{p2}^2}\cos^2\theta_{lt}\right], \quad (1.379)$$

$$f_1 = \frac{V_{p1}}{V_1}\left[1 - 2\frac{V_1^2}{V_{p1}^2}\cos^2\theta\right],$$

приводим уравнения к следующему виду:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta_t & -\cos\theta_r & \sin\theta_{lt} & \sin\theta \\ \sin\theta_t & \sin\theta_r & -\cos\theta_{lt} & \cos\theta \\ Z\sin 2\theta_t & -\frac{V_{p1}^2}{V_1^2}\sin 2\theta_r & f_2 & f_1 \\ Z\cos 2\theta_{lt} & \cos 2\theta_r & \frac{V_2}{V_{p2}} Z\sin 2\theta_{lt} & -\frac{V_1}{V_{p1}}\sin 2\theta \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} t \\ r \\ T \\ R \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ f_1 \\ \frac{V_1}{V_{p1}}\sin 2\theta \end{Vmatrix}. \quad (1.380)$$

Аренберг [15] детально рассмотрел частный случай свободной поверхности ($Z = 0$). Некоторые наиболее важные результаты приведены в книге Мэзона [8].

5. *Релеевские поверхностные волны*

Релей нашел решение для волн, распространяющихся в полупространстве, амплитуда которых экспоненциально убывает с расстоянием от свободной поверхности. Возмущение может быть разложено на две части: безвихревую, соответствующую расширению, и вихревую, которые удовлетворяют уравнениям (1.348) и (1.344) соответственно. Каждая из этих частей пропорциональна величине

$$\exp\left[j\omega\left(t-\frac{X}{V_R}\right)+\alpha Z\right],$$

где V_R — скорость распространения релеевской волны, а величина α имеет различное значение для этих двух частей, а именно

$$\alpha_p^2=\frac{\omega^2}{V_R^2}\left(1-\frac{V_R^2}{V_p^2}\right), \qquad \alpha_s^2=\frac{\omega^2}{V_R^2}\left(1-\frac{V_R^2}{V_s^2}\right)$$

для безвихревой и вихревой частей соответственно. Граничные условия на свободной поверхности позволяют определить скорость V_R через коэффициенты упругости. Величина V_R/V_s изменяется в пределах от 0,874 при $\sigma = 0$ до 0,955 при $\sigma = 0{,}5$. Граничное условие требует также, чтобы вектор смещения находился в плоскости, перпендикулярной поверхности и проведенной через направление распространения, и определяет соответствующую комбинацию вихревой и безвихревой частей. Более подробное рассмотрение читатель может найти в работах [3, 8, 16, 17].

Термоупругая релеевская волна в материале, подвергнутом напряжению, рассматривалась Флавином [18], а чисто упругий случай был исследован Хэйсом и Ривлином [19].

§ 6. ВОЛНЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Не давая полной формулировки для случая больших деформаций, запишем уравнения для малых деформаций:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} + t_1\dot{\tau}_{ij} &= 2\mu\Sigma_{ij} + 2\eta\dot{\Sigma}_{ij}, \\ T_{kk} + t_2\dot{T}_{kk} &= 3\left[-p_0 + BS_{kk} + \zeta\dot{S}_{kk} - B\beta\,(T - T_0)\right]; \end{aligned} \tag{1.381}$$

здесь τ_{ij} и Σ_{ij} — девиаторы тензоров T_{ij} и S_{ij}, которые определяются выражениями

$$T_{ij} = \tau_{ij} + \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij}, \qquad S_{ij} = \Sigma_{ij} + \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}. \tag{1.382}$$

Эти уравнения могут описывать *качественно* весьма разнообразное поведение материалов, включая внутреннее трение, релаксацию напряжения, эффект упругого последействия и текучесть. Однако они не дают правильного *количественного* описания, особенно тогда, когда рассматривается широкий диапазон скоростей деформаций. Полагая те или иные коэффициенты равными нулю, можно получить различные частные случаи. Если положить $t_1 = t_2 = \eta = \zeta = p_0 = 0$, то эти уравнения сведутся к (1.328). Если $t_1 = t_2 = \mu = 0$, то эти уравнения дадут такой же результат, как тот, который был получен из уравнения (1.216), и следующее линеаризованное выражение для p:

$$p = p_0 - BS_{kk} + B\beta\,(T - T_0). \tag{1.383}$$

Величины t_1 и t_2 представляют собой *времена релаксации* для сдвигового и объемного напряжений. Чтобы пояснить эти названия, рассмотрим случай, когда имеется лишь одна компонента сдвигового напряжения $\tau_{ij} = \tau$ и соответствующая сдвиговая деформация $2\Sigma_{ij} = \gamma$. Тогда если $\dot{\gamma} = 0$, то τ и γ удовлетворяют уравнению

$$\tau + t_1\dot{\tau} = \mu\gamma, \quad \text{откуда} \quad (\tau - \mu\gamma) = (\tau_0 - \mu\gamma)\,e^{-t/t_1}. \tag{1.384}$$

Напряжение экспоненциально стремится к величине $\mu\gamma$ с постоянной времени t_1. Если $\mu = 0$, то постоянное сдвиговое напряжение с одной компонентой τ_0 приводит к стационарной текучести $\dot{\gamma} = \tau_0/\eta$. Если мы затем произвольно остановим течение, полагая $\dot{\gamma} = 0$, то напряжение будет релаксировать к нулю по закону

$\tau = \tau_0 \exp(-t/t_1)$. Аналогичную интерпретацию можно дать для величины t_2.

Рассмотрение деформации при постоянном напряжении показывает, что величины η/μ и ζ/B постоянны во времени для упругого последействия.

Отношения η/t_1 и ζ/t_2 называются нерелаксационными модулем сдвига и модулем объемной упругости соответственно. Эти названия можно объяснить, если рассмотреть поведение волн в пределе больших частот или влияние возмущения, имеющего форму ступеньки. Рассмотрим снова сдвиг, имеющий одну компоненту. Скачок напряжения величиной τ_0 в момент времени $t = t_0$ дает вклад в величину $\dot{\tau}$, равный $\tau_0\delta(t - t_0)$. Согласно уравнениям (1.381), это означает, что вклад в величину $\dot{\gamma}$ равен $(t_1/\eta)\,\tau_0\delta(t - t_0)$. Из этого следует, что сдвиговая деформация γ испытывает скачок, равный $\tau_0 t_1/\eta$. Поскольку отношение скачка напряжения к скачку деформации равно η/t_1, мы рассматриваем величину η/t_1 как предельное значение модуля сдвига для бесконечно быстрой деформации. Модулем сдвига для бесконечно *медленной* деформации является *релаксационный* модуль сдвига μ. Можно дать аналогичную интерпретацию величин B и ζ/t_2.

Рассмотренная выше идеализированная модель может служить лишь в качестве иллюстрации. Более подробное изложение можно найти в других работах, например в работах Мэзона [8], Ли [20, 21], Колмана [22], Колмана и Нолла [23], Папкина и Ривлина [24] и Гертина и Стернберга [25], а также во втором томе данной серии, гл. 7—9.

1. Сдвиговые волны

Рассмотрим чисто сдвиговые волны, которые описываются только первым из уравнений (1.381). Считая, что все величины меняются синусоидально и рассматривая теперь величины τ_{ij} и Σ_{ij} как комплексные амплитуды, можно получить из (1.381)

$$(1 + j\omega t_1)\,\tau_{ij} = 2\mu\left(1 + j\omega\frac{\eta}{\mu}\right)\Sigma_{ij} = 2\eta\left(1 - \frac{j\mu}{\omega\eta}\right)\dot{\Sigma}_{ij}. \quad (1.385)$$

Если изменения состояния среды происходят синусоидально, то поведение среды может быть описано комплексным модулем сдвига μ^* или комплексным коэффициентом вязкости η^*:

$$\mu^* = \frac{\tau_{ij}}{2\Sigma_{ij}} = \mu\frac{(1 + j\omega\eta/\mu)}{(1 + j\omega t_1)}, \qquad \eta^* = \frac{\tau_{ij}}{2\dot{\Sigma}_{ij}} = \eta\frac{(1 - j\mu/\omega\eta)}{(1 + j\omega t_1)}. \quad (1.386)$$

Абсолютная величина μ^* представляет собой отношение амплитуды напряжения к амплитуде деформации, а угол между ними

есть сдвиг фазы между напряжением и деформацией. Аналогичную интерпретацию можно дать величине η^*. Ясно, что $\eta^* = \mu^*/j\omega$.

Подставляя в уравнение движения предполагаемое синусоидальное решение, находим, что комплексная постоянная распространения Г должна удовлетворять соотношению

$$\Gamma^2 = -\frac{\omega^2\rho}{\mu^*} = \frac{j\omega\rho}{\eta^*}. \qquad (1.387)$$

Положим $\mu^* = \mu' + j\mu''$, где μ' и μ'' — действительные числа. Введя обозначение $r \equiv \mu'/|\mu^*|$, из соотношения (1.387) найдем

$$\alpha = \omega\left(\frac{\rho}{2|\mu^*|}(1-r)\right)^{1/2}, \quad \beta = \omega\left(\frac{\rho}{2|\mu^*|}(1+r)\right)^{1/2}, \qquad (1.388)$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\beta} = 2\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{1/2}, \quad V = \left(\frac{2|\mu^*|}{\rho(1+r)}\right)^{1/2}. \qquad (1.389)$$

Минимальное значение величины Q соответствует экстремальной фазе комплексной величины μ^*, т. е.

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\eta t_1}}. \qquad (1.390)$$

В окрестности пика поглощения скорость изменяется от значения $(\mu/\rho)^{1/2}$, определяемого низкочастотной упругостью, до значения $(\eta/\rho t_1)^{1/2}$, определяемого высокочастотной упругостью. Ход дисперсии и поглощения имеет приблизительно тот же характер, как на фиг. 12, за исключением того, что вследствие неравенства $\mu < \eta/t_1$ изменение скорости обычно происходит в обратном направлении.

Если $t_1 = 0$, то мы имеем классический случай Кельвина — Фогта, для которого $\mu^* = \mu + j\omega\eta$. При низких частотах поведение среды в этом случае такое же, как для конечных значений t_1, а в предельном случае высоких частот поведение среды аналогично поведению ньютоновской жидкости.

Классическую максвелловскую среду получим, положив $\mu = 0$ и оставляя величину η/t_1 конечной. Тогда $\mu^* = j\omega\eta/(1+j\omega t_1)$. При низких частотах среда кажется вязкой, тогда как в пределе высоких частот она упруга с упругостью, равной η/t_1.

Отражение и преломление сдвиговых волн на границе раздела упругой и вязкоупругой сред рассмотрено в работах О'Нейла [26] и Мэзона [8].

2. *Продольные волны*

Для рассмотрения волн сжатия отбросим опять диссипативные члены в уравнении для энергии и учтем уравнения (1.336)—(1.339). Будем считать, что в уравнениях (1.381) и (1.382) все величины меняются синусоидально. Тогда, рассматривая вели-

чину T_{ij} как комплексную амплитуду, находим

$$T_{ij}=\frac{2(\mu+j\omega\eta)(S_{ij}-{}^1/_3 S_{kk}\delta_{ij})}{1+j\omega t_1}+\frac{\delta_{ij}[-p_0+(B+j\omega\zeta)S_{kk}-B\beta(T-T_0)}{1+j\omega t_2}. \tag{1.391}$$

При сделанных предположениях единственной компонентой напряжения, зависящей от X, является компонента T_{11}. Отказавшись от объемных сил и сделав в уравнении движения обычные предположения о малости амплитуды возмущения, получим

$$-1=\frac{\Gamma^2}{\rho\omega^2}\left\{\frac{{}^4/_3(\mu+j\omega\eta)}{1+j\omega t_1}+\frac{B+j\omega\zeta}{1+j\omega t_2}+\frac{B'-B}{(1+j\omega t_2)[1-(\gamma\varkappa\Gamma^2/j\omega)]}\right\}. \tag{1.392}$$

Хотя подробный анализ этого уравнения довольно сложен, уравнение (1.392) позволяет исследовать общий характер поведения среды в различных частных случаях. Прежде всего мы видим, что если $0=t_1=t_2=\mu$, то уравнение (1.392) сводится к уравнению для жидкости (1.287). В этом случае Q уменьшается с повышением частоты во всем диапазоне частот, но наиболее быстрое изменение величины $1/Q$ имеет место вблизи частоты, которая удовлетворяет соотношению

$$\frac{\omega(\zeta+{}^4/_3\eta)}{B'}=\left(\frac{3}{4}\right)^{1/4}\approx 1.$$

Если $0=t_1=t_2$, но $\mu\neq 0$, то поведение среды качественно такое же, как в предыдущем случае, однако имеются два диапазона частот, вблизи которых переход от упругого поведения среды к вязкому является наиболее заметным: один лежит вблизи $\omega\eta/\mu=1$, а другой — вблизи $\omega\zeta/B'=1$. Наконец, когда величины t_1 и t_2 конечны, первые два члена в фигурных скобках стремятся к действительным значениям упругости как при низких, так и при высоких частотах. Переход от релаксационной к нерелаксационной упругости происходит вблизи частот, удовлетворяющих соотношениям $\omega(t_1\eta/\mu)^{1/2}=1$ и $\omega(t_2\zeta/B)^{1/2}=1$ для сдвигового и объемного модулей. Оба эти перехода связаны с большими потерями. В пределе высоких частот, если обе величины t_1 и t_2 отличны от нуля, то $\alpha\to 0$, но если t_1 или t_2 равно нулю, то затухание стремится к 2π *непер* на длину волны.

§ 7. ВОЛНЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В КРИСТАЛЛАХ

При исследовании распространения волн малой амплитуды в анизотропных средах мы будем предполагать, что распространение происходит адиабатически, и будем использовать в урав-

нении движения (1.237) изоэнтропические коэффициенты c. Пренебрегая малым влиянием гравитационных объемных сил, получаем уравнение движения

$$\rho_0 \ddot{u}_i = c_{ijkm} \frac{\partial^2 u_k}{\partial a_j \, \partial a_m} . \tag{1.393}$$

Решение будем искать в виде

$$u_i = U_i \exp\left[j\omega \left(t - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{V} \right) \right], \tag{1.394}$$

где величины U_i являются константами, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор, показывающий направление распространения волны. Подстановка этого выражения в уравнение движения дает

$$(c_{ijkm} n_j n_m - \rho_0 V^2 \delta_{ik})\, u_k = 0. \tag{1.395}$$

Следовательно, для того чтобы решение (1.394) было нетривиальным, детерминант коэффициентов системы уравнений (1.395) должен быть равен нулю:

$$| c_{ijkm} n_j n_m - \rho_0 V^2 \delta_{ik} | = 0. \tag{1.396}$$

Уравнение (1.396) определяет скорость распространения волны V как функцию от направления распространения. Поскольку уравнение (1.396) является кубическим относительно V^2, в общем случае имеются три скорости, связанные с каждым направлением.

Пусть

$$\lambda_{ik} \equiv c_{ijkm} n_j n_m. \tag{1.397}$$

Поскольку $c_{ijkm} = c_{kmij}$, λ_{ik} — симметричный тензор второго ранга. Далее, если энергия деформации является положительно определенной функцией компонент деформации, то можно написать

$c_{ijkm} S_{ij} S_{km} > 0$, за исключением случая, когда все $S_{ij} = 0$.

Отсюда следует, что $c_{ijkm} x_i n_j x_k n_m > 0$ для произвольных отличных от нуля векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{n}$. (Вследствие симметрии коэффициентов c вклады от антисимметричной части величины $x_i n_j$ в сумме дают нуль.) Иными словами, положительно определенная энергия деформации подразумевает положительную определенность величин λ_{ik}. Следовательно, мы здесь имеем пример задачи о приведении к главным осям положительно определенного симметричного тензора второго ранга λ_{ik}.

Классическое рассмотрение показывает, что все собственные значения этого тензора, равные $\rho_0 V^2$, являются положительными действительными величинами и что векторы смещения $\mathbf{u}$, связанные с различными собственными значениями, взаимно перпендикулярны. Таким образом, для каждого направления $\mathbf{n}$

могут существовать три волны со взаимно перпендикулярными векторами смещения и различными (исключая вырожденный случай) скоростями распространения. В том случае, и только в том случае, когда сам вектор **n** является собственным вектором тензора λ_{ik}, одна из волн является чисто продольной, а две другие — чисто поперечными.

Задача нахождения тех направлений в кристалле, по которым распространяются чисто продольные и чисто поперечные волны, рассматривалась Боргнисом [27]. Это рассмотрение является в основном законченным для кристаллов трех классов тригональной системы, которые имеют бинарные оси или плоскости симметрии, а также для кристаллов тетрагональной, гексагональной и кубической систем. Направления [110] в кубическом кристалле также удовлетворяют уравнениям Боргниса, хотя он сам этого и не указал.

Некоторые из направлений, по которым распространяются чистые нормальные типы колебаний, зависят от самих упругих констант. (Исключение составляют кубические кристаллы.) Поскольку заранее не известны те направления, по которым распространяются чистые нормальные типы колебаний, в некоторых измерениях упругих констант с помощью ультразвука неизбежно используются «квазинормальные типы колебаний», т. е. такие волны, которые не являются ни чисто продольными, ни чисто поперечными.

В гл. 4 Мак-Скимин дает пример применения этих уравнений к кристаллам ромбической симметрии и приводит общие выражения для величин λ_{ik} (4.69).

§ 8. ВОЛНЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В УПРУГИХ КРИСТАЛЛАХ, ПОДВЕРГНУТЫХ ДЕФОРМАЦИИ

1. Общее рассмотрение

При рассмотрении распространения волн в материале, подвергнутом деформации, важно различать три различных состояния: исходное *естественное* состояние, характеризуемое координатами a_i, в котором напряжения отсутствуют, *начальное* деформированное равновесное состояние, характеризуемое координатами X_i, и состояние *в данный момент*, характеризуемое координатами x_i. Вектор перехода из начального состояния в состояние в данный момент имеет компоненты

$$u_i \equiv x_i - X_i. \tag{1.398}$$

Уравнение движения имеет различный вид в зависимости от того, какая из переменных x_i, X_i или a_i считается независимой. В от-

сутствие объемных сил уравнения (1.47) и (1.116) (полагая $T_{ij}=\sigma_{ij}$) дают

$$\rho\ddot{u}_i=\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial x_j}{\partial a_k}\frac{\partial x_i}{\partial a_m}t_{km}\right), \tag{1.399}$$

Далее будет показано, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial x_j}{\partial a_k}\right)=0. \tag{1.400}$$

Рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\frac{\partial a_j}{\partial x_k}=\delta_{ik}.$$

Они представляют собой систему линейных алгебраических уравнений для величин $\partial a_j/\partial x_k$, выраженных через $\partial x_i/\partial a_j$. Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_k}=\frac{1}{2J}\varepsilon_{jmp}\varepsilon_{kqr}\frac{\partial x_q}{\partial a_m}\frac{\partial x_r}{\partial a_p}. \tag{1.401}$$

Детерминант $J=\det\|\partial x_i/\partial a_j\|$ может быть представлен в виде

$$J=\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{qrs}\frac{\partial x_q}{\partial a_i}\frac{\partial x_r}{\partial a_j}\frac{\partial x_s}{\partial a_k}, \tag{1.402}$$

откуда, дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial J}{\partial(\partial x_p/\partial a_m)}=\frac{1}{2}\varepsilon_{mjk}\varepsilon_{prs}\frac{\partial x_r}{\partial a_j}\frac{\partial x_s}{\partial a_k}. \tag{1.403}$$

Но, согласно (1.401), правая часть равна просто $J(\partial a_m/\partial x_p)$. Отсюда

$$\frac{\partial J}{\partial(\partial x_p/\partial a_m)}=J\frac{\partial a_m}{\partial x_p}. \tag{1.404}$$

Наконец, записав

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial x_j}{\partial a_k}\right)=\frac{\partial(\partial x_p/\partial a_m)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial(\partial x_p/\partial a_m)}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial x_j}{\partial a_k}\right),$$

выполнив дифференцирование и использовав (1.402), покажем справедливость уравнения (1.400).

Исходя из уравнений (1.400) и (1.26), преобразуем уравнение (1.399) к виду

$$J\rho\ddot{u}_i=\rho_0\ddot{u}_i=\frac{\partial x_j}{\partial a_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_m}t_{km}\right)=\frac{\partial}{\partial a_k}\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_m}t_{km}\right). \tag{1.405}$$

Поскольку было предположено, что σ_{ij} в (1.105) равно полному напряжению T_{ij}, имеем

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_m}t_{km}=JT_{ij}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}\equiv P_{ik}, \tag{1.406}$$

где P_{ik} — первый тензор напряжения Пиолы — Кирхгофа, или двойной вектор [2]. Используя уравнение

$$\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial (\partial x_p/\partial a_q)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_p}{\partial a_j}\delta_{qi} + \frac{\partial x_p}{\partial a_i}\delta_{qj}\right) \tag{1.407}$$

и считая, что свободная энергия (или внутренняя энергия) является функцией температуры (или энтропии) и девяти величин $\partial x_p/\partial a_q$, получаем полезные соотношения

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial A}{\partial (\partial x_p/\partial a_q)}\right]_T &= \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial (\partial x_p/\partial a_q)}\left(\frac{\partial A}{\partial \eta_{ij}}\right)_T = \frac{1}{\rho_0}P_{pq},\\ \left[\frac{\partial U}{\partial (\partial x_p/\partial a_q)}\right]_S &= \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial (\partial x_p/\partial a_q)}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}}\right)_S = \frac{1}{\rho_0}P_{pq}.\end{aligned} \tag{1.408}$$

Таким образом, тензор Пиолы — Кирхгофа является величиной, сопряженной градиентам деформации, так же как термодинамические напряжения t_{ij} являются величинами, сопряженными компонентам деформации η_{ij}.

Перепишем теперь уравнение (1.405), используя (1.406):

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \frac{\partial P_{ik}}{\partial a_k}. \tag{1.409}$$

Трусделл [28] получил весьма общее условие распространения волн в предположении, что каждая компонента тензора P_{ik} является функцией градиентов деформации $\partial x_m/\partial a_j$ и трех векторов $\mathbf{d}_\Lambda$, которые образуют естественный локальный базис в материальной системе координат:

$$P_{ik} = P_{ik}\left(\frac{\partial x_m}{\partial a_j},\ \mathbf{d}_\Lambda\right). \tag{1.410}$$

Это предположение включает в себя как частные случаи изоэнтропические и изотермические деформации. Условие распространения Трусделла получено при рассмотрении сингулярной поверхности второго порядка с единичным вектором нормали $\mathbf{n}$. Оно имеет вид

$$(Q_{km}(\mathbf{n}) - \rho_0 V^2 \delta_{km})\, v_m = 0. \tag{1.411}$$

Здесь v — некоторая амплитуда, которая определяется таким образом, что $V^2 v$ есть скачок ускорения на сингулярной поверхности, V — скорость распространения, ρ_0 — плотность в исходном естественном состоянии,

$$Q_{km}(\mathbf{n}) = \frac{1}{2}(A_{kmij} + A_{kmji})\frac{\partial x_p}{\partial a_i}\frac{\partial x_q}{\partial a_j}n_p n_q, \tag{1.412}$$

$$A_{kmij} \equiv \frac{\partial P_{ki}}{\partial (\partial x_m/\partial a_j)}. \tag{1.413}$$

Тензор Q_{km} (n) называется акустическим тензором для направления n в упругом материале, подвергнутом деформации с градиентами деформации $\partial x_m/\partial a_j$. При выводе условия распространения Трусделла (1.411) не накладывается требования существования функции энергии деформации.

Вернемся теперь к случаю термоупругой среды, для которого можно использовать уравнения (1.408). Комбинируя уравнения (1.408) и (1.413), получаем

$$A^T_{kmij} = \left[\frac{\partial P_{ki}}{\partial(\partial x_m/\partial a_j)}\right]_T = \rho_0\left[\frac{\partial^2 A}{\partial(\partial x_m/\partial a_j)\,\partial(\partial x_k/\partial a_i)}\right]_T \equiv \alpha^T_{mjki},$$
$$A^S_{kmij} = \left[\frac{\partial P_{ki}}{\partial(\partial x_m/\partial a_j)}\right]_S = \rho_0\left[\frac{\partial^2 U}{\partial(\partial x_m/\partial a_j)\,\partial(\partial x_k/\partial a_i)}\right]_S \equiv \alpha^S_{mjki}. \tag{1.414}$$

Величины α введены здесь только для того, чтобы помочь читателю сопоставить данное изложение с работой Тупина и Бернстайна [29]. Поскольку порядок дифференцирования в (1.414) может быть изменен, получаем как для изоэнтропических, так и для изотермических коэффициентов

$$A_{kmij} = A_{mkji} = \alpha_{mjki} = \alpha_{kimj}. \tag{1.415}$$

Из соотношений (1.415) и (1.412) следует, что акустический тензор Q_{km} симметричен для каждого направления n, для которого существует энергия деформации. Поэтому три собственных значения этого тензора $\rho_0 V^2$ являются действительными величинами. Чтобы гарантировать положительность всех трех собственных значений для всех деформаций, требуются дополнительные предположения. Положительность собственных значений необходима для того, чтобы для каждого направления n имелись три действительные скорости, так же как в недеформированном упругом твердом теле. Это имеет место в случае, когда Q_{km} является положительно определенным тензором. Тупин и Бернстайн [29] предположили, что уравнение состояния для идеально упругого *твердого* тела должно быть таким, чтобы три скорости были всегда действительными. Однако Трусделл [28] предположил, что физический смысл могут иметь также «нестабильные» состояния деформации, связанные с мнимыми значениями скоростей.

2. *Акустический тензор для случая адиабатического распространения*

Комбинируя уравнения (1.414), (1.406), (1.407) и (1.120), получаем

$$A^S_{imjk} = \delta_{im} t_{jk} + \frac{\partial x_i}{\partial a_p}\frac{\partial x_m}{\partial a_q} c^S_{jpkq}. \tag{1.416}$$

Определим следующие тензоры:

$$B^{S}_{ismr} \equiv \frac{1}{J} A^{S}_{imkj} \frac{\partial x_r}{\partial a_j} \frac{\partial x_s}{\partial a_k}, \tag{1.417}$$

$$C^{S}_{ijst} \equiv \frac{1}{J} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial x_j}{\partial a_m} \frac{\partial x_s}{\partial a_p} \frac{\partial x_t}{\partial a_q} c^{S}_{kmpq}. \tag{1.418}$$

Из уравнений (1.416)—(1.418) и (1.116) следует, что

$$B^{S}_{ismr} = \delta_{im} T_{sr} + C^{S}_{ismr}. \tag{1.419}$$

Принимая во внимание выражения (1.105) и (1.418), мы видим, что выражения (1.416) и (1.419) совместимы с соотношением

$$A^{S}_{imjk} = J B^{S}_{ipmq} \frac{\partial a_j}{\partial x_p} \frac{\partial a_k}{\partial x_q}, \tag{1.420}$$

которое следует из определения (1.417). Используя соотношение (1.420) в выражении (1.412), получаем акустический тензор в виде

$$Q_{km}(\mathbf{n}) = J B^{S}_{krms} n_r n_s. \tag{1.421}$$

Трусделл [28] доказал с большой степенью общности, что скорости распространения в направлении заданной материальной линии могут зависеть от деформации, но не могут зависеть от локального вращения. В ходе этого доказательства показано, что величина $\mathscr{S}_{pq}$, определяемая выражением

$$\mathscr{S}_{pq} \equiv \frac{\partial a_p}{\partial x_k} \frac{\partial x_m}{\partial a_q} Q_{km}, \tag{1.422}$$

имеет собственные значения $\rho_0 V^2$ и не зависит от вращения. Умножая обе части уравнения (1.411), являющегося условием распространения, на величину $\partial a_p/\partial x_k$, получаем

$$\left(\frac{\partial a_p}{\partial x_k} Q_{km} - \rho_0 V^2 \delta_{km} \frac{\partial a_p}{\partial x_k}\right) v_m = 0. \tag{1.423}$$

Из (1.422) имеем

$$Q_{km} = \mathscr{S}_{ij} \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial a_j}{\partial x_m}. \tag{1.424}$$

Подставляя (1.424) в (1.423) и упрощая полученное выражение, находим

$$(\mathscr{S}_{pj} - \rho_0 V^2 \delta_{pj}) \frac{\partial a_j}{\partial x_m} v_m = 0. \tag{1.425}$$

Следовательно, величина $\mathscr{S}_{pj}$, так же как и Q_{km}, имеет собственные значения, равные $\rho_0 V^2$. Можно отметить, что правовинтовые собственные векторы величины $\mathscr{S}_{pj}$, а именно $(\partial a_j/\partial x_m)\, v_m$, рас-

положены вдоль материальных линий, которые под действием деформации были повернуты до положения v_m — собственных векторов тензора Q_{hm}.

Чтобы показать, что $\mathscr{S}_{pq}$ не зависит от вращения, применим уравнения (1.422), (1.421), (1.419), (1.418), (1.116) и (1.68) и получим

$$\mathscr{S}_{pq} = \frac{\partial a_p}{\partial x_i}\frac{\partial x_m}{\partial a_q} J n_r n_s B^{S}_{ismr} = n_r n_s \frac{\partial x_s}{\partial a_j}\frac{\partial x_r}{\partial a_k}(\delta_{pq} t_{jk} + C_{ql} c^{S}_{pjlk}). \quad (1.426)$$

Те материальные линии, которые в естественном состоянии были направлены вдоль единичного вектора N, в текущем состоянии оказываются направленными вдоль единичного вектора n. Они удовлетворяют условию

$$\lambda_N n_k = \frac{\partial x_k}{\partial a_j} N_j. \quad (1.427)$$

Определим вектор ν с компонентами

$$\nu_i \equiv \frac{\partial x_k}{\partial a_i} n_k. \quad (1.428)$$

Из уравнений (1.427) и (1.428) следует, что

$$\nu_l = \frac{1}{\lambda_N}\frac{\partial x_k}{\partial a_i}\frac{\partial x_k}{\partial a_j} N_j = \frac{1}{\lambda_N} C_{ij} N_j. \quad (1.429)$$

Важно отметить, что для определения величин λ_N и ν достаточно знать естественное направление N и тензор C_{ij}, являющийся мерой деформации. Учитывая (1.428), приведем выражение (1.426) к виду

$$\mathscr{S}_{pq} = \nu_j \nu_k (\delta_{pq} t_{jk} + C_{ql} c^{S}_{pjlk}). \quad (1.430)$$

Выражение (1.430) показывает, что $\mathscr{S}_{pq}$ является функцией деформации (и температуры или энтропии), но не зависит от вращения, поскольку величины ν, t_{jk}, C_{ql} и c^{S}_{pjlk} не зависят от вращения. С учетом (1.429) и (1.74) выражение (1.430) приводится к виду

$$\mathscr{S}_{pq} = \frac{C_{jm} C_{ki} N_m N_i}{C_{rs} N_r N_s}(\delta_{pq} t_{jk} + C_{ql} c^{S}_{pjlk}). \quad (1.431)$$

3. *Малые адиабатические деформации в кристалле, подвергнутом конечной деформации*

Основные уравнения, описывающие малые адиабатические смещения, возникающие в теле, подвергнутом конечной деформации, мы получаем в предположении, что величины u_i и их градиенты малы. Рассматривая величину P_{pq} как функцию градиентов деформации и энтропии, разложим ее в ряд вблизи начального

состояния. Обозначая величины в начальном состоянии буквами со знаком «~» сверху, получаем

$$P_{pq} = \tilde{P}_{pq} + \tilde{A}^{S}_{pmqj} \frac{\partial u_m}{\partial a_j} + \ldots . \tag{1.432}$$

Поскольку начальная конфигурация была равновесной, уравнение (1.409) дает

$$\frac{\partial \tilde{P}_{ik}}{\partial a_k} = 0.$$

Подстановка (1.432) в уравнение (1.409) дает линеаризованные уравнения движения для величин u_i, выраженные в *естественных* координатах:

$$\rho_0 \ddot{u}_i = \frac{\partial}{\partial a_k}\left(\tilde{A}^{S}_{imkj} \frac{\partial u_m}{\partial a_j}\right). \tag{1.433}$$

Чтобы получить уравнения, в которых независимыми координатами являются *начальные* координаты, умножим обе части уравнения (1.433) на величину

$$\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} = \frac{1}{\tilde{J}}$$

и сделаем подстановки типа

$$\frac{\partial}{\partial a_j} = \frac{\partial X_s}{\partial a_j} \frac{\partial}{\partial X_s}.$$

Тогда уравнение (1.433) примет вид

$$\tilde{\rho} \ddot{u}_i = \frac{1}{\tilde{J}} \frac{\partial X_s}{\partial a_k} \frac{\partial}{\partial X_s}\left(\tilde{A}^{S}_{imkj} \frac{\partial X_r}{\partial a_j} \frac{\partial u_m}{\partial X_r}\right). \tag{1.434}$$

Используя соотношение (1.400), мы можем множитель $(1/\tilde{J})\,(\partial X_s/\partial a_k)$ в уравнении (1.434) ввести под знак дифференциала. Тогда это уравнение примет более компактный вид

$$\tilde{\rho} \ddot{u}_i = \frac{\partial}{\partial X_s}\left(\tilde{B}^{S}_{ismr} \frac{\partial u_m}{\partial X_r}\right), \tag{1.435}$$

где B^{S}_{ismr} определяется выражением (1.417), а знак «~» сверху обозначает величины в начальном состоянии. Заметим, что

$$\ddot{u}_i = \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right)_a = \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right)_X.$$

Полезно получить выражения для термодинамических и механических напряжений в виде разложения в ряд вблизи начального состояния. Термодинамические напряжения можно предста-

вить в виде следующего ряда:

$$t_{km} = \tilde{t}_{km} + \tilde{c}^{S}_{kmpq}(\eta_{pq} - \tilde{\eta}_{pq}) + \ldots = \\ = \tilde{t}_{km} + \tilde{c}^{S}_{kmpq}\frac{\partial X_s}{\partial a_p}\frac{\partial X_t}{\partial a_q}e_{st} + \ldots, \quad (1.436)$$

где

$$e_{st} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_s}{\partial X_t} + \frac{\partial u_t}{\partial X_s}\right); \quad (1.437)$$

здесь опущены члены второго и более высоких порядков по градиентам u_i.

Наконец, напряжения определяются выражением (1.116). Чтобы линеаризовать выражения для напряжений, заметим, что

$$\frac{1}{J} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\left(1 + \frac{\rho - \tilde{\rho}}{\tilde{\rho}}\right) \approx \frac{1}{\tilde{J}}\left(1 - \frac{\partial u_r}{\partial X_r}\right).$$

Запишем

$$\frac{\partial x_l}{\partial a_k} = \frac{\partial u_l}{\partial X_s}\frac{\partial X_s}{\partial a_k} + \frac{\partial X_l}{\partial a_k}$$

и оставим только линейные члены по градиентам u_i. Тогда, предполагая по-прежнему, что $T_{ij} = \sigma_{ij}$, получаем

$$T_{ij} = \frac{1}{J}\frac{\partial x_l}{\partial a_k}\frac{\partial x_j}{\partial a_m}t_{km} = \tilde{T}_{ij}\left(1 - \frac{\partial u_r}{\partial X_r}\right) + \tilde{T}_{is}\frac{\partial u_j}{\partial X_s} + \\ + \tilde{T}_{js}\frac{\partial u_l}{\partial X_s} + \tilde{C}^{S}_{ijst}e_{st}. \quad (1.438)$$

4. Скорости распространения волн, полученные из линеаризованной теории

В последующем изложении будет рассматриваться только случай *однородной* начальной деформации, когда величины $\tilde{B}^{S}_{ismr}$, как это следует из (1.419) и (1.418), являются *постоянными*:

$$\tilde{B}^{S}_{ismr} = \delta_{im}\tilde{T}_{sr} + \tilde{C}^{S}_{ismr} = \delta_{im}\tilde{T}_{sr} + \frac{1}{\tilde{J}}\frac{\partial X_i}{\partial a_j}\frac{\partial X_s}{\partial a_k}\frac{\partial X_m}{\partial a_p}\frac{\partial X_r}{\partial a_q}\tilde{c}^{S}_{jkpq}. \quad (1.439)$$

Здесь каждый член суммы также является постоянным. В этом случае уравнение (1.435) приводится к виду

$$\tilde{\rho}\ddot{u}_i = \tilde{B}^{S}_{ismr}\frac{\partial^2 u_m}{\partial X_s \partial X_r}. \quad (1.440)$$

Это уравнение имеет ту же форму, что и уравнение (1.393). Однако для случая отличных от нуля начальных напряжений величины B не удовлетворяют тем условиям симметрии, которым удовлетворяют величины c.

На основании тех же аргументов, как и в случае недеформированного кристалла, можно показать, что при распространении

плоской волны в направлении n векторы смещения направлены вдоль собственных векторов тензора второго ранга

$$\frac{1}{\tilde{J}}\tilde{Q}_{im}(\mathbf{n}) = \tilde{B}_{ismr}n_s n_r \qquad (1.441)$$

и соответствующие значения величины $\tilde{\rho}V^2$ являются собственными значениями этого тензора. Поскольку $\tilde{J} = \rho_0/\tilde{\rho}$, мы снова видим, что величины $\rho_0 V^2$ являются собственными значениями акустического тензора. Таким образом, эта линеаризованная теория дает те же скорости распространения, что и теория сингулярных поверхностей второго порядка.

5. Определение коэффициентов упругости третьего порядка из данных по измерению скорости распространения как функции напряжения

Как было показано Бейтманом, Мэзоном и Мак-Скимином [30], а также другими авторами, скорости распространения можно измерять как функции гидростатического давления или как функции величины одноосного напряжения, приложенного в заданном направлении. Скорость распространения в заданном направлении в отсутствие напряжений зависит только от обычных упругих модулей второго порядка и плотности среды. Однако если рассматривать зависимость скорости распространения от напряжения, то начальный наклон этой зависимости содержит уже модули как второго, так и третьего порядка. Следовательно, определяя экспериментально этот наклон, можно получить информацию о величине модулей третьего порядка.

Каждая экспериментальная «точка» представляет собой частоту или время пробега, которое соответствует скорости распространения в некотором начальном состоянии, в котором измерены температура и напряжение. Серия таких точек, снятых при одной и той же температуре, но при различных напряжениях, дает кривую, наклон которой соответствует производной при постоянной температуре. Следовательно (после учета изменений размерностей величин, которые необходимо внести для того, чтобы получить из исходных данных скорости распространения), можно считать, что величина

$$\left[\frac{\partial}{\partial p}(\varrho_0 V^2)\right]_T \qquad (1.442)$$

определяется из опыта. Здесь параметр p обозначает величину гидростатического давления или величину одноосного напряжения сжатия в некотором заданном направлении, а V — адиабатическая скорость распространения в данном направлении. Условия

эксперимента всегда таковы, что конечные деформации в начальном состоянии зависят только от $\eta_{ij} = \eta_{ij}(p)$, причем деформации всегда относят к естественному состоянию при той же температуре, при которой производится эксперимент.

Выясним теперь, как связать величину (1.442), приведенную к естественному состоянию, с модулями второго и третьего порядков, вычисленными также в естественном состоянии. Мы видели, что адиабатические скорости распространения в естественном направлении N просто связаны с помощью уравнения (1.431) с собственными значениями величины $\mathscr{S}_{pq}$. Пусть $\mathscr{S}_K$ ($K = 1, 2, 3$) обозначает собственные значения величины $\mathscr{S}_{pq}$, и пусть U_{Kj} — j-я компонента ее K-го единичного правовинтового собственного вектора. Тогда уравнения для собственных векторов имеют вид

$$(\mathscr{S}_{pq} - \mathscr{S}_K \delta_{pq}) U_{Kq} = 0 \text{ (суммирования по } K \textit{ нет}). \quad (1.443)$$

Умножая уравнение (1.443) на U_{Kp} и суммируя по p, получаем удобную формулу для величины $\mathscr{S}_K$, выраженной через $\mathscr{S}_{pq}$ и ее единичные правовинтовые собственные векторы

$$\mathscr{S}_K = \mathscr{S}_{pq} U_{Kp} U_{Kq} \text{ (суммирования по } K \textit{ нет}). \quad (1.444)$$

Если теперь взять производную от (1.443) и затем умножить эту производную на U_{Kp}, то получим для каждого K систему четырех уравнений, которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} U_{Kq} D_{pq} &= (\mathscr{S}_K \delta_{pq} - \mathscr{S}_{pq}) V_{Kq} + U_{Kp} \mathscr{S}'_K, \\ U_{Kp} U_{Kq} D_{pq} &= -\mathscr{S}_{pq} U_{Kp} V_{Kq} + \mathscr{S}'_K, \end{aligned} \quad (1.445)$$

где

$$D_{pq} \equiv \left(\frac{\partial \mathscr{S}_{pq}}{\partial p}\right)_T, \qquad V_{Kq} \equiv \left(\frac{\partial U_{Kq}}{\partial p}\right)_T, \qquad \mathscr{S}'_K \equiv \left(\frac{\partial \mathscr{S}_K}{\partial p}\right)_T. \quad (1.446)$$

Величины $\mathscr{S}'_K$ являются величинами (1.442). Дифференцируя выражение (1.431) при постоянной температуре и определяя величину

$$F_{st} \equiv \frac{d\eta_{st}}{dp}, \quad (1.447)$$

получаем

$$\begin{aligned} D_{pq} = \frac{F_{st} N_m N_t}{\lambda_N^2} \Big\{ C_{ql} C_{jm} \Big[C_{kl} \Big(C_{pjlkst} - \frac{2}{\lambda_N^2} c^S_{pjlk} N_s N_t \Big) + \\ + 2\delta_{lt} (c^S_{pjls} + c^S_{pslj}) \Big] + \delta_{pq} \Big[C_{jm} C_{kl} \Big(c^T_{jkst} - \frac{2 t_{jk} N_s N_t}{\lambda_N^2} \Big) + 4 t_{sk} C_{kl} \delta_{mt} \Big] + \\ + 2 C_{jm} C_{kl} \delta_{qs} c^S_{pjlk} \Big\}, \end{aligned} \quad (1.448)$$

где

$$C_{pjlkst} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \eta_{st}} c^S_{pjlk} \right)_T = c^T_{pjlkst} + \left[\frac{\partial}{\partial \eta_{st}} (c^S_{pjlk} - c^T_{pjlk}) \right]_T. \quad (1.449)$$

В естественном состоянии выражение (1.448) имеет вид

$$D^0_{pq} = N_j N_k F^0_{st} [\delta_{pq} c^T_{jkst} + 2\delta_{qs} c^S_{pjtk} - 2c^S_{pjqk} N_s N_t + \\ + 2\delta_{kt} (c^S_{pjqs} + c^S_{psqj}) + C_{pjqkst}], \quad (1.450)$$

а величина $\mathscr{S}_{pq}$, как это следует из (1.431), равна

$$\mathscr{S}^0_{pq} = N_j N_k c^S_{pjqk}. \quad (1.451)$$

Если p представляет собой гидростатическое давление, то из уравнения (1.207) имеем

$$F^0_{st} \equiv \left(\frac{d\eta_{st}}{dp}\right)_{p=0} = -s^T_{stii} \qquad (p - \text{давление}). \quad (1.452)$$

Если p обозначает величину одноосного сжатия вдоль произвольного направления, определяемого единичным вектором **M**, то тензор напряжения имеет вид

$$T_{ij} = -pM_i M_j. \quad (1.453)$$

Отсюда, используя уравнения (1.123) и (1.105) при условии $\sigma_{ij} = T_{ij}$, получаем

$$F^0_{st} = \left(\frac{d\eta_{st}}{dp}\right)_{p=0} = -M_i M_j s^T_{stij} \qquad (p - \text{сжимающее напряжение}). \quad (1.454)$$

Из уравнения (1.449) можно получить разность между C_{pjqkst} и c^T_{pjqkst}, выраженную через величины F^0_{st}. С помощью уравнения (1.139) и других соотношений, полученных в § 2, п. 5, эту разность можно записать в различных формах. Поскольку на практике эта разность обычно оказывается замаскированной ошибками эксперимента, мы не будем подробно останавливаться на ее вычислении.

Предположим, что для выбранного направления распространения **N** величина $\mathscr{S}^0_{pq}$ найдена и ее собственные значения и собственные векторы вычислены. Поскольку $\mathscr{S}^0_{pq}$ симметрична, $\mathscr{S}^0_{pq} U^0_{Kp} = \mathscr{S}^0_K U^0_{Kq}$, а поскольку нормированные собственные векторы имеют постоянную длину, последнее из уравнений (1.445) приводится к виду

$$\mathscr{S}'_K(0) = U^0_{Kp} U^0_{Kq} D^0_{pq}, \quad (1.455)$$

где $\mathbf{U}^0_K$ — предел K-го собственного вектора величины $\mathscr{S}_{ij}(p)$ при $p \to 0$. Важно отметить, что собственные векторы в уравнении (1.455) должны быть ограниченными величинами. Из оставшихся уравнений системы (1.445) следует тогда, что D^0_{pq} имеет правовинтовые собственные векторы $\mathbf{U}^0_K$ и собственные значения $\mathscr{S}'_K(0)$. Кроме того, всякий раз, когда D^0_{pq} и $\mathscr{S}^0_{pq}$ имеют общие

собственные векторы U^0_K, величина $\mathscr{S}'_K(0)$ является собственным значением величины D^0_{pq}, принадлежащим U^0_K, и, следовательно, уравнение (1.455) выполняется. Если D^0_{pq} и $\mathscr{S}^0_{pq}$ коммутируют, то в уравнении (1.455) можно использовать их общие собственные векторы.

Чтобы получить другое выражение для $\mathscr{S}'_K$, не содержащее собственных векторов, мы можем продифференцировать характеристическое уравнение для $\mathscr{S}_K$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\mathscr{S}^3_K - \mathrm{I}_\mathscr{S}\mathscr{S}^2_K + \mathrm{II}_\mathscr{S}\mathscr{S} - \mathrm{III}_\mathscr{S} = 0. \tag{1.456}$$

Продифференцировав это уравнение и разрешив его относительно $\mathscr{S}'_K$, получим

$$\mathscr{S}'_K = \frac{\mathscr{S}^2_K \mathrm{I}'_\mathscr{S} - \mathscr{S}_K \mathrm{II}'_\mathscr{S} + \mathrm{III}'_\mathscr{S}}{3\mathscr{S}^2_K - 2\mathscr{S}_K \mathrm{I}_\mathscr{S} + \mathrm{II}_\mathscr{S}}, \tag{1.457}$$

где штрихами обозначено дифференцирование по p при постоянной температуре. Теперь можно выписать основные инварианты и их производные:

$$\mathrm{I}_\mathscr{S} = \mathscr{S}_{ii}, \qquad \mathrm{II}_\mathscr{S} = \frac{1}{2}(\mathrm{I}^2_\mathscr{S} - \mathscr{S}_{ij}\mathscr{S}_{ij}), \qquad \mathrm{III}_\mathscr{S} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{qrs}\mathscr{S}_{qi}\mathscr{S}_{rj}\mathscr{S}_{sk}, \tag{1.458}$$

$$\mathrm{I}'_\mathscr{S} = D_{ii}, \qquad \mathrm{II}'_\mathscr{S} = \mathrm{I}_\mathscr{S} D_{ii} - \mathscr{S}_{ij}D_{ij}, \qquad \mathrm{III}'_\mathscr{S} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{qrs}D_{qi}\mathscr{S}_{rj}\mathscr{S}_{sk}. \tag{1.459}$$

Если $\mathscr{S}_K$ не является кратным корнем уравнения (1.456), то величину $\mathscr{S}'_K$ в естественном состоянии можно вычислить из уравнений (1.457)—(1.459), (1.451) и (1.450).

Результат приведенных выше вычислений может быть выражен в виде формулы для $\mathscr{S}'_K$ в естественном состоянии. Эта формула будет линейной по C. Предположим теперь, что для данного материала мы выполнили серию независимых опытов, число которых равно числу независимых величин C, и при этом получили такое же число экспериментальных значений $\mathscr{S}'_K$. Тогда численные значения величин C в естественном состоянии можно получить, зная $c^T_{\mu\nu}$ и $c^S_{\mu\nu}$ и решая соответствующую систему линейных уравнений. Число независимых величин C равно трем для изотропной среды, шести для кубических кристаллов с симметрией $\bar{4}3m$, 432 и $m3m$ (используя символы Германа — Могена), восьми для двух других кубических классов (с симметрией $m3$ и $\bar{2}3$) и четырнадцати для кварца (симметрия 32).

Величина $\mathscr{S}_K$ является собственным значением величины $\rho_0 V^2$. Соответствующее собственное значение для ρV^2 равно $\mathscr{S}_K/J$. С помощью уравнения (1.203) найдем производную этой величины в естественном состоянии:

$$(\rho V^2)'_K \equiv \left[\frac{\partial}{\partial p}(\rho V^2)_K\right]_{\substack{T\\ p=0}} = \mathscr{S}'_K(0) - \mathscr{S}^0_K F^0_{ii}. \qquad (1.460)$$

Другой метод определения коэффициентов упругости третьего порядка был использован для кубических кристаллов в работах Зигера и Бака [31] и Бейтмана и др. [30]. В этих работах уравнения движения были представлены в виде разложения в ряд вблизи естественного состояния по градиентам деформации $\partial u_m/\partial a_j$, причем были оставлены все члены второго порядка, а величина u_l отсчитывалась от естественного состояния. Авторы подставили эти разложения в произвольные решения волнового уравнения, используя линейную теорию для вычисления различия значений величин в естественном и начальном состояниях, и в результате получили формулы для скоростей распространения в виде $\rho V^2 = b + mp$. Оба подхода дают одинаковые значения $(\rho V^2)'_K$.

Таблица 4

Сравнение обозначений

Обозначения данной работы [1]	Обозначения Бейтмана—Мэзона—Мак-Скимина (табл. 3) [2]	Обозначения данной работы [1]	Обозначения Бейтмана—Мэзона—Мак-Скимина (табл. 3) [2]
$2F_{11}$	$\frac{\alpha+\beta}{p}$	C_{144}	$\frac{1}{2}C_{144}$
$2F_{12}$	$\frac{\alpha-\beta}{p}$	C_{166}	$\frac{1}{2}C_{166}$
F_{33}	$\frac{\gamma}{p}$	C_{456}	$\frac{1}{4}C_{456}$
C_{111}	$6C_{111}$	C_{123}	C_{123}
C_{112}	$2C_{112}$		

[1] Заметим также, что $0 \equiv c^T_{11}F_{33} + 2c^T_{12}F_{11} \equiv c^T_{11}F_{11} + c^T_{12}(F_{11}+F_{33}) - 2c_{44}F_{12}$.

[2] Величины α, β и γ являются собственными значениями величины pF_{ij}.

Следует, однако, иметь в виду различие обозначений, приведенных в табл. 4. Браггер [1] продолжил вычисления, проведенные в работах [30, 31], и получил формулы для кварца при гидростатическом давлении.

[1] K. Brugger, частное сообщение (1962).

6. Пример: кубические кристаллы с симметрией $m3m$, 432 или $\bar{4}3m$

Для кубического кристалла в естественном состоянии имеют место соотношения (1.320). Аналогичные соотношения выполняются для величин s. Из выражения (1.154) находим

$$s_{11} = \frac{c_{11}+c_{12}}{(c_{11}+2c_{12})(c_{11}-c_{12})}, \qquad s_{12} = \frac{-c_{12}}{(c_{11}+2c_{12})(c_{11}-c_{12})},$$
$$s_{44} = \frac{1}{c_{44}}. \tag{1.461}$$

Уравнения (1.208) и (1.210) в естественном состоянии дают

$$\frac{1}{B_0} = 3(s^T_{11}+2s^T_{12}) = \frac{3}{c^T_{11}+2c^T_{22}}. \tag{1.462}$$

Обозначим шесть независимых величин C через C_{111}, C_{112}, C_{144}, C_{166}, C_{123}, C_{456}. Для выбранной симметрии кристалла имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &C_{111} = C_{222} = C_{333}, \\ &C_{144} = C_{255} = C_{366}, \\ &C_{112} = C_{113} = C_{122} = C_{133} = C_{223} = C_{332}, \\ &C_{166} = C_{155} = C_{244} = C_{266} = C_{344} = C_{355}. \end{aligned} \tag{1.463}$$

Все другие значения C равны нулю в естественном состоянии, кроме тех, которые получаются из приведенных выше шести величин перестановкой индексов. Перестановка индексов приводит к тому, что 216 величин C с тремя индексами сводятся к 56 величинам, которые могут быть различными в случае триклинной симметрии. Для кристаллов с симметрией $m3m$, $\bar{4}3m$ или 432 обращаются в нуль 156 величин из 216 или 36 из 56. Из 20 оставшихся величин C_{123} и C_{456} имеют различные значения, а остальные 18 величин, как видно из соотношений (1.463), сводятся к четырем значениям.

Гидростатическое давление. Если p обозначает гидростатическое давление, то уравнение (1.452) дает

$$F^0_{st} = -\delta_{st}(s^T_{11}+2s^T_{12}) = -\frac{\delta_{st}}{c^T_{11}+2c^T_{12}} = -\frac{\delta_{st}}{3B_0}. \tag{1.464}$$

Для случая распространения вдоль кристаллографической оси выберем $N_1 = 1$, $N_2 = 0$, $N_3 = 0$. Тогда уравнение (1.451) дает

$\mathscr{S}^0_{nq} = c^S_{p1q1}$, или

$$\| \mathscr{S}^0_{pq} \| = \begin{Vmatrix} c^S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{Vmatrix}. \tag{1.465}$$

Из выражения (1.450) найдем, что тензор D^0_{pq} является диагональным, причем

$$\begin{aligned} D^0_{11} &= -\frac{1}{3B_0}(c^T_{11} + 2c^T_{12} + 4c^S_{11} + C_{111} + 2C_{112}), \\ D^0_{22} &= D^0_{33} = -\frac{1}{3B_0}(c^T_{11} + 2c^T_{12} + 4c_{44} + C_{144} + 2C_{166}). \end{aligned} \tag{1.466}$$

Пронумеруем собственные значения и соответствующие собственные векторы тензора $\mathscr{S}^0_{ij}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathscr{S}^0_1 = c^S_{11}, \qquad \mathscr{S}^0_2 = \mathscr{S}^0_3 = c_{44}, \\ &\mathbf{U}^0_1 = \mathbf{i}_1, \qquad \mathbf{U}^0_2 = \mathbf{i}_2, \qquad \mathbf{U}^0_3 = \mathbf{i}_3. \end{aligned} \tag{1.467}$$

Тогда уравнение (1.455) дает

$$\mathscr{S}'_1 = D_{11}, \qquad \mathscr{S}'_2 = \mathscr{S}'_3 = D_{22}. \tag{1.468}$$

Для распространения вдоль направления [110] положим $N_1 = N_2 = 1/\sqrt{2}$, $N_3 = 0$. Тогда уравнение (1.451) дает

$$\| \mathscr{S}^0_{pq} \| = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}(c^S_{11} + c_{44}) & \frac{1}{2}(c^S_{12} + c_{44}) & 0 \\ \frac{1}{2}(c^S_{12} + c_{44}) & \frac{1}{2}(c^S_{11} + c_{44}) & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{Vmatrix}. \tag{1.469}$$

Выпишем собственные значения и собственные векторы тензора $\mathscr{S}_{pq}$:

$$\mathscr{S}^0_1 = \frac{1}{2}(c^S_{11} + c^S_{12} + 2c_{44}), \qquad \mathscr{S}^0_2 = \frac{1}{2}(c^S_{11} - c^S_{12}), \qquad \mathscr{S}^0_3 = c_{44}, \tag{1.470}$$

$$\| U^0_{kj} \| = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{1.471}$$

Из выражения (1.450) видно, что тензор D^0_{ij} является симметричным тензором со следующими компонентами:

$$D^0_{11}=D^0_{22}=-\frac{1}{3B_0}\Big[c^T_{11}+2c^T_{12}+2c^S_{11}+2c_{44}+ \\ +\frac{1}{2}(C_{111}+2C_{112}+C_{144}+2C_{166})\Big],$$

$$D^0_{33}=-\frac{1}{3B_0}(c^T_{11}+2c^T_{12}+4c_{44}+C_{144}+2C_{166}, \qquad (1.472)$$

$$D^0_{12}=-\frac{1}{3B_0}\Big[2c^S_{12}+2c_{44}+\frac{1}{2}(2C_{112}+2C_{166}+C_{144}+C_{123})\Big],$$

$$D^0_{13}=D^0_{23}=0.$$

Поскольку $D^0_{11}=D^0_{22}$, найдем в естественном состоянии

$$\mathscr{S}'_1=(D^0_{11}+D^0_{12}), \qquad \mathscr{S}'_2=(D^0_{11}-D^0_{12}), \qquad \mathscr{S}'_3=D^0_{33}. \qquad (1.473)$$

Значения величины $\mathscr{S}'_K$ в естественном состоянии, найденные в этом разделе, приведены в табл. 5, тогда как табл. 6 позволяет сравнить наши значения величин C с результатами расчета Бейтмана и др. [30]. Соответствующие значения величины $(\rho V^2)'_K$ в естественном состоянии на основании уравнений (1.460) и (1.464) равны $\mathscr{S}'_K+\mathscr{S}^0_K/B_0$.

Пять значений величины $\mathscr{S}'_K$, приведенные в табл. 5, дают только три независимых соотношения между коэффициентами C, поскольку эти коэффициенты появляются только в виде комбинаций

$$(C_{111}+2C_{112}), \qquad (C_{144}+2C_{166}), \qquad (C_{111}-C_{123}).$$

Одноосное сжатие вдоль [110]. Если p обозначает одноосное сжимающее напряжение в направлении [110], то уравнение (1.454) дает

$$F^0_{st}=-\frac{1}{2}(s^T_{st11}+s^T_{st12}+s^T_{st22}). \qquad (1.474)$$

В дальнейшем индекс 0 у величины F^0_{ij} мы будем опускать, так как эта величина всегда вычисляется в естественном состоянии. Используя коэффициенты податливости с двумя индексами, получаем

$$\|F\|=\begin{Vmatrix} -\frac{1}{2}(s^T_{11}+s^T_{12}) & -\frac{1}{4}s_{44} & 0 \\ -\frac{1}{4}s_{44} & -\frac{1}{2}(s^T_{11}+s^T_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & -s^T_{12} \end{Vmatrix}, \qquad (1.475)$$

Таблица 5

Гидростатическое давление

Направление распространения	Направление смещения	$\mathscr{S}_K^0$	$-3B_0(\mathscr{S}'_K+1)=-3B_0[(\rho V^2)'_K+1]+3\mathscr{S}_K^0$
[100]	[100]	c_{11}^S	$4c_{11}^S+C_{111}+2C_{112}$
[100]	Любое перпендикулярное направление	c_{44}	$4c_{44}+C_{144}+2C_{166}$
[110]	[1$\bar{1}$0]	$\frac{1}{2}(c_{11}^S+c_{12}^S+2c_{44})$	$4\mathscr{S}_K^0+\frac{1}{2}C_{111}+2C_{112}+C_{144}+2C_{166}+\frac{1}{2}C_{123}$
[110]	[1$\bar{1}$0]	$\frac{1}{2}(c_{11}^S-c_{12}^S)$	$4\mathscr{S}_K^0+\frac{1}{2}C_{111}-\frac{1}{2}C_{123}$
[110]	[001]	c_{44}	$4c_{44}+C_{144}+2C_{166}$

Таблица 6

Одноосное сжатие вдоль [110]

Направление распространения	Направление смещения	$\mathscr{S}^0_K$	$\mathscr{S}'_K=(\rho V^2)'_K+\mathscr{S}^0_K\,(2F_1+F_3)$
[001]	[001]	c_{11}^S	$4c_{11}^S F_3+F_3C_{111}+2F_1C_{112}$
[001]	[110]	c_{44}	$2c_{44}\,(F_1+F_3+F_6)+F_1C_{144}+C_{166}\,(F_1+F_3)+2F_6C_{456}$
[001]	[1$\bar{1}$0]	c_{44}	$2c_{44}\,(F_1+F_3-F_6)+F_1C_{144}+C_{166}\,(F_1+F_3)-2F_6C_{456}$
[1$\bar{1}$0]	[1$\bar{1}$0]	$\frac{1}{2}\,(c_{11}^S+c_{12}^S+2c_{44})$	$4\mathscr{S}^0_K\,(F_1-F_6)+\frac{1}{2}\,F_1C_{111}+\frac{1}{2}\,C_{112}\,(3F_1+F_3)+$ $+C_{166}\,(2F_1-4F_6)+F_3C_{144}+\frac{1}{2}\,F_3C_{123}$
[1$\bar{1}$0]	[110]	$\frac{1}{2}\,(c_{11}^S-c_{12}^S)$	$4\mathscr{S}^0_K F_1+\frac{1}{2}\,F_1C_{111}+\frac{1}{2}\,C_{112}\,(F_3-F_1)-\frac{1}{2}\,F_3C_{123}$
[1$\bar{1}$0]	[001]	c_{44}	$2c_{44}\,(F_1+F_3-F_6)+F_1C_{144}+C_{166}\,(F_1+F_3)-2F_6C_{456}$

$$F_1\equiv F_{11}=F_{22}=-\frac{c_{11}^T}{6B_0\,(c_{11}^T-c_{12}^T)}\,,\qquad F_3\equiv F_{33}=\frac{c_{12}^T}{3B_0\,(c_{11}^T-c_{12}^T)}\,,\qquad F_6\equiv F_{12}=-\frac{1}{4c_{44}}\,,\qquad B_0=\frac{1}{3}\,(c_{11}^T+2c_{12}^T)$$

и, наконец, используя коэффициенты упругости, находим

$$F_{11}=F_{22}=-\frac{c_{11}^T}{6B_0(c_{11}^T-c_{12}^T)}, \qquad F_{33}=\frac{c_{12}^T}{3B_0(c_{11}^T-c_{12}^T)}, \tag{1.476}$$
$$F_{12}=-\frac{1}{4c_{44}}, \qquad F_{13}=F_{23}=0.$$

При распространении волны вдоль направления [001] уравнение (1.451) дает $\mathscr{S}^0_{pq}=c^S_{p3q3}$, или

$$\|\mathscr{S}^0_{pq}\|=\begin{Vmatrix} c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{11}^S \end{Vmatrix}. \tag{1.477}$$

Замечая, что $F_{33}c_{11}^T+2F_{11}c_{12}^T\equiv 0$, из уравнения (1.450) получаем

$$\begin{aligned} D^0_{11}&=D^0_{22}=F_{11}(2c_{44}+C_{144}+C_{166})+F_{33}(2c_{44}+C_{166}),\\ D^0_{33}&=2F_{11}C_{112}+F_{33}(4c_{11}^S+C_{111}),\\ D^0_{12}&=2F_{12}(c_{44}+C_{456}), \qquad D^0_{13}=D^0_{23}=0. \end{aligned} \tag{1.478}$$

Общие собственные векторы $\|\mathscr{S}^0\|$ и $\|D^0\|$ даются уравнением (1.471), где первый, второй и третий собственные векторы соответствуют движению частиц вдоль направлений [110], [$\bar{1}$10] и [001] соответственно и

$$\mathscr{S}^0_1=\mathscr{S}^0_2=c_{44} \qquad \mathscr{S}^0_3=c_{11}^S. \tag{1.479}$$

Тогда уравнение (1.455) дает результат (1.473). В табл. 6 приведены результаты вычисления $\mathscr{S}'_K$ в естественном состоянии.

В случае распространения волны вдоль [$\bar{1}$10] или [1$\bar{1}$0] уравнение (1.451) дает

$$\|\mathscr{S}^0_{pq}\|=\begin{Vmatrix} \frac{1}{2}(c_{11}^S+c_{44}) & -\frac{1}{2}(c_{12}^S+c_{44}) & 0 \\ -\frac{1}{2}(c_{12}^S+c_{44}) & \frac{1}{2}(c_{11}^S+c_{44}) & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{Vmatrix}. \tag{1.480}$$

Если мы пронумеруем собственные значения так же, как в (1.470), то собственные векторы даются матрицей

$$\|U_{Kj}\|=\begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{1.481}$$

Учитывая тождество

$$F_{11}(c_{11}^T + c_{12}^T) + F_{33}c_{12}^T - 2c_{44}F_{12} \equiv 0, \tag{1.482}$$

находим из уравнения (1.450)

$$\begin{aligned}
D_{11}^0 = D_{22}^0 &= F_{11}\left(2c_{11}^S + 2c_{44} + \frac{1}{2}C_{111} + \frac{1}{2}C_{112} + C_{166}\right) + \\
&+ \frac{1}{2}F_{33}(C_{112} + C_{144}) - F_{12}(2c_{44} + c_{11}^S + c_{12}^S + 2C_{166}), \\
D_{12}^0 &= F_{11}(-2c_{44} - 2c_{12}^S - C_{112} - C_{166}) + \\
&+ F_{12}(c_{11}^S + c_{12}^S + 2c_{44} + C_{166}) - \frac{1}{2}F_{33}(C_{123} + C_{144}), \\
D_{33}^0 &= F_{11}(2c_{44} + C_{144} + C_{166}) + F_{33}(2c_{44} + C_{166}) - 2F_{12}(c_{44} + C_{456}), \\
D_{13}^0 &= D_{23}^0 = 0.
\end{aligned} \tag{1.483}$$

Поскольку $D_{22}^0 = D_{11}^0$, уравнение (1.455) дает

$$\mathscr{S}'_1 = D_{11}^0 - D_{12}^0, \qquad \mathscr{S}'_2 = D_{11}^0 + D_{12}^0, \qquad \mathscr{S}'_3 = D_{33}^0. \tag{1.484}$$

В табл. 6 приведены полученные здесь значения $\mathscr{S}'_K$ в естественном состоянии. Соответствующие значения $(\rho V^2)'_K$ получаются из уравнений (1.475) и (1.460) путем вычитания величины $\mathscr{S}_K^0$ $(F_{33} + 2F_{11})$. Эти выражения для $(\rho V^2)'_K$ совпадают с теми, которые были получены в работе [30], если учесть различие в обозначениях, указанное в табл. 4.

Одноосное сжатие вдоль [001]. Если p обозначает одноосное сжимающее напряжение вдоль направления [001], уравнение (1.454) дает $F_{st} = -s_{st33}^T$, или

$$\|F\| = \begin{Vmatrix} -s_{12}^T & 0 & 0 \\ 0 & -s_{12}^T & 0 \\ 0 & 0 & -s_{11}^T \end{Vmatrix}, \tag{1.485}$$

$$F_{ii} = -(s_{11} + 2s_{12}) = -\frac{1}{c_{11} + 2c_{12}} = -\frac{1}{3B_0}.$$

Из уравнений (1.485) и (1.461) следует тождество

$$F_{11}(c_{11}^T + c_{12}^T) + F_{33}c_{12}^T \equiv 0. \tag{1.486}$$

Для распространения вдоль направления [100] уравнение (1.450) с учетом тождества (1.486) дает

$$\begin{aligned}
D_{11}^0 &= F_{11}(4c_{11}^S + C_{111} + C_{112}) + F_{33}C_{112}, \\
D_{22}^0 &= F_{11}(4c_{44} + 2C_{166}) + F_{33}C_{144}, \\
D_{33}^0 &= F_{11}(2c_{44} + C_{166} + C_{144}) + F_{33}(2c_{44} + C_{166}).
\end{aligned} \tag{1.487}$$

Таблица 7

Одноосное сжатие вдоль [001]

Направление распространения	Направление смещения	$\mathscr{S}^0_K$	$\mathscr{S}'_K=(\rho V^2)'_K+\mathscr{S}^0_K(2\alpha+\gamma)$
[100]	[100]	c_{11}^S	$4\alpha c_{11}^S+\alpha C_{111}+C_{112}(\alpha+\gamma)$
[100]	[010]	c_{44}	$4\alpha c_{44}+\gamma C_{144}+2\alpha C_{166}$
[100]	[001]	c_{44}	$2c_{44}(\alpha+\gamma)+\alpha C_{144}+C_{166}(\alpha+\gamma)$
[1$\bar{1}$0]	[1$\bar{1}$0]	$\frac{1}{2}(c_{11}^S+c_{12}^S+2c_{44})$	$4\alpha\mathscr{S}^0_K+\frac{1}{2}\alpha C_{111}+\frac{1}{2}C_{112}(3\alpha+\gamma)+2\alpha C_{166}+\gamma C_{144}+\frac{1}{2}\gamma C_{123}$
[1$\bar{1}$0]	[110]	$\frac{1}{2}(c_{11}^S-c_{12}^S)$	$4\alpha\mathscr{S}^0_K+\frac{1}{2}\alpha C_{111}+\frac{1}{2}C_{112}(\gamma-\alpha)-\frac{1}{2}\gamma C_{123}$
[1$\bar{1}$0]	[001]	c_{44}	$2c_{44}(\alpha+\gamma)+\alpha C_{144}+C_{166}(\alpha+\gamma)$

$$\alpha\equiv F_{11}=F_{22}=-s_{12}^T=\frac{c_{12}^T}{3B_0(c_{11}^T-c_{12}^T)},\quad \gamma\equiv F_{33}=-s_{11}^T=-\frac{c_{11}^T+c_{12}^T}{3B_0(c_{11}^T-c_{12}^T)},\quad B_0=\frac{1}{3}(c_{11}^T+2c_{12}^T)$$

Если собственные значения $\|\mathscr{S}^0\|$ записать в следующем порядке: $\mathscr{S}^0_1 = c^S_{11}$, $\mathscr{S}^0_2 = \mathscr{S}^0_3 = c_{44}$, то $\|U^0_{K_j}\|$ будет представлять собой единичную матрицу, и уравнение (1.455) даст

$$\mathscr{S}'_1 = D^0_{11}, \qquad \mathscr{S}'_2 = D^0_{22}, \qquad \mathscr{S}'_3 = D^0_{33}. \tag{1.488}$$

Как видно из табл. 7, эти величины соответствуют смещению частиц вдоль направлений [100], [010] и [001].

Для распространения волны вдоль направления $[1\bar{1}0]$ мы можем использовать уравнения (1.470) и (1.480) — (1.483), причем F_{ij} определяется из (1.485). Тождество (1.482) остается справедливым и в этом случае, поскольку, когда $F_{12} = 0$, оно сводится к (1.486). Получаемые значения $\mathscr{S}'_K$ приведены в табл. 7. Значения $(\rho V^2)_K$ согласуются с результатами работы [30], если учесть различие в обозначениях величин C.

Изотропная среда. Сделав соответствующие подстановки в соотношениях, полученных выше для кубических кристаллов, можно получить соотношения для изотропной среды. Пренебрегая различием между адиабатическими и изотермическими коэффициентами, выпишем явно те подстановки, которые для этого должны быть сделаны. Все коэффициенты упругости выражаются через обычные константы Ламе λ и μ и константы Ламе третьего порядка ν_1, ν_2, ν_3, которые определены в работе Тупина и Бернстайна ([29], стр. 223):

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \lambda + 2\mu, & C_{144} &= \nu_2,\\
c_{12} &= \lambda, & C_{112} &= \nu_1 + 2\nu_2,\\
c_{44} &= \mu, & C_{166} &= \nu_2 + 2\nu_3,\\
C_{123} &= \nu_1 & C_{111} &= \nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3.\\
C_{456} &= \nu_3,
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Lamb H., Hydrodynamics, 6th ed., London and New York, 1932 (см. перевод: Г. Ламб, Гидродинамика, М.— Л., 1947).
2. Truesdell C., Toupin R. A., в книге Handbuch der Physik, Bd. III/1, Hrg. S. Flügge, Berlin, 1960, S. 226.
3. Love A. E. H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, London and New York, 1927 (см. перевод: А. Ляв, Математическая теория упругости, М.— Л., 1935).
4. Новожилов В. В., Основы нелинейной теории упругости, М.— Л., 1948.
5. Murnaghan F. D., Amer. Journ. Math., 59, 235 (1937).
6. Murnaghan F. D., Finite Deformation of an Elastic Solid, New York, 1951.
7. Green A. E., Adkins J. E., Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics, London and New York, 1960.

8. Mason W. P., Physical Acoustics and the Properties of Solids, Princeton, New Jersey, 1958.
9. Mason W. P., Piezoelectric Crystals and Their Application to Ultrasonics, Princeton, New Jersey, 1950 (см. перевод: У. Мэзон. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике, М., 1952).
10. Zener C., Phys. Rev., **53**, 90 (1938).
11. Zener C., Phys. Rev., **52**, 230 (1937).
12. Zener C., Elasticity and Anelasticity of Metals, Chicago, 1948 (см. перевод в сборнике «Упругость и неупругость металлов», М., 1954).
13. Phillips H. B., Vector Analysis, New York, 1933.
14. Pendse C. G., Phil. Mag. [7], **39**, 862 (1948).
15. Arenberg D. L., Journ. Acoust. Soc. Amer., **20**, 1 (1948).
16. Zajac E. E., в книге Handbook of Engineering Mechanics, ed. W. Flügge, New York, 1962.
17. Ewing W. M., Jardetzky W. S., Press F., Elastic Waves in Layered Media, New York, 1957.
18. Flavin J. N., Proc. Cambr. Phil. Soc., 58, pt. 3, 532 (1962).
19. Hayes M., Rivlin R. S., Arch. Ratl. Mech. Anal., 8, 358 (1961).
20. Lee E. H., в книге Stress Wave Propagation in Materials, ed. N. Davids, New York, 1960, p. 199.
21. Lee E. H., в книге Handbook of Engineering Mechanics, New York, 1962.
22. Coleman B. D., Arch. Ratl. Mech. Anal., **9**, 273 (1962).
23. Coleman B. D., Noll W., Rev. Mod. Phys., **33**, 239 (1961).
24. Pipkin A. C., Rivlin R. S., Arch. Ratl. Mech. Anal., 8, 297 (1961).
25. Gurtin M. E., Sternberg E., Arch. Ratl. Mech. Anal., **11**, 291 (1962).
26. O'Neil H. T., Phys. Rev., **75**, 928 (1949).
27. Borgnis F. E., Phys. Rev., 98, 1000 (1955).
28. Truesdell C., Arch. Ratl. Mech. Anal., 8, 263 (1961).
29. Toupin R. A., Bernstein B., Journ. Acoust. Soc. Amer., **33**, 216 (1961).
30. Bateman T. B., Mason W. P., McSkimin H. J., Journ. Appl. Phys., **32**, 928 (1961).
31. Seeger A., Buck O., Zs. Naturforsch., 15a, 1056 (1960).

Глава 2

ВОЛНОВОДНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ В ПРОТЯЖЕННЫХ ЦИЛИНДРАХ И ПЛАСТИНКАХ

Т. МИКЕР И А. МЕЙТЦЛЕР[1])

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе мы ограничимся в основном рассмотрением распространения упругих волн в изотропной упругой пластинке и изотропном упругом цилиндре. Для этих двух случаев точные решения уравнений движения можно получить из классической теории упругости, которая имеет дело с бесконечно малыми деформациями. Эти решения удовлетворяют уравнениям упругого движения и граничным условиям на свободных поверхностях, параллельных направлению распространения волны. Такими поверхностями для пластинки являются две параллельные плоскости, а для цилиндра — криволинейная внешняя поверхность. Кроме того, решения представляют собой распространяющиеся нормальные волны [2]), которые существуют в этих двух типах упругих волноводов. Основное внимание в этой главе уделено распространению нормальных волн в неограниченных пластинках и цилиндрах. Однако кратко рассматриваются также специальные задачи, связанные с удовлетворением граничных условий на торцевых поверхностях пластинок или цилиндров конечной длины для различных нормальных волн.

Между разными семействами бегущих и стоячих нормальных волн в пластинке и цилиндре имеется много общего. Например, семейство крутильных нормальных волн в цилиндре полностью аналогично семейству сдвиговых нормальных волн (иногда обозначаемых как волны SH) в пластинке. А семейство продольных нормальных волн в цилиндре полностью аналогично семейству

---

[1]) «Белл телефон леборатриз», Уиппени, Нью-Джерси.

[2]) В английском оригинале в этой и в остальных главах часто встречается термин «mode». В тех случаях, когда под этим понимается нормальная волна, при переводе используется этот уже установившийся в русском языке термин. В остальных случаях термин «mode» переводится как «мода».— *Прим. ред.*

таких же волн в пластинке. Однако между пластинкой и цилиндром имеется существенное различие: волновое движение в бесконечной пластинке двумерное, в то время как в цилиндре оно может быть трехмерным. Это различие становится очевидным для изгибных нормальных волн, которые в случаях пластинки и цилиндра различаются как по числу типов, так и по количеству компонент смещения. В дальнейшем, однако, акцент делается на сходных чертах волновых движений в пластинке и цилиндре, что является объединяющим звеном для главы как целого.

Основной целью настоящей главы является детальное рассмотрение различных нормальных волн, возможных в этих двух основных геометрических телах. Мы рассмотрим главные физические характеристики этих нормальных волн, включая зависимость от частоты фазовой и групповой скорости, а также распределения смещений. Кроме того, будут рассмотрены также вопросы, касающиеся опытной проверки теоретических положений, различных применений теории и некоторых особых эффектов (а именно взаимодействия нормальных волн и селективного затухания), свойственных упругим волнам в волноводах.

§ 2. НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНКАХ

1. Интегрирование уравнений упругого движения с использованием потенциальных функций и вывод основного дисперсионного уравнения

Векторное дифференциальное уравнение, описывающее упругие движения с малыми амплитудами в изотропной упругой среде в отсутствие объемных сил, можно записать в виде

$$\mu\nabla^2\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\,\nabla\,(\nabla\cdot\mathbf{u})=\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}\,. \tag{2.1}$$

В декартовых координатах $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$, x, y и z — координаты точки, $\mathbf{u}$ — вектор смещения, t — время, ρ — плотность, λ и μ — две постоянные Ламе, характеризующие упругие свойства среды.

В частной задаче о движениях в пластинке искомые решения уравнения (2.1) должны быть согласованы с определенными граничными условиями, которые предписываются в задаче. Анализ приводит к дискретному, но бесконечному ряду решений для $\mathbf{u}$, который связан с распространяющимися нормальными волнами. Показано [1], что все решения уравнения (2.1) могут быть представлены в виде комбинации векторной потенциальной функции ψ и скалярной потенциальной функции φ, таких, что

$$\mathbf{u}=\nabla\varphi+(\nabla\times\psi), \tag{2.2}$$

если φ и ψ — решения уравнений

$$V_D^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \tag{2.3}$$

$$V_S^2 \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{2.4}$$

и

$$\nabla \cdot \psi = 0. \tag{2.5}$$

Условие соленоидальности вектора ψ (2.5) не является необходимым для того, чтобы выражение (2.2) являлось решением уравнения (2.1), однако это достаточное условие. Во всяком случае, если условие (2.5) не используется, то между ψ и φ должно быть установлено некоторое другое соотношение. Например, при анализе упругих движений цилиндра на ψ налагается условие, отличное от (2.5). В уравнениях (2.3) и (2.4) V_D — скорость волны расширения, а V_S — скорость сдвиговой, эквиволюмиальной или крутильной волны в бесконечной упругой среде. Эти скорости выражаются через λ, μ и ρ следующим образом:

$$V_D = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{1/2} \tag{2.6}$$

и

$$V_S = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}. \tag{2.7}$$

Уравнения (2.3) и (2.4) представляют собой совокупность четырех уравнений в частных производных: одно уравнение для φ и по одному уравнению для каждой из трех компонент ψ. Уравнение (2.5) дает соотношение между компонентами вектора ψ; следовательно, имеются три линейно независимые функции, содержащиеся в четырех величинах φ, ψ_x, ψ_y, ψ_z.

Множеством потенциальных функций для бесконечной пластинки являются те решения уравнений (2.3) — (2.5), которые удовлетворяют граничным условиям отсутствия напряжений на поверхностях пластинки. Пластинка ограничена плоскостями $x = \pm b$ и бесконечно простирается в направлениях y и z. Соответствующие граничные условия заключаются в равенстве нулю компонент напряжения, связанных с нормалью к граничным плоскостям, на плоскостях $x = \pm b$, т. е.

$$T_{xx}\Big|_{x=\pm b} = T_{xy}\Big|_{x=\pm b} = T_{xz}\Big|_{x=\pm b} = 0. \tag{2.8}$$

В качестве решений уравнений (2.3) и (2.4) рассмотрим следующие функции:

$$\begin{aligned}\varphi &= (A\cos\alpha x + B\sin\alpha x)\, e^{i(\gamma z-\omega t)},\\ \psi_x &= (C\cos\beta x + D\sin\beta x)\, e^{i(\gamma z-\omega t)},\\ \psi_y &= (E\cos\beta x + F\sin\beta x)\, e^{i(\gamma z-\omega t)},\\ \psi_z &= (G\cos\beta x + H\sin\beta x)\, e^{i(\gamma z-\omega t)}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Эти функции соответствуют пластинке, не ограниченной в направлении y, так как они не зависят от y и представляют собой волны, распространяющиеся в направлении z синфазно: с одной и той же круговой частотой ω и одной и той же постоянной распространения γ. В эти функции включена возможность произвольной пространственной вариации в направлении толщины.

Непосредственная подстановка этих потенциальных функций в уравнения (2.3) и (2.4) показывает, что они являются решениями, если

$$\alpha^2+\gamma^2=\frac{\omega^2}{V_D^2} \tag{2.10}$$

и

$$\beta^2+\gamma^2=\frac{\omega^2}{V_S^2}. \tag{2.11}$$

Далее, выражения для трех компонент $\mathbf{u}$, определяемые соотношением (2.2), принимают простую форму

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z},\\ u_y &= -\frac{\partial\psi_z}{\partial x}+\frac{\partial\psi_x}{\partial z},\\ u_z &= \frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x},\end{aligned} \tag{2.12}$$

поскольку потенциальные функции не зависят от y. Уравнение (2.5) принимает вид

$$\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_z}{\partial z}=0. \tag{2.13}$$

Подстановка выражений (2.9) в (2.12) дает

$$\begin{aligned}u_x &= [\alpha(-A\sin\alpha x + B\cos\alpha x) - i\gamma(E\cos\beta x + F\sin\beta x)]\, e^{i(\gamma z-\omega t)},\\ u_y &= [-\beta(-G\sin\beta x + H\cos\beta x) + i\gamma(C\cos\beta x + D\sin\beta x)]\, e^{i(\gamma z-\omega t)},\\ u_z &= [i\gamma(A\cos\alpha x + B\sin\alpha x) + \beta(-E\sin\beta x + F\cos\beta x)]\, e^{i(\gamma z-\omega t)}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Компоненты напряжения связаны с компонентами деформации законом Гука. Три компоненты напряжения, содержащиеся в (2.8), определяются выражениями

$$T_{xx} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$T_{xy} = \mu \frac{\partial u_y}{\partial x}, \tag{2.15}$$

$$T_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).$$

Подставим сюда выражения (2.14) для компонент смещения и полученные выражения приравняем нулю при $x = \pm b$. Эта операция приводит к шести уравнениям относительно A, B, C, D, E, F, G и H. Два дополнительные уравнения получаем из уравнения (2.13) при $x = \pm b$. Множитель $\exp[i(\gamma z - \omega t)]$ теперь можно опустить, а уравнения окончательно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&[(\lambda + 2\mu)\alpha^2 + \lambda\gamma^2](A\cos\alpha b + B\sin\alpha b) + \\
&\qquad + i2\mu\gamma\beta(-E\sin\beta b + F\cos\beta b) = 0, \\
&[(\lambda + 2\mu)\alpha^2 + \lambda\gamma^2](A\cos\alpha b - B\sin\alpha b) + \\
&\qquad + i2\mu\gamma\beta(E\sin\beta b + F\cos\beta b) = 0, \\
&\beta^2(G\cos\beta b + H\sin\beta b) + i\gamma\beta(-C\sin\beta b + D\cos\beta b) = 0, \\
&\beta^2(G\cos\beta b - H\sin\beta b) + i\gamma\beta(C\sin\beta b + D\cos\beta b) = 0, \\
&i2\gamma\alpha(-A\sin\alpha b + B\cos\alpha b) + (\gamma^2 - \beta^2)(E\cos\beta b + F\sin\beta b) = 0, \\
&i2\gamma\alpha(A\sin\alpha b + B\cos\alpha b) + (\gamma^2 - \beta^2)(E\cos\beta b - F\sin\beta b) = 0, \\
&\beta(-C\sin\beta b + D\cos\beta b) + i\gamma(G\cos\beta b + H\sin\beta b) = 0, \\
&\beta(C\sin\beta b + D\cos\beta b) + i\gamma(G\cos\beta b - H\sin\beta b) = 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Эти уравнения можно рассматривать как систему однородных линейных уравнений относительно восьми переменных A, B, C, D, E, F, G и H. Необходимым и достаточным условием существования решения этой системы является равенство нулю ее детерминанта.

Детерминант системы (2.16) можно записать в виде

$$\begin{vmatrix}
c\cos\alpha b & c\sin\alpha b & 0 & 0 & -f\sin\beta b & f\cos\beta b & 0 & 0 \\
c\cos\alpha b & -c\sin\alpha b & 0 & 0 & f\sin\beta b & f\cos\beta b & 0 & 0 \\
0 & 0 & -h\sin\beta b & h\cos\beta b & 0 & 0 & \beta^2\cos\beta b & \beta^2\sin\beta b \\
0 & 0 & h\sin\beta b & h\cos\beta b & 0 & 0 & \beta^2\cos\beta b & -\beta^2\sin\beta b \\
-d\sin\alpha b & d\cos\alpha b & 0 & 0 & g\cos\beta b & g\sin\beta b & 0 & 0 \\
d\sin\alpha b & d\cos\alpha b & 0 & 0 & g\cos\beta b & -g\sin\beta b & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\beta\sin\beta b & \beta\cos\beta b & 0 & 0 & i\gamma\cos\beta b & i\gamma\sin\beta b \\
0 & 0 & \beta\sin\beta b & \beta\cos\beta b & 0 & 0 & i\gamma\cos\beta b & -i\gamma\sin\beta b
\end{vmatrix} = 0 \quad (2.17)$$

со следующими обозначениями: $c=[(\lambda+2\mu)\alpha^2+\lambda\gamma^2]$, $d=i2\gamma\alpha$, $f=i2\mu\gamma\beta$, $g=\gamma^2-\beta^2$ и $h=i\gamma\beta$. Этот детерминант можно упростить, используя операции сложения и вычитания строк и перестановки столбцов и строк, и окончательно представить в виде произведения четырех поддетерминантов

$$\begin{vmatrix} (i\gamma\cos\beta b) & (\beta\cos\beta b) \\ (\beta^2\cos\beta b) & (h\cos\beta b) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (-\beta\sin\beta b) & (i\gamma\sin\beta b) \\ (-h\sin\beta b) & (\beta^2\sin\beta b) \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} (c\cos\alpha b) & (f\cos\beta b) \\ (-d\sin\alpha b) & (g\sin\beta b) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (g\cos\beta b) & (d\cos\alpha b) \\ (f\sin\beta b) & (c\sin\alpha b) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.18)$$

Таким образом, уравнение (2.16) имеет решения при четырех отдельных и независимых условиях, а именно когда какой-либо из четырех поддетерминантов в уравнении (2.18) равен нулю. Кроме того, четыре поддетерминанта соответствуют четырем независимым совокупностям компонент смещений. Эти четыре независимые совокупности компонент смещений, расположенные в последовательности, соответствующей четырем написанным выше

поддетерминантам, имеют следующий вид:

решение I

$$A,\ B,\ C,\ E,\ F,\ H=0, \qquad D,\ G\neq 0,$$
$$u_x=0,$$
$$u_y=(\beta G+i\gamma D)(\sin\beta x)\,e^{i(\gamma z-\omega t)}, \tag{2.19}$$
$$u_z=0;$$

решение II

$$A,\ B,\ D,\ E,\ F,\ G=0, \qquad C,\ H\neq 0,$$
$$u_x=0,$$
$$u_y=(-\beta H+i\gamma C)(\cos\beta x)\,e^{i(\gamma z-\omega t)}, \tag{2.20}$$
$$u_z=0;$$

решение III

$$B,\ C,\ D,\ E,\ G,\ H=0, \qquad A,\ F\neq 0,$$
$$u_x=(-\alpha A\sin\alpha x-i\gamma F\sin\beta x)\,e^{i(\gamma z-\omega t)},$$
$$u_y=0, \tag{2.21}$$
$$u_z=(\beta F\cos\beta x+i\gamma A\cos\alpha x)\,e^{i(\gamma z-\omega t)};$$

решение IV

$$A,\ C,\ D,\ F,\ G,\ H=0, \qquad B,\ E\neq 0,$$
$$u_x=(\alpha B\cos\alpha x-i\gamma E\cos\beta x)\,e^{i(\gamma z-\omega t)},$$
$$u_y=0, \tag{2.22}$$
$$u_z=(-\beta E\sin\beta x+i\gamma B\sin\alpha x)\,e^{i(\gamma z-\omega t)}.$$

Для каждого из четырех решений уравнение, получающееся приравниванием соответствующего поддетерминанта нулю, называется дисперсионным уравнением. Если упругие свойства среды характеризовать значениями V_S и коэффициента Пуассона σ [1]), а не параметрами λ и μ, то в дисперсионных уравнениях можно рассматривать три независимые переменные. В безразмерных величинах этими переменными являются угловая частота $\omega b/V_S$, постоянная распространения γb и коэффициент Пуассона σ. Обычно вычисляется соотношение между частотой и постоянной распространения для данного значения коэффициента σ, выбранного в качестве параметра материала. Графически решения дисперсионных уравнений обычно представляют собой последовательность непрерывных кривых или ветвей, причем каждая ветвь

[1]) Выражение для коэффициента Пуассона через постоянные Ламе имеет вид $\sigma=\lambda/[2(\lambda+\mu)]$.

изображает соотношение между γb и $\omega b/V_S$ для данной нормальной волны. Эти ветви образуют спектр частот нормальных волн в пластинке. Исходя из такого представления, безразмерная фазовая скорость определяется как $(\omega b/V_S)/\gamma b$, а безразмерная групповая скорость — как $d(\omega b/V_S)/d(\gamma b)$. На графиках этого типа две нормальные волны имеют одинаковые фазовые скорости на одной и той же частоте, когда их ветви пересекаются (предполагается, что обе кривые лежат в плоскости действительных значений постоянной распространения). Безразмерная групповая скорость нормальной волны связана с наклоном соответствующей ветви.

Критическая частота нормальной волны по существу соответствует самой низкой частоте, при которой может существовать распространяющаяся нормальная волна, т. е. самой низкой частоте, при которой данная нормальная волна может существовать, имея действительное значение постоянной распространения. В этой главе под критической частотой всегда понимается частота, при которой групповая скорость равна нулю. Часто, но не всегда, критическая частота является одновременно частотой, при которой ветвь, соответствующая данной нормальной волне, пересекает ось $\omega b/V_S$ (т. е. частотой, соответствующей нулевой постоянной распространения) [1].

Хотя это и не существенно при обсуждении распространяющихся в пластинке нормальных волн, но мы уделим некоторое внимание ветвям с мнимыми и комплексными значениями γb, удовлетворяющими дисперсионным уравнениям при действительных значениях частоты. Эти корни имеют большое значение в задачах о распространении импульса и в задачах, включающих граничные условия на торцевых поверхностях.

При рассмотрении волновых движений пластинки удобно классифицировать решения по четырем семействам волновых движений. В решении I, как и в решении II, смещение перпендикулярно направлению распространения волны. Таким образом, решения I и II соответствуют сдвиговым волнам, в которых смещение частиц среды параллельно граничным поверхностям. Волны этого типа иногда называют волнами SH [2]. Их можно представить как

---

[1]) Многие авторы называют критическими частоты, соответствующие нулевому значению постоянной распространения, но мы в этой главе будем различать эти два термина, для того чтобы более четко описать некоторые характеристики продольных и изгибных нормальных волн в пластинках и цилиндрах.

[2]) Этот термин заимствован из сейсмологии, где граничная поверхность обычно горизонтальна. Поперечные волны там подразделяются на вертикальные сдвиговые (SV) и на горизонтальные сдвиговые (SH) в зависимости от того, перпендикулярно или параллельно поверхности движение частиц в волне.

антисимметричные волны SH, для которых смещение частиц описывается выражением (2.19), и симметричные волны SH, для которых смещение описывается выражением (2.20). Эти термины выражают симметрию свойств распределения смещений в данной нормальной волне относительно средней плоскости пластинки. Однако следует отметить, что два поддетерминанта, соответствующие решениям I и II, можно легко объединить и получить одно дисперсионное уравнение, применимое как к симметричным, так и к антисимметричным нормальным волнам SH.

Волновые движения, соответствующие решениям III и IV, несколько сложнее, чем движения в нормальных волнах SH, во-первых, в том смысле, что две компоненты смещения отличны от нуля, и, во-вторых, суммарное волновое движение заключает в себе комбинацию волновых движений сдвиговых волн и волн расширения. В решении III вектор смещения частиц симметричен относительно средней плоскости; таким образом, это решение соответствует семейству симметричных, или продольных нормальных волн. Вектор смещения в решении IV антисимметричен относительно средней плоскости, и это решение отвечает семейству антисимметричных, или изгибных нормальных волн.

В настоящей главе при дальнейшем изложении термины «продольные», «изгибные», «симметричные сдвиговые» и «антисимметричные сдвиговые» всегда используются для обозначения четырех основных семейств нормальных волн в пластинке. После сделанного введения рассмотрим четыре приведенные выше решения более подробно.

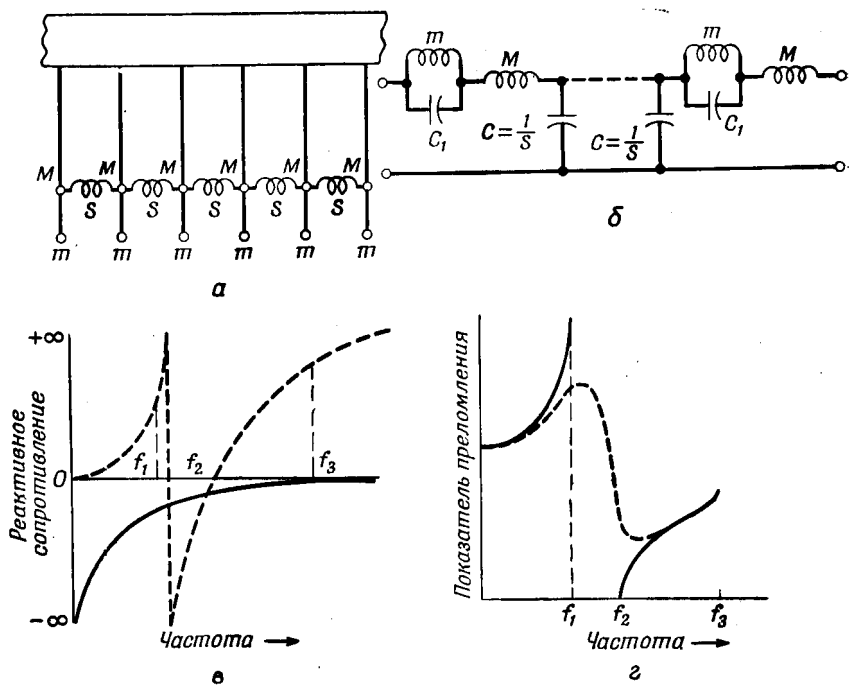
2. *Семейства антисимметричных и симметричных нормальных волн* SH

Свойства семейств антисимметричных и симметричных нормальных волн SH рассмотрены в нескольких работах по упругим волнам в пластинках [2—4].

Поскольку эти два семейства нормальных волн схожи между собой, их свойства удобно рассматривать параллельно. Антисимметричные нормальные волны SH мы будем называть нормальными волнами AS, а симметричные нормальные волны SH — нормальными волнами SS. Рассмотрим сначала решение I, приведенное в предыдущем пункте, которое соответствует нормальным волнам AS. Поскольку $h = i\gamma\beta$, первый поддетерминант уравнения (2.18) принимает вид

$$\begin{vmatrix} (i\gamma\cos\beta b) & (\beta\cos\beta b) \\ (\beta^2\cos\beta b) & (i\gamma\beta\cos\beta b) \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.23)$$

к балке на длинных нитях и соединены между собой с помощью пружинок. К этим грузам прикреплены дополнительные нити с другими грузами с массой m, которые действуют как маятники, обладающие определенной частотой.



Ф и г. 119. Первый механический фильтр для моделирования оптической дисперсии (по Винсенту).

а — механическая схема; *б* — эквивалентная электрическая схема; *в* — реактивные сопротивления параллельной и последовательной ветвей схемы *б*; *г* — показатель преломления.

Эквивалентная схема такого устройства показана на фиг. 119, *б*, а на фиг. 119, *в* приведены частотные зависимости реактивных сопротивлений последовательной и параллельных ветвей (изображенные пунктирными и сплошными линиями). Затухание и сдвиг фазы легко вычисляются по этим кривым с помощью соответствующей формулы для цепочечной схемы:

$$\operatorname{ch} g = \operatorname{ch}(A + jB) = \frac{Z_1 + 2Z_2}{2Z_2}, \qquad (5.14)$$

где Z_1 — сопротивление последовательно включенных элементов, а Z_2 — сопротивление параллельной ветви. Для сравнения с объек-

Знаки «±» в каждом случае обозначают просто два направления распространения волн. Для всех нормальных волн AS и SS, кроме волны SS (0), фазовая и групповая скорости являются функциями частоты, т. е. эти волны обладают дисперсией. Далее, фазовая и групповая скорости становятся мнимыми при $\omega b/V_S < r\pi$. Свободное распространение данной нормальной волны не имеет места при частотах ниже $\omega b/V_S = r\pi$. При $\omega b/V_S = r\pi$ групповая скорость нормальной волны становится равной нулю, и частота, при которой это происходит, называется критической частотой данной нормальной волны. Для нормальных волн AS и SS постоянная распространения γb равна нулю при критических частотах. Если величина $\omega b/V_S$ действительна и меньше πr, то γb становится чисто мнимой величиной. Смещения, соответствующие этим решениям, затухают экспоненциально по z, в то время как смещения, соответствующие действительным значениям γb, отвечают синусоидальным волнам, которые распространяются без затухания.

Важно отметить, что экспоненциальное затухание нормальной волны при мнимой величине постоянной распространения не связано с потерями в среде. Энергия в нормальной волне при этом накапливается в некоторой области пространства, а не распространяется свободно. Другими словами, поток энергии через поперечное сечение, перпендикулярное оси z, равен нулю, так как напряжения и скорости частиц сдвинуты по фазе на 90°.

Для нормальной волны SS (0) $\gamma b = \omega b/V_S$. В результате групповая и фазовая скорости не зависят от частоты и равны V_S. Поэтому только эта нормальная волна среди всех волн SH не обладает дисперсией. Необходимо, кроме того, отметить, что уравнения для нормальных волн SH включают только один упругий параметр — модуль сдвига. В противоположность этому продольные и изгибные нормальные волны, рассматриваемые в следующем разделе, зависят от двух упругих параметров изотропной среды.

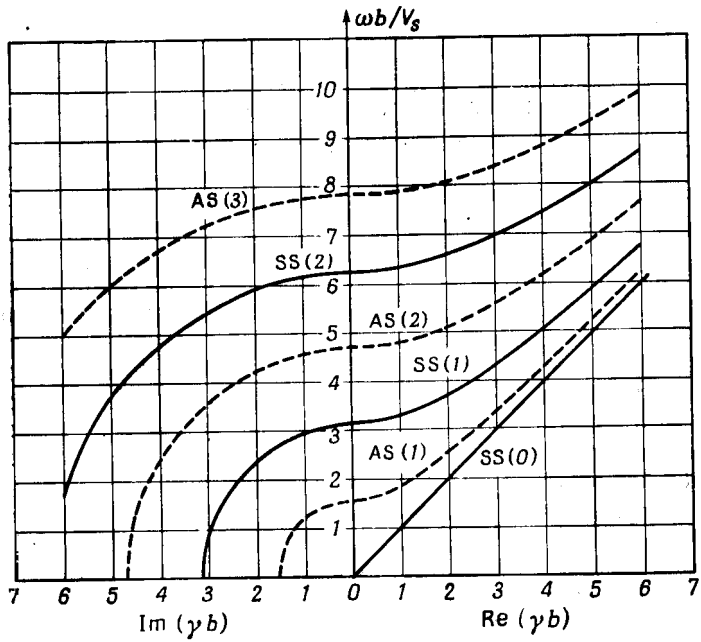
Часть спектра частот, определяемых уравнением (2.27) для нормальных волн SH, показана на фиг. 16. Нормальным волнам SS соответствуют $q = 0, 1, 2$, а нормальным волнам AS соответствуют $p = 1, 2, 3$. Поскольку спектр частот симметричен относительно осей γb и $\omega b/V_S$, полуплоскость с отрицательными значениями γb можно заменить полуплоскостью с мнимыми положительными значениями γb, а отрицательные значения $\omega b/V_S$ можно не рассматривать без опасения пропустить какие-либо детали.

При приближенном анализе расположения корней уравнения (2.27) полезно заметить, что для нормальных волн AS справедливы следующие положения:

1) Для различных нормальных волн значения $\omega b/V_S$, при которых $\gamma b = 0$, равны $(p + {}^1/_2)\,\pi$.

2) Для всех нормальных волн данного типа наклон кривой на фиг. 16 равен нулю, когда действительная и мнимая части γb равны нулю.

3) При мнимых значениях γb кривая представляет собой окружность радиуса $(p - {}^1/_2)\,\pi$ с центром в начале координат.



Фиг. 16. Спектр частот симметричных и антисимметричных сдвиговых нормальных волн в бесконечной пластинке.

4) При действительных значениях γb кривая является гиперболой, начинающейся в точке $\omega b/V_S = (p - {}^1/_2)\,\pi$, $\gamma b = 0$ и асимптотически стремящейся к прямой $\omega b/V_S = \gamma b$ при $\omega b/V_S \to \infty$.

5) Наклон кривой в произвольной точке дается уравнением (2.29).

Аналогичные положения можно сформулировать и для нормальных волн SS, исключая нормальную волну наинизшего порядка, для которой $p = 0$. На фиг. 16 эта нормальная волна представлена прямой линией, проходящей через начало координат с тангенсом угла наклона, равным единице.

Данные фиг. 16 показывают, что при заданной частоте имеется только конечное число решений с действительными значениями γb для волновых движений типа SH. Следовательно, имеется только конечное число свободно распространяющихся нормальных волн SH. Поэтому с помощью этих распространяющихся волн невозможно создать произвольное распределение напряжений на выбранных плоскостях в пластинке, например на плоскостях, для которых $z = \text{const}$. Однако включение бесконечного числа решений с мнимыми значениями γb для заданной частоты допускает образование произвольного распределения напряжений при помощи расширенного ряда из распространяющихся и нераспространяющихся нормальных волн. Физический смысл такого представления, включающего решения как с мнимыми, так и с действительными значениями γb, состоит в том, что при произвольном возбуждении пластинки в плоскости, перпендикулярной z, энергия, вообще говоря, расходуется на образование как нераспространяющихся нормальных волн, локализованных около плоскости, перпендикулярной z, и сохраняющих энергию, так и различных распространяющихся нормальных волн, уносящих энергию.

В точности аналогичная ситуация очень подробно проанализирована для электромагнитных волноводов и линий передачи, где явление накопления энергии ведет к тому, что импеданс волновода или линии передачи становится комплексным. Можно ожидать, что подобное явление должно иметь место и для упругих волноводов. Для продольных и изгибных волн задача о разложении произвольного напряжения на плоскости, перпендикулярной z, еще более сложна. Эта задача рассматривается в следующем пункте.

3. Семейства продольных и изгибных нормальных волн

Хотя третий и четвертый поддетерминанты в уравнении (2.18) ненамного сложнее первых двух, их корни нельзя получить в аналитической форме, так что для получения зависимости постоянной распространения от частоты всегда должны использоваться численные методы. Дисперсионное уравнение для продольных нормальных волн получаем приравниванием третьего детерминанта уравнения (2.18) нулю. Используя уравнения (2.10) и (2.11) и соотношения

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\sigma}{1-2\sigma} \tag{2.30}$$

и

$$\frac{2\mu+\lambda}{\mu} = \frac{2-2\sigma}{1-2\sigma}, \tag{2.31}$$

дисперсионное уравнение для продольных волн можно записать в виде

$$\frac{\operatorname{tg}\beta b}{\operatorname{tg}\alpha b} = -\frac{4(\gamma b)^2(\beta b)(\alpha b)}{[(\gamma b)^2-(\beta b)^2]^2}. \tag{2.32}$$

Подобным же путем четвёртый поддетерминант уравнения (2.18) дает дисперсионное уравнение для изгибных нормальных волн

$$\frac{\operatorname{tg}\beta b}{\operatorname{tg}\alpha b} = -\frac{[(\gamma b)^2-(\beta b)^2]^2}{4(\gamma b)^2(\beta b)(\alpha b)}. \tag{2.33}$$

При такой записи дисперсионных уравнений подчеркивается безразмерность входящих в них величин. Поскольку βb и αb зависят только от γb, $\omega b/V_S$ и σ [уравнения (2.10) и (2.11)], написанные дисперсионные уравнения можно рассматривать как функциональные соотношения между γb и $\omega b/V_S$ с параметром σ. Эти уравнения обычно называют дисперсионными уравнениями Релея — Лэмба [5, 6].

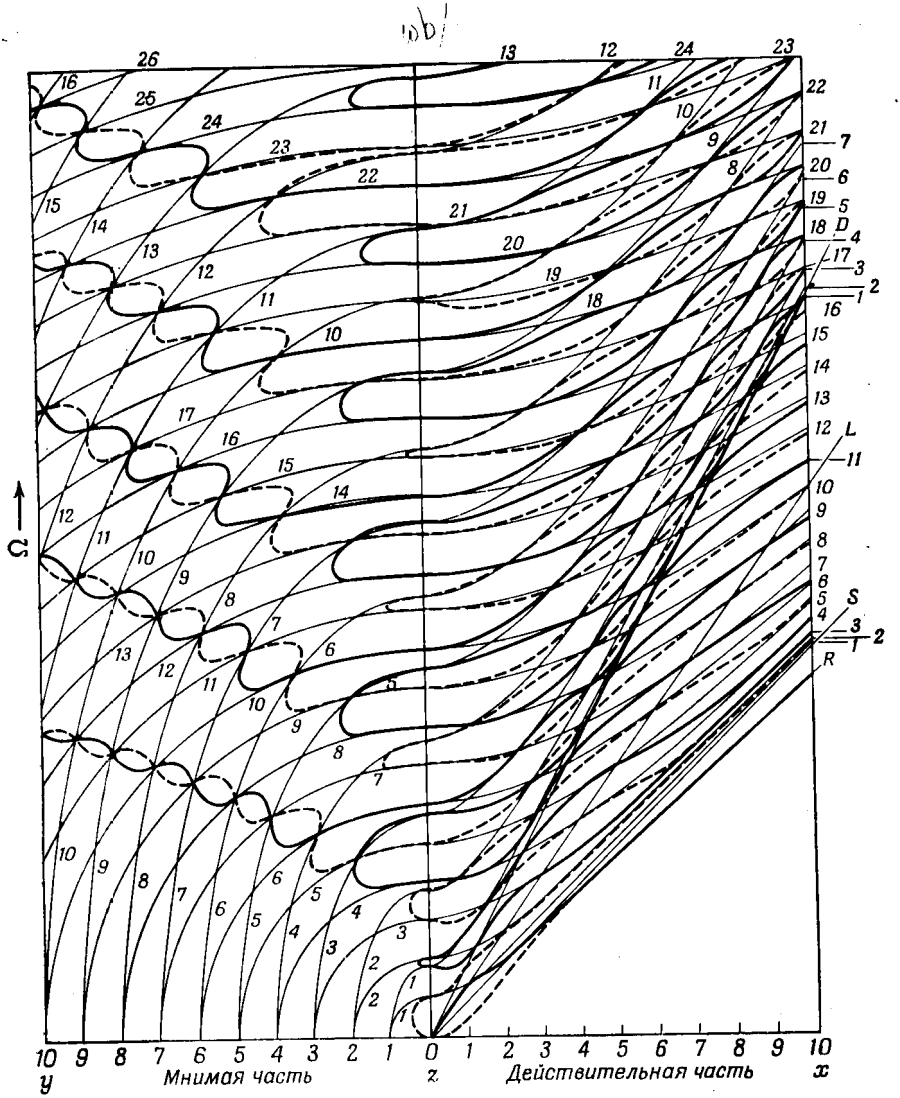
В этой главе мы не будем рассматривать численные методы, которые использовались для получения значений величин γb, $\omega b/V_S$ и σ, соответствующих этим уравнениям. Первоначально численные решения уравнений (2.32) и (2.33) для фазовых скоростей нормальных волн наинизших номеров были получены Лэмбом [6], а для фазовых и групповых скоростей нескольких продольных и изгибных нормальных волн (в алюминии) Фэйрстоном и Лингом [7]. Первое экспериментальное подтверждение вычислений Фэйрстона и Линга было дано Шохом [8]. Другие результаты исследований этих нормальных волн для различных значений коэффициента Пуассона были даны Холденом [9], Оноэ [10, 11], Миндлиным [12, 13], Толстым и Юздиным [14], Фолком [15] и Таммом и Вейсом [16, 17].

Для последующего изложения важно напомнить, что все рассуждения в этой главе проводятся без учета каких-либо потерь или диссипации и что частота и σ везде предполагаются действительными, но γb, αb и βb могут быть действительными, мнимыми или комплексными. Действительные значения γb дают смещения в виде суммы тригонометрических функций. Мнимые значения γb дают смещения в виде суммы гиперболических функций. Комплексные значения γb дают смещения в виде суммы произведений тригонометрических и гиперболических функций. Спектр нормальных волн удобно представлять, как в случае нормальных волн SH, в виде зависимости $\omega b/V_S$ от γb, откладывая мнимые значения γb слева от начала координат. Для нормальных волн с комплексными значениями γb действительная и мнимая части иногда откладываются отдельно или используется трехмерная форма, в которой

ось z является осью частот, ось x — осью действительных γ, а ось y — осью мнимых γ. Хотя кривые, образованные допустимыми значениями γb и $\omega b/V_S$, не имеют такого простого вида, как для нормальных волн SH, тем не менее можно получить взаимно однозначное соответствие между этими решениями и последовательностью целых чисел [15]. Поэтому мы будем обозначать продольные нормальные волны $L(p)$, где p — целое число, связанное с интересующей нас ветвью. Обычно для больших действительных значений γb при увеличении частоты величина p возрастает. Аналогично изгибные нормальные волны мы будем обозначать $F(q)$. Таким образом, $L(1)$ — продольная нормальная волна с самой низкой частотой, а $F(2)$ — изгибная нормальная волна второго порядка. Когда рассматриваются комплексные или мнимые значения γb, схема нумерации нормальных волн становится менее определенной. Мы будем использовать те же обозначения, что и выше, но нумеровать ветви таким образом, чтобы соблюдалась непрерывная однозначная зависимость γb от $\omega b/V_S$, начиная от действительных значений γb до мнимых или комплексных при дальнейшем изменении $\omega b/V_S$.

Этот более сложный метод нумерации нормальных волн особенно пригоден для фурье-анализа распространения импульса; более подробное описание этого метода дано в конце настоящего параграфа. Согласно другому методу, нормальные волны нумеруются в порядке возрастания частоты при $\gamma b = 0$. Этот метод очень удобен в задачах о колебаниях пластинок.

Миндлин использовал способ определения корней уравнений (2.32) и (2.33), который позволяет приближенно, но довольно подробно построить спектр нормальных волн, не прибегая к сложным численным расчетам. На фиг. 17 показан такой спектр для изгибных и продольных нормальных волн при $\sigma = 0{,}31$. На фиг. 17 тонкие линии представляют невзаимодействующие сдвиговые волны (SV) и волны сжатия (D). Отдельные волновые движения аналогичны волнам SH в пластинке, которые мы рассматривали выше. Граничные условия на свободных поверхностях пластинки связывают эти два типа упругого движения, за исключением случаев, соответствующих некоторым особым значениям γb и $\omega b/V_S$. Связь этих двух типов волнового движения на свободной поверхности, вдоль которой распространяется волна, выражается также в частичном превращении одного типа волнового движения в другой при отражении от свободной поверхности. Тот факт, что сдвиговые волны, поляризованные в плоскости, параллельной этой поверхности, при любых углах падения отражаются от нее в виде волн того же типа, является одним из способов выражения независимости волн SH от продольных и изгибных волн. Дисперсионные уравнения для невзаимодействующих



Ф и г. 17. Спектр частот продольных и изгибных нормальных волн в бесконечной пластинке с коэффициентом Пуассона σ = 0,31 (по Миндлину [13]). На этом графике $\Omega = 2\omega b/\pi V_S$, а $z = x + iy$ соответствует $\gamma b = \mathrm{Re}\,(\gamma b) + \mathrm{Im}\,(\gamma b)$.

волн, или предельных ветвей, имеют вид (2.10) и (2.11), где

$$\beta b = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{4\pi}{2},\ \ldots,\ \frac{q\pi}{2} \tag{2.34}$$

и

$$\alpha b = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{4\pi}{2},\ \ldots,\ \frac{p\pi}{2}. \tag{2.35}$$

Как и в случае волн SH, имеются симметричные и антисимметричные смещения, которые при отсутствии взаимодействия должны быть связаны с чередующимися членами каждого из двух написанных рядов констант. При мнимых значениях γb уравнение (2.10) описывает последовательность окружностей, каждая из которых соответствует своему значению q, а уравнение (2.11) описывает последовательность эллипсов, соответствующих различным значениям p. При действительных значениях γb уравнение (2.10) описывает последовательность гипербол с асимптотами $\omega b/V_S = k\gamma b$, где $k = (V_D/V_S)$ зависит только от σ. Из уравнений (2.10) и (2.11) получаются также две асимптоты, если положить $\beta b = 0$ и $\alpha b = 0$.

Эти окружности, эллипсы и гиперболы характеризовали бы волновое движение в пластинке, если бы отсутствовало взаимодействие на свободных поверхностях. Представляют интерес еще две линии, связанные с двумя важными фазовыми скоростями — релеевской скоростью (обозначенной буквой R на фиг. 17) и скоростью Ламе (обозначенной буквой L). Релеевская скорость V_R представляет собой предел по высокой частоте скоростей как первой продольной, так и первой изгибной нормальных волн в пластинке. Аналитические выражения для этой скорости через упругие параметры среды можно получить как действительные решения следующего уравнения:

$$\left(\frac{V_R^2}{V_S^2}\right)^3 - 8\left(\frac{V_R^2}{V_S^2}\right)^2 + 24\left(\frac{V_R^2}{V_S^2}\right) - 16\left(\frac{V_R^2}{V_D^2}\right) + 16\left(\frac{V_S^2}{V_D^2}\right) - 16 = 0. \tag{2.36}$$

Это уравнение имеет действительный корень только при условии, что $(V_R/V_S) < 1 < (V_D/V_S)$, причем V_D/V_S имеет значения больше единицы при всех значениях σ между 0 и 0,5. Скорость Ламе — это скорость чистых волн SV в пластинках. Эту скорость можно выразить через константы материала:

$$V_L = \left(\frac{2\mu}{\varrho}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,V_S. \tag{2.37}$$

Третья важная скорость, не обозначенная на фиг. 17, но полезная при построении такой фигуры,— это пластиночная скорость V_P, которая представляет собой предел скорости первой продольной волны при наинизшей частоте. Через константы материала скорость V_P выражается в виде

$$V_P = V_S \left(\frac{2}{1-\sigma}\right)^{1/2}. \tag{2.38}$$

Необходимо отметить, что наклон линии, соответствующей скорости Релея, наклон линии $\alpha b = 0$, главные оси эллипсов в мнимой плоскости и вершины гипербол с асимптотами $\omega b/V_S = k\gamma b$ зависят от σ, в то время как радиусы окружностей в мнимой плоскости, вершины гипербол с асимптотами $\omega b/V_S = \gamma b$ и наклон линии Ламе не зависят от σ. Миндлин показал, что ветви нормальных волн проходят через пересечения предельных ветвей только в тех случаях, когда p и q оба четные или оба нечетные, т. е., другими словами, рассматриваемые движения даже в присутствии свободных границ взаимодействуют только в том случае, если оба движения или симметричные, или антисимметричные. Отсутствие связи в тех точках, где это условие симметрии не выполняется, является результатом линейной независимости решений с различной симметрией. Помимо этого, были получены аналитические выражения для наклона ветвей нормальных волн в точках пересечения. Данные о кривизне, точках пересечения и пределах для различных ветвей использовались для детального построения спектра.

Одной из наиболее важных последовательностей точек, которую легко получить таким путем, является последовательность частот кривых реальных нормальных волн при $\gamma b = 0$[1]). Эти кривые проходят через пересечения линии $\gamma b = 0$ с предельными ветвями. Частоты, соответствующие этим пересечениям, определяются выражениями

$$\frac{\omega b}{V_S} = 0\,(s),\ \frac{\pi}{2}\,(a),\ \frac{2\pi}{2}\,(s),\ \frac{3\pi}{2}\,(a),\ \ldots, \tag{2.39}$$

$$\frac{\omega b}{V_S} = 0\,(a),\ \frac{k\pi}{2}\,(s),\ \frac{2k\pi}{2}\,(a),\ \frac{3k\pi}{2}\,(s),\ \ldots, \tag{2.40}$$

где s и a обозначают симметричное и антисимметричное движение относительно средней плоскости пластинки, а $k = V_D/V_S$. Следовательно, вторая последовательность эквивалентна следующей:

$$\frac{\omega b}{V_D} = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ \ldots. \tag{2.41}$$

[1]) Эти частоты можно получить также прямым решением дисперсионных уравнений (2.32) и (2.33) после подстановки в них $\gamma b = 0$.

Это показывает, почему нормальные волны в пластинке можно разделить на $L(p)$ и $F(q)$. Таким образом, при отсутствии связи между волнами в изотропном материале пластинки мы имеем для продольных и изгибных нормальных волн одну последовательность, соответствующую сдвиговым волнам, и другую — соответствующую волнам сжатия. Эти две последовательности частот, соответствующих волнам SV и D при $\gamma b = 0$, можно записать в виде

$$\frac{\omega b}{V_S} = p^{\mathrm{SV}} \frac{\pi}{2}, \tag{2.42}$$

$$\frac{\omega b}{V_S} = k p^{\mathrm{D}} \frac{\pi}{2}, \tag{2.43}$$

где

$$p^{\mathrm{SV}} = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots \tag{2.44}$$

и

$$p^{\mathrm{D}} = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots \tag{2.45}$$

соответствуют симметричным смещениям, а

$$p^{\mathrm{SV}} = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots \tag{2.46}$$

и

$$p^{\mathrm{D}} = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots \tag{2.47}$$

соответствуют антисимметричным смещениям [1]).

Как упоминалось выше, свойства симметрии невзаимодействующих волн (предельных ветвей) определяют, проходит или не проходит ветвь рассматриваемой нормальной волны через заданное пересечение предельных ветвей.

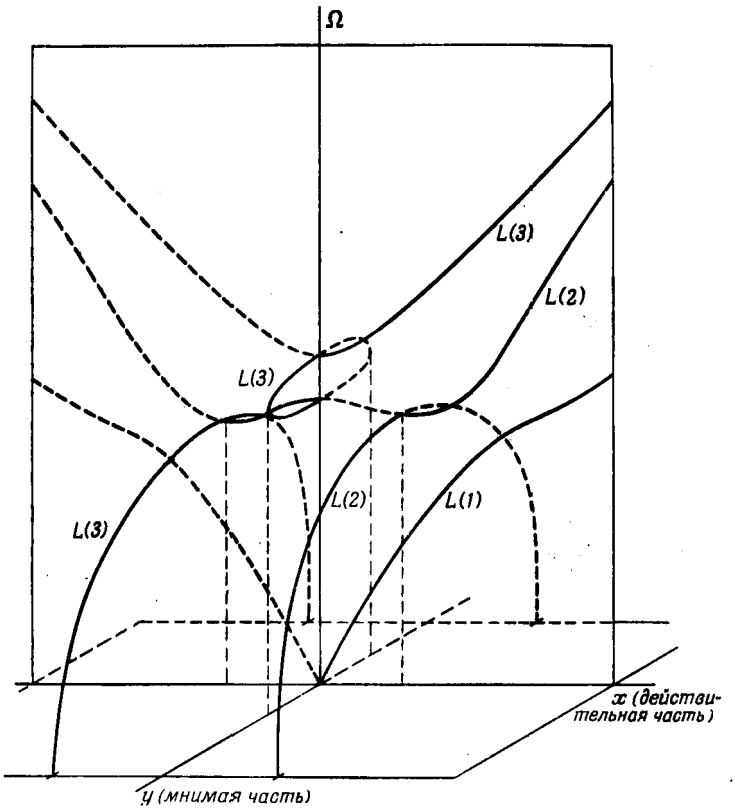
В соответствии с номенклатурой волн SH наинизшие нормальные волны следовало бы назвать волнами нулевого порядка; но исторически эти нормальные волны назвали нормальными волнами первого порядка, и сейчас нет необходимости изменять эти названия. Нормальные волны, соответствующие частотам с индексом s, являются продольными, причем волна наинизшего порядка обозначается $L(1)$, а нормальные волны, соответствующие индексу a, являются изгибными, причем волна наинизшего порядка обозначается $F(1)$. Чередование типов нормальных волн вдоль линии $\gamma b = 0$, как, например, показано на фиг. 17, можно объяснить на основе двух последовательностей (2.39) и (2.40), если задать значение σ, вычислить k и затем строить смешанную последовательность в порядке возрастания ее членов, сохраняя тип

[1]) Здесь интересно отметить, что свойства симметрии и часто́ты, соответствующие нулевым значениям постоянной распространения, для невзаимодействующих волн SV такие же, как для волн SH, описанных в предыдущих разделах.

симметрии каждого члена. Помимо свойств симметрии, первая последовательность представляет сдвиговые движения по толщине, а вторая — растяжения и сжатия по толщине при $\gamma b = 0$. В результате распространяющиеся продольные и изгибные нормальные волны сводятся к сдвиговым колебаниям или колебаниям сжатия по толщине при $\gamma b = 0$. По мере того как γb возрастает, характер движения в данной нормальной волне изменяется, причем начинает преобладать сдвиг или сжатие, в зависимости от того, как локализована кривая относительно предельных ветвей или пересечений. Последние определяются тем или другим типом волнового движения. Зависимость предельных ветвей от σ приводит к некоторым особым эффектам в спектре нормальных волн. Например, Миндлин и Медик [18] объяснили поведение нормальных волн $L(2)$ и $L(3)$ вблизи $\gamma b = 0$ для нескольких значений σ. При $\sigma = {}^1/_3$ мнимая часть ветви нормальной волны $L(3)$ исчезает. Нужно также отметить, что в этом случае наклоны действительных частей ветвей волны $L(3)$ остаются при $\gamma b = 0$ конечными, в то время как при всех других значениях σ эти ветви пересекают ось с нулевым наклоном.

Очень важным вопросом, относящимся к фиг. 17, является вопрос о полноте совокупности представленных решений. Доказательство полноты данного ряда решений дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями обычно базируется на возможности представления общего решения через данный ряд решений. Задача представления произвольного распределения напряжений на торцевой поверхности пластинки математически аналогична задаче представления произвольного распределения напряжений на торцевой поверхности цилиндра. И именно в связи с этой задачей для цилиндра Кертис [19] впервые высказал мысль, что ветви, относящиеся к действительным корням семейства продольных нормальных волн в цилиндре, аналогичные ветвям продольных нормальных волн в пластинке, не образуют полную систему решений. В частности, он заметил, что имеется только конечное число действительных и мнимых значений γb, соответствующих заданному значению $\omega b/V_S$, и это не позволяет представить произвольные граничные условия только через указанные решения. Это свидетельствует о существовании нормальных волн с комплексными значениями γb. Если раньше полагали, что число нормальных волн с комплексными значениями γb конечно, то теперь считают, что их число неограниченно, так что в принципе возможно удовлетворение произвольным граничным условиям с помощью этих решений. Математическое сходство дисперсионных уравнений для стержня круглого сечения и для пластинки позволяет предполагать, что и в случае пластинки для удовлетворения произвольным граничным условиям на

концах требуются решения с комплексными значениями γb. Однако, насколько известно авторам, для любого из этих случаев нет строгого доказательства математической полноты решения.



Ф и г. 18. Действительные, мнимые и комплексные части нижних ветвей спектра частот продольных нормальных волн для пластинки с коэффициентом Пуассона $\sigma = 0{,}31$ (по Миндлину [13]).

На этом графике $\Omega = 2\omega b/\pi V_S$, а x и y соответствуют $\mathrm{Re}\,(\gamma b)$ и $\mathrm{Im}\,(\gamma b)$.

Миндлин и Медик [18] приводят спектры нормальных волн в трех измерениях, соответствующих действительным, мнимым и комплексным значениям γb при $\sigma = {}^1/_4, {}^1/_3, {}^2/_5$. Комплексные корни, предсказанные из уравнения Релея — Лэмба и показанные на этих спектрах, были вычислены Оноэ. Краткое упоминание об их существовании было сделано Миндлиным в более ранней работе [12]. Примерно в это же время эти комплексные корни довольно детально рассмотрел Фолк [15]. На фиг. 18, заимство-

ванной у Миндлина [13], показаны низкочастотные ветви спектра нормальных волн, включая действительные, мнимые и комплексные значения γb при $\sigma = 0{,}31$. Ветви нормальных волн на фиг. 18 пронумерованы так, что знак $d\omega/d\gamma$ в каждой ветви остается одинаковым при $-\infty < \omega < \infty$. Фолк показал, что такие ветви — это путь интегрирования для одной из нормальных волн, требуемый в фурье-анализе распространения импульса. Этот вопрос рассматривается ниже в этой главе, в параграфе, посвященном ограниченным пластинкам.

Тамм и Вейс [16, 17] рассмотрели вывод дисперсионного уравнения и построили действительную, мнимую и комплексную фазовые скорости ω/γ для многих продольных и изгибных нормальных волн. Кроме того, эти авторы построили распределение смещений, плотностей потока энергии и компонент напряжения для разных нормальных волн и частот при $\sigma = 0{,}3$ (см. фиг. 6 в работе [16]).

§ 3. НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ТВЕРДЫХ ЦИЛИНДРАХ

1. Интегрирование уравнений упругого движения с использованием потенциальных функций и вывод основного дисперсионного уравнения

В качестве отправной точки при рассмотрении упругих нормальных волн в твердом цилиндре мы используем интегрирование уравнений упругого движения при помощи потенциальных функций, подобно тому, как это сделано для пластинок. Будем использовать обычную цилиндрическую систему координат с радиальной r, угловой θ и осевой z координатами. Вектор смещения $\mathbf{u}$ можно представить опять скалярной и векторной потенциальными функциями, как показано в (2.2) — (2.4), но, конечно, уравнения для компонент должны быть теперь записаны в соответствующей форме для цилиндрических координат. Решения уравнений для компонент мы будем искать в форме, соответствующей волновым движениям, распространяющимся в положительном направлении оси z. Предположим, что решения имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi &= f(r)\cos n\theta e^{i(\gamma z-\omega t)}, \\ \psi_r &= h_r(r)\sin n\theta e^{i(\gamma z-\omega t)} \\ \psi_\theta &= h_\theta(r)\cos n\theta\, e^{i(\gamma z-\omega t)}, \\ \psi_z &= h_z(r)\sin n\theta\, e^{i(\gamma z-\omega t)}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Функции синус и косинус можно взаимно поменять местами; указанный здесь выбор этих функций обеспечивает исчезновение

тригонометрических множителей в дифференциальных уравнениях, определяющих φ, ψ_r, ψ_θ, ψ_z.

Дифференциальное уравнение для определения $f(r)$ принимает вид

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{n^2}{r^2}f-\gamma^2 f+\frac{\omega^2}{V_D^2}f=0. \tag{2.49}$$

Используя определение α (2.10), можно переписать это уравнение в следующем виде:

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+\left(\alpha^2-\frac{n^2}{r^2}\right)=0. \tag{2.50}$$

Соответствующим решением для нашей задачи является

$$f(r)=AJ_n(\alpha r). \tag{2.51}$$

Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением только сплошного цилиндра, необходимо сохранить лишь функции Бесселя первого рода [1]). Функции Бесселя второго рода обращаются в бесконечность при $r=0$. Анализ для полого цилиндра производится таким же образом, но необходимо сохранить оба решения, чтобы удовлетворить граничным условиям как на внутренней, так и на внешней поверхностях.

Дифференциальное уравнение и решение для функции $h_z(r)$ имеют такой же вид:

$$\frac{d^2h_z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dh_z}{dr}+\left(\beta^2-\frac{n^2}{r^2}\right)h_z=0 \tag{2.52}$$

и

$$h_z(r)=B_3J_n(\beta r), \tag{2.53}$$

где β определяется уравнением (2.11).

Два остальных дифференциальных уравнения для h_r и h_θ связаны друг с другом:

$$\frac{d^2h_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dh_r}{dr}+\frac{1}{r^2}(-n^2h_r+2nh_\theta-h_r)-\gamma^2h_r+\frac{\omega^2}{V_S^2}h_r=0, \tag{2.54}$$

$$\frac{d^2h_\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dh_\theta}{dr}+\frac{1}{r^2}(-n^2h_\theta+2nh_r-h_\theta)-\gamma^2h_\theta+\frac{\omega^2}{V_S^2}h_\theta=0. \tag{2.55}$$

---

[1]) Приводимый здесь вывод общего дисперсионного уравнения для сплошного твердого цилиндра до этого места следовал выводу дисперсионного уравнения для полого цилиндра, данному Гэзисом [20]. Детальное рассмотрение распространения нормальных волн в полом цилиндре читатель может найти в работах Гэзиса.

Эту систему уравнений можно решить следующим путем. Вычитая уравнение (2.55) из уравнения (2.54), получаем

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\beta^2-\frac{(n+1)^2}{r^2}\right](h_r-h_\theta)=0. \tag{2.56}$$

Решение уравнения (2.56) можно записать в виде

$$h_r-h_\theta=2B_2J_{n+1}(\beta r). \tag{2.57}$$

Складывая уравнения (2.54) и (2.55), получаем

$$\left[\frac{d}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\beta^2-\frac{(n-1)^2}{r^2}\right](h_r+h_\theta)=0. \tag{2.58}$$

Решение уравнения (2.58) можно записать в виде

$$h_r+h_\theta=2B_1J_{n-1}(\beta r). \tag{2.59}$$

После этого решения h_r и h_θ принимают вид

$$h_r=B_1J_{n-1}(\beta r)+B_2J_{n+1}(\beta r), \tag{2.60}$$

$$h_\theta=B_1J_{n-1}(\beta r)-B_2J_{n+1}(\beta r). \tag{2.61}$$

Произвольный вектор смещения определяется тремя константами. Использование потенциальных функций приводит к четырем константам: A, B_1, B_2 и B_3. Любую из констант B_i можно без ограничения общности положить равной нулю; мы положим $B_1=0$. Выполнив это, получим

$$h_r=-h_\theta. \tag{2.62}$$

Следовательно, поле смещений описывается выражениями

$$\begin{aligned}
u_r&=\left[f'+\frac{n}{r}h_z+\gamma h_r\right]\cos n\theta e^{i(\gamma z-\omega t)},\\
u_\theta&=\left[-\frac{n}{r}f+\gamma h_r-h_z'\right]\sin n\theta e^{i(\gamma z-\omega t)},\\
u_z&=\left[-\gamma f-h_r'-(n+1)\frac{h_r}{r}\right]\cos n\theta e^{i(\gamma z-\omega t)}.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

В цилиндрических координатах деформации связаны с производными от компонент смещений следующим образом:

$$\begin{aligned}
S_{rr}&=\frac{\partial u_r}{\partial r},\\
S_{r\theta}&=\frac{1}{2}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right],\\
S_{rz}&=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right].
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Соотношения между напряжениями и деформациями имеют вид

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \lambda\Delta + 2\mu S_{rr}, \\ T_{r\theta} &= 2\mu S_{r\theta}, \\ T_{rz} &= 2\mu S_{rz}, \end{aligned} \tag{2.65}$$

где $\Delta = \nabla^2\varphi = -(\alpha^2+\gamma^2) f \cos n\theta \exp[i(\gamma z - \omega t)]$. Граничные условия на свободной поверхности, параллельной направлению распространения волны, определяются равенствами

$$T_{rr} = T_{rz} = T_{r\theta} = 0 \text{ при } r = a. \tag{2.66}$$

Выражения для компонент напряжения через потенциальные функции имеют вид

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \left\{-\lambda(\alpha^2+\gamma^2) f + 2\mu\left[f'' + \frac{n}{r}\left(h_z' - \frac{h_z}{r}\right) + \gamma h_r'\right]\right\}\cos n\theta, \\ T_{r\theta} &= \mu\left\{-\frac{2n}{r}\left(f' - \frac{f}{r}\right) - (2h_z'' - \beta^2 h_z) - \gamma\left(\frac{n+1}{r} h_r - h_r'\right)\right\}\sin n\theta, \\ T_{rz} &= \mu\left\{-2\gamma f' - \frac{n}{r}\left[h_r' + \left(\frac{n+1}{r} - \beta^2 + \gamma^2\right) h_r\right] - \frac{n\gamma}{r} h_z\right\}\cos n\theta. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Если подставить потенциальные функции в (2.66) и три полученные уравнения приравнять нулю при $r = a$, то получим три уравнения относительно A, B_2 и B_3 (вспомним, что B_1 мы положили равным нулю). Коэффициенты этих трех уравнений образуют детерминант, который, будучи приравнен нулю, дает основное дисперсионное уравнение для упругих нормальных волн в цилиндре. Это дисперсионное уравнение можно записать через определенные выше величины в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} \left\{\frac{\lambda(\alpha^2+\gamma^2)(\alpha a)^2}{2\mu\alpha^2} + (\alpha a)^2 - n^2\right\} J_n(\alpha a) + (\alpha a) J_n'(\alpha a) & \{n^2 - (\beta a)^2\} J_n(\beta a) - (\beta a) J_n'(\beta a) \\ n\{(\alpha a) J_n'(\alpha a) - J_n(\alpha a)\} & -n\{(\beta a) J_n'(\beta a) - J_n(\beta a)\} \\ -(\alpha a) J_n'(\alpha a) & -\frac{\beta^2-\gamma^2}{2\gamma^2}(\beta a) J_n'(\beta a) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2n\{(\beta a) J_n'(\beta a) - J_n(\beta a)\} \\ -\{2n^2 - (\beta a)^2\} J_n(\beta a) + 2(\beta a) J_n'(\beta a) \\ n J_n(\beta a) \end{vmatrix} = 0. \tag{2.68}$$

Уравнение (2.68) справедливо при всех целочисленных $n \geqslant 0$. В соответствии с принятой в этой главе терминологией каждое значение $n \geqslant 0$ определяет семейство нормальных волн. Напри-

мер, при $n = 1$ мы имеем семейство обычных изгибных нормальных волн. Это семейство нормальных волн сходно с семейством изгибных нормальных волн в пластинке. Семейство нормальных волн с $n \geqslant 2$ мы будем называть семейством изгибных нормальных волн кругового порядка n. В пластинке аналогичных семейств нормальных волн нет. При $n = 0$ общее дисперсионное уравнение сводится к произведению двух множителей — элемента второй строки третьего столбца на его минор. Первый из этих множителей дает дисперсионное уравнение для семейства крутильных нормальных волн. Второй множитель дает дисперсионное уравнение Похгаммера для семейства продольных нормальных волн в твердом цилиндре. В следующих пунктах данного параграфа описаны важные физические характеристики этих разных семейств нормальных волн.

2. *Семейство крутильных нормальных волн*

Одной из характерных особенностей волнового движения в крутильных нормальных волнах является наличие только одной компоненты смещения u_θ. Выражение для смещения можно получить из единственной потенциальной функции ψ_z, которая имеет вид

$$\psi_z = B_3 J_0(\beta r)\, e^{i(\gamma z - \omega t)}. \tag{2.69}$$

Эта потенциальная функция дает следующее выражение для смещения:

$$u_\theta = B J_1(\beta r)\, e^{i(\gamma z - \omega t)}, \tag{2.70}$$

где $(-B_3\beta)$ заменено на B, представляющую собой произвольную постоянную, определяющую амплитуду движения. Дисперсионное уравнение, получающееся из (2.68), имеет вид [1])

$$(\beta a) J_0(\beta a) = 2J_1(\beta a). \tag{2.71}$$

Это уравнение определяет бесконечный ряд корней, задаваемых соотношением $\beta_p a = R_p$. Первые три значения R_p равны $R_1 = 5{,}136$, $R_2 = 8{,}417$ и $R_3 = 11{,}62$. Как и выше, индекс p является целочисленным и используется для обозначения порядка нормальной волны.

---

[1]) Если ввести функцию $I_n(x) = xJ_{n-1}(x)/J_n(x)$, то уравнение (2.71) примет более простой вид $I_n(\beta a) = 2$. Подобным же образом многие уравнения этого параграфа можно упростить при использовании функции $I_n(x)$. Значения $I_n(x)$ для действительных и мнимых аргументов имеются в таблице, опубликованной недавно Оноэ [21].

Особый случай $\beta a = 0$ также является решением уравнения (2.71). В этом случае

$$\psi_z = B_3 r^2 e^{i(\gamma z - \omega t)}, \tag{2.72}$$

а компонента смещения

$$u_\theta = Bre^{i(\gamma z - \omega t)}, \tag{2.73}$$

где $(2B_3)$ заменена на B. Это решение представляет крутильную нормальную волну наинизшего порядка, для которой фазовая скорость равна V_S. Как фазовая, так и групповая скорости не зависят от частоты, и, следовательно, крутильная нормальная волна наинизшего порядка, подобно нормальной волне SH наинизшего порядка в пластинке, не обладает дисперсией.

Все распространяющиеся крутильные нормальные волны более высоких порядков обладают дисперсией, причем постоянная распространения и частота связаны соотношением

$$(\beta_p a)^2 = \left(\frac{\omega a}{V_S}\right)^2 - (\gamma_p a)^2. \tag{2.74}$$

Это соотношение того же вида, что и уравнение (2.27) для нормальных волн SH. Спектр частот крутильных нормальных волн очень похож на спектр нормальных волн SH, показанный на фиг. 16; главное различие состоит в том, что теперь частоты, соответствующие нулевым значениям постоянной распространения, не являются целыми кратными числами.

3. Семейство продольных нормальных волн

Семейство продольных нормальных волн в твердом цилиндре характеризуется двумя компонентами смещения u_r и u_z, каждая из которых обладает симметрией относительно оси z (таким образом, они не зависят от θ). Продольные волновые движения в общем случае являются смешанными волновыми движениями в том смысле, что для их описания необходимы как потенциальная функция сдвига, так и потенциальная функция сжатия. Требуемыми потенциальными функциями являются функции φ и ψ_θ в (2.48). Использование этих потенциальных функций в уравнениях движения и граничных условиях дает в результате дисперсионное уравнение Похгаммера для продольных нормальных волн. Как отмечено выше, это уравнение содержится в общем дисперсионном уравнении (2.68) при $n = 0$ в качестве минора элемента второй строки третьего столбца. Это дисперсионное уравнение

имеет вид

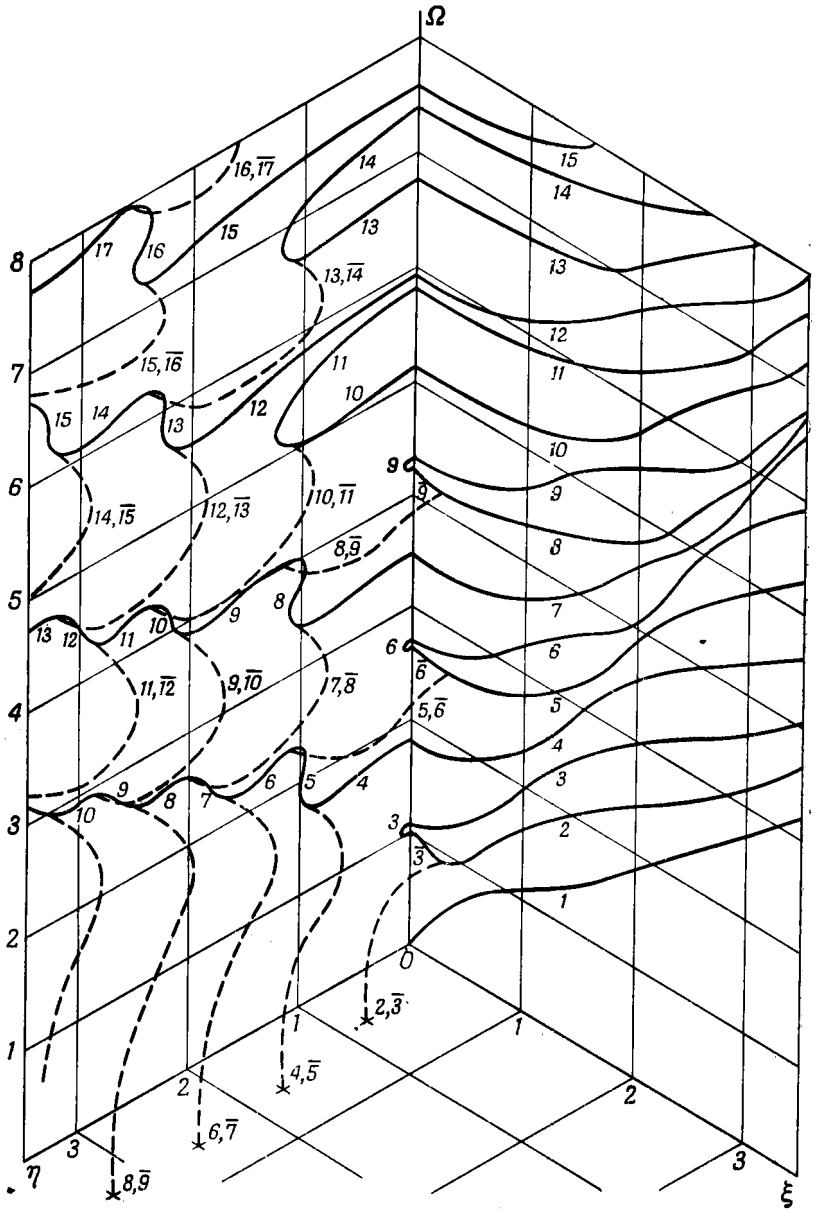
$$\frac{2a}{a}(\beta^2+\gamma^2)J_1(\alpha a)J_1(\beta a)-(\beta^2-\gamma^2)^2J_0(\alpha a)J_1(\beta a)- \\ -4\gamma^2\alpha\beta J_1(\alpha a)J_0(\beta a)=0. \quad (2.75)$$

Как и уравнение Релея — Лэмба для пластинки, это уравнение имеет три переменные. Допустимые значения каждой из переменных определяются значениями двух других. Этими тремя переменными в безразмерной форме, которая часто используется при анализе, являются коэффициент Пуассона σ, угловая частота $\omega a/V_S$ и постоянная распространения γa.

Дисперсионное уравнение для продольных нормальных волн впервые было опубликовано Похгаммером [22] в 1876 г., но вследствие его сложности детальные расчеты фазовых и групповых скоростей не представлялись вплоть до 1941 г., когда Бэнкрофт [23] опубликовал результаты по изменению фазовой скорости как функции безразмерной постоянной распространения с коэффициентом Пуассона в качестве параметра. Начиная с 1941 г. многие исследователи внесли вклад в изучение детальных свойств спектра частот продольных нормальных волн. Особенно ценные работы опубликованы Кертисом [19, 24—28], Холденом [9], Миндлиным [29—31] и Оноэ [10]. В настоящее время общая картина и поведение спектра частот продольных нормальных волн, по-видимому, исследованы достаточно подробно, хотя некоторые детали, касающиеся интерпретации и применений, еще остаются нерешенными задачами. Подробная схема спектра частот продольных нормальных волн в цилиндре при $\sigma = 0{,}31$, заимствованная из работы Оноэ и др. [31], приведена на фиг. 19.

Поведение различных ветвей, соответствующих продольным нормальным волнам в цилиндре, очень похоже на поведение ветвей, соответствующих продольным нормальным волнам в пластинке, которое рассмотрено Холденом [9]. Кривые, показанные штриховыми линиями на фиг. 19, представляют ветви комплексных корней. Нормальные волны, соответствующие различным действительным, мнимым и комплексным ветвям, обозначены номерами на кривых. Черта над номером означает, что данной нормальной волне соответствует отражение показанной ветви в плоскости $\xi = 0$. Принятая схема обозначения позволяет продолжить непрерывно каждую ветвь нормальной волны до нулевой частоты. Эта схема обозначения ветвей аналогична схеме, рассмотренной выше для пластинки. Более подробное рассмотрение свойств спектра продольных нормальных волн дано в статье Оноэ и др. [31].

Хотя свойства продольных нормальных волн в цилиндре и в пластинке очень схожи, между ними имеются и некоторые



Ф и г. 19. Спектр частот продольных нормальных волн в цилиндре с $\sigma = 0{,}31$ (по Оноэ и др. [31]).

Показаны действительная, мнимая и комплексная ветви. $\Omega = \omega/\omega_s$, $\omega_s = (\delta/a)V_S$, $\xi = \mathrm{Re}\,(\gamma a)$, $\eta = \mathrm{Im}\,(\gamma a)$, а δ — наименьший отличный от нуля корень уравнения $J_1(\delta) = 0$.

различия, о которых следует упомянуть. Во-первых, предельные значения при низкой частоте фазовой и групповой скоростей первой нормальной волны в цилиндре называются стержневыми скоростями и определяются выражением

$$V_B = \left[\frac{Y}{\rho}\right]^{1/2} = V_S\,[2\,(1+\sigma)]^{1/2}, \qquad (2.76)$$

где Y — модуль Юнга. Во-вторых, для пластинки значение коэффициента Пуассона, при котором частота самого низкого сдвигового колебания по толщине ($\gamma b = 0$) совпадает с частотой самого низкого продольного колебания по толщине, равно $^1/_3$; в то же время для цилиндра частоты самых низких сдвигового и радиально-продольного колебаний совпадают при $\sigma = 0{,}2833$. В-третьих, фазовая скорость первой продольной нормальной волны в пластинке при подходе по высокочастотному пределу приближается к скорости поверхностной волны Релея сверху, в то время как для стержня это приближение происходит снизу.

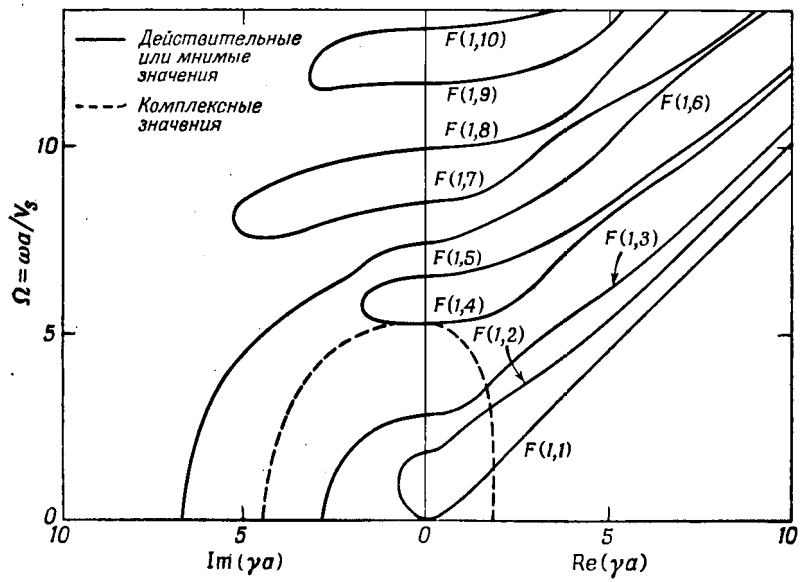
Важно отметить, что в общем случае для продольных нормальных волн в компоненты смещения u_r и u_0 вносят вклады как потенциальные функции сжатия, так и потенциальные функции вращения. как это следует из выражений (2.63). Отношение амплитуд этих потенциальных функций является функцией частоты, следовательно, распределение деформаций сжатия и кручения в данной компоненте смещения для заданной нормальной волны не постоянно, а меняется с частотой. Такое поведение противоположно поведению крутильных нормальных волн, у которых даже при наличии у нормальной волны дисперсии распределение деформаций для u_θ не зависит от частоты.

4. Семейство изгибных нормальных волн с $n = 1$

Если n положить равным единице в общем дисперсионном уравнении (2.68), то получится дисперсионное уравнение для изгибной нормальной волны самого низкого порядка. Первые детальные расчеты для нормальной волны самого низкого порядка из семейства изгибных волн были выполнены Хадсоном [32]. Для этого семейства, так же как для семейств более высоких порядков, движение, вообще говоря, содержит все три компоненты смещения u_r u_0 и u_z. В этом одно из отличий изгибных нормальных волн в цилиндре от изгибных нормальных волн в пластинке.

Хотя дисперсионное уравнение для изгибных нормальных волн при $n = 1$ значительно сложнее аналогичного уравнения для пластинки, поведение ветвей действительных корней очень схоже для этих двух случаев. Типичный спектр частот для семейства изгибных нормальных волн самого низкого порядка показан

на фиг. 20. Так же как для пластинки, ветвь, соответствующая нормальной волне наинизшего порядка, во всем диапазоне частот действительна и простирается вниз до нулевой частоты. Низкочастотный предел этой ветви как для фазовой, так и для групповой скоростей равен нулю; высокочастотный предел для обеих скоростей равен скорости поверхностной волны Релея. Спектр действительных корней для ветвей более высоких порядков также аналогичен спектру для тех нормальных волн в пластинке, которые



Ф и г. 20. Спектр частот семейства изгибных нормальных волн с $n = 1$ для цилиндра при $\sigma = 0{,}3317$ (по Земанеку [34]).

в качестве своего высокочастотного предела для фазовой и групповой скоростей имеют значение скорости сдвиговых волн. Однако одним из следствий цилиндрической геометрии является то, что частоты, соответствующие нулевому значению постоянной распространения, не образуют теперь гармонический ряд.

Пао и Миндлин [30] распространили расчеты по определению расположения ветвей спектра частот, даваемого дисперсионным уравнением, на дисперсионное уравнение для изгибных нормальных волн с $n = 1$. Одним из интересных различий между пластинкой и цилиндром, раскрытым в работе Пао [33], является то, что для цилиндра некоторые из ветвей в мнимой плоскости идут к нулевому значению частоты. Таким образом, не все нормальные волны более высоких порядков требуют использования комплекс-

ных ветвей для получения непрерывных кривых в пространстве $\omega - \gamma$. Эта особенность ясно видна из подробных кривых, рассчитанных Земанеком [34] и показанных на фиг. 20. Комплексные ветви здесь также имеются, и наинизшая из них изображена на фигуре.

Численные результаты для основной нормальной волны и волн более высоких порядков семейства изгибных волн с $n = 1$ можно найти в работах Абрамсона [35], Кертиса [27], де Вольта [28, 36] и Земанека [34]. Экспериментальные исследования этих волн описаны Кертисом [27], де Вольтом [28, 36], Меем [37], Мейтцлером [38], Мак-Скиминым [39] и Земанеком [34].

5. Семейства изгибных нормальных волн более высокого кругового порядка

Общее дисперсионное уравнение в форме, содержащей произвольное значение n, приведено в статье, опубликованной Хадсоном [32] в 1943 г. По-видимому, работ, посвященных нормальным волнам с $n \geqslant 2$, не публиковалось до 1957 г., когда Кинч [40] опубликовал статью, в которой была описана зависимость фазовой скорости от частоты для наинизшей нормальной волны с $n = 2$ [1]). Кинч отметил в этой статье, что кривая фазовой скорости для наинизшей нормальной волны с $n = 2$ пересекает кривую фазовой скорости для наинизшей продольной нормальной волны, и предположил, что эти две нормальные волны должны взаимодействовать в области частот, где их фазовые скорости равны. (Это предположение было подтверждено несколькими годами позднее демонстрацией связи между этими двумя нормальными волнами в статье Мейтцлера. Этот вопрос рассматривается также в § 5.) Кертис и де Вольт [26, 28] в связи с задачей о распространении деформации в стержне с произвольной нагрузкой на конце независимо пришли к выводу, что нормальные волны с $n \geqslant 2$ должны существовать, и опубликовали расчеты для наинизшей нормальной волны с $n = 3$. Вычисления, раскрывающие поведение ветвей некоторых нормальных волн с $n \geqslant 2$, были проведены Меем [37] и Земанеком [34]. Типичный спектр частот семейства с $n = 2$ показан на фиг. 21.

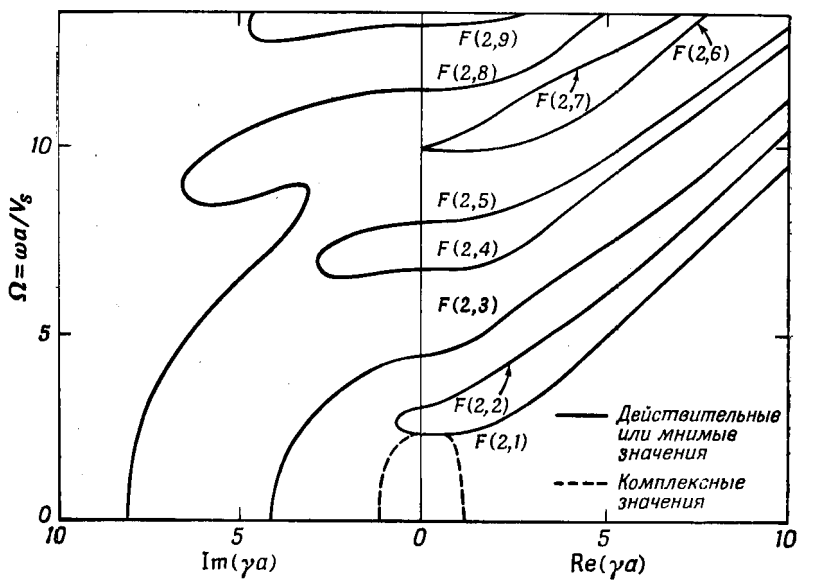
Прежде чем продолжать дальнейшее рассмотрение изгибных нормальных волн более высокого кругового порядка, введем обозначения для отдельных нормальных волн. Семейство изгибных нормальных волн заключает в себе двойную бесконечность

---

[1]) Кинч предложил называть нормальные волны с $n > 2$ «винтовыми нормальными волнами», но эта терминология авторам кажется не подходящей, и она не используется в этой главе.

нормальных волн в том смысле, что при каждом значении параметра n существует бесконечный дискретный ряд нормальных волн, различающихся значениями постоянной распространения q. Так, на фиг. 21 показаны действительные и мнимые ветви нормальных волн $F(2,q)$. Кроме того, показана также первая ветвь комплексных корней этого семейства.

Характеристики распространения семейства нормальных волн $F(2,q)$, показанного на фиг. 21, типичны вообще для семейств



Ф и г. 21. Спектр частот семейства изгибных нормальных волн с $n = 2$ для цилиндра при $\sigma = 0{,}3317$ (по Земанеку [34]).

нормальных волн высокого кругового порядка. Имеется наинизшая нормальная волна с ветвью действительных корней, которая не идет к нулю. Хотя на фиг. 21 и недостаточно деталей для того, чтобы это установить, отметим, что наинизшая ветвь имеет минимум, смещенный относительно оси нулевых значений постоянной распространения, и небольшую область с отрицательным наклоном, которая, согласно способу обозначения ветвей, описанному выше, соответствует нормальной волне $F(2,2)$. Наинизшая частота для нулевых значений постоянной распространения определяется стоячей волной в радиальном направлении, имеющей компоненты смещения u_r и u_θ. По мере возрастания параметра n эта наинизшая частота также возрастает. Как и для семейства нормальных волн $F(1,q)$, можно определить нормальные волны непрерывно

вплоть до нулевого значения частоты путем объединения действительной, мнимой и комплексной ветвей корней в одних случаях и действительной и мнимой — в других.

Наинизшая ветвь действительных корней семейства $F(2,q)$ имеет фазовую скорость, которая на высоких частотах стремится к фазовой скорости релеевской поверхностной волны. Нормальные волны более высокого порядка семейства $F(2,q)$ имеют в качестве высокочастотного предела фазовой скорости значение скорости сдвиговой волны. Эти две особенности характеристик распространения относятся ко всем семействам нормальных волн более высокого кругового порядка. Кроме того, Грин [41] дал вывод приближенного дисперсионного уравнения, включающего приведенную переменную вида $\gamma a/n$; это уравнение позволяет представить дисперсионные кривые всех основных нормальных волн при $n \geqslant 2$ как функцию коэффициента Пуассона. Таким образом, согласно последним данным, свойства семейств нормальных волн с $n > 2$ аналогичны свойствам семейства нормальных волн с $n = 2$.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ К ВОЛНАМ В ПЛАСТИНКАХ И ЦИЛИНДРАХ

1. Вступительные замечания об ограниченных пластинках и цилиндрах

В этом параграфе мы рассматриваем вопросы, которые возникают при попытках удовлетворить граничным условиям на различных поверхностях простых ограниченных твердых тел, подобных пластинкам и цилиндрам. В описываемых аналитических методах некоторые из граничных условий удовлетворяются путем использования точных решений для бесконечной пластинки или бесконечного цилиндра. Следовательно, в рассматриваемых задачах, как правило, напряжения на поверхностях, перпендикулярных x и r, равны нулю, и, таким образом, различные задачи можно классифицировать в соответствии с теми добавочными граничными условиями, которые налагаются. Первая задача — удовлетворение граничных условий отсутствия напряжений на плоскостях пластинки, перпендикулярных оси y. Распространение вдоль края полубесконечной пластинки со свободными поверхностями мы не рассматриваем, а распространение в бесконечно длинном стержне прямоугольного поперечного сечения рассматриваем подробно. Такой стержень мы называем бесконечной полосой. Вторая задача — удовлетворение условия отсутствия напряжений или условия единичного импульса напряжения на плоскости пластинки или цилиндра, перпендикулярной оси z. Задачу резонаторного типа об удовлетворении условиям отсутствия напряже-

ний на двух плоскостях, перпендикулярных оси z, в пластинке или цилиндре мы не рассматриваем детально в этой главе.

В этом параграфе основное внимание уделяется использованию точных решений для бесконечной пластинки или бесконечного цилиндра. Рассмотрение перечисленных выше задач с использованием других приближенных методов выходит за рамки настоящей главы.

На протяжении всего параграфа выявляются два пути использования этих точных решений. Первый из них состоит в добавлении напряжений, связанных с точными решениями, чтобы удовлетворить граничным условиям для напряжений на дополнительных поверхностях; второй — в использовании точных решений при тех размерах и частотах, когда необходимые добавочные граничные условия удовлетворяются автоматически либо точно, либо приближенно. Однако нужно упомянуть еще об одном эффективном методе решения задач подобного типа, хотя он и не рассматривается ниже. Он состоит в разложении всех смещений при заданной геометрии в соответствующие ряды функций, ортогональных в интервале, соответствующем заданному размеру. Такими рядами функций являются степени x, полиномы Лежандра и полиномы Якоби. Подобный метод использовал Эпштейн [42] для получения резонансных частот толстых круглых пластинок и Миндлин и др. [18, 29, 43, 44] для сведения дифференциальных уравнений и граничных условий в трех измерениях к бесконечным рядам более просто решаемых дифференциальных уравнений и граничных условий в двух измерениях. Эти ряды затем обрываются и иногда для получения желаемого приближения в них вводятся произвольные параметры. Работы, перечисленные в списке литературы, не являются исчерпывающими, но могут служить в качестве практического введения к этим методам получения приближенных решений для полубесконечных цилиндров и пластинок и для резонаторов.

2. *Распространение упругих волн в бесконечно длинном стержне прямоугольного сечения*

Задача удовлетворения граничных условий на двух парах поверхностей характерна для пластинки, поскольку для цилиндра такой задачи, естественно, не существует. Следует ожидать, что число возможных нормальных волн в бесконечно длинном стержне прямоугольного сечения (полосе) больше, чем в пластинке. Поскольку решения для пластинки, рассмотренные в § 1 этой главы, записаны для одного направления распространения и не зависят от y, мы не можем ожидать найти полное решение задачи для полосы в рамках решений для пластинки. Нужно добавить, что

какое-либо общее решение этой задачи авторам не известно. Мы рассмотрим довольно подробно два точных решения этой задачи для некоторых дискретных частот и отношений ширины к толщине и два приближенных решения для непрерывных значений частоты и отношения ширины к толщине.

На фиг. 17 частоты, соответствующие пересечениям линии L с предельными ветвями, связанными со значениями q, являются частотами, при которых компоненты напряжения на плоскостях, перпендикулярных y, так же как и на плоскостях $x = \pm b$, равны нулю. Следовательно, на этих частотах продольные и изгибные нормальные волны удовлетворяют условиям отсутствия напряжений на всех четырех сторонах бесконечно длинного стержня прямоугольного сечения. Эти частоты были открыты Ламе [45] до вывода уравнений Релея — Лэмба, и соответствующие им решения называются нормальными волнами Ламе, хотя приведенное выше обсуждение показывает, что эти нормальные волны содержатся в дисперсионных уравнениях Релея — Лэмба. Частоты этих нормальных волн задаются пересечением линии L, уравнение которой имеет вид $\omega b/V_S = \sqrt{2}\,\gamma b$, с предельными ветвями для соответствующих значений q. Уравнения этих предельных ветвей имеют вид

$$\left(\frac{\omega b}{V_S}\right)^2 = \left(\frac{q\pi}{2}\right)^2 + (\gamma b)^2.$$

Поэтому эти частоты равны

$$\left(\frac{\omega b}{V_S}\right)_L = \sqrt{2}\,q\,\frac{\pi}{2}, \qquad q = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.77}$$

причем каждой продольной и изгибной нормальной волне соответствует одна, и только одна, частота из этого ряда. Важно отметить, что эти частоты зависят только от одного упругого параметра V_S и не зависят от σ. В § 5, п. 2, мы увидим, что на этих частотах движение представляет собой чистую волну SV, и, таким образом, в потенциальной функции отсутствует компонента, связанная с объемной упругостью.

В дополнение к нормальным волнам Ламе Миндлин и Фокс [46] получили совокупность точных решений для бесконечно длинного стержня прямоугольного сечения при особых значениях частот и отношений ширины к толщине. Миндлин и Фокс образовали линейную комбинацию из напряжений, соответствующих одной продольной нормальной волне и двум сдвиговым нормальным волнам SH в пластинке. Эта сумма нормальных волн сохраняет нулевые напряжения на одном ряде плоскостей, поскольку каждый член суммы дает нулевые напряжения на этих плоскостях. Нор-

мальные волны, используемые в сумме, и их амплитуды выбираются так, чтобы напряжения на двух других поверхностях также были равны нулю. Такой выбор ограничивает частоты и отношения ширины к толщине дискретными значениями. Допустимые значения частот, постоянной распространения и отношения ширины к толщине равны

$$\left(\frac{\omega b}{V_S}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (n^2 - m^2)\frac{k^2}{k^2-1}, \tag{2.78}$$

$$(\gamma b)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{s^2 - k^2 r^2}{k^2 - 1}, \tag{2.79}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{q^2 - p^2}{n^2 - m^2}, \tag{2.80}$$

где n, m, q и p — целые числа, или все четные, или все нечетные, причем n больше m и q больше p, а

$$s^2 = n^2 + p^2\left(\frac{b}{a}\right)^2, \tag{2.81}$$

$$r^2 = m^2 + p^2\left(\frac{b}{a}\right)^2, \tag{2.82}$$

$$k = \frac{V_D}{V_S}.$$

Величины r и s могут быть и не целыми, но они связаны соотношением

$$s^2 - r^2 = n^2 - m^2 = (q^2 - p^2)\left(\frac{b}{a}\right)^2. \tag{2.83}$$

Минимальное значение фазовой скорости для этих особых решений равно V_D, и оно реализуется при $r = 0$. При бесконечной фазовой скорости, т. е. $\gamma b = 0$, возможны две группы нормальных волн. Одна группа из восьми семейств простых осевых сдвиговых волн не зависит от σ. Вторая группа состоит только из решений для особых значений σ, определяемых из уравнения $k = s/r$.

Как решение Ламе, так и решение Миндлина и Фокса являются точными решениями, но они действительны только при некоторых особых частотах. В противоположность этому Морз [47] попытался развить приближенную теорию поведения продольной нормальной волны в бесконечно длинном стержне прямоугольного сечения со сторонами $x = \pm a$ и $y = \pm d$. Морз предположил существование двух различных совокупностей компонент смещения, зависящих от отношения a к d. Для первой совокупности,

соответствующей $a > d$, он предположил следующий вид компонент смещения:

$$u_x = \{A \sin k_1 x + B \sin k_2 x\} \cos hy e^{j(\gamma z - \omega t)},$$

$$u_y = \left\{\frac{h}{k_1} A \cos k_1 x + C \cos k_2 x\right\} \sin hy\, e^{j(\gamma z - \omega t)}, \qquad (2.84)$$

$$u_z = j\left\{-\frac{\gamma}{k_1} A \cos k_1 x + \frac{1}{\gamma}(k_2 B + hC) \cos k_2 x\right\} \cos hy e^{j(\gamma z - \omega t)}.$$

Эти смещения удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.1) и граничным условиям отсутствия напряжений на двух поверхностях, перпендикулярных оси x, т. е.

$$T_{xx} = T_{yx} = T_{zx} = 0 \qquad \text{при } x = \pm a, \qquad (2.85)$$

если соблюдаются следующие условия:

$$\gamma^2 + k_1^2 + h^2 = \frac{\omega^2}{V_D^2}, \qquad (2.86)$$

$$\gamma^2 + k_2^2 + h^2 = \frac{\omega^2}{V_S^2}, \qquad (2.87)$$

$$\frac{\operatorname{tg} k_2 a}{\operatorname{tg} k_1 a} = -\frac{4k_1 k_2 (h^2 + \gamma^2)}{(h^2 + \gamma^2 - k_2^2)^2} \qquad (2.88)$$

и $k_2 \neq 0$. Если h равно нулю, то эти условия переходят в соответствующие условия для бесконечной пластинки, т. е. уравнение (2.86) переходит в уравнение (2.10), уравнение (2.87) — в (2.11), а (2.88) — в (2.32). Кроме того, значение h выбирается так, что T_{yy} равно нулю при $y = \pm d$. В результате

$$hd = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (2.89)$$

Мы пренебрегаем напряжениями T_{xy} и T_{zy}, поэтому законность данного приближения определяется величинами этих компонент напряжения, которые уменьшаются при возрастании отношения d/a.

Для $a < d$ Морз предположил существование второй совокупности компонент смещения, аналогичных смещениям (2.84), но с параметрами h_1, h_2 и k вместо k_1, k_2 и h [1]). В этом случае компоненты напряжения при $y = \pm d$ обращаются в нуль, т. е.

$$T_{xy} = T_{yy} = T_{zy} = 0 \qquad \text{при } y = \pm d. \qquad (2.90)$$

[1]) Следует обратить внимание, что здесь мы пользуемся обозначениями Морза, поэтому k в этом параграфе имеет другой смысл

Этот результат справедлив при выполнении условий (2.86) — (2.88), в которых k_1 заменено на h_1, k_2 — на h_2 и h — на k. Затем k выбирается таким образом, чтобы обратить T_{xx} в нуль при $x = \pm a$; величинами T_{yx} и T_{zx} мы пренебрегаем. Эти условия удовлетворяются лучше всего при k, равном нулю, так что наилучшее решение тождественно с решением для бесконечной пластинки.

Морз [48] сравнил результаты этой теории с экспериментальными значениями длин волн в латунных стержнях на разных частотах. Согласие оказалось хорошим для первого решения (нормальные волны по толщине) от значения $2a/\lambda = 0{,}25$ до значения $2a/\lambda = 0{,}70$, если a/d равно $^1/_8$, но при a/d, равном $^1/_2$, согласие получилось не очень хорошим, поскольку в этом случае компоненты сдвиговых напряжений на поверхностях $y = \pm d$ не настолько малы, чтобы ими можно было пренебречь. Для второго решения (нормальные волны по ширине) согласие оказалось хорошим для значений d/a, равных 2 и $^5/_4$, от $2d/\lambda = 0{,}25$ до $2d/\lambda = 0{,}85$.

Мак-Скимин [49] получил выражение для постоянной распространения наинизшей нормальной волны, распространяющейся в направлении x в очень тонкой полосе шириной b (в направлении y), показав, что все компоненты напряжения, кроме T_{yy} и T_{xy}, малы вследствие небольшой толщины пластинки. Он нашел два решения, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям, и суперпозицией их добился обращения в нуль T_{yy} и T_{xy} при $y = \pm b/2$. Получающееся в результате дисперсионное уравнение было решено, и была найдена зависимость постоянной распространения от частоты и ширины полосы. Это решение становится точным, если толщина полосы стремится к нулю, поэтому данное приближение имеет практическую ценность только при малых значениях толщины по сравнению с длиной волны.

3. Полубесконечные цилиндры и пластинки

Здесь мы рассмотрим два типа граничных задач. Первый из них касается коэффициентов отражения некоторых нормальных волн в пластинке или цилиндре от свободной поверхности, перпендикулярной оси z. Второй тип задач относится к механизму потока упругой энергии в цилиндре от поверхности, перпендикулярной оси z, на которой приложен кратковременный импульс сжатия. Что касается первой задачи, то Земанек [34] нашел приближенное решение для механизма отражения на свободном конце цилиндра упругого сигнала, распространяющегося в виде наинизшей нормальной волны L (0, 1). Простой расчет показывает, что в общем случае комбинация из падающей и отраженной волн L (0, 1) не удовлетворяет условию отсутствия напря-

жений на торцевой поверхности стержня. Земанек сложил напряжения, соответствующие падающей волне $L(0, 1)$, отраженной волне $L(0, 1)$ и различному числу нормальных волн, имеющих комплексные постоянные распространения, с целью приближенно удовлетворить граничным условиям отсутствия напряжений. Нормальные волны с комплексными или мнимыми постоянными распространения должны входить сопряженными парами. Относительную амплитуду отраженной волны каждого типа Земанек выбирал, приравнивая нулю сумму напряжений в некоторых точках на торцевой поверхности стержня.

Физический смысл такого процесса отражения заключается в том, что продольное волновое движение отражается от торцевой поверхности в виде такого же продольного движения, но некоторая часть энергии переходит к нормальным волнам с комплексными постоянными распространения. Амплитуды этих нормальных волн быстро спадают при удалении от торцевой поверхности. Это явление можно рассматривать как накопление энергии на торце. При некоторых частотах эта накопленная энергия обусловливает большую амплитуду смещения около торца. В соответствии с этим такое явление можно назвать резонансом на конце. На достаточно большом расстоянии от конца будет наблюдаться только отраженная волна $L(0, 1)$, но явление накопления энергии проявляется в изменении фазы и амплитуды коэффициента отражения рассматриваемой нормальной волны.

Как отметил Земанек, для каждой нормальной волны имеется одна частота, при которой компоненты напряжения на поверхности $z = 0$ можно обратить точно в нуль одним-единственным видом отраженного волнового движения. Лэмб [6] первый показал, что на таких частотах в цилиндре напряжение T_{rz} равно нулю на всех плоскостях $z = \text{const}$; поэтому на этих частотах на торцевой поверхности отлична от нуля только компонента напряжения T_{zz}, которую можно обратить в нуль, выбирая отраженный сигнал, повернутый по фазе на 180° относительно падающего сигнала. Этот метод приводит к точному решению для отражения сигнала, представляющего собой распространяющуюся в цилиндре нормальную волну. Для каждой нормальной волны в цилиндре имеется одно такое точное решение, причем для разных нормальных волн соответствующие им частоты и длины волн различны. В обозначениях настоящей главы эти точные решения описываются выражениями

$$\frac{\omega a}{V_S} = \sqrt{2}\,\gamma a, \tag{2.91}$$

где возможные значения γa являются корнями уравнения

$$(\gamma a) J_0(\gamma a) = J_1(\gamma a). \tag{2.92}$$

Три наименьших корня этого уравнения равны $\gamma a = 1{,}841$, 5,331 и 8,534; значения остальных корней можно найти в книге Оноэ [21].

Аналогичными точными решениями на одной частоте для каждой нормальной волны в полубесконечной пластинке служат нормальные волны Ламе, рассмотренные выше в этом пункте. На частотах, определяемых выражениями (2.77), $T_{zx} = 0$ при $z = 0$. Таким образом, граничным условиям отсутствия напряжений на конце пластинки при одном значении частоты для каждой нормальной волны можно удовлетворить одной отраженной волной.

Очень важным свойством этих точных решений для цилиндра и пластинки является то, что соответствующие им частоты зависят только от толщины и V_S и не зависят от σ. Эта независимость от σ доказывается также тем фактом, что эти решения, как отмечено в п. 2 настоящего параграфа, не зависят от ширины пластинки.

Что касается решений задач второго типа, включающих смешанные условия (для одной компоненты напряжения и одной компоненты смещения) на плоскости, перпендикулярной z, в круглом цилиндре или пластинке, простирающихся от $z = 0$ до $z = \infty$, то они исследованы группой авторов, возглавляемой Кертисом [15, 25—28, 50]. Эта группа подробно рассмотрела две связанные задачи.

Первая задача состоит в удовлетворении произвольным смешанным начальным условиям на торце полубесконечного цилиндра. Вторая задача — вычисление зависимости от времени деформаций на некотором расстоянии от начального возмущения. В первой задаче произвольные напряжения на плоскости, перпендикулярной z, разлагались в линейную сумму частных решений для бесконечной пластинки или цилиндра. Частные решения находились методом разделения переменных или методом преобразований Фурье. При этом произвольные напряжения на плоскости, перпендикулярной z, можно было представить как сумму напряжений, соответствующих каждому частному решению, при условии, что эта сумма сходится и что система частных решений полная. Коэффициенты этой суммы вычислялись при помощи использования свойств ортогональности двойного функционального пространства из пространства решений. В этом методе трудно было решить, какие из решений, соответствующих допустимым значениям γ, должны быть отобраны.

Во втором методе фурье-трансформанты дифференциальных уравнений и граничных условий давали новые системы дифференциальных уравнений и граничных условий, которые решались. В этом случае выражение для T_{zz} принимало форму интеграла

от трансформанты T_{zz} по всем γ. Данная функциональная зависимость T_{zz} подставлялась в контурный интеграл. Интегрирование по контуру приводит к тому же результату, что и метод разделения переменных, за исключением того, что в этом случае нет сомнений, какие из решений использовать для анализа. В этом методе полюсы подынтегральных выражений соответствуют частным решениям метода разделения переменных. Смешанные условия на конце для круглого цилиндра имели вид

T_{zz} равно единичной ступеньке, а $u_r = 0$ при $z = 0$.

Обратные преобразования показывают, что сумма по полюсам трансформанты напряжения должна включать только те полюсы, для которых $d\gamma/d\omega$ имеет одинаковый знак. Таким образом, ветви нормальных волн на фиг. 18 пронумерованы в соответствии с таким путем интегрирования для заданной нормальной волны. Второе обратное преобразование, соответствующее интегрированию каждой нормальной волны по частоте от $-\infty$ до $+\infty$, дает зависимость деформации от z и t. Интегрирование выполнялось для больших z, и результат сравнивался с экспериментом.

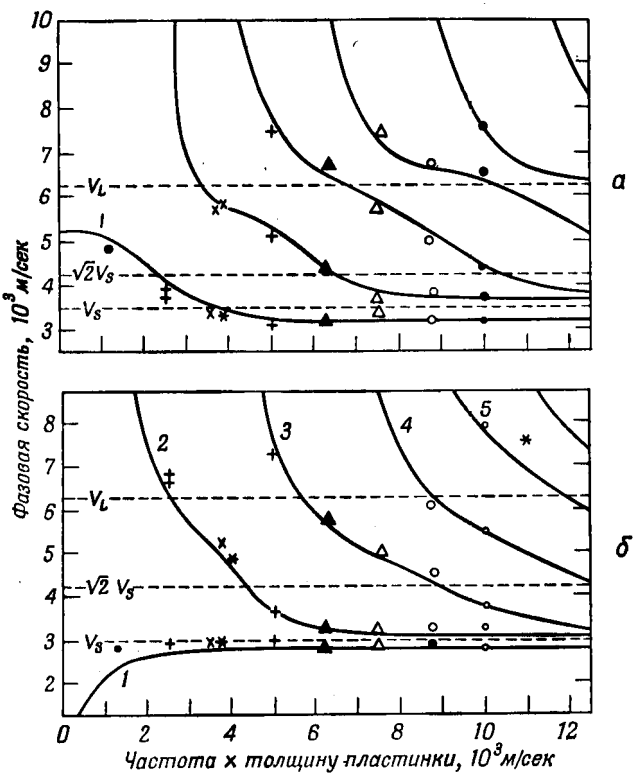
4. Определение упругих постоянных твердых тел с помощью нормальных волн

В гл. 4 этого тома Мак-Скимин дает обзор большого числа разнообразных методов определения упругих постоянных изотропных твердых тел. Во многих известных методах используются ультразвуковые волны, распространяющиеся с объемной скоростью. Здесь мы кратко покажем, как подробные сведения о характеристиках нормальных волн могут быть использованы для определения свойств материалов, особенно в тех случаях, когда измеряемые образцы имеют форму стержней, пластинок или полос.

В прошлом широко использовались продольные нормальные волны в цилиндрах в двух предельных случаях. Если отношение радиуса к длине волны a/λ очень мало, то энергия распространяется в виде наинизшей продольной нормальной волны, а фазовая и групповая скорости равны стержневой скорости. Если отношение a/λ очень велико, то энергия импульса распространяется со скоростью, близкой к скорости продольной волны в бесконечной среде. Наинизшие крутильная и изгибная нормальные волны в цилиндрах также широко использовались для определения упругих постоянных и затухания.

Ограничение, связанное с использованием только одной нормальной волны для определения упругих постоянных, состоит в том, что при этом можно найти лишь одну упругую постоянную. Чтобы определить две упругие постоянные, характеризующие изо-

тропные материалы, обычно необходимо построить два различных экспериментальных устройства. Детальные сведения о распространении нормальных волн часто позволяют определить упругие



* f=2,25 Мгц d=0,00178 м △ f=10 Мгц d=0,00076 м • f=10 Мгц d=0,00102 м
× f=5 Мгц d=0,00076 м ▲ f=5 Мгц d=0,0013 м ○ f=5 Мгц d=0,00178 м
‡ f=1 Мгц d=0,00259 м + f=5 Мгц d=0,00102 м • f=1 Мгц d=0,0013 м

Фиг. 22. Теоретическая и экспериментальная зависимости фазовой скорости от произведения частоты на толщину в алюминиевых пластинках (по Уорлтону [51]).

а — для продольных нормальных волн; *б* — для изгибных нормальных волн.

постоянные материала при помощи одного экспериментального устройства. Кроме того, часто с помощью нормальных волн можно удобно исследовать поведение образца в широком диапазоне частот. Экспериментальные методы, которые мы имеем в виду, мы проиллюстрируем теперь двумя группами экспериментальных и теоретических результатов.

На фиг. 22 иллюстрируется метод, посредством которого, зная детально характеристики фазовой скорости продольных и изгибных нормальных волн в пластинке, можно определить упругие постоянные. Точками на графиках показаны значения фазовой скорости, полученные Уорлтоном [51] на алюминиевых образцах в форме пластинок. В его экспериментальной установке алюминиевые пластинки были погружены в воду, и угол наклона приемника и излучателя относительно пластинок очень сильно зависел от фазовой скорости волн в пластинках. Значения упругих постоянных материала пластинок определяются сопоставлением теоретических кривых для фазовых скоростей в функции от произведения частоты на толщину пластинки с экспериментальными данными. В этом случае мы получаем значения V_S и σ, характеризующие материал. Отметим также, что данные, полученные в диапазоне от 1 до 10 *Мгц*, показывают, что упругие свойства исследуемого материала, по-видимому, постоянны в этом диапазоне частот.

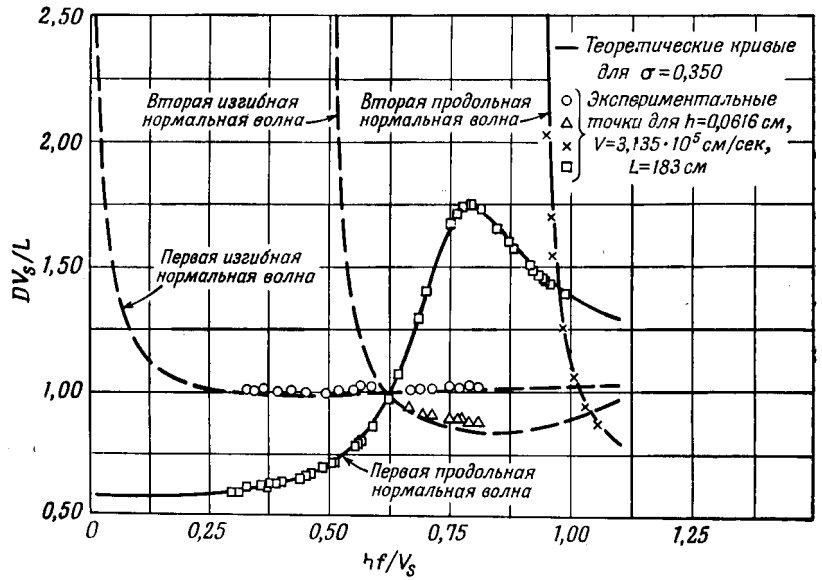
Подобный метод определения упругих постоянных путем сопоставления теоретической и экспериментальной частотных зависимостей для ряда нормальных волн может быть использован и для групповых скоростей. На фиг. 23 показан пример такого применения теории. Данные, приведенные на фиг. 23, получены Микером [52] путем измерения времени задержки импульсов с узким спектром, распространяющихся в алюминиевой полосе. Сопоставление экспериментальных точек с теоретическими кривыми в этом случае также позволяет определить значения σ и V_S и проверить постоянство упругих свойств среды в широком диапазоне частот.

В описанном методе используются данные измерений в широком диапазоне частот. В некоторых случаях полезно иметь методы определения упругих постоянных из экспериментальных данных для двух или трех дискретных частот. Для пластинок или стержней имеются особые наборы частот, удобных для нахождения упругих постоянных таким методом. Это частоты, при которых:
1) две нормальные волны имеют одинаковую групповую скорость,
2) две нормальные волны имеют одинаковую фазовую скорость,
3) групповая скорость данной нормальной волны экстремальна.

Для нахождения частот, при которых две нормальные волны имеют одинаковую фазовую скорость, нужен экспериментальный метод, чувствительный к фазовой скорости нормальных волн, подобный описанному Уорлтоном или Шохом. Явление взаимодействия нормальных волн, описанное в § 5 этой главы, также дает способ определения частот, при которых две нормальные волны имеют одинаковую фазовую скорость. Для нахождения частот, при которых две нормальные волны имеют одинаковую

групповую скорость, или частот, при которых какая-либо из волн имеет экстремальную групповую скорость, необходимо использовать метод узкополосных импульсов, подобный тому, который использовал Микер.

Отношения двух каких-либо из этих особых частот достаточно для того, чтобы определить коэффициент Пуассона. Однако

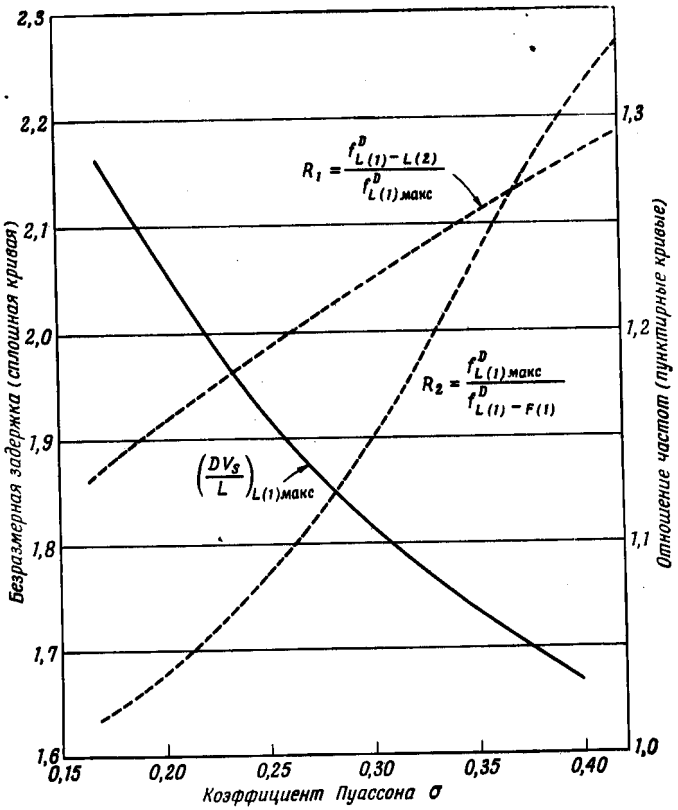


Ф и г. 23. Теоретическая и экспериментальная зависимости скорости сдвиговых волн, деленной на групповую скорость, от произведения частоты на толщину, отнесенного к скорости сдвиговых волн, для нескольких продольных и изгибных нормальных волн низших порядков в алюминиевой полосе (по Микеру [52]).

нужно отметить, что предпочтительнее использовать те особые частоты, которые наиболее чувствительны к изменению коэффициента Пуассона. Удобным способом определения величины V_S является параллельное измерение времени задержки в экстремуме групповой скорости и длины пути с последующим вычислением V_S из теоретического значения величины DV_S/L для данного значения коэффициента Пуассона.

Фиг. 24, заимствованная из статьи Микера и Мейтцлера [53], полезна при нахождении упругих постоянных пластинок и полос с использованием нормальных волн L (1), L (2) и F (1). Кривая R_1 дает зависимость от коэффициента Пуассона отношения двух частот $f^D_{L(1)-L(2)}$ и $f^D_{L(1)\,\text{макс}}$, причем $f^D_{L(1)-L(2)}$ — частота, соответствующая одинаковой задержке (или групповой скорости)

импульсов волн L (1) и L (2), а $f^D_{L(1)\,\text{макс}}$ — частота, при которой импульс волны L (1) имеет максимальную задержку. Аналогично кривая R_2 показывает зависимость от σ отношения двух частот $f^D_{L(1)\,\text{макс}}$ и $f^D_{L(1)-F(1)}$, причем $f^D_{L(1)\,\text{макс}}$ определяется так же, как



Ф и г. 24. Зависимость максимума безразмерной групповой скорости $(DV_S/L)_{\text{макс}}$ и двух отношений частот R_1 и R_2 от σ для изотропной пластинки (по Микеру и Мейтцлеру [53]).

прежде, а $f^D_{L(1)-F(1)}$ — частота, соответствующая одинаковой задержке импульсов волн L (1) и F (1). Третья кривая $(DV_S/L)_{L(1)\,\text{макс}}$ показывает, как максимальное значение безразмерной задержки волны L (1) зависит от σ.

Помимо определения упругих постоянных, нормальные волны можно использовать для изучения механизмов внутреннего трения и измерения постоянных затухания для заданного материала.

Поскольку затухание нормальных волн зависит от граничных условий, оно в некоторых случаях может существенно отличаться от затухания объемных волн. С другой стороны, измеренное затухание в материалах с малыми потерями часто содержит ошибку, обусловленную влиянием концов образца. Следовательно, если возможно получить длинные образцы материала с хорошо обработанными поверхностями, то можно уменьшить ошибку вследствие влияния концов и произвести измерения потерь, определяемых в основном затуханием волн.

Преимущества использования нормальных волн особенно хорошо могут быть реализованы при измерениях в поликристаллических металлах на частотах ниже 5 *Мгц*. В этом диапазоне частот обычные методы определения затухания посредством наблюдения затухания последовательности импульсов, соответствующих многократным отражениям в коротком образце в форме стержня, приводят к большим ошибкам, обусловленным расхождением волнового пучка и влиянием концов образца. Между тем весьма просто сделать очень длинные образцы в форме проволок или полос, у которых поверхностные дефекты малы по сравнению с длиной упругой волны, и измерить в них затухание нормальной волны, которое в большой степени характеризует затухание звука в объеме этого материала. Например, Мейтцлер для измерения добротности Q алюминия марки 5052 при комнатной температуре использовал нулевую сдвиговую нормальную волну в длинной полосе длиной примерно 42 *м*, шириной 2,54 *см* и толщиной $2{,}54 \cdot 10^{-2}$ *см*. В этом случае было показано, что материал полосы имел добротность Q для сдвиговых волн на частоте 2 *Мгц* по крайней мере $1 \cdot 10^5$. Это примерно в 4—5 раз больше значения Q, обычно приписываемого поликристаллическому алюминию при комнатной температуре.

Другим преимуществом, связанным с использованием некоторых нормальных волн, например крутильных нормальных волн в цилиндре, является возможность осуществить распространение нормальных волн, связанное только с одним типом деформации или волнового движения. Если используются более сложные волновые движения, такие, как продольные нормальные волны наинизшего порядка в цилиндрах или пластинках, преимущества, связанные с деформацией одного типа, отпадают. Тем не менее еще возможно полностью определить компоненты, входящие в полное волновое движение. Если используются нормальные волны, для которых волновое движение содержит деформации вращения и деформации сжатия, то следует ожидать, что затухание этих волн, измеренное на опыте, будет отличаться от затухания в объеме образца, даже если пренебречь поверхностными эффектами. Некоторые количественные расчеты затухания про-

дольных и изгибных нормальных волн в пластинках с большими потерями даны в последней работе Тамма и Вейса [17]. Дальнейшее рассмотрение этого вопроса дано в § 5, где описывается селективное затухание.

В настоящее время метод нормальных волн нашел лишь очень ограниченное применение для изучения внутреннего трения в материалах, но следует ожидать, что этот метод будет играть все более важную роль при измерении потерь в материалах, из которых могут быть изготовлены образцы в форме длинных цилиндров, пластинок или полос.

§ 5. ОСОБЫЕ ЭФФЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С ВОЛНОВОДНЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ УПРУГИХ ВОЛН В ПЛАСТИНКАХ И ЦИЛИНДРАХ

1. Взаимодействие нормальных волн

Общее введение в теорию взаимодействия нормальных волн изложено в книге Луиселла [54]. Явление взаимодействия нормальных волн и колебаний имеет место во многих областях физики. В последнее время на него было обращено большое внимание в связи с параметрическим усилением. В частности, подробный теоретический анализ взаимодействия нормальных волн проведен для электромагнитных волноводов различных типов. Для упругих волн в настоящее время не существует подробного теоретического объяснения взаимодействия нормальных волн; однако примеры взаимодействия нормальных волн в упругих волноводах были экспериментально продемонстрированы Мейтцлером [38].

Общая теория взаимодействия нормальных волн показывает, что независимо от механизма, вызывающего взаимодействие, распространяющиеся нормальные волны взаимодействуют наиболее сильно при сочетании следующего ряда условий:

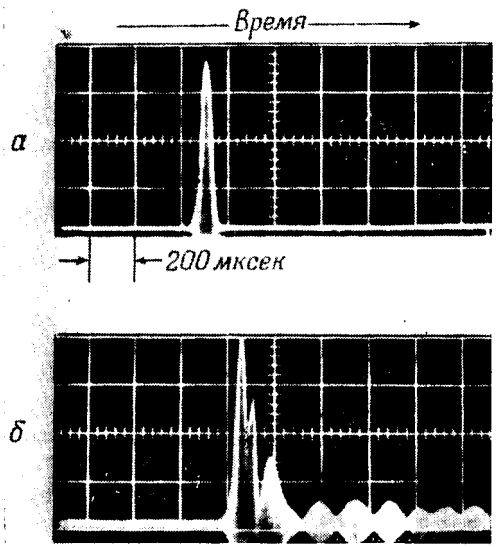
1) две нормальные волны имеют одинаковую фазовую скорость;

2) затухание в среде на пути в одну длину волны мало;

3) взаимодействие происходит повсеместно, т. е. оно не зависит от координат точки внутри среды.

В идеальном упругом волноводе распространяющиеся нормальные волны независимы; следовательно, сразу же возникает вопрос: каким образом возникает взаимодействие между нормальными волнами? Экспериментально исследованные примеры взаимодействия упругих нормальных волн показывают, что оно возникает в результате рассеяния волн на несовершенствах в объеме или на поверхности волновода.

Пример взаимодействия нормальных волн такого типа и влияния, которое взаимодействие оказывает на форму импульсов упругих волн, распространяющихся в алюминиевой проволоке, показан на фиг. 25. В этом случае импульс распространялся в алюминиевой проволоке длиной 365,8 *см* и диаметром 0,178 *см*. Экспериментальная установка, используемая для наблюдения влияния взаимодействий нормальных волн на распространение



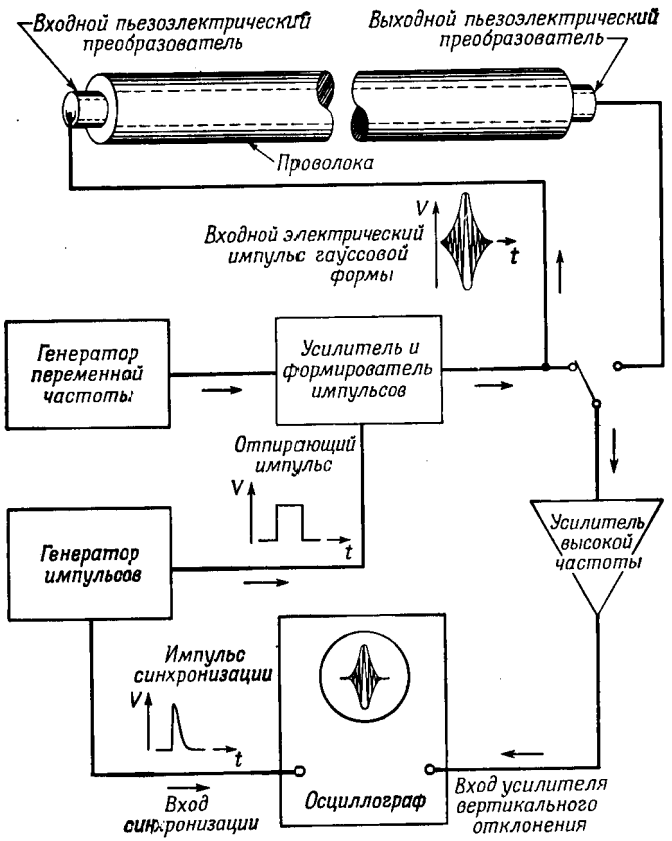
Ф и г. 25. Распространение импульса в алюминиевой проволоке, на концах которой расположены колеблющиеся по толщине цилиндрические преобразователи (по Мейтцлеру [38]).

Диаметр проволоки 0,178 *см*, длина 365,8 *см*. Длительность входного импульса 50 *мксек*; *а* — выходной импульс на частоте 1,280 *Мгц*; *б* — выходной импульс на частоте 1,404 *Мгц* (коэффициент усиления для вертикального отклонения в 2 раза больше, чем в случае *а*).

импульса, показана на фиг. 26. Импульс возбуждался на одном из концов проволоки небольшим цилиндрическим преобразователем из пьезокерамики. Волновое движение, приходящее на противоположный конец проволоки, принималось аналогичным пьезоэлектрическим преобразователем. Чтобы получить импульс с относительно узким спектром частот, огибающую электрического импульса выбрали в форме гауссовой кривой распределения.

На фиг. 25, *а* показана форма выходного импульса в случае несущей частоты, при которой взаимодействие нормальных волн не проявляется. Энергия рассматриваемого упругого волнового

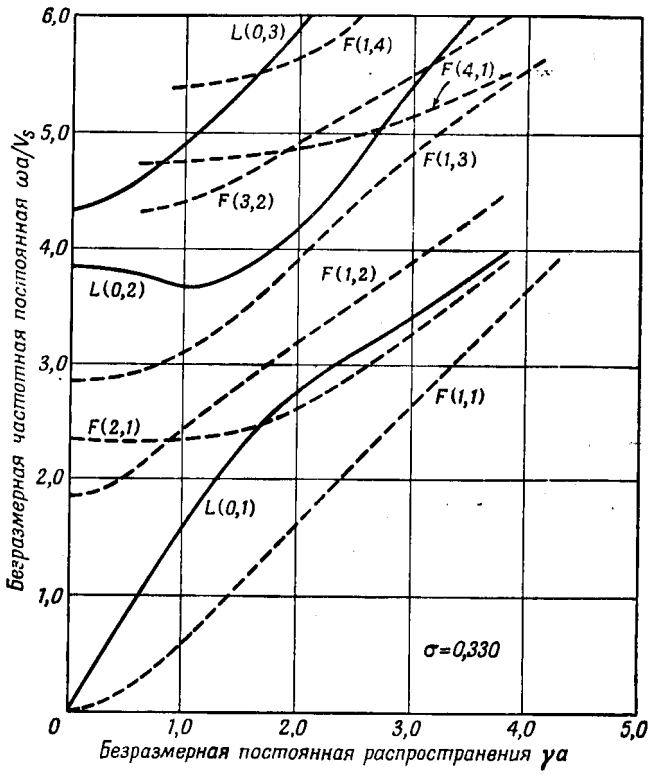
движения переносится нормальной волной L (0, 1). Эта нормальная волна обладает дисперсией, но при условиях измерения импульс на входе, имеющий длительность 50 *мксек*, лишь слегка удлинялся. На фиг. 25, *б* показано искажение выходного импульса



Фиг. 26. Экспериментальная установка для наблюдения взаимодействия нормальных волн в проволоках (по Мейтцлеру [38]).

в результате взаимодействия нормальных волн. В этом случае несущая частота входного импульса равна частоте, при которой нормальная волна L (0, 1) имеет ту же фазовую скорость, что и волна F (2, 1). Взаимодействие нормальных волн в этом случае производит следующие изменения в выходном импульсе: а) уменьшает его максимальную амплитуду, б) резко увеличивает длительность, в) искажает его форму, создавая резко выраженную картину биений в хвосте импульса.

Некоторые из приведенных выше искажений импульса можно объяснить, рассматривая форму спектра нормальных волн в цилиндрическом волноводе. На фиг. 27 показан спектр продольных и изгибных нормальных волн при коэффициенте Пуассона, близком к значению для алюминиевой проволоки, использованной в опыте. Как уже упоминалось, пример взаимодействия



Фиг. 27. Спектр частот различных продольных и изгибных нормальных волн в цилиндре для действительных значений γa при $\sigma = 0{,}330$ (по Мейтцлеру [38]).

нормальных волн, который иллюстрирует фиг. 25, можно интерпретировать как взаимодействие между нормальными волнами L (0, 1) и F (2, 1). Заметим, что, когда величина $\omega a/V_S$ примерно равна 2,4, эти волны имеют одинаковую фазовую скорость. Эта частота немного выше критической частоты нормальной волны F (2, 1). Важную роль в удлинении импульса и в образовании картины биений, по-видимому, играют следующие обстоятель-

ства: 1) групповая скорость нормальной волны F (2, 1) сравнительно мала на частоте пересечения кривых фазовых скоростей и 2) фазовая скорость нормальной волны F (2, 1) резко изменяется с изменением частоты.

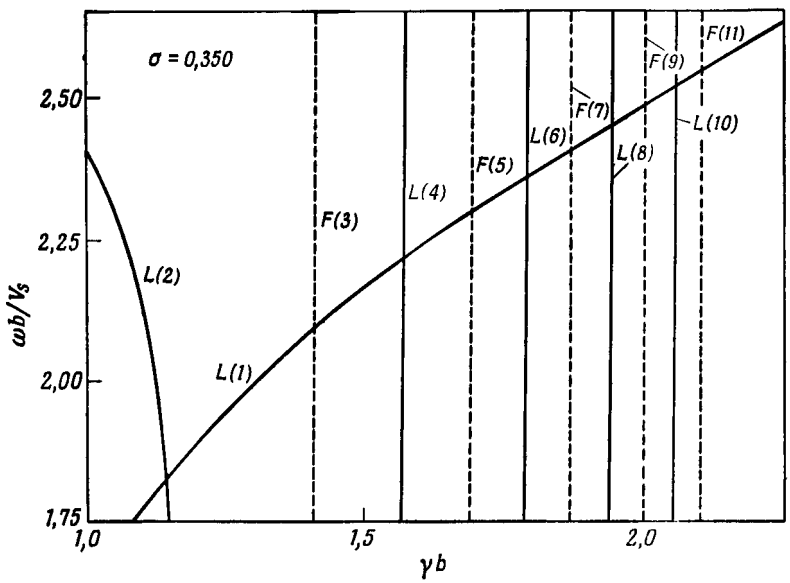
Другие примеры взаимодействия нормальных волн наблюдались при распространении импульсов упругих волн в проволоках. В общем случае, по-видимому, взаимодействие может иметь место между нормальными волнами L (0, p) и F (n, q) и между нормальными волнами F (n, q) и F (m, q) при $n \neq m$ во всех случаях, когда их фазовые скорости равны.

Прежде чем закончить рассмотрение примера взаимодействия нормальных волн, показанного на фиг. 25, уместно вернуться к вопросу о причине взаимодействия. Используемый в этом эксперименте упругий волновод представлял собой поликристаллическую алюминиевую проволоку круглого поперечного сечения. Проволока изготовлялась при помощи обычного технического процесса выдавливания. При этом процессе на поверхности проволоки оставались многочисленные микроскопические дефекты. Кроме того, в материале имелись границы между кристаллическими зернами. Скорости упругих волн в алюминии порядка $5 \cdot 10^5$ *см/сек*; следовательно, при частоте около 1 *Мгц* длины упругих волн порядка 0,5 *см*. Указанные дефекты имеют размеры порядка 10^{-3}—10^{-2} *см*, а диаметр проволоки порядка 0,2 *см*. Дефекты малы по сравнению с диаметром проволоки и длиной упругой волны; следовательно, на длине волны имеется много дефектов, случайно распределенных вдоль проволоки. Это обстоятельство отвечает установлению сильного взаимодействия между нормальными волнами. Кроме того, измерения потерь показывают, что затухание в алюминии очень мало, порядка 10^{-5} *см*$^{-1}$; это также является благоприятным условием для установления сильного взаимодействия между нормальными волнами.

Примеры взаимодействия нормальных волн, подобные только что описанным для упругих волн в проволоках, наблюдались и в волноводах пластиночного типа, представляющих собой полоски из поликристаллических металлов. В случае такой геометрии изгибные нормальные волны высокого кругового порядка отсутствуют и, следовательно, имеется значительно меньше частот, при которых две распространяющиеся нормальные волны могут иметь одинаковые фазовые скорости. Сравните, например, фиг. 17 и 27. Тем не менее частоты, при которых две нормальные волны в пластинке имеют одинаковые фазовые скорости, существуют. Например, есть частота, при которой нормальные волны L (3) и F (3) имеют одинаковую фазовую скорость при $\sigma = 0{,}35$. Взаимодействие между этими нормальными волнами наблюдалось

экспериментально для случая распространения импульсов в полосках из поликристаллического алюминия.

Как отмечалось выше, для пластинки и цилиндра имеется сравнительно ограниченный набор частот, при которых две нормальные волны имеют одинаковую фазовую скорость, если ограничиться рассмотрением нормальных волн низкого порядка



Фиг. 28. Спектр частот для волны L (1) и нескольких комплексных ветвей в пластинке с σ = 0,350 (по Оноэ).

и только тех их ветвей, для которых постоянные распространения действительны. Если теперь рассмотреть возможность взаимодействия между двумя нормальными волнами, у одной из которых постоянная распространения действительна, а у другой — комплексна, но фазовые скорости одинаковы, то получится гораздо больше частот, на которых возможно взаимодействие. Например, для пластинки имеются ветви нормальных волн, соответствующие комплексным корням, с относительно слабым затуханием вблизи плоскости действительных значений постоянной распространения, и эти ветви имеют проекции на плоскость, которые пересекают ветви нормальной волны L (1).

На фиг. 28, построенной на основании расчетов Оноэ [1]), показаны проекции комплексных ветвей продольных и изгибных нор-

[1]) М. Onoe, частное сообщение (1962).

мальных волн более высокого порядка, чем $L(1)$, которые пересекают участок ветви волны $L(1)$, лежащей в плоскости действительных значений постоянной распространения. Каждая из частот, при которых фазовые скорости равны, является частотой, на которой может возникнуть сильное взаимодействие нормальных волн, но теория взаимодействия нормальных волн показывает, что степень взаимодействия зависит как от наличия затухания одной или обеих нормальных волн, так и от механизма взаимодействия. Следовательно, хотя и существуют частоты, на которых ветви комплексных корней имеют фазовые скорости, равные фазовой скорости нормальной волны $L(1)$, эффект их присутствия может быть очень малым и не поддающимся наблюдению. В настоящее время не описано экспериментов, в которых было бы отчетливо продемонстрировано взаимодействие двух нормальных волн, одна из которых имеет действительную постоянную распространения, а другая — комплексную, и в которых было бы исключено влияние концов образца.

2. *Характеристика нормальной волны и явление селективного затухания*

Из представления решений для продольных и изгибных нормальных волн с помощью потенциальных функций ясно, что движения в этих волнах сложные в том смысле, что в общем случае они содержат как деформации сжатия, так и деформации сдвига. В изотропном упругом твердом теле с идеальными границами полное волновое движение можно представить как суперпозицию основных волновых движений. Для продольных и изгибных нормальных волн в пластинке, описываемых двумя потенциальными функциями, требуются только два основных движения. Для описания семейства продольных нормальных волн в цилиндре также нужны два основных движения, но для описания каждого из семейств изгибных нормальных волн необходимы три основных движения.

При описании распространения нормальных волн удобно иметь количественную меру, показывающую распределение энергии между основными волновыми движениями. Мейтцлер [55] назвал такой параметр «характеристикой» нормальной волны и выразил его через отношение амплитуд потенциальных функций. Если A — амплитуда, соответствующая потенциальной функции сжатия для пластинки, а B — амплитуда, соответствующая потенциальной функции сдвига, то можно вычислить отношение A/B как функцию частоты, используя корни соответствующих дисперсионных уравнений. Характеристика нормальной волны для случая, когда волна описывается только двумя потенциальными функ-

циями, определяется следующим образом:

$$C = \frac{A}{B}\left(\frac{A}{B}\right)^{*}, \tag{2.93}$$

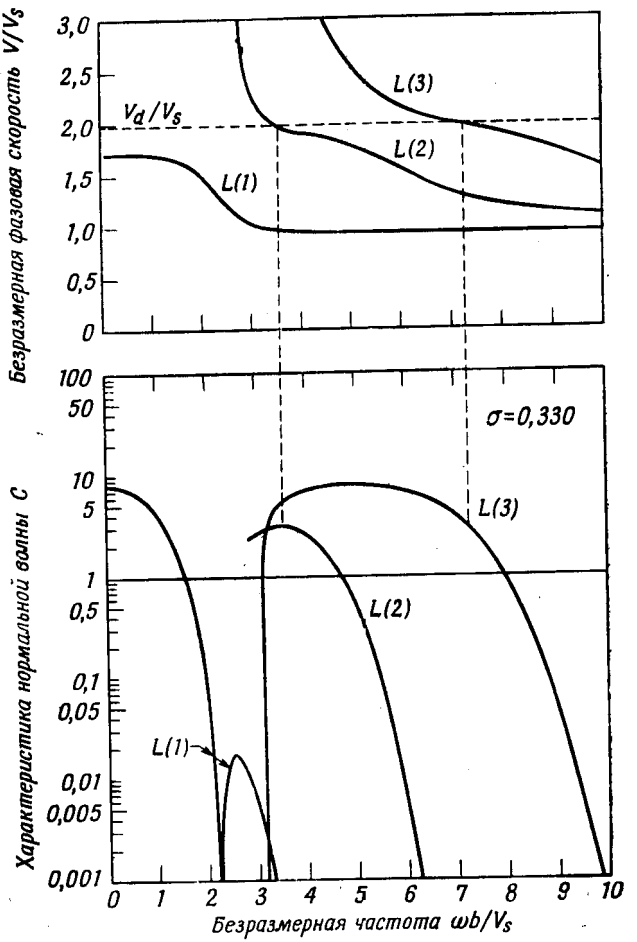
где $(A/B)^{*}$ — величина, комплексно сопряженная с A/B. При таком определении C является действительной положительной величиной с диапазоном изменения от 0 до ∞. На частотах, соответствующих нулевым значениям постоянной распространения, продольные и изгибные нормальные волны в пластинке становятся волнами чистого сжатия и волнами чистого сдвига (в том смысле, что C равно бесконечности или нулю). В этом случае распространяющиеся нормальные волны вырождаются в колебания сжатия или сдвига по толщине. Как для продольных, так и для изгибных распространяющихся нормальных волн имеются частоты, на которых компоненты сжатия обращаются в нуль (это частоты Ламе). Для изгибных нормальных волн C стремится к бесконечности по мере того, как частота приближается к значению, при котором фазовая скорость нормальной волны становится равной скорости продольной волны в бесконечной среде. Это нельзя интерпретировать как указание на то, что компонента сдвига равна нулю на этой частоте. Скорее выражение для характеристики принимает неопределенную форму из-за того, что потенциальная функция сжатия не представима более тригонометрической функцией. Для продольных нормальных волн C остается конечной всюду, за исключением частот, соответствующих нулевым значениям постоянной распространения, т. е. колебаниям сжатия по толщине.

На фиг. 29 показана частотная зависимость характеристик для трех наинизших продольных нормальных волн, а на фиг. 30— для трех наинизших изгибных нормальных волн. Изменения характеристик с частотой показаны на нижних графиках, а на верхних графиках для сопоставления приведены изменения фазовых скоростей различных нормальных волн.

До настоящего времени применения понятия «характеристика» ограничивались интерпретацией некоторых особенностей зависимости потерь от частоты для волноводного распространения упругих волн в полосах из поликристаллических металлов. Обычно для упругих волн в неограниченных поликристаллических твердых телах потери монотонно возрастают с частотой. В противоположность этому нормальные упругие волны имеют минимум потерь в ограниченном диапазоне частот, зависящий от свойств рассматриваемой нормальной волны. Такое поведение потерь при волноводном распространении называется явлением селективного затухания.

В качестве примера, иллюстрирующего явление селективного затухания, на фиг. 31 приведены экспериментальные данные,

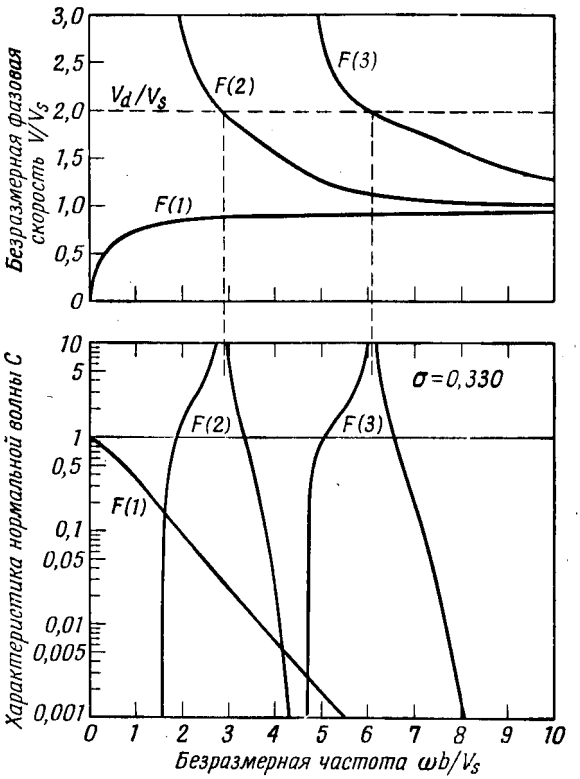
полученные Мейтцлером [55]. Показана зависимость затухания от несущей частоты для импульсов с узким спектром, соответствующих различным продольным и изгибным нормальным волнам.



Фиг. 29. Фазовые скорости и характеристики трех продольных нормальных волн наинизших порядков как функции от безразмерной частоты для пластинок с σ = 0,330 (по Мейтцлеру [55]).

Хотя наблюдаемая для этих импульсов зависимость потерь от частоты и рассматривается как обусловленная главным образом затуханием упругих волн в среде, она включает и ряд сложных дополнительных влияний.

Экспериментальная установка, использованная для получения данных, приведенных на фиг. 31, показана на фиг. 32. Эти данные были получены с использованием пьезоэлектрических преобразователей с продольными колебаниями по толщине для возбуждения и приема упругих волн в металлической полосе.

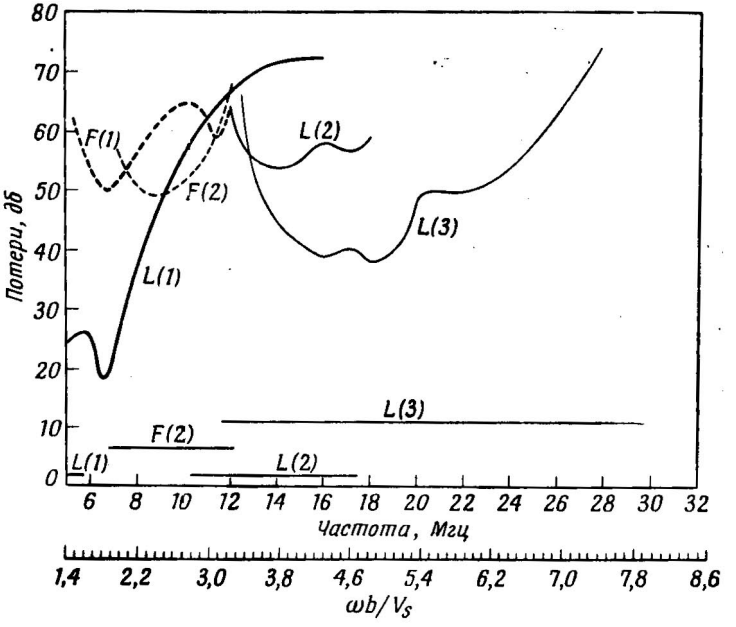


Ф и г. 30. Фазовые скорости и характеристики трех изгибных нормальных волн наинизших порядков как функции от безразмерной частоты для пластинок с σ = 0,330 (по Мейтцлеру [55]).

Металлическая полоса, изготовленная из поликристаллического алюминиевого сплава 5052, имела ширину 2,54 *см*, толщину $2{,}74 \cdot 10^{-2}$ *см* и длину 35,8 *см*. Вдоль краев полосы были приклеены полоски из вязкого материала для поглощения волновых движений, претерпевающих сильное взаимодействие с краями полосы.

Схема, показанная на фиг. 32, позволяла наблюдать распространение энергии разных нормальных волн в виде дискретного

ряда импульсов. Отдельные нормальные волны распознавались при помощи снятия зависимости времени задержки от частоты для каждого импульса. Установка позволяла измерять суммарные потери в преобразователях и поглощающей среде, представляемых как четырехполюсник, в диапазоне частот от 5 до 35 *Мгц*. Высокочастотные импульсы длительностью 10 *мксек* имели огибающую

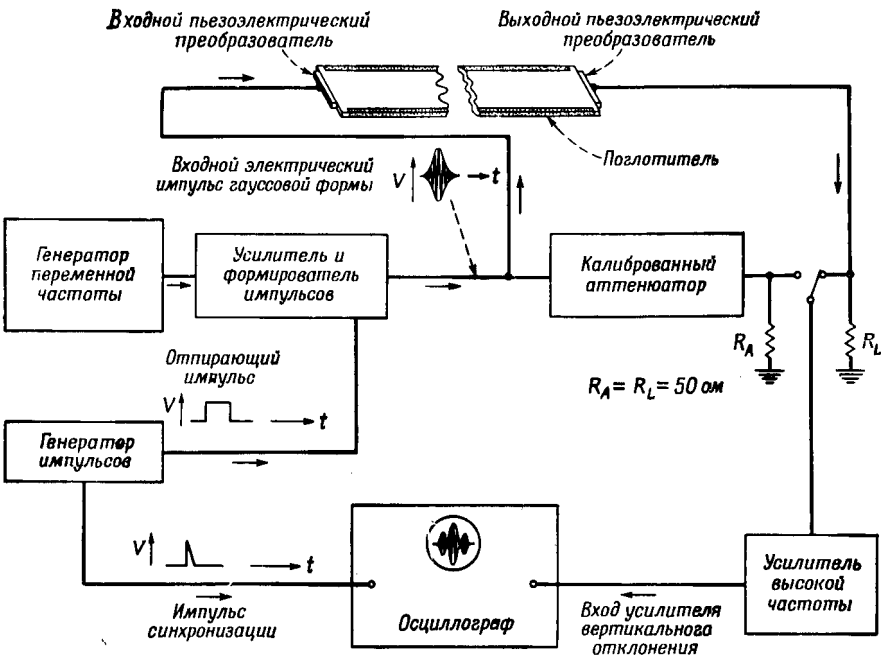


Ф и г. 31. Зависимость потерь от частоты для продольных и изгибных нормальных волн, распространяющихся в виде импульсов в полосе из алюминия марки 5052 толщиной $2{,}74 \cdot 10^{-2}$ *см*, шириной 2,54 *см* и длиной 35,8 *см* (по Мейтцлеру [55]).

Горизонтальные линии в нижней части фигуры указывают интервалы частот для каждой нормальной волны, в которых $C > 1$.

в форме гауссовой кривой. Импульсы такой формы имеют сравнительно узкую полосу частот, приблизительно равную 100 *кгц*. Это позволяло связать измеренное затухание импульсов с затуханием соответствующей нормальной волны на данной частоте. В экспериментальные данные, приведенные на фиг. 31, не внесены поправки на изменения уровня сигнала вследствие частотной зависимости импедансных характеристик преобразователей и неполного соответствия распределения смещений, создаваемых преобразователями, распределению смещений в той нормальной волне, затухание которой измерялось.

В диапазоне частот 5—35 *Мгц* основным механизмом, вызывающим потери при упругих волновых движениях в полосах из поликристаллических металлов, является рассеяние на границах кристаллических зерен вследствие скачков упругих



Фиг. 32. Схема экспериментальной установки, использованной для измерения внутренних потерь при распространении импульсов различных нормальных волн в образце в виде полосы (по Мейтцлеру [55]).

постоянных. Если затухание на единицу длины равно α, то зависимость α от частоты может быть аппроксимирована функцией вида

$$\alpha = Hf + Sf^4, \tag{2.94}$$

где коэффициент перед первой степенью частоты определяется в основном гистерезисным механизмом потерь, а коэффициент перед четвертой степенью частоты определяется рассеянием и зависит частично от размера зерен. Как для волн сжатия, так и для волн сдвига зависимость затухания от частоты имеет такой вид, причем в случае алюминия коэффициент S для сдвиговых волн в шесть раз больше, чем для продольных волн.

Следует ожидать, что вследствие рассеяния исходное сдвиговое волновое движение затухнет значительно сильнее, чем исходное волновое движение сжатия. В результате можно ожидать, что затухание выбранной нормальной волны будет минимальным в том диапазоне частот, где в нормальной волне преобладают деформации сжатия. Экспериментально обнаружены случаи селективного затухания, такие, как показанный на фиг. 31, когда имелась хорошая корреляция между диапазоном частот, в котором наблюдалась данная нормальная волна, и диапазоном, в котором величина C для данной нормальной волны больше, чем единица. Помимо кривых изменения уровня амплитуды импульсов, соответствующих разным нормальным волнам, на фиг. 31 внизу горизонтальными линиями показаны диапазоны частот, в которых данные нормальные волны имеют $C > 1$.

Распространение импульсов в твердых пластинках и цилиндрах зависит от многих осложняющих обстоятельств, включающих влияние: 1) граничных условий на торцовых поверхностях (распределение смещений или напряжений); 2) граничных условий на основных поверхностях (гладкость и параллельность граней для пластинок, круглая форма сечения для цилиндра); 3) однородности или зернистости среды; 4) чувствительности основного механизма потерь к волновым движениям, содержащимся в рассматриваемой нормальной волне; 5) частотной зависимости механизма потерь.

Раньше существовала тенденция рассматривать движение во всех продольных нормальных волнах, особенно в наинизших, как исключительно волновое движение сжатия. Введение понятия характеристики показывает, что подобная трактовка является слишком упрощенной. Более того, использование характеристик указывает на необходимость рассмотрения сложной природы волнового движения в волноводах во всех случаях, когда имеют дело с физическими явлениями, в которых механизм потерь чувствителен к типу основных волновых движений.

Прежде чем закончить рассмотрение селективного затухания, следует рассмотреть недавнюю статью Тамма и Вейса [17]. Эти авторы рассчитали частотную зависимость затухания нормальных волн, распространяющихся в пластинке, обладающей конечным внутренним трением. Авторы вводили потери в материале посредством задания комплексной формы упругих постоянных. Другие примеры такого подхода можно найти в пятой главе книги Ивинга и др. [56]. В статье Тамма и Вейса затухание в среде вводится заменой обычных модулей упругости в дисперсионных уравнениях Релея — Лэмба на комплексные модули упругости. В частности, приводятся результаты для случая, когда материал пластинки имеет коэффициент Пуассона $^1/_3$ и угол потерь 0,2 как

для продольного, так и для сдвигового модулей упругости. Хотя такое рассмотрение совершенно отлично от рассмотрения, в котором селективное затухание интерпретируется с помощью частотной зависимости характеристики, важно отметить, что оно приводит к нескольким аналогичным выводам:

1) затухание продольной нормальной волны первого порядка быстро возрастает в том диапазоне частот, где движение в этой нормальной волне становится чисто сдвиговым;

2) продольные и изгибные нормальные волны более высокого порядка характеризуются низким затуханием в некоторых ограниченных диапазонах частот;

3) диапазоны частот, где затухание нормальных волн более высокого порядка мало, лежат поблизости от частот, на которых соответствующие нормальные волны имеют фазовые скорости, близкие к скорости продольных волн в неограниченной среде.

Математическое описание распространения волн в твердых телах, обладающих потерями, связано с многими трудностями. Обычно при построении количественных теорий приходится пользоваться некоторыми приближениями, которые ограничивают область применимости. Подход Тамма и Вейса, хотя и связан с некоторыми ограничениями, позволяет оценить затухание нормальных волн как функцию частоты для случаев, когда потери в материале в основном обусловлены вязкоупругим трением. Частный случай, рассмотренный Таммом и Вейсом, как упоминалось выше, включает условие, что величина угла потерь для обоих модулей упругости равна 0,2 и не зависит от частоты. В более общем случае, например для пластинок, изготовленных из поликристаллических металлов, модули упругости имеют различные углы потерь, причем эти углы меняются независимо как функции частоты. Таким образом, подход Тамма и Вейса не применим к поликристаллическим металлам в том диапазоне частот, где определяющим механизмом потерь является рассеяние. Для лучшего объяснения затухания нормальных волн необходимо распространить подход, использованный Таммом и Вейсом, на подробное вычисление потерь с использованием постоянных для различных материалов и проверить, насколько этот теоретический подход может объяснить детали экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sternberg E., Arch. Ratl. Mech. Anal., **6**, 34 (1960).
2. Buchwald V. T., Journ. Mech. Appl. Math., **2**, 498 (1958).
3. Satô Y., Bull. Earthquake Res. Inst. (Tokyo), **29**, 223 (1951).
4. Press F., Ewing M., Trans. Amer. Geophys. Union, **32**, 673 (1951).
5. Rayleigh, Proc. London Math. Soc., **20**, 225 (1889).
6. Lamb H., Proc. Roy. Soc., **A93**, 114 (1917).

7. Firestone F. A., Ling D. S., Jr., Report on the Propagation of Waves in Plates, Lamb and Rayleigh Waves, Techn. Rep. 50-6001, Danbury, Connecticut, 1945.
8. Schoch A., Acustica, **2**, 1 (1952).
9. Holden A. N., Bell System Techn. Journ., **30**, 956 (1951).
10. Onoe M., A Study of the Branches of the Velocity-Dispersion Equations of Elastic Plates and Rods. Report to the Joint Committee on Ultrasonics of the Inst. of Electr. Commun. Eng. and the Acoust. Soc., Japan, 1955.
11. Onoe M., Journ. Acoust. Soc. Amer., **30**, 1159 (1958).
12. Mindlin R. D., Proc. 11th Ann. Symposium on Frequency Control, U.S. Army Signal Engineering Labs., Fort Monmouth, New Jersey, 1957, p. 17.
13. Mindlin R. D., Structural Mechanics, New York, 1960, p. 199.
14. Tolstoy I., Usdin E., Journ. Acoust. Soc. Amer., **29**, 37 (1957).
15. Folk R. T., Time Dependent Boundary Value Problems in Elasticity. Doctoral dissertation, Lehigh Univ., Bethlehem, Pennsylvania, 1958.
16. Tamm K., Weis O., Acustica, **9**, 275 (1959).
17. Tamm K., Weis O., Acustica, **11**, 8 (1961).
18. Mindlin R. D., Medick M. A., Journ. Appl. Mech., **26**, 561 (1959).
19. Curtis C. W., Plastic Deformation and Fracture of Metals at High Rates of Strain, Annual Rep. for OOR Contract No. DA-36-034-ORD-969. Lehigh Univ., Bethlehem, Pennsylvania, 1953.
20. Gazis D. C., Journ. Acoust. Soc. Amer., **31**, 568 (1959).
21. Onoe M., Tables of Modified Quotients of Bessel Functions of the First Kind for Real and Imaginary Arguments, New York, 1958.
22. Pochhammer L., Journ. reine u. angew. Math., **81**, 324 (1876).
23. Bancroft D., Phys. Rev., **59**, 588 (1941).
24. Curtis C. W., Journ. Appl. Phys., **25**, 928 (1954).
25. Folk R. T., Fox G., Shook C. A., Curtis C. W., Journ. Acoust. Soc. Amer., **30**, 552 (1958).
26. DeVault G. P., Curtis C. W., Journ. Acoust. Soc. Amer., **31**, 635 (1959).
27. Curtis C. W., в книге International Symposium on Stress Wave Propagation in Materials, ed. N. Davids, New York, 1960, p. 15.
28. DeVault G. P., Curtis C. W., Journ. Acoust. Soc. Amer., **34**, 421 (1962).
29. Mindlin R. D., McNiven H. D., Journ. Appl. Mech., **27**, 145 (1960).
30. Pao Y. H., Mindlin R. D., Journ. Appl. Mech., **27**, 513 (1960).
31. Onoe M., McNiven H. D., Mindlin R. D. (в печати).
32. Hudson G. E., Phys. Rev., **63**, 46 (1943).
33. Pao Y. H., Journ. Appl. Mech., **29**, 61 (1961).
34. Zemanek J., Jr., An Experimental and Theoretical Investigation of Elastic Wave Propagation in a Cylinder. Doctoral dissertation, Univ. of California, Los Angeles, 1962.
35. Abramson H. N., Journ. Acoust. Soc. Amer., **29**, 42 (1957).
36. DeVault G. P., Three Dimensional Problems of an Elastic Cylinder with Mixed, Time-dependent End Conditions. Doctoral dissertation, Lehigh Univ., Bethlehem, Pennsylvania, 1959.
37. May J. E., Jr., Journ. Acoust. Soc. Amer., **32**, 1512 (1960) (Abstract).
38. Meitzler A. H., Journ. Acoust. Soc. Amer., **33**, 435 (1961).
39. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **28**, 484 (1956).
40. Kynch G. J., Brit. Journ. Appl. Phys., **8**, 64 (1957).
41. Green W. A., в книге Progress in Mechanics, eds. I. N. Sneddon, R. Hill, Amsterdam, 1960, p. 225.
42. Epstein P. S., Journ. Math. Phys., **21**, 198 (1942).

43. Kane T. R., Mindlin R. D., Journ. Appl. Mech., **23**, 277 (1956).
44. Gazis D. C., Mindlin R. D., Journ. Appl. Mech., **27**, 541 (1960).
45. Lamé G., Leçon sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Paris, 1866.
46. Mindlin R. D., Fox E. A., Journ. Appl. Mech., **27**, 152 (1960).
47. Morse R. W., Journ. Acoust. Soc. Amer., **22**, 219 (1950).
48. Morse R. W., Journ. Acoust. Soc. Amer., **20**, 833 (1948).
49. McSkimin H. J., в книге Quartz Crystals for Electrical Circuits, ed. R. A. Heising, Princeton, New Jersey, 1946, p. 249.
50. Fox G., Curtis C. W., Journ. Acoust. Soc. Amer., **30**, 559 (1958).
51. Worlton D. C., Journ. Appl. Phys., **32**, 967 (1961).
52. Meeker T. R., IRE Nat. Conv. Record, **9**, pt. 6, 327 (1961).
53. Meeker T. R., Meitzler A. H., Journ. Acoust. Soc. Amer., **33**, 856 (1961).
54. Louisell W. H., Coupled Mode and Parametric Electronics, New York, 1960.
55. Meitzler A. H., Journ. Acoust. Soc. Amer., **34**, 444 (1962).
56. Ewing W. M., Jardetzky W. S., Press F., Elastic Waves in Layered Media, New York, 1957.

ЛИТЕРАТУРА ОБЩЕГО ХАРАКТЕРА

Adem J., On the axially-symmetric steady wave propagation in elastic circular rods, Quart. Appl. Math., **12**, 261 (1954).
Böhme H., Fromm E., Sittig E., Schwingungen des isotropen Kreiszylinders mit verschwindender Axialkomponente, Acustica, **10**, 67 (1960).
Бреховских Л. М., Волны в слоистых средах, М., 1957.
Chree C., The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical co-ordinates, their solutions and applications, Trans. Cambr. Phil. Soc., **14**, 250 (1889).
Davies R. M., A critical study of the Hopkinson pressure bar, Phil. Trans. Roy. Soc., **A240**, 375 (1948).
Edmonds P. D., Sittig E., Experimentelle Untersuchung der elastischen Eigenschwingungen isotroper Kreiszylinder, Acustica, **7**, 299 (1957).
Flinn E. A., Dispersion curves for longitudinal and flexural waves in solid circular cylinders, Journ. Appl. Phys., **29**, 1261 (1958).
Flinn E. A., Exact transient solution of some elementary problems of elastic wave propagation, Journ. Acoust. Soc. Amer., **33**, 623 (1961).
Gazis D. C., Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. II. Numerical results, Journ. Acoust. Soc. Amer., **31**, 573 (1956).
Kolsky H., Stress Waves in Solids, Oxford Univ. Press, London and New York (1953).
Lindsay R. B., Mechanical Radiation, New York, 1960.
Love A. E. H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, New York, 1892 (см. перевод: А. Ляв, Математическая теория упругости, М.— Л., 1935).
Miklowitz J., Recent developments in elastic wave propagation, Appl. Mech. Rev., **13**, 865 (1960).
Oliver J., Dispersion of elastic waves in a cylindrical rod by a wide-band short-duration pulse technique, Journ. Acoust. Soc. Amer., **29**, 189 (1957).
Pilant W. L., The Propagation of Elastic Waves in Thin Plates. Doctoral dissertation, Univ. of California, Los Angeles, California (1960).
Redwood M., Lamb J., On the propagation of high-frequency compressional waves in isotropic cylinders, Proc. Phys. Soc., **B70**, 136 (1957).

R e d w o o d M., Dispersion effects in ultrasonic waveguides and their importance in the measurement of attenuation, Proc. Phys. Soc., **B70**, 721 (1957).
R e d w o o d M., The generation of secondary signals in the propagation of ultrasonic waves in bounded solids, Proc. Phys. Soc., **72**, 841 (1958).
R e d w o o d M., Velocity and attenuation of a narrow-band, high-frequency compressional pulse in a solid wave guide, Journ. Acoust. Soc. Amer., **31**, 442 (1958).
R e d w o o d M., Mechanical Waveguides, New York (1960).
S h e r w o o d J. W. C., Propagation in an infinite elastic plate, Journ. Acoust. Soc. Amer., **30**, 979 (1958).
S i t t i g E., Zur Systematik der elastischen Eigenschwingungen isotroper Kreiszylinder, Acustica, **7**, 176 (1957).
S k a l a k R., Longitudinal impact of a semi-infinite circular elastic bar, Journ. Appl. Mech., **24**, 59 (1957).
T o l s t o y I., **U s d i n** E., Dispersive properties of stratified elastic and liquid media: a ray theory, Geophysics, **18**, 844 (1953).

Глава 3

ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ПЬЕЗОМАГНИТНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯХ

Д. БЕРЛИНКУР, Д. КЕРРАН И Г. ЖАФФЕ[1]

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пьезоэлектрические кристаллы и керамика являются наиболее важными материалами, которые используются в приемниках и излучателях акустических колебаний. В этой главе волновые уравнения, выведенные в гл. 1 для обычных твердых тел, обобщаются включением линейного взаимодействия электрических и механических переменных. Описываются свойства наиболее интересных пьезоэлектрических материалов, причем особое внимание уделяется поликристаллическим поляризованным сегнетоэлектрикам, которые обычно называют пьезоэлектрической керамикой. Описываются общие моды колебаний пьезоэлектрических тел. Некоторые из последующих глав, в которых рассматриваются методы акустических измерений и применения, содержат дополнительные данные о пьезоэлектрических материалах.

Интерес, который проявляют исследователи, занимающиеся акустикой, к пьезоэлектрическим материалам, не ограничивается их использованием в преобразователях для излучения акустической энергии в другие среды. Возбуждение упругого резонанса в гомогенном теле путем приложения электрических полей создает уникальные возможности для изучения упругих свойств кристаллов и особенно затухания малых упругих колебаний. Упругие свойства поликристаллических сегнетоэлектриков являются сами по себе важной областью исследований, поскольку они непосредственно связаны с динамикой сегнетоэлектрической доменной структуры.

Пьезомагнитный эффект является аналогом пьезоэлектрического эффекта. В принципе эта аналогия оказывается весьма близкой, если правильно учитывать различие свойств симметрии вектора электрического поля (полярная симметрия) и вектора магнитного

[1]) Фирма «Кливайт», Кливленд, Огайо.

поля (аксиальная симметрия). На практике наблюдаются большие различия между пьезоэлектрическими и пьезомагнитными преобразователями. Эти различия, так же как и то обстоятельство, что изучение магнетизма предшествовало открытию пьезоэлектричества, привели к различной терминологии. Большинство авторов называют пьезомагнитные явления магнитострикцией. В этой главе подчеркивается сходство этих двух эффектов, а не их различия (см. § 3 и 7). Оба явления конкурируют друг с другом в смысле их использования для возбуждения звуковых волн, в особенности в диапазоне частот от 10 до 50 *кгц* и в электромеханических фильтрах средней точности на частотах ниже 600 *кгц*.

Свойства пьезоэлектриков и их применения были весьма подробно описаны Кэди [1] примерно в 1940 г. В этой книге особенно детально рассмотрены свойства и методы экспериментальных исследований кварца и сегнетовой соли, которые доминировали в те времена, когда она была написана. Вопросы промышленного использования пьезоэлектрических кристаллов кварца исчерпывающе изложены в книге Хейзинга [2] и в книге Вигуре и Бута [3]. В начале сороковых годов наблюдались интенсивные поиски новых искусственных пьезоэлектрических кристаллов, пригодных для использования в электроакустических преобразователях, что привело к появлению кристаллов дигидрофосфата аммония (ADP) и сульфата лития. В 1947 г. появились первые сообщения о пьезоэлектрических свойствах предварительно поляризованной керамики титаната бария. Этот период отражен в книге Мэзона [4], которая остается и теперь важным источником количественных данных о водорастворимых кристаллах. Это первая книга, в которой широко используется понятие о константах, характеризующих электромеханическую связь (которые часто называют также коэффициентами электромеханической связи).

Институт радиоинженеров издал серию стандартов на пьезоэлектрические кристаллы [5—8], содержащих более совершенные определения и методики измерений. В этих стандартах сделано многое для унификации терминологии; в данной главе мы будем следовать этим стандартам. Весьма обширное собрание численных данных о пьезоэлектрических кристаллах, относящихся примерно к 1956 г., было подготовлено Бехманом для таблиц Ландольта — Бернштейна [9]. Удобные краткие таблицы имеются в справочнике Американского института физики [10] и в обзорной статье английских авторов [11].

После 1950 г. пьезоэлектрическая керамика стала широко используемым материалом для преобразователей благодаря воспроизводимости ее свойств в пределах заданного состава и разно-

образию этих свойств. Наиболее важным явилось открытие Жаффе и др. [12] сильного пьезоэффекта в поляризованной керамике, представляющей собой твердый раствор титаната-цирконата свинца. Большая спонтанная поляризация и высокая точка Кюри этих твердых растворов позволяют варьировать химический состав или условия обжига, что приводит к существенным изменениям различных физических свойств при сохранении значительного пьезоэффекта. В качестве примера можно привести переход от «жестких» характеристик обычного титаната-цирконата свинца (большая коэрцитивная сила, низкий коэффициент потерь, но значительные эффекты упругого последствия) к «мягким» характеристикам (большая податливость и увеличенные потери, умеренная величина коэрцитивной силы, уменьшенные эффекты последействия) в результате введения электронных доноров, т. е. замещения четырехвалентного циркония пятивалентным ниобием [13—15].

§ 2. ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НАИБОЛЕЕ ВАЖНЫХ КРИСТАЛЛОВ

1. Влияние симметрии кристалла

Необходимым условием существования пьезоэлектричества является отсутствие центра симметрии. Таким образом, пьезоэлектрические материалы существенно анизотропны. Пьезоэлектричество, по определению, предполагает наличие связи между упругими и диэлектрическими свойствами, и поэтому описание пьезоэффекта невозможно без привлечения диэлектрических и упругих постоянных. Комплекс этих постоянных в наиболее общем случае среды, лишенной симметрии, оказывается очень большим; он никогда не был определен для несимметричных кристаллов. Коэффициенты могут быть представлены матрицей 9×9, каждый столбец которой связан с одной из независимых переменных напряжения (компоненты упругого напряжения или электрического поля), а каждая строка — с одной из зависимых переменных деформации (компоненты деформации или электрической индукции). Эта матрица симметрична и в общем случае содержит $(n^2 + n)/2 = 45$ коэффициентов, представляющих собой 21 упругую податливость s_{ij}^E ($i, j = 1, 2, \ldots, 6$), 6 диэлектрических проницаемостей ε_{im}^T ($i, m = 1, 2, 3$) и 18 пьезоэлектрических модулей d_{ik} ($i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \ldots, 6$). Индекс E обозначает, что упругие податливости определены при постоянном электрическом поле, а индекс T указывает на постоянство упругих напряжений. Упругоэлектрические свойства можно описать

также обратной матрицей; в этом случае компоненты деформации и электрической индукции являются независимыми, а компоненты механического напряжения и электрического поля — зависимыми переменными. При этом в уравнениях фигурируют модули упругости при постоянной индукции c_{ij}^{D}, диэлектрические «непроницаемости» β_{im}^{S} и пьезоэлектрические постоянные h_{ik}.

Уменьшение количества независимых коэффициентов при учете симметрии пьезоэлектрических кристаллов двадцати классов подробно рассмотрено в книгах Кэди [1] и Мэзона [4]. Систематический и ясный анализ зависимости между симметрией и свойствами пьезоэлектрика приведен в более новой книге Найя [16]. В табл. 8, перепечатанной из Стандартов на пьезоэлектрические кристаллы Института радиоинженеров [7], дано удобное графическое представление коэффициентов. Пустые области представляют коэффициенты, равные нулю. Линии, соединяющие кружки, определяют требуемое данным типом симметрии равенство коэффициентов. Светлые кружки соответствуют коэффициентам, равным по абсолютному значению, но противоположным по знаку. Этот способ представления был предложен проф. Ван-Дайком.

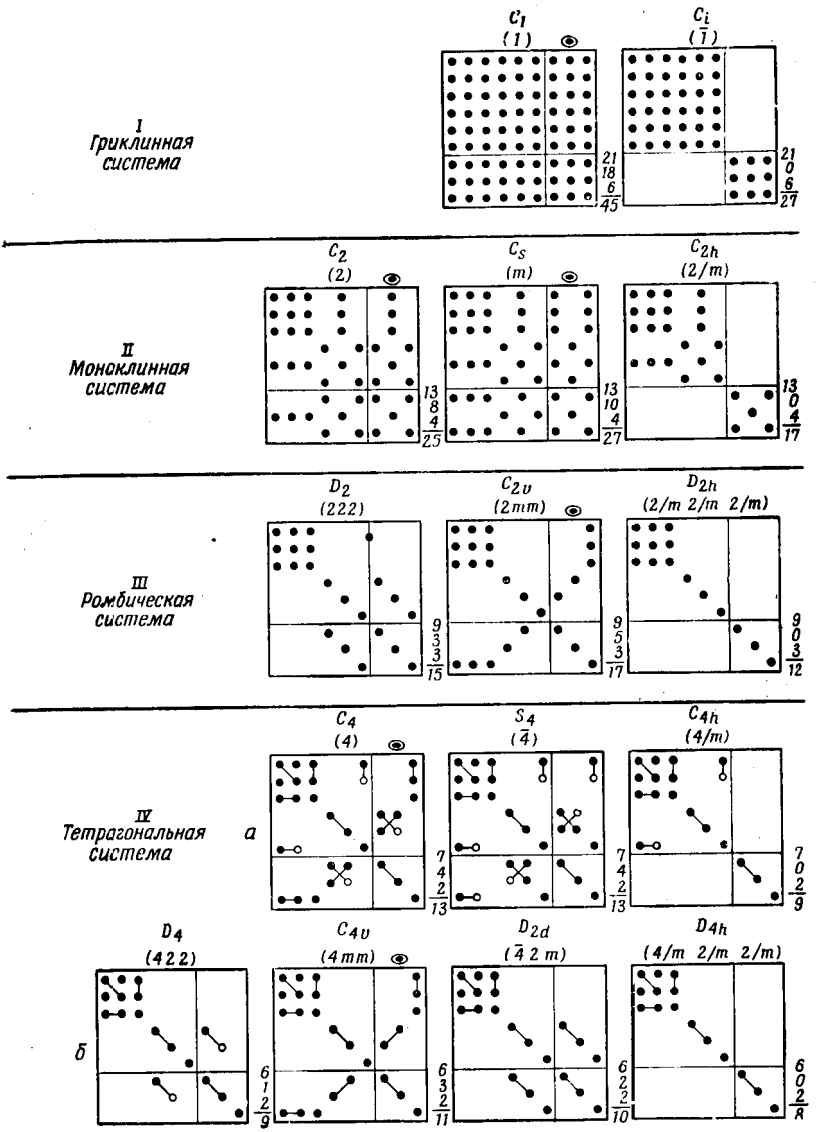
Класс 222. В этом параграфе рассматриваются те немногие классы симметрии, к которым относятся пьезоэлектрические кристаллы, используемые в преобразователях. Целесообразно начать это рассмотрение с ромбических кристаллов класса 222, характеризуемого наличием трех взаимно перпендикулярных осей симметрии второго порядка. У этих кристаллов электрическое поле, параллельное какой-либо оси симметрии, вызывает деформацию сдвига в плоскости, перпендикулярной этой оси. К этому классу относится сегнетова соль — один из наиболее широко используемых пьезоэлектрических кристаллов. Пьезоэлектрический эффект для этих кристаллов описывается тремя системами уравнений, имеющих вид

$$\begin{cases} D_1 = \varepsilon_{11}^{T} E_1 + d_{14} T_4, \\ S_4 = d_{14} E_1 + s_{44}^{E} T_4, \end{cases} \tag{3.1}$$

где D_1, E_1 — компоненты электрической индукции и электрического поля, S_4, T_4 — компоненты сдвиговых деформации и напряжения, d_{14} — пьезоэлектрический модуль, соответствующий выбранным независимым переменным — компонентам электрического поля и напряжения. Остальные две системы уравнений могут быть получены путем увеличения всех индексов на 1 и 2 соответственно.

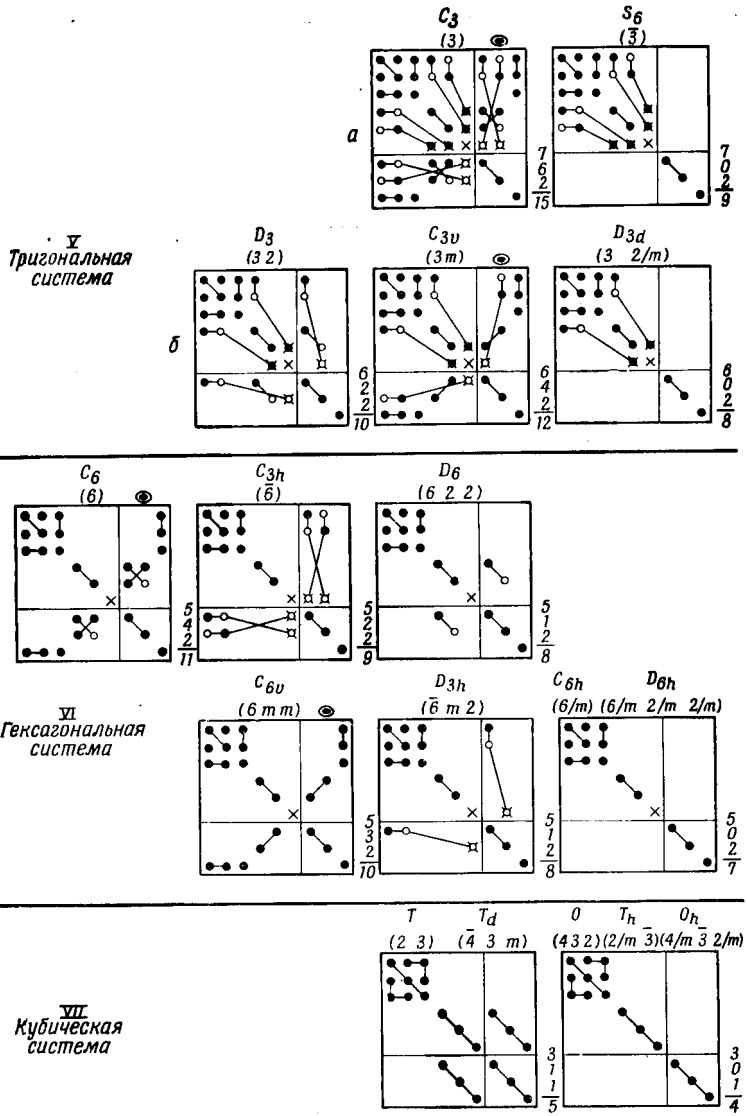
Часть электрической энергии, которая может быть превращена в энергию упругой деформации (и наоборот, часть энергии

Матрицы упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических



1) Числа справа от каждого квадрата обозначают (сверху вниз) количество неза диняют численно равные постоянные, за исключением тех, которые равны вследствие классов.

постоянных для 32 классов симметрии кристаллов[1])



○ – *отрицательное значение*

◉ – *классы, которые являются пьезоэлектрическими при всестороннем сжатии и обладают пироэлектрическими свойствами*

В тригональной и гексагональной системах:

▣ ▣ – *удвоенные значения постоянных* s, d, d_t, g, g_t.

× – *значения* $2(s_{11}-s_{12})$ *или* $1/2(c_{11}-c_{12})$

висимых упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных. Линии соесимметрии относительно главной диагонали матрицы, справедливой для всех

упругой деформации, которая может быть превращена в электрическую энергию) дается выражением

$$k_{14}^2 = \frac{d_{14}^2}{\varepsilon_{11}^T s_{44}^E}, \tag{3.2}$$

здесь k_{14} — коэффициент электромеханической связи для выбранной компоненты электрического поля. Этот коэффициент является мерой электроупругого взаимодействия, как можно усмотреть из соотношений

$$k_{14}^2 = \frac{s_{44}^E - s_{44}^D}{s_{44}^E} = \frac{\varepsilon_{11}^T - \varepsilon_{11}^S}{\varepsilon_{11}^T}, \tag{3.3}$$

где s_{44}^D — компонента тензора упругой податливости при постоянной D_1, а ε_{11}^S — компонента тензора диэлектрической проницаемости при постоянной S_4.

Уравнения (3.1) — (3.3) содержат только отдельные компоненты напряжения. Однако при решении динамических задач уравнения движения должны содержать и упругие постоянные, непосредственно не связанные с полем, которые также необходимо учитывать. Следует отметить, что основная мода колебаний (мода Ламе) тонкой прямоугольной пластины из материала с симметрией класса 222, толщина которой параллельна оси X, а другие ребра составляют углы 45° к осям Y и Z, определяется исключительно упругой податливостью s_{44}, благодаря чему оказывается возможным непосредственное определение коэффициентов в уравнениях (3.1) — (3.3) [7, 17]. Для получения пьезоэлектрического эффекта в кристаллах класса 222 при действии внешних сжимающих сил необходимо, чтобы они не были параллельны осям симметрии. В простейшем случае пластина вырезается так, что одна грань ее перпендикулярна одной оси, а длинное ребро образует угол 45° с двумя другими осями, причем механическое напряжение прикладывается к торцовым граням. При этом в первом приближении может учитываться только одна компонента напряжения. Обозначая через Y' направление длины пластины, образующее угол 45° с осями Y и Z, получаем следующие значения пьезоэлектрических и упругих постоянных:

$$\begin{aligned} d_{12}' &= \frac{d_{14}}{2}, \\ s_{22}' &= \frac{1}{4}(s_{22} + s_{33} + 2s_{23} + s_{44}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Деформация сдвига по толщине, т. е. деформация в плоскости, параллельной приложенному электрическому полю, наблюдается

при косых направлениях поля и оказывается максимальной, когда угол наклона к обеим осям составляет 45°. Для изменения толщины, т. е. для деформации растяжения или сжатия в плоскости, параллельной электрическому полю, необходимо, чтобы вектор поля был наклонен ко всем трем осям; максимум деформации наблюдается в том случае, когда этот наклон одинаков, т. е. равен arc cos $(1/\sqrt{3}) = 55°$. Однако эти толщинные деформации у кристаллов класса 222 связаны с другими компонентами деформации, и они обычно не используются в преобразователях.

Класс $\bar{4}2m$. Если к элементам симметрии класса 222 добавить плоскость симметрии, параллельную одной оси (оси Z) и образующую углы 45° с двумя другими осями, то в результате получим тетрагональную симметрию кристаллов класса $\bar{4}2m$, к которому принадлежат хорошо изученные и широко используемые кристаллы дигидрофосфата аммония (ADP) и дигидрофосфата калия (KDP). Оси X и Y у этих кристаллов эквивалентны, и поэтому некоторые элементы матрицы становятся идентичными (см. табл. 8). Для кристаллов ADP и KDP пьезомодуль $d_{14} = d_{25}$ очень мал, так что практически применяются срезы кристалла, которые позволяют использовать пьезомодуль d_{36}.

Класс $\bar{4}3m$. Если ввести еще один элемент симметрии — ось третьего порядка, образующую равные углы с тремя осями второго порядка, то получится кубическая симметрия класса $\bar{4}3m$, имеющего только один пьезомодуль $d_{14} = d_{25} = d_{36}$. Деформации сдвига по толщине, возбуждаемые полем, наклоненным под углом 45° к двум осям второго порядка (направление [110]), и деформации растяжения по толщине, возбуждаемые полем, направленным вдоль оси третьего порядка (направление [111]), свободны от нежелательных упругих взаимодействий (за исключением неизбежной взаимосвязи деформаций растяжения по толщине и по боковым направлениям) и описываются преобразованными пьезоэлектрическими модулями

$$d'_{15} = d_{14} \qquad (X' = [110]), \tag{3.5а}$$

$$d'_{33} = \frac{d_{14}}{\sqrt{3}} \qquad (Z' = [111]). \tag{3.5б}$$

Ни одного кристалла этого класса с сильным пьезоэлектрическим эффектом не обнаружено. Однако возрастающий интерес проявляется сейчас к кубическим пьезоэлектрическим полупроводникам типов $A^{II}B^{VI}$ и $A^{III}B^{V}$, как, например, сульфид цинка и арсенид галлия.

Класс 2. Уменьшая симметрию ромбического класса 222, мы придем к классу 2, имеющему единственный элемент симметрии — одну ось второго порядка. Обычно эту ось выбирают в качестве оси Y. Электрическое поле, действующее вдоль этой оси, вызывает общую деформацию плоскостей кристалла, нормальных оси Y, определяемую пьезомодулями d_{21}, d_{23} и d_{25}, и деформацию вдоль оси Y, определяемую пьезомодулем d_{22}. Сумма $d_{21} + d_{23} + d_{22}$ определяет отношение объемной деформации к электрическому полю; эта связь в рассмотренных выше кристаллических классах отсутствует. Компоненты поля, нормальные к оси Y, вызывают деформацию сдвига как в плоскости, нормальной к полю, так и в плоскости, содержащей вектор поля и ось Y.

Классы $6mm$ и $4mm$. Следующий класс симметрии, который мы рассмотрим, характеризуется одной осью симметрии шестого порядка (ось Z) и шестью плоскостями симметрии, параллельными этой оси. Пьезоэлектрические свойства кристаллов этого класса описываются тремя независимыми пьезомодулями d_{33}, $d_{31} = d_{32}$ и $d_{15} = d_{24}$. Первые два модуля описывают деформацию, связанную с полем, параллельным оси шестого порядка, а сумма $d_{33} + 2d_{31}$ определяет объемную деформацию. Согласно экспериментам, d_{31} и d_{33} обычно имеют противоположные знаки (хотя это и не вытекает из симметрии) и, следовательно, обусловленная пьезоэффектом объемная деформация должна быть малой. Высокий порядок оси симметрии вращения практически делает ее в отношении упругих и пьезоэлектрических свойств эквивалентной оси симметрии бесконечного порядка. Свойства поляризованной сегнетоэлектрической керамики, которая действительно обладает осью симметрии бесконечного порядка, описываются такой же матрицей упругих и диэлектрических постоянных, как и для кристаллов класса $6mm$.

Класс $4mm$ характеризуется осью четвертого порядка и четырьмя плоскостями симметрии и описывается той же пьезоэлектрической матрицей, что и класс $6mm$, но по своим упругим свойствам не обладает полной симметрией вращения.

Класс 32. В заключение мы должны рассмотреть класс 32, который характеризуется одной осью третьего порядка (ось Z) и тремя перпендикулярными ей осями второго порядка, одну из которых выбирают в качестве оси X. К этому классу принадлежит кварц, все еще являющийся одним из наиболее важных пьезоэлектрических кристаллов. Этот класс имеет два независимых пьезомодуля. Один из них (d_{14}) описывает связь между полем, перпендикулярным оси третьего порядка, но образующим произвольные углы с остальными осями, и деформацией

сдвига в плоскости, нормальной к направлению поля. Другой независимый пьезомодуль обычно обозначают d_{11}; он связывает поле, параллельное оси второго порядка (оси X), с деформацией вдоль этого же направления. При этом вдоль оси Y (перпендикулярно полю) имеет место равная, но противоположная по знаку деформация ($d_{12} = -d_{11}$); кроме того, поле, параллельное оси Y, вызывает сдвиг в плоскости XY ($d_{26} = -2d_{11}$). Эти эффекты, определяемые пьезомодулем d_{11}, могут быть «объединены» одним утверждением: поле, действующее в любом направлении, нормальном к оси Z, вызывает сдвиг в плоскости XY, причем ось, относительно которой осуществляется сдвиг, зависит от направления поля, а именно

$$\begin{aligned} S_6'^{(-\varphi)} &= -2d_{11}E'^{(2\varphi)}, \\ S_1'^{(-\varphi)} &= S_2'^{(-\varphi)} = 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где индексы показывают, что эта ось повернута на угол $-\varphi$ относительно оси Y, если направление поля повернуто на угол $+2\varphi$ относительно оси Y.

2. *Величина пьезоэлектрического эффекта в монокристаллах*

Ввиду наличия подробных таблиц, содержащих характеристики пьезоэлектрических кристаллов, упомянутых в § 1, здесь мы приводим лишь таблицы данных для наиболее важных кристаллов, которые ранее использовались в преобразователях, и для кристаллов, изучавшихся в течение последних нескольких лет. Если это не отмечается особо, численные значения параметров взяты для комнатной температуры. Температурные коэффициенты упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных «нормальных» кристаллов настолько малы (обычно порядка 10^{-3}—10^{-4} на 1° С), что их можно не учитывать при решении большинства задач, связанных с преобразователями. Однако это не справедливо для электромеханических фильтров, резонансная частота которых и, следовательно, некоторые комбинации упругих постоянных должны иметь чрезвычайно низкие температурные коэффициенты. Использование кварца в электронике почти полностью обусловлено наличием таких комбинаций упругих постоянных. Для ряда других кристаллов, включая дитартрат калия (DKT) и этилендиаминтартрат (EDT), резонансные частоты некоторых сдвиговых мод колебаний имеют температурные коэффициенты, которые вблизи комнатной температуры меняют знак. Эти кристаллы серьезно изучались как материал для электромеханических фильтров [4], однако не нашли широкого применения.

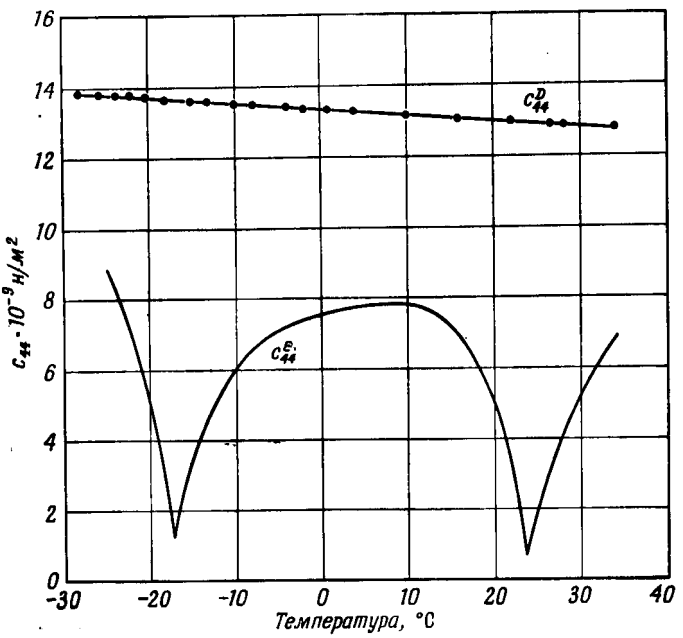
Аномально большие температурные коэффициенты имеют сегнетоэлектрики. Здесь следует различать два случая.

1. Кристаллы, имеющие центр симметрии в исходном состоянии, т. е. в области температур выше точки Кюри, или при реализации гипотетической симметричной атомной структуры, промежуточной между двумя возможными противоположными сегнетоэлектрическими ориентациями. Такие кристаллы не являются пьезоэлектриками в исходном состоянии; в сильном электрическом поле знаки всех пьезоэлектрических коэффициентов могут измениться на обратные или в некоторых случаях эти коэффициенты могут измениться более сложным образом. Эта группа включает в себя сегнетоэлектрические окислы, прототипом которых является титанат бария (см. табл. 12). В поликристаллическом состоянии эти окислы являются основными компонентами пьезоэлектрической керамики, которая подробно описана в § 4. Некоторые монокристаллы, принадлежащие к этой группе, исследовались в качестве элементов схем с двумя устойчивыми состояниями, однако вследствие легкого изменения сегнетоэлектрической полярности они оказались не подходящими для пьезоэлектрических преобразователей, несмотря на сильную пьезоэлектрическую связь. Икеда и др. [18] недавно показали, что в случае поперечных деформаций растяжения триглицинсульфата (класс 2) может быть получен коэффициент связи порядка 0,5 при стабилизации ориентации доменов с помощью γ-облучения.

2. Кристаллы, которые являются пьезоэлектриками выше точки Кюри. Здесь при приближении к сегнетоэлектрическому состоянию пьезоэлектрический эффект, связанный с полем, направленным вдоль сегнетоэлектрической оси, увеличивается; при этом диэлектрические, упругие и пьезоэлектрические постоянные обычно имеют резко выраженный максимум (или минимум) в точке Кюри. В качестве примеров можно указать KH_2PO_4, точка Кюри которого расположена в области довольно низких температур (—151° С), и сегнетову соль, для которой область существования сегнетоэлектрической фазы определяется снизу и сверху двумя точками Кюри (—18 и +23° С). На фиг. 33 представлена аномальная температурная зависимость упругой постоянной $c_{44}^E = 1/s_{44}^E$ сегнетовой соли. Существенно отметить, что никаких аномалий для упругой постоянной c_{41}^D [1]), характеризующей поведение электрически разомкнутого кристалла, не наблюдается. Коэффициент связи k_{14}, согласно уравнению (3.3), в верхней точки Кюри оказывается равным 0,97. Диэлектрическая проницаемость ε_{11}^T и пьезоэлектрический модуль d_{14} имеют температурную зависимость, сходную с температурной зависи-

[1]) H. H. A. Kreuger, частное сообщение (1961).

мостью s_{44}^E. В сегнетоэлектрической области симметрия кристалла понижается (сегнетова соль переходит в моноклинный класс 2) и возникают дополнительные упругоэлектрические постоянные. Хотя эти упругоэлектрические постоянные имеют достаточно



Фиг. 33. Упругая постоянная сдвига для кристалла сегнетовой соли X-среза с воздушным зазором (c_{44}^D) и с короткозамкнутыми электродами (c_{44}^E). Данные получены по измерениям резонансной частоты прямоугольной пластины 45°X-среза.

большие значения [19], они зависят от доменной структуры и поэтому не использовались при создании преобразователей. Большие значения коэффициента связи в температурной области, ограничиваемой точками Кюри, в которую входит также комнатная температура, позволили сегнетовой соли занять прочное положение как материала для преобразователей, несмотря на высокие значения температурных коэффициентов. Дигидрофосфат аммония (ADP) в значительной степени утратил свою роль основного материала для преобразователей в связи с появлением пьезокерамики. Значения постоянных для ADP и некоторых изоморфных кристаллов (табл. 10) дают представление о пьезоэлектрических свойствах этой группы. Сульфат лития $Li_2SO_4 \cdot H_2O$,

Таблица 9

Упругоэлектрические постоянные сегнетовой соли и моноклинных кристаллов [9] [1])

Кристалл	Плотность, $кг/м^3$	Упругая податливость s_{ij}^E, 10^{-12} $м^2/н$												
		s_{11}	s_{22}	s_{33}	s_{12}	s_{13}	s_{23}	s_{44}	s_{55}	s_{66}	s_{15}	s_{25}	s_{35}	s_{46}
Сегнетова соль (34° С)	1767	52,0	36,8	35,9	—16,3	—11,6	—12,2	150,2	350,3	104,2	0	0	0	0
Дитартрат калия (DKT)	1987	23,6	35,3	47,7	—6,1	—4,2	—17,5	122,7	96,1	113,3	—13,4	7,7	—7,4	—6,7
Этилендиаминтартрат (EDT)	1538	33,4	36,5	100,2	—3	—32,8	—18	191,8	122	191,4	—17	15	—26,5	3,8
Сульфат лития	2052	26,2	22,5	23,9	—7,0	—9,8	—3,0	38,4	50,6	69,0	4,0	—7,3	—0,5	—8,8

Кристалл	Пьезоэлектрический модуль, 10^{-12} $к/н$								Диэлектрическая проницаемость K_{ij}^T (относительная)			
	d_{14}	d_{25}	d_{36}	d_{16}	d_{34}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	K_{11}	K_{22}	K_{33}	K_{13}
Сегнетова соль (34° С)	345	54	12	0	0	0	0	0	205	9,6	9,5	0
Дитартрат калия (DKT)	7,9	—6,5	—23,2	3,5	—12,3	—0,8	4,5	—5,3	6,44	5,80	6,49	0,005
Этилендиаминтартрат (EDT)	—10,0	—17,9	—18,4	—12,2	—17,0	10,1	2,2	—11,3	4,8	7,74	5,25	0,25
Сульфат лития	0,8	—5,0	—4,2	—2,0	—2,1	—3,6	18,3	1,7	5,6	10,3	6,5	0,07

[1]) Данные для сегнетовой соли Жаффе и Дюрана.

Таблица 10

Упругоэлектрические постоянные кристаллов типа KH_2PO_4 [9]

Кристалл	Плотность, кг/м³	Упругая податливость s_{ij}^E, 10^{-12} м²/н						Пьезоэлектрический модуль, 10^{-12} к/н		Диэлектрическая проницаемость (относительная)	
		s_{11}	s_{33}	s_{12}	s_{13}	s_{44}^E	s_{66}^E	d_{14}	d_{36}	K_{11}^T	K_{33}^T
KH_2PO_4 (KDP)	2338	17,5	20	−4	−7,5	77,7	161	+1,3	+21	42	21
$NH_4H_2PO_4$ (ADP)	1803	18,1	43,5	1,9	−11,8	116	166	−1,5	+48	56	15,4
KH_2AsO_4 (KDA)	2870	19	27	2	1	88,6	149	+23,5	+22	53,7	21,0
$NH_4H_2AsO_4$ (ADA)	2311	—	—	—	—	136	156	+41	+31	75	14

класс 2 (табл. 9), весьма чувствителен к гидростатическому сжатию ($d_{21} + d_{23} + d_{22}$) и механическому напряжению, действующему параллельно полю (d_{22}). Пьезоэлектрическая связь подобного рода, учитывая умеренное значение диэлектрической постоянной, позволяет успешно использовать сульфат лития в качестве материала для преобразователей акустических волн в диапазоне 0,5—5 *Мгц*. Так же как сегнетова соль и ADP, сульфат лития имеет акустический импеданс, более близкий к акустическому импедансу воды или органических жидкостей, чем кварц или пьезокерамика.

Кварц (табл. 13), несмотря на малый коэффициент электромеханической связи, по-прежнему наиболее широко используется в преобразователях в диапазоне частот выше 15 *Мгц*, где его низкая диэлектрическая проницаемость, а также высокие механические свойства, позволяющие использовать очень тонкие пластины, являются существенным преимуществом. Гексагональные кристаллы сульфида или селенида кадмия и окиси цинка могут стать серьезными конкурентами в области высоких частот не столько вследствие их более высокого пьезоэффекта (табл. 12), сколько из-за возможности использования их полупроводниковых свойств для возбуждения и усиления звуковых волн (см. т. 1, Б, гл. 5). Кубические полупроводниковые кристаллы (табл. 11) обладают

Таблица 11

Упругоэлектрические постоянные кубических кристаллов [1)]

Кристалл	Плотность, кг/м³	Упругая податливость, 10^{-12} м²/н			Пьезомодуль d_{14}, 10^{-12} к/н	Диэлектрическая проницаемость K^T (относительная)
		s_{11}	s_{12}	s^E_{44}		
ZnS	4088	18,39	−7,07	21,68	3,18	8,37
ZnSe	5262	22,6	−8,5	22,7	1,10	9,12
ZnTe	5636	24,0	−8,73	32,1	0,91	10,1
CdTe (−196° C)	5840	38,3	−15,8	51,1	1,68	9,65

1) Данные работы Берлинкура и др. [20].

более слабым пьезоэлектрическим эффектом. Однако, учитывая простую структуру этих кристаллов, их изучение имеет фундаментальное значение для теории пьезоэлектричества. Значения в таблицах приведены в рационализованной системе единиц

Таблица 12

Упругоэлектрические постоянные гексагональных и тетрагональных кристаллов

Кристалл	Плотность, кг/м³	Упругая податливость, 10^{-12} м²/н						Пьезоэлектрический модуль, 10^{-12} к/н			Диэлектрическая проницаемость (относительная)		Литература
		s_{11}	s_{33}	s_{12}	s_{13}	s_{44}	s_{66}	d_{15}	d_{33}	d_{31}	K_{11}^T	K_{33}^T	
BeO	3009	2,30	—	—	—	—	[1]	—	+0,24	−0,12	—	7,66	[21]
ZnO	5675	—	8,3	—	—	—	[1]	−12	+12	−4,7	—	8,2	[22]
CdS	4819	20,69	16,97	−9,99	−5,81	66,49	[1]	−13,98	+10,32	−5,18	9,35	10,33	[20]
CdSe	5684	23, 38	17,35	−11,22	−5,72	75,95	[1]	−10,51	+7,84	−3,92	9,70	10,65	[20]
$BaTiO_3$	6020	8,05	15,7	−2,35	−5,24	18,4	8,84	392	85,6	−34,5	2920	168	[23]

[1] $s_{66} = 2\,(s_{11} - s_{12})$.

Таблица 13

Упругоэлектрические постоянные кварца [24]

Плотность, кг/м³	Упругая податливость s_{ij}^E, 10^{-12} м²/н							Пьезоэлектрический модуль, 10^{-12} к/н		Диэлектрическая проницаемость (относительная)	
	s_{11}	s_{33}	s_{12}	s_{13}	s_{44}	s_{66}	s_{14}	d_{11}	d_{14}	K_{11}^T	K_{33}^T
2649	12,77	9,60	—1,79	—1,22	20,04	29,12	4,50	2,31	0,727	4,52	4,68

МКС; для пьезоэлектрических постоянных 1 к/н (кулон/ньютон) = $= 3 \cdot 10^4$ СГСЭ/*дин*. Диэлектрические постоянные K_{ij} отнесены к значению диэлектрической проницаемости вакуума: $K_{ij} = \varepsilon_{ij}/\varepsilon_0$, причем $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ ф/м.

§ 3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

1. Четыре типа статических уравнений; константы связи

Пьезоэлектрические уравнения выводятся непосредственно из термодинамических потенциалов. Пьезоэлектрические постоянные связывают симметричные тензоры второго порядка (напряжения или деформации) с векторами (плотности заряда или электрического поля), поэтому они являются тензорами третьего порядка. Упругие постоянные связывают два симметричных тензора второго порядка и поэтому они являются тензорами четвертого порядка. Диэлектрические постоянные связывают два вектора и поэтому они являются тензорами второго порядка. В этой работе используется более простое матричное представление этих величин [1]). Наиболее распространенную форму пьезоэлектрических уравнений можно получить, если в качестве независимых переменных выбрать электрическое поле и механическое напряжение. В самом общем случае следует учитывать также магнитное поле, и тогда функция Гиббса запишется в следующем виде:

$$G = U - S_i T_i - E_m D_m - H_m B_m - \sigma\theta, \quad i = 1, 2, \ldots, 6, \quad m = 1, 2, 3, \tag{3.7}$$

где σ — энтропия, θ — температура, U — внутренняя энергия.

[1]) $T_{11} = T_1$, $T_{22} = T_2$, $T_{33} = T_3$, $T_{12} = T_6$, $T_{23} = T_4$, $T_{13} = T_5$; $S_{11} = S_1$, $S_{22} = S_2$, $S_{33} = S_3$, $2S_{12} = S_6$, $2S_{23} = S_4$, $2S_{13} = S_5$.

Для обратимых процессов

$$dG = -S_i\,dT_i - D_m\,dE_m - B_m\,dH_m - \sigma\,d\theta, \tag{3.8}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} S_i &= \left(\frac{-\partial G}{\partial T_i}\right)_{E,\,H,\,\theta}, & D_m &= \left(\frac{-\partial G}{\partial E_m}\right)_{H,\,T,\,\theta}, \\ B_m &= \left(\frac{-\partial G}{\partial H_m}\right)_{E,\,T,\,\theta}, & \sigma &= \left(\frac{-\partial G}{\partial \theta}\right)_{E,\,H,\,T}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Вычисляя полную производную, получаем

$$dS_i = \left(\frac{\partial S_i}{\partial T_j}\right)_{E,\,H,\,\theta} dT_j + \left(\frac{\partial S_i}{\partial E_m}\right)_{H,\,\theta,\,T} dE_m + \left(\frac{\partial S_i}{\partial H_m}\right)_{E,\,\theta,\,T} dH_m + \left(\frac{\partial S_i}{\partial \theta}\right)_{T,\,H,\,E} d\theta, \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6, \quad m = 1,\ 2,\ 3; \tag{3.10}$$

аналогично

$$dD_m = \left(\frac{\partial D_m}{\partial T_j}\right)_{E,\,H,\,\theta} dT_j + \left(\frac{\partial D_m}{\partial E_k}\right)_{T,\,H,\,\theta} dE_k + \left(\frac{\partial D_m}{\partial H_k}\right)_{T,\,E,\,\theta} dH_k + \left(\frac{\partial D_m}{\partial \theta}\right)_{T,\,E,\,H} d\theta, \tag{3.11}$$

$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6, \qquad m,\ k = 1,\ 2,\ 3$$

и

$$d\sigma = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T_i}\right)_{\theta,\,E,\,H} dT_i + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial E_m}\right)_{\theta,\,H,\,T} dE_m + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial H_m}\right)_{T,\,E,\,\theta} dH_m + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}\right)_{E,\,H,\,T} d\theta. \tag{3.12}$$

Поскольку dG является полным дифференциалом, приведенные ниже соотношения, которые вытекают из (3.9), определяют выраженные через частные производные пьезоэлектрический модуль, пьезомагнитную, пироэлектрическую, пиромагнитную и магнитодиэлектрическую константы и коэффициент теплового расширения:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial D_m}{\partial T_j} = \frac{\partial S_j}{\partial E_m} = d_{mj}^{H,\,\theta} && \text{пьезоэлектрический модуль,} \\ &\frac{\partial B_m}{\partial T_j} = \frac{\partial S_j}{\partial H_m} = d_{mj}^{E,\,\theta} && \text{пьезомагнитная константа,} \\ &\frac{\partial D_m}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma}{\partial E_m} = p_m^{T,\,H} && \text{пироэлектрическая константа,} \\ &\frac{\partial B_m}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma}{\partial H_m} = i_m^{T,\,E} && \text{пиромагнитная константа,} \\ &\frac{\partial D_m}{\partial H_k} = \frac{\partial B_k}{\partial E_m} = m_{mk}^{T,\,\theta} && \text{магнитодиэлектрическая константа,} \\ &\frac{\partial S_j}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma}{\partial T_j} = \alpha_j^{E,\,H} && \text{коэффициент теплового расширения.} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Из уравнений (3.10)—(3.12) можно определить также следующие константы:

$$\left(\frac{\partial S_i}{\partial T_j}\right)_{E,\,H,\,\theta} = s_{ij}^{E,\,H,\,\theta} \quad \text{упругая податливость,}$$

$$\left(\frac{\partial D_m}{\partial E_k}\right)_{T,\,H,\,\theta} = \varepsilon_{mk}^{T,\,H,\,\theta} \quad \text{диэлектрическая проницаемость,}$$

$$\left(\frac{\partial B_m}{\partial H_k}\right)_{T,\,E,\,\theta} = \mu_{mk}^{T,\,E,\,\theta} \quad \text{магнитная проницаемость,} \tag{3.14}$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}\right)_{E,\,H,\,T} = \frac{\rho c^{E,\,H,\,T}}{\theta} \quad (\rho \text{ — плотность, } c \text{ — теплоемкость}).$$

Используя эти определения, можно привести основные уравнения (3.10)—(3.12) к следующему виду (выражение для B аналогично выражению (3.11) для D):

$$S_i = s_{ij}^{E,\,H,\,\theta} T_j + d_{mi}^{H,\,\theta} E_m + d_{mi}^{E,\,\theta} H_m + \alpha_i^{E,\,H}\, d\theta, \tag{3.15а}$$

$$D_m = d_{mi}^{H,\,\theta} T_i + \varepsilon_{mk}^{T,\,H,\,\theta} E_k + p_m^{T,\,H}\, d\theta + m_{mk}^{T,\,\theta} H_k, \tag{3.15б}$$

$$B_m = d_{mi}^{E,\,\theta} T_i + \mu_{mk}^{T,\,E,\,\theta} H_k + i_m^{T,\,E}\, d\theta + m_{km}^{T,\,\theta} E_k, \tag{3.15в}$$

$$d\sigma = \alpha_i^{E,\,H} T_i + p_m^{H,\,T} E_m + i_m^{E,\,T} H_m + \frac{\rho c^{E,\,H,\,T}}{\theta}\, d\theta. \tag{3.15г}$$

Здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам, причем

$$i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6, \qquad m,\ k = 1,\ 2,\ 3.$$

В самом общем случае имеется шесть уравнений для S, по три уравнения для B и D и одно уравнение для $d\sigma$, всего тринадцать уравнений. Для кристалла с самой низкой симметрией (триклинная система, класс $\bar{1}$) имеется двадцать одна независимая упругая постоянная (это количество упругих постоянных получается из 46 благодаря тому, что термодинамические потенциалы являются полными дифференциалами, $s_{ij} = s_{ji}$), восемнадцать независимых пьезоэлектрических постоянных, шесть независимых диэлектрических проницаемостей (полученных из девяти благодаря тому что термодинамические потенциалы являются полными дифференциалами, $\varepsilon_{mk} = \varepsilon_{km}$), шесть независимых магнитных проницаемостей, три пироэлектрические константы, три пиромагнитные константы, девять магнитодиэлектрических констант, шесть коэффициентов теплового расширения и одна удельная теплоемкость.

На практике при рассмотрении пьезоэлектрических материалов обычно можно пренебречь эффектами, связанными с магнитными полями, а при рассмотрении магнитных материалов пренебрегают эффектами, обусловленными электрическими полями.

Разность между адиабатическими и изотермическими константами обычно пренебрежимо мала. Чтобы выразить адиабатические константы через изотермические, следует $d\sigma$ приравнять нулю и вычисленную из (3.15г) величину $d\theta$ подставить в (3.15а) — (3.15в). В результате получим

$$\begin{aligned}
s_{ij}^{H,\,E,\,\sigma} &= s_{ij}^{H,\,E,\,\theta} - \frac{\alpha_i^{E,\,H}\alpha_j^{E,\,H}\theta}{\rho c^{E,\,H,\,T}}, \\
d_{mi}^{H,\,\sigma} &= d_{mi}^{H,\,\theta} - \frac{\alpha_i^{E,\,H}p_m^{T,\,H}\theta}{\rho c^{E,\,H,\,T}}, \\
d_{mi}^{E,\,\sigma} &= d_{mi}^{E,\,\theta} - \frac{\alpha_i^{E,\,H}i_m^{T,\,E}\theta}{\rho c^{E,\,H,\,T}}, \\
\varepsilon_{mk}^{T,\,H,\,\sigma} &= \varepsilon_{mk}^{T,\,H,\,\theta} - \frac{p_m^{T,\,H}p_k^{T,\,H}\theta}{\rho c^{E,\,H,\,T}}, \\
m_{mk}^{T,\,\sigma} &= m_{mk}^{T,\,\theta} - \frac{i_k^{T,\,E}p_m^{T,\,H}\theta}{\rho c^{E,\,H,\,T}}, \\
\mu_{mk}^{T,\,E,\,\sigma} &= \mu_{mk}^{T,\,E,\,\theta} - \frac{i_m^{T,\,E}i_k^{T,\,E}\theta}{\rho c^{E,\,H,\,T}}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Для пьезоэлектрической керамики (керамика PZT-5 фирмы «Кливайт»), являющейся типичным сегнетоэлектриком, эта разность для s_{33}^E, d_{33} и ε_{33}^T составляет соответственно 0,03, 0,1 и 0,15%. Для пьезоэлектрических материалов, которые не являются пироэлектриками, адиабатические и изотермические пьезоэлектрические и диэлектрические константы оказываются одинаковыми.

Общие уравнения, аналогичные уравнениям (3.15), но для адиабатических условий можно получить при использовании термодинамического потенциала H_A, определяемого выражениями

$$\begin{aligned}
H_A &= U - S_i T_i - E_m D_m - B_m H_m, \\
dH_A &= -S_i\,dT_i - D_m\,dE_m - B_m\,dH_m + \theta\,d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

В этом случае получаем следующие уравнения:

$$S_i = s_{ij}^{H,\,E,\,\sigma}T_j + d_{mi}^{H,\,\sigma}E_m + d_{mi}^{E,\,\sigma}H_m + \left(\frac{\partial S_i}{\partial \sigma}\right)_{E\ H} d\sigma, \tag{3.18а}$$

$$D_m = d_{mi}^{H,\,\sigma}T_i + \varepsilon_{mk}^{T,\,H,\,\sigma}E_k + m_{mk}^{T,\,\sigma}H_k + \left(\frac{\partial D_m}{\partial \sigma}\right)_{T,\,H} d\sigma, \tag{3.18б}$$

$$B_m = d_{mi}^{E,\,\sigma}T_i + \mu_{mk}^{T,\,E,\,\sigma}H_k + m_{km}^{T,\,\sigma}E_k + \left(\frac{\partial B_m}{\partial \sigma}\right)_{T,\,E} d\sigma, \tag{3.18в}$$

$$\begin{aligned}
d\theta = \left(\frac{\partial \theta}{\partial T_i}\right)_{E,\,H} dT_i + \left(\frac{\partial \theta}{\partial E_m}\right)_{T,\,H} dE_m + \\
+ \left(\frac{\partial \theta}{\partial H_m}\right)_{T,\,E} dH_m + \frac{\theta}{\rho c^{E,\,T,\,H}} d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.18г}$$

Поскольку dH_A является полным дифференциалом, должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial S_i}{\partial \sigma}\right)_{E,\,H} &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial T_i}\right)_{E,\,H},\\ \left(\frac{\partial D_m}{\partial \sigma}\right)_{T,\,H} &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial E_m}\right)_{T,\,H},\\ \left(\frac{\partial B_m}{\partial \sigma}\right)_{T,\,E} &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial H_m}\right)_{T,\,E}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Так как теплообменом колеблющихся пьезоэлектрических элементов с окружающей средой обычно можно пренебречь, должны выполняться адиабатические уравнения (3.18). Для этого случая ($dQ = 0\, d\sigma = 0$) уравнения, записанные в матричной форме, имеют следующий вид [1]):

$$\begin{aligned}S &= s^E T + d_t E,\\ D &= dT + \varepsilon^T E.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Здесь d_t — транспонированная матрица d, столбцы и строки которой (три строки и шесть столбцов) поменялись местами.

Выбирая в качестве независимых переменных механическое напряжение и индукцию, получаем

$$\begin{aligned}S &= s^D T + g_t D,\\ E &= -gT + \beta^T D.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Если независимыми переменными являются деформация и электрическое поле, то имеем уравнения

$$\begin{aligned}T &= c^E S - e_t E,\\ D &= eS + \varepsilon^S E.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Наконец, выбирая в качестве независимых переменных деформацию и индукцию, получаем

$$\begin{aligned}T &= c^D S - h_t D,\\ E &= -hS + \beta^S D.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Из уравнений (3.20) — (3.23) следует определение пьезоэлектрических констант

$$\begin{aligned}d &= \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T = \left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E,\\ g &= \left(\frac{-\partial E}{\partial T}\right)_D = \left(\frac{\partial S}{\partial D}\right)_T,\\ e &= \left(\frac{-\partial T}{\partial E}\right)_S = \left(\frac{\partial D}{\partial S}\right)_E,\\ h &= \left(\frac{-\partial T}{\partial D}\right)_S = \left(\frac{-\partial E}{\partial S}\right)_D.\end{aligned} \tag{3.24}$$

[1]) Магнитные члены не учитываются, и уравнение (3.18 г) для $d\theta$ исключается.

Модули упругости c_{ij} и диэлектрические «непроницаемости» β_{mk} связаны с упругими податливостями и диэлектрическими проницаемостями следующими выражениями:

$$c_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}}{\Delta}, \tag{3.25}$$

$$\beta_{mk} = \frac{(-1)^{m+k}\,\Delta_{mk}}{\Delta}. \tag{3.26}$$

В выражении (3.25) Δ — детерминант матрицы s_{ij}, а Δ_{ij} — минор, получающийся путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца. В выражении (3.26) Δ — детерминант матрицы ε_{mk}, а Δ_{mk} — минор, получающийся в результате вычеркивания m-й строки и k-го столбца.

Четыре пьезоэлектрические константы выражаются друг через друга следующим образом:

$$\begin{aligned} d_{mi} &= \varepsilon^{T}_{nm} g_{ni} = e_{mj} s^{E}_{ji}, \\ g_{mi} &= \beta^{T}_{nm} d_{ni} = h_{mj} s^{D}_{ji}, \\ e_{mi} &= \varepsilon^{S}_{nm} h_{ni} = d_{mj} c^{E}_{ji}, \\ h_{mi} &= \beta^{S}_{nm} e_{ni} = g_{mj} c^{D}_{ji}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

где $m,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6$.

В большинстве случаев наиболее полезной оказывается система уравнений (3.20), поскольку электрическое поле и механическое напряжение являются весьма удобными независимыми переменными. Также удобна система уравнений (3.21), поскольку для кристаллов всех классов, за исключением триклинных и моноклинных, $\beta_{mk} = 1/\varepsilon_{mk}$. Системы уравнений (3.22) и (3.23), в которых в качестве независимых переменных используются компоненты деформации, удобны для описания передачи импульсов акустических колебаний, когда преобладает деформация вдоль одного из направлений. Для резонаторов в большинстве случаев, строго говоря, деформацию нельзя считать одномерной, однако это является достаточно хорошим приближением в случае резонансных колебаний тонких пластин большой площади на толщинных и некоторых сдвиговых модах. Условие одномерного напряжения имеет место для резонансных колебаний на продольных модах и в статическом случае. Таким образом, системы уравнений (3.20) и (3.21) во многих практически интересных случаях можно существенно упростить, в то время как системы (3.22) и (3.23) поддаются упрощению лишь в некоторых специальных случаях.

Наиболее важным свойством пьезоэлектрических материалов является наличие коэффициентов пьезоэлектрической связи. Коэффициент пьезоэлектрической связи определяется как отношение плотности взаимной упругой и электрической энергии к среднему геометрическому значению плотности внутренних упругой и электрической энергий. Если пренебречь тепловыми и магнитными членами, то внутренняя энергия линейной системы определяется выражением

$$U = \frac{1}{2} S_i T_i + \frac{1}{2} D_m E_m, \qquad i = 1, 2, \ldots, 6, \qquad m = 1, 2, 3. \quad (3.28)$$

Используя систему уравнений (3.20), выражение (3.28) можно записать в следующем виде:

$$U = \frac{1}{2} T_i s_{ij}^E T_j + \frac{1}{2} T_i d_{mi} E_m + \frac{1}{2} E_m d_{mi} T_i + \frac{1}{2} E_m \varepsilon_{mk}^T E_k = \\ = U_e + 2U_m + U_d. \quad (3.29)$$

Отсюда коэффициент связи определяется как

$$k = \frac{U_m}{\sqrt{U_e U_d}}, \quad (3.30)$$

где U_m — взаимная энергия, U_e — упругая энергия, а U_d — электрическая энергия [1]).

Выражения, аналогичные (3.29), можно получить также из систем уравнений (3.21) — (3.23). Однако эти выражения используются реже, чем (3.29). В общем случае выражение (3.29) значительно усложняется, однако если количество констант уменьшено в результате учета симметрии или если отсутствует большинство компонент механических напряжений, то это выражение все же удается в значительной степени упростить. Рассмотрим, например, стержень с электродами, перпендикулярными оси Z, и напряжением, приложенным вдоль оси X. Стержень может свободно расширяться в поперечном направлении, поэтому все остальные напряжения равны нулю. Для поля, приложенного вдоль оси Z, вместо (3.29) имеем

$$U = \frac{1}{2} T_1^2 s_{11}^E + E_3 T_1 d_{31} + \frac{1}{2} \varepsilon_{33}^T E_3^2. \quad (3.31)$$

[1]) Определение (3.30) справедливо для систем уравнений (3.20) и (3.23), в которых экстенсивные величины расположены слева, а интенсивные — справа. В системах уравнений (3.21) и (3.22) экстенсивные и интенсивные величины расположены как слева, так и справа, поэтому при их использовании величину, стоящую в левой части (3.30), следует заменить на $k/(1-k^2)^{1/2}$.

Таким образом, статический коэффициент связи, согласно определению (3.30), равен

$$k_{31} = \frac{{}^1/_2 E_3 T_1 d_{31}}{{}^1/_2 \sqrt{T_1^2 E_3^2 s_{11}^E \varepsilon_{33}^T}} = \frac{d_{31}}{\sqrt{\varepsilon_{33}^T s_{11}^E}}. \qquad (3.32)$$

В динамических случаях коэффициенты связи зависят от распределения механических напряжений и, вообще говоря, имеют меньшую величину, чем коэффициент связи для статической системы, поскольку не вся упругая энергия преобразуется в электрическую энергию. Однако имеются исключения для определенных резонансных мод колебаний кристаллов некоторых классов. Основная резонансная мода пьезокерамического кольца, поляризованного радиально или аксиально, не имеет обертонов, и, следовательно, статический и динамический коэффициенты связи оказываются идентичными. Это справедливо и для основной моды колебаний радиально поляризованной сферической оболочки. Пьезоэлектрический стержень, концы которого нагружены большими массами, также имеет идентичные статический и динамический коэффициенты связи, поскольку в этом случае также вся упругая энергия участвует в образовании диэлектрической поляризации.

Коэффициенты пьезоэлектрической связи характеризуют эффект преобразования мощности в пьезоэлектрическом материале лучше, чем набор упругих, диэлектрических и пьезоэлектрических констант, и, например, ширина полосы электромеханического фильтра или преобразователя непосредственно зависит от соответствующего коэффициента связи. Более того, с помощью коэффициентов связи можно непосредственно сравнивать пьезоэлектрические материалы, имеющие существенно различные (по порядку величины) диэлектрические проницаемости и модули упругости. Однако следует учитывать, что коэффициент связи не является тензором и формулы преобразования тензоров в данном случае не могут быть использованы.

(2) Влияние граничных условий на величину коэффициента связи хорошо иллюстрируется рассмотрением сравнительно простого, но с точки зрения техники наиболее важного случая — характеристик поляризованной сегнетоэлектрической керамики, имеющей симметрию ∞m. Коэффициенты связи в этом случае идентичны соответствующим коэффициентам кристалла класса $6mm$, имеющего структуру типа вюрцита, однако у керамики направление оси симметрии может меняться от точки к точке за счет применения того или иного способа поляризации, в результате чего все тело в целом может иметь, например, сферическую или цилиндрическую симметрию. Рассмотрим систему напряжений $T_1 = T_2$, $T_3 = 0$. В этом случае из условия, накладываемого

симметрией, имеем $S_1 = S_2$, однако в общем случае $S_3 \neq 0$. Для поля, параллельного оси Z, выражения (3.29) и (3.30) дают планарный коэффициент связи, названный так потому, что он определен для плоскости (перпендикулярной оси Z), в которой действуют изотропные механические напряжения:

$$k_p = \sqrt{\frac{2}{1-\sigma^E}}\,\frac{d_{31}}{\sqrt{\varepsilon_{33}^T s_{11}^E}} = \sqrt{\frac{2}{1-\sigma^E}}\,k_{31}, \qquad (3.33)$$

где

$$\sigma^E = \frac{-s_{12}^E}{s_{11}^E} \text{ — коэффициент Пуассона.}$$

Рассмотрим теперь систему напряжений, при которой все деформации в плоскости, перпендикулярной оси Z, отсутствуют. В этом случае $S_1 = S_2 = 0$, $S_3 \neq 0$, $T_1 = T_2 \neq 0$, $T_3 \neq 0$. К этой системе напряжений, как уже отмечалось выше, трудно применить системы уравнений (3.20) и (3.21). Однако вычисление коэффициента связи с помощью систем уравнений (3.22) и (3.23) оказывается весьма простым. Используя эти уравнения и уравнение (3.28), получаем

$$k_t = \frac{h_{33}}{\sqrt{c_{33}^D \beta_{33}^S}} = h_{33}\sqrt{\frac{\varepsilon_{33}^S}{c_{33}^D}}. \qquad (3.34)$$

Таким образом, коэффициент пьезоэлектрической связи k_t (толщинный коэффициент связи) относится к случаю одномерной деформации, параллельной полярной оси.

Другой коэффициент связи определяется в результате рассмотрения случая одномерного напряжения, параллельного оси Z. Здесь $S_1 = S_2 \neq 0$, $S_3 \neq 0$, $T_1 = T_2 = 0$, $T_3 \neq 0$. В этом случае системы уравнений (3.20) и (3.21) вместе с уравнением (3.30) легко приводят к следующему результату:

$$k_{33} = \frac{d_{33}}{\sqrt{\varepsilon_{33}^T s_{33}^E}}. \qquad (3.35)$$

Коэффициент связи k_t выражается через k_{33} и k_{31} следующим образом:

$$k_t = \frac{k_{33} - A k_p}{\sqrt{1-A^2}\,\sqrt{1-k_p^2}} \qquad \left(A = \frac{\sqrt{2}\,s_{13}^E}{\sqrt{s_{33}^E (s_{11}^E + s_{12}^E)}}\right). \qquad (3.36)$$

В уравнениях этого типа принимается, что коэффициент связи имеет тот же знак, что и соответствующий пьезо модуль d, хотя вообще коэффициент связи не имеет знака.

Коэффициент связи k_{33} является статической величиной, соответствующей основной резонансной моде колебаний аксиально

поляризованного твердого цилиндра с электродами, нанесенными на его концевые грани. Здесь резонансы плоского (планарного) типа имеют значительно более высокие частоты, чем продольные моды колебаний, причем боковые поверхности образца не закреплены. С другой стороны, статический коэффициент связи k_t соответствует резонансу колебаний по толщине пластины, имеющей электроды на наибольших поверхностях и поляризованной между этими электродами. Здесь основной модой является планарная мода (статический коэффициент связи k_p). Моды колебаний по толщине наблюдаются на значительно более высоких частотах, при которых боковые поверхности можно считать закрепленными. Динамические коэффициенты связи, согласно высказанным выше соображениям, должны быть меньше, чем соответствующие статические коэффициенты. Различия между ними зависят от значений коэффициентов связи, но обычно динамические коэффициенты меньше статических на 20—25%.

Из сказанного ясно, что имеется большое число коэффициентов связи [1]) и что некоторые из них превосходят другие. Для заданного электрического поля может быть найдена система механических напряжений, для которой получается наибольший коэффициент пьезоэлектрической связи. Такие коэффициенты связи можно назвать инвариантными или собственными коэффициентами связи [25]. В качестве примера рассмотрим кристалл ADP, принадлежащий к классу $\bar{4}2m$. В данном случае имеются только две независимые пьезоэлектрические постоянные $d_{14} = d_{25}$ и d_{36}.

Электрическое поле, приложенное вдоль любой из главных осей, вызывает только деформацию сдвига в соответствующей плоскости, причем все остальные механические напряжения оказываются пьезоэлектрически неактивными. Инвариантные коэффициенты связи этого кристалла равны

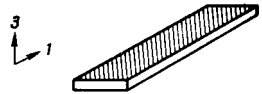
$$k_{36} = k_{i3} = \frac{d_{36}}{\sqrt{s_{66}^E \varepsilon_{33}^T}}, \qquad k_{14} = k_{25} = k_{i1} = \frac{d_{14}}{\sqrt{s_{44}^E \varepsilon_{11}^T}}. \tag{3.37}$$

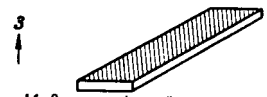
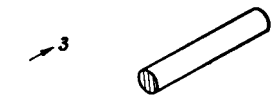
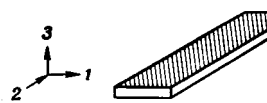
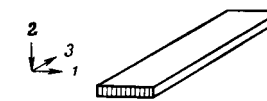
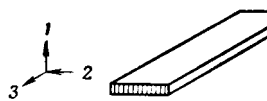
Баервальд называет упругие и диэлектрические компоненты «живыми», если они содержат пьезоэлектрическое взаимодействие, и «мертвыми», если оно отсутствует. Согласно этой терминологии, в случае стержня из ADP с 45° Z-срезом, совершающего продольные резонансные колебания, имеют место как «мертвые», так и «живые» упругие компоненты, в то время как пластина,

[1]) Для каждой системы граничных условий и для каждой ориентации электрического поля существует свой коэффициент связи.

Таблица 14

Коэффициенты связи для пьезоэлектриков симметрии ∞m и $6mm$ (типичные представители — пьезоэлектрическая керамика и кристаллы типа вюрцита)

Коэффициент связи	Упругие напряжения и деформации	Тип резонанса	Формула	Значение коэффициента связи		k/k_{i3}	
				PZT-5	CdS	PZT-5	CdS
k_{31}	$T_1 \neq 0$; $T_2 = T_3 = 0$; $S_1 \neq 0$; $S_2 \neq 0$; $S_3 \neq 0$	 Основная мода	$\frac{d_{31}}{\sqrt{\varepsilon_{33}^T s_{11}^E}}$	−0,344	−0,119	−0,48	−0,43
k_{33}	$T_1 = T_2 = 0$; $T_3 \neq 0$; $S_1 = S_2 \neq 0$; $S_3 \neq 0$	Основная мода	$\frac{d_{33}}{\sqrt{\varepsilon_{33}^T s_{33}^E}}$	+0,705	+0,262	+0,99	+0,94
k_p	$T_1 = T_2 \neq 0$; $T_3 = 0$; $S_1 = S_2 \neq 0$; $S_3 \neq 0$	Основная мода	$k_{31} \sqrt{\frac{2}{1-\sigma^E}}$	−0,600	−0,234	−0,84	−0,84

k_t	$T_1=T_2\neq 0;$ $T_3\neq 0$ $S_1,\ S_2=0;$ $S_3\neq 0$	 Мода колебаний **по толщине**	$h_{33}\sqrt{\frac{\overline{e_{33}^S}}{c_{33}^D}}=\frac{k_{33}-Ak_p}{\sqrt{1-A^2}\sqrt{1-k_p^2}}$	+0,486	+0,154	+0,68	+0,55
k_p'	$T_1=T_2\neq 0;$ $T_3\neq 0$ $S_1=S_2\neq 0;$ $S_3=0$	 Боковая мода (планарная)	$\frac{k_p-Ak_{33}}{\sqrt{1-A^2}\sqrt{1-k_{33}^2}}$	—0,179	—0,097	—0,25	—0,35
k_{31}'	$T_1\neq 0;\ T_2\neq 0;$ $T_3=0$ $S_1\neq 0;\ S_2=0;$ $S_3\neq 0$	 Мода колебаний **по ширине**	$\frac{k_{31}}{\sqrt{1-k_{31}^2}}\sqrt{\frac{1+\sigma^E}{1-\sigma^E}}$	—0,527	—0,203	—0,74	—0,73
k_{31}''	$T_1\neq 0;\ T_2=0;$ $T_3\neq 0$ $S_1\neq 0;\ S_2\neq 0;$ $S_3=0$	 Мода колебаний по ширине	$\frac{k_{31}-Bk_{33}}{\sqrt{1-k_{33}^2}}$	—0,080	—0,039	—0,11	—0,14
k_{31}'''	$T_1\neq 0;\ T_2\neq 0;$ $T_3\neq 0$ $S_1\neq 0;\ S_2=0;$ $S_3=0$	 Мода колебаний по толщине	$\sqrt{\frac{(k_p-Ak_{33})^2}{1-A^2}-(k_{31}-Bk_{33})^2}{1-k_{33}^2-(k_{31}-Bk_{33})^2}$	—0,159	—0,089	—0,22	—0,32

Продолжение табл. 14

Коэффициент связи	Упругие напряжения и деформации	Тип резонанса	Формула	Значение коэффициента связи		k/k_{i3}	
				PZT-5	CdS	PZT-5	CdS
k'_{33}	$T_1 \neq 0;\ T_2 = 0;\ T_3 \neq 0$ $S_1 = 0;\ S_2 \neq 0;\ S_3 \neq 0$	 Мода колебаний по ширине	$\frac{k_{33} - Bk_{31}}{\sqrt{(1-B^2)(1-k_{31}^2)}}$	+0,660	+0,235	+0,92	+0,85
k_h	$T_1 = T_2 = T_3 \neq 0$ $S_1 = S_2 \neq 0;\ S_3 \neq 0$ (всестороннее сжатие)	—	$\frac{2d_{31} + d_{33}}{\sqrt{\varepsilon_{33}^T [2(s_{11}^E + s_{12}^E) + 4s_{13}^E + s_{33}^E]}} = \frac{d_h}{\sqrt{\varepsilon_{33}^T s_h^E}}$	+0,072	0	+0,10	0
k_{l3}	—	—	$\sqrt{\frac{k_p^2 + k_{33}^2 - 2Ak_p k_{33}}{1 - A^2}}$	+0,715	+0,278	+1,00	+1,00
$k_{i1} = k_{24} = k_{15}$	—	—	$\frac{d_{15}}{\sqrt{\varepsilon_{11}^T s_{44}^E}} = h_{15}\sqrt{\frac{\varepsilon_{11}^s}{c_{44}^D}}$	+0,685	−0,189	+0,96	−0,68

совершающая сдвиговые колебания, имеет только «живые» компоненты. В этом случае ясно, что $k_{i3} = k_{36} > k'_{31}$.

Баервальд показал, что введение понятия инвариантных коэффициентов связи позволяет дать полное представление о колебаниях даже в наиболее сложном случае (триклинной симметрии) с помощью трех коэффициентов связи, точно так же, как введение главных осей симметрии позволяет дать полное описание диэлектрических свойств триклинных и моноклинных кристаллов с помощью трех диэлектрических постоянных.

Для керамики (симметрия ∞m) имеется два инвариантных коэффициента связи, причем один из них двукратно вырожден (поля вдоль осей X и Y). Электрическое поле вдоль оси Z вызывает как аксиальные, так и планарные напряжения. Поскольку аксиальные и планарные коэффициенты связи имеют противоположные знаки, действие сжимающего напряжения, параллельного оси Z, усиливается планарным напряжением растяжения. Соответствующие инвариантные коэффициенты связи определяются отношением диэлектрических проницаемостей свободного и закрепленного образцов (неактивные компоненты деформации не оказывают влияния):

$$\left\{k_{i3}^2 = 1 - \left(\frac{\varepsilon_{33}^S}{\varepsilon_{33}^T}\right), \quad k_{i1}^2 = k_{i2}^2 = k_{15}^2 = 1 - \frac{\varepsilon_{11}^S}{\varepsilon_{11}^T}\right\}.$$

Пьезокерамика имеет 11 различных коэффициентов связи, описывающих пьезоэлектрические эффекты для электрического поля, приложенного параллельно оси Z, и один коэффициент связи для поля, перпендикулярного оси Z. Каждому из них соответствует определенная система граничных условий. Формулы для всех этих коэффициентов связи вместе с соответствующими граничными условиями приведены в табл. 14. Численные значения даны для типичной пьезокерамики PZT-5 и для гексагональных кристаллов сульфида кадмия ($6mm$). В случае поля, параллельного оси Z, главными коэффициентами связи являются k_{33} и k_p, а все остальные коэффициенты можно выразить через эти два. Для получения соответствующих зависимостей необходимы численные значения следующих трех постоянных:

$$\sigma^E = \frac{-s_{12}^E}{s_{11}^E},$$

$$A = \frac{\sqrt{2}\, s_{13}^E}{\sqrt{s_{33}^E (s_{11}^E + s_{12}^E)}}, \tag{3.38}$$

$$B = \frac{s_{13}^E}{\sqrt{s_{11}^E s_{33}^E}}.$$

2. Волновые уравнения для пьезоэлектрической среды

Пьезоэлектрическая среда существенно анизотропна, и поэтому в общем случае необходимо использовать волновые уравнения для анизотропных сред, выведенные Кристоффелем [26] и рассмотренные в монографиях Мэзона [27] и Лява [28] (см. гл. 1, § 7 и гл. 4, § 7, п. 2). Вдоль каждого направления в кристалле могут распространяться три акустические волны со взаимно перпендикулярными направлениями смещений и в общем случае с различными скоростями. В некоторых особых случаях распространяются чисто продольные или чисто сдвиговые волны. Такие волны распространяются вдоль некоторого произвольного направления x' в анизотропной среде, если упругие постоянные $c'_{16} = c'_{15} = c'_{56} = 0$. Рассмотрение смешанных мод колебаний существенно для триклинных, моноклинных, ромбоэдрических и некоторых тетрагональных кристаллов или для кристаллов с более высокой симметрией, если волна распространяется не вдоль одной из осей симметрии. При распространении волны вдоль одной из осей симметрии, например ромбического кристалла, колебания являются либо чисто продольными, либо чисто сдвиговыми. Смешанные моды появляются в тех случаях, когда направление распространения не параллельно одной из осей симметрии, как, например, в кристаллах сегнетовой соли L-среза.

Большей частью, однако, приходится решать задачи о распространении либо чисто продольных, либо чисто сдвиговых волн. Поэтому при обобщении волнового уравнения для пьезоэлектрической среды мы ограничимся рассмотрением только этих случаев. Без утраты общности мы можем считать ось x направлением распространения волны и записать уравнение движения в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{1i}}{\partial x} . \tag{3.39}$$

В пьезоэлектриках механическое напряжение является функцией не только геометрической деформации, но и электрического поля. В производимых здесь выкладках мы основываемся на работах Кьяме [29] и Хатсона и Уайта [30]. Соответственно пьезоэлектрические уравнения в тензорной форме запишутся следующим образом [1]):

$$T_{1i} = c^E_{1i1k} S'_{1k} - e_{k1i} E_k, \tag{3.40а}$$

$$D_k = e_{k1i} S'_{1i} + \varepsilon^S_{ik} E_i. \tag{3.40б}$$

[1]) В соответствие с обычным определением компоненты деформации сдвига равны $S_{ij} = {}^1/_2 [(\partial \xi_i/\partial x_j) + (\partial \xi_j/\partial x_i)]$, где $i \neq j$. Для плоской волны $\partial/\partial x_j = 0$, если $j \neq 1$; поэтому удобно определить деформацию $S'_{1k} = S_{1k} + S_{k1} = \partial \xi_k/\partial x_1$. Подставляя это выражение, получаем уравнения (3.40) в удобной тензорной форме.

Подставляя (3.40а) в уравнение (3.39), получаем общее волновое уравнение для пьезоэлектрической среды

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = c^E_{11k} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x^2} - e_{k11} \frac{\partial E_k}{\partial x} . \tag{3.41}$$

Предполагается, что волны являются плоскими (следовательно, все частные производные по y и z равны нулю) и что существует только x-составляющая электрического поля (т. е. волновой фронт является эквипотенциальной поверхностью). В случае распространения продольной волны уравнение (3.41) можно записать в более простом виде

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = c^E_{11} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} - e_{11} \frac{dE_1}{\partial x} , \tag{3.42}$$

где использованы матричные элементы, введенные выше.

Если объемный заряд отсутствует, как это имеет место для кристаллических диэлектриков и для керамики, то $\operatorname{div} D = 0$ и $\partial D/\partial x = 0$. В этом случае $\partial E_1/\partial x = [(-e_{11}/\varepsilon^S_{11})(\partial^2 \xi_1/\partial x^2)]$, и уравнение (3.42) упрощается и принимает следующий вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = c^E_{11} \left(1 + \frac{e^2_{11}}{\varepsilon^S_{11} c^E_{11}}\right) \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = \left(\frac{c^E_{11}}{1 - k_t^2}\right) \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} . \tag{3.43}$$

Если $k_t^2 = e^2_{11}/\varepsilon^S_{11} c^D_{11} \neq 0$, то уравнение (3.43) записывается в наиболее компактной форме

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = c^D_{11} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} \qquad \text{при } \sigma_{11} \to 0, \tag{3.44}$$

где σ_{11} — объемная проводимость. Напротив, если среда является идеальным проводником, то в уравнении (3.42) $E_1 = 0$ и, следовательно,

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = c^E_{11} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} \qquad \text{при } \sigma_{11} \to \infty. \tag{3.45}$$

Хатсон и Уайт [30] показали, что в пьезоэлектрической среде с заметной объемной проводимостью плоские волны распространяются со скоростью, значение которой заключено между $(c^D/\rho)^{1/2}$ и $(c^E/\rho)^{1/2}$ при условии, что пьезоэлектрическое поле возбуждается параллельно направлению распространения. Хатсон и др. [31] и Уайт [32] показали далее, что в полупроводниках, обладающих пьезоэлектрическими свойствами, звуковые волны можно усилить или ослабить путем приложения постоян-

ного электрического поля, параллельного направлению распространения, также при условии, что пьезоэлектрическое поле возбуждается параллельно этому направлению. Взаимодействие постоянного тока, протекающего через пьезоэлектрик, с упругой волной возбуждает перемещающееся переменное электрическое поле.

Влияние проводимости в уравнении (3.42) легко определить, если положить

$$J_1 = \sigma_{11} E_1, \tag{3.46}$$

где σ_{11} — эффективная проводимость.

Используя определение $J_1 = \partial D_1/\partial t$, полагая $D_1 = D_0 e^{j\omega t}$ и подставляя эти выражения в уравнение (3.40б), получаем

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = -\frac{e_{11}}{(j\sigma_{11}/\omega) + \varepsilon_{11}^S} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} . \tag{3.47}$$

Подставляя (3.47) в уравнение (3.42), получаем общее решение для распространения продольных волн вдоль оси x:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = c_{11}^E \left\{ 1 + \frac{e_{11}^2}{[(j\sigma_{11}/\omega) + \varepsilon_{11}^S] c_{11}^E} \right\} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} . \tag{3.48}$$

При $\sigma_{11} \to \infty$ (3.48) переходит в уравнение (3.45), а при $\sigma_{11} \to 0$ — в уравнение (3.43).

Распространение вдоль оси x сдвиговых волн со смещением частиц вдоль оси z в общем случае описывается следующим уравнением:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial t^2} = c_{55}^E \left\{ 1 + \frac{e_{15}^2}{[(j\sigma_{11}/\omega) + \varepsilon_{11}^S] c_{55}^E} \right\} \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} . \tag{3.49}$$

Кьяме [29, 33] учел также влияние механического затухания в общих уравнениях и совместно с Хатсоном и Уайтом [30] показал, что в общем случае необходимо учитывать пьезоэлектрическое взаимодействие трех звуковых волн и двух электромагнитных волн. Хатсон и Уайт [30] показали, что взаимодействием с электромагнитными волнами можно пренебречь для всех интересных с точки зрения практики случаев. Эффекты, связанные с механическим затуханием, учитываются путем введения дополнительной силы, действующей на единицу объема, которая пропорциональна скорости. Тогда напряжение в тензорной форме

определяется выражением

$$T_{1l} = c^E_{1i1k} S_{1k} + r_{1i1k} \frac{\partial S_{1k}}{\partial t} + e_{k1i} E_k. \tag{3.50}$$

Отсюда получаем уравнения (3.48) и (3.49) в окончательном виде

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = c^E_{11} \left\{ 1 + \frac{e^2_{11}}{[(j\sigma_{11}/\omega) + \varepsilon^S_{11}] c^E_{11}} + \frac{j\omega r_{11}}{c^E_{11}} \right\} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}, \tag{3.51}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial t^2} = c^E_{55} \left\{ 1 + \frac{e^2_{15}}{[(j\sigma_{11}/\omega) + \varepsilon^S_{11}] c^E_{55}} + \frac{j\omega r_{55}}{c^E_{55}} \right\} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}. \tag{3.52}$$

Из уравнений (3.48) и (3.49) легко видеть, что для кристаллических диэлектриков звуковые волны распространяются со скоростью $(c^D/\rho)^{1/2}$, если поле пьезоэлектрических зарядов параллельно направлению распространения; при невыполнении этого условия скорость равна $(c^E/\rho)^{1/2}$. Проводимость влияет на скорость распространения звука только в первом случае. В качестве практического примера определим скорости для пьезоэлектрической керамики (∞m) или для имеющих эквивалентную симметрию $6mm$ типичных полупроводниковых пьезоэлектриков CdS или CdSe. Полагая $\sigma \to 0$, получаем, что скорость распространения продольных волн в направлении, перпендикулярном оси Z, равна $(c^E_{11}/\rho)^{1/2}$, а скорость распространения этих волн вдоль оси Z равна $(c^D_{33}/\rho)^{1/2}$. Сдвиговые волны, у которых как направление распространения, так и направление смещения частиц перпендикулярны оси Z, имеют скорость распространения $(c_{66}/\rho)^{1/2}$. Скорость распространения сдвиговых волн вдоль оси Z $v_{s3} = (c^E_{44}/\rho)^{1/2}$; для направления распространения, перпендикулярного оси Z, и направления смещения частиц, параллельного оси Z, скорость $v_{s1} = (c^D_{44}/\rho)^{1/2}$. Коэффициент связи k_{15} выражается через скорости v_{s3} и v_{s1} следующим образом:

$$k^2_{15} = 1 - \frac{v^2_{s3}}{v^2_{s1}}. \tag{3.53}$$

Для CdS или CdSe скорость продольных волн, распространяющихся параллельно оси Z, равна $(c^D_{33}/\rho)^{1/2}$, если $\sigma_{33} \ll \omega\varepsilon^S_{33}$, или $(c^E_{33}/\rho)^{1/2}$, если $\sigma_{33} \gg \omega\varepsilon^S_{33}$. Коэффициент связи k_t выражается через скорость в диэлектрике v_i и скорость в полупроводнике v_c следующим образом:

$$k^2_t = 1 - \frac{v^2_c}{v^2_i}. \tag{3.54}$$

§ 4. ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКИ

1. Общие положения; электрострикция; линейные уравнения для поляризованной среды при слабых возбуждениях

Общее рассмотрение симметрии системы показывает, что линейные члены в уравнениях, связывающих электрическое поле и индукцию с упругой деформацией и напряжением, имеются лишь для среды, лишенной центра симметрии. Такая среда может быть образована монокристаллами, не имеющими центра симметрии, областями определенным образом ориентированных кристаллов или она может быть более или менее регулярно поляризована в результате внешних воздействий. Пьезоэлектрические свойства сред, которые не являются монокристаллами, изучались многими исследователями, однако наблюдаемые в них эффекты были слабо выражены и плохо воспроизводились [1]. Положение существенно изменилось после открытия пьезоэлектрического эффекта у поликристаллического титаната бария, подвергнутого предварительной поляризации в сильном электрическом поле [34, 35].

Линейные члены в уравнениях, описывающих пьезоэлектрический эффект в таких материалах, могут быть формально выведены [4] из соотношений, определяющих электрострикцию в неполяризованном материале, в предположении, что электрическая индукция $\delta D = \varepsilon \delta E$, возникающая в результате действия малого внешнего электрического поля δE, векторно складывается с остаточной индукцией D_0, образовавшейся в процессе предварительной поляризации среды. Поляризация обычно осуществляется путем приложения сильного электрического поля, например 20 *кв/см*, при температурах, лежащих в области точки Кюри. Однако подробное изучение свойств типичной поляризованной керамики [39] показало, что основная часть электромеханического взаимодействия обусловлена пьезоэлектрическим эффектом в отдельных кристаллах, а не переориентацией доменов или движением доменных стенок. При более глубоком рассмотрении пьезоэлектрический эффект в сегнетоэлектрическом кристалле можно представить как электрострикцию во внутреннем поле. В самом деле, было показано [23], что пьезоэлектрический эффект можно рассматривать как результат электрострикции, проявляющейся во взаимодействии приложенного электрического поля и спонтанной поляризации, например в тетрагональном монокристалле $BaTiO_3$ [23]. Однако описание этого явления как пьезоэлектрического эффекта в большинстве практически интересных случаев не приводит к каким-либо затруднениям.

Остановимся теперь подробно на феноменологическом определении пьезоэлектрических коэффициентов поляризованной сегнетоэлектрической керамики, исходя из предположения о наличии у нее электрострикции. Обусловленная полной электрической индукцией D деформация имеет цилиндрическую симметрию и описывается продольными и поперечными компонентами S_3 и $S_1 = S_2$, которые являются функциями D:

$$\begin{aligned} S_3 &= q_{33}D_3^2 + r_{33}D_3^4 + \ldots, \\ S_1 &= S_2 = q_{31}D_3^2 + r_{31}D_3^4 + \ldots. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Пьезоэлектрические постоянные g_{31} и g_{33} определяются как отношения приращения деформации к изменению индукции δD_3, обусловленному возбуждением, приложенным параллельно остаточной индукции D_0 ($D_{33} = D_0 + \delta D_3$):

$$\begin{aligned} g_{33} &= \frac{dS_3}{dD_3} = 2q_{33}D_0 + 4r_{33}D_0^3 + \ldots, \\ g_{31} &= \frac{dS_1}{dD_3} = 2q_{31}D_0 + 4r_{31}D_0^3 + \ldots. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Сдвиговый пьезоэффект в поляризованной керамике, открытый Черри и Адлером [40], описывается пьезоэлектрическими постоянными $g_{15} = g_{24}$. Он возникает при приложении сигнала δD_1 в направлении, перпендикулярном D_0. В этом случае эллипсоид деформации не меняется по величине, но поворачивается на угол $\delta D_1/D_0$. Результирующие приращения компонент деформации, отнесенные к исходным осям, равны

$$\delta S_3 = \delta S_1 = 0, \qquad \delta S_5 = 2(S_3^0 - S_1^0)\frac{\delta D_1}{D_0}, \tag{3.57}$$

где индекс 0 обозначает обусловленную индукцией D_0 остаточную деформацию. Далее имеем

$$g_{15} = \frac{\delta S_5}{\delta D_1} = 2D_0[(q_{33} - q_{31}) + (r_{33} - r_{31})D_0^2 + \ldots], \tag{3.58}$$

$$g_{15} - (g_{33} - g_{31}) = -2(r_{33} - r_{31})D_0^3 \ldots. \tag{3.59}$$

Таким образом, пьезоэлектрические постоянные g_{33} и g_{31} определяются как производные dS_3/dD_3 и dS_1/dD_3, в то время как g_{15} содержит только отношение полных S и D. Поэтому эффект насыщения S как функция D^2 влияет на величины g_{33} и g_{31} значительно сильнее, чем на величину g_{15}. Разность $g_{15} - (g_{33} - g_{31})$ может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от природы членов более высокого порядка. Для керамики $BaTiO_3$ эта разность положительна

Свойства некоторых

Величина	PZT-4	PZT-5	$PbZr_{0,54}Ti_{0,46}O_3$ [42]	$BaTiO_3$	95 вес.% $BaTiO_3$, 5 вес.% $CaTiO_3$
k_p	(—) 0,58	(—) 0,60	(—) 0,47	(—) 0,36	(—) 0,33
k_{31}	(—) 0,334	(—) 0,344	(—) 0,280	(—) 0,212	(—) 0,194
k_{33}	0,70	0,705	0,626	0,50	0,48
$k_{15}=k_{t1}$	0,71	0,685	0,701	0,48	0,48
k_{t3}	0,715	0,715	0,650	0,509	0,491
k_t	0,513	0,486	0,508	0,384	0,384
$\varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0$	1300	1700	450	1700	1200
$\varepsilon_{33}^S/\varepsilon_0$	635	830	260	1260	910
$\varepsilon_{11}^T/\varepsilon_0$	1475	1730	990	1450	1300
$\varepsilon_{11}^S/\varepsilon_0$	730	916	504	1115	1000
d_{33}, 10^{-12} *к/н*	289	374	152	190	149
d_{31}	—123	—171	—60,2	—78	—58
d_{15}	496	584	440	260	242
g_{33}, 10^{-3} *в·м/н*	26,1	24,8	38,1	12,6	14,1
g_{31}	—11,1	—11,4	—15,1	—5,2	—5,5
g_{15}	39,4	38,2	50,3	20,2	21,0
s_{11}^E, 10^{-12} *м²/н*	12,3	16,4	11,6	9,1	8,6
s_{33}^E	15,5	18,8	14,8	9,5	9,1
s_{12}^E	—4,05	—5,74	—3,33	—2,7	—2,6
s_{13}^E	—5,31	—7,22	—4,97	—2,9	—2,7
s_{44}^E	39,0	47,5	45,0	22,8	22,2
s_{66}	32,7	44,3	29,9	23,6	22,4

Таблица 15

пьезоэлектрических керамик

80 вес.% $BaTiO_3$, 12 вес.% $PbTiO_3$, 8 вес.% $CaTiO_3$	$PbNb_2O_6$	$Pb_{0,6}Ba_{0,4}Nb_2O_6$ [11]	$Na_{0,5}K_{0,5}NbO_3$ [43] [1])	$Na_{0,8}Cd_{0,1}NbO_3$ [11]
(—) 0,19	(—) 0,07	(—) 0,38	(—) 0,36, 0,45	(—) 0,30
(—) 0,113	(—) 0,045	(—) 0,22	(—) 0,22, 0,27	(—) 0,17
0,34	0,38	0,55	0,51, 0,53	0,42
0,30	—	—	—	—
0,35	—	—	—	—
0,30	—	—	—	—
450	225	1500	290, 420	2000
395	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
60	85	220	80, 160	200
—20	~—9	—90	—32, —49	—80
—	—	—	—	—
15,1	42,5	16,5	31,5, 43	11,3
—5,0	~—4,5	—6,8	—12,6, —13,1	—4,5
—	—	—	—	—
7,8	—	11,5	9,6, 8,7	10,5
8,1	25,4	—	—	—
—2,3	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
20,2	—	—	—	—

Величина	PZT-4	PZT-5	$PbZr_{0,54}Ti_{0,46}O_3$ [42]	$BaTiO_3$	95 вес.% $BaTiO_3$, 5 вес. % $CaTiO_3$
s_{11}^D	10,9	14,4	10,7	8,7	8,3
s_{33}^D	7,90	9,46	9,0	7,1	7,0
s_{12}^D	—5,42	—7,71	—4,24	—3,0	—2,9
s_{13}^D	—2,10	—2,98	—2,68	—1,9	—1,9
s_{44}^D	19,3	25,2	22,9	17,5	17,1
Q_C	500	75	680	300	400
Q_E	250	50	300	100	170
ρ (плотность), 10^3 *кг/м*^{3}	7,5	7,75	7,62	5,7	5,55
N_1 *гц·м/сек* [2])	1650	1400	1680	2200	2290
N_3 [3])	2000	1770	—	2520	2740
Температура Кюри, °С	328	365	370	115	115
Удельное сопротивление, *ом·м*	$>10^{10}$	$>10^{11}$	$>10^{10}$	$>10^{10}$	$>10^{10}$
α_3, 10^{-6}/*град*	[4])	[6])	—	+4,5	—
α_1	[5])	[6])	—	+7,5	—
Теплоемкость, *дж/кг·град*	420	420	420	500	500
Теплопроводность, *вт/м·град*	1,25	1,25	1,25	2,5	2,5
Статическая прочность на разрыв, *кг/см*^{2}	970	970	970	840	840
Динамическая прочность на разрыв, *кг/см*^{2}	245	280	245	210	210

80 вес.% $BaTiO_3$, 12 вес.% $PbTiO_3$, 8 вес.% $CaTiO_3$	$PbNb_2O_6$	$Pb_{0,6}Ba_{0,4}Nb_2O_6$ [11]	$Na_{0,5}K_{0,5}NbO_3$ [43] [1])	$Na_{0,8}Cd_{0,1}NbO_3$ [11]
7,7	—	10,9	—	10,2
7,15	21,8	—	—	—
—2,4	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
1200	11	250	130, 240	—
170	~100	100	50, 70	100
5,4	6,0	5,9	4,25, 4,46	4,3
2430	—	1915	2480, 2540	2350
—	—	—	—	—
140	570	260	420	240
$<10^{10}$	$7 \cdot 10^8$	10^{11}	$\sim 10^{10}$	10^{11}
—	—	—	—	—
—	—	—	—	
500	—	—	—	—
2,5	—	—	—	—
840	—	—	—	—
210	—	—	—	—

Продолжение табл. 15

Величина	PZT-4	PZT-5	$PbZr_{0,54}Ti_{0,46}O_3$ [42]	$BaTiO_3$	95 вес.% $BaTiO_3$, 5 вес.% $CaTiO_3$
c_{11}^E, 10^{10} *н/м²*	13,9	12,1	13,5	15,0	15,8
c_{12}^E	7,78	7,54	6,79	6,6	6,9
c_{13}^E	7,43	7,52	6,81	6,6	6,75
c_{33}^E	11,5	11,1	11,3	14,6	15,0
c_{44}^E	2,56	2,11	2,22	4,4	4,5
c_{66}	3,06	2,26	3,34	4,3	4,5
c_{11}^D	14,5	12,6	13,6	15,0	15,9
c_{12}^D	8,39	8,09	6,93	6,8	7,0
c_{13}^D	6,09	6,52	6,12	5,7	6,2
c_{33}^D	15,9	14,7	14,8	17,1	17,7
c_{44}^D	5,18	3,97	4,37	5,7	5,85
h_{31}, 10^8 *в/м*	−9,2	−7,3	−8,1	−3,9	−3,8
h_{33}	26,8	21,5	39,2	15,6	16,7
h_{15}	19,7	15,2	21,9	11,5	12,3
e_{31}, *к/м²*	−5,2	−5,4	−1,86	−4,35	−3,1
e_{33}	15,1	15,8	9,0	17,5	13,5
e_{15}	12,7	12,3	9,8	11,4	10,9

1) Первое значение для керамики, обожженной в обычных условиях, второе — для керамики, обжиг которой осуществлен под давлением.

2) N_1 — частотная постоянная тонкого стержня в электрическом поле, перпендикулярном длине $f_R \cdot l$.

3) N_3 — частотная постоянная тонкой пластины в электрическом поле, параллельном толщине $f_R \cdot t$.

4) α_3 равно $+2{,}5 \cdot 10^{-6}$ для температур 25—100° С, $-6 \cdot 10^{-6}$ для 100—300° С при первом нагревании и $+2{,}5 \cdot 10^{-6}$ для 100—300° С при последующих температурных циклах.

5) α_1 равно $+2{,}5 \cdot 10^{-6}$ для температур 25—100° С, $+4{,}8 \cdot 10^{-6}$ для 100—300° С при первом нагревании и $+2{,}5 \cdot 10^{-6}$ для 100—300° С при последующих циклах.

6) Те же значения, что и для PZT-4, за исключением области 100—300° С при первом нагревании, где $\alpha_3 = -7{,}5 \cdot 10^{-6}$ и $\alpha_1 = +5{,}2 \cdot 10^{-6}$.

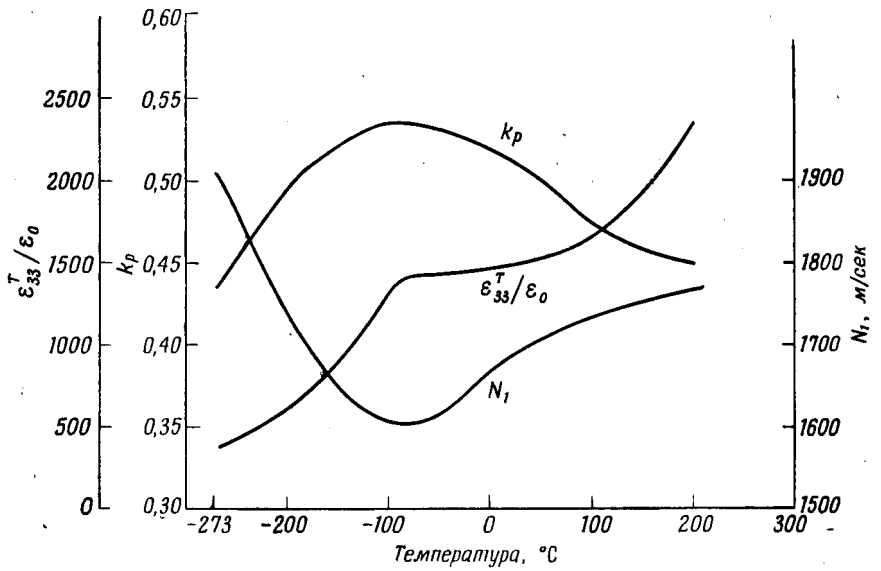
и возрастает как квадрат D_0, откуда следует, что $(r_{33} - r_{31})$ является отрицательной величиной [41] и что членами более высокого порядка можно пренебречь. В то же время для керамики титаната-цирконата свинца $(g_{33} - g_{31}) > g_{15}$ [42].

2. Численные значения при слабых возбуждениях

В табл. 15 приведены данные, характеризующие свойства некоторых пьезоэлектрических систем при слабых возбуждениях и комнатной температуре (25° С). Эти свойства статистически и систематически флуктуируют от партии к партии образцов или внутри данной партии вследствие небольших различий в химическом составе, вариаций плотности, химической неоднородности, отклонений по величине зерен, различий в условиях предварительной поляризации и т. д. В Стандартах на пьезоэлектрические кристаллы Института радиоинженеров указывается, что параметры керамики [8] определенного состава с плотностью не менее 95% от номинала могут меняться следующим образом: упругие постоянные не более чем на 5%, пьезомодули на 10%, а диэлектрические постоянные не более чем на 20%.

Наибольший интерес в настоящее время представляют следующие пьезоэлектрические керамики: титанат бария, титанат-цирконат свинца, метаниобат свинца и ниобат натрия. Ионы Ba^{2+} в $BaTiO_3$ часто замещают ионами Ca^{2+} [44] или ионами Pb^{2+} [4], чтобы сместить ниже области рабочих температур точку полиморфного превращения из тетрагональной в ромбическую систему, которая обычно находится при 15° С. В системе титанат-цирконат свинца отношение весовых количеств циркония и титана варьирует в зависимости от свойств, которые необходимо получить [45]; различные свойства пьезокерамики этой системы обеспечиваются также введением добавок Sr^{2+} и Ca^{2+}, замещающих Pb^{2+} [46], Sn^{4+}, замещающего $(Zr, Ti)^{4+}$ [12], $(Nb, Ta)^{5+}$, замещающих $(Zr, Ti)^{4+}$ [13], или $(La, Nd)^{3+}$, замещающих Pb^{2+} [13]. При несоответствии валентности добавляемых ионов имеет место заметное увеличение удельного сопротивления ($\sim 10^3$ раз при температурах несколько выше 100° С), уменьшение эффектов старения (примерно в 10 раз) и увеличение диэлектрической проницаемости; однако их введение сопровождается увеличением механических и диэлектрических потерь [15]. Метаниобат свинца — единственный из применяемых пьезоэлектрических материалов, не обладающий структурой типа перовскита. В этой системе ионы Pb^{2+} часто замещают ионами Ba^{2+} [47], в результате чего удается усилить пьезоэффект и увеличить диэлектрическую проницаемость за счет существенного повышения температуры Кюри. Ниобат натрия, так же как и цирконат свинца, является анти-

сегнетоэлектриком, однако при добавлении малых количеств ионов K^{1+} [48], Pb^{2+} или Cd^{2+} [49], замещающих ионы Na^{1+}, этот материал приобретает сегнетоэлектрические и пьезоэлектрические свойства. Среди этих классов пьезокерамических соединений система титанат-цирконат свинца обеспечивает наиболее



Фиг. 34. Зависимость диэлектрической проницаемости $\varkappa = \varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0$, k_p и частотной постоянной стержня N_1 от температуры для стабилизированной керамики PZT-4.

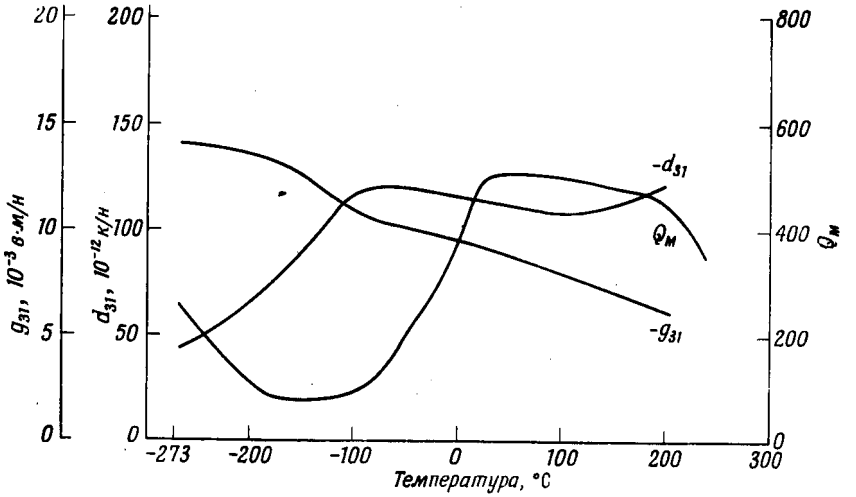
широкий диапазон требуемых свойств и уже вытесняет титанат бария как наиболее широко используемый пьезоэлектрический материал.

На фиг. 34—38 представлены зависимости некоторых параметров пьезокерамик PZT-4, PZT-5 и титаната бария от температуры, а в табл. 16 приведены данные для этих, а также некоторых других материалов. Табл. 16 содержит также величины, характеризующие старение керамики после поляризации в процентах за 10 лет. Свойства керамики меняются большей частью линейно в зависимости от логарифма времени, однако в ряде случаев наблюдаются отклонения от этой закономерности. Сравнение нескольких пьезокерамических материалов с учетом их температурной и временной стабильности наглядно показывает, каким существенным преимуществом обладает система титанат-цирконат свинца. В табл. 16 представлена также постоянная времени (произведение диэлектрической проницаемости на удельное

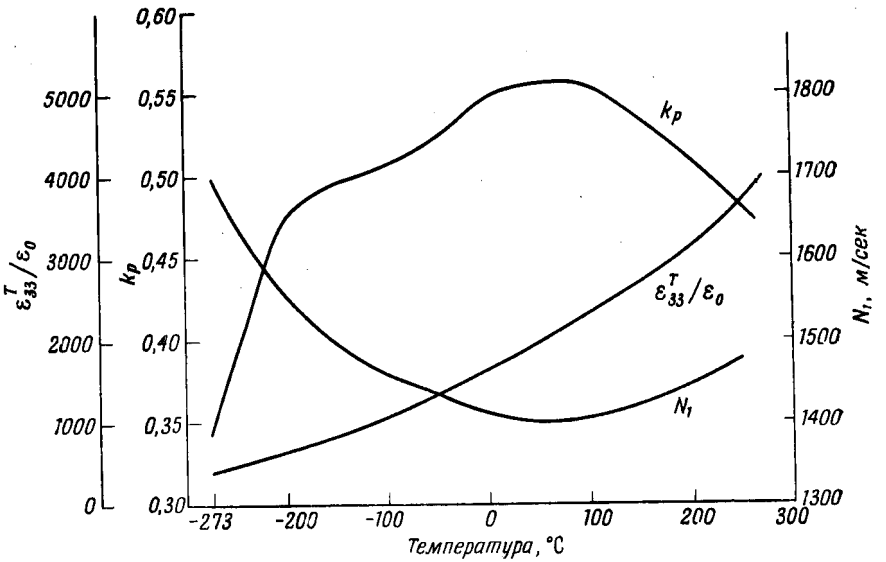
Таблица 16

Влияние температуры и старения на свойства некоторых пьезоэлектрических керамик

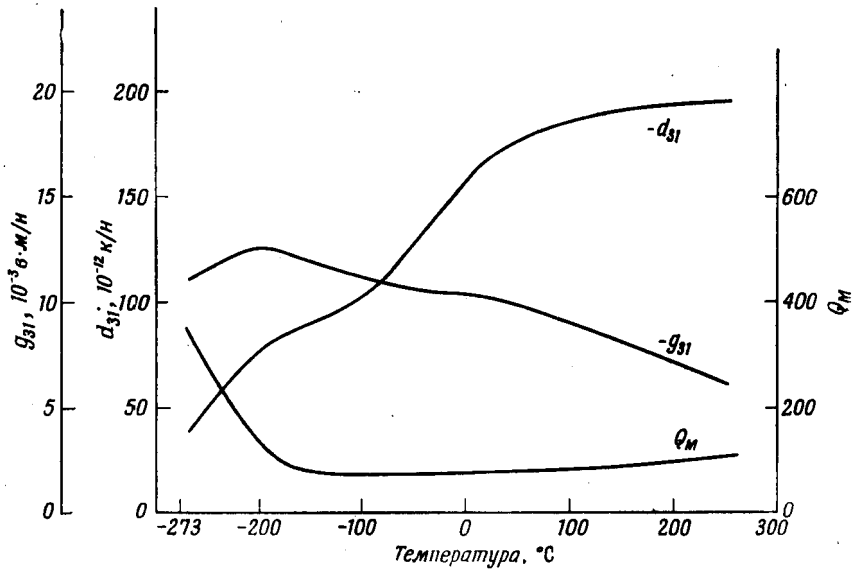
Величина	PZT-4	PZT-5	PZT-6A	PZT-6B	$PbTiO_{0,46}Zr_{0,54}O_3$	$BaTiO_3$	95 вес.% $BaTiO_3$, 5 вес.% $CaTiO_3$
Изменение N_1, % за 10 лет	+0,9	+0,17	+0,07	+0,06	+0,6	+1,1	+0,5
Изменение k_p, % за 10 лет	−2,0	−0,6	−0,2	−0,2	−1,8	−2,5	−1,8
Изменение ε_{33}^T, % за 10 лет	−3,0	−0,8	−0,6	−0,6	−2,8	−4,1	−0,8
Изменение N_1 в интервале 0—40° С, %	1,7	0,8	0,05	0,07	0,4	15	4
Изменение N_1 в интервале −60—+85° С, %	4,8	2,7	0,3	0,15	1,5	19	18
Изменение N_1 в интервале −60—+150° С, %	7,3	3,3	0,4	0,2	3,4	—	—
Удельное сопротивление, *ом·м*							
при 25° С	$>10^{10}$	$>10^{11}$	$>10^{9}$	$>10^{10}$	$>10^{10}$	$>10^{10}$	$>10^{10}$
при 100° С	$10^{8,5}$	10^{11}	10^{7}	$10^{8,5}$	$10^{8,5}$	$10^{7,5}$	$10^{7,5}$
при 200° С	$10^{6,5}$	10^{9}	10^{5}	$10^{6,5}$	$10^{6,5}$	10^{5}	10^{5}
Постоянная времени, *сек*							
при 25° С	>100	>2000	>10	>100	>100	>100	>100
при 100° С	~5	~2000	~0,15	~1,5	~2	~0,5	~0,3
при 200° С	~0,07	~25	~0,002	~0,03	~0,03	~0,002	~0,002
Температура Кюри, °С	328	365	335	350	370	115	115



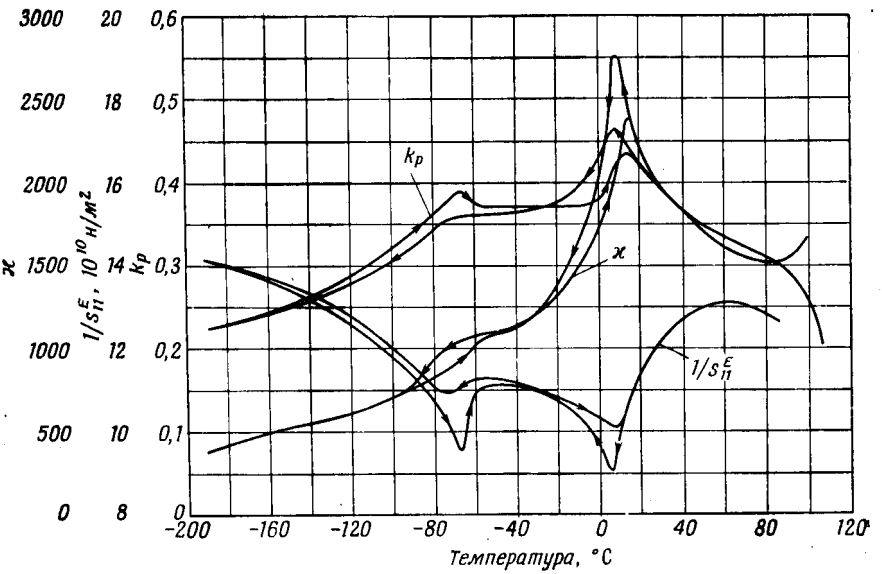
Ф и г. 35. Зависимости g_{31}, d_{31} и механической добротности Q_M от температуры для стабилизированной керамики PZT-4.



Ф и г. 36. Зависимости диэлектрической проницаемости $\varkappa = \varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0$, k_p и частотной постоянной стержня N_1 от температуры для стабилизированной керамики PZT-5.



Ф и г. 37. Зависимости g_{31}, d_{31} и механической добротности Q_M от температуры для стабилизированной керамики PZT-5.



Ф и г. 38. Зависимости диэлектрической проницаемости $\varkappa = \varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0$, k_p и модуля Юнга $1/s_{11}^E$ от температуры для пьезоэлектрической керамики $BaTiO_3$.

сопротивление) при различных температурах. Эта величина является особенно важной характеристикой, если иметь в виду применение пьезокерамики в области низких частот при высоких температурах, так как постоянная времени должна превосходить $1/f$ по крайней мере в 10 раз, а лучше не менее чем в 100 раз.

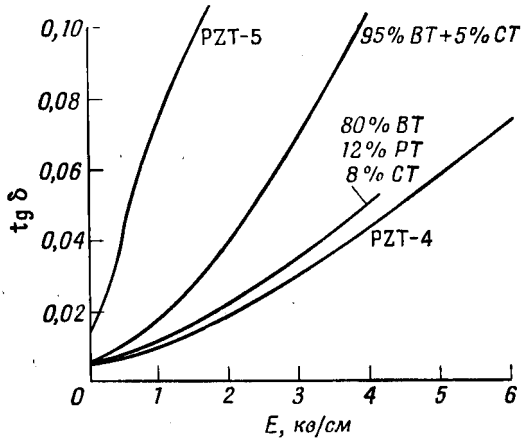
3. *Свойства при сильных электрических возбуждениях*

Зависимость между компонентами напряжения и деформации, электрического поля и индукции, а также деформации и электрического поля у пьезокерамики и сегнетоэлектрических кристаллов является линейной только в ограниченной области значений приложенных к образцу механических напряжений и электрических полей [39, 50]. Область линейности существенно различна для разных составов пьезокерамики, причем имеет место определенная связь с величиной коэрцитивной силы. При больших значениях электрических полей, возбуждающих образец, зависимости между деформацией и электрическим полем и между индукцией и электрическим полем становятся нелинейными. Нелинейность зависимости деформации от поля вызывает появление искажений на механической или акустической стороне преобразователя. Рост диэлектрических потерь, обусловленный нелинейностью зависимости индукции от поля (гистерезисом), приводит к уменьшению электромеханического или электроакустического коэффициента полезного действия и выделению тепла. В большинстве случаев деформация остается линейной функцией переменного электрического поля при значительно больших полях, чем индукция [50].

На фиг. 39 и 40 представлены зависимости $\operatorname{tg}\delta$ от амплитуды электрического поля для нескольких пьезоэлектрических керамик. Эти данные не являются окончательным критерием при выборе материала для излучателей большой мощности, так как пьезомодули керамики различного состава имеют значения, меняющиеся в весьма широких пределах, и поэтому амплитуда механических или акустических колебаний при заданном электрическом поле оказывается весьма различной. Критерии, используемые при выборе материала для преобразователей большой мощности, рассматриваются более подробно в § 6, п. 8.

Нелинейные эффекты возникают вследствие переориентации доменов. Вообще говоря, возможны два типа процессов переориентации доменов: либо угол поворота составляет 180°, либо этот угол принимает те или иные дискретные значения, отличающиеся от 180° (например, 90° для перовскитов, имеющих тетрагональную структуру, 71—109° для ромбоэдрических перовскитов и 90° или 60—120° для ромбических перовскитов). В неполяризованной

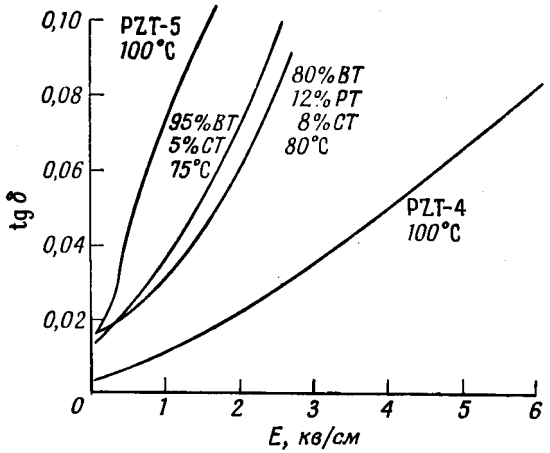
керамике под действием электрического поля возможны процессы переориентации обоих типов, однако в предварительно поляризованной керамике преобладают процессы переориентации первого типа. При действии механических напряжений реализуются повороты только второго типа независимо от того, поляризован образец или нет.



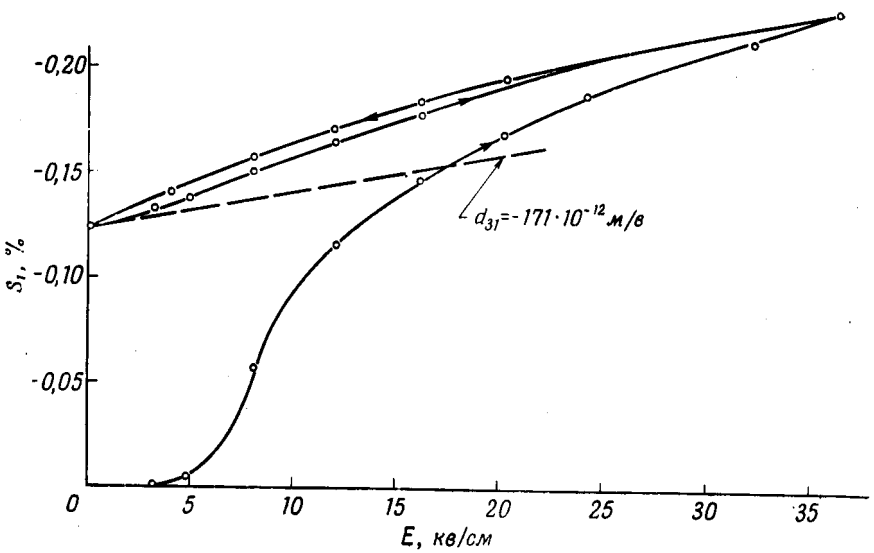
Фиг. 39. Зависимость коэффициента диэлектрических потерь $\operatorname{tg}\delta$ от напряженности электрического поля (при частоте 1 *кгц*) для четырех пьезоэлектрических керамик при температуре 25° С (состав указан в весовых процентах).

Процесс поляризации сам по себе является не чем иным, как изменением состояния доменов. Деформации, которые возникают при поляризации, обусловлены поворотами второго типа (их можно было бы назвать «механической переориентацией доменов», поскольку они сопровождаются механической деформацией), пьезоэлектрическим эффектом ориентированных доменов и их электрострикцией. Первый из этих эффектов является доминирующим, а третий очень мал.

Типичная кривая деформации в направлении, перпендикулярном направлению поляризующего поля, в зависимости от напряженности этого поля представлена на фиг. 41. При малой величине приложенного поля, как это следует из оценки величины пьезоэффекта, имеют место преимущественно 180-градусные повороты доменов, причем в результате механических напряжений реализуется лишь очень небольшое количество поворотов второго типа. При возрастании поля выше 7 *кв/см* в рассматриваемом материале роль процессов переориентации доменов второго типа существенно возрастает. Затем при уменьшении поля доля, вносимая поворотами второго типа, становится снова заметной, поскольку внутреннее механическое напряжение, вызванное



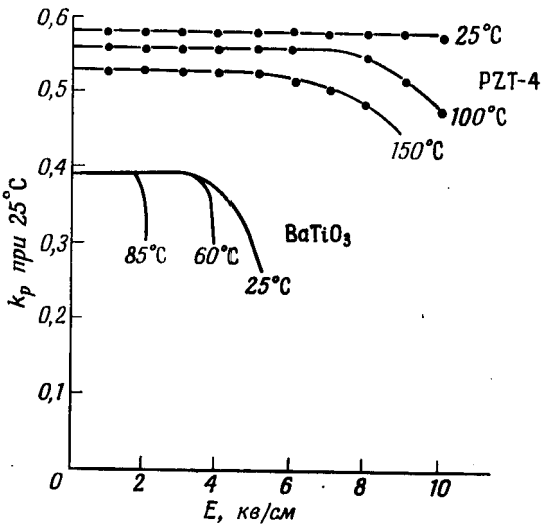
Ф и г. 40. Зависимость коэффициента диэлектрических потерь tg δ от напряженности электрического поля (при частоте 1 *кгц*) для керамики 95% $BaTiO_3$ + 5% $CaTiO_3$ при температуре 75° С, для керамики 80% $BaTiO_3$ + 12% $PbTiO_3$ + 8% $CaTiO_3$ при 80° С и для керамики PZT-4 и PZT-5 при 100° С (состав указан в весовых процентах).



Ф и г. 41. Зависимость деформации в направлении, перпендикулярном электрическому полю, от напряженности поля для образцов керамики PZT-5, не подвергнутых старению.

Для сравнения приведена зависимость для $d_{31} = (\partial S_1/\partial E_3)_T = -171 \cdot 10^{-12}$ *м/в*.

большими деформациями, способствует уменьшению упорядоченности доменной структуры. Вообще внутреннее напряжение является основной причиной старения пьезокерамики, которое и заключается в механической переориентации доменов. Если теперь снова увеличивать поле, то будет иметь место дополнительная ориентация доменов, обусловливающая линейный рост деформации до значений поля не более 1—2 *кв/см*. При возрастании



Ф и г. 42. Зависимость деполяризации, возникающей после выдержки в течение 30 *мин* в переменном (60 *гц*) электрическом поле, от напряженности этого поля при различных температурах для образцов керамики PZT-4 и $BaTiO_3$.

поля, направленного противоположно полю, с помощью которого был осуществлен исходный цикл поляризации, имеют место значительно большие отклонения от линейности (на фиг. 41 эта часть кривой не показана). Нелинейные эффекты в постоянном поле выражены гораздо сильнее, чем в переменном, вследствие инерции доменных границ. Как отмечалось выше, напряженность электрического поля, при которой эта нелинейность становится заметной, зависит от коэрцитивной силы и, следовательно, различна для пьезокерамики разных составов.

На фиг. 42 показано изменение пьезоэлектрических свойств пьезокерамики под действием переменного электрического поля (60 *гц*). Приведенные на этой фигуре кривые получены при прямом контроле температуры, поэтому нагрев вследствие диэлектрических потерь никакого влияния на результаты не оказывал. Эффект деполяризации обусловлен тем, что в течение половины

периода изменения поля направление поля способствует 180-градусным поворотам ориентации доменов. Фиг. 42 иллюстрирует также заметную разницу в свойствах двух весьма распространенных типов пьезокерамики.

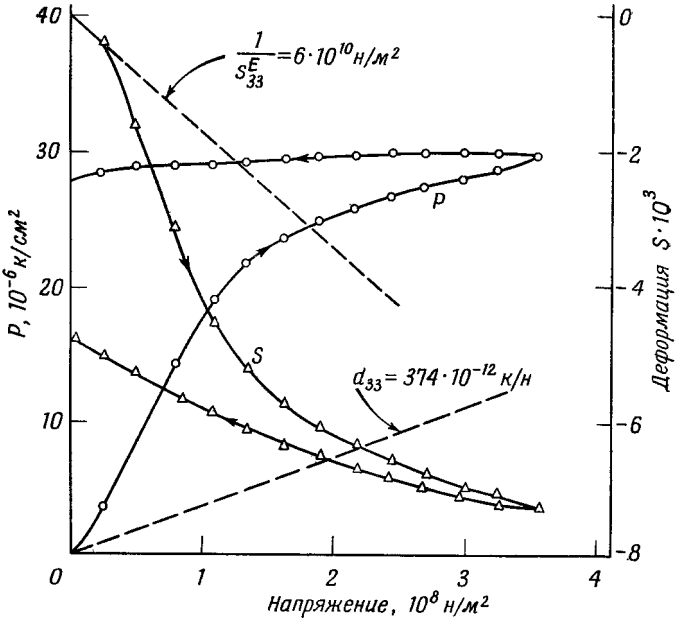
4. *Свойства при сильных механических возбуждениях и постоянных нагрузках*

Как указано в § 4, п. 3, нелинейные свойства пьезокерамики связаны с поворотами ориентации доменов, вызванными механическим или электрическим возбуждением. Результат действия механического напряжения зависит от его ориентации по отношению к полярной оси керамики, электрической нагрузки и частоты. Этот результат, кроме того, зависит от состава пьезокерамики, причем имеется некоторая связь с величиной коэрцитивной силы. Если механическое напряжение приложено к образцу таким образом, что вызываемые им на поверхности электродов заряды создают поле, совпадающее по направлению с поляризующим полем, то нелинейные эффекты выражены относительно слабо. Если электрическая нагрузка соответствует режиму короткого замыкания, то имеет место промежуточный случай; наконец, если знаки пьезозарядов таковы, что создаваемое ими электрическое поле противоположно исходному поляризующему полю, то нелинейность может иметь ярко выраженный характер.

Здесь приводятся данные, полученные только для статических напряжений сжатия, так как создание больших напряжений растяжения связано с большими трудностями, в частности из-за того, что прочность керамики при растяжении значительно ниже, чем при сжатии. На фиг. 43 [39] представлена зависимость поляризации, возникающей при медленном возрастании сжимающего напряжения, действующего параллельно полярной оси, для пьезокерамического образца с замкнутыми накоротко электродами [1]). Величина зарядов, обусловленных переориентацией доменов, быстро увеличивается и превышает величину зарядов, обусловленных обычным пьезоэффектом. Вклад, вносимый переориентацией доменов, иллюстрирует также нелинейная зависимость деформации от механического напряжения, приведенная на фиг. 43. Давление 4200 *кг/см*^{2} оказывается достаточным для деполяризации пьезокерамики данного состава.

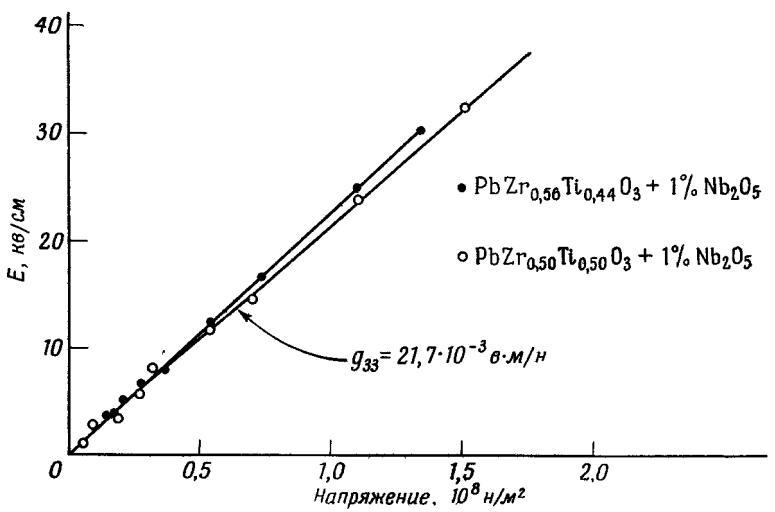
Как было показано в работах [52, 53], эффект механической ползучести, т. е. возрастание деформации при неизменной механической нагрузке, обязан своим происхождением доменной переориентации, поскольку выше точки Кюри этот эффект

[1]) См. также [51].



Ф и г. 43. Зависимости плотности зарядов, образующихся на замкнутых накоротко электродах, и деформации от величины медленно возрастающего сжимающего напряжения, действующего параллельно полярной оси для керамики PZT-5.

Для сравнения приведены кривые модуля Юнга $1/s^E_{33}$ и пьезомодуля d_{33}.



Ф и г. 44. Зависимость напряженности электрического поля при разомкнутых электродах от быстро приложенного (время возрастания 3 *мсек*) сжимающего напряжения, параллельного полярной оси, для двух модификаций керамики Pb $(TiZr)O_3$ с добавлением Nb^{5+}.

отсутствует [52]. При больших напряжениях для ряда соединений типа титанат-цирконат свинца большая часть переориентаций доменов осуществляется менее чем за 3 *мсек*.

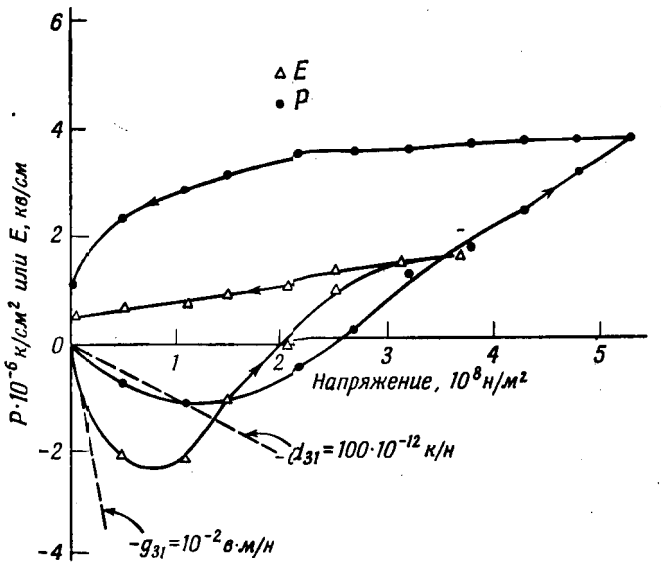
На фиг. 44 представлена зависимость электрического поля в образце с разомкнутыми электродами от сжимающего напряжения, параллельного полярной оси. Здесь эффект оказывается линейным, однако если дать возможность зарядам постепенно стекать и поддерживать при этом механическое напряжение постоянным, то будет наблюдаться заметная переориентация доменов. Если перед снятием механического напряжения электроды образца замкнуть накоротко, то изменение электрического поля в образце при снятии напряжения будет меньше, чем при его приложении. Это может быть объяснено переориентацией доменов, обусловленной появлением дополнительного поля пьезо-зарядов, направление которого противоположно поляризующему полю.

Если сжимающее напряжение приложено перпендикулярно полярной оси, то эффекты переориентации доменов для разомкнутой цепи выражены сильнее, чем для замкнутой накоротко, так как возникающее благодаря пьезоэффекту электрическое поле способствует переориентации доменов. При сжимающих напряжениях выше 1400 *кг/см*^{2} (величина зависит от состава пьезокерамики) изменения заряда и электрического поля имеют знак, противоположный знаку пьезоэлектрических постоянных d_{31} и g_{31}, благодаря выраженному эффекту переориентации доменов, как это видно из фиг. 45 [39, 55].

Исходя из этого рассмотрения, можно ожидать, что динамические пьезоэлектрические, упругие и диэлектрические постоянные будут сильно зависеть от постоянного сжимающего напряжения. Влияние постоянного сжимающего напряжения, действующего одновременно с возбуждающей образец переменной составляющей, имеет большое значение, поскольку часто возникает необходимость создать предварительное механическое сжатие, которое предотвращает механическое разрушение образца под действием динамических механических напряжений, как это может иметь место при пьезоэлектрическом возбуждении излучателей с большой акустической мощностью. Этот случай более подробно рассмотрен в § 6, п. 8. Кроме того, следует отметить, что используемые в гидроакустике на большой глубине преобразователи часто работают в условиях сильного гидростатического давления, которое неизбежно ввиду акустического контакта преобразователя с водой.

На основании данных, приведенных в этом и в предыдущем пунктах, можно сделать вывод, что механическое напряжение может как способствовать, так и препятствовать процессу поляризации. Напряжение растяжения, параллельное поляризующему

полю, способствует поляризации, в то время как сжимающее напряжение, приложенное вдоль полярной оси, препятствует этому процессу. Двумерное напряжение в плоскости, перпендикулярной полярной оси, способствует поляризации, если оно



Фиг. 45. Зависимости плотности зарядов, образующихся на замкнутых накоротко электродах, и напряженности электрического поля при разомкнутых электродах от медленно возрастающего сжимающего напряжения, перпендикулярного полярной оси, для керамики Pb $(Ti_{0,47}\ Zr_{0,53})\ O_3$.

Для сравнения приведены кривые для d_{31} и g_{31}.

является сжимающим, и препятствует ей, если оно растягивающее. Механическое напряжение само по себе не может привести к возникновению поляризации в керамике, так как оно не создает преимуществ для параллельной ориентации доменов относительно антипараллельной. Однако, как было показано выше, механическое напряжение может вызвать частичную или полную деполяризацию образца. В этой связи целесообразно изучать эффекты, возникающие при приложении постоянного сжимающего напряжения со следующей ориентацией:

1. Параллельно полярной оси.
2. Перпендикулярно полярной оси (напряжение одномерно).
3. В плоскости, перпендикулярной полярной оси (напряжение двумерно).

Влияние постоянного напряжения с ориентацией первого и второго типа на пьезоэлектрические и диэлектрические свой-

ства титаната бария и изготовляемого промышленностью титаната-цирконата свинца было исследовано Мэзоном [56] и Крюгером и Берлинкуром [57], однако для ориентации третьего типа были исследованы только диэлектрические свойства [52]. В работе Крюгера и Берлинкура было показано, что PZT-4 и $BaTiO_3$ с частичным замещением ионов Ba^{2+} ионами Pb^{2+} принадлежат к одному классу соединений, в то время как PZT-5 и $BaTiO_3$ с частичным замещением ионов Ba^{2+} ионами Ca^{2+} — к другому классу. Первый класс соединений рекомендуется использовать в преобразователях, работающих в режиме излучения, поскольку для этих соединений эффект усталости зависит от общего времени действия, но не от числа циклов механического напряжения. Для пьезокерамики второго класса эффект усталости зависит от числа циклов напряжения и в меньшей степени от полного времени выдержки под действием механической нагрузки.

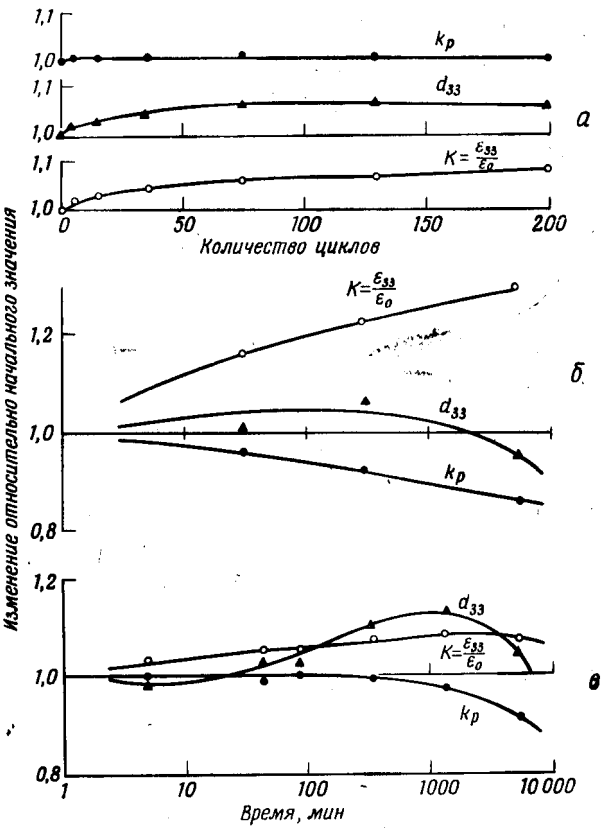
Большинство приведенных в литературе данных относится к эффектам, которые были получены в результате определения свойств непосредственно перед приложением механического напряжения и сразу же после его снятия. В этих случаях эффекты, обусловленные напряжениями с ориентацией первого типа, выражены сильнее, чем эффекты для напряжений второго типа. На фиг. 46 представлены зависимости, характеризующие эффекты, имеющие место при выдержке образцов PZT-4 под напряжением с ориентацией первого и второго типа и под действием циклического напряжения первого типа. PZT-4 обнаруживает наименьшее изменение параметров по сравнению со всеми другими составами пьезокерамики, которые были исследованы Крюгером и Берлинкуром [57].

Измерения Крюгера и Берлинкура [57] при постоянном механическом напряжении показали, что влияние напряжений первого типа слабее, чем напряжений второго типа. На фиг. 47 приведены эти данные для PZT-4. При напряжениях второго типа изотропия в плоскости, перпендикулярной полярной оси, оказывается нарушенной и поэтому $d_{31} \neq d_{32}$. Фиг. 47 показывает, что это неравенство сохраняется даже после снятия напряжений, однако при этом оно выражено значительно слабее [1]). Значение этих эффектов рассматривается в § 6, п. 8.

На фиг. 48 представлено изменение d_{31} и d_{32} в результате старения керамики PZT-4 под действием постоянного напряжения 700 *кг/см*^{2} с ориентацией второго типа и изменение d_{33} под действием постоянного напряжения 700 *кг/см*^{2} с ориентацией первого типа.

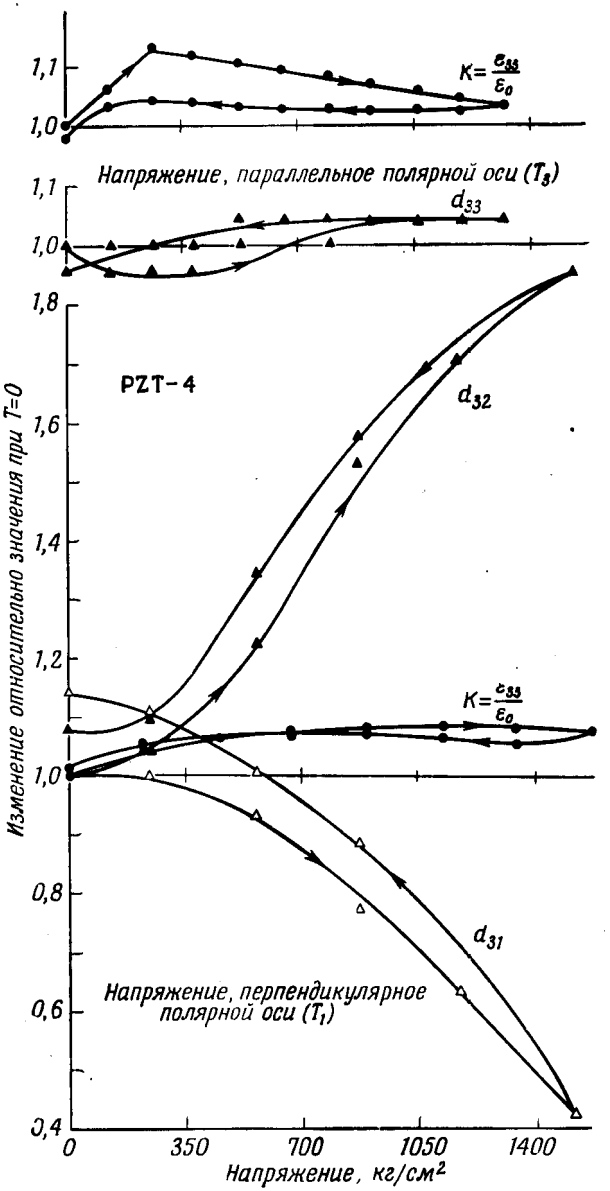
[1]) На фиг. 47 индексом 3 обозначена полярная ось, индексом 1 — направление, вдоль которого действует давление; направление с индексом 2 перпендикулярно направлениям 3 и 1.

Влияние механического напряжения с ориентацией третьего типа на диэлектрическую проницаемость имеет сильно выраженный характер [58]; диэлектрическая проницаемость уменьшается вследствие возрастания количества упорядоченных доменов



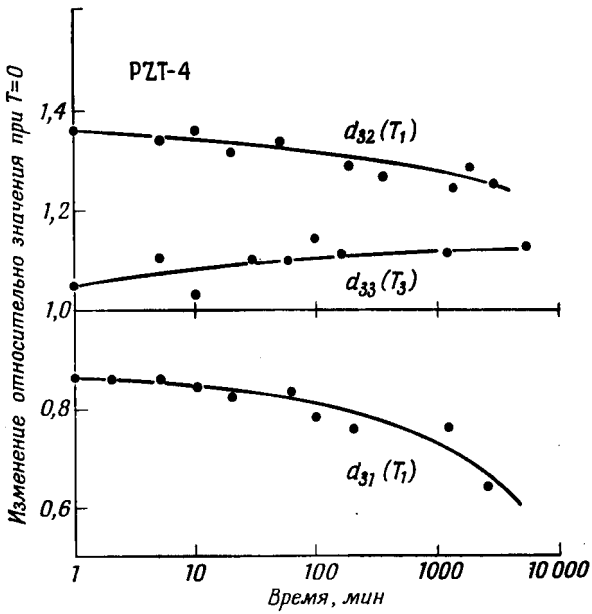
Ф и г. 46. Влияние количества циклов одностороннего сжатия до $T_3 = -700$ *кг/см*^{2} в направлении, параллельном полярной оси (*а*), и времени выдержки при постоянном сжимающем напряжении 1050 *кг/см*^{2}, параллельном полярной оси (*б*) и перпендикулярном полярной оси (*в*), на свойства керамики PZT-4.

(ориентация доменов второго типа), поскольку для однодоменного кристалла диэлектрическая проницаемость, измеренная вдоль полярной оси, имеет наименьшее значение. Этот тип переориентации доменов не приводит к существенным изменениям поляризации или пьезоэлектрической связи, поскольку напряжение не является тем фактором, который дает преимущества параллельной или антипараллельной ориентации доменов.



Ф и г. 47. Влияние сжимающего напряжения, параллельного (T_3) и перпендикулярного (T_1) полярной оси, на свойства керамики PZT-4 (измерения производились при постоянном напряжении).

До сих пор мы рассматривали чувствительность пьезокерамики к воздействию больших постоянных напряжений и ее динамические свойства при слабых возбуждениях и одновременном воздействии большого постоянного напряжения. Представляется также интересным рассмотреть эффекты, возникающие при действии больших переменных напряжений. При пьезоэффекте большие

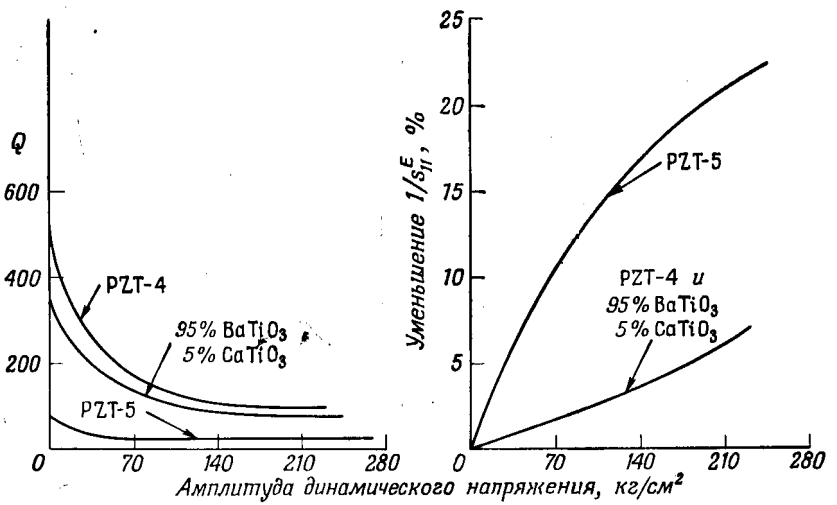


Ф и г. 48. Изменение d_{31} и d_{32} со временем при действии сжимающего напряжения 700 *кг/см*^{2}, перпендикулярного полярной оси (T_1), и изменение d_{33} со временем при действии сжимающего напряжения 700 *кг/см*^{2}, параллельного полярной оси (T_3), для пьезокерамики PZT-4 (измерения производились при постоянном напряжении).

динамические напряжения возникают на резонансе; они имеют место в звуковых и ультразвуковых преобразователях, у которых амплитуда напряжения достигает нескольких сотен *кг/см*^{2}.

Зависимость пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных от динамических напряжений не изучалась. Однако ясно, что нелинейность в этом случае должна быть выражена значительно слабее, чем при действии статических напряжений той же величины. Более того, в случае динамических напряжений мы имеем дело как с напряжением сжатия, так и с напряжением растяжения (за исключением случая одновременного воздействия постоянного сжимающего напряжения), и поэтому амплитуда напряжения ограничивается прочностью пьезокерамики на разрыв.

Упругие постоянные и механическая добротность Q пьезоэлектрической керамики существенно зависят от амплитуды напряжений. Эти зависимости изучались Джерсоном [59]; при этом не было обнаружено «порогового» значения напряжения, ниже которого не наблюдалось бы существенных изменений, т. е. прямая связь с коэрцитивной силой отсутствует (фиг. 49). Механическая добротность Q некоторых соединений типа титанатацирконата свинца и титаната бария при амплитуде напряжения



Фиг. 49. Зависимость внутренней механической добротности Q_{Mc} и модуля Юнга $1/s_{11}^E$ от амплитуды динамического напряжения, перпендикулярного полярной оси, для керамики PZT-4, PZT-5 и 95 вес.% $BaTiO_3$ + 5 вес.% $CaTiO_3$.

порядка 100 *кг/см*^{2} уменьшается примерно до $^1/_3$ ее значения при слабых возбуждениях и при дальнейшем увеличении амплитуды до 280 *кг/см*^{2} практически не меняется. Упругая податливость s_{11}^E увеличивается примерно на 5—6% для материалов с высокой коэрцитивной силой и примерно на 25% для материалов с низкой коэрцитивной силой. Возрастание упругой податливости наблюдается в диапазоне динамических напряжений вплоть до 280 *кг/см*^{2}. Этот эффект можно объяснить, исходя из представления о переориентации доменов под действием механического напряжения, которая является причиной появления добавочной податливости. Влияние этих эффектов на свойства звуковых и ультразвуковых преобразователей рассматривается в § 6, п. 8.

5. *Физическая интерпретация; сопоставление со свойствами монокристалла; доменный механизм*

Нелинейные эффекты, рассмотренные в п. 3 и 4 этого параграфа, были приписаны механизму переориентации доменов. Доменный механизм необходим также для установления связи между свойствами поликристаллических сегнетоэлектриков в слабых полях и такими же свойствами соответствующих монокристаллов. Прежде всего необходимо рассмотреть эффект усреднения, который возникает вследствие поликристаллической природы керамики. Полярная ось тетрагонального сегнетоэлектрика со структурой типа перовскита, например $BaTiO_3$, имеет шесть возможных направлений, совпадающих с ребрами куба. Концы полярных осей кристаллов в случае неполяризованной керамики равномерно распределены по поверхности некоторой воображаемой сферы. В случае полностью ориентированной (поляризованной) керамики полярные оси кристаллов распределены вокруг полярной оси системы, равномерно покрывая $^1/_6$ часть сферы. Таким образом, при поляризации полярные оси $^1/_6$ части всех доменов не изменяют своей ориентации, полярные оси $^1/_6$ части переориентируются на 180° и полярные оси $^2/_3$ доменов переориентируются на 90°. При полной ориентации доменов величина поляризации составляет 0,833 P [41], где P — поляризация монокристалла (26 *мкк/см*^{2} для $BaTiO_3$). Обычно предполагается [1]), что для $BaTiO_3$ переориентация доменов на 180° осуществляется полностью, в то время как поворот на 90° совершает лишь 13% общего числа доменов, для которых возможен этот тип переориентации [39, 53]. Таким образом, поляризация керамики P_c определяется выражением

$$P_c = 0{,}833P\left[\frac{1}{3} + 0{,}13\left(\frac{2}{3}\right)\right] = 9{,}1 \text{ мкк/см}^2.$$

Эта величина близка к значению, полученному при измерении полного заряда, выделяющегося при сжатии образца параллельно полярной оси.

Переориентация доменов на углы, отличные от 180°, для системы титанат-цирконат свинца оказывается более полной [39], и коэффициент перед вторым членом в приведенном выше выражении достигает в этом случае 0,50 для тетрагональной системы и еще больших значений для кристаллов ромбоэдрической системы (неопубликованная работа Берлинкура). Более полная ориентация доменов ромбоэдрической системы обусловлена меньшими

[1]) Это предположение подтверждается микрофотографиями образцов, подвергнутых травлению.

искажениями доменной структуры, составляющими лишь $^1/_3$ искажений в тетрагональной системе вблизи фазовой границы между ромбоэдрической и тетрагональной фазами.

Из сказанного выше следует, что даже наиболее совершенная поляризация пьезокерамики не может обеспечить полное совпадение с характеристиками однодоменного кристалла, однако чем более полно ориентированы домены в образце, тем сильнее выражена его анизотропия. В случае однодоменного кристалла отсутствуют поправки к величинам упругих, диэлектрических и пьезоэлектрических постоянных, обусловленные обратимым движением доменных границ. Было найдено экспериментально (неопубликованная работа Берлинкура), что кристалл $BaTiO_3$, не имеющий 180-градусных доменных границ, но содержащий большое количество 90-градусных границ, характеризуется более высокими значениями коэффициента пьезоэлектрической связи, упругих и диэлектрических постоянных, чем однодоменный кристалл. Более высокие значения коэффициента пьезоэлектрической связи и упругих постоянных объясняются обратимым движением доменных границ, которое приводит также к увеличению диэлектрической проницаемости. Последняя увеличивается и за счет более высоких значений диэлектрических постоянных в направлениях, перпендикулярных полярной оси домена.

По перечисленным выше причинам, несмотря на относительно слабо выраженную 90-градусную ориентацию, величина пьезоэлектрического эффекта керамики $BaTiO_3$ оказывается тем не менее весьма близкой к пьезоэлектрическому эффекту однодоменного монокристалла (ср. данные табл. 12 и 15). Низкая степень анизотропии керамики по сравнению с однодоменным кристаллом (табл. 17) свидетельствует об относительной слабости эффектов, связанных с механической 90-градусной переориента-

Таблица 17

Степень анизотропии кристаллов $BaTiO_3$, керамики $BaTiO_3$ и ромбоэдрической керамики $Pb(Zr, Ti)O_3$

Соединение	$\varepsilon_{11}^T/\varepsilon_{33}$	$\varepsilon_{11}^S/\varepsilon_{33}$	s_{33}^E/s_{11}	s_{33}^D/s_{11}	s_{44}^E/s_{66}	s_{44}^D/s_{66}	s_{13}^E/s_{12}	s_{13}^D/s_{12}
$BaTiO_3$ (кристалл)	17,4	18,1	1,95	1,49	2,08	1,40	2,32	1,03
$BaTiO_3$ (керамика)	0,85	0,89	1,04	0,82	0,97	0,74	1,07	0,63
$Pb(Zr_{0,56}Ti_{0,44})O_3$ (керамика) [42]	1,99	1,94	1,27	0,85	1,40	0,80	1,44	0,64

цией. В табл. 17 для сравнения приведены данные, характеризующие анизотропию ромбоэдрической керамики титаната-цирконата свинца (аналогичные данные для однодоменных кристаллов в настоящее время отсутствуют). Из данных табл. 17 легко видеть, что эффекты механической ориентации доменов у керамики титаната-цирконата свинца оказываются весьма сильными. Анизотропия теплового расширения обусловлена только механической переориентацией доменов, которая для керамики титаната бария значительно слабее, чем для керамики системы титанат-цирконат свинца (табл. 15).

Влияние добавок в титанат-цирконат свинца ионов с избыточной валентностью, которое кратко рассмотрено в п. 2 настоящего параграфа, является результатом возрастания подвижности доменных границ благодаря взаимодействию между вакансиями катионов и доменами [14]. Когда сегнетоэлектрическая керамика поляризована, напряжения устанавливаются благодаря механической переориентации доменов, поскольку деформации в промежутках между зернами, имеющими различную ориентацию, отсутствуют. Постепенная релаксация напряжений благодаря механической переориентации доменов вызывает изменение свойств во времени, т. е. «старение». Было высказано предположение [14], что добавка ионов с избыточной валентностью в значительной мере компенсируется вакансиями катионов, в связи с чем стехиометрический состав оказывается не нарушенным и эти вакансии способствуют движению доменных границ. Таким образом, после выключения поляризующего поля имеет место сильная релаксация напряжений и затем относительно слабое старение. Обратимое движение доменных границ приводит к увеличению диэлектрической проницаемости и упругой податливости по сравнению с немодифицированной пьезокерамикой титаната-цирконата свинца, но, поскольку эти добавки приводят к некоторому повышению энергии активации, диэлектрические и механические потери также увеличиваются.

§ 5. МОДЫ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Задачи об электромеханических колебаниях пьезоэлектрических элементов могут решаться теми же методами, что и соответствующие задачи о механических колебаниях, однако при этом необходимо вводить в рассмотрение дополнительные переменные и граничные условия. Так же как и в чисто механических задачах, при решении которых граничные условия в значительной мере определяют выбор той или иной системы координат, удается избежать необоснованного усложнения, если потребовать, чтобы форма записи пьезоэлектрических уравнений, т. е. выбор зави-

симых и независимых переменных, также учитывала особенности граничных условий.

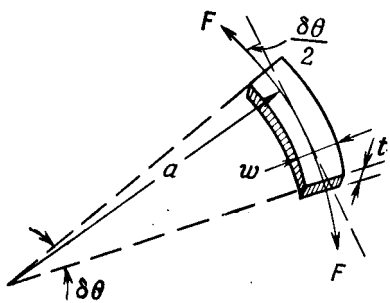
Механические граничные условия особенно в одномерных и двумерных случаях учитываются при выборе в качестве независимых переменных либо напряжений T, либо деформаций S. Для неиспользуемых осей координат часто границы колеблющегося тела либо свободны ($T = 0$), либо закреплены ($S = 0$). В работах, посвященных колебательным системам, иногда встречаются ошибки, возникшие из-за того, что не учитываются неявные граничные условия для неиспользуемых осей координат.

Электрические граничные условия определяются формой тела или расположением поверхностей, покрытых электродами (эквипотенциальных поверхностей); при этом накладываются условия постоянства электрической индукции D или поля E. В свою очередь эти граничные условия определяют выбор в качестве независимых переменных составляющих D или E. В некоторых случаях удается также ввести в пьезоэлектрические уравнения промежуточные граничные условия, определяемые параметрами электрической схемы.

1. Системы с сосредоточенными постоянными

Моды колебаний большинства твердых тел являются результатом образования в них системы стоячих волн. Эти моды выводятся из волнового уравнения для исследуемой колебательной системы, и каждая из них связана с целой серией обертонов, которые получаются в результате решения той же системы уравнений. Важными исключениями из этого правила, помимо идеализированной системы с сосредоточенной массой и упругостью, являются тонкое кольцо и тонкая сферическая оболочка, колебания которых описываются соответственно аксиально симметричной и сферически симметричной модами. Эти две простейшие моды являются единственными решениями уравнений, которые по своему виду ближе к уравнению движения, чем к волновому уравнению. При выводе этих уравнений приближенно предполагается, что толщина стенок мала и поэтому напряжения и деформации постоянны на всем протяжении колеблющегося тела, причем для каждой его части справедлива одна и та же величина коэффициента связи. Следовательно, коэффициенты связи k_{31} и k_p, характеризующие свойства материала, могут быть определены с помощью этих двух колебательных систем в результате прямого эксперимента без поправок на геометрию образца. Поэтому эти случаи представляют особый интерес при рассмотрении принципов построения преобразователей и их эквивалентных схем.

Радиально симметричная мода тонкого керамического кольца. Уравнение движения тонкого кольца может быть получено в результате применения уравнения Ньютона к элементарному сегменту. Пренебрегая поперечными размерами сегмента по сравнению с его радиусом и предполагая, что возбуждение является симметричным, а внутренние потери отсутствуют, можно показать, что внутри кольца вдоль средней окружности действует только напряжение растяжения или сжатия, обусловленное механической деформацией и электрическим полем. Часть этого напряжения, не уравновешенная внешними радиальными силами,



Ф и г. 50. Элемент керамического кольца.

которые могут быть результатом действия внешнего механического возбуждения или реакции механической нагрузки, вызывает радиальные пульсации всего кольца.

Рассмотрим тонкое керамическое кольцо радиуса a, ширины w и толщины t (фиг. 50) с электродами, нанесенными на большие поверхности (при поляризации используются те же электроды). Следует отметить, что данное рассмотрение остается справедливым и в случае электродов, нанесенных по толщине кольца. В любом случае обозначим направление, в котором действуют тангенциальные силы, индексом 1, а направление поляризации — индексом 3. Поверхности, на которые нанесены электроды, являются эквипотенциальными, поэтому $E_1 = E_2 = 0$ на этих поверхностях, а также внутри кольца, поскольку размерами поперечного сечения кольца можно пренебречь. Аналогичным образом, исходя из малости поперечного сечения, можно заключить, что все напряжения, за исключением тангенциально растягивающего напряжения T_1, равны нулю на свободных поверхностях и, следовательно, внутри кольца. Поэтому в качестве независимых переменных используются величины T и E и пьезоэлектрические

уравнения имеют вид

$$S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3, \tag{3.60а}$$

$$D_3 = d_{31} T_1 + \varepsilon_{33}^T E_3. \tag{3.60б}$$

В соответствии с фиг. 50 результирующая сила, действующая на элемент кольца, равна

$$F_r = F\delta\theta = T_1 wt\delta\theta_x. \tag{3.61}$$

Подставляя эту величину в уравнение Ньютона, имеем

$$\rho wta\delta\theta \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -T_1 wt\delta\theta, \tag{3.62}$$

где ρ — плотность керамики, а ξ — радиальное смещение кольца. Подставляя (3.60а) в (3.62) и учитывая, что $S_1 = \xi/a$, получаем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{1}{a^2 \rho s_{11}^E} \xi = \frac{d_{31}}{a\rho s_{11}^E} E_3. \tag{3.63}$$

Резонансная частота электрически не нагруженного кольца ($E = 0$) определяется выражением

$$\omega_0^2 = \frac{1}{a^2 \rho s_{11}^E} = \frac{(v_b^E)^2}{a^2}, \tag{3.64}$$

где v_b^E — скорость распространения продольных волн в стержне при постоянном электрическом поле. Интересно отметить, что длина продольной волны в этом стержне при частоте ω_0 равна длине средней окружности кольца. Однако рассмотрения фазовых соотношений в кольце оказывается вполне достаточно, чтобы показать, что радиально симметричная мода не является результатом волнового процесса.

В случае гармонического возбуждения $E_3 = E_0 e^{j\omega t}$ уравнение (3.64) имеет стационарное решение

$$\xi = \frac{d_{31} E_3}{a\rho s_{11}^E (\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{3.65}$$

Это выражение вместе с уравнениями (3.60) дает возможность вычислить комплексную проводимость кольца.

Из уравнений (3.60а) и (3.60б) можно определить электрическую индукцию

$$D_3 = \frac{d_{31}}{s_{11}^E} S_1 + \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) E_3, \tag{3.66}$$

где $k_{31}^2 = (d_{31}^2 / s_{11}^E \varepsilon_{33}^T)$, а $\varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2)$ — диэлектрическая проницаемость при одномерном закреплении вдоль боковой поверхно-

сти. Сила тока $I = 2\pi a w \dot{D}$ может быть получена в результате подстановки выражения (3.65) в (3.66):

$$I = 2\pi a w j\omega \left[\frac{d_{31}^2}{a^2\rho\,(s_{11}^E)^2\,(\omega_0^2 - \omega^2)} + \varepsilon_{33}^T\,(1 - k_{31}^2) \right] E_3. \qquad (3.67)$$

Подставив сюда ω_0 и k_{31} и заметив, что $E_3 = V/t$, имеем

$$\frac{1}{Z} = \frac{I}{V} = j\omega \frac{2\pi a w}{t} \left[\frac{k_{31}^2 \varepsilon_{33}^T \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} + \varepsilon_{33}^T\,(1 - k_{31}^2) \right]. \qquad (3.68)$$

Частоты резонанса $f_r = \omega_r/2\pi$ и антирезонанса $f_a = \omega_a/2\pi$ получаются из условия обращения комплексной проводимости (в конечном диапазоне частот) в бесконечность и в нуль; имеем

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{a^2\rho s_{11}^E}, \qquad \omega_a^2 = \frac{\omega_r^2}{1 - k_{31}^2}. \qquad (3.69)$$

По определению, резонанс и антирезонанс наблюдаются в двух точках, в которых реактивная проводимость обращается в нуль. Однако если можно пренебречь потерями, то эти точки совпадают с нулем и полюсом комплексной проводимости.

Далее получаем коэффициент связи

$$k_{31}^2 = \frac{f_a^2 - f_r^2}{f_a^2}. \qquad (3.70)$$

Емкость закрепленного кольца C_0 (для этой моды колебаний) и полная емкость, т. е. емкость свободного кольца C^T, определяются выражениями

$$C^T = \frac{2\pi a w \varepsilon_{33}^T}{t}, \qquad C_0 = (1 - k_{31}^2)\,C^T. \qquad (3.71)$$

Динамическая емкость C_1 для этой моды равна разности между этими двумя емкостями, откуда комплексная проводимость в соответствии с уравнением (3.68) определяется выражением

$$\frac{1}{Z} = \frac{j\omega C_1 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} + j\omega C_0, \qquad (3.72)$$

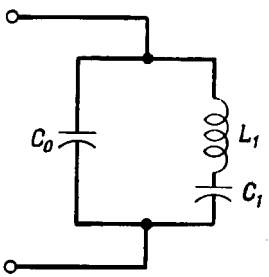
которое можно также непосредственно получить из эквивалентной схемы, приведенной на фиг. 51 (где L_1 вычисляется по формуле $\omega_0^2 = 1/L_1C_1$).

Параметры эквивалентной схемы C_1 и L_1 можно выразить через механические характеристики кольца в результате использования выведенных выше уравнений:

$$C_1 = k_{31}^2 C^T = \frac{2\pi a w \varepsilon_{33}^T}{t} \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T} = \frac{a s_{11}^E}{2\pi w t} \left(\frac{2\pi w\, d_{31}}{s_{11}^E} \right)^2, \qquad (3.73)$$

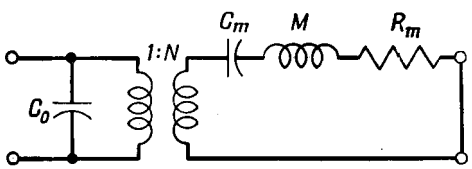
$$L_1 = \frac{1}{\omega_0^2 C_1} = a^2 \rho s_{11}^E \frac{t s_{11}^E}{2\pi a w\, d_{31}^2} = 2\pi a t w \rho \left(\frac{s_{11}^E}{2\pi w\, d_{31}} \right)^2. \qquad (3.74)$$

Здесь $as_{11}^{E}/2\pi wt$ — механическая податливость C_m кольца, а $2\pi atw\rho$ — его полная масса M. Исходя из этого, можно вычислить коэффициент N (отношение «чисел витков») и построить полную



Фиг. 51. Простая эквивалентная схема.

эквивалентную схему ненагруженного кольца, приведенную на фиг. 52, где дополнительно включено механическое сопротивление R_m. Если керамическое кольцо нагружено, то механический



$$N = \frac{2\pi w d_{31}}{s_{11}^{E}}$$

Фиг. 52. Эквивалентная схема ненагруженного пьезокерамического кольца.

импеданс нагрузки включается последовательно с элементами механической стороны эквивалентной схемы, показанной на фиг. 52.

Сферически симметричная мода тонкой сферической оболочки из керамики. Задачу о колебаниях тонкой сферической пьезоэлектрической оболочки можно решать тем же методом, что и задачу о колебаниях керамического кольца. В случае тонкой керамической оболочки, поляризованной по толщине, с электродами, полностью покрывающими внутреннюю и наружную поверхности, и толщиной t, малой по сравнению с радиусом сферы, граничные условия накладывают следующие ограничения:

$$E_1 = E_2 = 0, \qquad D_1 = D_2 = 0 \quad \text{и} \quad T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0.$$

Здесь индекс 3 обозначает направление, совпадающее с толщиной сферы, а индексы 1 и 2 обозначают два взаимно перпендикулярных направления в плоскости, нормальной направлению 3. Кроме того, из условий симметрии следует, что

$$T_1 = T_2 = T_c, \qquad S_1 = S_2 = S_c \quad \text{и} \quad s_c = \frac{1}{2}(s_{11} + s_{12}).$$

При этих условиях имеем следующие уравнения пьезоэлектрического эффекта:

$$S_c = 2s_c^E T_c + d_{31} E_3, \tag{3.75а}$$

$$D_3 = 2d_{31} T_c + \varepsilon_{33}^T E_3, \tag{3.75б}$$

где, как обычно в поляризованной керамике, $d_{32} = d_{31}$.

Для сферической оболочки, так же как и для кольца, деформация S_c и радиальное смещение ξ связаны соотношением $S_c = (\xi/a)$, где a — средний радиус. Вывод уравнения движения осуществляется аналогично предыдущему случаю:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{1}{a^2 \rho s_c^E} \xi = \frac{d_{31}}{a \rho s_c^E} E_3. \tag{3.76}$$

Для свободной сферы резонансная частота $\omega_0^2 = (1/a^2 \rho s_c^E)$, и при гармоническом возбуждении радиальное смещение определяется выражением

$$\xi = \frac{a\, d_{31} \omega_0^2 E_0 e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{3.77}$$

Полная комплексная проводимость определяется выражением

$$\frac{1}{Z} = \frac{I}{V} = \frac{j\omega 4\pi a^2}{t} \left[\varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) + \frac{\varepsilon_{33}^T k_p^2 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right], \tag{3.78}$$

где

$$k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{\varepsilon_{33}^T (s_{11}^E + s_{12}^E)} = \frac{d_{31}^2}{\varepsilon_{33}^T s_c^E}.$$

Из (3.78) получаем частоты резонанса и антирезонанса

$$f_r = \frac{1}{2\pi a \sqrt{\rho s_c^E}}, \qquad f_a = \left(\frac{f_r^2}{1 - k_p^2} \right)^{1/2}. \tag{3.79}$$

Выражение (3.78) можно использовать также для определения планарного коэффициента связи k_p.

Элементы эквивалентной электромеханической схемы легко получить из выражения для полной комплексной проводимости. Эквивалентная схема имеет тот же вид, что и в случае кольца

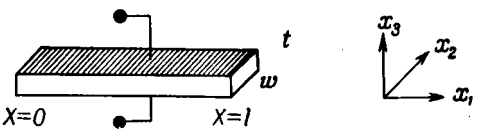
(фиг. 52); ее элементы определяются формулами

$$C_0 = \frac{4\pi a^2 \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2)}{t}, \qquad N = \frac{4\pi a\, d_{31}}{s_c^E},$$
$$M = 4\pi a^2 t \rho, \qquad C_m = \frac{s_c^E}{4\pi t}, \tag{3.80}$$

где $s_c^E = {}^1/_2 (s_{11}^E + s_{12}^E)$. Механическая нагрузка, так же как и в предыдущем случае, включается последовательно с остальными элементами механической стороны схемы.

2. *Продольные колебания стержня в поле, перпендикулярном его длине*

Рассмотрим пьезоэлектрический стержень, длина которого совпадает с осью x, а электроды нанесены на поверхности, перпендикулярные оси z (фиг. 53), причем оба поперечных размера малы



Фиг. 53. Стержень, совершающий продольные колебания по длине в электрическом поле, перпендикулярном его длине.

по сравнению с длиной. Таким образом, в данном случае задача оказывается существенно одномерной и координаты y и z исключаются. В направлениях осей y и z стержень может свободно расширяться (T постоянно); поэтому T выбирается в качестве независимой переменной. Грани, на которые нанесены электроды, образуют эквипотенциальные поверхности, вытянутые в направлении движения (E постоянно); поэтому E выбирается в качестве другой независимой переменной. Таким образом, уравнения пьезоэффекта имеют вид

$$S = s^E T + dE,$$
$$D = dT + \varepsilon^T E. \tag{3.81}$$

На гранях, на которых нанесены электроды, $E_1 = E_2 = 0$. Поскольку толщина t мала, $E_1 = E_2 = 0$ во всем объеме стержня. Аналогичным образом напряжения $T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0$ на свободных поверхностях и, следовательно, во всем объеме стержня; поэтому

$$S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3, \tag{3.82а}$$
$$D_3 = d_{31} T_1 + \varepsilon_{33}^T E_3. \tag{3.82б}$$

Волновое уравнение для этого случая выводим, применяя уравнение Ньютона к движению элементарного объема $dx\,dy\,dz$:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} dx\,dy\,dz = \frac{\partial T_1}{\partial x} dx\,dy\,dz. \tag{3.83}$$

Подставляя в это уравнение из (3.82) и учитывая, что $S_1 = \partial \xi_1 / \partial x$, имеем

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \frac{1}{s_{11}^E} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} - \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{\partial E_3}{\partial x}. \tag{3.84}$$

Грани с электродами являются эквипотенциальными поверхностями, т. е. E_3 не зависит от x и, следовательно, $\partial E_3 / \partial x = 0$. Поэтому

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho s_{11}^E} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = (v_b^E)^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}, \tag{3.85}$$

где v_b^E — скорость распространения продольных волн в стержне (при постоянном электрическом поле E). При гармоническом возбуждении $E_3 = E_0 e^{j\omega t}$ решение дифференциального уравнения имеет вид

$$\xi_1 = \left[A \sin \frac{\omega x}{v_b^E} + B \cos \frac{\omega x}{v_b^E} \right] e^{j\omega t}. \tag{3.86}$$

На свободных концах стержня при $x = 0$ и $x = l$ напряжение T_1 должно обращаться в нуль. Подставляя это условие в (3.86) и учитывая (3.82), имеем

$$A = \frac{v_b^E d_{31}}{\omega} E_0, \quad B = \frac{v_b^E d_{31} E_0 [\cos(\omega l / v_b^E) - 1]}{\omega \sin(\omega l / v_b^E)} \tag{3.87}$$

и

$$\xi_1 = \frac{v_b^E}{\omega} \left\{ \sin \frac{\omega x}{v_b^E} + \frac{[\cos(\omega l / v_b^E) - 1]}{\sin(\omega l / v_b^E)} \cos \frac{\omega x}{v_b^E} \right\} d_{31} E_0 e^{j\omega t}. \tag{3.88}$$

Полная комплексная проводимость колеблющегося стержня определяется выражением

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{V} = \frac{w \int_0^l \dot{D}_3\, dx}{\int_0^t E_3\, dz}. \tag{3.89}$$

Подставляя (3.88) в (3.82а), а затем полученный результат в (3.82б), получаем выражение для индукции

$$D_3 = \left\{ \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) + \varepsilon_{33}^T k_{31}^2 \left[\cos \frac{\omega x}{v_b^E} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\cos(\omega l / v_b^E) - 1}{\sin(\omega l / v_b^E)} \sin \frac{\omega x}{v_b^E} \right] \right\} E_0 e^{j\omega t}, \qquad (3.90)$$

где коэффициент связи k_{31} определяется формулой $k_{31}^2 = (d_{31}^2 / s_{11}^E \varepsilon_{33}^T)$. Следует отметить, что $\varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2)$ — диэлектрическая проницаемость закрепленного в продольном направлении стержня. Полную проводимость колеблющегося стержня можно получить путем подстановки выражения (3.90) в (3.89). Используя тождество $\operatorname{tg}(\beta/2) = (1 - \cos\beta)/\sin\beta$, получаем

$$\frac{1}{Z} = j\omega \frac{lw}{t} \varepsilon_{33}^T \left\{ (1 - k_{31}^2) + k_{31}^2 \frac{\operatorname{tg}(\omega l / 2 v_b^E)}{\omega l / 2 v_b^E} \right\}. \qquad (3.91)$$

Из выражения (3.91) следует, в частности, что диэлектрическую проницаемость свободного стержня ε_{33}^T можно непосредственно получить из измерений импеданса на низкой частоте.

На резонансной частоте в отсутствие потерь проводимость ненагруженного стержня обращается в бесконечность, т. е.

$$\operatorname{tg} \frac{\omega l}{2 v_b^E} = \infty \qquad \text{и} \qquad f_r = \frac{v_b^E}{2l}. \qquad (3.92)$$

На частоте антирезонанса f_a проводимость обращается в нуль, т. е.

$$\frac{\operatorname{tg}[(\pi/2)(f_a/f_r)]}{(\pi/2)(f_a/f_r)} = \frac{k_{31}^2 - 1}{k_{31}^2}. \qquad (3.93)$$

Очевидно, коэффициент k_{31} можно определить из уравнения (3.93), если измерены значения f_r и f_a.

Механические и электрические граничные условия вводятся в уравнения (3.82) и в (3.86) для определения постоянных A и B [как в (3.87)] в любых заданных условиях. Эти постоянные позволяют определить свойства конкретных преобразователей, не прибегая к эквивалентным схемам. Однако метод эквивалентных схем с применением эффективных способов теории цепей весьма удобен и широко используется.

3. Продольные колебания стержня в поле, параллельном его длине

Этот случай отличается от предыдущего только видом электрических граничных условий. Однако это различие существенно меняет электромеханические свойства. Рассмотрим пьезоэлектрический стержень, длина которого совпадает с осью z (индекс 3; электроды нанесены на концевые грани, перпендикулярные оси z) и поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной. Если диэлектрическая проницаемость стержня настолько велика по сравнению с окружающей средой, что электрические поля рассеяния отсутствуют, то электрические силовые линии параллельны длине стержня и поэтому $D_1 = D_2 = 0$ и $\partial D_3/\partial x_3 = 0$. Аналогичным образом при поперечных размерах, малых по сравнению с длиной, все напряжения, за исключением T_3, равны нулю. Следовательно, D и T выбираются в качестве независимых переменных, и уравнения пьезоэффекта для продольной моды колебаний имеют вид

$$S_3 = s_{33}^D T_3 + g_{33} D_3, \tag{3.94а}$$

$$E_3 = -g_{33} T_3 + \beta_{33}^T D_3. \tag{3.94б}$$

Соответствующее волновое уравнение получается в результате использования уравнения Ньютона и уравнения (3.94а) и имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial t^2} = \frac{1}{s_{33}^D} \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x_3^2}, \tag{3.95}$$

где, кроме того, учитывается, что для изолятора $\operatorname{div} D = 0$, $\partial D_3/\partial x_1 = \partial D_3/\partial x_2 = 0$ (нет полей рассеяния), и поэтому, как уже отмечалось выше, $\partial D_3/\partial x_3 = 0$.

Решение волнового уравнения для смещения имеет вид

$$\xi_3 = \left[A \sin \frac{\omega x_3}{v_b^D} + B \cos \frac{\omega x_3}{v_b^D} \right] e^{j\omega t}, \tag{3.96}$$

где скорость распространения упругих волн $v_b^D = (1/\rho s_{33}^D)^{1/2}$. На свободных концах стержня $x_3 = 0$ и $x_3 = l$ напряжение T_3 равно нулю; это условие совместно с уравнением (3.94а) позволяет исключить постоянные A и B:

$$\xi_3 = \frac{v_b^D g_{33} D_3}{\omega} \left[\sin \frac{\omega x_3}{v_b^D} - \operatorname{tg} \frac{\omega l}{2 v_b^D} \cos \frac{\omega x_3}{v_b^D} \right], \tag{3.97}$$

где $D_3 = D_0 e^{j\omega t}$.

Полную комплексную проводимость колеблющегося стержня можно получить, как и в предыдущем случае, путем подстановки решения (3.97) в уравнения (3.94а) и (3.94б). Однако эти два случая существенно различаются. Поэтому мы проведем дополнительное исследование. Для удобства перепишем уравнения (3.94а) и (3.94б) в виде

$$T_3 = \frac{S_3}{s_{33}^D} - \frac{g_{33}}{s_{33}^D} D_3, \tag{3.98а}$$

$$E_3 = -\frac{g_{33}}{s_{33}^D} S_3 + \left(\frac{g_{33}^2}{s_{33}^D} + \beta_{33}^T\right) D_3. \tag{3.98б}$$

Деформация $S_3 = \partial\xi_3/\partial x_3$, определенная из (3.97), подставляется в уравнение (3.98б), которое затем интегрируется, чтобы получить напряжение, приложенное к стержню, как функцию электрической индукции:

$$V = \int_0^l E_3\, dx_3 = \left[l\left(\frac{g_{33}^2}{s_{33}^D} + \beta_{33}^T\right) - \frac{2g_{33}^2 v_b^D}{s_{33}^D \omega} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{2v_b^D} \right] D_3. \tag{3.99}$$

Ток, протекающий через стержень, определяется путем дифференцирования D_3 по времени, т. е. $I = j\omega t w D_3$. Эта величина вместе с выражением (3.99) дает электрический импеданс Z стержня с электродами на торцевых гранях. В этом случае выражение для импеданса имеет более удобный вид, чем выражение для полной проводимости.

Для стержня без потерь f_a совпадает с f_p, т. е. с частотой, при которой имеет место максимум динамического импеданса (в данном случае ∞), а f_r совпадает с f_s, т. е. с частотой, при которой имеет место равенство фаз (в данном случае ей соответствует значение импеданса, равное нулю; см. § 6, п. 5). Используя формулу (3.99), получаем

$$f_a = f_p = \frac{v_b^D}{2l} = \frac{1}{2l\,(\rho s_{33}^D)^{1/2}} = \frac{1}{2l\,[\rho s_{33}^E (1 - k_{33}^2)]^{1/2}}, \tag{3.100}$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{f_r}{f_a} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}\frac{f_r}{f_a} = k_{33}^2,$$

где

$$k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E e_{33}^T} = \frac{e_{33}^T g_{33}^2}{s_{33}^E}, \qquad s_{33}^D = s_{33}^E (1 - k_{33}^2).$$

Интересно отметить, что при разомкнутой электрической цепи механический резонанс стержня с электродами, нанесенными на торцевые грани ($l = \lambda/2$), наблюдается на частоте параллельного

резонанса, т. е. на частоте антирезонанса, как это можно определить путем непосредственного измерения потенциала на электродах. Для стержня с электродами на боковых гранях (поле перпендикулярно длине) в режиме короткого замыкания механические и электрические резонансы совпадают.

4. Моды колебаний по толщине тонких пьезоэлектрических пластин

Рассмотренные выше моды продольных колебаний по существу являются прототипом других более сложных мод с направлением распространения упругих волн, перпендикулярным или параллельным направлению электрического поля. С точки зрения электрических граничных условий большинство мод относится к этим двум категориям. В дополнение к электрическим граничным условиям механические граничные условия также оказывают большое влияние на моды колебаний. В двух рассмотренных выше случаях колеблющееся тело имело свободные боковые границы (постоянное T) вследствие малости поперечных размеров по сравнению с длиной. Теперь мы рассмотрим другую систему боковых граничных условий, для которых характерно закрепление боковых границ (постоянное S). Эти граничные условия имеют место в тех случаях, когда боковые размеры значительно больше, чем размер в направлении, вдоль которого распространяется упругая волна, как, например, в широко применяемом в ультразвуковой технике преобразователе, работающем с использованием колебаний по толщине. Следует отметить, что проводимый далее анализ в равной мере применим также и к сдвиговым модам колебаний по толщине.

Продольная мода колебаний по толщине и одна из двух сдвиговых мод связаны с распространением упругих волн параллельно направлению переменного электрического поля, и, следовательно, граничные условия характеризуются постоянством индукции D. К этому типу относятся такие интересные с точки зрения практики случаи, как продольные колебания по толщине пьезоэлектрической керамики, кварца X-среза, пластин сульфата лития Y-среза, а также колебания сдвига по толщине кварца Y-среза и пластин пьезоэлектрической керамики с электродами, нанесенными на боковые поверхности (толщина совпадает с направлением, обозначаемым индексом 1). Другая сдвиговая мода колебаний по толщине, для которой направление распространения волны перпендикулярно направлению возбуждающего электрического поля (толщина совпадает с направлением 3), имеет граничное условие постоянства поля E.

Продольные и сдвиговые колебания по толщине рассматриваются как одномерный случай в предположении, что пьезоэлектрическая пластина имеет бесконечно большие боковые размеры и что все точки в некоторой плоскости, параллельной плоскостям пластины, движутся с одинаковыми амплитудами и в одной и той же фазе. Очевидно, это не наблюдается в действительности, так как поверхность реальных колеблющихся пластин разбивается на ангармонические моды, которые обычно связаны с наложением обертонов, отраженных от боковых поверхностей пластины, имеющей конечные размеры. Эти эффекты обычно рассматриваются как искажения, накладывающиеся на основную моду колебаний по толщине. Однако одномерное приближение дает неожиданно хорошие результаты в случае сильно нагруженного преобразователя, так как при этом ангармонические моды в значительной мере подавляются; это приближение может использоваться для точного расчета ультразвуковых измерительных преобразователей и таких устройств, как ультразвуковые линии задержки. Следует заметить, что чистые колебания по толщине (без искажений) могут быть получены также при возбуждении пластин с небольшими электродами специальной формы.

При анализе продольных колебаний по толщине пластин из пьезоэлектрической керамики мы используем индексы 3, 3 (возбуждение и колебания параллельны оси z, т. е. направлению 3). Для кварца X-среза эти индексы заменяются на 1, 1, а для сульфата лития Y-среза — на 2, 2.

Рассмотрим тонкую пьезоэлектрическую пластину толщиной t с электродами, нанесенными на большие грани, перпендикулярные оси z, площадь которых равна lw. Если ее боковые размеры велики по сравнению с толщиной, то можно считать, что по отношению к плоской волне, распространяющейся по толщине, пластина закреплена по боковым поверхностям ($S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = 0$). Для диэлектрика в отсутствие полей рассеяния $D_1 = D_2 = 0$ и $\partial D_3/\partial z = 0$. Поэтому в качестве независимых переменных целесообразно выбрать величины D и S, и, следовательно,

$$T_3 = c_{33}^D S_3 - h_{33} D_3, \tag{3.101а}$$

$$E_3 = -h_{33} S_3 + \beta_{33}^S D_3. \tag{3.101б}$$

Волновое уравнение для этого случая (D постоянно), выведенное в § 3, п. 2, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial t^2} = \frac{c_{33}^D}{\rho} \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial^2 x_3}. \tag{3.102}$$

Отсюда для смещения ξ_3 получим

$$\xi_3 = \left[A \sin \frac{\omega x_3}{v^D} + B \cos \frac{\omega x_3}{v^D} \right] e^{j\omega t}, \qquad (3.103)$$

где $v^D = (c_{33}^D/\rho)^{1/2}$. Постоянные A и B вычисляются из граничных условий на свободных поверхностях ($T_3 = 0$ при $z = 0, t$) с использованием уравнений (3.101а) и (3.103) и равенства $S_3 = \partial\xi_3/\partial x_3$. При гармоническом возбуждении $D_3 = D_0 e^{j\omega t}$ имеем

$$\xi_3 = \frac{v^D h_{33} D_3}{\omega c_{33}^D} \left[\sin \frac{\omega x_3}{v^D} - \operatorname{tg} \frac{\omega t}{2v^D} \cos \frac{\omega x_3}{v^D} \right]. \qquad (3.104)$$

Подставляя (3.104) в (3.101б), получаем электрический импеданс системы

$$Z = \frac{\int_0^t E_3 \, dx_3}{j\omega l w D_3} = \frac{1}{j\omega C_c} \left[1 - k_t^2 \frac{\operatorname{tg} (\omega t/2v^D)}{\omega t/2v^D} \right], \qquad (3.105)$$

где $C_c = (lw)/(t\beta_{33}^S)$ — емкость закрепленной пьезоэлектрической пластины. В принципе частоты резонанса f_r и антирезонанса f_a можно получить из условий максимума и минимума импеданса (3.105) и в предположении, что потерями можно пренебречь, т. е.

$$f_a = \frac{v^D}{2t}, \qquad k_t^2 = \frac{\pi}{2} \frac{f_r}{f_a} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \frac{f_r}{f_a}. \qquad (3.106)$$

Однако на практике вследствие наличия обертонов весьма трудно определить однозначно максимум и минимум импеданса. Когда электрическое поле параллельно направлению распространения волны, сдвиговые моды колебаний по толщине можно описывать этими же уравнениями, если произвести в них соответствующую замену индексов. Для пьезокерамики x_3 заменяется на x_1, c_{33}^D на c_{55}^D, h_{33} на h_{15}, β_{33}^S на β_{11}^S, k_t на k_{15} и T_3, S_3, D_3 и E_3 соответственно на T_5, S_5, D_1 и E_1. В случае кварца Y-среза при возбуждении электрическим полем вдоль оси y, т. е. вдоль направления с индексом 2, используются индексы 2 и 6.

Для других мод сдвиговых колебаний по толщине в пьезоэлектрической керамике электрическое поле ориентировано перпендикулярно направлению распространения упругой волны; при этом имеют место граничные условия с постоянным E и, следовательно, в качестве независимых переменных выбираются E и S, связанные друг с другом с помощью пьезоэлектрических постоянных e.

5. Радиальные и контурные моды

Представляют интерес также моды, связанные с радиальными колебаниями дисков и контурными колебаниями прямоугольных пластин. Изучение радиальных мод дисков (т. е. симметричных пульсаций боковой поверхности) имеет большое значение для определения свойств пьезокерамики. Эти радиальные моды весьма сильно выражены и в значительной мере свободны от влияния других мод колебаний. Керамические диски имеют наиболее удобную для изготовления форму и широко используются в ультразвуковой технике в диапазоне частот от 30 *кгц* до 6 *Мгц*.

Радиальные моды колебаний подробно рассмотрены Мэзоном [37] и Баервальдом [60]; результаты их исследований приведены в Стандартах пьезоэлектрических кристаллов Института радиоинженеров [8]. Для сокращения изложения здесь приводятся лишь те формулы, которые представляют наибольший интерес. Вывод этих формул отличается от вывода для случая одномерной системы, так как здесь необходимо учитывать радиальные и тангенциальные напряжения. Кроме того, возникает также необходимость введения поправок, учитывающих влияние толщины диска на радиальную моду.

Резонансные частоты основной моды и обертонов являются корнями уравнения

$$(1-\sigma^E)\,J_1(\varphi)=\varphi J_0(\varphi), \tag{3.107}$$

где $\sigma^E=-(s_{12}^E/s_{11}^E)$, J_0, J_1 — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков, $\varphi=\omega a/v$ (для $\sigma^E=0{,}31$ наименьший положительный корень $\varphi_1=2{,}05$), $v^2=1/(\rho s_{11}^E\,[1-(\sigma^E)^2])$ и a — радиус диска.

Следует отметить, что в соответствующем уравнении, приведенном в Стандартах Института радиоинженеров [8], имеется ошибка в знаке. Соотношение между f_s (последовательный резонанс) и f_p (параллельный резонанс) имеет вид $\Delta f=f_p-f_s$, и k_p определяется из формулы

$$\frac{k_p^2}{1-k_p^2}=\frac{(1-\sigma^E)\,J_1[\varphi_1(1+\Delta f/f_s)]-\varphi_1(1+\Delta f/f_s)\,J_0[\varphi_1(1+\Delta f/f_s)]}{(1+\sigma^E)\,J_1[\varphi_1(1+\Delta f/f_s)]}. \tag{3.108}$$

Контурные моды колебаний прямоугольной пластины представляют интерес для определения упругих и пьезоэлектрических постоянных с помощью резонансного метода, как это было показано Бехманом [61, 62] и Баервальдом и Либовым [63] на кристаллах, относящихся к различным классам симметрии. Эти методы описаны в Стандартах Института радиоинженеров [8], и поэтому здесь они не рассматриваются.

6. Возбуждение наиболее важных мод колебаний в кристаллах и пьезоэлектрической керамике

Матрицы пьезоэлектрических коэффициентов, рассмотренные в § 2, определяют резонансные моды, которые могут возбуждаться во всех пьезоэлектрических кристаллах. Ниже рассматриваются следующие моды колебаний, которые представляют интерес с точки зрения их использования в преобразователях:

a. Продольные колебания по длине (электрическое поле перпендикулярно длине).

b. Продольные колебания по длине (электрическое поле параллельно длине).

c. Продольные колебания по толщине (электрическое поле параллельно толщине).

d. Сдвиговые колебания по толщине (электрическое поле параллельно толщине).

e. Сдвиговые колебания граней (электрическое поле перпендикулярно большим граням).

f. Планарная мода колебаний диска.

g. Контурная мода колебаний кольца (аксиальное электрическое поле).

h. Контурная мода колебаний кольца (радиальное электрическое поле).

i. Пульсирующая мода колебаний сферической оболочки.

Моды *a* — *d* обычно могут возбуждаться во всех пьезоэлектрических кристаллах, однако для их реализации часто приходится прибегать к срезам под различными углами к главным осям симметрии, поэтому во многих случаях имеет место сильное уменьшение пьезоэлектрических коэффициентов связи (см. § 3, п. 1). Возбуждение мод *f* и *g* оказывается возможным при наличии электромеханической связи между деформацией растяжения в некоторой плоскости и перпендикулярным к ней полем; эти моды свободны от нежелательных связей с другими модами только в том случае, если выполняется условие изотропии в данной плоскости. Моды *h* и *i* могут быть реализованы только для пьезокерамики, поскольку только в этом случае с помощью искусственной поляризации удается создать совокупность полярных осей, в точности совпадающих в каждой точке тела с радиальным направлением. Как показано в п. 1 настоящего параграфа, мода *i* управляется динамическим коэффициентом связи k_p, а контурные моды кольца *g* и *h* — динамическим коэффициентом связи k_{31}.

Моды *f* и *g* не являются интерференционными и могут легко возбуждаться в пьезокерамике, в кристаллах класса $6mm$, особенно в CdS и в других кристаллах типа вюрцита. В этих случаях имеет место выраженная планарная изотропия [$d_{31} = d_{32}$ и $s_{66} =$

$= 2(s_{11} - s_{12})$]. Динамический коэффициент связи тонкого диска при возбуждении моды f связан с k_p (см. п. 5 настоящего параграфа), и эта мода обычно используется для определения k_p пьезокерамики. Отношение $k_{\text{дин}}/k_p$ само является функцией k_p. Для $k_p = 0{,}6$ $k_{\text{дин}} = 0{,}532$, а для $k_p = 0{,}30$ $k_{\text{дин}} = 0{,}227$. Таким образом, при росте k_p динамический коэффициент связи приближается к k_p. Эта мода может возбуждаться также в дисках кубических кристаллов со срезом, параллельным плоскостям (111). Здесь k'_p меньше, чем коэффициент k_{14}, являющийся инвариантным трехкратно вырожденным коэффициентом связи (см. § 3, п. 1). Для ZnS $k'_p = 0{,}059$ и $k_{14} = 0{,}0795$.

Мода *a* легко возбуждается в пьезокерамике (d_{31}), в CdS (d_{31}) и в кварце (d_{12}). В этом случае $k_{\text{дин}}$ меньше, чем k_{31} (или k_{12} для кварца), причем разность зависит от величины коэффициента связи. Моду *a* возбуждают также в кристаллах ADP, сегнетовой соли и цинковой обманки с применением среза под углом 45°. Во всех этих случаях коэффициент связи k'_{31} меньше, чем для соответствующей сдвиговой моды, как это показано в § 3, п. 1. Например, для кристаллов ADP $k_{36} = 0{,}32$ и $k'_{31} = 0{,}28$. Здесь опять $k_{\text{дин}}$ меньше, чем k'_{31}, причем коэффициент пересчета зависит от k'_{31}. Наиболее сильными модами этого типа являются моды, возбуждаемые в 45° X-срезе сегнетовой соли и в 45° Z-срезе ADP. Кроме того, иногда используют 45° Y-срез сегнетовой соли; так как в этом случае сегнетоэлектрические эффекты не играют роли, температурные зависимости существенно сглаживаются и в то же время пьезоэффект оказывается достаточно большим.

Моды *b* и *c* весьма сходны по своей природе. Единственное различие состоит в механических граничных условиях. В случае моды *b* длинный стержень или цилиндр колеблется в направлении своей длины, причем боковые его поверхности свободны, в то время как в случае моды *c* тонкая пластинка колеблется вдоль своей толщины и ее боковые поверхности можно считать закрепленными. Обычно коэффициент связи для моды *b* больше, чем для моды *c*. Для пьезокерамики (d_{33}), кристалла CdS (d_{33}) и кварца (d_{11}) толщинные моды сильно выражены в пластинах, вырезанных перпендикулярно по отношению к определенным кристаллографическим осям. Косые срезы используются в кристаллах ADP и сегнетовой соли. В случае кубических кристаллов для возбуждения моды *c* может быть использована пластина, вырезанная нормально к оси третьего порядка [111], а для возбуждения моды *b* — стержень или цилиндр, вырезанный вдоль оси [111].

Мода *d* легко возбуждается для пьезокерамики ($d_{15} = d_{24}$), для CdS ($d_{15} = d_{24}$) и для кварца (d_{26}).

Мода *e* присуща сегнетовой соли, ADP и цинковой обманке. Для пьезокерамики или кристаллов CdS эту моду не удается воз-

будить даже при косых срезах. Однако сдвиговые колебания граней в электрическом поле, параллельном наибольшей грани, можно, конечно, возбудить и в этих пьезоэлектриках.

§ 6. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ

Анализ различных пьезоэлектрических резонаторов или преобразователей и расчеты конкретных ультразвуковых установок можно проводить на основе прямого решения волнового уравнения. Однако часто значительно более удобным оказывается использование метода эквивалентных схем, при котором обе стороны преобразователя — как электрическая, так и механическая — представляются в виде электрических эквивалентов. Метод эквивалентных схем имеет определенные преимущества по сравнению с непосредственным решением волнового уравнения, которые заключаются в возможности привлечения эффективных методов теории электрических цепей, а также в том, что частично задача решается уже на этапе ее постановки. Однако при этом необходимо выяснить, совпадают ли граничные условия каждой конкретной задачи с теми условиями, которые использовались при первоначальном выводе эквивалентной схемы. Применение метода эквивалентных схем может дать такие же точные результаты, как и непосредственное решение волнового уравнения; при этом подразумевается, что элементы эквивалентной схемы в действительности являются как бы параметрами соответствующих электрических длинных линий, что позволяет учитывать также более высокие моды колебаний. Если при этом исходные условия задачи для обоих методов совпадают, то эквивалентная схема может рассматриваться как точное представление электромеханического преобразователя. Значительная часть оригинальных исследований, посвященных эквивалентным схемам, была выполнена Мэзоном; его книга «Электромеханические преобразователи и фильтры» [64] обычно используется как руководство для составления эквивалентных схем пьезоэлектрических преобразователей. Превосходное и весьма подробное рассмотрение параметров эквивалентных схем преобразователей из пьезоэлектрической керамики и пьезомагнитных материалов дано в книге Каца [65].

Эквивалентные схемы пьезоэлектрических преобразователей различных типов могут быть построены в результате использования уравнения движения и соответствующих уравнений пьезоэффекта. Граничные условия на двух активных, или нагруженных, поверхностях преобразователя и уравнение пьезоэффекта после интегрирования позволяют получить систему из трех уравнений, описывающих процессы, протекающие в преобразователе, с помощью трех зависимых и трех независимых переменных. Построен-

ная на основе этих уравнений эквивалентная схема имеет одну пару электрических и две пары «механических» клемм. После введения «идеального электромеханического трансформатора» эти уравнения сопоставляются с уравнениями, описывающими процессы, протекающие в эквивалентной электрической схеме, причем параметры этих уравнений имеют смысл параметров схемы, т. е. импеданса, проводимости и т. д. Следует заметить, что более сложные двумерные или трехмерные задачи с дополнительными граничными условиями, связанными с наличием у преобразователя большого количества механически нагруженных поверхностей, в принципе могут решаться этим же методом, если для каждой дополнительной активной поверхности преобразователя ввести в рассмотрение дополнительное уравнение, две переменных и две клеммы.

1. Эквивалентная схема для стержня, совершающего продольные колебания по длине в электрическом поле, параллельном его длине

Мы рассмотрим подробно эквивалентную схему одного из типов преобразователей, а затем приведем результаты для преобразователей других типов. В случае гармонического возбуждения продольных колебаний стержня с электродами на торцах, т. е. находящегося в электрическом поле, параллельном направлению распространения упругих волн (постоянное D), и с поперечным сечением, малым по сравнению с длиной (постоянное T), пьезоэлектрические уравнения и уравнение движения имеют вид

$$S_3 = s_{33}^D T_3 + g_{33} D_3, \tag{3.109а}$$

$$E_3 = -g_{33} T_3 + \beta_{33}^T D_3 \tag{3.109б}$$

и

$$\xi_3 = \left[A \sin \frac{\omega x_3}{v_b^D} + B \cos \frac{\omega x_3}{v_b^D} \right] e^{j\omega t}. \tag{3.110}$$

Ранее эти уравнения были решены для стержня с ненагруженными концами ($x_3 = 0$, $x_3 = l$). Теперь мы решим их для случая, когда заданы механические силы или колебательные скорости на концах стержня. Если требуется в конечном итоге вычислить величины, определяемые проводимостью, то более удобно записать граничные условия через силы F_1 и F_2, действующие на концах стержня. Однако если требуется вычислить величины, характеризуемые импедансом, то предпочтительной является запись граничных условий через величины колебательных скоростей. Для второго случая постоянные A и B в уравнении (3.110) выражаются через

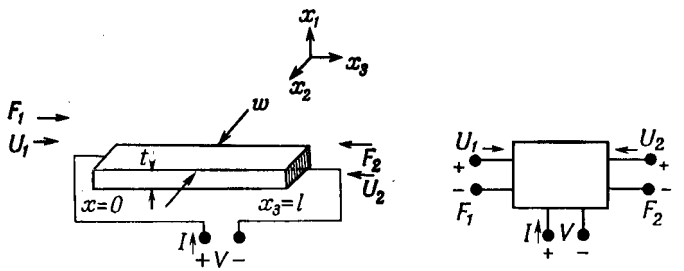
колебательные скорости концов стержня U_1 и U_2 с использованием правила знаков, указанного на фиг. 54. Это правило знаков аналогично правилу знаков, используемому в теории электрических цепей. Получаем

$$\xi_3\Big|_{x_3=0} = +U_1, \qquad \xi_3\Big|_{x_3=l} = -U_2, \tag{3.111}$$

откуда

$$A = -\frac{1}{j\omega}\left[\frac{U_2}{\sin \omega l/v_b^D} + \frac{U_1}{\operatorname{tg} \omega l/v_b^D}\right] e^{-j\omega t},$$
$$B = \frac{1}{j\omega} U_1 e^{-j\omega t}. \tag{3.112}$$

С помощью уравнений (3.109а), (3.110) и (3.112) силу, приложенную к каждой торцевой поверхности преобразователя, можно



Фиг. 54. Стержень, совершающий продольные колебания по длине в электрическом поле, параллельном его длине, и его эквивалентная блок-схема.

выразить через U_1, U_2 и $I_3 = wt\dot{D}_3$. При $x=0$ $F_1 = -wtT_3$, следовательно,

$$F_1 = \frac{wtg_{33}}{s_{33}^D}\frac{I}{j\omega wt} + \frac{wt}{js_{33}^D v_b^D}\left[\frac{U_2}{\sin \omega l/v_b^D} + \frac{U_1}{\operatorname{tg} \omega l/v_b^D}\right]. \tag{3.113}$$

Если теперь ввести характеристический механический импеданс преобразователя, определяемый выражением

$$Z_0^D = wt\rho v_b^D = wt\left(\frac{\rho}{s_{33}^D}\right)^{1/2}, \tag{3.114}$$

то (3.113) запишется в виде

$$F_1 = \frac{Z_0^D}{j \operatorname{tg} \omega l/v_b^D} U_1 + \frac{Z_0^D}{j \sin \omega l/v_b^D} U_2 + \frac{g_{33}}{j\omega s_{33}^D} I_3. \tag{3.115}$$

Аналогично $F_2 = -wt_3\big|_{x_3=l}$, откуда

$$F_2 = \frac{Z_0^D}{j \sin \omega l/v_b^D} U_1 + \frac{Z_0^D}{j \operatorname{tg} \omega l/v_b^D} U_2 + \frac{g_{33}}{j\omega s_{33}^D} I_3. \tag{3.116}$$

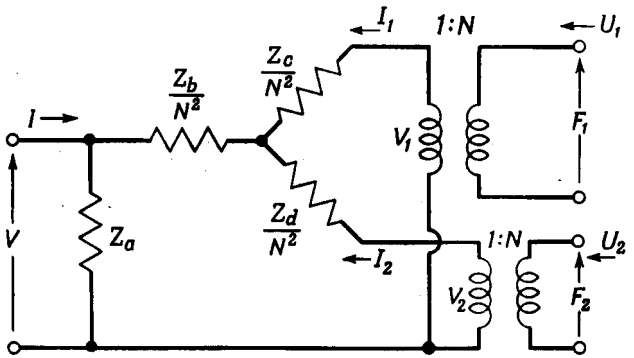
Напряжение V на электродах стержня определяется после интегрирования уравнения (3.109б). Получаем

$$V = \int_0^l E_3\, dx_3 = \frac{g_{33}}{j\omega s^D_{33}} U_1 + \frac{g_{33}}{j\omega s^D_{33}} U_2 + \frac{I_3}{j\omega C_0}, \qquad (3.117)$$

где

$$C_0 = \frac{wt}{\beta^T_{33} l}(1 - k^2_{33}).$$

Необходимо отметить, что из определений величин E и V следует $V = \int -E\, dx$, однако в обозначениях фиг. 58 положительные значения V соответствуют отрицательному направлению оси x_3.



Фиг. 55. Эквивалентная схема, постулируемая на основании уравнений (3.115) — (3.117).

Теперь можно ввести идеальный электромеханический трансформатор, отношение чисел витков которого N определяется как отношение статической внешней силы к возбуждаемому ею внутреннему электрическому напряжению при закрепленном пьезоэлектрике ($S_3 = 0$):

$$N = \frac{\text{сила}}{\text{электрическое напряжение}} = \frac{wt}{l} \frac{1}{g_{33}[1 + (\beta^T_{33} s^D_{33}/g^2_{33})]} = \frac{wt}{l} \frac{g_{33}}{s^E_{33}\beta^T_{33}}, \qquad (3.118)$$

где используется правило знаков фиг. 58. Электрическая схема, одним из элементов которой является такой идеальный электромеханический трансформатор, формально удовлетворяющая уравнениям (3.115), (3.116) и (3.117), представлена на фиг. 55.

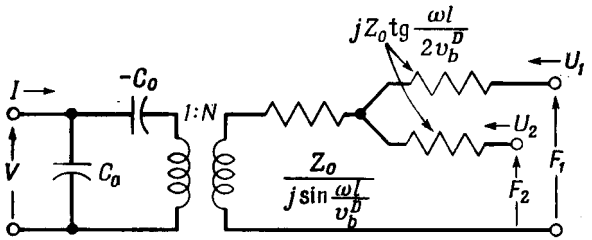
Уравнения для схемы фиг. 55, имеющей три пары клемм, записываются следующим образом:

$$V_1 = \left(Z_a + \frac{Z_b}{N^2} + \frac{Z_c}{N^2}\right) I_1 + \left(Z_a + \frac{Z_b}{N^2}\right) I_2 + Z_a I, \qquad (3.119)$$

$$V_2 = \left(Z_a + \frac{Z_b}{N^2}\right) I_1 + \left(Z_a + \frac{Z_b}{N^2} + \frac{Z_d}{N^2}\right) I_2 + Z_a I, \qquad (3.120)$$

$$V = Z_a I_1 + Z_a I_2 + Z_a I. \qquad (3.121)$$

Подставляя $V_1 = F_1/N$, $I_1 = NU_1$, $V_2 = F_2/N$ и $I_2 = NU_2$ в уравнения (3.119), (3.120) и (3.121) и сопоставляя их затем с уравнениями



Фиг. 56. Полная эквивалентная схема стержня, совершающего продольные колебания по длине в поле, параллельном распространению упругой волны (электроды нанесены на торцах).

$$C_0 = \frac{wt\varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)}{l}, \qquad v_b^D = \left(\frac{1}{\rho s_{33}^D}\right)^{1/2},$$

$$Z_0 = \rho w t v_b^D, \qquad N = \frac{wt}{l} \frac{g_{33}}{s_{33}^E \beta_{33}^T} = \frac{wt}{l} \frac{d_{33}}{s_{33}^E} = \frac{wt}{l} \left(\frac{\varepsilon_{33}^T}{s_{33}^E}\right)^{1/2} k_{33}.$$

(3.115), (3.116) и (3.119) с учетом тождества $\operatorname{tg} \alpha/2 = (1 - \cos \alpha)/\sin \alpha$, получаем параметры эквивалентной схемы в явном виде:

$$Z_a = \frac{1}{j\omega C_0}, \qquad (3.122)$$

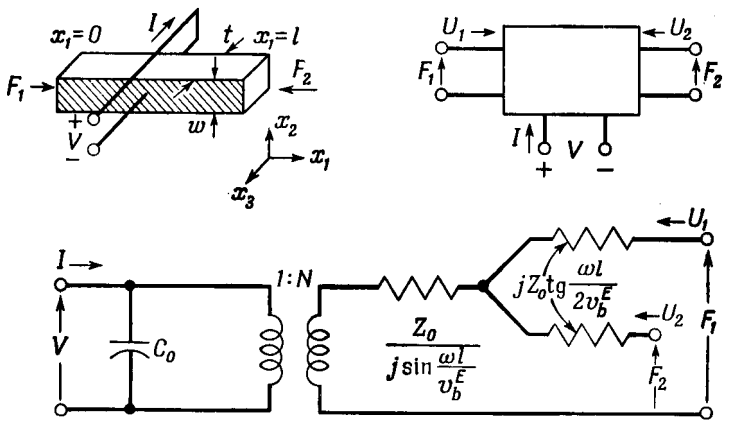
$$Z_b = \frac{Z_0}{j \sin (\omega l/v_b^D)} - \frac{1}{j\omega C_0}, \qquad (3.123)$$

$$Z_c = Z_d = jZ_0 \operatorname{tg} \frac{\omega l}{2v_b^D}, \qquad (3.124)$$

где $C_0 = wt\varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)/l$ — емкость пьезоэлектрика, закрепленного в продольном направлении. Полная эквивалентная схема стержня, совершающего продольные колебания, с электродами на торцах и значения ее параметров представлены на фиг. 56.

2. *Эквивалентная схема для стержня, совершающего продольные колебания по длине в электрическом поле, перпендикулярном его длине*

Эквивалентную схему для стержня, совершающего продольные колебания в электрическом поле, перпендикулярном направлению распространения упругой волны, можно построить таким же способом, как в п. 1, используя уравнение движения и соответствующие уравнения пьезоэффекта. Учитывая заданные граничные



Фиг. 57. Полная эквивалентная схема стержня, совершающего продольные колебания по длине в поле, перпендикулярном распространению упругой волны (электроды нанесены на боковых поверхностях).

$$C_0 = \frac{lwe_{33}^T(1-k_{31}^2)}{t}, \qquad v_b^E = \left(\frac{1}{\rho s_{11}^E}\right)^{1/2},$$

$$Z_0 = \rho wl v_b^E, \qquad N = \frac{wd_{31}}{s_{11}^E} = w\left(\frac{e_{33}^T}{s_{11}^E}\right)^{1/2} k_{31}.$$

условия (T и E постоянны) и используя обозначения, соответствующие случаю, когда керамический стержень поляризован по толщине, имеем

$$S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{31}E_3, \tag{3.125а}$$

$$D_3 = d_{31}T_1 + \varepsilon_{33}^T E_3 \tag{3.125б}$$

и

$$\xi_1 = \left[A\sin\frac{\omega x_1}{v_b^E} + B\cos\frac{\omega x_1}{v_b^E}\right]e^{j\omega t}, \tag{3.126}$$

где $v_b^E = (1/\rho s_{11}^E)^{1/2}$. После определения постоянных A и B через колебательные скорости U_1 и U_2 на концах стержня ($x_1 = 0$, $x_1 = l$) уравнения (3.125а), (3.125б) и (3.126) используются для

вывода уравнений, связывающих силу и напряжение для схемы с тремя парами клемм. В свою очередь эти уравнения можно использовать для определения параметров эквивалентной схемы.

Эквивалентная схема в окончательном виде и значения параметров представлены на фиг. 57. Здесь следует подчеркнуть снова, что эквивалентная схема является точным представлением пьезоэлектрического стержня в рамках тех ограничений, которые определяются справедливостью исходных предположений о характере граничных условий (постоянство T и E). Различия между эквивалентными схемами для случаев, когда постоянно D и когда постоянно E, можно усмотреть из сопоставления фиг. 56 и 57. Следует отметить, что эти две эквивалентные схемы справедливы для всех пьезоэлектрических тел, уравнения движения которых могут быть записаны с использованием лишь одной пространственной координаты (одномерный случай), при совпадении электрических граничных условий. Помимо функциональной связи с параметрами C_0, Z_0, v и N, выражения для механического импеданса отражают также характер пространственной зависимости решения уравнения движения (синусоида, функции Бесселя и т. д.), зависящий от формы пьезоэлектрического тела.

3. Эквивалентная схема для пластины, совершающей колебания по толщине в электрическом поле, параллельном ее толщине

Эквивалентную схему для пьезоэлектрической пластины, совершающей продольные колебания по толщине и имеющей настолько большие боковые размеры, что смещения вдоль этих направлений не наблюдаются (боковое закрепление), можно вывести, исходя из следующих уравнений:

$$T_3 = c_{33}^D S_3 - h_{33} D_3, \tag{3.127а}$$

$$E_3 = -h_{33} S_3 + \beta_{33}^S D_3 \tag{3.127б}$$

и

$$\xi_3 = \left[A \sin \frac{\omega x_3}{v_t^D} + B \cos \frac{\omega x_3}{v_t^D} \right] e^{j\omega t}, \tag{3.128}$$

где индексы соответствуют керамической пластине, поляризованной по толщине. Эквивалентная схема и значения ее параметров представлены на фиг. 58.

Для сдвиговой моды колебаний по толщине, если толщина совпадает с осью x_1, а деформация сдвига происходит в плоскости x_1, x_3 (деформация S_5), уравнения пьезоэффекта и уравнение движения записываются в следующем виде:

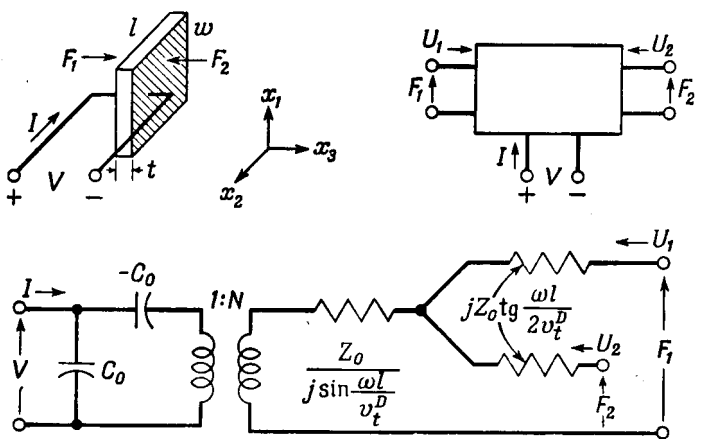
$$T_5 = c_{55}^D S_5 - h_{15} D_1, \tag{3.129а}$$

$$E_1 = -h_{15} S_5 + \beta_{11}^S D_1 \tag{3.129б}$$

и

$$\xi_3 = \left[A \sin \frac{\omega x_1}{v_s^D} + B \cos \frac{\omega x_1}{v_s^D} \right] e^{j\omega t}, \qquad (3.130)$$

где индексы соответствуют керамической пластине, поляризованной в плоскости, параллельной большой грани пластины, и возбуждаемой полем, параллельным ее толщине, т. е. вдоль направления x_1. Построенная на основе этих уравнений эквивалентная



Фиг. 58. Полная эквивалентная схема пластины, совершающей колебания по толщине (боковые поверхности закреплены) в электрическом поле, параллельном направлению распространения упругой волны.

$$C_0 = \frac{lw}{\beta_{33}^S t}, \qquad v_t^D = \left(\frac{c_{33}^D}{\rho} \right)^{1/2},$$

$$Z_0 = \rho l w v_t^D, \qquad N = C_0 h_{33} = \frac{lw}{t} \left(\frac{c_{33}^D}{\beta_{33}^S} \right)^{1/2} k_t.$$

схема совпадает с эквивалентной схемой, изображенной на фиг. 58, если систему координат повернуть таким образом, чтобы ось x_3 лежала в плоскости пластины, а ось x_1 соответствовала направлению ее толщины (положительные значения x_1 расположены справа); при этом v_t^D заменяется на v_s^D, а параметры эквивалентной схемы определяются следующими выражениями:

$$C_0 = \frac{lw}{\beta_{11}^S t}, \qquad v_s^D = \left(\frac{c_{55}^D}{\rho} \right)^{1/2},$$

$$Z_0 = \rho l w v_s^D, \qquad N = C_0 h_{15} = \frac{lw}{t} \left(\frac{c_{55}^D}{\beta_{11}^S} \right)^{1/2} k_{15}. \qquad (3.131)$$

4. Пьезоэлектрический стержень, нагруженный с одной стороны

Оценка эффективности конкретных пьезоэлектрических преобразователей или систем преобразователей осуществляется путем присоединения электрических или эквивалентных механических источников и нагрузок к клеммам соответствующей эквивалентной схемы, проведения анализа получающейся электрической цепи и последующего перехода к механическим и акустическим параметрам. Рассмотрены эквивалентные схемы для преобразователей с двумя парами механических клемм (двумя поверхностями), к которым может быть приложена нагрузка. Анализ значительно упрощается в часто встречающихся на практике случаях, когда нагрузка присоединена только к одной паре клемм (одна поверхность преобразователя нагружена, а другая свободна) или когда свободны обе поверхности. Так как эти упрощения влияют сходным образом на эквивалентные схемы различных типов, мы ограничимся здесь исследованием только одного типа преобразователя — стержня, совершающего продольные колебания по длине, с электродами, нанесенными на его боковые поверхности (эквивалентная схема этого преобразователя показана на фиг. 57).

Если торцевая поверхность *1* свободна, то имеет место граничное условие $F_1 = 0$, т. е. соответствующая пара клемм замкнута накоротко, и в результате мы имеем эквивалентную схему, показанную на фиг. 59, *а*. Эту эквивалентную схему можно упростить, если воспользоваться преобразованиями, предложенными Мэзоном [64], которые иллюстрируются на фиг. 59, *б*, а также тригонометрическими тождествами

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (3.132)$$

В ограниченном диапазоне частот вблизи каждого из резонансов, т. е. при $(\omega l/2\, v_b^E) \approx \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$ и т. д., эквивалентную схему, изображенную на фиг. 58, *в*, можно привести к еще более простому виду. Для области частот, примыкающей к основному резонансу f_0, механический импеданс последовательной цепи можно разложить в ряд по отклонениям от резонансной частоты $\omega_0 = 2\pi f_0 = \pi v_b^E/l$, т. е.

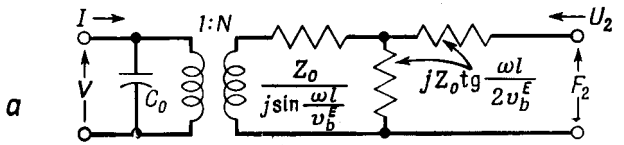
$$\frac{2Z_0}{j\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{2Z_0}{j\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\delta}{\omega_0}\right)} = j\pi Z_0\left(\frac{\delta}{\omega_0} + \frac{\pi^2}{12}\frac{\delta^3}{\omega_0^3} + \ldots\right), \qquad (3.133)$$

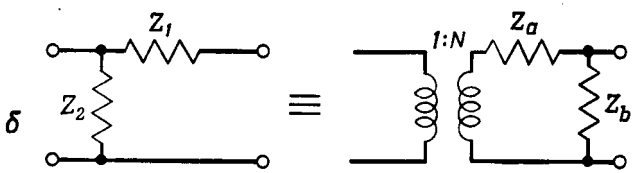
где $\omega = \omega_0 + \delta$. Это выражение можно сравнить с выражением для импеданса последовательной цепи $L\,C$, представленным в виде разложения по величине отклонения от частоты последовательного

резонанса $\omega_0 = 1/(L_1C_1)^{1/2}$:

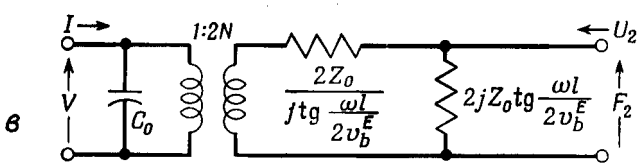
$$Z = j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) = \frac{2j}{\omega_0 C_1}\left(\frac{\delta}{\omega_0} + \frac{\delta^2}{2\omega_0^2}\right)\left(1 - \frac{\delta}{\omega_0} + \ldots\right). \quad (3.134)$$

Для частот вблизи резонанса члены первого порядка в этих выражениях эквивалентны; поэтому, приравнивая эти члены в двух





$$Z_a = \frac{Z_1(Z_1+Z_2)}{Z_2}, \qquad Z_b = Z_1 + Z_2, \qquad N = \frac{Z_1+Z_2}{Z_2}$$



Ф и г. 59. Эквивалентные схемы стержня, совершающего продольные колебания по длине (электроды нанесены на боковые поверхности) и нагруженного только на одном торце.

а — одна пара механических клемм свободна; *б* — эквивалентные друг другу цепи; *в* — окончательная эквивалентная схема

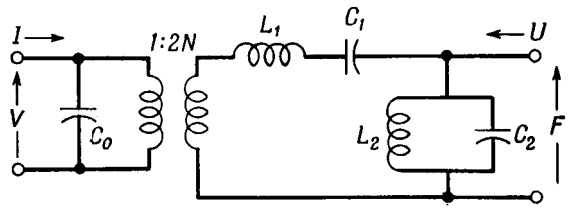
выражениях, получаем следующие значения сосредоточенных постоянных цепи:

$$C_1 = \frac{2}{\pi\omega_0 Z_0} = \frac{2l}{\pi^2 \rho w t\,(v_b^E)^2} = \frac{2}{\pi^2}\,\frac{l s_{11}^E}{wt}, \qquad (3.135)$$

$$L_1 = \frac{1}{\omega_0^2 C_1} = \frac{\pi Z_0}{2w_0} = \frac{\rho \cdot \text{объем}}{2}.$$

Таким образом, C_1 равно статической податливости стержня, умноженной на $2/\pi^2$, а L_1 равно половине его массы.

Аналогичным образом можно показать, что шунтирующий элемент схемы, показанной на фиг. 59, *в*, в рамках сделанных



Ф и г. 60. Приближенная эквивалентная схема пьезоэлектрического стержня с одним свободным концом и электродами, нанесенными на боковые поверхности, вблизи резонанса.

выше предположений эквивалентен параллельной цепи L_2C_2 с частотой параллельного резонанса ω_0, причем

$$C_2 = \frac{1}{8\rho wt\,(v_b^E)^2} = \frac{ls_{11}^E}{8wt}, \qquad L_2 = \frac{8}{\pi^2}\,\rho \cdot \text{объем} \tag{3.136}$$

и

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_2C_2}.$$

Эта приближенная эквивалентная схема показана на фиг. 60. Следует заметить, что в диапазоне частот, в котором эта схема справедлива, импеданс параллельной цепи L_2C_2 обычно очень велик по сравнению с импедансом механических нагрузок, которые встречаются в практических случаях, и поэтому обычно им можно пренебречь.

Приближенные значения сосредоточенных постоянных для всех описанных выше эквивалентных схем могут быть получены тем же способом, т. е. путем разложения в ряд параметров эквивалентной схемы вблизи частоты резонанса и приравнивания членов первого порядка в этих рядах и в аналогичных рядах, полученных для простейшей электрической цепи с сосредоточенными постоянными. Функции, выраженные через синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы, вблизи их нулей могут быть аппроксимированы последовательной цепью LC, а вблизи их полюсов — параллельной цепью LC. Область применимости каждой схемы с сосредоточенными постоянными может быть определена путем сравнения членов второго порядка в разложениях, которые рассмотрены выше.

5. Ненагруженный пьезоэлектрический резонатор

Ненагруженный пьезоэлектрический резонатор имеет большое значение не только как инструмент для исследования физических свойств пьезоэлектрических материалов, но и как элемент электрических схем, который используется в частотно-селективных цепях и в цепях, управляющих частотой. Эквивалентную схему такого резонатора можно получить, замыкая накоротко все пары механических клемм (т. е. полагая $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ и т. д.) и проводя соответствующие тригонометрические преобразования. Ненагруженный пьезоэлектрический резонатор является двухполюсником; обычно он используется в ограниченной области частот вблизи одного из его резонансов, и поэтому его можно представить эквивалентной схемой с сосредоточенными постоянными, подобной той, которая получается при закорачивании механических клемм в эквивалентной схеме, показанной на фиг. 60. Использование в двухполюснике электромеханического трансформатора не дает каких-либо преимуществ, поэтому после пересчета механических элементов L_1 и C_1 на электрическую сторону его можно исключить. В рассматриваемом случае пьезокерамического стержня, совершающего продольные колебания по длине, с электродами, нанесенными на боковые поверхности, после пересчета эти элементы записываются следующим образом:

$$C = 4N^2C_1 = \frac{8}{\pi^2}\,k_{31}^2\,\frac{lwe_{33}^T}{t} = \frac{8}{\pi^2}\,k_{31}^2 C^T,$$
$$L = \frac{L_1}{4N^2} = \frac{\rho lwt}{8}\left(\frac{s_{11}^E}{wd_{31}}\right)^2 = \frac{M}{8N^2}; \qquad (3.137)$$

приведем также снова выражение для C_0:

$$C_0 = \frac{lwe_{33}^T}{t}(1 - k_{31}^2) = (1 - k_{31}^2)\,C^T.$$

Необходимо отметить, что при больших значениях коэффициента электромеханической связи величина f_a может выйти за пределы, внутри которых применима упрощенная эквивалентная схема. В этих случаях следует использовать уравнения типа (3.91) и (3.93), связывающие f_r и f_a с параметрами и формой резонатора, а также соотношения между f_r, f_a, L, C и C_0 для эквивалентной схемы с сосредоточенными постоянными, чтобы получить параметры эквивалентной схемы, применимые для частот вблизи f_a.

Таким образом, ненагруженный пьезоэлектрический резонатор вблизи резонанса можно представить эквивалентной схемой, показанной на фиг. 61, в которой несколько не строго учитываются также механические потери путем включения сопротивления $R = 1/(\omega CQ)$, где Q — механическая добротность. В этом случае

приходится рассматривать три пары характеристических частот в отличие от одной пары частот (последовательного и параллельного резонанса), которая имеет место, если не учитывать механические потери. Эти частоты легче всего объяснить, используя векторную диаграмму полной проводимости, построенную на основе приближенной эквивалентной схемы пьезоэлектрического резонатора (фиг. 61), дополненной проводимостью, которая учитывает диэлектрические потери.

Векторная диаграмма полной проводимости показана на фиг. 62. При учете диэлектрических потерь в виде активной проводимости пьезоэлектрика конец вектора полной проводимости при возрастании частоты движется по вертикальной линии, исключая область вблизи механического резонанса, где он описывает так называемый круг динамической проводимости. Максимум динамической проводимости наблюдается в точке механического резонанса f_s, в то время как частота параллельного резонанса f_p соответствует точке, расположенной вблизи минимума проводимости; в этой точке полная проводимость имеет такой же фазовый угол, как и в точке, которая соответствует частоте f_s. Максимум и минимум полной проводимости наблюдаются соответственно в точках f_m и f_n. Проводимость имеет емкостный характер в большей части диапазона частот, за исключением области между частотами резонанса f_r и антирезонанса f_a, где она имеет индуктивный характер. Таким образом, частоты резонанса f_r и антирезонанса f_a имеют принципиально важное значение и характеризуют свойства электромеханических двухполюсников различного типа.

Для удобства мы приведем значения характеристических параметров, полученных из диаграммы динамической проводимости, которые заимствованы из Стандартов пьезоэлектрических кристаллов Института радиоинженеров [6]:

f_s — частота динамического (последовательного) резонанса, $2\pi f_s = 1/(LC)^{1/2}$,

f_p — частота параллельного резонанса,

$$2\pi f_p = \left\{\frac{1}{LC}\left[1+\left(\frac{C}{C_0}\right)\right]\right\}^{1/2},$$

f_r — частота резонанса (реактивная проводимость равна нулю),

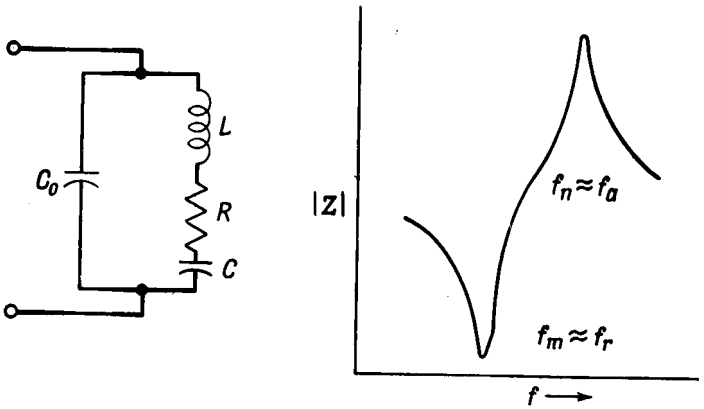
f_a — частота антирезонанса (реактивная проводимость равна нулю);

f_m — частота, соответствующая максимуму полной проводимости,

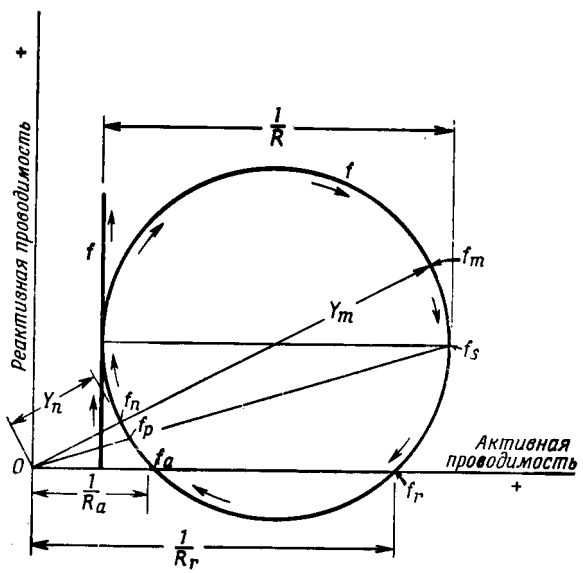
f_n — частота, соответствующая минимуму полной проводимости,

$Q = (2\pi f_s L)/R = 1/(2\pi f_s CR)$ — механическая добротность,

$C/C_0 = (f_p^2 - f_s^2)/f_s^2$.



Ф и г. 61. Приближенная эквивалентная схема ненагруженного пьезоэлектрического резонатора.



Ф и г. 62. Векторная диаграмма полной проводимости для пьезоэлектрического резонатора.

Для определения параметров эквивалентных схем нужны характеристические частоты f_s и f_p. Во всех приведенных выше формулах более правильно использовать эти частоты. Если потери отсутствуют, то все три пары резонансных частот совпадают, т. е. $f_m = f_r = f_s$ и $f_n = f_a = f_p$; эти частоты соответствуют минимуму и максимуму импеданса. Если потери малы, то можно использовать частоты f_m и f_n вместо частот f_s и f_p, непосредственное измерение которых связано с трудностями. При возрастании потерь разность частот $f_p - f_s$ (которая необходима для определения C по известному значению C_0 или C^T) может быть получена из приближенного выражения

$$\Delta f = (f_p - f_s) \approx \frac{f_n - f_m}{(1 + 4/M^2)^{1/2}}, \tag{3.138}$$

приведенного в Стандартах пьезоэлектрических кристаллов Института радиоинженеров [8]. Здесь M — добротность, определяемая выражением

$$M = \frac{1}{2\pi f_s R C_0} \approx \frac{1}{2\pi f_m (C_0 + C) \mid Z \mid_{\text{мин}}}. \tag{3.139}$$

При использовании этих приближенных выражений ошибка в определении Δf составляет менее 1%, если $M^2(f_p - f_s)/f_s > > 100$.

6. *Применение эквивалентных схем*

Метод эквивалентных схем оказывается весьма полезным при конструировании и анализе электроакустических преобразователей. Каждый из рассмотренных в предыдущих разделах пьезоэлектрических преобразователей является полосовым фильтром, характеристики которого можно получить в результате анализа его эквивалентной схемы методами теории электрических фильтров. В качестве примера рассмотрим преобразователь с пренебрежимо малыми потерями, который можно представить простой эквивалентной схемой с сосредоточенными постоянными, показанной на фиг. 52. Предполагаем, что выходные клеммы разомкнуты и все элементы схемы пересчитаны на одну сторону электромеханического трансформатора. Ширина полосы частот этой схемы определяется частотами f_s и f_p, а относительная ширина полосы

$$BW' = \frac{f_2 - f_1}{\sqrt{f_1 f_2}} \approx \frac{f_p - f_s}{f_s} \approx \frac{k^2}{2(1 - k^2)}, \tag{3.140}$$

где k — динамический коэффициент электромеханической связи,

$$k^2 = \frac{f_p^2 - f_s^2}{f_p^2}. \tag{3.141}$$

Следует заметить, что выражение (3.141) также можно использовать для определения динамических коэффициентов связи преобразователей других рассмотренных выше типов. Если параллельно емкости закрепленного пьезоэлектрика C_0 подключить индуктивность $L_0 = 1/(4\pi^2 f_s^2 C_0)$, то ширина полосы частот возрастет до значения

$$BW = \frac{k}{(1-k^2)^{1/2}} \approx (2BW')^{1/2}. \qquad (3.142)$$

В принципе имеется возможность дальнейшего увеличения ширины полосы путем подключения серии фильтров как к электрической, так и к механической сторонам преобразователя, причем, как показал Баервальд [66], предельное значение ширины полосы равно

$$BW_{\lim} = \frac{2k}{(1-k^2)^{1/2}}. \qquad (3.143)$$

Увеличение ширины полосы выше этого предела можно осуществить только за счет уменьшения коэффициента передачи.

7. *Применение эквивалентных схем с сосредоточенными постоянными в случае составных преобразователей*

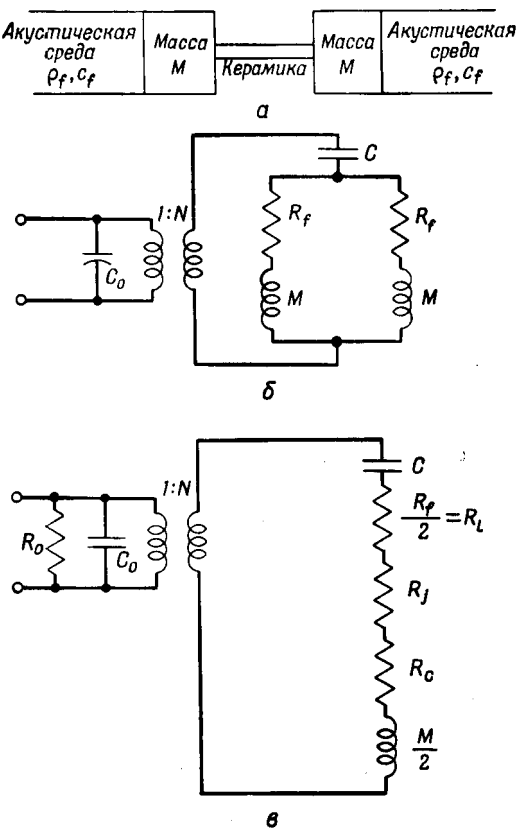
В настоящее время в гидролокации широко используются преобразователи, пьезокерамические элементы которых с обеих сторон нагружены массами. Такой преобразователь обычно рассматривается как одномерная система, в которой распространяется плоская звуковая волна. Это справедливо, если преобразователь является частью некоторой системы. Предполагается, что металлические массы, которыми нагружен преобразователь, являются абсолютно жесткими и что массой керамического элемента можно пренебречь по сравнению с ними.

При этих условиях вся энергия упругой деформации переходит в энергию электростатического поля, и, следовательно, динамический коэффициент связи равен статическому. Основная мода колебаний в этом случае не имеет обертонов, и эквивалентная схема оказывается справедливой в диапазоне частот от нуля до наиболее низкой резонансной частоты одной или нескольких частей, составляющих преобразователь.

Розенталь и Микутейт [67] показали, что точное решение, описывающее характер движения, импеданс и распределение напряжений для преобразователя, состоящего из трех частей (пьезокерамического элемента и двух концевых масс), рассматриваемых как распределенные постоянные, относительно мало отличается от решения, полученного в результате применения эквивалентной схемы с сосредоточенными постоянными. Это объясняется тем, что

амплитуда деформации масс, нагружающих концы пьезоэлемента, мала.

Общий вид составного преобразователя и его эквивалентная схема с сосредоточенными постоянными представлены на фиг. 63.



Ф и г. 63. Эквивалентная схема составного преобразователя, нагруженного массами.

а — составной преобразователь; *б* — эквивалентная схема без учета потерь; *в* — эквивалентная схема с учетом потерь.

Пьезоэлектрический элемент может представлять собой набор поляризованных аксиально керамических колец или дисков. В этом случае используется параллельная мода колебаний (коэффициент связи k_{33}). Возможна и другая конструкция, когда пьезокерамический элемент представляет собой радиально поляризованную трубку или состоит из стержней, поляризованных перпен-

дикулярно направлению колебаний. В этом случае используется поперечная мода колебаний (коэффициент связи k_{31}).

Здесь предполагается, что в случае параллельной моды колебаний площадь поперечного сечения пьезокерамического элемента равна A_c, его полная длина равна l, а обе массы M имеют одинаковую площадь поперечного сечения, равную излучающей поверхности A_r. Пьезоэлемент состоит из n пластин или колец, имеющих полную длину l, причем все пластины или кольца соединены параллельно и поляризованы вдоль l. Параметры эквивалентной схемы для параллельной моды колебаний равны

$$C_0 = \frac{n^2 A_c \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)}{l}, \qquad C = \frac{s_{33}^E l}{A_c},$$

$$R_f = \rho_f c_f A_r, \qquad N = \frac{d_{33} A_c n}{l s_{33}^E}, \tag{3.144}$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{2A_c}{M s_{33}^E l}}, \qquad Q_m = \frac{1}{\rho_f c_f A_r} \sqrt{\frac{M A_c}{2 l s_{33}^E}}.$$

Здесь предполагается, что E постоянно, хотя для параллельной моды колебаний, строго говоря, должно быть постоянно D. Однако это допущение не приводит к противоречиям, поскольку преобразователи этого типа обычно возбуждают напряжением, имеющим постоянную амплитуду, не зависящую от частоты (источник напряжения имеет импеданс, равный нулю, т. е. работает в режиме короткого замыкания). Если учесть также особенности формы данного преобразователя, то можно сделать заключение, что в данном случае предположение о постоянстве E весьма близко к действительности.

В случае использования поперечной моды колебаний предполагается, что пьезокерамический элемент состоит из n пластин или стержней, соединенных параллельно, причем площадь полного поперечного сечения (ntw) равна A_c. Длина каждого стержня равна l, толщина (расстояние между электродами) равна t и ширина равна w. Пластины поляризованы параллельно толщине, а нагружающие концы пьезоэлемента массы M идентичны и имеют площадь излучающей поверхности A_r. Параметры эквивалентной схемы этого преобразователя для поперечной моды колебаний равны

$$C_0 = n\varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \frac{wl}{t}, \qquad C = \frac{s_{11}^E l}{A_c},$$

$$R_f = \rho_f c_f A_r, \qquad N = \frac{d_{31} A_c}{t s_{11}^E}, \tag{3.145}$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{2A_c}{M s_{11}^E l}}, \qquad Q_M = \frac{1}{\rho_f c_f A_r} \sqrt{\frac{M A_c}{2 l s_{11}^E}}.$$

Сопротивление R_0 на фиг. 63 учитывает диэлектрические потери в пьезокерамическом элементе. Оно непосредственно связано с величиной $\operatorname{tg}\delta$, которая является функцией электрического поля (см. § 4, п. 3). Здесь $R_0 = (1 - k^2)/(\omega C_0 \operatorname{tg}\delta)$. Множитель $(1-k^2)$ учитывает то обстоятельство, что $\operatorname{tg}\delta$ обычно измеряется в области частот, расположенных значительно ниже резонанса, и, следовательно, определен для случая незакрепленного пьезоэлектрика. Сопротивления R_c и R_j на механической стороне эквивалентной схемы представляют собой внутренние механические потери в пьезокерамике и другие механические и механоакустические потери. Здесь $R_c = 1/(\omega_r C Q_c)$, где $1/Q_c$ — коэффициент внутренних механических потерь; Q_c является функцией динамических напряжений (см. § 4, п. 4).

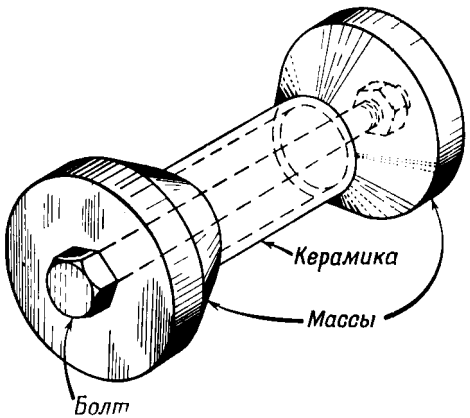
В некоторых случаях нагрузкой одной из концевых масс такого преобразователя является воздух, поэтому возникает необходимость подбора отношения масс, одна из которых соприкасается с воздухом, а другая — с жидкой средой. При этом оказывается возможным повлиять на оптимальную величину добротности [68] и изменить характер ограничений максимальной допустимой мощности, т. е. вместо преобразователя, ограничиваемого максимальным допустимым электрическим полем, получить преобразователь, ограничиваемый максимальной допустимой амплитудой механического напряжения. Изменения, которые следует внести в эквивалентную схему в более общем случае, очевидны, однако, учитывая необходимость решения некоторых задач следующего раздела, более желательным является использование упрощенной схемы фиг. 63.

Описанный здесь составной преобразователь особенно удобен в тех случаях, когда необходимо создать в преобразователе постоянное сжимающее напряжение. Конструкция такого преобразователя показана на фиг. 64. Сжатие преобразователя вдоль оси может изменить величину пьезоэлектрической связи как за счет влияния на ориентацию доменов в пьезокерамике (см. § 4, п. 4), так и за счет увеличения жесткости механической системы. Например, в случае преобразователя из керамики PZT-4, использующего параллельную моду колебаний, в керамике создается сжимающее напряжение, равное 850 *кг/см*^{2}, с помощью закаленного стального болта (фиг. 64), напряжение в котором достигает 6800 *кг/см*^{2} (отношение площадей поперечных сечений керамики и стального болта 8 : 1). Модуль Юнга стали примерно в три раза больше величины $1/s_{33}^E$ для PZT-4. Таким образом, податливость стального болта примерно в 2,7 раза больше, чем податливость пьезокерамики, и k_{33} преобразователя уменьшается от 0,70 до 0,64 [1]). Если

[1]) Если податливость болта в a раз больше, чем податливость керамики, то коэффициент связи k' при наличии напряжения сжатия связан с k следующим образом: $k'^2/(1 - k'^2) = a/(a + 1)[k^2/(1 - k^2)]$.

напряжение в стальном болте ограничено величиной 4200 *кг/см*^{2}, то k_{33} уменьшается до 0,61 и деформация болта соответственно уменьшается.

Рекомендуемая величина сжимающего напряжения для преобразователя, работающего с использованием поперечной моды колебаний, значительно ниже, чем в случае параллельной моды (см. п. 8



Фиг. 64. Составной преобразователь, нагруженный массами и стянутый болтом, создающим постоянное сжимающее напряжение.

настоящего параграфа). Сжимающая сила должна быть параллельной силе, которая возбуждает акустические колебания. Если индексом 3 обозначить полярную ось, индексом 1 — направление, вдоль которого распространяется упругая волна и действует сжимающее напряжение, индексом 2 — ось, перпендикулярную осям 3 и 1, то данные фиг. 47 показывают, что постоянное сжимающее напряжение увеличивает пьезоэлектрический модуль d_{32} для свободного направления 2 и резко уменьшает пьезоэлектрический модуль d_{31} для оси 3, вдоль которой действует механическая нагрузка.

8. *Материалы, используемые для преобразователей большой мощности*

Пьезоэлектрическая керамика широко используется в настоящее время как материал для изготовления акустических излучателей большой мощности. Кристаллы, которые ранее применялись для этих целей, в значительной мере оттеснены на второй план ввиду ряда присущих им недостатков, связанных с низкой механической прочностью, сравнительно малым коэффициентом пьезоэлектрической связи (и следовательно, узкой полосой частот), малой диэлектрической проницаемостью (высоким импедансом)

и малой стабильностью по отношению к внешним воздействиям (температура, давление, влажность). Кристаллы, которые по некоторым свойствам успешно конкурируют с пьезокерамикой, как правило, по другим свойствам не могут с ней соперничать. Например, кварц превосходит керамику по прочности на разрыв и стабильности по отношению к внешним воздействиям, однако его диэлектрическая проницаемость недопустимо мала для использования в низкочастотных преобразователях; коэффициент пьезоэлектрической связи также весьма низок, и поэтому преобразователи из кварца имеют весьма узкую полосу частот. Сегнетова соль, которая характеризуется сильной пьезоэлектрической связью и высокой диэлектрической проницаемостью, не обладает достаточной механической твердостью и легко распадается при повышении температуры или увеличении влажности.

Излучаемая преобразователем мощность ограничивается следующими факторами, *определяемыми свойствами пьезоэлектрической керамики*:

1) динамической прочностью керамики;

2) уменьшением к. п. д. за счет внутренних диэлектрических потерь;

3) уменьшением к. п. д. за счет внутренних механических потерь;

4) деполяризацией керамики, обусловленной электрическим полем;

5) деполяризацией керамики вследствие повышения температуры.

Ограничение мощности преобразователей, используемых в гидроакустике и в ультразвуковой технике, обусловленное недостаточной динамической прочностью керамики, часто удается существенно уменьшить путем применения постоянного сжимающего напряжения, допустимая величина которого зависит от состава пьезокерамики и ориентации напряжения (см. § 4, п. 4). Амплитуда электрического поля, при которой происходит деполяризация пьезокерамики, соответствует настолько большим диэлектрическим потерям и, следовательно, настолько малому к. п. д., что, как правило, непосредственно учитывать фактор 4 нет необходимости. Таким образом, на практике мощность ограничивается факторами 2, 3 и 5 с учетом их взаимосвязи или механической прочностью (фактором 1).

Легко проанализировать с этой точки зрения, например, преобразователь, описанный в п. 7 настоящего параграфа. Мощность диэлектрических потерь, приходящаяся на единицу объема керамики, p_{DE} определяется выражением

$$p_{DE} = \omega E_3^2 \varepsilon_{33}^T \operatorname{tg} \delta, \qquad (3.146)$$

где E_3 — эффективное поле, а tg δ является функцией E_3. Отнесенная к единице объема мощность p, рассеиваемая на механических и акустических элементах эквивалентной схемы (R_L; R_j; R_c), равна

$$p = \omega_r E_3^2 k^2 \varepsilon_{33}^T Q_M, \tag{3.147}$$

где k равно k_{33} для параллельной моды и равно k_{31} для поперечной моды. Полная добротность Q_M преобразователя определяется из соотношения

$$\frac{1}{Q_M} = \omega_r C (R_L + R_j + R_c) \tag{3.148}$$

Акустическая мощность p_a, рассеиваемая на акустической нагрузке R_L, определяется из соотношения

$$\frac{p_a}{\omega_r} = E_3^2 k^2 \varepsilon_{33}^T Q_M \left(\frac{1}{1 + (Q_L/Q_c)\, e_{ma}} \right) e_{ma} = p e''_{em} e_{ma}, \tag{3.149}$$

где

$$Q_L = \frac{1}{\omega_r C R_L}, \qquad Q_c = \frac{1}{\omega_r C R_c},$$

$$e_{ma} = \frac{Q_j}{Q_L + Q_j}, \qquad Q_j = \frac{1}{\omega_r C R_j};$$

здесь Q_c является функцией механического напряжения (см. § 4, п. 4)[1]); e_{ma} — акустикомеханический к. п. д., который не зависит от пьезоэлектрических свойств керамики. Следует, однако, помнить, что уменьшение к. п. д. за счет внутренних механических потерь зависит от e_{ma}. Полная мощность p_i, подводимая к преобразователю, равна

$$p_i = p + p_{DE} = p_a + p_{DM} + p_{DE}, \tag{3.150}$$

где $p = p_a + p_{DM}$. Полный электроакустический к. п. д. e_{ea} определяется выражением

$$e_{ea} = \frac{p_a}{p + p_{DE}} = \frac{k^2 e_{ma} [Q_c/(Q_c + Q_L e_{ma})]}{k^2 + (1/Q_M Q_E)}, \tag{3.151}$$

где $Q_E = 1/\mathrm{tg}\,\delta$.

---

[1]) В этой работе предполагается, что зависимость Q_c от амплитуды механического напряжения при температурах 75 и 100° С такая же, как зависимость при 25° С, представленная на фиг. 49. Это предположение, по-видимому, справедливо для соединений типа титанат-цирконат свинца, если учесть, что при малых амплитудах напряжения значения Q_c при 25 и 100° С совпадают и зависимости диэлектрических потерь от амплитуды электрического поля при 25 и 100° С почти идентичны. Для пьезокерамики на основе $BaTiO_3$ это предположение, очевидно, менее справедливо, и можно полагать, что для этих соединений механические потери при температуре 75° С значительно выше, чем при 25° С.

Выражение (3.151) можно записать в следующем виде:

$$e_{ea} = e_{ma} e_{em}, \tag{3.152}$$

где e_{em} — электромеханический к. п. д., определяемый выражением

$$e_{em} = e'_{em} e''_{em},$$
$$e'_{em} = \frac{k^2}{k^2 + 1/Q_M Q_E}, \qquad e''_{em} = \frac{Q_c}{Q_c + Q_L e_{ma}}. \tag{3.153}$$

Мощность, которая рассеивается в керамике вследствие внутренних механических потерь, равна

$$p_{DM} = p\,(1 - e''_{em}) = \omega_r E_3^2 k^2 \varepsilon_{33}^T Q_M \frac{Q_L e_{ma}}{Q_L e_{ma} + Q_c}. \tag{3.154}$$

Мощность преобразователя может ограничиваться:

а) уменьшением к. п. д., б) повышением температуры и в) динамической прочностью. Если динамическая прочность не оказывает влияния (например, при использовании постоянного сжимающего напряжения или вследствие малой добротности), то мощность низкочастотного преобразователя, работающего в импульсном режиме с большой скважностью, обычно ограничивается минимальным допустимым к. п. д., в то время как мощность высокочастотного преобразователя, работающего в непрерывном режиме, ограничивается допустимым повышением температуры (расходуемая на нагрев мощность равна $p_{DE} + p_{DM}$). Между этими двумя крайними случаями ограничения в большой мере определяются особенностями механической колебательной системы преобразователя.

Внутренняя механическая добротность Q_c пьезоэлектрической керамики, используемой в *излучателях*, оказывается не меньше 100 [1]) даже при больших амплитудах механического напряжения (см. фиг. 49), в то время как Q_M для излучателей, применяемых в гидроакустике, редко превышает 5. Поэтому уменьшение к. п. д. излучателя за счет внутренних механических потерь (p_{DM}), как правило, меньше 5%. Таким образом, внутренние механические потери не могут существенно снизить к. п. д. преобразователя, однако они вносят определенный вклад в *повышение температуры*. Другие механические или акустические потери, не связанные с внутренним трением в пьезоэлектрическом материале (здесь они упрощенно представлены сопротивлением R_j), могут заметно уменьшить полный к. п. д. преобразователя. Потери этого типа, хотя и непосредственно не связанные со свойствами керамики,

[1]) С этой точки зрения керамику PZT-5 нецелесообразно использовать в мощных излучателях. Данные для этого материала приводятся здесь только для сравнения.

обусловливают выделение тепла и, следовательно, влияют на рабочую температуру пьезокерамического элемента. Поэтому для пьезоэлектрических материалов с более высокими допустимыми рабочими температурами значения p_{DM} и p_{DE} могут быть больше.

Получаемые на практике значения динамической прочности зависят от конфигурации пьезоэлектрического элемента и качества его изготовления. В табл. 18 приведены значения, которые могут использоваться при конструировании преобразователей; динамическая прочность на разрыв малых образцов приближенно равна статической прочности на разрыв [69]. В табл. 18 приведены также предельные допустимые значения постоянного сжимающего напряжения для некоторых пьезокерамических материалов [57].

Таблица 18

Расчетная прочность на разрыв и допустимое постоянное сжимающее напряжение для некоторых пьезоэлектрических керамик

Керамика	Допустимое сжимающее напряжение, кг/см²				Динамическая прочность на разрыв, кг/см²
	параллельно		перпендикулярно		
	25° C	100° C	25° C	100° C	
PZT-4	840	420	560	280	240
PZT-5	210	210	140	140	280
	25° C	75° C	25° C	75° C	
95 вес.% $BaTiO_3$, 5 вес.% $CaTiO_3$	140	70	140	70	210
80 вес.% $BaTiO_3$, 12 вес.% $PbTiO_3$, 8 вес.% $CaTiO_3$	490	240	170	90	210

Во всех практически интересных случаях использования керамики в рассматриваемых здесь преобразователях простого типа (пьезоэлемент, нагруженный тяжелыми массами) динамические деформация и напряжение постоянны в объеме пьезоэлемента. При этом

$$S = E_3\, dQ_M, \qquad T = \frac{E_3\, dQ_M}{s^E}, \tag{3.155}$$

где используются соответствующие индексы (d_{31}, s_{11}^E или d_{33}, s_{33}^E).

Следует кратко остановиться на двух особых значениях величины Q_M. Одно из них соответствует случаю оптимального согласования. В этом случае акустическую нагрузку и импеданс электрического генератора можно свести к некоторому импедансу преобразователя, представленного в виде полосового фильтра с индуктивностью $1/\omega_r^2 C_0$, которая подключена к преобразователю (см. п. 6 настоящего параграфа).

Другое интересное значение Q_M можно назвать оптимальным значением, так как для него ограничения мощности преобразователя, обусловленные электрическими потерями и механической прочностью преобразователя, эквивалентны. Решая совместно уравнения (3.147) и (3.155), получаем мощность преобразователя, ограничиваемую динамической прочностью,

$$p = \frac{\omega_r s^E T^2}{Q_M}, \tag{3.156}$$

где эффективное значение напряжения T и s^E имеют индексы, соответствующие выбранным граничным условиям. Оптимальное значение Q_M есть то значение, при котором мощности, определяемые выражениями (3.147) и (3.156), равны друг другу, т. е.

$$Q_{M\text{опт}} = \frac{s^E T_{\text{кр}}}{dE_{\text{кр}}}. \tag{3.157}$$

При оптимальном значении добротности мощность определяется простым выражением

$$p_a = e''_{em} e_{ma}\, dE_{\text{кр}} T_{\text{кр}}. \tag{3.158}$$

В табл. 19 приведены значения p, p_{DM}, p_{DE}, e_{em}, e'_{em}, e''_{em} и динамического напряжения для преобразователей, *мощность которых ограничена к. п. д.* Эти данные ближе всего соответствуют случаю гидроакустических низкочастотных излучателей. Значения вычислены для $e_{em} = 80$ и 90% и $Q_M = 3$, а также для $e'_{em} = 90\%$ и $Q_M = Q_{\text{опт}}$. Значение $Q_{\text{опт}}$ определено здесь для случая, когда электрическое поле не превышает значения, при котором $e'_{em} = 90\%$, а амплитуда динамического напряжения не превышает постоянного сжимающего напряжения.

В табл. 20 приведены аналогичные данные для преобразователей, *мощность которых ограничена допустимым повышением температуры.* В этом случае электрическое поле не должно превышать значения, при котором $p_{DE} = 0{,}5$ *вт/см³·кгц*. Рассматриваются два случая — случай оптимального согласования и случай, когда $Q_M = 3$. В каждом из этих случаев величина p нормируется по частоте таким образом, чтобы на частоте 1 *кгц* p_{DE} не превышало 0,5 *вт/см³*. При более высоких частотах эти данные справедливы только при условии, что имеется способ отвода тепла,

Акустическая мощность ($p_a = p - p_{DM}$) при $e_{em} = 80$ и 90%, $Q_M = 3$

Материал	$e_{em}=90\%$, $Q_M=3$								$e_{em}=$	
	$t°$, С	E_3	e'_{em}	e''_{em}	p_{DM}	p_{DE}	p	T	E_3	e'_{em}
PZT-4, параллельно	25	7,7	92,9	97,0	2,0	5,0	66	440	11	82,5
	100	6,8	92,9	97,1	1,6	4,0	53	380	10	82,5
PZT-4, перпендикулярно	25	2,7	92,9	97,0	0,06	0,15	1,9	85	5,9	82,5
	100	2,3	91,9	98,0	0,03	0,13	1,5	70	4,7	82,5
PZT-5, параллельно	25	0,4	97,6	92,2	0,017	0,005	0,22	25	3,2	90,9
	100	0,4	97,6	92,2	0,019	0,006	0,24	27	3,1	90,9
PZT-5, перпендикулярно	25	—	—	—	—	—	—	—	0,7	86,0
	100	—	—	—	—	—	—	—	0,7	86,0
95 вес.% $BaTiO_3$, 5 вес.% $CaTiO_3$, параллельно	25	2,4	92,9	97,0	0,08	0,11	2,7	115	4,8	82,5
	75	1,4	92,2	97,6	0,01	0,05	0,6	58	2,7	82,5
95 вес.% $BaTiO_3$, 5 вес.% $CaTiO_3$, перпендикулярно	25	—	—	—	—	—	—	—	1,4	81,2
	75	—	—	—	—	—	—	—	0,4	80,9
80 вес.% $BaTiO_3$, 12 вес.% $PbTiO_3$, 8 вес.% $CaTiO_3$, параллельно	25	2,4	92,3	97,5	0,01	0,03	0,42	55	5,3	82,5
	75	0,8	91,3	98,5	—	—	0,05	18	2,2	81,6
80 вес.% $BaTiO_3$, 12 вес.% $PbTiO_3$, 8 вес.% $CaTiO_3$, перпендикулярно	25	—	—	—	—	—	—	—	0,3	80,9
	75	—	—	—	—	—	—	—	—	—

1) E—напряженность электрического поля (эффективное значение), *кв/см*; e—жение (эффективное значение), *кг/см²* (для параллельной моды T_3, для попереч ограничиваемого допустимым значением постоянного сжимающего напряжения.

выделяющегося при заданном уровне рассеяния энергии. Например, для PZT-4 при 25° С в случае оптимального согласования на частоте 100 *кгц* рассеянная в керамике мощность составляет примерно 50 *вт/см³* при полной подводимой мощности 610 *вт/см³* (для параллельной моды, см. табл. 20).

Из данных табл. 19 и 20 можно видеть, что мощные излучатели, работающие с использованием параллельной моды колебаний, обладают некоторыми преимуществами по сравнению с излучате-

Таблица 19

и при $e'_{em}=90\%$, $Q_M=Q_{опт}$ (e_{ma} предполагается равным 100%)[1])

80%, $Q_M=3$					$e'_{em}=90\%$, $Q_M=Q_{опт}$						
e''_{em}	p_{DM}	p_{DE}	p	T	E_3	$Q_{опт}$	e''_{em}	e_{em}	p_{DM}	p_{DE}	p
97,0	4,1	29	136	630	9,4	3,3	96,8	87,1	2,9	10	91
97,0	3,4	24	115	140	7,1	2,3	97,7	88,0	0,78	3,8	34
97,0	0,27	1,9	9,1	190	6,1	6,4	93,9	84,5	1,1	2,0	18
97,0	0,18	1,3	6,1	560	4,2	4,6	95,6	86,0	0,26	0,7	6,3
88,1	1,7	1,3	14	200	2,9	2,6	89,6	80,6	1,0	1,1	10
88,1	1,7	1,3	14	210	2,5	2,7	89,0	80,1	1,1	1,1	10
93,0	0,01	0,02	0,16	23	1,4	6,7	76,7	69,0	0,35	0,17	1,5
93,0	0,01	0,03	0,18	25	1,2	7,2	74,9	67,4	0,28	0,12	1,1
97,0	0,33	2,3	11	230	2,6	2,3	97,7	88,0	0,06	0,27	2,4
97,0	0,07	0,5	2,4	110	1,3	2,7	97,4	87,6	0,01	0,05	0,5
98,5	—	0,04	0,15	28	1,8	7,9	92,7	83,4	0,05	0,08	0,7
99,0	—	0,002	0,009	7,0	0,7	12	89,3	80,4	0,01	0,01	0,1
97,0	0,06	0,4	1,9	120	6,2	7,3	93,2	83,8	0,54	0,9	8,0
98,0	0,007	0,08	0,38	50	2,7	8,1	92,4	83,1	0,14	0,2	1,8
99,0	—	—	0,0006	2,0	1,9	25	80,0	72,0	0,06	0,03	0,3
—	—	—	—	—	1,0	24	80,6	72,5	0,01	0,007	0,06

к.п.д., %; мощность, *вт/см³·кгц*; p—рассеянная механическая мощность; T—напряжение моды T_1). $Q_{опт}$ определено для максимального динамического напряжения,

лями, в которых используется поперечная мода. Эти преимущества заключаются в более широкой полосе частот, большем к. п. д. (e'_{em}) при заданной мощности и более высокой мощности при заданном значении p_{DE}. Кроме того, при использовании параллельной моды допустимы более высокие значения постоянного сжимающего напряжения.

Для преобразователей с низкой добротностью, мощность которых ограничивается допустимым значением к. п. д., основным

Таблица 20

Акустическая мощность ($p_a = p - p_{DM}$) для электрического поля, ограниченного заданным значением $p_{DE} = 0{,}5$ *вт/см³·кгц*, для случая оптимального согласования ($Q_M = 1/BW$) и для $Q_M = 3$ (e_{ma} предполагается равным 100%) [1]

Материал	Оптимальное согласование									$Q_M=3$					
	t, °C	E	BW	p	T	e'_{em}	e''_{em}	e_{em}	p_{DM}	p	T	e'_{em}	e''_{em}	e_{em}	p_{DM}
PZT-4, параллельно	25	4,0	98	6,1	77	92,5	99,0	91,5	0,06	18	230	97,3	97,0	94,5	0,54
	100	3,5	87	5,4	77	91,5	99,0	90,6	0,05	14	200	96,5	97,0	93,5	0,42
PZT-4, перпендикулярно	25	4,0	36	3,8	110	88,5	97,4	86,1	0,10	4,2	125	89,4	97,0	86,6	0,13
	100	3,5	32	3,4	100	87,2	97,3	84,6	0,10	3,4	100	87,2	97,0	84,6	0,10
PZT-5, параллельно	25	2,1	99	2,1	42	80,7	95,8	77,4	0,09	6,0	130	92,3	88,1	81,3	0,71
	100	1,95	87	2,2	49	81,5	95,0	77,4	0,11	5,7	130	92,0	88,1	81,0	0,68
PZT-5, перпендикулярно	25	2,1	37	1,3	63	72,2	89,1	64,4	0,14	1,4	70	73,6	89,0	65,5	0,15
	100	1,95	33	1,4	70	73,7	88,0	64,9	0,17	1,4	70	73,6	89,0	65,5	0,15
95 вес.% $BaTiO_3$, 5 вес.% $CaTiO_3$, параллельно	25	3,2	55	2,9	98	85,2	98,2	83,6	0,05	4,8	150	90,5	97,0	87,8	0,14
	75	2,7	44	1,8	84	78,2	97,8	76,5	0,04	2,4	110	82,7	97,0	80,2	0,07
95 вес.% $BaTiO_3$, 5 вес.% $CaTiO_3$, перпендикулярно	25	3,2	20	1,3	110	72,2	95.2	68,8	0,06	0,8	63	61,5	97,3	59,8	0,02
	75	2,7	16	0,8	98	61,5	94,0	57,9	0,05	0,4	49	44,4	97,5	43,2	0,01
80 вес.% $BaTiO_3$, 12 вес.% $PbTiO_3$, 8 вес.% $CaTiO_3$, параллельно	25	5,5	36	2,0	120	80,0	97,4	8,0	0,05	2,2	125	81,5	97,0	79,0	0,07
	75	3,75	34	1,1	90	68,8	97,3	7,0	0,03	1,1	84	68,7	97,0	66,6	0,03
80 вес.% $BaTiO_3$, 12 вес.% $PbTiO_3$, 8 вес.% $CaTiO_3$, перпендикулярно	25	5,5	11	0,7	130	58,4	91,6	3,5	0,06	0,2	42	29	97,7	28,3	0,005
	75	3,75	10	0,4	100	44,4	91,0	0,4	0,04	0,1	28	17	98,3	16,7	0,002

1) E—напряженность электрического поля (эффективное значение), *кв/см*; BW—ширина полосы частот, %; e—к.п.д., %; p—мощность, *вт/см³·кгц*; T—напряжение, *кг/см²*.

ограничивающим фактором являются диэлектрические потери, а внутренними механическими потерями, как правило, можно пренебречь. Для преобразователей, мощность которых ограничивается повышением температуры излучателя, ограничения связаны как с диэлектрическими, так и с механическими потерями, причем последние часто играют преобладающую роль при $Q_M \gtrsim 5$. Повышение температуры излучателя зависит от $p_{DE}+p_{DM}$, а также от особенностей конструкции преобразователя, влияющих на отвод тепла, образующегося за счет внутренних источников потерь.

Для относительно слабо нагруженных преобразователей ограничивающими факторами, очевидно, являются внутренние механические потери или динамическая прочность. В этом случае пьезокерамика на основе титаната-цирконата свинца, которая может работать при более высоких температурах и бóльших постоянных сжимающих напряжениях, имеет преимущества по сравнению с соединениями на основе титаната бария. Очевидно также, что превосходство пьезокерамики первого типа особенно заметно при использовании ее в широкополосных импульсных гидроакустических излучателях, мощность которых обычно ограничивается диэлектрическими потерями.

§ 7. ПЬЕЗОМАГНИТНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

1. Условия симметрии. Аксиальный и полярный векторы

Истинный пьезомагнитный эффект теоретически возможен для 29 из 32 классов кристаллов, однако его существование не было достаточно определенно подтверждено прямыми экспериментами [1]). Магнитострикция в присутствии постоянного магнитного поля феноменологически эквивалентна пьезомагнетизму, и в настоящем параграфе не делается различия между двумя этими эффектами. Поскольку только ферромагнетики и ферримагнетики обнаруживают магнитострикцию, величину которой удается измерить,

---

[1]) Пьезомагнитный эффект, открытый Боровиком-Романовым [70] в антиферромагнетике CoF_2, по-видимому, является эффектом более высокого порядка, так как он изменяет знак при наложении магнитного поля.

(Здесь авторы допускают ошибку. Как показано в работах Дзялошинского [81*] и Боровика-Романова [82*], пьезомагнитные свойства кристаллов никак не связаны с их кристаллографической симметрией и, следовательно, не вытекают из принадлежности кристалла к тому или иному классу симметрии. В действительности пьезомагнитный эффект может существовать лишь в ферромагнетиках и антиферромагнетиках, и открытый Боровиком-Романовым эффект является настоящим пьезомагнитным эффектом (см. также [83*]).— *Прим. ред.*)

именно эти материалы представляют интерес для практических применений пьезомагнетизма.

Выше уже отмечалось, что однодоменный сегнетоэлектрический кристалл обычно имеет гораздо более сильно выраженный пьезоэффект, чем поляризованная керамика того же химического состава. Движение доменных стенок вносит вклад в величину пьезоэлектрических, упругих и диэлектрических постоянных керамики, однако оно не является принципиально необходимым для существования пьезоэффекта. Пьезомагнетизм не удалось непосредственно наблюдать у однодоменных ферромагнетиков, хотя теоретически он должен существовать, поэтому с точки зрения практических применений пьезомагнитный эффект, который возникает при одновременном действии постоянного или остаточного поля, обусловлен только переориентацией доменов. Здесь не играет роли, с каким процессом он связан — с движением доменных стенок или с вращением магнитных моментов доменов. Переориентация доменов приводит к возникновению деформаций, поскольку отдельные домены ферромагнетика обладают спонтанной деформацией, обусловленной их собственными магнитными моментами. Однако эти деформации более чем на порядок величины меньше, чем деформации таких сегнетоэлектриков типа перовскита, как $BaTiO_3$ или $Pb(Zr,Ti)O_3$. Полная деформация в направлении, параллельном электрическому полю, в поляризованной керамике PZT-4 порядка 0,5%, в то время как магнитострикционный эффект в никеле при полном насыщении составляет 0,0033%.

При определении симметрии какого-либо намагниченного ферромагнитного металла или сплава или ферримагнитного феррита необходимо учитывать, что B и H являются аксиальными векторами. Это следует из уравнения Максвелла $\mathrm{rot}\, E = -\dot{B}$ с учетом того, что вектор электрического поля является полярным вектором. Впервые этот факт отметил Фохт [71], который определил тензоры пьезомагнитных постоянных для всех 32 классов кристаллов (для трех классов все пьезомагнитные постоянные равны нулю). Как было указано выше, практический интерес представляет рассмотрение только намагниченных поликристаллических материалов. Намагниченный ферромагнетик имеет симметрию ∞/m, которая характеризуется наличием оси симметрии бесконечного порядка и перпендикулярной к ней плоскости симметрии. Комбинация этих элементов приводит к наличию центра симметрии, существование которого совместимо с пьезомагнетизмом, поскольку наличие центра симметрии не означает, что знак аксиального вектора является произвольным.

Для симметрии $6/m$ (эквивалентной в рассматриваемом случае ∞/m) Фохт определил следующую матрицу пьезомагнитных

постоянных:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{14} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Наличие центра симметрии исключает существование пьезоэлектрических свойств у кристаллов этого класса. Поликристаллическая среда, подвергнутая как магнитной, так и электрической поляризации вдоль одной и той же оси, не имеет плоскостей симметрии (симметрия ∞). При выводе пьезомагнитных постоянных $d_{14} = -d_{25}$ из уравнений магнитострикции обнаруживается, что они равны нулю для материала, который первоначально не был намагничен; существование этих постоянных экспериментально не установлено[1]).

Пьезомагнитные постоянные намагниченного ферромагнитного или ферримагнитного материала можно определить методом, аналогичным тому, который использован § 4, п. 1, для сегнетоэлектрических материалов. Так же как в случае поляризованного сегнетоэлектрика, $g_{15} \approx g_{33} - g_{31}$, причем это соотношение наиболее точно выполняется в том случае, когда зависимость между полной деформацией и полным потоком индукции приближается к квадратичной.

2. Численные данные

Совершенно очевидно, что нелинейные свойства пьезомагнитных металлов и керамики при больших амплитудах возбуждения должны быть аналогичны соответствующим свойствам пьезоэлектрической керамики, которые описаны в § 4, п. 3. Эти эффекты, естественно, наиболее сильно выражены при работе в режиме остаточного намагничивания. Возрастание магнитных потерь при увеличении амплитуды поля, которое связано с расширением петли гистерезиса, сопровождается эффектами насыщения для деформации. Данные об этих эффектах в литературе, как это ни странно, отсутствуют[2]), однако то обстоятельство, что для ферромагнитных материалов магнитострикционная деформация насыщения не велика, свидетельствует о том, что возможности получения больших амплитуд колебаний у магнитострикционных излучателей, рабо-

[1]) Ван-дер-Бургт в беседе с авторами настоящей главы высказал предположение, что гироскопические члены $d_{14} = -d_{25}$ имеют основное значение при сверхвысокочастотных взаимодействиях фононов с магнонами.

[2]) Здесь авторы допускают ошибку. Вопрос о колебаниях пьезомагнитных материалов при больших амплитудах поля рассмотрен в ряде работ, например [84*, 85*].— *Прим. ред.*

тающих в квазистатическом режиме или в режиме резонанса при малой добротности, существенно ограничены. Поэтому пьезомагнитные материалы преимущественно используются в установках ультразвуковой очистки или в других системах, где преобразователи работают с малой нагрузкой; они весьма ограниченно применяются в гидролокации, где требуются низкочастотные излучатели с большой шириной полосы частот.

В большинстве случаев пьезомагнитные материалы работают в режиме подмагничивания постоянным полем, причем к потерям в материале преобразователя добавляются активные потери I^2R в катушках возбуждения и подмагничивания. В отличие от пьезомагнетиков пьезоэлектрическая керамика работает, как правило, в режиме остаточной поляризации, при создании которой, однако, возникают трудности, связанные с возможностью электрического пробоя. Наличие потоков рассеяния у пьезомагнитных преобразователей не влияет непосредственно на их к. п. д., однако несколько снижает величину эффективного коэффициента магнитомеханической связи. Для пьезокерамики эта проблема не имеет места. Потери на вихревые токи в ферромагнитных сердечниках обычно велики, поэтому их часто изготовляют в виде набора пластин; при использовании ферритов такой необходимости не возникает. При работе преобразователей на больших мощностях очень важна прочность материала на разрыв, которая имеет наиболее высокое значение у металлов. По своей прочности на разрыв ферриты принадлежат к тому же классу материалов, что и пьезокерамика.

Для увеличения допустимой амплитуды деформации в ферритах можно, как и в случае пьезоэлектрической керамики, применять постоянное механическое сжимающее напряжение. По-видимому, изменение электромеханических свойств ферритов в результате действия сжимающего напряжения, параллельного основной компоненте деформации, превосходит аналогичное изменение свойств пьезокерамики лучших составов. Вильсон [72] показал, что коэффициент магнитомеханической связи k_{33} выпускаемых промышленностью замещенных кобальтом медно-никелевых ферритов (ферроксруб 7А 1 и 7А 2) уменьшается примерно на две трети при действии сжимающего напряжения 320 *кг/см*^{2} (при оптимальном подмагничивании), а магнитная проницаемость $\mu_{33}^{S3=0}$ уменьшается на 40%. Вильсон показал также, что никель значительно менее чувствителен к действию давления: при действии сжимающего напряжения 280 *кг/см*^{2} k_{33} уменьшается на одну седьмую, а $\mu_{33}^{S3=0}$ — на 20%.

В табл. 21 приведены данные для некоторых промышленных ферритов, никеля и материала алфенол 13. Материалы типа ферроксруб 7 представляют собой замещенные кобальтом медно-никелевые ферриты, а материалы типа кирфотт — замещенные

кобальтом никелевые ферриты. В литературе большей частью приводятся данные, характеризующие только продольный пьезомагнитный эффект, т. е. продольные коэффициент пьезомагнитной связи и пьезомагнитные постоянные. Кроме того, обычно предполагается наличие упругой изотропии ($s_{11} = s_{33}$, $s_{12} = s_{13}$, $s_{44} = s_{66}$), что, по-видимому, достаточно справедливо для ферромагнитных и ферримагнитных кубических кристаллов. Пьезоэлектрическая керамика, как отмечалось выше, имеет существенные отклонения от изотропии.

Основные уравнения для пьезомагнитных материалов приведены в § 3, п. 1. Здесь мы повторим их в матричной форме:

$$\begin{aligned} S &= s^H T + d_t H, \\ B &= dT + \mu^T H; \end{aligned} \tag{3.159}$$

$$\begin{aligned} S &= s^B T + g_t B, \\ H &= -gT + \gamma^T B \end{aligned} \tag{3.160}$$

(γ^T — тензор обратной магнитной проницаемости);

$$\begin{aligned} T &= c^H S - e_t H, \\ B &= eS + \mu^S H; \end{aligned} \tag{3.161}$$

$$\begin{aligned} T &= c^B S - h_t B, \\ H &= -hS + \gamma^S B. \end{aligned} \tag{3.162}$$

Коэффициенты магнитомеханической связи при различных граничных условиях совпадают по своей форме с соответствующими коэффициентами электромеханической связи для пьезоэлектрической керамики (см. табл. 14) при условии, что $d_{14} = -d_{25} = 0$.

В литературе обычно делается предположение, что коэффициенты связи k_{33} и k_t идентичны. Это не верно, так как механические граничные условия, которые необходимо учитывать при их определении, весьма различны. В случае ферритового кольца, колеблющегося на основной частоте, имеем $S_1(S_{rr}) \neq 0$, $S_2(S_{zz}) \neq 0$, $S_3(S_{00}) \neq 0$ и $T_1 = T_2 = 0$, $T_3 \neq 0$. Статические и динамические коэффициенты связи для кольца идентичны и определяются формулой

$$k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{\mu_{33}^T s_{33}^H}. \tag{3.163}$$

Для тонкого ферритового диска, колеблющегося по толщине, при подмагничивающем поле или при остаточной индукции, действующих в направлении толщины[1]), граничные условия имеют вид $S_3 (S_{zz}) \neq 0$, $S_1 = S_2 = 0$ и $T_1 = T_2 \neq 0$, $T_3 \neq 0$.

[1]) На практике этот тип колебаний не используется.

Таблица 21

Свойства некоторых пьезомагнитных материалов

Величина	Ферроксиуб 7А 1 [73, 74]	Ферроксиуб 7А 2 [73, 74]	Ферроксиуб 7В [73, 74]	Кирфотт № 51	Никель [1]	Алфенол 13 (87% Fe, 13% Al) [1]
k_{33} опт	0,25—0,30	0,21—0,25	0,20—0,22	0,32—0,40	0,15—0,31	0,25—0,32
d_{33} опт, 10^{-9} *вб/н*	—2,8 — —4,4	—1,6 — —2,9	—	~ —3,9	~ —3,1	~ 7,1
μ^S_{33} (опт.) [2]	15—25	8—15	—	12	22	58
$1/s^B_{33}$, 10^{10} *н/м²*	16,6	17,2	—	16	21	15
$1/s^H_{33}$, 10^{10} *н/м²*	15,1	16,1	—	~ 14	~ 20	~ 14
$-s^B_{13}/s^B_{33}=\sigma^B$	~ 0,4	~ 0,4	—	—	~ 0,3	—
$1/s^B_{44}$, 10^{10} *н/м²*	5,9	6,2	—	—	7,7	—
Q^B_M	⩾ 5000	⩾ 5000	—	—	—	—
Q^H_M	2500—5000	2500—5000	—	260	50—250	—
tg δ	0,001—0,002	0,001—0,002	—	—	—	—
$H_{опт}$, 10^2 ампервитков на 1 *м* [3]	15—24	11—19	20—40	10—15	7—10	7—10
Индукция подмагничивания, *вб/м²* [4]	0,22—0,24	0,22—0,24	—	—	—	—
B_R, *вб/м²*	0,11—0,16	0,15—0,17	—	~ 0,17	~ 0,4	~ 0,6
μ^S_{33}/μ_0 (ост.) [2]	30—45	30—50	~ 20	45	~ 20	—
k_{33} (ост.)	0,15—0,20	0,15—0,19	0,20—0,22	0,29—0,33	~ 0,14	—
d_{33} (ост.)	—2,3 — —3,8	—2,2 — —3,7	—2,7 — —3,0	~ —6,0	~ —1,5	—
Температура Кюри, °С	530	530	590	590	358	~ 500
B_S, *вб/м²*	~ 0,33	~ 0,33	—	~ 0,25	~ 0,6	~ 1,4

Удельное сопротивление по постоянному току, *ом·м*	$\geqslant 10$	$\geqslant 10$	>100	1—100	$7 \cdot 10^{-8}$	$9 \cdot 10^{-7}$
Теплоемкость, *дж/кг·град*	670	670	—	—	460	510
α, 10^{-6}/*град*	6,5—7,0	6,5—7,0	—	—	13	11
Теплопроводность, *вт/м·град*	~ 5,8	~ 5,8	—	—	59	80
H_c, 10^2 ампервитков на 1 *м*	2,5—5,0	2,0—4,0	—	—	~ 0,3	~ 0,1
Магнитострикция насыщения, 10^{-6}	—26 — —28	—26 — —28	—27	—30	—33	+40
Предельное сжимающее напряжение, *кг/см²*	~ 10 500	~ 10 500	—	—	—	—
Предельное статическое растягивающее напряжение, *кг/см²*	700—1050	700—1050	—	—	~630 растяжение ~1050—2100 разрыв	~ 1400 растяжение ~ 2800—7000 разрыв
Критическое динамическое растягивающее напряжение, *кг/см²*	~ 105 [5]	~ 105 [5]	—	—	$\geqslant 350$ [6]	$\geqslant 500$ [6]
ϱ (плотность), 10^3 *кг/м³*	~ 5,35	~ 5,35	—	~ 5,1	8,8	6,5
Скорость звука v^B, 10^3 *м/сек*	~ 5,65	~ 5,75	—	~ 5,6	~ 5,0	~ 4,8
Скорость звука v^H, 10^3 *м/сек*	~ 5,45	~ 5,6	—	~ 5,25	~ 4,85	~ 4,55

1) В основном данные работ [74, 75]. Значения зависят от термической и механической обработки.
2) Строго говоря, это проницаемость для $S_3 = 0$, S_1, $S_2 \neq 0$ $[\mu_{33}^{S_3 = 0} = \mu_{33}^{T}(1 - k_{33}^2)]$.
3) Напряженность магнитного поля, при которой k_{33} имеет максимальное значение для кривой начального намагничивания.
4) $B_{\text{опт}} \approx 0{,}7\, B_S$.
5) Большие образцы при низких ультразвуковых частотах.
6) Значения могут быть меньше в случае образцов, изготовленных в виде набора пластин.

Коэффициент связи определяется выражением

$$k_t^2 = \frac{h_{33}^2}{\gamma_{33}^S c_{33}^B}. \qquad (3.164)$$

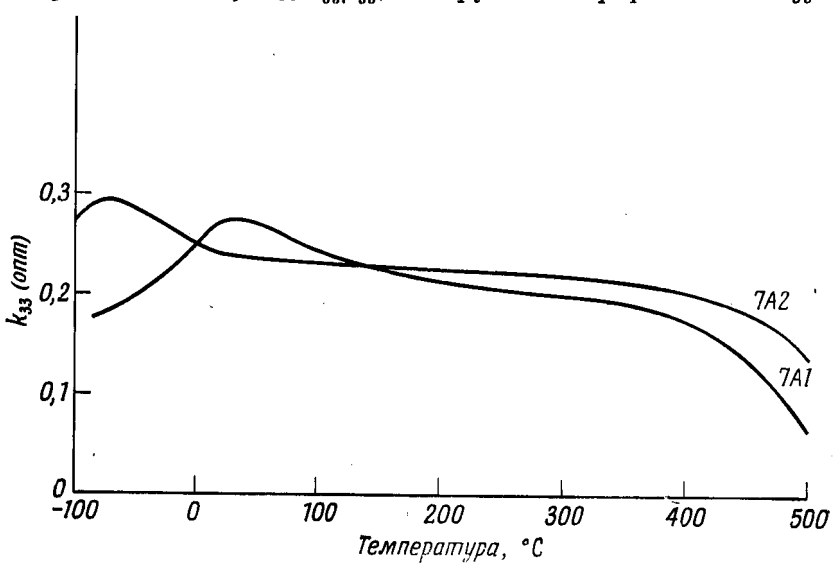
В литературе обычно принимают, что $d_{33}/s_{33}^B \mu_{33}^T$ равно h_{33}. Это не верно: согласно (3.27), имеем

$$h_{33} = \frac{d_{33}}{\mu_{33}^T} c_{33}^B + \frac{2d_{31}c_{13}^B}{\mu_{33}^T}. \qquad (3.165)$$

Для изотропной среды в предположении, что $d_{31} = -{}^1/_2 d_{33}$, уравнение (3.165) записывается в виде

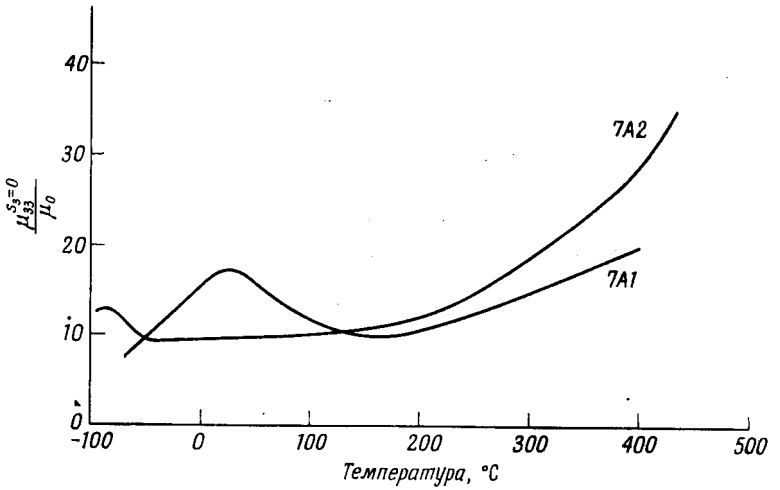
$$h_{33} = \frac{d_{33}}{\mu_{33}^T c_{33}^B}\left(\frac{1}{1+\sigma^B}\right). \qquad (3.166)$$

Эрлих [76] и Вуллет [77] проанализировали эту трудность и показали, что в большинстве случаев авторы вместо магнитострикционной постоянной $\lambda_{33} = -(\partial T_3/\partial B_3')_S$, где $B_3' = B_3 - \mu_0 H_3$, измеряли величину $d_{33}/s_{33}^B \mu_{33}^T$, которую они приравнивали λ_{33}.



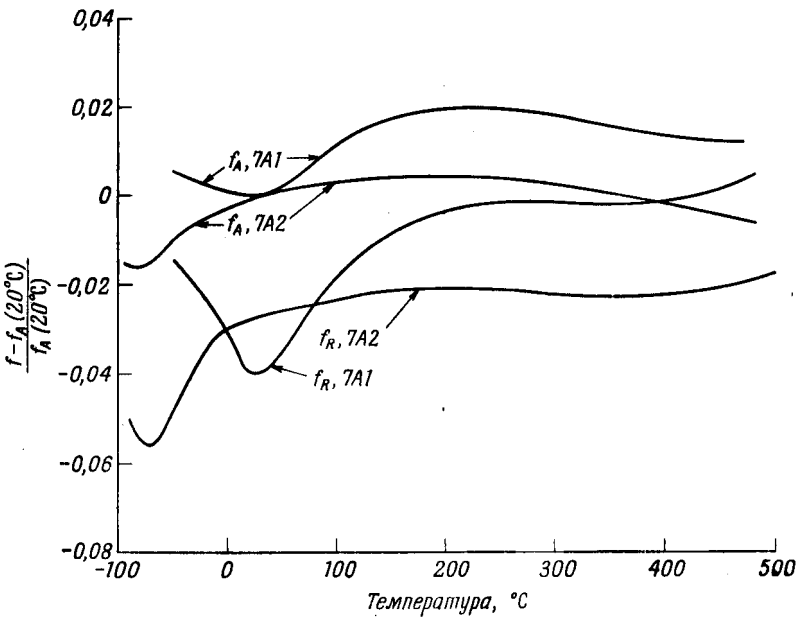
Ф и г. 65. Зависимость k_{33} от температуры при оптимальном подмагничивании для ферритов феррокскуб 7А 1 и 7А 2 [73].
Оптимальное подмагничивающее поле устанавливалось для каждой температуры.

В табл. 21 не приведены значения d_{31} и d_{15}, так как в литературе они отсутствуют для рассматриваемых материалов. Можно положить $d_{31} \approx -{}^1/_2\ d_{33}$, хотя для пьезоэлектрической керамики



Ф и г. 66. Зависимость $\mu_{33}^{S=0}$ от температуры при оптимальном подмагничивании для ферритов феррокскуб 7А 1 и 7А 2 [73].

Оптимальное подмагничивающее поле устанавливалось для каждой температуры.



Ф и г. 67. Зависимость f_a и f_r от температуры при оптимальном подмагничивании для ферритов феррокскуб 7А 1 и 7А 2 [73].

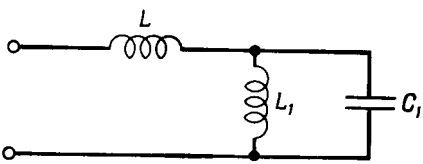
Оптимальное подмагничивающее поле устанавливалось для каждой температуры.

в общем случае это не справедливо (например, $d_{33} \approx -6d_{31}$ для керамики $PbNb_2O_6$). Ван-дер-Бургт [78] привел значения d_{15} для различных никель-цинковых ферритов; если предположить, что $g_{33} \approx -2g_{31}$, то $|g_{15}| > |g_{33} - g_{31}|$. Для указанных соединений $k_{15} > k_{33}$, и имеет место заметное отклонение от магнитной изотропии, так как $\mu_{33} > \mu_{11}$.

На фиг. 65—67 показано изменение с температурой некоторых свойств пьезомагнитных материалов, параметры которых приведены в табл. 21.

3. Эквивалентная схема пьезомагнитного преобразователя

Одна из двух эквивалентных схем свободно подвешенного пьезомагнитного вибратора вблизи резонанса показана на фиг. 68. Предполагается, что внутренние потери отсутствуют. Здесь L — индуктивность зажатого преобразователя, а L_1 и C_1 — элементы



Фиг. 68. Эквивалентная схема свободно подвешенного пьезомагнитного преобразователя вблизи его основного резонанса; предполагается, что внутренние потери отсутствуют.

механической стороны схемы. Частоты минимума и максимума импеданса f_m и f_n тождественны соответственно частотам антирезонанса и резонанса f_a и f_r, и, следовательно, эффективный коэффициент пьезомагнитной связи определяется выражением

$$k^2_{\text{эфф}} = \frac{f_a^2 - f_r^2}{f_a^2}. \qquad (3.167)$$

Частоты минимума и максимума импеданса вибратора без внутренних потерь соответствуют характеристическим частотам f_s и f_p[1]), однако, поскольку в действительности механические и электрические потери всегда имеют место, это соответствие никогда не бывает полным. При малых значениях $\operatorname{tg}\delta$ существуют сле-

[1]) Здесь, так же как в случае пьезоэлектрического преобразователя, f_s соответствует резонансу последовательной цепи, а f_p — резонансу параллельной цепи. Однако частотой механического резонанса для пьезоэлектрического преобразователя является f_s, а для пьезомагнитного преобразователя f_p.

дующие соотношения между тремя разностями частот:

$$(f_a - f_r) < (f_s - f_p) < (f_m - f_n).$$

Эти разности пренебрежимо малы, если $k^2_{эфф}\, Q_m \gg 1$, однако во всех остальных случаях в измеренные значения характеристических частот следует вводить соответствующие поправки. При большой индуктивности рассеяния и низком $k_{эфф}$, что часто наблюдается для стержневых преобразователей, изготовленных из металлических материалов, полный импеданс имеет реактивный характер на всех частотах, и, следовательно, f_r и f_a вообще не обнаруживаются. Электрические потери обычно учитываются сопротивлением R_0, включенным последовательно с L, а механические потери или акустическая нагрузка — сопротивлением R, включенным параллельно C_1. Механическая добротность

$$Q_M \approx \sqrt{\frac{Z_n}{Z_m}} \sqrt{\frac{1 - k^2_{эфф}}{k^2_{эфф}}}, \qquad (3.168)$$

где Z_m и Z_n — абсолютные минимальное и максимальное значения импеданса соответственно. Если условие $k^2_{эфф}\, Q_M \approx (Z_n/Z_m)^{1/2} \gg 1$ не выполняется, то разность частот с учетом поправок определяется приближенным выражением

$$(f_s - f_p) \approx \sqrt{\frac{1}{2}\left[(f_a - f_r)^2 + (f_m - f_n)^2\right]}, \qquad (3.169)$$

Эквивалентная схема двухполюсника, приведенная на фиг. 68, справедлива в широком диапазоне частот, если распределение деформаций не зависит от частоты. Это условие выполняется, например, в случае кольца, совершающего радиальные колебания; при этом [1])

$$k_{33} = k_{дин}.$$

Для других вибраторов, например для полуволнового стержня, $k_{33} > k_{дин}$, и параметры эквивалентной схемы вблизи резонанса несколько отличаются от соответствующих статических характеристик. Это объясняется тем, что вблизи резонанса распределение напряжений по длине стержня имеет синусоидальный характер, а на очень низких частотах напряжение практически постоянно по длине.

Эквивалентные схемы пьезомагнитных и других магнитомеханических преобразователей часто строятся на основе так называе-

[1]) Вуллет [77] определил, в какой мере индуктивность рассеяния уменьшает $k_{дин}$, и показал, каким образом эта потеря может быть компенсирована. При положительном эффекте коррекция позволяет увеличить $k_{дин}$ до значения, равного статическому коэффициенту связи k_{33}.

мой второй системы электромеханических аналогий [79], в которой электрический ток соответствует механической силе, а электрическое напряжение — скорости (т. е. экстенсивные величины сопоставляются с интенсивными, и наоборот). Такие эквивалентные схемы применимы для практических целей, но, строго говоря, они не могут быть представлены в виде взаимной цепи, состоящей из сопротивлений, емкостей, индуктивностей и идеальных трансформаторов. На необходимость символического устройства, преобразующего экстенсивные переменные в интенсивные и позволяющего перейти от одной системы аналогий к другой, указал Теллеген [80], который ввел идеальный гиратор в качестве пятого независимого элемента цепи. Следует заметить, что идеальный гиратор в действительности заменяет идеальный трансформатор в качестве независимого элемента цепи, так как последовательное соединение двух гираторов образует один идеальный трансформатор. Используя обычную систему обозначений, преобразования, совершаемые идеальным гиратором и идеальным трансформатором, можно представить следующим образом:

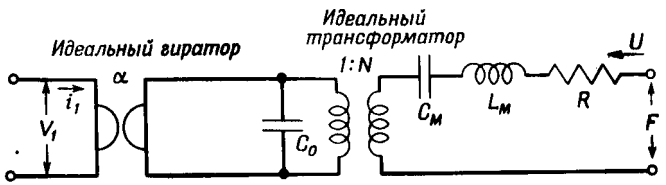
Идеальный гиратор	Идеальный трансформатор	
$V_1 = -\alpha I_2,$	$I_1 = -NI_2,$	(3.170)
$V_2 = \alpha I_1,$	$V_2 = NV_1.$	

Идеальный гиратор преобразует напряжение в ток и обратно; при этом коэффициент пропорциональности α называется сопротивлением гиратора, так как он имеет размерность сопротивления. Таким образом, идеальный гиратор является невзаимным четырехполюсником без потерь, который, согласно (3.170), преобразует линейные элементы цепей в их физические антиподы, т. е. индуктивность — в емкость, цепь, замкнутую накоротко,— в разомкнутую цепь, источник напряжения — в источник тока, параллельное соединение — в последовательное, и наоборот.

Эквивалентные схемы пьезомагнитных преобразователей могут быть построены с использованием первой системы аналогий (сила — напряжение); при этом получаются схемы, аналогичные эквивалентным схемам пьезоэлектрических преобразователей, но к электрическим клеммам подключается идеальный гиратор. Такие схемы рассмотрены в книге Катца ([65], стр. 115). Элементы этих эквивалентных схем определяются тем же методом, что и в § 6, т. е. с использованием уравнений (3.159) — (3.162) и уравнения движения для заданного типа преобразователя.

В качестве иллюстрации рассмотрим пьезомагнитный тороид с полным числом витков n, радиусом r и площадью поперечного сечения A. Если поперечное сечение мало по сравнению с радиусом ($T_1 = T_2 = 0$), то для режима холостого хода (H постоянно)

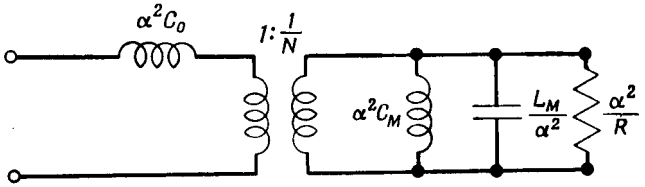
следует использовать уравнения (3.159). Далее получаем идеальный электромеханический трансформатор сначала на основе аналогии сила — ток, а затем с введением гиратора приводим



$$C_0=\frac{\mu^T(1-k_{33}^2)An^2}{2\pi r\alpha^2}, \qquad N=\frac{nd_{33}A}{\alpha s_{33}^H(2\pi r)},$$

$$C_м=\frac{s_{33}^H(2\pi r)}{A}, \qquad L_м=2\pi rA\rho, \qquad \alpha=1\ ом$$

Фиг. 69. Общая эквивалентная схема пьезомагнитного преобразователя с односторонней нагрузкой вблизи резонанса, включающая идеальный гиратор и идеальный трансформатор.
Электрические потери не учитываются.



Фиг. 70. Эквивалентная схема пьезомагнитного преобразователя вблизи резонанса после исключения идеального гиратора.
Электрические потери не учитываются, однако их можно учесть путем включения активного сопротивления последовательно с индуктивностью α^2C_0.

к аналогии сила — электрическое напряжение. Таким образом, уравнение (3.159) (при условии, что $S_{\theta\theta}=S_з=0$) дает

$$T_{\theta\theta}=T_з=-\frac{d_{33}H_з}{s_{33}^H}=-\frac{n}{2\pi r}\frac{d_{33}}{s_{33}^H}I. \qquad (3.171)$$

Отсюда, учитывая, что площадь поперечного сечения равна A, имеем

$$N=\frac{F_r}{I}=\frac{nA}{2\pi r}\frac{d_{33}}{s_{33}^H}. \qquad (3.172)$$

Введение в схему идеального гиратора позволяет представить эту величину в виде отношения F/V. Сопротивление идеального гиратора может быть выбрано произвольно, однако при этом

требуется соответствующая нормировка параметров эквивалентной схемы. Для простоты удобно полагать $\alpha = 1$ *ом* или $\alpha = n$ *ом*. В первом случае получим значения параметров эквивалентной схемы, приведенные на фиг. 69.

Эквивалентная схема ненагруженного преобразователя, имеющая форму двухполюсника, может быть построена обычным способом — путем замыкания накоротко выходных механических клемм и пересчета всех параметров схемы на левую сторону от гиратора (фиг. 70).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cady W. G., Piezoelectricity, New York, 1946 (см. перевод: У. Кэди, Пьезоэлектричество и его практическое применение, М., 1949).
2. Heising R. A., Quartz Crystals for Electrical Circuits, Princeton, New Jersey, 1946.
3. Vigoreux P., Booth C. F., Quartz Vibrators and Their Applications, London, 1950.
4. Mason W. P., Piezoelectric Crystals and Their Application to Ultrasonics, Princeton, New Jersey, 1950 (см. перевод: У. Мэзон, Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике, М., 1952).
5. IRE Standards on Piezoelectric Crystals, Proc. IRE, **37**, 1378 (1949).
6. IRE Standards on Piezoelectric Crystals, Proc. IRE, **45**, 354 (1957).
7. IRE Standards on Piezoelectric Crystals, Proc. IRE, **46**, 765 (1958).
8. IRE Standards on Piezoelectric Crystals, Proc. IRE, **49**, 1162 (1961).
9. Landolt-Börnstein, Numerical Values and Functions, vol. II/6, 6th ed., Berlin, 1959, p. 414.
10. American Institute of Physics Handbook, New York, 1957, p. 3.89, 5.150.
11. Brown C. S., Kell R. C., Taylor R., Thomas L. A., Proc. Inst. Electr. Eng., **109**, pt. B, No. 43, 99 (1962).
12. Jaffe B., Roth R. S., Marzullo S., Journ. Res. Nat. Bur. Stand., **55**, 239 (1955).
13. Kulcsar F., Journ. Amer. Ceram. Soc., **42**, 343 (1959).
14. Gerson R., Journ. Appl. Phys., **31**, 188 (1960).
15. Jaffe H., Proc. Inst. Electr. Eng., **109**, Pt. B, Suppl. No. 22, 351 (1962).
16. Nye J. F., Physical Properties of Crystals, Oxford, 1957 (см. перевод: Дж. Най, Физические свойства кристаллов, М., 1960).
17. Bechmann R., IRE Nat. Conv. Record, **2**, pt. 6, 77 (1954).
18. Ikeda T., Tanaka Y., Toyoda H., Japan Journ. Appl. Phys., **1**, 13 (1962).
19. Schmidt G., Zs. Phys., **161**, 579 (1961).
20. Berlincourt D., Jaffe H., Shiozawa L. R., Phys. Rev., **129**, 1009 (1963).
21. Austerman S. B., Berlincourt D., Krueger H. H. A., Journ. Appl. Phys., **34**, 339 (1963).
22. Hutson A. R., Phys. Rev. Letters, **4**, 505 (1960).
23. Berlincourt D., Jaffe H., Phys. Rev., **111**, 143 (1958).
24. Bechmann R., Phys. Rev., **110**, 1060 (1958).
25. Baerwald H. G., IRE Intern. Conv. Record, **8**, pt. 6, 205 (1960).
26. Christoffel E. W., Ann. mat. pura appl., Sec. II, **8**, 193 (1877).
27. Mason W. P., Physical Acoustics and the Properties of Solids, Princeton, New Jersey, 1958.

28. Love A. E. H., A Treatise on the Mathematical Theory of Electricity, 4th ed., 1927, p. 298.
29. Kyame J. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **21**, 159 (1949).
30. Hutson A. R., White D. L., Journ. Appl. Phys., **33**, 40 (1962).
31. Hutson A. R., McFee J. H., White D. L., Phys. Rev. Letters, **7**, 237 (1961).
32. White D. L., Journ. Appl. Phys., **33**, 2547 (1962).
33. Kyame J. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **26**, 990 (1954).
34. Roberts S., Phys. Rev., **71**, 890 (1947).
35. Gray R. B., US Patent No. 2 486 560 (1949).
36. Mason W. P., Phys. Rev., **73**, 1398 (1948).
37. Mason W. P., Phys. Rev., **74**, 1134 (1948).
38. Jaffe H., Phys. Rev., **73**, 1260 (1948).
39. Berlincourt D., Krueger H. H. A., Journ. Appl. Phys., **30**, 1804 (1959).
40. Cherry W. L., Adler R., Phys. Rev., **72**, 981 (1947).
41. Baerwald H. G., Phys. Rev., **105**, 480 (1957).
42. Berlincourt D., Cmolik C., Jaffe H., Proc. IRE, **48**, 220 (1960).
43. Jaeger R. E., Egerton L., Journ. Amer. Ceram. Soc., **45**, 209 (1962).
44. Berlincourt D., Kulcsar F., Journ. Acoust. Soc. Amer., **24**, 709 (1952).
45. Jaffe B., Roth R. S., Marzullo S., Journ. Appl. Phys., **25**, 809 (1954).
46. Kulcsar F., Journ. Amer. Ceram. Soc., **42**, 49 (1959).
47. Goodman G., US Patent No. 2 805 165 (1957).
48. Shirane G., Newnham R., Pepinsky R., Phys. Rev., **96**, 581 (1954).
49. Francombe M. H., Lewis B., Journ. Electron., **2**, 387 (1957).
50. Schmidt G., Zs. Phys., **148**, 314 (1957).
51. Doremus L. W., Proc. IRE, **47**, 921 (1959).
52. Krueger H. H. A., Phys. Rev., **93**, 362 (1954).
53. Subbarao E. C., McQuarrie M. C., Buessem W. R., Journ. Appl. Phys., **28**, 1194 (1957).
54. van der Burgt C. M., Havinga E. E., Fourth International Congress on Acoustics, Copenhagen, Aug. 21—28, 1962.
55. Добрер Е. К., Кармен К. Н., Журнал технической физики, **2**, 455 (1959).
56. Mason W. P., Journ. Acoust. Soc. Amer., **27**, 73 (1955).
57. Krueger H. H. A., Berlincourt D., Journ. Acoust. Soc. Amer., **33**, 1339 (1961).
58. Brown R. F., Naval Research Establishment (Canada), Rep. 60/5 (1960).
59. Gerson R., Journ. Acoust. Soc. Amer., **32**, 1297 (1960a).
60. Baerwald H. G., Contract No. Nonr-1055 (00), Rep. No. 3, Ohio, 1955.
61. Bechmann R., Proc. Phys. Soc., B64, 323 (1951).
62. Bechmann R., Journ. Acoust. Soc. Amer., **28**, 347 (1956).
63. Baerwald H. G., Libove C., Contract No. Nonr-1055 (00), Techn. Rep. No. 8, Clevite Corp., Cleveland, Ohio (1955).
64. Mason W. P., Electromechanical Transducers and Wave Filters, 2nd ed., Princeton, New Jersey, 1948, p. 201, 399.
65. Katz H. W., Solid State Magnetic and Dielectric Devices, New York, 1959, p. 94.
66. Baerwald H. G., IRE Intern. Conv. Record, **9**, pt. 4, 244 (1961).

67. Rosenthal F., Mikuteit V. D., IRE Nat. Conv. Record, **7**, pt. 6, 252 (1959).
68. Woollett R. S., IRE Intern. Conv. Record, **10**, pt. 6, 90 (1962).
69. Gerson R., Burlage S. R., Berlincourt D., Journ., Acoust. Soc. Amer., **33**, 1483 (1961).
70. Боровик-Романов А. С., ЖЭТФ, **36**, 1390 (1959).
71. Voigt W., Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig, 1910.
72. Wilson G. L., Journ. Acoust. Soc. Amer., **33**, 1127 (1961).
73. van der Burgt C. M., Philips Techn. Inform. Bull., No. 15, 273 (1958).
74. van der Burgt C. M., Electr. Techn., **37**, 330 (1960).
75. Davis C. M., Jr., Ferebee S. F., U. S. Naval Journ. Underwater Acoust., 8, 491 (1958).
76. Ehrlich S. L., US Navy Underwater Sound Laboratory Technical Memorandum No. 925-197-51, 1951.
77. Woollett R. S., US Navy Underwater Sound Laboratory Research Rep. No. 225, 1953.
78. van der Burgt C. M., Philips Res. Rep., 8, 91 (1953).
79. Firestone F. A., Journ. Acoust. Soc. Amer., 4, 249 (1933).
80. Tellegen B. D. H., Philips Res. Rep., **3**, 81 (1948).
81*. Дзялошинский И. Е., К вопросу о пьезомагнетизме, ЖЭТФ, **33**, 807 (1957).
82*. Боровик-Романов А. С., Пьезомагнетизм в антиферромагнитных фторидах кобальта и марганца, ЖЭТФ, 38, 1088 (1960).
83*. Birss R. R., Symmetry and Magnetism, Amsterdam, 1964.
84*. Whymark R. R., Utilisation of magnetostrictive materials in generating intense sound, Journ. Acoust. Soc. Amer., **33**, 725 (1961).
85*. Голямина И. П., Чулкова В. К., Свойства магнитострикционных ферритов при больших амплитудах возбуждающей индукции и механического напряжения, Акуст. журн., **10**, 276 (1964).

Глава 4

УЛЬТРАЗВУКОВЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЖИДКОСТЕЙ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Г. МАК-СКИМИН[1])

§ 1. ОБЩИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ

1. Введение

Настоящая глава посвящена в основном задаче определения макроскопических механических свойств жидкостей и твердых тел с помощью ультразвуковых волн и механических колебаний. Вследствие ограниченного объема главы необходимо ограничить круг рассматриваемых вопросов. Мы не сможем подробно рассмотреть все существующие методы измерений, а также электронные схемы и конструктивные особенности аппаратуры. Однако мы приводим подробные ссылки на литературу; дополнительные сведения можно найти также в других главах этой книги.

Вследствие более широкого применения методов измерений на высоких частотах по сравнению с методами измерений на низких частотах, мы рассматриваем первые более подробно. В частности, особое внимание обращено на методы сравнения фаз.

Измеряемые параметры. Сущность ультразвукового метода состоит в том, что элементарный объем жидкости или твердого тела периодически деформируется определенным образом и при этом измеряются упругие постоянные и потери энергии. Можно получить зависимость этих параметров от внешних условий, т. е. от температуры, давления, напряженности электрического или магнитного поля, периодического возбуждения, окружающей атмосферы и т. д. Может также изменяться и частота колебаний. Полученные таким образом результаты сопоставляются с физическими процессами, происходящими в образце.

2. Методы измерений с помощью бегущих волн

Определение комплексного модуля упругости. Один из наиболее широко распространенных методов определения упругости мате-

[1]) «Белл телефон леборатриз», Мерри-Хилл, Нью-Джерси.

риала и внутренних потерь в нем основан на измерении скорости и коэффициента затухания ультразвуковых волн. Для этой цели используются волны, распространяющиеся как в образцах ограниченного сечения, так и в неограниченной среде.

Рассмотрим распространение продольной волны вдоль оси стержня, диаметр которого мал по сравнению с длиной волны. При синусоидальном изменении деформаций и напряжений и фиксированной частоте закон Гука, связывающий напряжение T с деформацией S, может быть записан в следующем виде:

$$T = (E' + jE'')\,S = E^*S, \tag{4.1}$$

где E^* — комплексный модуль Юнга. Уравнение движения для смещения частиц η имеет вид

$$E^* \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \tag{4.2}$$

где ρ — плотность среды.

Будем искать решение уравнения (4.2) в виде

$$\eta = \eta_0 e^{j\omega t - \theta x}. \tag{4.3}$$

Комплексная постоянная распространения $\theta = A + jB$ определяется выражением

$$\theta = A + jB = j\omega \left(\frac{\rho}{E' + jE''}\right)^{1/2}. \tag{4.4}$$

Подставляя его в формулу (4.3), получаем

$$\eta = \eta_0 e^{-Ax} e^{-jBx} e^{j\omega t}, \tag{4.5}$$

откуда следует, что A — коэффициент затухания ультразвуковой волны, который выражается в неперах на 1 *см*, а $B = \omega/V$ — фазовая постоянная, измеряемая в радианах на 1 *см*.

Уравнение (4.4) можно разрешить относительно любой пары величин A и B или E' и E'':

$$A = \sqrt{\frac{(F-1)\rho\omega^2}{2F^2E'}}, \tag{4.6}$$

$$B = \sqrt{\frac{(F+1)\rho\omega^2}{2F^2E'}}, \tag{4.7}$$

где

$$F = \sqrt{1 + \left(\frac{E''}{E'}\right)^2},$$

или

$$E'' = \frac{2AB\rho\omega^2}{(A^2+B^2)^2} = \frac{2\rho V^2 AV/\omega}{(1 + A^2V^2/\omega^2)^2}, \tag{4.8}$$

$$E' = \frac{(B^2-A^2)\rho\omega^2}{(A^2+B^2)^2} = \frac{\rho V^2 (1 - A^2V^2/\omega^2)}{(1 + A^2V^2/\omega^2)^2}. \tag{4.9}$$

Таким образом, измеряя скорость распространения V и коэффициент затухания A, легко определить комплексный модуль упругости. Из выражения (4.9) следует, что при малом коэффициенте затухания $E' = \rho V^2$. Эта формула лежит в основе широко распространенного метода измерения модуля упругости по скорости звука. Однако при наличии в среде затухания эта формула не является достаточно точной, и расчеты должны проводиться по более сложной формуле (4.9).

Механическая добротность и внутреннее трение. В ряде случаев целесообразно ввести коэффициент внутреннего трения $1/Q$ — величину, обратную добротности системы. По определению, добротность системы Q есть умноженное на 2π отношение максимальной энергии, запасенной за один период, к энергии, рассеянной за период в том же объеме. Исходя из этого определения, можно показать, что для приведенного выше вида зависимости между напряжениями и деформациями (4.1)

$$Q = \frac{E'}{E''}. \tag{4.10}$$

Выражая это отношение через измеряемые величины A и B, имеем

$$Q = \frac{B^2 - A^2}{2AB} \approx \frac{B}{2A} \qquad \text{при } BA > 10. \tag{4.11}$$

Эта формула справедлива также в случае распространения плоских продольных или сдвиговых волн.

3. Методы, основанные на измерении импеданса

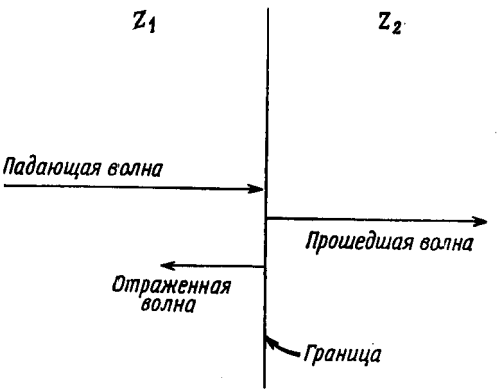
Отражение от границы двух сред с разными импедансами. Рассмотрим продольные волны, распространяющиеся вдоль полубесконечного стержня, которые возникают под действием синусоидальной силы, приложенной к концу стержня. Характеристическое сопротивление (импеданс) определяется как комплексное отношение возбуждающей силы к скорости движения частиц. Для рассматриваемого стержня с площадью сечения a

$$Z_K = \frac{F}{\partial\eta/\partial t} = \frac{\theta E^* a}{j\omega} = a\sqrt{\rho E^*} = \frac{ja\rho\omega}{\theta}. \tag{4.12}$$

Если E^* — действительная величина, то Z_K является активной нагрузкой, равной $\rho V a$. Если диссипативными потерями в материале нельзя пренебречь, то, определив Z_K по формуле (4.12), легко рассчитать величину комплексного модуля E^*.

Особое значение указанный метод приобретает в тех случаях, когда поглощение в исследуемом материале настолько велико, что

прямое измерение скорости и коэффициента поглощения невозможно. Последнее справедливо для ряда вязкоупругих материалов, в первую очередь жидкостей. Рассмотрим в качестве примера случай, когда в твердую среду с известным импедансом Z_1 излучается плоская сдвиговая волна, которая частично отражается от



Фиг. 71. Отражение и прохождение волн на границе раздела двух сред.

границы между твердым телом и исследуемой жидкостью (фиг. 71). Коэффициенты отражения и пропускания определяются следующими выражениями:

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{\text{Амплитуда отраженной волны}}{\text{Амплитуда падающей волны}}, \qquad (4.13)$$

$$t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\text{Амплитуда прошедшей волны}}{\text{Амплитуда падающей волны}}, \qquad (4.14)$$

где Z_2 — импеданс исследуемой жидкости. Коэффициент отражения r можно определить, проведя измерения с исследуемой жидкостью и без нее. Измерив таким способом Z_2, можно по формуле (4.12) рассчитать соответствующее значение комплексного модуля упругости (см. § 4).

Другие методы измерения импеданса. Импеданс можно измерить также по реакции среды на излучатель подобно тому, как это сделано в некоторых вискозиметрах. Эта реакция сводится к изменению скорости затухания колебаний, или добротности колебательной системы, и резонансной частоты. Эти параметры связаны с интересующим нас динамическим модулем упругости. На этом принципе разработаны приборы с электромеханическими преобразователями, которые позволяют измерить импеданс среды (см. § 4).

4. Резонанс и спадание амплитуды колебаний

Один из первых динамических методов, получивших широкое распространение для измерения модуля упругости, основан на том, что резонансные частоты колебательной системы определяются соответствующими модулями упругости. Таким образом, можно экспериментально определить модуль упругости, если известна зависимость между этими величинами. Обычно применяются образцы простейшей геометрической формы в виде тонких проволочек или стержней для крутильных колебаний или в виде стержней или пластинок для продольных и изгибных колебаний.

Внутреннее трение можно измерить различными способами. При малых потерях измеряют скорость спадания амплитуды свободных колебаний после прекращения действия вынуждающей силы. В этом случае находят декремент затухания δ, определяемый как логарифм отношения двух последовательных амплитуд колебаний, который равен π/θ. Это определение соответствует наиболее общему определению добротности Q как умноженного на 2π отношения энергии, запасенной за один период, к потерям энергии за период (при достаточно большом Q, например, $Q > 10$).

При постоянном возбуждении колебательной системы Q может быть определено по изменению амплитуды колебаний при изменении частоты вблизи резонанса. Обозначая через Δf разность частот, при которых амплитуда колебаний уменьшается на 3 *дб* по сравнению со значением при резонансе (см. также § 6, п. 1), получаем

$$Q \approx \frac{f_r}{\Delta f}, \tag{4.15}$$

где f_r — резонансная частота системы.

Конечно, во всех этих измерениях необходимо учитывать потери и реактивную нагрузку, вносимые преобразователем. Вообще говоря, резонансные методы применимы только для систем с высокой добротностью. При больших потерях следует использовать методы, в которых образец может рассматриваться как часть длинной линии. Такие измерения могут проводиться как в непрерывном режиме, так и с использованием импульсов достаточной длительности.

§ 2. УРАВНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ДЛИННЫХ ЛИНИЯХ

1. Уравнения для скорости частиц, силы и входного сопротивления

Рассмотрим уравнения, описывающие механические колебания в длинных линиях, поскольку они понадобятся нам при

анализе экспериментальных методов. Эти дифференциальные уравнения (для простейшего случая распространения колебаний в одном направлении) соответствуют телеграфным уравнениям, описывающим распространение электрических волн в длинных линиях. По аналогии с выражениями для тока и напряжения можно записать выражения для скорости v и силы F в любой точке x, если известны их значения при $x = 0$. Эти выражения имеют вид

$$\begin{aligned} v &= v_0 \operatorname{ch} \theta x - \frac{F_0}{Z_K} \operatorname{sh} \theta x, \\ F &= F_0 \operatorname{ch} \theta x - v_0 Z_K \operatorname{sh} \theta x. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Используя выражения (4.16) и предполагая, что на конце линии (при $x = l$) включен импеданс Z_R, получаем

$$\begin{aligned} v &= \frac{F_0}{Z_K} \left[\frac{Z_K \operatorname{ch} \theta (l-x) + Z_R \operatorname{sh} \theta (l-x)}{Z_K \operatorname{sh} \theta l + Z_R \operatorname{ch} \theta l} \right], \\ F &= F_0 \left[\frac{Z_K \operatorname{sh} \theta (l-x) + Z_R \operatorname{ch} \theta (l-x)}{Z_K \operatorname{sh} \theta l + Z_R \operatorname{ch} \theta l} \right]. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Если импеданс нагрузки на конце линии равен Z_R, то входное сопротивление при $x = 0$ равно

$$\frac{F_0}{v_0} = Z_d = Z_K \left[\frac{Z_K \operatorname{sh} \theta l + Z_R \operatorname{ch} \theta l}{Z_K \operatorname{ch} \theta l + Z_R \operatorname{sh} \theta l} \right]. \tag{4.18}$$

Приведенные выше выражения полезны при анализе систем, составленных из отрезков длинных линий, к которому сводится задача при практических измерениях модулей упругости.

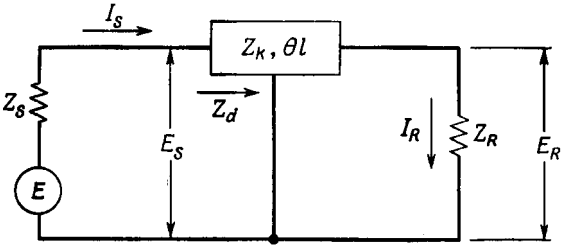
Эти выражения применимы для крутильных волн в стержне или плоских (сдвиговых или продольных) волн в безграничной среде, если заменить F, v и Z_K аналогичными параметрами для этих случаев.

Во всех этих случаях $\theta = A + jB$ — комплексная постоянная распространения, где A и B — коэффициент затухания и фазовая постоянная. Если рассматривается распространение крутильных волн в стержне круглого сечения, то v и F заменяются соответственно на угловую скорость и крутящий момент, а $Z_K = jE_T\theta/\omega$, где $E_T = \pi R^4 (\mu' + j\mu'')/2$ — модуль кручения (R — радиус стержня, $\mu^* = \mu' + j\mu''$ — комплексный модуль сдвига).

2. *Некоторые формулы*

Для анализа ряда методов весьма полезна эквивалентная электрическая схема, показанная на фиг. 72. Она соответствует отрезку линии длиной l с постоянной распространения θ и импедансом Z_K. Предполагается, что возбуждающая сила (электри-

ческое напряжение) E приложена последовательно с сопротивлением Z_s, а линия на конце нагружена на механическое сопротивление Z_R; I_R — скорость (ток) на выходе.



Ф и г. 72. Эквивалентная схема отрезка длинной линии с нагрузками на входе и на выходе.

Сила, действующая на входе, определяется следующим выражением:

$$E_s = \frac{EZ_d}{Z_s + Z_d} = \frac{EZ_K (Z_K \operatorname{sh} \theta l + Z_R \operatorname{ch} \theta l)}{(Z_s Z_R + Z_K^2) \operatorname{sh} \theta l + (Z_s Z_K + Z_R Z_K) \operatorname{ch} \theta l}. \qquad (4.19)$$

Здесь Z_d заменено выражением (4.18).

Силу $E_R = I_R Z_R$ можно записать в виде

$$E_R = \frac{EZ_R}{(Z_s + Z_R) \operatorname{ch} \theta l + [(Z_s Z_R + Z_K^2)/Z_K] \operatorname{sh} \theta l}. \qquad (4.20)$$

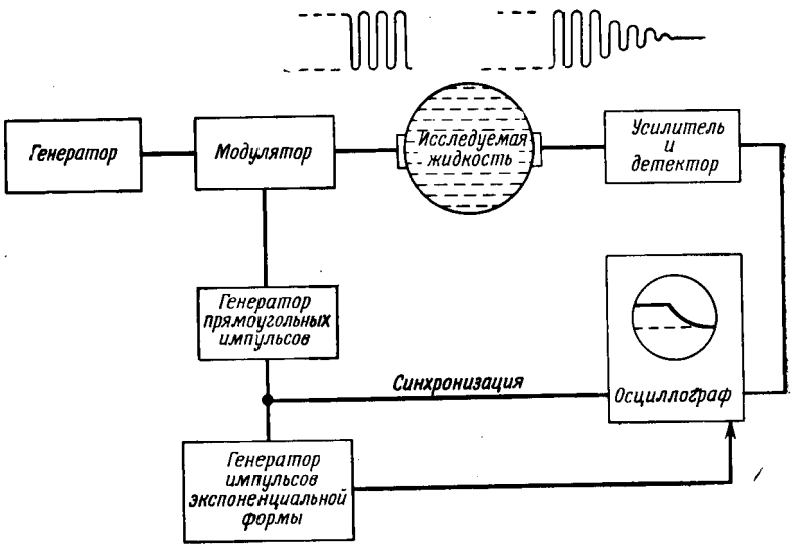
Выражения (4.19) и (4.20) во многих случаях упрощаются, так как в большинстве приложений затуханием в некоторых частях схемы можно пренебречь. В последующих параграфах мы будем ссылаться на эти выражения.

§ 3. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ В ЖИДКОСТЯХ С МАЛОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

1. Реверберационный метод на низких частотах

Для жидкостей с малой вязкостью сдвиговая упругость пренебрежимо мала по сравнению с объемной; поэтому нас интересует модуль объемной упругости $K^* = K' + jK''$ и мнимая часть модуля сдвига $G^* = G' + jG''$. В некоторых случаях эти величины могут быть измерены непосредственно, однако чаще всего они могут быть определены лишь с использованием результатов нескольких различных измерений. Например, модуль $M^* = K^* + {}^4/_3 G^*$ определяется из данных по распространению плоских волн (обычно на высоких частотах). Модуль сдвига G^* или его мнимую часть G'' можно найти независимо, что дает

возможность определить модуль K^*. Основные механизмы поглощения, связанные со сдвиговой и объемной вязкостью, а также с тепловыми процессами, приводят к тому, что коэффициент затухания A изменяется пропорционально квадрату частоты.



Фиг. 73. Схема измерения коэффициента поглощения реверберационным методом.

Поэтому в области частот порядка нескольких килогерц потери в жидкости обычно настолько малы, что могут применяться только резонансные методы, за исключением тех случаев, когда имеются очень большие объемы жидкости.

Реверберационный метод, впервые описанный Леонардом [1], а затем Мулдерсом [2], Моеном [3], Курце и Таммом [4] и другими авторами, успешно применялся на таких низких частотах, как 5 *кгц*; однако при этом неопределенность может достигать 10—15%. Исследуемую жидкость заливают в тонкостенный стеклянный сосуд сферической или цилиндрической формы (фиг. 73). Преобразователь, изготовленный, например, из керамики титаната бария, возбуждает собственные радиальные колебания наинизшей частоты; аналогичный преобразователь используется в качестве приемника. После установления стационарных колебаний возбуждающее напряжение быстро выключается и измеряется с помощью осциллографа скорость уменьшения принимаемого сигнала, по которой определяется коэффициент затухания.

При более высоких частотах появляются трудности, связанные с отождествлением возбуждаемых гармоник высокого порядка; однако путем применения частотной модуляции можно возбудить сразу ряд собственных колебаний и наблюдать указанным выше методом [2] процесс реверберации.

Закон спадания амплитуды принимаемого сигнала можно записать в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-(k+AV)t}, \qquad (4.21)$$

где A — определяемый коэффициент затухания, V — скорость звука, k — постоянная, зависящая от других потерь в системе, например потерь в сосуде, в преобразователе, потерь, связанных с излучением в воздух, с вязкими эффектами на границе между жидкостью и внутренней поверхностью сосуда; эту постоянную можно получить при измерениях с жидкостью, коэффициент затухания которой известен (например, вода). Скорость звука V, входящая в уравнение (4.21), может быть измерена другими методами на высоких частотах.

Детальный анализ этого метода, а также обзор ранее выполненных исследований, дается в работе Лоули и Рида [5]. Показано, что в диапазоне от 200 *кгц* до 2 *Мгц* измерения могут проводиться с объемом жидкости около 0,5 *л*, тогда как на низких частотах необходим объем ~ 100 *л*. Карпович [6] высказал предположение, что после дальнейшего усовершенствования этим методом можно будет проводить измерения в стеклянных сосудах емкостью 1 $см^3$.

2. *Оптические методы*

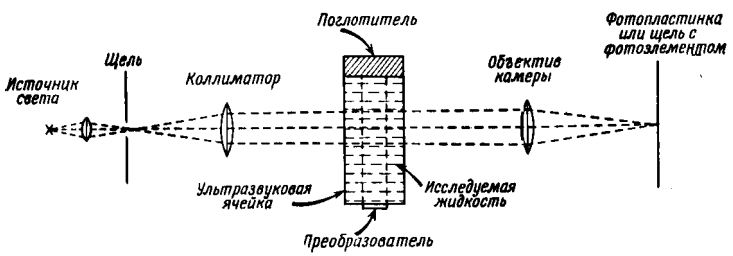
Дебай и Сирс [7] и независимо от них Люка и Бикар [8] обнаружили, что система чередующихся сжатий и разрежений, возникающая при распространении звуковой волны в жидкости, является весьма эффективной дифракционной решеткой для света. В результате этого открытия появился ряд оптических методов измерения скорости и затухания ультразвуковых волн. Схема одного из таких распространенных методов показана на фиг. 74. Звуковой пучок, излучаемый соответствующим преобразователем (чаще всего применяется кварц, колеблющийся по толщине), поглощается на дальнем конце кюветы, чтобы исключить появление стоячих волн. Свет от монохроматического источника проходит через щель, а затем параллельный пучок света, как показано на схеме, пересекает ультразвуковую кювету. Основное изображение щели наряду с дифракционными изображениями более высоких порядков фокусируется на фотопластинке.

Согласно теории Рамана и Ната [9], измерив угол дифракции θ, можно найти длину звуковой волны и, следовательно, скорость звука. Соответствующее соотношение имеет вид

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{\lambda^*}, \qquad (4.22)$$

где λ — длина световой волны, λ^* — длина волны звука, n — целое положительное число.

Заменив фотографическую пластинку фотометром и измеряя интенсивность дифракционного максимума одного и того же порядка при прохождении света на разных расстояниях от излучателя ультразвука, можно измерить коэффициент затухания. Этот метод подробно описан в работах Уилларда [11—13],



Фиг. 74. Схема измерений с использованием дифракции света на ультразвуковых волнах.

Бартона [10] и Хазарда [14]. В работе Каннуна [15] описан метод «изохромат», предложенный Гидеманом и Остерхаммелем [16]. В этом методе используется белый свет и наблюдается цветное изображение звукового поля; при этом зонам одинакового цвета соответствуют области в жидкости с одинаковой интенсивностью звука.

Точность измерения коэффициента затухания составляет несколько процентов и зависит от величины потерь в жидкости, а точность измерения скорости достигает 0,1%. Хотя существует ряд других, более простых методов, которые могут давать такую же точность, немногие из них столь изящны, как оптический метод. Кроме того, представляет интерес сама по себе возможность визуализации ультразвуковых полей.

В последние годы оптические методы были использованы для изучения искажений, возникающих при распространении волн очень большой амплитуды. Ряд авторов, в том числе Лобер и Гидеман [17], Бризиль и Гидеман [18], Занкель и Гидеман [19], показали применимость этих методов как для стоячих, так и для бегущих волн.

3. Методы, основанные на измерении радиационного давления и акустических потоков

Измерение радиационного давления. Звуковые волны, падающие на отражающую (или поглощающую) поверхность, оказывают на нее давление, пропорциональное плотности энергии в пучке. Плотность энергии пропорциональна квадрату амплитуды. Непосредственное измерение радиационного давления с помощью чувствительных весов позволяет определить коэффициент затухания A, используя соотношение

$$\frac{\Delta W_x}{\Delta W_0} = e^{-2Ax}, \tag{4.23}$$

где ΔW_0 — изменение веса отражателя, соответствующее радиационному давлению в точке $x = 0$, а ΔW_x — та же величина в точке x.

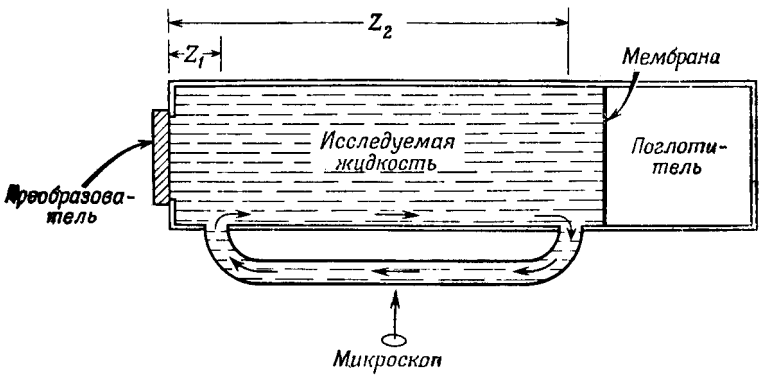
Поскольку площадь отражателя может быть сделана достаточно большой по сравнению с площадью поперечного сечения ультразвукового пучка, можно исключить ошибку, связанную с рассеянием звука вследствие дифракционных эффектов. В качестве излучателя часто используется кристалл кварца, хотя может использоваться также преобразователь из керамики титаната бария.

В одной из первых работ по применению данного метода [20] для увеличения рассеяния с целью предотвратить возникновение стоячих волн поверхность отражателя покрывалась песком. Хорошие результаты получили Смит и Бейер [21], применившие отражатель с выпуклой поверхностью. В диапазоне от 12 до 40 *Мгц* были получены данные по затуханию звука в воде, имеющие разброс менее 5%.

Мак-Намара и Бейер [22] усовершенствовали метод, предложенный ранее Бароне и Нуово [23]. В этом методе ультразвуковые волны, модулированные по амплитуде, отражаются от диафрагмы чувствительного конденсаторного микрофона, используемого в качестве приемной пластинки радиометра. Излучатель, как обычно, представлял собой пластинку кварца X-среза. Изменения радиационного давления действуют на диафрагму микрофона, усиленное выходное напряжение которого регистрируется и таким образом определяется уровень интенсивности звука, а тем самым затухание. Это усовершенствование существенно повышает точность измерений.

Дальнейшее усовершенствование предложили Мохтар и Юссеф [24], которые применили низкочастотную амплитудную модуляцию волн высокой частоты (выше 3 *Мгц*).

Акустический поток. Возникновение акустического потока при распространении ультразвуковых волн, излучаемых преобразователем из кварца или титаната бария, впервые было исследовано Экартом [25]. На этом принципе Пирс и Лэмб [26], Холл и Лэмб



Фиг. 75. Акустическая система для измерений методом акустического потока (по Холлу и Лэмбу).

[27] и другие авторы разработали методику измерений затухания. Акустическая система, используемая при таких измерениях, показана на фиг. 75. Чтобы предотвратить возникновение стоячих волн, излучаемые преобразователем звуковые волны поглощаются на другом конце кюветы. Разность давлений, зависящая от поглощения в жидкости, вызывает появление потока жидкости через маленькую боковую трубку, показанную на фиг. 75. Скорость потока v можно определить с помощью микроскопа по движению взвешенных в жидкости мелких частиц алюминия.

Согласно Холлу и Лэмбу [27], коэффициент затухания A можно найти из соотношения

$$\frac{k\eta v}{E} = e^{-2Az_1} - e^{-2Az_2}. \qquad (4.24)$$

Здесь z_1 и z_2 — расстояния между излучателем и точками присоединения боковой трубки. Постоянная k определяется путем измерения v и E для ряда жидкостей с известным затуханием и сдвиговой вязкостью η. Интенсивность звука у поверхности преобразователя E можно найти путем измерения входного электрического напряжения и сопротивления при резонансе.

Как показали Холл и Лэмб [27], этот метод можно использовать при частотах до 130 *кгц*, причем разброс результатов обычно не превышает 10%. Этот метод, а также описанный в п. 1 настоя-

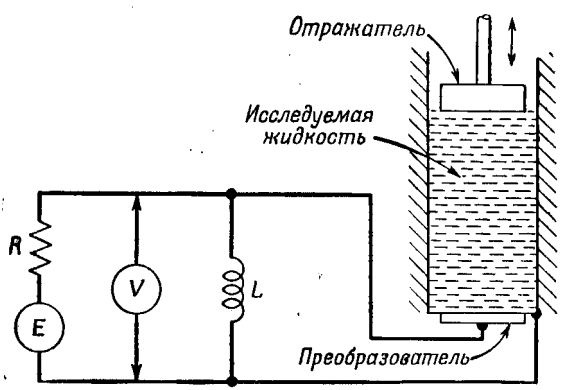
щего параграфа реверберационный метод позволяют проводить измерения затухания с малым количеством жидкости в диапазоне низких ультразвуковых частот.

4. Акустические интерферометры

Интерферометр с одним преобразователем. Один из наиболее старых ультразвуковых методов измерения скорости и коэффициента затухания звука в жидкостях и газах основан на принципе интерференции двух волн: излучаемой преобразователем и отраженной от перемещаемой стеклянной или металлической пластины. Схема его показана на фиг. 76. Впервые предложенный Пирсом [28] и критически рассмотренный Хаббардом [29] этот метод нашел широкое применение. Он сохраняет свое значение до настоящего времени, хотя теперь все большее предпочтение отдается сравнительно новому импульсному методу, особенно при измерении потерь.

Невозможно упомянуть все многочисленные работы, относящиеся к этой теме. Однако мы обращаем внимание читателя на статью Дель Гроссо и др. [30], которая содержит весьма обширную библиографию по этому вопросу.

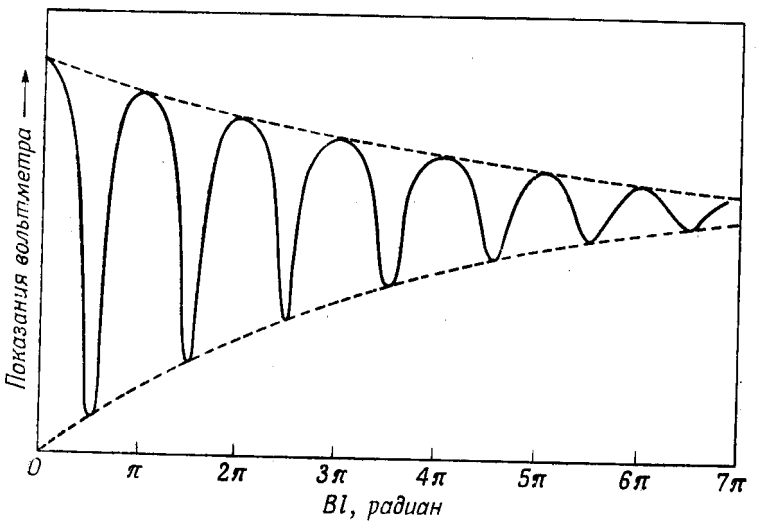
При работе интерферометра кварцевый преобразователь возбуждает колебания на своей резонансной частоте, и измеряются



Ф и г. 76. Схема акустического интерферометра.

изменения электрических параметров в его цепи при изменении расстояния между преобразователем и отражателем. Например, можно измерять напряжение на индуктивности L, используемой для компенсации емкости преобразователя; в результате мы получим зависимость, аналогичную той, которая приведена на

фиг. 77. Расстояния между соседними максимумами (или минимумами) равны половине длины волны. Отсюда легко определить скорость звука V, так как она равна произведению частоты колебаний на длину волны. Коэффициент затухания определяется



Фиг. 77. Зависимость электрического напряжения на преобразователе от расстояния между преобразователем и отражателем.

путем измерения отношения последовательных максимумов амплитуды [29].

Можно также измерить входное электрическое сопротивление (или проводимость) преобразователя, как описал Мэзон [31], и использовать эти данные для расчета скорости звука и затухания. Поскольку этот принцип лежит в основе всех интерферометрических методов, найдем входное сопротивление, учитывая только реакцию жидкости на преобразователь.

Согласно Мэзону [31], из уравнения (4.18) получим

$$Z_d = Z_K \left[\frac{\Delta + \operatorname{cth} \theta l}{1 + \Delta \operatorname{cth} \theta l} \right], \qquad (4.25)$$

где $\theta = A + jB$ — комплексная постоянная распространения [см. (4.4)], Z_K — импеданс среды [см. (4.12)], а $\Delta = Z_K/Z_R$ (Z_R — импеданс отражателя). Поскольку Z_R можно сделать весьма большим по сравнению с Z_K, например изготовив отражатель из нержавеющей стали и сделав на конце его конус для рассеяния энергии звуковой волны, прошедшей в отражатель, Δ является

весьма малой величиной. Фазовый угол для Δ можно положить равным нулю.

Выражение (4.25) можно записать в следующем виде:

$$Z_d = Z_K \left[\frac{\Delta(\operatorname{ch} 2Al - \cos 2Bl) + \operatorname{sh} 2Al - j \sin 2Bl}{\Delta \operatorname{sh} 2Al + \operatorname{ch} 2Al - \cos 2Bl - j\Delta \sin 2Bl} \right], \qquad (4.26)$$

$$Z_K = \frac{\rho V a}{\sqrt{1+(1/4Q^2)}} \exp \operatorname{arctg} \frac{1}{2Q}, \qquad (4.27)$$

где, как указано выше [см. (4.11)], $Q = B/2A$; V — скорость распространения.

Влияние затухания на результаты измерения скорости можно определить по положению максимумов амплитуды или минимумов реактивного сопротивления. Следует заметить, что фаза комплексного сопротивления Z_d существенно зависит от $\sin Bl$, если последняя величина близка к нулю. Для приближенной оценки подставим в (4.26) численные значения параметров. Например, предположим, что получены два значения l: первое близко к нулю, а второе соответствует $Al = 0{,}5$ *непер*. Если жидкость имеет $Q = 50$ и если принять $|\Delta| = 0{,}03$, то можно показать, что ошибка в определении скорости звука из условия $Bl = n\pi$, которому соответствует минимум реактивной составляющей Z_d, равна примерно 0,01%. При заданном значении Al ошибка приближенно пропорциональна $(1/Q)^2$, поэтому в некоторых случаях это отклонение следует учитывать.

Интерферометр с отражением от свободной поверхности жидкости. В работах Фокса и Хантера [32, 33, 34] описан интерферометр, в котором отражение происходит от свободной поверхности столба жидкости. При тщательной регулировке уровня жидкости можно получить почти идеальное отражение. Высоту столба жидкости можно непрерывно изменять и при этом можно регистрировать изменение напряжения на кварцевом преобразователе, так же как в схеме, показанной на фиг. 76.

Анализ этого метода несколько проще, поскольку здесь $\Delta = Z_K/Z_R \to \infty$. В этом случае

$$Z_d = Z_K \operatorname{th}(A + jB)\, l. \qquad (4.28)$$

Так же как в описанном выше методе, затухание в жидкости влияет на точность определения скорости. Однако отсутствие потерь при отражении приводит к тому, что резонансные явления для жидкостей с малым поглощением выражены более четко.

Интерферометр с двумя преобразователями. Фрай [35] показал, что отражатель интерферометра (см. фиг. 76) можно заменить приемником — кристаллическим преобразователем, аналогичным

излучателю. Амплитуда напряжения на выходе приемника по мере удаления его от излучателя изменяется, проходя последовательно через максимумы и минимумы, причем расстояние между двумя соседними максимумами (или минимумами) весьма точно соответствует половине длины волны. Так же как и в предыдущих случаях, для точного измерения скорости звука необходимо учитывать влияние затухания. Подробно этот вопрос рассмотрен в работе Фрая [35].

Даже если потери в жидкости так велики, что не наблюдается образования стоячих волн, затухание все же можно измерить, если принятый сигнал имеет достаточный уровень. По-видимому, это является одним из главных преимуществ данного метода.

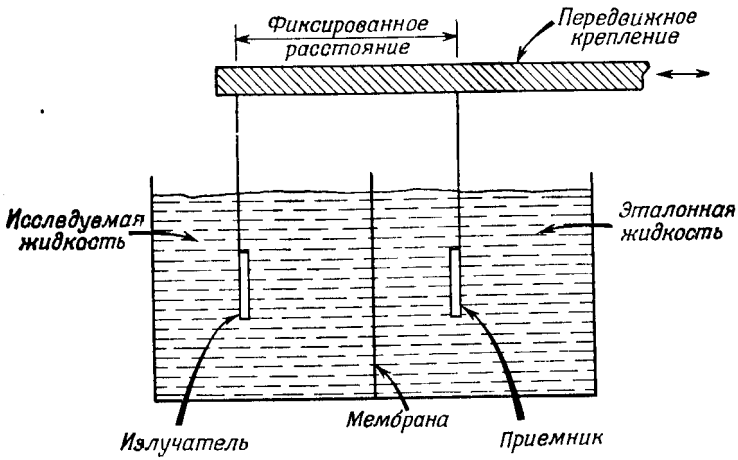
Еще одна система, предназначенная для автоматического измерения скорости звука, описана в работе Бартеля и Нолле [36]. Появление стоячих волн в системе исключается путем введения дополнительного затухания между излучателем и приемником. При постепенном перемещении приемника относительно излучателя фаза принимаемого сигнала будет изменяться по отношению к фазе напряжения, подаваемого на излучатель. Оба колебания смешиваются на входе усилителя. Результирующий низкочастотный сигнал усиливается, детектируется, дифференцируется и записывается самописцем. Получаются острые пики, расстояния между которыми соответствуют половине длины звуковой волны в жидкости. Этот прибор использовался для изучения дисперсии скорости звука в ряде жидкостей в диапазоне от 5 до 25 *Мгц* при точности измерений до 10^{-4}. Указывается, что абсолютная погрешность измерений составляет не более $2 \cdot 10^{-4}$.

Карстенсен [37] описал метод измерения малых отклонений скорости звука по сравнению со скоростью в эталонной жидкости, в качестве которой может использоваться, например, вода (фиг. 78). В этом методе, применяемом в диапазоне частот 0,5—10 *Мгц*, излучатель и приемник могут перемещаться в жидкости, но при этом расстояние между ними остается постоянным. Сигнал на выходе приемника смешивается с сигналом, подаваемым на излучатель, чтобы определить изменение разности фаз по мере относительного изменения длины путей звука в исследуемой и эталонной жидкостях.

Другой тип интерферометра с фиксированным расстоянием описали Баллу и Хаббард [38]. В нем частота изменяется, что приводит к изменениям измеряемых величин. Упрощенное рассмотрение, не учитывающее изменение граничных условий при разной частоте звука, дано в п. 5 настоящего параграфа при описании импульсных методов.

При измерениях скорости звука и поглощения необходимо учитывать влияние дифракции; однако в первых работах на это

не обращали должного внимания. Для прецизионных измерений скорости звука на частотах около 0,3 *Мгц* Грэхем [39] использовал интерферометр с двумя преобразователями, причем последние были заделаны в отражатели больших размеров, служившие



Фиг. 78. Схема измерения скорости звука в исследуемой жидкости путем сравнения с эталонной жидкостью (по Карстенсену).

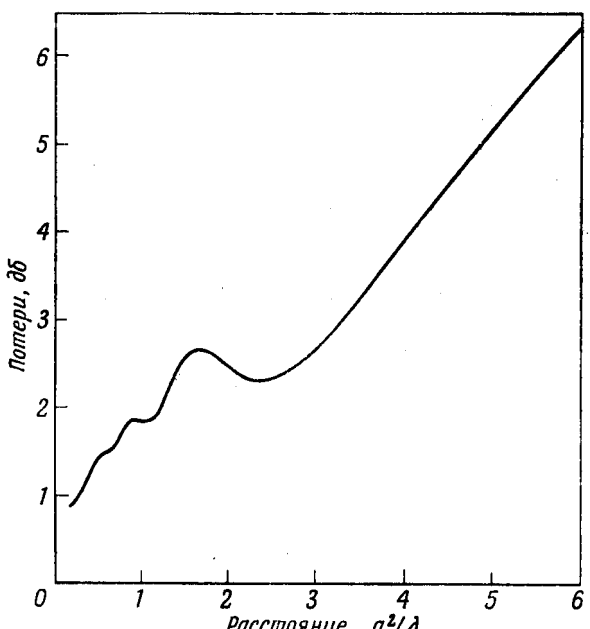
экранами. Теория этого метода, учитывающая влияние дифракции и дающая зависимость напряжения на выходе приемника от расстояния между отражателями, дана в работе [40]. Этот эффект рассматривается ниже в применении к импульсным методам (см. п. 5).

5. *Импульсные методы*

Импульсный метод Пеллама и Галта. Импульсный метод, впервые предложенный Пелламом и Галтом [41] и Титером [42] в США и Пинкертоном [43] в Англии, нашел широкое применение для определения скорости и затухания ультразвуковых волн в жидкостях. Этот метод заключается в следующем. Кварцевый преобразователь периодически излучает в жидкость короткий цуг волн; этот же преобразователь затем играет роль приемника звуковых волн, отраженных от плоской параллельной пластинки (отражателя), которая может перемещаться относительно преобразователя так же, как в интерферометрах (см. п. 4 настоящего параграфа). Затухание определяется по уменьшению амплитуды принимаемого импульса при увеличении акустической длины пути; скорость определяется непосредственно путем измерения времени запаздывания данного импульса.

Этот метод является прямым и весьма эффективным методом измерений. Он позволяет определять затухание с точностью до нескольких процентов, а скорость — с точностью порядка 10^{-4}. Его преимуществом по сравнению с методами, использующими непрерывное излучение звука, является то, что по наблюдаемой картине отраженных импульсов легко отрегулировать установку преобразователя и отражателя, от которой зависит точность измерений. Кроме того, разделение приходящих импульсов во времени позволяет исключить нежелательные отражения от других частей установки.

Дифракционные эффекты. Влияние дифракции необходимо учитывать при снижении рабочей частоты, так как при этом уменьшается направленность излучателей. На необходимость

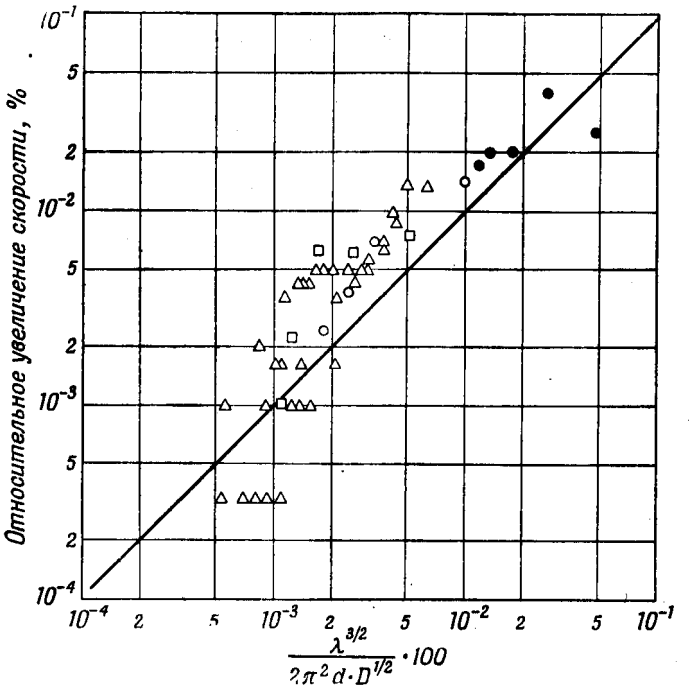


Фиг. 79. Влияние дифракции на измеряемые потери (по Кароме и Уиттингу).

введения поправки при измерении поглощения было указано в работах Хантингтона и др. [44] и Вильямса [45]. Они показали, что обусловленное дифракцией уменьшение амплитуды может достигать примерно 20% в зоне последнего максимума на оси излучателя (т. е. на расстоянии a^2/λ, где a — радиус излучателя,

а λ — длина волны в среде). Результаты дальнейших исследований изложены в работах Секи и др. [46], Басса [47], а также Кароме и др. [48, 49]. Результаты расчетов для круглого излучателя приведены на фиг. 79.

Влияние дифракции должно учитываться также при точных измерениях скорости, хотя в этом случае оно менее существенно.

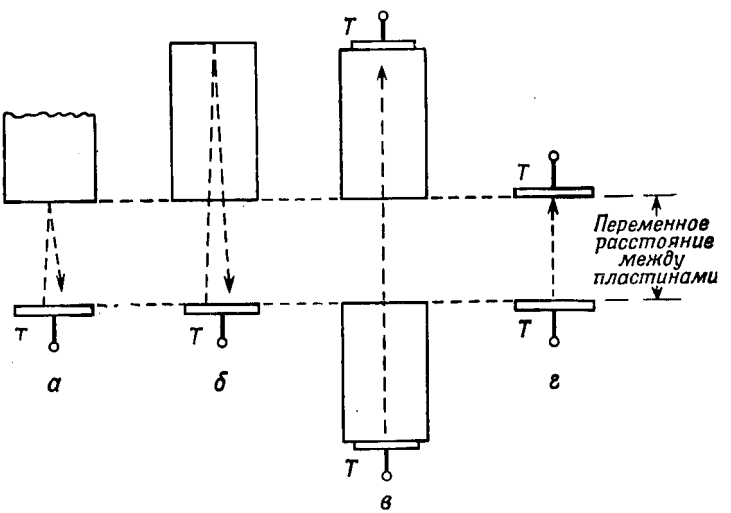


Ф и г. 80. Влияние дифракции на фазовую скорость.
Прямая — теоретические расчеты Басса и Вильямса; точки — экспериментальные данные Мак-Скимина.

Кроме того, почти всегда за счет выбора параметров установки можно сделать влияние дифракции пренебрежимо малым. Эти вопросы рассмотрены в работах Паркера [50] и Дель Гроссо и др. [30]. Увеличение фазовой скорости по сравнению со скоростью в плоской волне было теоретически рассчитано Бассом [1]; результаты этих расчетов представлены на фиг. 80. Точками обозначены экспериментальные данные, полученные в работе [51] для изотропных твердых тел; согласно теории, это увеличение одинаково для твердых тел и для жидкостей.

[1]) R. B a s s, частное сообщение (1960).

Другие схемы. Хотя основной принцип действия всех установок одинаков, целесообразно указать на ряд других схем, нашедших применение. Для увеличения задержки отраженного импульса по отношению к импульсу, излучаемому кварцевым преобразователем, Рапуано [52, 53] использовал отражатель в виде стержня из плавленого кварца (фиг. 81, *б*). Это позволило проводить измерения при малой толщине слоя жидкости, поскольку полученная задержка оказалась достаточной для восстановления



Фиг. 81. Схемы высокочастотного импульсного метода с переменной длиной звукового пути.

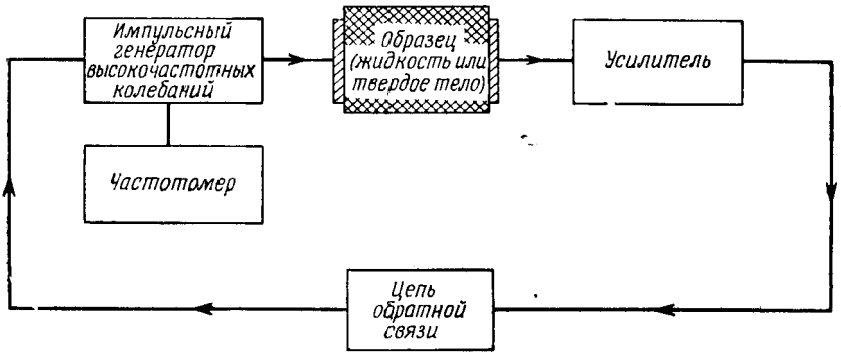
чувствительности приемника после перегрузки, вызванной излучаемым импульсом. Этим методом было измерено затухание в ряде жидкостей для частот до 300 *Мгц*, а в воде — до 520 *Мгц*.

Хизель и Лэмб [54] предложили установку с двумя кварцевыми стержнями (фиг. 81, *в*). Этот метод подробно описан в работе Андреа и др. [55], где детально рассмотрены вопросы, связанные с измерением затухания импульсными методами; описана также методика измерений и аппаратура.

Для измерения скорости звука можно воспользоваться любой из описанных выше схем установок, а также схемой с двумя преобразователями, показанной на фиг. 81, *г*. Эта схема была применена Бруксом [56] для точных измерений скорости звука в воде при весьма большом расстоянии между пластинами (до 100—150 *см*). В другой схеме измерений, описанной Гринспаном и Чигом [57], расстояние между преобразователями было фикси-

рованным и измерялось время задержки между высокочастотными импульсами, последовательно отражающимися от каждого преобразователя. При этом система в целом должна обладать высокой разрешающей способностью.

На фиг. 82 приведена схема, носящая название «автоциркуляции импульса», в которой применяются два отдельных преобразователя для излучения и приема сигнала. Короткий звуковой импульс, прошедший через образец, используется для запуска



Ф и г. 82. Схема метода автоциркуляции импульса.

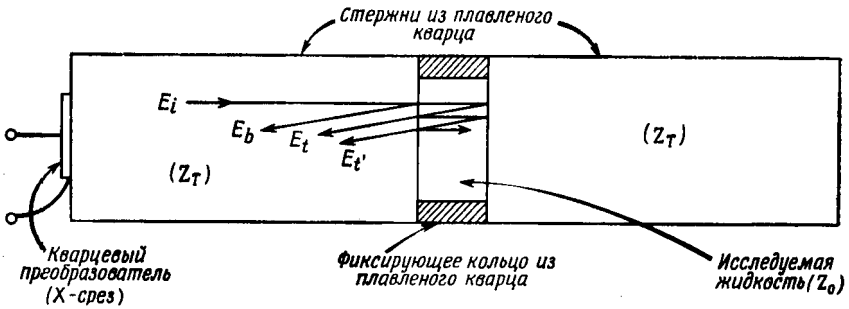
следующего импульса. Частоту повторения полученной таким способом последовательности импульсов можно измерить с большой точностью, а по этим данным можно определить время задержки и скорость звука. При абсолютных измерениях скорости необходимо тщательно учитывать время задержки, вызванное прохождением сигнала в электрических цепях. Однако этот метод обладает рядом преимуществ при измерениях малых изменений скорости (см. работы Холбрука [58], Цедрона и Керрана [59], а также Фикена и Гидемана [60]).

Для измерения затухания предложен метод [61], основанный на повышении температуры в данной точке жидкости, вызванном поглощением проходящих ультразвуковых волн. Для измерения температуры используется термопара весьма малых размеров. Усовершенствовав этот метод, Фрай и Данн [62] расширили частотный диапазон измерений затухания до 500 *Мгц*.

Методы сравнения фаз. Большинство данных по скорости звука получено путем измерения времени задержки импульса, однако точность такого метода существенно меньше точности методов сравнения фаз. Например, если в схеме с двумя преобразователями, изображенной на фиг. 81, *г*, импульс напряжения от приемника сложить с непрерывным колебанием основной частоты,

из которого путем модуляции получен импульс излучателя, то амплитуда суммарного напряжения будет периодически изменяться от максимума до минимума по мере изменения расстояния между преобразователями, что позволит измерить длину волны.

Литовиц и др. [63] описывают использование второго звукового пути, обеспечивающего получение импульса, фаза которого сравнивается с фазой сигнала от исследуемого образца. Мак-Коннел и Мрук [64] использовали импульсную модуляцию в интерферометре, имеющем малую длину звукового пути; длительность импульса выбиралась достаточно большой, чтобы



Фиг. 83. Схема импульсного метода с фиксированной длиной звукового пути.

устанавливались резонансные колебания столба жидкости, но достаточно малой, чтобы исключить появление вызываемых интерференцией ложных эхо-сигналов.

Для измерений скорости и затухания звука автор настоящей главы [65] также использовал метод сравнения фаз. Принципиальная схема измерений показана на фиг. 83. Калиброванное кольцо позволяет точно установить расстояние, которое проходит звук, отражаясь от полированных торцевых поверхностей двух стержней из плавленого кварца. При малой длительности импульсов можно разделить отраженные импульсы во времени и измерить их относительную амплитуду. Путем изменения частоты можно получить одинаковые по фазе сигналы E_t' и E_t. Для этой цели длительность импульсов увеличивается так, чтобы импульсы перекрывали друг друга и могла наблюдаться их интерференция. Импульсная модуляция сигнала, поступающего от генератора непрерывных колебаний, позволяет точно определить частоту.

Если затухание в жидкости не слишком велико, то скорость V определяется выражением

$$V = \frac{2lf_n}{n}, \qquad (4.29)$$

где f_n — частота, при которой эхо-сигналы приходят в фазе; $n = f_n/\Delta f$ (Δf — усредненная в широком диапазоне разность частот, при которых сигналы приходят в фазе). Точность измерений скорости этим методом достигает 10^{-4}.

При $Q > 10$ затухание можно определить, воспользовавшись одним из следующих уравнений [65]:

$$e^{-2Al} = \frac{|E_t'/E_t| \cdot [(Z_T/\rho V) + 1]^2}{[(Z_T/\rho V) - 1]^2}, \tag{4.30}$$

$$e^{-2Al} = \frac{|E_t/4E_b| \cdot [(Z_T/\rho V) + 1]^2}{Z_T/\rho V}. \tag{4.31}$$

Эти уравнения получены из выражений для коэффициентов отражения и пропускания (4.13) и (4.14); Z_T — полное сопротивление стержня из плавленого кварца.

6. Акустические измерения при изменении температуры и давления

Изменение температуры. Большинство из описанных выше методов может быть использовано для проведения измерений при изменении температуры или давления в широких пределах. Для измерений при изменении температуры успешно применялись метод акустического интерферометра, оптический и импульсный методы. Не останавливаясь на методике измерений в обычном диапазоне изменения температур, отметим, что измерения проводились в таких материалах, как жидкий гелий [66] и другие ожиженные газы, жидкие металлы [67], расплавы серы [68] и различных солей [69].

Изменение давления. В течение последнего десятилетия опубликованы результаты большого числа измерений при изменении внешнего давления, проведенных в основном с применением импульсных методов. Литовиц и Карневел [70] и другие проводили измерения импульсным методом, основанным на изменении длины пути, проходимого звуком [41]. Проведение измерений при фиксированной длине звукового пути исключает необходимость вала, сообщающего движение отражателю, находящемуся внутри камеры высокого давления. Холтон [71], Вильсон [73] и Смит и Лоусон [72] приводят данные о скорости звука при давлениях до 9000 *атм*. Мифсад и Нолле [74] описали дифференциальный метод, при котором используется один кварцевый преобразователь, излучающий в жидкость симметрично обеими своими поверхностями. Импульсы, отражающиеся от двух пластин, расположенных по обе стороны от преобразователя на раз-

ных расстояниях от него, сравниваются по амплитуде и времени задержки, и из этих данных определяется скорость и затухание.

Автор настоящей главы получил хорошие результаты, особенно при измерении скорости, используя метод сравнения фаз, описанный в п. 5 [65]. На более низких частотах (до 1 *Мгц*) Доббс и Файнголд [75] провели измерения в жидких аргоне и азоте при давлениях до 135 *атм*. Резонансные колебания возбуждались в системе, состоящей из кольца титаната бария, заполненного исследуемой жидкостью.

§ 4. ВЯЗКОУПРУГИЕ ЖИДКОСТИ

1. Измеряемые величины

В предыдущем параграфе основное внимание было обращено на измерения в маловязких жидкостях, модулем сдвига которых G' можно пренебречь. Однако для вязкоупругих жидкостей нас интересуют как действительная, так и мнимая компоненты модуля объемной упругости K^* и модуля сдвига G^*.

На низких частотах (до 10^4 *гц*) комплексный модуль объемной упругости K^* можно измерить непосредственно, как описано в работе Мак-Кинни и др. [76]. На высоких частотах для этой цели Донфор и Литовиц [77] использовали распространение звука в эмульсии исследуемой жидкости и несмешивающейся с ней другой жидкости. Однако в большинстве случаев измеряется скорость и затухание продольных волн в диапазоне нескольких мегагерц. Эти измерения дают значения следующих комбинаций величин: $K' + {}^4/_3 G'$ и $K'' + {}^4/_3 G''$. Чтобы получить значения отдельных величин, входящих в эти выражения, необходимо независимо измерить модуль сдвига G^* на той же частоте. К сожалению, прямое измерение скорости и затухания сдвиговых волн на ультразвуковых частотах неосуществимо вследствие больших потерь. Однако, измерив полное сопротивление среды для сдвиговых волн Z_K, можно найти G^*, как это показано в общем виде в § 1, п. 3.

Применим уравнение (4.12) к случаю плоских сдвиговых волн. Для этого заменим E^* на G^* и, полагая площадь поперечного сечения равной единице, получим

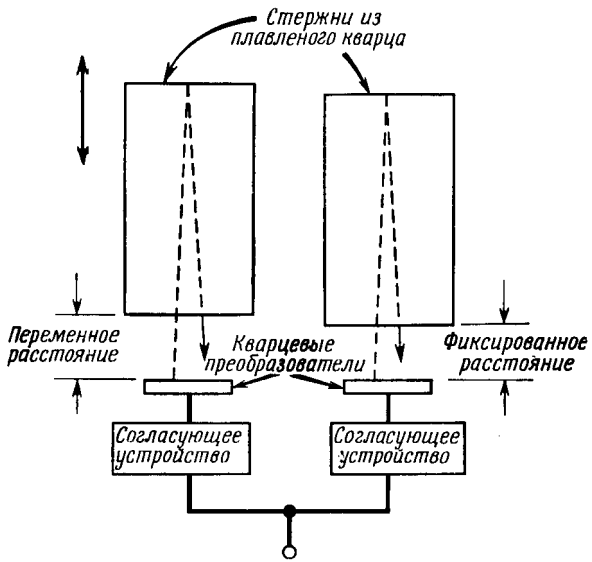
$$G^* = \frac{Z_K^2}{\rho} = \frac{(R_M + jX_M)^2}{\rho}, \tag{4.32}$$

откуда

$$G' = \frac{R_M^2 - X_M^2}{\rho}, \qquad G'' = \frac{2R_M X_M}{\rho}. \tag{4.33}$$

2. Измерения на продольных волнах

Вследствие большого коэффициента поглощения длина звукового пути в жидкости должна быть, как правило, невелика. Из методов, рассмотренных в § 3, наиболее подходящими являются импульсные методы. В частности, можно использовать установку с двумя кварцевыми преобразователями для раздельного



Фиг. 84. Схема установки для сравнительных измерений импульсным методом (по Литовицу и др.).

излучения и приема сигнала. Затухание измеряется по изменению амплитуды принимаемого сигнала по мере увеличения расстояния. Скорость можно определить путем сопоставления фаз сигналов на выходе и на входе при соответствующем изменении расстояния. Определяемая таким образом длина волны λ позволяет вычислить скорость звука по формуле $V = f\lambda$.

Импульсы, подаваемые на излучатель, удобно получать путем модуляции напряжения генератора непрерывных колебаний, частоту которого легко измерить с помощью частотомера или любым другим способом. Этот метод был применен Мэзоном и др. [78]. На фиг. 84 показана схема установки Литовица и др. [63], состоящая из двух одинаковых частей, в каждой из которых в качестве элемента задержки применяется стержень из плавленого кварца, служащий для предотвращения перегрузки входа

приемника при излучении (см. также [52]). Скорость определяется путем сравнения фаз сигналов, поступающих по двум каналам, при изменении длины звукового пути в одном из них.

3. Измерение сдвиговых параметров

Низкочастотные вискозиметры. Измерению динамических сдвиговых параметров жидкости, особенно на низких частотах (ниже ультразвуковых частот), посвящено много работ. В большинстве случаев измерялась только действительная часть комплексного коэффициента вязкости $\eta^* = \eta' - j\eta''$ и не измерялась мнимая часть, равная $\eta'' = G'/\omega$. Точное измерение модуля сдвига G' весьма затруднительно, хотя он представляет интерес во многих случаях.

В данной главе не рассматриваются низкочастотные методы измерения, однако целесообразно указать некоторые методы измерения обеих компонент модуля G^*. Ситтел и др. [79] измеряли затухание колебаний крутильного маятника, вызванное демпфирующим влиянием жидкости. Реакция жидкости несколько изменяет также и частоту колебаний, поэтому из экспериментов такого типа можно найти как G', так и G''. Возможно также применение резонансных систем; в этом случае измеряется вызываемое жидкостью изменение резонансной частоты и механической добротности. На этом принципе основан «камертонный» метод Мэзона [80] и Гопкинса [81].

Широкое распространение получил электромагнитный метод возбуждения, предложенный Фицджералдом и Ферри [82]. В этом случае вынужденные колебания цилиндрической трубки вызывают сдвиговые колебания в жидкости; измерив с помощью мостовой схемы входное электрическое сопротивление преобразователя, можно найти полное механическое сопротивление жидкости для сдвиговых волн.

Более полное описание этих методов дано в цитированных выше работах, а также в работах Ферри [83, 84] и Мэзона [85].

Ультразвуковые измерения импеданса для сдвиговых волн. Для измерения импеданса жидкости для сдвиговых волн на частотах примерно до 200 *кгц* можно использовать влияние нагрузки на крутильные колебания кварцевого преобразователя [86]. Изменение резонансной частоты и входного сопротивления при резонансе, вызванное присутствием жидкости, измеряется с помощью мостовой схемы. Для калибровки используется жидкость с известной вязкостью. Этот метод недавно был применен для исследования зависимости динамических сдвиговых параметров от давления [87].

В тех случаях, когда импеданс жидкости для сдвиговых волн очень велик, с большим успехом может быть применен импульсный метод. При этом используются стержни с малым коэффициентом затухания (из стекла или металла), в которых распространяются крутильные волны [88]. Сначала отмечаются фаза и амплитуда волн, отраженных от нижнего конца стержня (фиг. 85).

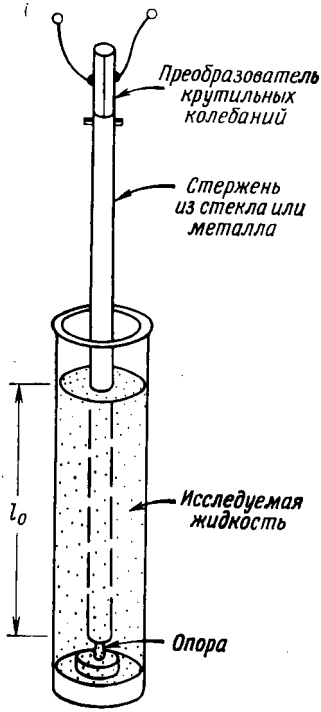
Затем в сосуд, окружающий стержень, до некоторого уровня наливается исследуемая жидкость. При этом измеряется увеличение затухания ΔA (*непер/см*) и изменение фазы ΔB (*рад/см*). Если нагрузка со стороны жидкости не слишком велика, эквивалентный импеданс для плоской сдвиговой волны приближенно определяется выражением

$$Z_K = R_M + jX_M = \frac{\rho V_0 a}{2}(\Delta A + j\Delta B), \tag{4.34}$$

где ρ — плотность материала стержня, a — радиус стержня, а V_0 — скорость распространения крутильных волн в ненагруженном стержне (т. е. для воздуха).

При большой нагрузке выражение (4.34) следует изменить с учетом влияния радиуса кривизны [88].

Описанный метод, вероятно, можно применять для частот до нескольких мегагерц, однако измерения при таких частотах пока не производились, так как для этого нужны преобразователи очень малых размеров. Однако успехи в этой области таковы, что уже теперь подобным образом можно использовать сдвиговые волны в тонких полосках металла (см. гл. 2 и 6).



Фиг. 85. Устройство для измерения комплексного механического сопротивления жидкости с помощью крутильных волн.

При этих более высоких частотах импеданс для сдвиговых волн можно также определять путем измерения комплексного коэффициента отражения волн от границы раздела жидкость — твердое тело, как показано на фиг. 86. Из уравнения (4.13) имеем

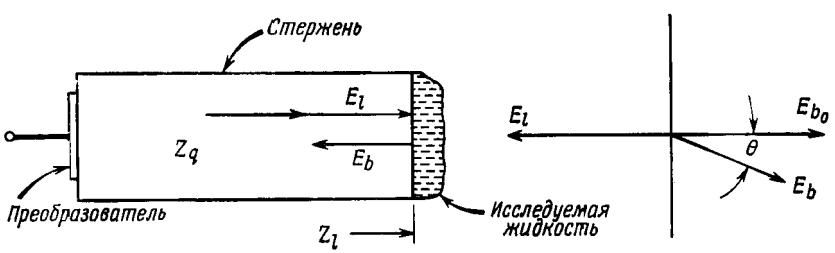
$$\frac{E_b}{E_i} = re^{j(180-\theta)} = \frac{Z_l - Z_q}{Z_l + Z_q}. \tag{4.35}$$

Решая это уравнение относительно характеристического импеданса жидкости Z_l, получаем

$$Z_l = Z_q \left(\frac{1 - r^2 + j2r \sin\theta}{1 + r^2 + 2r\cos\theta} \right). \qquad (4.36)$$

Для таких материалов, как плавленый или кристаллический кварц, импеданс буферного стержня Z_q можно считать чисто активным. Коэффициент отражения r легко определить, так как он равен отношению амплитуды волны при наличии жидкости E_b к амплитуде волны при отсутствии жидкости E_{b_0}. Гораздо труднее точно измерить обусловленное жидкостью запаздывание по фазе θ, так как эта величина очень мала. Заметим, что здесь θ *не* является постоянной распространения.

Чтобы получить некоторое представление о численных значениях упомянутых выше величин, рассмотрим случай идеально вязкой жидкости, для которой $R_M = X_M = (\rho\omega\eta'/2)^{1/2}$. Если вязкость $\eta' = 0{,}01$ *пуаз* (самое малое из встречающихся значений), то при плотности 1 *г/см*^{3} и частоте 10 *Мгц* R_M и X_M будут равны 560 *мех·ом/см*^{2}. Если буферный стержень изготовлен из плавленого кварца ($Z_q = 8{,}2 \cdot 10^5$), то уравнение (4.35) дает $r = 0{,}99865$, или примерно 0,01 *дб*, и $\theta = 0{,}00135$ *рад*, или около 0,08°. Эти значения настолько малы, что их нельзя измерить обычными средствами. Для повышения точности можно использовать многократные отражения в стержне. Ограничивающим фактором является, конечно, отношение сигнал/шум. Таким

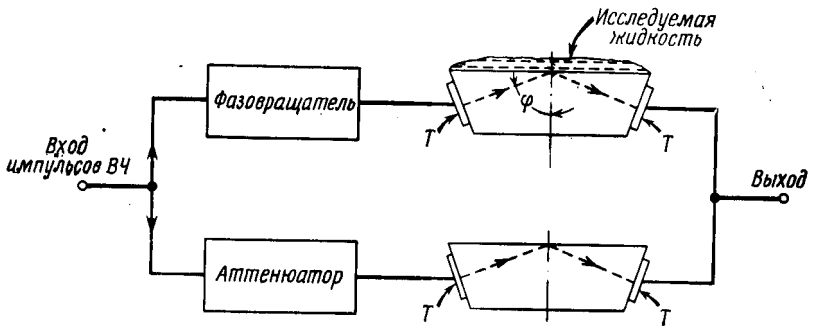


Ф и г. 86. Высокочастотный метод определения импеданса при отражении сдвиговых волн.

путем можно увеличить измеряемую величину по крайней мере на порядок.

Поскольку при измерении сдвига фазы θ фазовый угол волны, прошедшей через стержень, составляет несколько тысяч градусов, необходимо применять балансные устройства с двумя буферными стержнями для уменьшения требований к стабильности частоты и температуры. Для уменьшения влияния температуры можно использовать стержни из кварца AT-среза.

С увеличением угла падения φ звуковых волн на поверхность раздела, например на полированную поверхность плавленого кварца (фиг. 87), сопротивление увеличивается в $1/\cos\varphi$ раз.



Ф и г. 87. Устройство для сравнительных измерений при наклонном падении сдвиговых волн.

Этим методом Мэзон и др. [89] провели измерения для ряда жидких полиизобутиленов. Применив аналогичную методику, Барлоу и Лэмб [90] исследовали зависимость параметров нескольких смазочных масел от температуры и давления.

§ 5. ПЛАСТИЧЕСКИЕ И РЕЗИНОПОДОБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

1. Измеряемые величины

При распространении продольных волн в стержнях или волокнах, поперечные размеры которых малы по сравнению с длиной волны, основную роль играет модуль Юнга E^*. Как показано в § 1, его можно определить, измеряя скорость звука и коэффициент затухания [см. уравнения (4.8) и (4.9)]. Можно воспользоваться также резонансным методом. Поскольку распространение волн в стержне связано с деформациями сжатия и сдвига, модуль Юнга E^* выражается также через модуль объемной упругости K^* и модуль сдвига G^*:

$$E^* = E' + jE'' = \frac{3G^*}{(1 + G^*/3K^*)}. \qquad (4.37)$$

Если размеры поперечного сечения или диаметр стержня сравнимы с длиной волны, то необходимо вводить поправку в измеренное значение скорости (см. § 6, п. 1). Однако чаще всего точность измерений при работе с пластическими материалами такова, что указанное усложнение расчетов не оправдано.

Для определения модуля E^* можно также воспользоваться изгибными волнами, однако в этом случае расчетные соотношения несколько более сложны вследствие зависимости скорости распространения от диаметра.

Величина $(K^* + {}^4/_3 G^*)$, так же как для вязкоупругих жидкостей (см. § 6), определяется путем исследования распространения плоских продольных волн, а модуль G^* чаще всего находится непосредственно из условий распространения сдвиговых волн в образце подходящей длины.

2. *Методы измерений на частотах ниже 20 кгц*

Поскольку большинство измерений для пластических и резиноподобных материалов проведено на частотах ниже ультразвуковых, целесообразно, не вдаваясь в излишние подробности, рассмотреть некоторые из применяемых методов.

На очень низких частотах можно использовать вынужденные колебания образца с частотой, далекой от резонансной. При этом измеряется зависимость между переменным сдвиговым напряжением, приложенным к образцу, и деформацией образца. Аппаратура для таких измерений в диапазоне от 10^{-5} до 10 *гц* описана Филипповым [91]. Максвелл [92] исследовал кручение стержня круглого сечения, жестко закрепленного на одном конце. Модуль E^* определялся им по величине силы, необходимой для получения заданного смещения другого конца стержня. Примерный диапазон частот в этих измерениях составлял от 10^{-3} до 200 *гц*.

Хорио и Оноги [93] и ряд других авторов измеряли комплексный модуль Юнга E^*, возбуждая изгибные резонансные колебания в образцах в виде язычков. Другой резонансный метод измерений описан Бордони и др. [94]. Образцы в виде круглых пластинок возбуждались электростатическим методом. Были получены данные для полиметилметакрилата в диапазоне частот до 40 *кгц* при температурах от 60 до 300° К. Измеряя затухание резонансных колебаний составного стержня, Нильсен [95] определил модуль сдвига и декремент при крутильных колебаниях образца. Используя тот же принцип, Синнот [96] измерил параметры ряда полимеров в области температур от 4,2 до 100° К.

В работах Рордена и Греко [97] и Гопкинса [98] описано возбуждение сдвиговых колебаний в образцах малых размеров с помощью камертона. Измерения могут выполняться на частотах до 10 *кгц*.

Если имеются образцы в виде длинных полос или стержней, то можно непосредственно измерить скорость и коэффициент затухания продольных волн. Этот метод использовался в работах

Хиллера [99, 100] и Баллоу и Смита [101], где приведены результаты, полученные на частотах до 30 *кгц*.

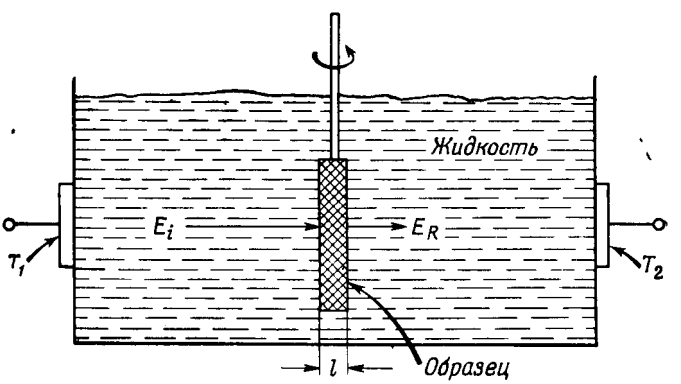
Для сильно деформируемых материалов, а также для жидкостей широко применялся электромагнитный способ возбуждения, описанный Фицджералдом [102]. В этом случае измеренный электрический импеданс преобразователя используется для определения механического импеданса образца (и, следовательно, модуля сдвига G^*) на частотах до 5 *кгц*. Этим методом можно проводить измерения при непрерывном изменении частоты.

В работе Мак-Кинни и др. [76] описан весьма важный и интересный метод измерения комплексного модуля объемной упругости K^* с использованием аппаратуры, аналогичной применявшейся при измерениях в жидкости.

Исчерпывающий список работ по данному вопросу читатель может найти в работах Ферри [83, 84], Мэзона [85] и Бордони и др. [94].

3. Методы измерений на высоких частотах

Иммерсионные методы. Рассмотрим прохождение высокочастотных продольных волн через образец, погруженный в жидкость (фиг. 88). Поскольку условие хорошего акустического контакта



Фиг. 88. Прохождение ультразвуковых волн через пластинку, погруженную в жидкость.

между жидкостью и образцом обычно выполняется автоматически, при дальнейшем анализе заменим образец эквивалентным отрезком длинной линии, нагруженным на обоих его концах на сопротивление, равное волновому сопротивлению жидкости. Последнее допустимо, например, при использовании высокочастотных импульсов, так как при этом в жидкости не возникают стоячие волны.

Сопоставим амплитуду и фазу волны, прошедшей через образец E_R, с амплитудой и фазой волны, приходящей в отсутствие исследуемого образца E_{R_0}. При достаточно большом коэффициенте затухания в образце, исключающем возможность возникновения стоячих волн, или в том случае, если используются высокочастотные импульсы, так что можно разделить прямой и отраженный сигналы, имеем

$$\frac{E_R}{E_{R_0}} = Re^{j\varphi} = \frac{4\rho_1\rho_2\theta_1\theta_2 e^{(\theta_1-\theta_2)\,l}}{(\rho_1\theta_2+\rho_2\theta_1)^2}\,. \tag{4.38}$$

Здесь ρ — плотность, $\theta = A + jB$ — комплексная постоянная распространения. Индексы 1 и 2 относятся соответственно к жидкости и к образцу. Сдвиг фазы φ при удалении образца и отношение амплитуд R определяются экспериментально. Поскольку параметры ρ_1 и θ_1 для воды известны, из уравнения (4.38) можно найти $\theta_2 = A_2 + jB_2$ для образца.

Если механическая добротность достаточно велика, например больше 10, то формулы значительно упрощаются. Это условие для продольных волн в большинстве случаев выполняется, и для них можно использовать следующие выражения, полученные из уравнения (4.38):

$$e^{-A_2 l} = Re^{-A_1 l}\left[\left(\frac{\rho_1 V_1}{4\rho_2 V_2}\right)+\left(\frac{\rho_2 V_2}{4\rho_1 V_1}\right)+\frac{1}{2}\right], \tag{4.39}$$

$$V_2 = \frac{V_1}{(1-V_1\varphi/l\omega)}\,. \tag{4.40}$$

Существует ряд способов измерения φ. Например, при использовании высокочастотных импульсов напряжение с приемника T_2 (фиг. 88) можно сравнить с напряжением, поступающим с другого аналогичного приемника. Зная расстояние между приемниками, легко определить сдвиг фазы между этими сигналами.

Вместо измерения сдвига фазы можно измерять импульсным методом время задержки сигнала, поступающего от приемника. В этом случае скорость звука в образце V_2 определяется в зависимости от времени задержки при измерениях с образцом, находящимся в жидкости δ_1, и от времени задержки без образца δ_2 по формуле

$$V_2 = \frac{V_1}{[1-V_1(\delta_1-\delta_2)/l]}\,. \tag{4.41}$$

Этот метод использовали Нолле и Моури [103] для определения свойств ряда резин и пластиков в диапазоне 10—30 *Мгц*. Однако вместо двух преобразователей, показанных на фиг. 88, они применили один преобразователь, который излучает импульс и затем принимает отраженный сигнал. Этот же метод использовали Синг и Нолле [104] для измерений при различном гидростатическом давлении.

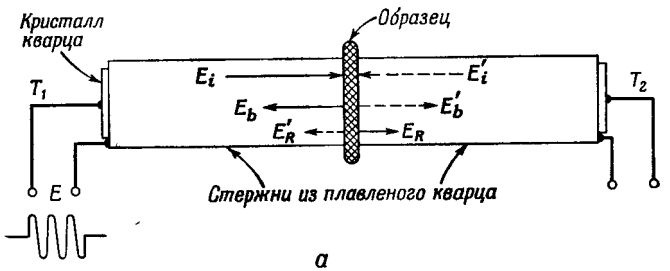
При измерениях сдвиговых характеристик вещества с успехом могут быть использованы методы преобразования волн одного типа в другой. Если образец, показанный на фиг. 88, повернуть вокруг вертикальной оси, чтобы звуковые волны падали на поверхность образца наклонно, то в нем будут возникать как продольные, так и сдвиговые волны. При условии стационарности колебаний амплитуда прошедшей волны E_R вследствие интерференции будет минимальной при некотором критическом угле. Эти данные можно использовать для определения отношения скоростей продольных и сдвиговых волн. Такой метод, предложенный Рейснером [105] и развитый впоследствии в работах Шнейдера и Бартона [106] и Мэзона [31], в первую очередь применим для измерения скорости звука в образцах с малым затуханием.

При измерении затухания методы преобразования типов волн хорошо сочетаются с применением импульсной техники. Коно [107] описал метод, в котором падение продольной волны на поверхность образца происходит под углом, превышающим критическое значение для продольных волн в образце. Сдвиговая волна, возникающая в образце, распространяется под острым углом к его поверхности; она вызывает появление в жидкости продольной волны, которая затем попадает на приемник. Применяя образцы различной длины, можно определить скорость звука и затухание. Если затухание в образце недостаточно для того, чтобы исключить влияние отражений внутри образца, то необходимо разделять во времени прямой и отраженный сигналы.

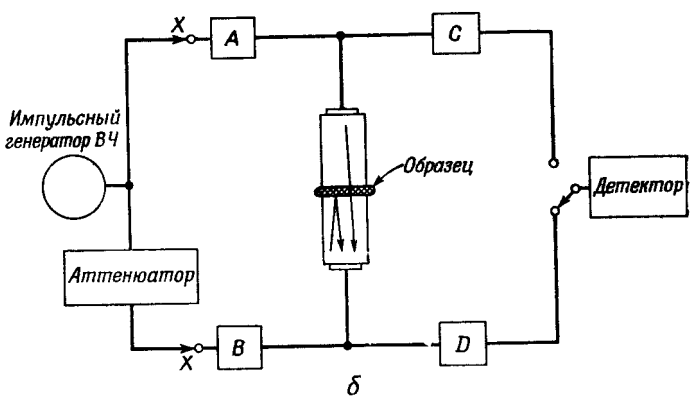
Применение буферных стержней. Этот метод полезен при измерении характеристик материалов с малой упругостью; схема метода показана на фиг. 89. Образец приклеивается между двумя соосными стержнями из плавленого кварца, в которых распространяются либо продольные, либо сдвиговые короткие ультразвуковые импульсы. Затухание можно определить путем сравнения амплитуд принимаемых сигналов E_R для образцов разной длины. Скорость звука определяется по изменению времени задержки. Другой способ определения скорости состоит в измерении времени задержки в стержнях без образца и сопоставлении его с временем задержки для стержней с образцом. Затухание в образце можно определить из измерений амплитуды с учетом механического сопротивления материалов. Этот метод использовали Нолле и Сик [108] для измерения параметров резины в области температур от -90 до $+70^\circ$ С.

Каннингем и Иви [109] описали буферный метод, в котором образцы разной длины приклеиваются к концам двух одинаковых стержней из плавленого кварца. Измерения были выполнены в диапазоне частот 0,2—7 *Мгц*.

Используя уравнения для длинных линий, приведенные в гл. 2, можно показать, что постоянную распространения для образца, показанного на фиг. 89, можно определить, если измерено отношение комплексных амплитуд отраженной E_b и прошедшей E_R



а



б

Ф и г. 89. Метод ультразвуковых измерений параметров пластиков с использованием буферных стержней.

а — расположение образца и буферных стержней; *б* — схема одной из экспериментальных установок. *A*, *B*, *C*, *D* — промежуточные усилители. В точках *x* фаза должна быть одинаковой.

волн. К сожалению, эти волны распространяются в противоположных направлениях; однако отношение E_b/E_R можно определить при одновременной генерации волн преобразователями T_1 и T_2. Этот метод описал Мак-Скимин [110]. Толщина образца может составлять всего несколько длин волн, так как предполагается наличие в образце установившихся колебаний. В этом методе не требуется проводить измерения для стержней без образца или с образцом другой длины.

В некоторых случаях для определения скорости и коэффициента затухания достаточно измерить лишь амплитуду волн как

функцию частоты. Вообще говоря, для этого требуются образцы с малым затуханием, в которых устанавливаются стоячие волны. Механическое сопротивление буферных стержней из плавленого кварца значительно отличается от сопротивления резин и полимеров, поэтому максимумы и минимумы определяются очень легко. Это хорошо видно из выражения для $|E_b/E_R|$ (см. фиг. 89):

$$\left|\frac{E_b}{E_R}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{Z_0}{Z_T}\right) - \left(\frac{Z_T}{Z_0}\right)\right|[(\operatorname{sh} Al\cos Bl)^2 + (\operatorname{ch} Al\sin Bl)^2]^{1/2}. \quad (4.42)$$

Зависимость отношения E_b/E_R от частоты почти полностью определяется выражением в квадратных скобках. Минимум его, соответствующий полному прохождению звуковой волны через образец, наблюдается вблизи значений $Bl = l\omega/V = n\pi$. Продифференцировав выражение в квадратных скобках по Bl и приравняв его нулю, можно найти более точные значения Bl, соответствующие экстремумам отношения E_b/E_R. Эти значения определяются соотношением

$$\sin 2Bl = -\frac{1}{2Q}\operatorname{sh}\frac{Bl}{Q}. \quad (4.43)$$

В этом соотношении вместо коэффициента затухания A введена механическая добротность $Q = B/2A$, причем предполагается, что она постоянна.

Максимальное и минимальное значения отношения $R = |E_b/E_R|$ можно определить, воспользовавшись методикой, предложенной Мак-Скимином [110]. Коэффициент затухания в первом приближении определяется из уравнения (4.42) в предположении, что минимум отражения соответствует $Bl = n\pi$, а максимум соответствует $Bl = (n + 1/2)\pi$. Таким образом,

$$\frac{R_{\text{мин}}}{R_{\text{макс}}} \approx \operatorname{th} Al. \quad (4.44)$$

Зная коэффициент затухания, из уравнения (4.43) можно найти более точное значение скорости. Продолжая последовательно эту операцию, можно получить более точные значения скорости и коэффициента затухания.

Другие методы. Методы измерений для относительно твердых образцов более детально рассматриваются в следующем параграфе. При частотах до 100 *кгц* можно использовать резонансные колебания стержней, при более высоких частотах исследуется распространение продольных волн, излучаемых колеблющимся по толщине кварцевым преобразователем.

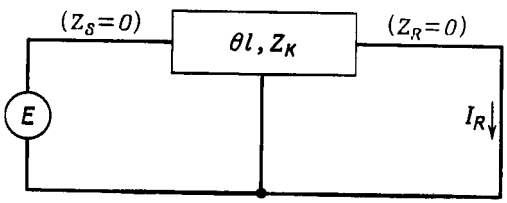
Для ряда материалов с хорошей адгезией по отношению к плавленому кварцу может применяться метод отражения сдвиговых волн, описанный в § 4. Так, например, автор настоящей

главы измерил этим методом модуль сдвига G^* образца высокомолекулярного полиизобутилена. Эти результаты наряду с результатами ряда других авторов изложены в работе Марвина [111].

§ 6. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

1. Резонансные методы

Вывод формул для скорости распространения и механической добротности. На низких ультразвуковых частотах (ниже 1 *Мгц*) модуль упругости и акустические потери проще всего измерить с помощью резонансных методов. Рассмотрим стержень, диаметр



Фиг. 90. Эквивалентная электрическая схема резонансных колебаний стержня, возбуждаемого механическим генератором с малым сопротивлением.

которого мал по сравнению с длиной волны, совершающий продольные колебания под действием электростатического возбуждения или возбуждаемый каким-либо другим методом, характеризующимся малой связью с преобразователем. Эквивалентная электрическая схема для этого случая приведена на фиг. 90. Стержень, замененный отрезком длинной линии с нулевыми сопротивлениями на обоих концах, возбуждается с помощью генератора напряжений E. Скорость I_R на приемном конце стержня при $Z_S = Z_R = 0$, согласно (4.20), можно записать в виде

$$I_R = \frac{E}{Z_K \operatorname{sh} \theta l} \tag{4.45}$$

(определение входящих в это выражение величин дано в § 1). При изменении частоты колебаний амплитуда проходит через максимум при резонансной частоте f_m. Из (4.45) имеем

$$|I_R| = \frac{E}{|Z_K|[(\operatorname{sh} Al \cos Bl)^2 + (\operatorname{ch} Al \sin Bl)^2]^{1/2}}. \tag{4.46}$$

Дифференцируя это выражение по Bl и приравнивая результат нулю, получаем уравнение для определения экстремальных зна-

чений Bl, соответствующих максимуму (минимуму) амплитуды:

$$\sin 2Bl = -\frac{1}{2Q}\operatorname{sh}\frac{Bl}{Q}. \qquad (4.47)$$

При этом предполагается, что $|Z_K|$ и механическая добротность системы Q не зависят от параметра Bl в интересующем нас диапазоне (такое предположение оправдано хотя бы для оценки их влияния по порядку величины).

Для значения Q, равного, например, 50, значения Bl, полученные из уравнения (4.47), отличаются от $Bl = n\pi$ всего на 10^{-4}. Поэтому при резонансных измерениях в большинстве случаев скорость распространения, равная ω/B, определяется хорошо известным выражением

$$V = \frac{2f_m l}{n}. \qquad (4.48)$$

Найдя из (4.46) изменение $|I_R|$ с частотой вблизи резонанса, получим выражение для механической добротности

$$Q \approx \frac{(|I_{R_m}/I_R|^2 - 1)^{1/2}}{2[1-(f/f_m)]}. \qquad (4.49)$$

Обозначая через f_x частоту, соответствующую $|I_{R_m}/I_R| = \sqrt{2}$, получаем из (4.49) широко распространенное выражение

$$Q \approx \frac{f_m}{2(f_m - f_x)}. \qquad (4.50)$$

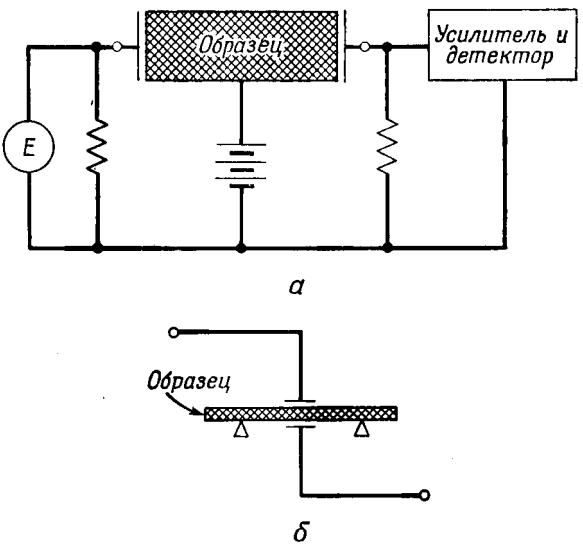
Формулы (4.48) и (4.49) применимы также и в случае крутильных колебаний. Для изгибных колебаний граничные условия таковы, что выражение для скорости распространения приобретает более сложный вид.

Электростатическое возбуждение. При этом способе возбуждения (см. также стр. 362) на один из концов колеблющегося стержня действует периодическая сила, возникающая вследствие электростатического притяжения между электропроводящей торцевой поверхностью стержня и неподвижным электродом, как показано на фиг. 91. При возбуждении изгибных колебаний электроды располагаются вблизи пучности колебаний. Наличие постоянного смещающего электрического напряжения исключает возникновение второй гармоники. Аналогичное устройство используется в качестве приемника.

Связь между механической и электрической системами при этом способе возбуждения обычно весьма мала, так что влиянием параметров электрической цепи при измерениях резонансной частоты и добротности можно пренебречь. Это является существен-

ным преимуществом данного метода. Однако в случае продольных и изгибных колебаний необходимо исключить затухание, вызываемое излучением звука в воздух, для чего всю систему помещают в вакуум.

Вследствие относительно слабой связи этот метод особенно целесообразно использовать при исследовании материалов с высокой



Фиг. 91. Электростатический способ возбуждения продольных (*а*) и изгибных (*б*) колебаний.

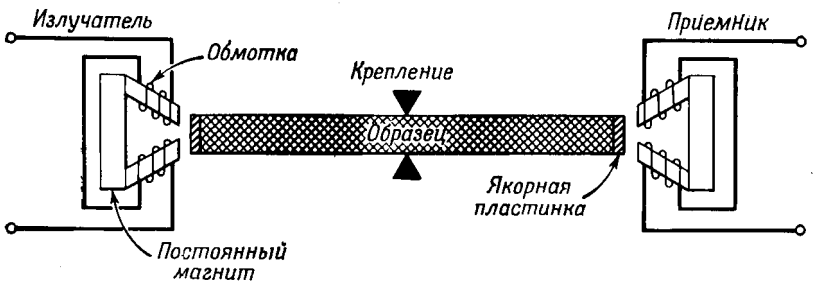
добротностью. Кроме того, он применим в широком диапазоне частот. Более подробное рассмотрение дано ниже в этом пункте и в п. 4.

Электромагнитное возбуждение. Существует ряд способов электромагнитного возбуждения продольных и крутильных колебаний стержней. Вегель и Вальтер [112], а также Файн [113] описали простой метод возбуждения, изображенный на фиг. 92. Конструкция преобразователя напоминает устройство обычного телефона, в котором мембрана заменена тонкой магнитной пластинкой, прикрепленной к образцу. При измерении скорости звука необходимо учитывать массу этой пластинки. Описано также устройство для возбуждения крутильных колебаний.

В образцах, обладающих большой электропроводностью, возбуждение колебаний может быть осуществлено за счет взаимодействия индуцированных вихревых токов с постоянным магнитным

полем [114]. Брэдфилд [115] описал способ возбуждения колебаний с помощью магнитострикционных преобразователей. Продольные колебания, распространяющиеся в тонкой проволоке из магнитострикционного материала, при соответствующей связи возбуждают в стержне продольные или изгибные колебания. Этот метод можно использовать в широком диапазоне частот от 30 до 300 *кгц*. Тот же автор [116] описал индукционное возбуждение образцов в виде небольших дисков.

Применяется также электродинамический способ возбуждения. Некоторые из электродинамических преобразователей описали Бароне и Джакомини [117]. Электрический ток, проходя через



Фиг. 92. Электромагнитный способ возбуждения продольных колебаний.

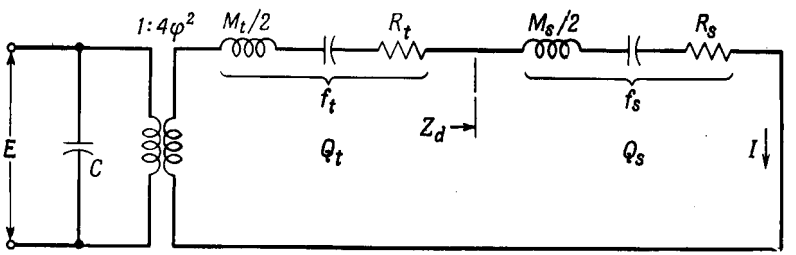
полоску металла, напыленного на поверхность непроводящего образца, взаимодействует с постоянным магнитным полем, вследствие чего возникает переменная сила, возбуждающая продольные или крутильные колебания образца.

Специальные методы применяются для возбуждения ферромагнитных материалов. Например, Спенсер и Ле-Кроу [118] возбудили резонансные колебания сферы малого диаметра (около 0,37 *мм*) из иттриевого граната на частоте порядка 10 *Мгц*. Образец помещался на дне кварцевой трубки в ВЧ резонаторе. Для возбуждения ферромагнитного резонанса прилагалось постоянное магнитное поле. Измеренные значения механической добротности достигали 10^7 на частоте 10 *Мгц*.

Пьезоэлектрическое возбуждение. Сущность этого метода измерений, первоначально предложенного Куимби [119], состоит в том, что пьезоэлектрический преобразователь приклеивается к образцу в виде цилиндрического или прямоугольного стержня, и полученная система настраивается в резонанс. Измеряя частоту и добротность системы и учитывая влияние преобразователя, можно определить свойства образца. Этот метод получил широкое распространение ввиду относительной простоты требуемой аппа-

ратуры, а также вследствие того, что обычно используемые кварцевые преобразователи обладают идеальными механическими свойствами и весьма малыми потерями.

Для вывода необходимых формул, позволяющих определить добротность и скорость звука, рассмотрим входное сопротивление



Ф и г. 93. Эквивалентная схема образца с прикрепленным к нему преобразователем.

Z_d со стороны возбуждаемого торца образца. Как следует из (4.18), при $Z_R = 0$

$$Z_d = Z_K \operatorname{th} \theta l. \tag{4.51}$$

Заменяя θ через коэффициент затухания A и сдвиг фазы B, запишем это выражение в виде

$$Z_d = Z_K \left[\frac{(\operatorname{th} Al)(1+\operatorname{tg}^2 Bl) + j(\operatorname{tg} Bl)(1-\operatorname{th}^2 Al)}{1+\operatorname{th}^2 Al \operatorname{tg}^2 Bl} \right]. \tag{4.52}$$

Предположив, что $\operatorname{tg} Bl \ll 1$ и $\operatorname{th}^2 Al \ll 1$ и заменив Z_K на $\rho V a$, из (4.52) получим

$$Z_d = \rho V a A l + j \rho V a \operatorname{tg} Bl. \tag{4.53}$$

На частотах, близких к резонансной, этому соответствует эквивалентная электрическая цепь, составленная из последовательно включенных сопротивления, емкости и индуктивности, как показано на фиг. 93 (подробнее о выводе эквивалентной электрической схемы преобразователя см. в книге Мэзона [120]).

Учитывая, что добротность электрической системы определяется как отношение $Q_s = M_s \omega / 2R_s$, получаем, что механическая добротность образца, как и ранее, определяется формулой $Q_s = B/2A$ (см. § 1, п. 2).

При измерениях для нейтрализации емкостной нагрузки преобразователя обычно применяется простая мостовая схема, изображенная на фиг. 94. В этом случае ток на выходе моста достигает максимума при резонансной частоте всей системы f_c. Добротность системы Q_c можно найти по изменению тока с часто-

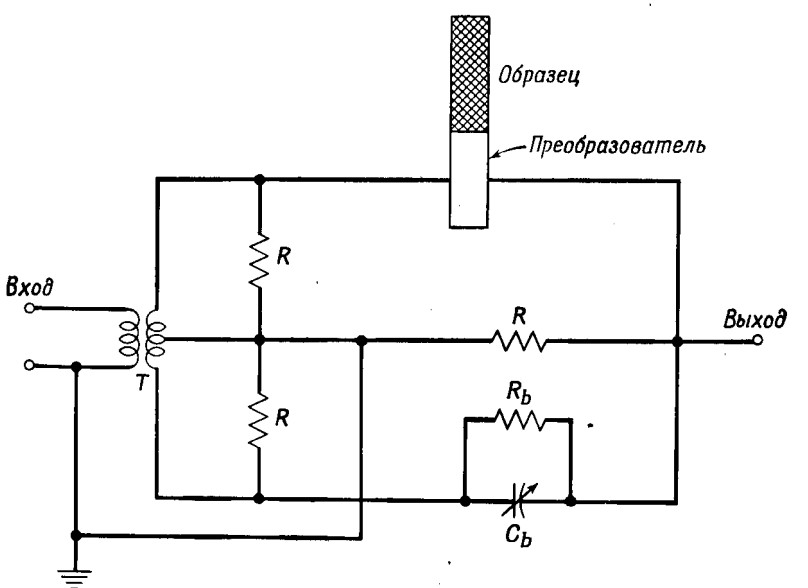
той [см. (4.50)]. Выражения для резонансной частоты самого образца f_s и его добротности Q_s, полученные в результате анализа эквивалентной схемы фиг. 93, имеют вид

$$f_s = f_c + \left(\frac{M_t}{M_s}\right)(f_c - f_t), \tag{4.54}$$

$$\frac{1}{Q_s} = \frac{M_t}{M_s}\left(\frac{1}{Q_c} - \frac{1}{Q_t}\right) + \frac{1}{Q_c}, \tag{4.55}$$

где отношение масс M_t/M_s определяется простым взвешиванием преобразователя и образца.

Для возбуждения продольных колебаний часто используются кварцевые преобразователи X-среза (или $-18°X$-среза). Возбуждение крутильных колебаний с помощью кварцевых преобразователей можно осуществить, как показано на фиг. 95 (см. Мэзон

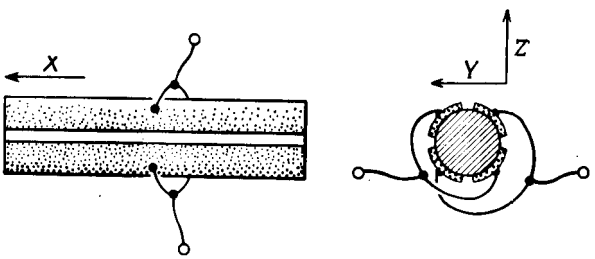


Ф и г. 94. Мостовая схема компенсации входной емкости преобразователя.

[31], стр. 91). Следует отметить, что в случае крутильных колебаний в выражения (4.54) и (4.55) вместо отношения масс должно входить отношение *моментов инерции*.

Как видно из приведенной на фиг. 93 эквивалентной схемы, если известны пьезоэлектрические свойства преобразователя (т. е. известно φ), то можно определить скорость колебаний при резонансе и, следовательно, максимальную деформацию, соот-

ветствующую заданному электрическому напряжению. Значение φ можно найти путем измерения электрического сопротивления при резонансе и его механического эквивалента, определяемого из собственной добротности преобразователя.

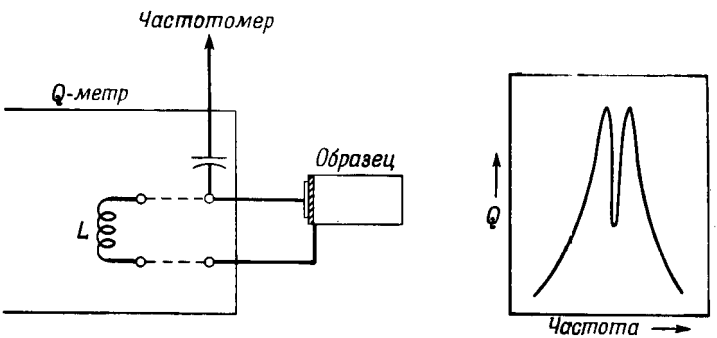


Фиг. 95. Кварцевый преобразователь для возбуждения крутильных колебаний.

Влиянием слоя клея между преобразователем и образцом на низких частотах обычно можно пренебречь, так как напряжения в этом слое малы, если преобразователь и образец колеблются с одинаковой частотой.

Для материалов с очень большими акустическими потерями может применяться метод, описанный Мак-Скимином [121], в котором используются два преобразователя.

Резонансные методы на высоких частотах. При измерениях на частотах порядка мегагерц можно использовать метод, описанный Болефом и Менесом [122]. Количество приборов здесь

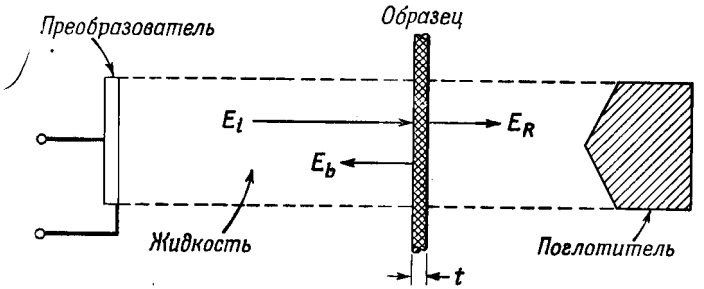


Фиг. 96. Резонансный метод измерений на высоких частотах с использованием Q-метра (по Болефу и Менесу).

сведено до минимума; установка состоит из стандартного Q-метра и частотомера (фиг. 96). Метод основан на том, что при резонансе происходит резкое уменьшение добротности системы, которое

может быть определено с высокой точностью. По форме кривой зависимости Q от частоты возбуждения можно оценить потери в образце. Достоинство этого метода состоит в том, что на высоких частотах можно работать с весьма малыми образцами (~ 1 *мм*).

На высоких частотах может применяться также электростатический метод возбуждения [123]. При этом изменение емкости



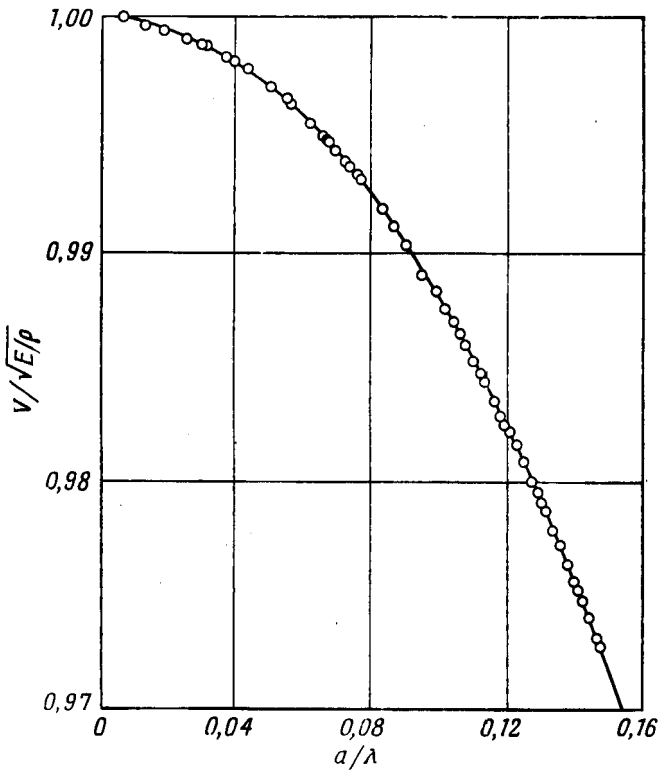
Фиг. 97. Высокочастотный иммерсионный метод, основанный на отражении звуковых волн.

между поверхностью образца и неподвижным электродом создает частотную модуляцию колебаний специального генератора, основная частота которого много выше частоты рабочего сигнала. Эта методика настолько увеличила чувствительность, что оказалось возможным проводить измерения на частотах выше 5 *Мгц*.

В связи с резонансными измерениями на высоких частотах необходимо упомянуть также иммерсионный метод. Амплитуда волны, отраженной от тонкой мало поглощающей пластинки, E_b (фиг. 97) сравнивается с амплитудой падающей волны E_i; при этом частота изменяется вблизи резонансной частоты пластинки f_r. Поскольку волновое сопротивление жидкости по обе стороны от пластинки одинаково, при резонансе амплитуда отраженной волны E_b имеет резко выраженный минимум. Для материалов, обладающих высокой добротностью, скорость звука можно найти с очень высокой точностью. Этот метод применялся также для измерений при очень высоких давлениях, как отмечается в п. 4 настоящего параграфа.

Дисперсия. Выше в этой главе при рассмотрении продольных колебаний неявно предполагалось, что диаметр стержня мал по сравнению с длиной волны. Можно показать, однако, что по мере увеличения отношения радиуса к длине волны a/λ скорость распространения (и, следовательно, резонансная частота для данной моды колебаний) уменьшается. Релей предложил поправочную формулу, учитывающую этот эффект. Строгий

математический анализ этого вопроса дал Похгаммер (см. [124]). Эта задача рассматривалась также в работах ряда авторов, в том числе Хадсона [125], Банкрофта [126], Морза [127], Спиннера



Ф и г. 98. Зависимость фазовой скорости звука V от отношения радиуса к длине волны для алюминиевого стержня (по Земанеку и Руднику).

и др. [128], Миндлина и Фокса [129], Земанека и Рудника [130].

Из приведенного на фиг. 98 графика видно, что при значениях параметра a/λ, превосходящих 0,05, отклонение действительных значений фазовой скорости от результатов вычисления по упрощенной формуле (4.9) превышает 0,2%. Это необходимо иметь в виду при определении скорости с большой точностью.

Резонансная частота основной гармоники крутильных колебаний цилиндрического стержня не зависит от его диаметра. Однако частоты изгибных колебаний существенно зависят от диаметра стержня и от его длины. Вследствие сложности граничных условий при изгибных колебаниях уравнение для резонансных

частот также имеет весьма сложный вид. Эту задачу рассмотрели Мэзон [131] и Пикет [132]. Основываясь на результатах, полученных Пикетом, Теффт [133] провел численные расчеты, с помощью которых возможно точное определение модуля Юнга, если известны плотность и размеры цилиндрического образца и его резонансные частоты.

Зависимость скорости звука от частоты (дисперсия) наблюдается также на высоких частотах при $a/\lambda \gg 1$. Этот вопрос рассмотрен в § 3 в связи с измерениями в жидкости. Некоторые экспериментальные исследования, выполненные с твердыми телами, описаны в работах Зарембовича [134], Мак-Скимина [51] и Брэдфилда и Гудвина [135]. В целом при средней величине затухания влияние дисперсии легче свести к минимуму на высоких частотах, чем на низких.

2. Импульсный метод

Общие замечания. При измерении импульсным методом скорости и затухания на низких ультразвуковых частотах необходимо иметь весьма длинные образцы в виде проволок или полос. Конечно, это ограничивает применимость указанного метода; однако при исследовании некоторых поликристаллических или стеклообразных материалов он имеет ряд преимуществ. Например, при малом коэффициенте затухания применение длинных образцов позволяет почти полностью исключить влияние способа соединения преобразователя с образцом, которое при другой форме образцов может обусловливать потери, превосходящие по величине потери в образце. Кроме того, измерения этим методом можно проводить для образцов со столь большим затуханием, что затруднительно даже определение резонанса.

Вопросы, связанные с распространением импульсов в стержнях и полосах, интенсивно изучали Мей [136], Мейтцлер [137] и Микер [138] при исследовании линий задержки. Более подробно эти работы описаны в гл. 2 и 6. При этом серьёзную роль могут играть дисперсионные эффекты, особенно в случае продольных волн. В работе Филсона [139] описаны проведенные с помощью этого метода измерения при низких температурах.

Импульсный метод наиболее часто применяется на частотах выше 5—10 *Мгц*. При этом могут быть использованы образцы малых размеров, что имеет определенные преимущества, особенно при измерениях в кристаллических материалах.

Дифракционными потерями не всегда можно пренебречь. Это особенно относится к измерениям затухания звука в материале с малым коэффициентом поглощения. В целом результаты исследований дифракции в жидкости с достаточной степенью точности

можно применить к описанию дифракционных явлений в твердых телах. Этот вопрос рассмотрен в § 3 настоящей главы в связи с измерениями как поглощения, так и скорости ультразвуковых волн.

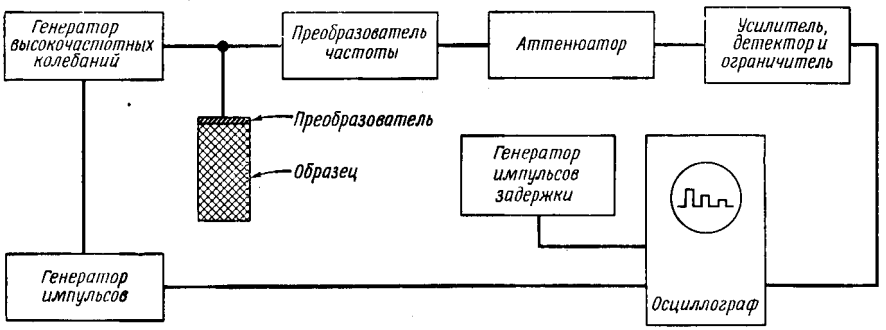
В некоторых случаях можно исключить дифракционные эффекты, используя волноводное распространение звука в образцах цилиндрической формы. Однако необходимо учитывать появление других типов волн на цилиндрической поверхности образца [140—143]; для монокристаллов важное значение имеет вопрос о направлении максимального потока энергии (см. § 7).

Высокочастотные импульсные методы. Обычный импульсный метод измерений в жидкости, описанный в работе Пеллама и Галта [41], оказался применимым и для измерений в твердом теле. В самом простейшем случае измерения ведутся с помощью колеблющейся по толщине кварцевой пластинки, которая приклеивается к одному из концов исследуемого образца. Могут использоваться также два отдельных преобразователя в качестве излучателя и приемника. Для генерации продольных волн используется кварц X-среза, а для генерации сдвиговых волн — кварц Y-среза или AC-среза. Используя гармоники кварцевой пластинки с основной частотой 20 *Мгц*, можно работать на частотах до 1000 *Мгц*. Хотя конструкция такого типа сама по себе проста, необходимо обращать особое внимание на точность изготовления рабочих поверхностей образца, особенно при частотах выше 100 *Мгц*. Рабочие поверхности должны быть плоскими с точностью до $^1/_4$ длины световой волны, а отклонение от параллельности плоскостей должно составлять не более 10″.

Весьма важную роль играет также качество склейки преобразователя с образцом. Среди многочисленных сортов клея, которые можно использовать для этих целей, наилучшим является один из типов полистирола (например, марки DC-276-V2 или V9 фирмы «Дау»). Этот сорт клея дает удовлетворительные результаты как для продольных, так и для сдвиговых волн. Если в процессе измерений происходят значительные изменения температуры, то для склейки следует применять другие материалы, сведения о которых приведены в п. 4 настоящего параграфа.

В некоторых случаях необходимо учитывать потери энергии в слое клея. Эти потери можно сильно уменьшить при работе на резонансной частоте преобразователя. Сравнительно большие потери (величина которых зависит, конечно, от используемого сорта клея) могут возникать при частоте колебаний несколько выше резонансной, что обусловлено большими напряжениями в слое клея. Другим источником потерь являются электрические потери, которые также значительно меньше при резонансе, чем при частоте немного выше резонансной.

Приближенную оценку полных потерь на отражение можно получить, используя симметричную нагрузку (включая электрическую цепь). Применение одного преобразователя, работающего как в качестве приемника, так и в качестве излучателя, дает возможность непосредственно измерить потери на отражение. Этот



Ф и г. 99. Блок-схема высокочастотной импульсной установки.

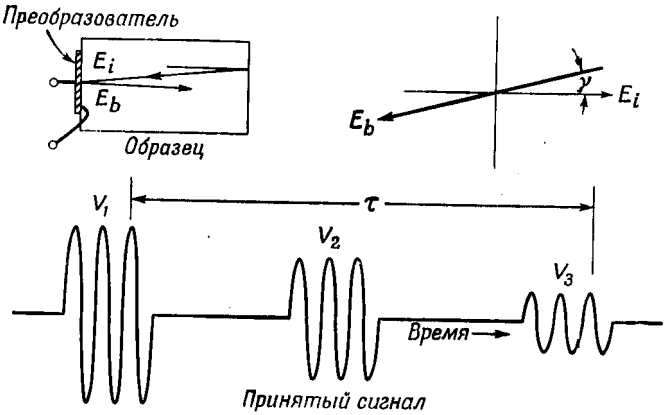
метод применим также при измерениях скорости для определения дополнительного времени задержки, обусловленного связью с преобразователем.

Визуализация приходящих сигналов с помощью широкополосных систем позволяет определить параметры акустической связи преобразователя с образцом. Эрос и Рейтц [143] провели сравнение нескольких последовательных импульсов, появляющихся в течение первых нескольких периодов, и измерили время задержки между соответствующими максимумами соседних импульсов. Однако на очень высоких частотах прямая визуализация приходящих импульсов невозможна. Определение момента времени, когда происходит отражение от границы между преобразователем и образцом, связано с серьезными трудностями даже при применении систем с высоким разрешением.

Блок-схема типичной высокочастотной импульсной установки приведена на фиг. 99. В установке применяется один преобразователь, работающий поочередно в режиме излучения и приема; время установления напряжения при подаче сигнала на вход приемника составляет 0,5 *мксек*. В схеме используются стандартные приборы, как, например, генератор импульсов с калиброванной задержкой. Подробное описание схемы дано в работах Лазаруса [144], Андреа и др. [55], Форгакса [145], Чика и др. [146] и Скучика [147].

Метод наложения импульсов. Рассмотрим устройство, состоящее из кристаллического преобразователя, приклеенного к образцу,

аналогичное описанному выше. Если длительность импульса достаточна для установления стационарных колебаний в пластинке преобразователя и слое клея, то время τ между *любым* максимумом синусоиды одного из отраженных импульсов и соответствующим максимумом любого другого импульса (фиг. 100)



Ф и г. 100. Отраженные импульсы и сдвиг фазы при отражении для преобразователя, приклеенного к образцу.

зависит от времени задержки в самом образце δ при распространении волны от излучателя до отражающей поверхности и обратно, от числа таких циклов отражения p, от сдвига фазы при отражении γ (выраженного в градусах при частоте f) и от полного числа периодов n. Эта зависимость может быть записана в следующем виде:

$$\tau = p\delta - \frac{p\gamma}{360f} + \frac{n}{f} . \qquad (4.56)$$

Поскольку p известно, а τ и f можно измерить, чтобы найти значение δ, а следовательно, скорость звука в образце, остается определить лишь n и γ. Это легко сделать, если учесть, что τ является функцией частоты f. Так, например, результаты измерений на резонансной частоте преобразователя f_H и на частоте f_L, ниже резонансной на 5—10%, связаны следующим соотношением, полученным из уравнения (4.56):

$$\Delta\tau = \frac{1}{f_L}\left(n - \frac{p\gamma_L}{360}\right) - \frac{1}{f_H}\left(n - \frac{p\gamma_H}{360}\right) . \qquad (4.57)$$

Правую часть (4.57) можно рассчитать для различной толщины слоя клея, и, следовательно, при $n = 0$ можно получить истинное значение τ. В этом случае время задержки определяется

выражением

$$\delta = \frac{\tau}{p} + \frac{\gamma}{360f} . \qquad (4.58)$$

Подробности методики, такие, как точное измерение τ методом наложения импульсов, а также характер изменения $\Delta\tau$ и γ при изменении входного импеданса образца в широких пределах описаны в работах автора [148, 149].

Этот метод обладает следующими преимуществами:

а) Учитывается влияние акустической связи с преобразователем.

б) Измерения проводятся на видеоимпульсах, поскольку не обязательна непосредственная визуализация приходящих радиоимпульсов. Это исключает необходимость применения широкополосных систем.

в) Метод наложения импульсов обеспечивает высокую точность; он позволяет определить время задержки с точностью порядка 10^{-4}.

г) Как показано в п. 4 настоящего параграфа, этот метод особенно удобен для проведения измерений при изменяющихся внешних условиях.

Применение методов сравнения фаз при измерении скорости. Высокую точность, присущую методу сравнения фаз, можно использовать с большим успехом при измерении скорости распространения упругих волн, особенно в сочетании с применением импульсных методов. Это сочетание сохраняет преимущество импульсных методов, состоящее в возможности непосредственного наблюдения отдельных отраженных импульсов, но позволяет определять скорость распространения путем измерения частоты (а не времени задержки).

Рассмотрим образец, в котором происходит многократное отражение волн, в результате чего возникает серия отраженных импульсов. Временно исключая из рассмотрения преобразователь и не учитывая влияния его входного сопротивления, для напряжений двух электрических сигналов, создаваемых двумя последовательными отраженными импульсами, мы можем написать соотношение

$$E_t' = E_t A_r e^{j\gamma} e^{-2t\omega/V}, \qquad (4.59)$$

где E_t — амплитуда первого сигнала, E_t' — амплитуда второго сигнала, V — скорость распространения, ω — угловая частота колебаний, t — толщина образца, $A_r e^{j\gamma}$ — комплексный коэффициент отражения волны от задней плоскости образца.

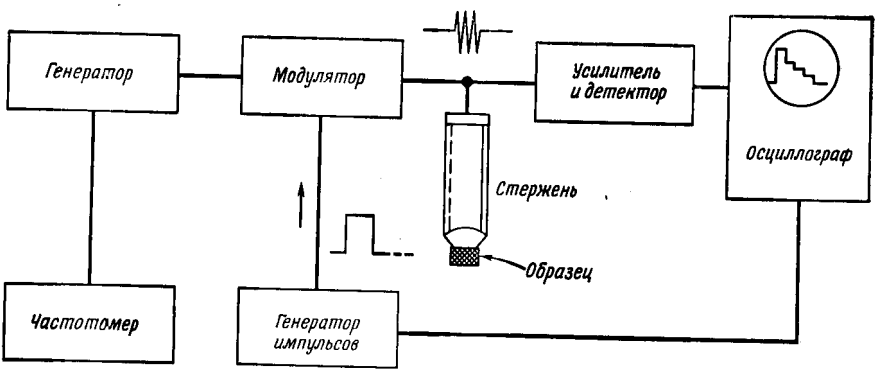
Путем изменения частоты можно добиться, чтобы отраженные сигналы точно совпадали по фазе; при этом

$$\gamma - \frac{2t\omega_n}{V} = -2\pi n, \tag{4.60}$$

где n — целое число. Отсюда имеем

$$V = \frac{2tf_n}{n + \gamma/2\pi}. \tag{4.61}$$

Величина n, входящая в это выражение, должна быть точно известна даже в случае приближенных измерений; величина γ необходима только для точных расчетов. На фиг. 101 показана

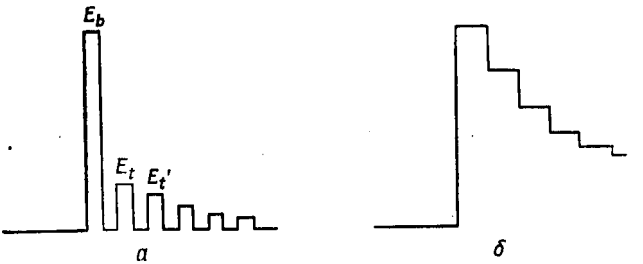


Фиг. 101. Блок-схема измерения скорости звука методом сравнения фаз.

блок-схема установки, позволяющей определить эти две величины; с ее помощью автору удалось достичь хороших результатов [150—151]. Для обеспечения стабильности фазы колебаний посылаемых импульсов вместо импульсного генератора применяется генератор гармонических колебаний в сочетании с импульсным модулятором. Посылаемый импульс вначале проходит через дополнительный буферный стержень, который изготовляется, например, из плавленого кварца, свободного от внутренних напряжений. Образец приклеивается к заднему его торцу; часть энергии проходит в образец и, отражаясь от его поверхностей, образует импульсы на экране осциллографа. Обычно бо́льшая часть энергии отражается от границы между стержнем и образцом. Сравнение амплитуд импульса, отраженного от этой границы, и первого импульса, отраженного в образце, позволяет определить угол γ, входящий в выражение (4.61). Более подробно эти расчеты описаны в работе автора [151].

С увеличением длительности посылаемых импульсов наблюдается интерференция отраженных импульсов, и при некоторой

частоте f_n на экране осциллографа возникает картина, показанная на фиг. 102. При этом все отраженные импульсы приходят в одной фазе. Величину n можно определить, измеряя значения



Фиг. 102. Картина импульсов для схемы, показанной на фиг. 101.
а — разделенные сигналы; *б* — сигналы в фазе.

f_n в как можно более широком диапазоне частот и используя выражение

$$n \approx \frac{f_n}{\Delta f}, \tag{4.62}$$

где Δf — разность между двумя соседними частотами f_n.

Характеризуя этот метод в целом, можно отметить следующее:

а) Метод позволяет оценить влияние связи с преобразователем; поэтому при благоприятных условиях удается измерить скорость с точностью до 10^{-4}.

б) Измерения можно проводить с образцами весьма малых размеров (до 2 *мм*).

в) Применение высоких частот [152] практически исключает ошибки, связанные с влиянием связи с преобразователем и дифракционными эффектами.

г) При использовании буферного стержня не требуется нанесения электродов непосредственно на поверхность образца, как, например, в случае приклеивания преобразователя к образцу.

д) Применение буферного стержня позволяет получить оптимальную ширину полосы частот преобразователя, что приводит к высококачественному воспроизведению импульсов.

Если кварцевый преобразователь приклеивается непосредственно к исследуемому образцу, то можно также оценить величины n и γ, входящие в выражение (4.61). Однако при этом γ значительно изменяется при отклонении частоты от резонансной, что затрудняет однозначное определение n, особенно при больших значениях n и на высоких частотах, где потери в переходном слое оказывают весьма существенное влияние на величину сигнала. Вильямс и Лэмб [153] рассматривают этот вопрос в связи

с методом, в котором два отраженных импульса, разделенные интервалом времени, требующимся на прохождение импульса в образце и отражение от его границ, приходят не в фазе, а в противофазе. В этом случае n будет иметь полуцелые значения. Критические частоты могут быть установлены с весьма высокой точностью.

Если затухание в образце не слишком велико, интерференцию между двумя соседними импульсами можно получить, увеличивая длительность импульса и подбирая соответствующим образом частоту, так чтобы приходящие сигналы были в противофазе. При изменении частоты в достаточно широких пределах можно оценить абсолютную величину скорости, пользуясь следующим простым выражением:

$$V \approx 2t\Delta f, \tag{4.63}$$

где t — толщина образца, а Δf — разность между двумя соседними значениями f_n и f_{n+1}.

3. Гиперзвук

Широкополосный кварцевый преобразователь. За последние несколько лет были разработаны практические методы излучения и приема гиперзвука, т. е. звука с частотами в области СВЧ (выше 500 *Мгц*). Существенное значение имела работа Бёммеля и Дрансфельда [154] [1]), в которой было показано, что возбуждение продольных или сдвиговых волн в кварцевом стержне можно осуществить, помещая конец этого стержня в СВЧ резонатор, как показано на фиг. 103.

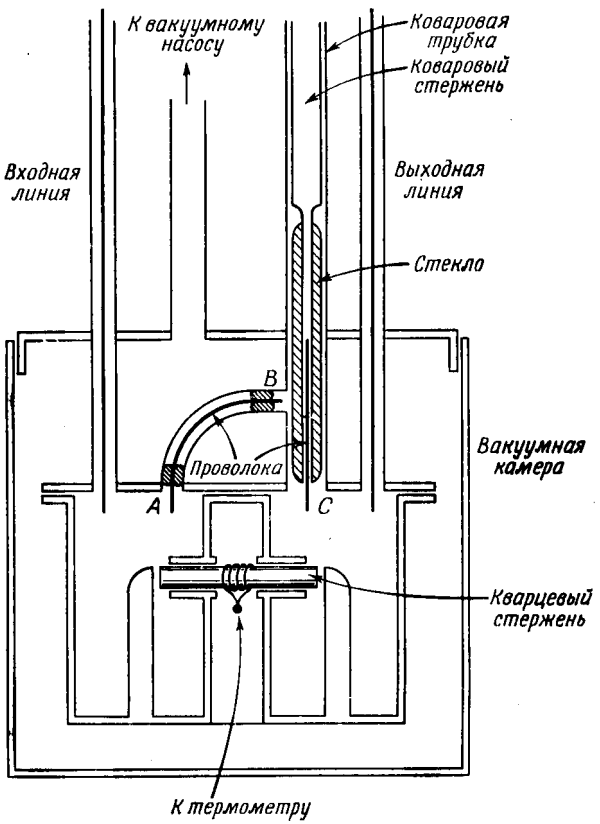
С помощью этого метода возбуждения было измерено затухание гиперзвука в кварце при низкой температуре на частоте 4000 *Мгц* [155]. Используя аналогичную установку, Джекобсен [156] расширил частотный диапазон измерений до 24 *Ггц*. Бёммель и Дрансфельд [157] описали также метод генерации гиперзвуковых волн, основанный на использовании ферромагнитного резонанса в тонкой никелевой пленке (толщиной ~18 000 Å), которая наносилась на поверхность образца, в данном случае кварца. Используя тот же принцип, Спенсер и др. [158] получили преобразователь с весьма высоким к. п. д. из иттриевого граната. Анализ работы кварцевого преобразователя при таком способе возбуждения был дан в работе Джекобсена [159].

Более полное изложение этого вопроса, написанное Бёммелем, будет дано в четвертом томе данной серии книг.

---

[1]) Следует отметить, что приоритет в области генерации и приема гиперзвука принадлежит Баранскому: см. ДАН, **114**, 517 (1957).— *Прим. ред.*

Применение кварцевых преобразователей, работающих на гармониках. Использование кварцевого преобразователя, прикрепленного непосредственно к исследуемому образцу и работающего на высоких гармониках, позволяет расширить частотный диапазон



Ф и г. 103. Метод возбуждения гиперзвука (по Бёммелю и Дрансфельду).

вплоть до 1000 *Мгц*. Этот способ возбуждения по-прежнему является одним из лучших для абсолютных измерений затухания, поскольку потери в переходном слое можно сделать весьма малыми. Само собой разумеется, что поверхности образцов и кварцевых преобразователей (основная частота которых обычно составляет около 30 *Мгц*) должны быть обработаны с высокой точностью; особое внимание должно быть обращено на точную ориентацию поверхностей. Для получения достаточно высокой напряженности электрического поля в кристалле на таких высоких частотах используются специальные электрические схемы.

Как в импульсном, так и в непрерывном режиме может использоваться схема с двумя преобразователями, т. е. с раздельными излучателем и приемником. Болеф и др. [160] разработали аппаратуру для измерений в непрерывном режиме и применили ее к исследованию процессов взаимодействия электронного спина с фононами в твердом теле. При этом удалось измерить весьма малые изменения затухания (в данном случае в зависимости от напряженности магнитного поля).

Методы, использующие тепловые (дебаевские) волны. Для определения скорости распространения упругих волн и модуля упругости использовались следующие два метода, в основе которых лежит взаимодействие электромагнитного излучения с тепловыми волнами. Первый метод основан на анализе тонкой структуры спектра Бриллюэна [161]. Скорость звука определяется по разности частот между основной линией (обычно используется одна из линий ртути) и двумя боковыми сдвинутыми компонентами. Этот метод был использован в работах Чандроскарана [162], Кришнана [163] и Флубахера и др. [164].

Второй метод, основанный на измерении термического рассеяния рентгеновских лучей, описан Принцем и Вустером [165].

Хотя точность этих методов невелика, частота ($\sim 10^{12}$ *гц*) примерно на два порядка выше той, которую можно получить другими методами.

4. Методы измерений при изменяющихся внешних условиях

Измерения при изменении температуры. Очевидно, почти любой из описанных выше методов может быть приспособлен для проведения измерений при изменении температуры образца. Рассмотрим сначала резонансный метод измерений на низких частотах.

В работе Бордони [166], например, электростатический метод возбуждения успешно использовался как на высоких, так и на низких частотах.

Из магнитострикционных методов следует отметить описанный Брэдфилдом [115] метод возбуждения с помощью никелевой проволоки. При этом преобразователь можно разместить вне нагревателей печи, что позволяет проводить измерения при температурах выше 1000° С.

Широко используется пьезоэлектрический метод возбуждения (см. п. 1 настоящего параграфа). В этом случае большое значение имеет качество переходного слоя между преобразователем и образцом, который должен выдерживать значительные изменения температуры. При низких температурах для этой цели используются

такие материалы, как тиокол, тогда как при высоких температурах удовлетворительные результаты дает смесь углекислого кальция с жидким стеклом.

Поскольку температура фазового перехода для кварца составляет 573° С, измерения при более высоких температурах невозможно осуществить, если преобразователь находится внутри нагревательной печи. При таких температурах используются промежуточные волноводы из плавленого кварца, соединяющие образец с кварцевым преобразователем, который находится вне нагревательной печи. Указанная конструкция, а также измерения при температурах до 804° С описаны в работе Хантера и Зигеля [167]. Для уменьшения ошибки измерений массу образца следует выбирать возможно большой по сравнению с суммой масс преобразователя и волновода.

В соответствии с высказанным в работе [169] предложением, Хабер и др. [168] использовали два кварцевых преобразователя — один в качестве излучателя и другой в качестве приемника. В работе [168] подробно описана экспериментальная установка, а также применение метода затухания резонансных колебаний для измерения потерь.

Если имеются образцы в виде стержней достаточно большой длины, то можно применить балансную систему, в которой используются два стержня, как описано в работе Маркса и Сивертсена [170]. Оба стержня крепятся одинаково и различаются лишь тем, что имеют разную длину; при этом определяется эффект, соответствующий разности длин образцов. Этот метод успешно применяется для таких материалов, как стекло.

Применяется еще один метод, особенно пригодный для измерений в изотропных и поликристаллических материалах. В этом методе используются изгибные колебания образца, возбуждаемые с помощью преобразователя, расположенного вне криостата или нагревательной печи и соединенного с образцом с помощью тонкой проволоки [171, 172]. В опытах Спиннера [173] связь преобразователя с образцом осуществлялась с помощью столба воздуха; использовались как продольные, так и изгибные колебания.

Следует отметить также работу Суссе [174], в которой дан обзор различных методов измерения и подробно рассматривается задача проведения измерений в широком диапазоне изменений температуры и давления.

При более высоких частотах целесообразно применять импульсный метод с кварцевым преобразователем, приклеенным непосредственно к образцу, тем более что он позволяет одновременно измерять скорость и затухание звука. Этот метод одинаково пригоден для измерений как на продольных, так и на сдвиговых волнах. Здесь также важную роль играет хороший акустический

контакт между преобразователем и образцом. При очень низких температурах пользуются такими материалами, как вязкие кремнийорганические жидкости, безводная смазка для стеклянных кранов, и применяют жидкости с низкой точкой замерзания (например, спирт, 4-метил-1-пентен). При более высоких температурах следует применять кремнийорганическое масло или смесь углекислого кальция с жидким стеклом.

Наличие акустического переходного слоя может вызывать заметную ошибку при определении скорости звука, поскольку механические свойства материалов, применяемых для получения акустического контакта (например, жидкостей с высокой вязкостью), могут сильно изменяться при изменении температуры в интересующих нас пределах. Необходимо отметить, однако, что если частоту колебаний всегда поддерживать близкой к резонансной частоте преобразователя, то при толщине акустического переходного слоя, малой по сравнению с $\lambda/4$, фазовый угол γ в уравнении (4.56) будет практически постоянным. Таким образом, импеданс переходного слоя, за которым находится резонансный преобразователь, рассматриваемый как нагрузка, имеет чисто реактивный характер, обусловленный массой переходного слоя, а эта масса не изменяется при изменении температуры или давления.

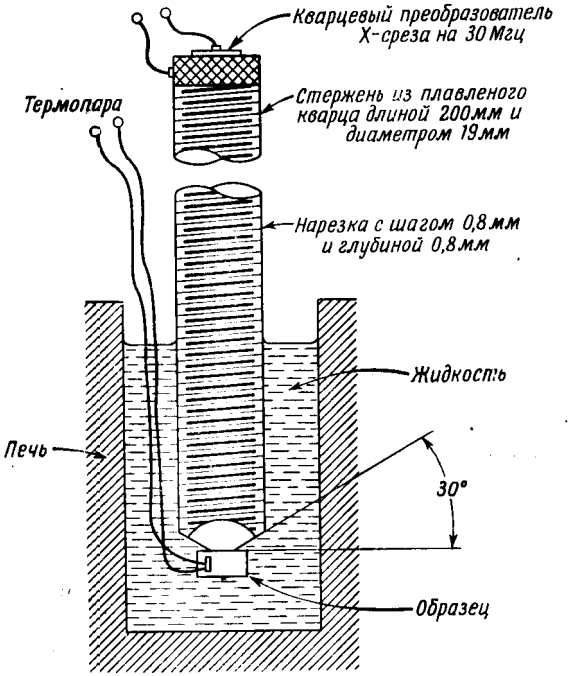
Постоянство фазового угла γ используется в методе наложения импульсов, описанном в п. 2 настоящего параграфа. Согласно уравнению (4.56), отношение скорости при данной температуре (или давлении) к скорости при некоторых начальных условиях определяется выражением

$$\frac{V}{V_0} = \frac{l\tau_0}{l_0\tau}\left[1 + \frac{p\gamma_0}{360 f_0\tau_0} - \frac{p\gamma}{360 f\tau}\right]. \qquad (4.64)$$

При $\gamma = \gamma_0$ выражение в квадратных скобках можно положить равным единице с точностью до 10^{-5}. Отношение длин определяется по данным о тепловом расширении. Подробнее этот метод изложен в работе Мак-Скимина и Андрича [149].

При измерениях на образцах малых размеров, в частности при измерениях с продольными волнами при повышенных температурах, весьма удачным оказалось устройство с буферным стержнем, показанное на фиг. 104. При заполнении его кремнийорганическим маслом измерения могут проводиться при температуре по крайней мере до 350° С. Для измерений при более низких температурах можно применять спирт или пентан. На фиг. 105 приведены данные, полученные Мак-Скимином и Фиппером [175] с помощью этого метода для образца урана малого размера (~3 *мм*). При этом были внесены поправки на акустическую связь (см. также п. 2 настоящего параграфа).

Для образцов в форме стержня можно применить метод, основанный на определении разности акустических длин пути, аналогичный описанному Фредериком [176] или Беллом [177]. Если длина образца достаточно велика, то преобразователь располагается вне нагревательной печи и измерения проводятся только для некоторой части всей длины стержня, причем определяется

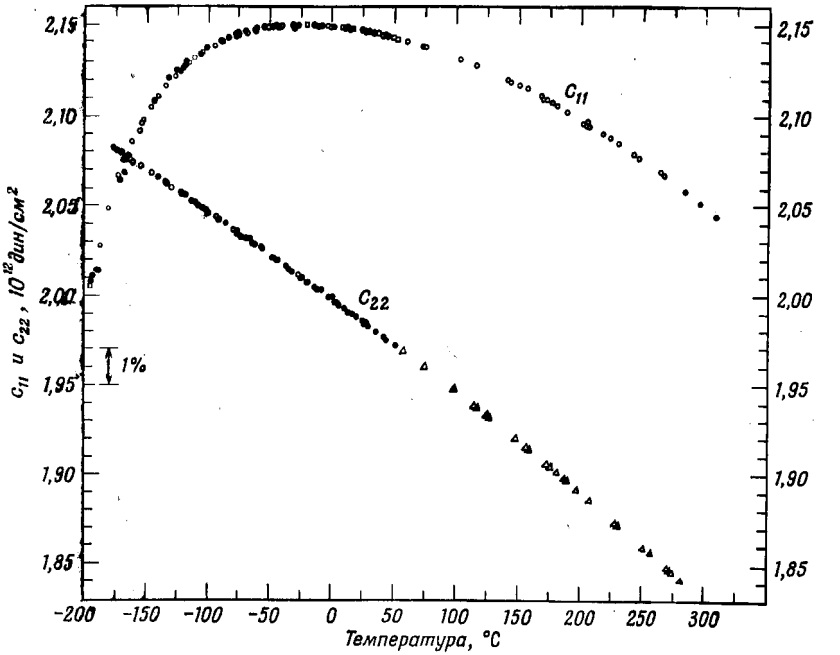


Фиг. 104. Устройство для исследований распространения продольных волн при высоких температурах.

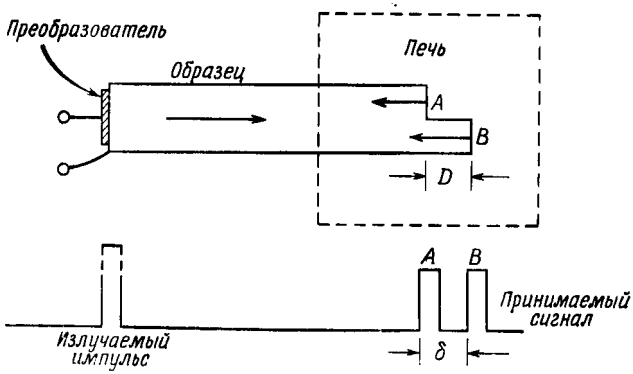
время задержки между импульсом, отраженным от разреза или уступа на стержне и от его конца. Схема одной из таких установок показана на фиг. 106.

При измерении очень малых изменений скорости высокую чувствительность дает метод автоциркуляции импульса, описанный в § 3, п. 5, в применении к измерениям в жидкости, так как частоту повторения импульсов можно измерить частотомером с высокой точностью. Форгакс [178] описал прибор, позволяющий обнаружить изменения порядка 10^{-7}.

Если полный сдвиг фазы при прохождении волн через образец достаточно велик, например равен 10^6 градусов, то такую же



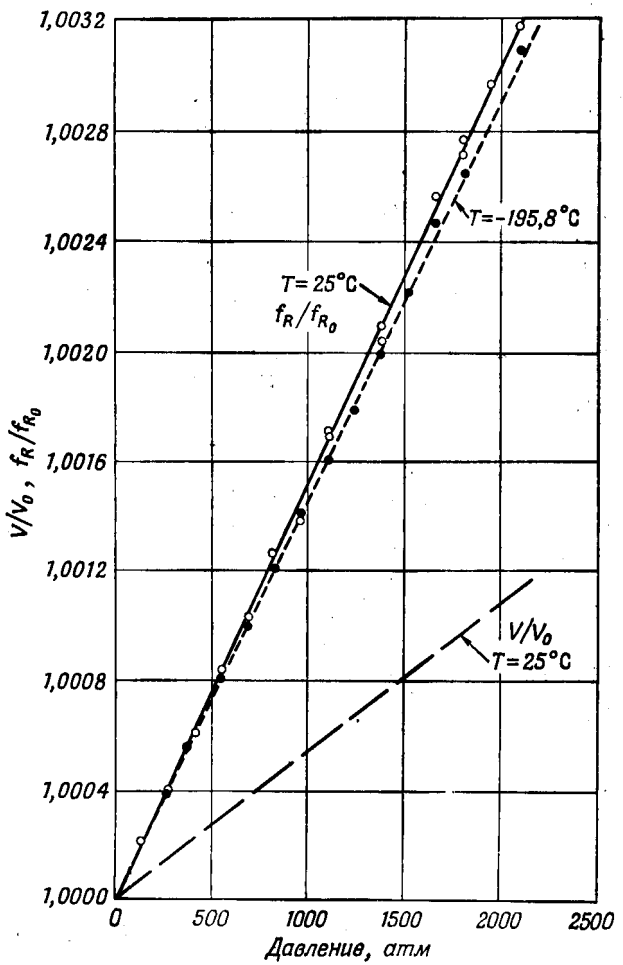
Ф и г. 105. Зависимость упругих модулей урана c_{11} и c_{22} от температуры, измеренная методом сравнения фаз на установке с буферным стержнем (по Мак-Скимину и Фишеру).



Ф и г. 106. Метод разности акустических длин пути.

чувствительность можно получить с помощью методов сравнения фаз (см. Вильямс и Лэмб [153] или Мак-Скимин [179]). Если имеются два почти одинаковых образца, то можно также воспользоваться методом, предложенным Эспинола и Уотерменом [180]. Другие специальные методы, часть из которых основана на изменении типа волн, описаны в работе Мак-Скимина [181].

Измерения при изменении давления. Хотя резонансные методы применялись для определения изменений скорости с изменением



Фиг. 107. Данные, полученные при распространении продольных волн вдоль оси x в кварце (время задержки в образце $1/f_R$).

давления (см., например, [182]), однако большое затухание, обусловленное окружающей средой при высоком давлении, делает применение их менее эффективным по сравнению с применением высокочастотных импульсных методов. В особенности это справедливо для продольных колебаний. Использовалась как простая установка с высокочастотным кварцевым преобразователем, приклеенным непосредственно к образцу, так и установка с буферным стержнем (см. п. 2 настоящего параграфа). Последний метод исключает трудность, связанную с устройством вводов электрических проводов в камеру высокого давления, поскольку акустический сигнал можно передать через втулку камеры. Однако следует оценить ошибки, вызываемые изменением акустической связи за счет изменения свойств контакта с образцом. Применение этого метода описано в работе Брэдфилда [183]. Лазарус [144], Юз и Маретт [184] и ряд других авторов использовали метод непосредственного прикрепления кварцевого преобразователя к образцу, определяя изменение скорости по изменению времени задержки. Метод сравнения сигналов по фазе был применен Мак-Скимином [185]. Метод Эроса и Рейтца [143], которым воспользовались Даниэлс и Смит [186], также дал хорошие результаты.

Для измерений на продольных волнах можно использовать очень тонкие образцы, погруженные в жидкость. Применяется метод измерения амплитуды отраженного сигнала, описанный выше и изображенный на фиг. 97. Аналогичный метод был использован в работе Аренса и Катца [187], но вместо жидкости в качестве промежуточной среды для создания высокого давления использовались блоки из карбида вольфрама. Таким способом были проведены измерения на поликристаллических образцах при давлении до 36 000 *атм*.

Последние исследования [149] показали, что метод наложения импульсов может дать весьма высокую точность при изменении давления по тем же причинам, которые упомянуты в связи с рассмотрением изменений температуры. На фиг. 107 приведены типичные результаты, полученные с помощью этого метода. Вероятная ошибка для отношения времени задержки, измеренного при наличии давления, к исходному значению меньше 0,02%.

§ 7. ИЗМЕРЕНИЕ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ КРИСТАЛЛОВ

1. Теория упругости и резонансный метод

Зависимость шести компонент напряжения от шести компонент деформации в самом общем виде может быть представлена

шестью уравнениями

$$T_i = \sum_{j=1}^{6} c_{ij} S_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6), \tag{4.65}$$

или в матричной форме

$$T = cS. \tag{4.66}$$

В этих уравнениях $c_{ij} = c_{ji}$; таким образом, существует не более чем 21 независимая упругая постоянная. Разрешая уравнение (4.66) относительно деформации, получаем

$$c^{-1}T = S = sT. \tag{4.67}$$

Для измерений резонансным методом на низких частотах образцы вырезаются в виде стержней, диаметр (или поперечные размеры) которых мал по сравнению с длиной. Измерения проводятся на продольных колебаниях, как описано в § 6, п. 1. Ось образца обычно ориентируют в направлении одной из кристаллографических осей. Резонансная частота определяется модулем Юнга ($1/s_{ii}$), соответствующим данной оси. Проведя достаточное количество измерений, можно определить все независимые модули. Как показал Кэди [188], модуль Юнга для произвольного направления (для образца, ориентированного под любым углом к кристаллографическим осям) можно выразить через компоненты матрицы s (т. е. через модули для кристаллографических осей). Для крутильных волн зависимость резонансной частоты от модулей упругости имеет весьма сложный вид, за исключением некоторых простейших случаев (см. [188], стр. 61 и 113). Поэтому обычно предпочитают применять высокочастотные импульсные методы, которые, кроме того, имеют то преимущество, что позволяют проводить измерения на образцах значительно меньших размеров. Рассмотрим с этой точки зрения распространение упругих волн.

2. Распространение плоских волн в кристаллах

Можно показать, что в общем случае для любого заданного направления возможно распространение трех плоских волн. При этом направление распространения волны перпендикулярно к поверхностям равной фазы. Если известны плотность среды ρ и модули упругости, то фазовую скорость V этих волн можно найти из уравнения (см., например, [188])

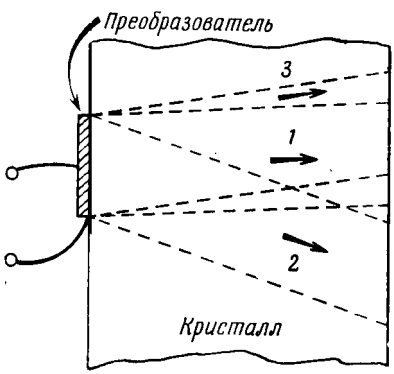
$$\begin{vmatrix} (\lambda_{11} - \rho V^2) & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & (\lambda_{22} - \rho V^2) & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & (\lambda_{33} - \rho V^2) \end{vmatrix} = 0, \tag{4.68}$$

где

$$\lambda_{11} = l^2c_{11} + m^2c_{66} + n^2c_{55} + 2mnc_{56} + 2nlc_{15} + 2lmc_{16},$$
$$\lambda_{12} = l^2c_{16} + m^2c_{26} + n^2c_{45} + mn\,(c_{46} + c_{25}) + nl\,(c_{14} + c_{56}) + lm\,(c_{12} + c_{66}),$$
$$\lambda_{13} = l^2c_{15} + m^2c_{46} + n^2c_{35} + mn\,(c_{45} + c_{36}) + nl\,(c_{13} + c_{55}) + lm\,(c_{14} + c_{56}), \quad (4.69)$$
$$\lambda_{22} = l^2c_{66} + m^2c_{22} + n^2c_{44} + 2mnc_{24} + 2nlc_{46} + 2lmc_{26},$$
$$\lambda_{23} = l^2c_{56} + m^2c_{24} + n^2c_{34} + mn\,(c_{44} + c_{23}) + nl\,(c_{36} + c_{45}) + lm\,(c_{25} + c_{46}),$$
$$\lambda_{33} = l^2c_{55} + m^2c_{44} + n^2c_{33} + 2mnc_{34} + 2nlc_{35} + 2lmc_{45};$$

здесь l, m, n — направляющие косинусы для направления, в котором распространяется волна.

Можно показать, что движение частиц для этих трех волн происходит в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, хотя в общем случае эти плоскости не обязательно должны быть строго параллельны или перпендикулярны направлению распространения. Более того, направление распространения волны данного типа, излучаемой преобразователем, может составлять значительный угол с этим направлением, как показано на фиг. 108; например, при распространении волн в кристалле кварца по оси Y этот угол составляет приблизительно 25°, а угол между квазипродольной и квазисдвиговыми волнами равен 50°. Можно использовать этот факт, поместив преобразователь на поверхности образца так, чтобы волна другого типа рассеивалась вследствие отражения от боковой поверхности. При этом можно проводить измерения, несмотря на то, что преобразователь излучает одновременно волны двух типов.



Фиг. 108. Плоские волны в кристалле.

Даже для тех направлений в кристалле, для которых скорости двух сдвиговых волн одинаковы (как, например, при распространении вдоль тригональной оси кварца), эти волны различаются по направлению максимума потока энергии (т. е. по направлению звукового пучка) и по плоскости поляризации колебаний. Детальное рассмотрение вопросов распространения плоских волн в кристаллах дано в работах Масгрева [189], Прайса и Хантингтона [190], Уотермена [191], Фарнелла [192] и Маркхема [193].

3. Расчет модулей упругости по измеренной скорости звуковых волн

Хотя модули упругости можно определить в результате измерения скорости распространения для ряда произвольных направлений, как это описано в работах Аренберга [194], а также Нейборса и Смита [195], обычно полезно выбрать в качестве этих направлений кристаллографические оси, так как в этом случае математические соотношения упрощаются. Однако при этом требуется тщательная ориентация поверхностей образца, обычно с точностью до доли градуса, а соответствующие грани должны быть параллельны с точностью до 10″.

Поясним метод определения модулей упругости на примере кристалла, принадлежащего к ромбической системе, для которого модули c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{22}, c_{23}, c_{33}, c_{44}, c_{55} и c_{66} конечны. Полагая далее, что некоторые из этих модулей одинаковы, получаем результаты, соответствующие системам с более высокой симметрией — тетрагональной, гексагональной и кубической.

Из соотношений Кристофеля (4.69) следует, что при распространении вдоль осей X, Y или Z $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 0$, а каждый из остальных λ_{mm} равен одному модулю упругости (всего 9 соотношений). В этом случае уравнение (4.68) легко решить, а модули сдвига выражаются в виде трех перекрестных членов. Модули c_{12}, c_{13} и c_{23} можно найти путем рассмотрения косых срезов, для которых направление распространения перпендикулярно к одной из координатных осей. Полученные результаты приведены в табл. 22.

Следует отметить, что существует неопределенность в выборе знаков перед модулями c_{12}, c_{13} и c_{23}, если знак корня неизвестен (см. табл. 22). Этот вопрос рассмотрен рядом авторов; в некоторых случаях ограничения, накладываемые на значения модулей в связи с требованием устойчивости, приводят к однозначному ответу [196]. Другой способ состоит в том, что для каждого из двух значений c_{ij} рассчитывается движение частиц и результаты сопоставляются с известным характером волнового движения. Этот способ описан Фишером и Мак-Скимином [197], которые показали, что необходимо брать положительное значение корня.

В случае тригональной системы (шесть модулей) c_{11}, c_{14}, c_{33}, c_{44} и $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$ могут быть найдены путем измерения скорости звука вдоль осей X, Y, Z. Необходимые соотношения для определения c_{13} и знака c_{14} получаются из анализа косого среза, для которого волны распространяются по оси Y', повернутой вокруг оси X на угол 45° (см. также [198—200]).

Изучая распространение звуковых волн высокой частоты, в принципе можно определить параметры кристалла любого типа

Таблица 22

Соотношение между скоростью звука и модулями упругости для кристаллов ромбической системы

Мода колебаний [1]	Направление движения частиц	Формула для модуля упругости [2]
	Распространение вдоль оси X	
L	X	$c_{11}=\rho V^2$
S	Y	$c_{66}=\rho V^2$
S	Z	$c_{55}=\rho V^2$
	Распространение вдоль оси Y	
L	Y	$c_{22}=\rho V^2$
S	X	$c_{66}=\rho V^2$
S	Z	$c_{44}=\rho V^2$
	Распространение вдоль оси Z	
L	Z	$c_{33}=\rho V^2$
S	X	$c_{55}=\rho V^2$
S	Y	$c_{44}=\rho V^2$
	Распространение вдоль оси X' при повороте вокруг оси Z	
QL	$\perp Z$	$c_{12}=[(c^2c_{11}+s^2c_{66}-\rho V^2)(c^2c_{66}+s^2c_{22}-\rho V^2)/c^2s^2]^{1/2}-c_{66}$
QS	$\perp Z$	
S	Z	$\rho V^2=c^2c_{55}+s^2c_{44}$
	Распространение вдоль оси Y' при повороте вокруг оси X	
QL	$\perp X$	$c_{23}=[(c^2c_{22}+s^2c_{44}-\rho V^2)(c^2c_{44}+s^2c_{33}-\rho V^2)/c^2s^2]^{1/2}-c_{44}$
QS	$\perp X$	
S	X	$\rho V^2=c^2c_{66}+s^2c_{55}$
	Распространение вдоль оси Z' при повороте вокруг оси Y	
QL	$\perp Y$	$c_{13}=[(s^2c_{11}+c^2c_{55}-\rho V^2)(s^2c_{55}+c^2c_{33}-\rho V^2)/c^2s^2]^{1/2}-c_{55}$
QS	$\perp Y$	
S	Y	$\rho V^2=s^2c_{66}+c^2c_{44}$

1) L — продольная, S — сдвиговая, QL — квазипродольная, QS — квазисдвиговая.

2) s — синус угла поворота, c — косинус угла поворота, ρ — плотность, V — скорость распространения волны данного типа.

симметрии, однако эта задача может оказаться весьма сложной. Александров [201] описал метод определения модулей в случае моноклинной системы (13 модулей). Модули для триклинной системы (21 модуль), по-видимому, еще никем не измерены.

Следует отметить, что в случае тригональной системы, а также для некоторых других систем необходимо установить единую ориентацию кристаллографических осей относительно используемой системы координат. Для кварца это нашло отражение в Стандартах на пьезоэлектрические кристаллы Американского института радиоинженеров [202].

4. Измерение модулей упругости пьезоэлектрических материалов

В образце из пьезоэлектрика легко возбудить резонансные колебания, создав в нем переменное электрическое поле. Резонансные частоты тонких пластин, совершающих продольные или сдвиговые колебания по толщине, в первом приближении определяются модулями упругости, найденными в отсутствие электрического поля, при условии, что поверхности кристалла полностью покрыты электродами, а внутреннее сопротивление электрического генератора мало. С другой стороны, моды колебаний по толщине до некоторой степени зависят от пьезоэлектрической связи. При работе на высоких гармониках определяющее значение для этих мод колебаний имеют модули упругости, соответствующие нулевой поляризации. Следовательно, представляют интерес оба указанные значения модулей.

Вследствие сложности этой задачи мы не будем подробно описывать использованные методы. Исчерпывающие сведения по этому вопросу читатель может найти в работах Кэди [188], Мэзона [31], Бехмана и Ауэрса [203] и в сборнике [202] (см. также гл. 3 настоящей книги).

Определенный интерес представляют также вопросы распространения плоских волн в пьезоэлектриках. Эту задачу исследовали Кьяме [205] и Кога и др. [206]. Хатсон и Уайт [207] рассмотрели распространение волн в полупроводниках, обладающих пьезоэлектрическими свойствами.

Для измерения некоторых модулей пьезоэлектриков можно использовать высокочастотные импульсные методы, однако пока имеется мало сведений о работах в этом направлении. Например, метод наложения импульсов, описанный в § 6, п. 2, был использован для измерения всех модулей упругости кварца при напряженности электрического поля, равной нулю [208]. Такие измерения можно провести в широком диапазоне изменения температуры и давления [149].

5. Модули упругости третьего порядка

Для большинства целей достаточно считать, что деформации, вызываемые системой действующих на тело напряжений, пропорциональны последним. Конечно, это не совсем так; такое предположение не всегда оправдано, особенно при приближении к пределу упругости.

В последнее время изучен ряд эффектов, в значительной мере зависящих от нелинейности, существующей даже при очень малых амплитудах деформации. В качестве примера можно привести взаимодействие тепловых фононов с фононами, соответствующими распространению акустических волн в твердых телах [209, 210]. В этих исследованиях, в особенности в случае кристаллических материалов, важное значение имеет оценка степени нелинейности. Лучшее приближение можно получить, рассматривая напряжения как функции деформаций, содержащие наряду с линейными членами еще и квадратичные члены. Эта задача для произвольной кристаллической среды исследована Берчем [211], Хирманом [212] и другими авторами.

Экспериментальное определение модулей упругости третьего порядка можно произвести путем статических измерений. Некоторые измерения такого типа описаны Бриджменом [213]. Другая и существенно более точная методика основана на определении модулей упругости по результатам измерения скорости распространения звука, как это сделано, например, Юзом и Келли [214].

Некоторые соотношения между модулями упругости можно получить при гидростатическом сжатии исследуемого материала. Этот метод использовали, например, Лазарус [144], Даниэлс и Смит [186] и Мак-Скимин [185]. Остальные необходимые соотношения получаются путем измерения скорости звука в условиях одноосного сжатия материала. Юз и Келли [214] привели результаты таких измерений для некоторых изотропных материалов.

В случае кристаллических материалов зависимости между скоростью звука и модулями упругости имеют более сложный вид. Однако недавно эта сложная задача была решена для случая кубической симметрии Сигером и Баком [215], а также Мэзоном (см. Бейтман и др. [216]); приведены экспериментальные результаты для германия. Математические соотношения даны в гл. 1 настоящей книги.

Для определения модулей упругости третьего порядка необходима высокая степень точности измерений. С этой точки зрения измерения при гидростатическом сжатии проведены на достаточно высоком уровне, однако методика измерений при одноосном сжатии требует дальнейшего усовершенствования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Leonard R. W., Journ. Acoust. Soc. Amer., **18**, 252 (1946).
2. Mulders C. E., Appl. Sci. Res., **B1**, 149 (1948).
3. Moen C. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **23**, 62 (1951).
4. Kurtze G., Tamm K., Acustica, **3**, 33 (1953).
5. Lawley L. E., Reed R. D. C., Acustica, **5**, 316 (1955).
6. Karpovich J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **26**, 819 (1954).
7. Debye P., Sears F. W., Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., **18**, 410 (1932).
8. Lucas R., Biquard P., Journ. phys. rad., **3**, 464 (1932).
9. Raman C. V., Nath N. S. N., Proc. Indian Acad. Sci., **2**, 413 (1935).
10. Burton C. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **20**, 186 (1948).
11. Willard G. W., Journ. Acoust. Soc. Amer., **12**, 438 (1941).
12. Willard G. W., Journ. Acoust. Soc. Amer., **19**, 235 (1947).
13. Willard G. W., Journ. Acoust. Soc. Amer., **21**, 101 (1949).
14. Hazzard G. W., Journ. Acoust. Soc. Amer., **22**, 29 (1950).
15. Kannuna M. M., Journ. Acoust. Soc. Amer., **27**, 5 (1955).
16. Hiedemann E., Osterhammel K., Zs. Phys., **107**, 273 (1937)
17. Locber A. P., Hiedemann E. A., Journ. Acoust. Soc. Amer., **28**, 27 (1956).
18. Breazeale M. A., Hiedemann E. A., Journ. Acoust. Soc. Amer., **30**, 751 (1958).
19. Zankel K. L., Hiedemann E. A., Journ. Acoust. Soc. Amer., **31**, 44 (1959).
20. Hsu E. T., Journ. Acoust. Soc. Amer., **17**, 127 (1945).
21. Smith M. C., Beyer R. T., Journ. Acoust. Soc. Amer., **20**, 608 (1948).
22. McNamara F. L., Beyer R. T., Journ. Acoust. Soc. Amer., **25**, 259 (1953).
23. Barone A., Nuovo M., Ricerca sci., **21**, 516 (1951).
24. Mokhtar M., Yousseff H., Journ. Acoust. Soc. Amer., **28**, 651 (1956).
25. Eckart C., Phys. Rev., **73**, 68 (1948).
26. Piercy J. E., Lamb J., Proc. Roy. Soc., **A226**, 43 (1954).
27. Hall D. N., Lamb J., Proc. Phys. Soc., **73**, 354 (1959).
28. Pierce G. W., Proc. Amer. Acad. Arts Sci., **60**, 271 (1925).
29. Hubbard J. C., Phys. Rev., **38**, 1011 (1931).
30. Del Grosso V. A., Smura E. J., Fougere P. F., Naval Res. Lab. Rep. NRL-4439 (1954).
31. Mason W. P., Piezoelectric Crystals and Their Application to Ultrasonics, Princeton, New Jersey, 1950 (см. перевод: У. Мэзон, Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике, М., 1952).
32. Fox F. E., Hunter J. L., Proc. IRE, **36**, 1500 (1948).
33. Hunter J. L., Journ. Acoust. Soc. Amer., **22**, 243 (1950).
34. Hunter J. L., Fox F. E., Journ. Acoust. Soc. Amer., **22**, 238 (1950).
35. Fry W. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **21**, 17 (1949).
36. Barthel R., Nolle A. W., Journ. Acoust. Soc. Amer., **24**, 8 (1952).
37. Carstensen E. L., Journ. Acoust. Soc. Amer., **26**, 858 (1954).
38. Ballou J. W., Hubbard J. C., Journ. Acoust. Soc. Amer., **16**, 100 (1944).
39. Graham G. W., Journ. Acoust. Soc. Amer., **25**, 1124 (1953).
40. Guptill E. W., Can. Journ. Phys., **31**, 393 (1953).
41. Pellam J. R., Galt J. K., Journ. Chem. Phys., **14**, 608 (1946).
42. Teeter C. E., Jr., Journ. Acoust. Soc. Amer., **18**, 488 (1946).
43. Pinkerton J. M. M., Nature, **160**, 128 (1947).
44. Huntington H. B., Emslie A. G., Hughes V. W., Journ. Franklin Inst., **245**, 1 (1948).

45. Williams A. O., Jr., Journ. Acoust. Soc. Amer., **23**, 1 (1951).
46. Seki H., Granato A., Truell R., Journ. Acoust. Soc. Amer., 28, 230 (1956).
47. Bass R., Journ. Acoust. Soc. Amer., **30**, 602 (1958).
48. Carome E. F., Witting J. M., Journ. Acoust. Soc. Amer., **33**, 187 (1961).
49. Carome E. F., Witting J. M., Fleury P. A., Journ. Acoust. Soc. Amer., **33**, 1417 (1961).
50. Parker J. G., Naval Res. Lab. Rep. NRL-4559 (1955).
51. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **32**, 1401 (1960).
52. Rapuano R. A., Phys. Rev., **72**, 78 (1947).
53. Rapuano R. A., Mass. Inst. Technol. Res. Lab. Electronics Techn. Rep. No. 151 (1950).
54. Heasell E. L., Lamb J., Proc. Phys. Soc., **B69**, 869 (1956).
55. Andrea J. H., Bass R., Heasell E. L., Lamb J., Acustica, 8, 131 (1958).
56. Brooks R., Journ. Acoust. Soc. Amer., **32**, 1422 (1960).
57. Greenspan M., Tschiegg C. E., Journ. Res. Nat. Bur. Stand., **59**, 249 (1957).
58. Holbrook R. D., Journ. Acoust. Soc. Amer., **20**, 590 (1948).
59. Cedrone N. P., Curran D. R., Journ. Acoust. Soc. Amer., **26**, 963 (1954).
60. Ficken G. W., Jr., Hiedemann E. A., Journ. Acoust. Soc. Amer., 28, 921 (1956).
61. Fry W. J., Fry R. B., Journ. Acoust. Soc. Amer., **26**, 311 (1954).
62. Fry W. J., Dunn F., Proc. of Symposium on Physics and Nondestructive Testing, San Antonio, 1962, Paper 12 (в печати).
63. Litovitz T. A., Lyon T., Peselnick L., Journ. Acoust. Soc. Amer., 26, 566 (1954).
64. McConnell R. A., Mruk W. F., Journ. Acoust. Soc. Amer., **27**, 672 (1955).
65. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **29**, 1185 (1957).
66. Pellam J. R., Squire C. F., Phys. Rev., 72, 1245 (1947).
67. Kleppa O. J., Journ. Chem. Phys., **18**, 1331 (1950).
68. Pryor A. W., Richardson E. G., Journ. Phys. Chem., **59**, 14 (1955).
69. Higgs R. W., Litovitz T. A., Journ. Acoust. Soc. Amer., **32**, 1108 (1960).
70. Litovitz T. A., Carnevale E. H., Journ. Appl. Phys., **26**, 816 (1955).
71. Holton G., Journ. Appl. Phys., **22**, 1407 (1951).
72. Smith A. H., Lawson A. W., Journ. Chem. Phys., **22**, 351 (1954).
73. Wilson W. D., Journ. Acoust. Soc. Amer., **31**, 1067 (1959).
74. Mifsud J. F., Nolle A. W., Journ. Acoust. Soc. Amer., **28**, 469 (1956).
75. Dobbs E. R., Finegold L., Journ. Acoust. Soc. Amer., **32**, 1215 (1960).
76. McKinney J. E., Edelman S., Marvin R. S., Journ. Appl. Phys., **27**, 425 (1956).
77. Donfor A. R., Litovitz T. A., 63rd Meeting Acoust. Soc. Amer., New York, 1962, Paper B5.
78. Mason W. P., Baker W. O., McSkimin H. J., Heiss J. H., Phys. Rev., **73**, 1074 (1948).
79. Sittel K., Rouse P. E., Jr., Bailey E. D., Journ. Appl. Phys., **25**, 1312 (1954).
80. Mason W. P., Physical Acoustics, Princeton, New Jersey, 1958.
81. Hopkins I. L., Journ. Appl. Phys., **24**, 1300 (1953).

82. Fitzgerald E. R., Ferry J. D., Journ. Colloid Sci., 8, 1 (1953).
83. Ferry J. D., Rheology, Theory and Applications, ed. F.R. Eirich, vol. II, New York, 1958, ch. 11.
84. Ferry J. D., Viscoelastic Properties of Polymers, New York, 1961 (см. перевод: Дж. Ферри, Вязкоупругие свойства полимеров, М., 1963).
85. Mason W. P., Handbuch der Physik, Hrg. S. Flügge, Bd. XI, Teil 1, Berlin, 1961, S. 361.
86. Mason W. P., Journ. Colloid Sci., **3**, 147 (1948).
87. Appeldoorn J. K., Okrent E. H., Philippoff W., Paper presented at the 27th Midyear Meeting of Amer. Petroleum Inst. Div. Refining, San Francisco, California, 1962.
88. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **24**, 355 (1952).
89. Mason W. P., Baker W. O., McSkimin H. J., Heiss J. H., Phys. Rev., **75**, 936 (1949).
90. Barlow A. J., Lamb J., Proc. Roy. Soc., **A253**, 52 (1959).
91. Philippoff W., Journ. Appl. Phys., **24**, 685 (1953).
92. Maxwell B., ASTM Bull. No. 215, 76 (1956).
93. Horio M., Onogi S., Journ. Appl. Phys., **22**, 977 (1951).
94. Bordoni P. G., Nuovo M., Verdini L., Nuovo cimento, **20**, 667 (1961).
95. Nielsen L. E., Rev. Sci. Instr., **22**, 690 (1951).
96. Sinnott K. M., Journ. Appl. Phys., **29**, 1433 (1958).
97. Rorden H. C., Grieco A., Journ. Appl. Phys., **22**, 842 (1951).
98. Hopkins I. L., Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., **73**, 195 (1951).
99. Hillier K. W., Proc. Phys. Soc., **B62**, 701 (1949).
100. Hillier K. W., IRE Trans., **26**, 64 (1950).
101. Ballou J. W., Smith J. C., Journ. Appl. Phys., **20**, 493 (1949).
102. Fitzgerald E. R., Phys. Rev., **108**, 690 (1957).
103. Nolle A. W., Mowry S. C., Journ. Acoust. Soc. Amer., **20**, 432 (1948).
104. Singh H., Nolle A. W., Journ. Appl. Phys., **30**, 337 (1959).
105. Reissner H., Helv. Phys. Acta, **7**, 140 (1938).
106. Schneider W. C., Burton C. J., Journ. Appl. Phys., **20**, 48 (1949).
107. Kono R., Journ. Phys. Soc. Japan, **15**, 718 (1960).
108. Nolle A. W., Sieck P. W., Journ. Appl. Phys., **23**, 888 (1952).
109. Cunningham J. R., Ivey D. G., Journ. Appl. Phys., **27**, 967 (1956).
110. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **23**, 429 (1951).
111. Marvin R. S., Proc. 2nd Intern. Congr. Rheology, Oxford, 1953, p. 156.
112. Wegel R. L., Walther H., Physics, **6**, 141 (1935).
113. Fine M. E., ASTM Bull. No. 181, 20 (1952).
114. Fusfeld H. I., Rev. Sci. Instr., **21**, 612 (1950).
115. Bradfield G., Brit. Journ. Appl. Phys., **11**, 478 (1960).
116. Bradfield G., Brit. Journ. Appl. Phys., **9**, 13 (1958).
117. Barone A., Giacomini A., Acustica, **4**, 182 (1954).
118. Spencer E. G., Le Craw R. C., Phys. Rev. Letters, **1**, 241 (1958).
119. Quimby S. L., Phys. Rev., **25**, 558 (1925).
120. Mason W. P., Electro-mechanical Transducers and Wave Filters, Princeton, New Jersey, 1942, p. 205.
121. McSkimin H. J., Bell System Techn. Journ., **30**, 970 (1951).
122. Bolef D. I., Menes M., Journ. Appl. Phys., **31**, 1010 (1960).
123. Bordoni P. G., Nuovo M., Acustica, **7**, 1 (1957).
124. Love A. E. H., Mathematical Theory of Elasticity, London and New York, 1927 (см. перевод: А. Ляв, Математическая теория упругости, М., 1935).
125. Hudson G. E., Phys. Rev., **63**, 46 (1943).

126. Bancroft D., Phys. Rev., **59**, 588 (1941).
127. Morse R. W., Journ. Acoust. Soc. Amer., **26**, 1018 (1954).
128. Spinner S., Reichard T. W., Tefft W. E., Journ. Res. Nat. Bur. Stand., **64A**, 147 (1960).
129. Mindlin R. D., Fox E. A., Columbia Univ. Bull., October, Armed Serv. Techn. Inform. Agency AD No. 211294, 1958.
130. Zemanek J., Jr., Rudnick I., Journ. Acoust. Soc. Amer., **33**, 1283 (1961).
131. Mason W. P., Journ. Acoust. Soc. Amer., **6**, 246 (1935).
132. Pickett G., ASTM Proc., 45, 846 (1945).
133. Tefft W. E., Journ. Res. Nat. Bur. Stand., **64B**, 237 (1960).
134. Zarembovitch A., Compt. rend., **248**, 2716 (1959).
135. Bradfield G., Goodwin E. T., Phil. Mag. [8], **6**, 1065 (1961).
136. May J. E., Jr., IRE Trans. on Ultrasonics Eng., **UE-7**, 44 (1960).
137. Meitzler A. H., IRE Trans. on Ultrasonics Eng., **UE-7**, 35 (1960).
138. Mecker T. R., IRE Trans. on Ultrasonics Eng., **UE-7**, 53 (1960).
139. Filson D. H., Phys. Rev., **115**, 1516 (1959).
140. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **28**, 484 (1956).
141. Redwood M., Proc. Phys. Soc., **72**, 841 (1958).
142. Redwood M., Journ. Acoust. Soc. Amer., **31**, 442 (1959).
143. Eros S., Reitz J. R., Journ. Appl. Phys., **29**, 683 (1958).
144. Lazarus D., Phys. Rev., **76**, 545 (1949).
145. Forgacs R. L., Proc. Nat. Electronics Conf., **14**, 528 (1958).
146. Chick B., Anderson G., Truell R., Journ. Acoust. Soc. Amer., **32**, 186 (1960).
147. Skudrzyk E., Journ. Acoust. Soc. Amer., **32**, 565 (1960).
148. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **33**, 12 (1961).
149. McSkimin H. J., Andreatch P., Journ. Acoust. Soc. Amer., **34**, 609 (1962).
150. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **22**, 413 (1950).
151. McSkimin H. J., IRE Trans. Ultrasonics Eng., PGUE-5, 25 (1957).
152. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **34**, 404 (1962).
153. Williams J., Lamb J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **30**, 308 (1958).
154. Bömmel H. E., Dransfeld K., Phys. Rev. Letters, **1**, 234 (1958).
155. Bömmel H. E., Dransfeld K., Phys. Rev. Letters, **2**, 298 (1959).
156. Jacobsen E. H., в книге Quantum Electronics, ed. C. H. Townes, New York, 1960, p. 468.
157. Bömmel H. E., Dransfeld K., Phys. Rev. Letters, **3**, 83 (1959).
158. Spencer E. G., Denton R. T., Chambers R. P., Phys. Rev., **125**, 1950 (1962).
159. Jacobsen E. H., Journ. Acoust. Soc. Amer., **32**, 949 (1960).
160. Bolef D. I., de Klerk J., Gosser R. B., Westinghouse Res. Labs. Sci., Paper 908-10801-P1 (1962).
161. Brillouin L., Ann. Phys., **17**, 88 (1922).
162. Chandrosekharan V., Proc. Indian Acad. Sci., **32A**, 379 (1950).
163. Krishnan R. S., Proc. Indian Acad. Sci., **41A**, 91 (1955).
164. Flubacher P., Leadbetter A. J., Morrison J. A., Stoicheff B. P., Journ. Phys. Chem. Sol., **12**, 53 (1959).
165. Prince E., Wooster W. A., Acta Cryst., **6**, 450 (1953).
166. Bordoni P. G., Nuovo cimento, **11**, 127 (1954).
167. Hunter L. P., Siegel S., Phys. Rev., **61**, 84 (1942).
168. Huber R. J., Baker G. S., Gibbs P., Dept. Phys., University of Utah Techn. Rep., **14** (1960).
169. Marx J. W., Rev. Sci. Instr., **22**, 221 (1951).
170. Marx J. W., Sivertsen J. M., Journ. Appl. Phys., **24**, 81 (1953).
171. Förster F., Zs. Metallk., **29**, 109 (1937).

172. Förster F., Köster W., Zs. Metallk., **29**, 116 (1937).
173. Spinner S., Journ. Amer. Ceram. Soc., **39**, 113 (1956).
174. Susse C., Journ. recherches centre nat. recherche sci., **54**, 23 (1961).
175. McSkimin H. J., Fisher E. S., Journ. Appl. Phys., **31**, 1627 (1960).
176. Frederick J. R., Journ. Acoust. Soc. Amer., **20**, 586 (1948).
177. Bell J. F. W., Phil. Mag. [8], **2**, 1113 (1957).
178. Forgacs R. L., Journ. Acoust. Soc. Amer., **32**, 1697 (1960).
179. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **28**, 1228 (1956).
180. Espinola R. P., Waterman P. C., Journ. Appl. Phys., **29**, 718 (1958).
181. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **31**, 287 (1959).
182. Birch F., Journ. Appl. Phys., **8**, 129 (1937).
183. Bradfield G., Nat. Phys. Lab. (Teddington, Engl.), Ann. Rep. (1960).
184. Hughes D. S., Maurette C., Journ. Appl. Phys., **27**, 1184 (1956).
185. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **30**, 314 (1958).
186. Daniels W. B., Smith C. S., Phys. Rev., **111**, 713 (1958).
187. Ahrens T. J., Katz S., Journ. Geophys. Res., **67**, 2935 (1962).
188. Cady W. G., Piezoelectricity, New York, 1946 (см. перевод: У. Кэди, Пьезоэлектричество и его практические применения, М., 1949).
189. Musgrave M. J. P., Proc. Roy. Soc., **A226**, 339, 356 (1954).
190. Price W. J., Huntington H. B., Journ. Acoust. Soc. Amer., **22**, 32 (1950).
191. Waterman P. C., Phys. Rev., **113**, 1240 (1959).
192. Farnell G. W., Can. Journ. Phys., **39**, 65 (1961).
193. Markham M. F., Brit. Journ. Appl. Phys. Suppl., **6**, S56 (1957).
194. Arenberg D. L., Journ. Appl. Phys., **21**, 941 (1950).
195. Neighbours J. R., Smith C. S., Journ. Appl. Phys., **21**, 1338 (1950).
196. Alers G. A., Neighbours J. R., Journ. Appl. Phys., **28**, 1514 (1957).
197. Fisher E. S., McSkimin H. J., Journ. Appl. Phys., **29**, 1473 (1958).
198. Mayer W. G., Parker P. M., Acta Cryst., **14**, 725 (1961).
199. Parker P. M., Mayer W. G., Acta Cryst., **15**, 334 (1962).
200. Eckstein Y., Lawson A. W., Reneker D. H., Journ. Appl. Phys., **31**, 1534 (1960).
201. Александров К. С., Кристаллография, **3**, 630 (1959).
202. IRE Standards on Piezoelectric Crystals, Proc. IRE, **37**, 1378 (1949).
203. Bechmann R., Ayers S., General Post Office Selected Engineering Reports. Piezoelectricity, Report No. 4. Post Office Res. Station, London, 1957.
204. IRE Stand., Proc. IRE, **46**, 764 (1958).
205. Kyame J. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **21**, 159 (1949).
206. Koga I., Aruga M., Yoshinaka Y., Phys. Rev., **109**, 1467 (1958).
207. Hutson A. R., White D. L., Journ. Appl. Phys., **33**, 40 (1962).
208. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **37**, 1271 (1962).
209. Simons S., Proc. Cambr. Phil. Soc., **53**, 702 (1957).
210. Bömmel H. E., Dransfeld K., Phys. Rev., **117**, 1245 (1960).
211. Birch F., Phys. Rev., **71**, 809 (1947).
212. Hearman R. F. S., Acta Cryst., **6**, 331 (1953).
213. Bridgman P. W., Proc. Amer. Acad. Arts Sci., **76**, 55 (1948).
214. Hughes D. S., Kelly J. L., Phys. Rev., **92**, 1145 (1953).
215. Seeger A., Buck O., Zs. Naturforsch., **15a**, 1056 (1960).
216. Bateman T. B., Mason W. P., McSkimin H. J., Journ. Appl. Phys., **32**, 928 (1961).

Глава 5

ПРИМЕНЕНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ И МЕХАНИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ В ФИЛЬТРАХ И ГЕНЕРАТОРАХ

У. МЭЗОН [1])

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1. Исторический обзор

Механические и акустические волны, распространяющиеся в различных средах (газах, жидкостях и твердых телах), имеют большое практическое значение во многих областях науки и техники, в частности для связи, обнаружения, подавления шумов и т. п. Достаточно сказать, что связь между людьми в основном осуществляется с помощью акустических волн, распространяющихся в воздухе. Упругие колебания в морской воде используются для обнаружения подводных лодок, а упругие колебания в земле — для изучения строения поверхностных слоев земли, а также для поисков нефти и минеральных полезных ископаемых.

Многочисленные применения акустических колебаний в различных областях человеческой деятельности представляют собой самостоятельные темы, которые обычно не входят в круг вопросов, рассматриваемых физической акустикой. Однако механические колебания резонаторов и прохождение акустических волн через фильтры и линии задержки представляют интерес для акустики и рассматриваются в курсах ультразвука и физической акустики. Дисперсионные линии задержки и линии без дисперсии описываются в гл. 6 и 7 настоящей книги. В данной главе рассматриваются акустические колебания в резонаторах и фильтрах.

Обычно под фильтрами подразумевают электрические устройства, которые пропускают одну полосу частот или ряд полос частот, в то время как другие частоты подавляются. Однако необходимо отметить тот исторический факт [1], что первые конструкции, которые обладали фильтрующими свойствами, были механического типа. Самым первым устройством такого рода была струна, нагруженная сосредоточенными массами, которая изуча-

---

[1]) «Белл телефон леборатриз», Мерри-Хилл, Нью-Джерси.

лась рядом исследователей [1]). Предположив, что массой самой струны можно пренебречь, Лагранж показал, что все собственные частоты такого устройства лежат ниже некоторой граничной частоты f_c. Однако только Кельвин [2] указал, что выше этой частоты имеет место затухание, в результате которого амплитуда колебаний уменьшается с расстоянием по экспоненциальному закону. Кельвин рассмотрел также систему, состоящую из больших и малых масс, скрепленных пружинками, причем большие массы связаны между собой также посредством пружинок. При этом ему удалось показать, что с помощью такого устройства можно объяснить кривую аномальной дисперсии в оптике. Это сообщение было использовано Винсентом, который создал первый механический фильтр, описанный в п. 8 настоящего параграфа. Следует отметить, что теория механических фильтров того времени имела дело с собственными частотами ненагруженных фильтров или рассматривала прохождение колебаний через ненагруженные звенья. Идея согласования нагрузочных сопротивлений на концах при передаче мощности через фильтр была разработана на основе теории электрических цепей.

Предшественником акустических волновых фильтров была система из двух труб различной длины, впервые предложенная Гершелем [3]. Это устройство пропускает низкие частоты, но сильно ослабляет те частоты, для которых разность длин пути в двух трубах составляет нечетное число длин волн. Интересно отметить, что все предшественники электрических фильтров представляли собой системы с равномерно распределенными параметрами. Все такие конструкции, равно как и струны, нагруженные массами, имеют бесконечное число полос пропускания. Только допущение, что весом струны можно пренебречь, приводит к появлению одной полосы пропускания.

2. Возникновение теории электрических фильтров

Фильтры низких частот возникли на основе четырехполюсников, предназначенных для моделирования длинных нагруженных кабельных линий. Заменив распределенную индуктивность кабеля и нагрузки, а также омическое сопротивление кабеля и нагрузки последовательно включенными катушками индуктивности и сопротивлениями, а распределенную емкость кабеля и утечку изоляции кабеля параллельно включенными конденсаторами и сопротивле-

[1]) Первые исследования провел Ньютон (Principia, II, 1686). Дальнейшие работы были проведены Бернулли и Эйлером. Лагранж в своей «Аналитической механике» (1788) дал решение задачи о струне, нагруженной сосредоточенными массами, и показал, что струна с распределенными постоянными является предельным случаем.

ниями, Кемпбелл [4, 5] получил малогабаритное устройство, которое обладало такими же характеристиками распространения вплоть до граничной частоты, как и длинный кабель с нагрузкой на конце. Кроме того, выбрав малые активные сопротивления, он нашел, что в диапазоне от нулевой до граничной частоты f_c затухание невелико, в то время как на высоких частотах оно значительно. Таким образом, был создан первый фильтр низких частот. Кемпбелл применил такой фильтр для практических целей. Он пишет [4]: «Я использовал полученные результаты, применив искусственные нагруженные линии для подавления гармоник в цепях генератора. При этом гармоники могут быть уменьшены настолько, насколько это необходимо с помощью нескольких ячеек, в то время как затухание на основной частоте можно снизить путем уменьшения активного сопротивления цепей».

Развивая основную идею фильтра как прибора для передачи без потерь электрических сигналов одного диапазона частот и подавления сигналов всех других частот, Кемпбелл пришел к мысли о создании фильтров других типов, которые отличались бы различными полосами пропускания. Уже в 1903 г. Кемпбелл указал на возможность создания полосовых фильтров [4]: «Комбинируя конденсаторы и катушки индуктивности, можно получить устройство, которое срежет не только высокие частоты, но также и все частоты ниже определенной границы». Вскоре после этого были разработаны фильтры высоких частот и фильтры, вырезающие некоторую полосу частот.

В течение ряда последующих лет наука об электрических цепях не получила дальнейшего развития, что объясняется прежде всего отсутствием возможностей практического применения разработанных схем. Однако в связи с появлением высокочастотной аппаратуры для линий телефонной связи (систем уплотнения) необходимый стимул был получен. Такие устройства представляют собой по существу аппаратуру для радиосвязи, приспособленную для работы по проводным линиям, используемым вместо среды, в которой распространяются радиоволны. Вначале радиоканалы отделялись от других радиоканалов с помощью электрических настроенных контуров, которые представляли собой электрические аналоги акустических резонаторов Гельмгольца [6], разработанных за много лет до этого. Однако настроенные контуры в высокочастотных телефонных системах оказались неудобными для разделения каналов, так как они не допускали регулировки ширины полосы пропускания и не позволяли достаточно эффективно разграничить полосу пропускания и полосу ослабления. Было найдено, что таким требованиям удовлетворяют фильтры, поэтому они и были применены для разделения каналов в первых высокочастотных телефонных системах.

3. Цепочечные фильтры типа т

В процессе разработки канальных избирательных фильтров с улучшенными характеристиками стало очевидно, что теория фильтров, созданная в период появления первых фильтров Кемпбелла, нуждается в значительном усовершенствовании. Все фильтры Кемпбелла относились к разряду фильтров типа K, для которых произведение реактивных сопротивлений последовательных X_1 и параллельных X_2 плеч равно постоянной величине, а именно

$$X_1X_2 = R^2. \tag{5.1}$$

Такие фильтры имеют характеристическое сопротивление (т. е. полное сопротивление большого числа звеньев), величина которого, плавно изменяясь, достигает нуля или бесконечности при граничных частотах f_{c_i}. Полосовые Т-образные и П-образные фильтры имеют частотные зависимости сопротивления, показанные на фиг. 109, *а* сплошными линиями. В полосе пропускания, которой соответствует изменение отношения реактивных сопротивлений в пределах

$$\text{от} \quad \frac{X_1}{4X_2} = 0 \quad \text{до} \quad \frac{X_1}{4X_2} = -1, \tag{5.2}$$

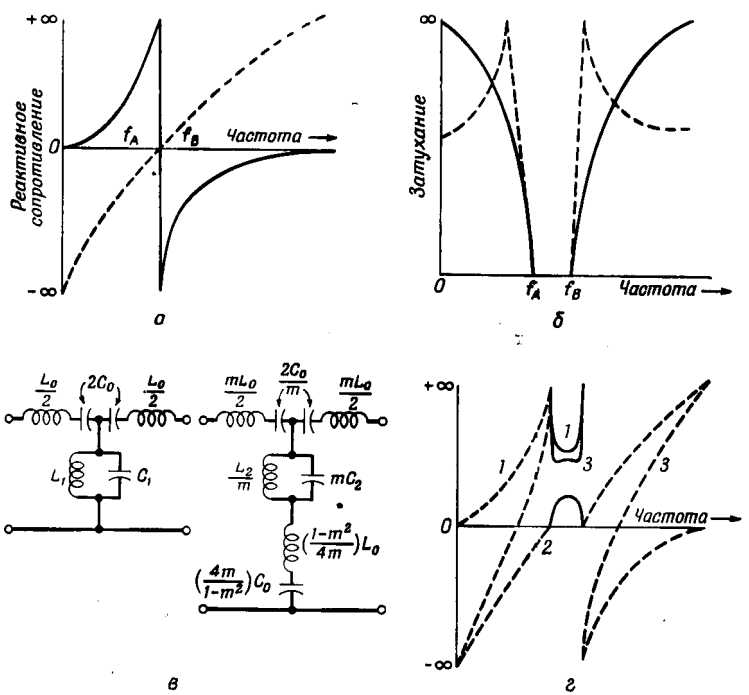
характеристическое сопротивление активно и при $X_1/4X_2 = -1$ для Т-звена достигает нулевого значения, а для П-звена стремится к бесконечности. Вне полосы пропускания сопротивление имеет реактивный характер, как это видно на фиг. 109. В связи с возникновением значительных потерь на отражение характеристики этих фильтров вблизи граничных частот полосы пропускания имеют плавную форму; поэтому фильтры типа K не могут обеспечить резкого разграничения полосы пропускания и полосы ослабления. Кроме того, все фильтры типа K имеют плавный характер нарастания затухания в области ослабления, начиная с граничных частот. При этом затухание в полосовом фильтре достигает бесконечного значения при нулевой или бесконечно большой частотах, что иллюстрируется сплошными линиями на фиг. 109, *б*.

Схема полосового фильтра типа K показана слева на фиг. 109, *в*.

Чтобы получить высокую избирательность при небольшом изменении частоты по сравнению с граничной частотой полосы пропускания, необходимо использовать большое число звеньев. Однако такое решение вопроса имеет серьезные недостатки: стоимость устройства повышается, а вблизи границ полосы пропускания появляются фазовые искажения.

Цобель [7, 8] усовершенствовал полосовые фильтры, предложив схему так называемого фильтра типа m. В этой схеме последовательно включенное реактивное сопротивление $X_1/2$ умножается на коэффициент m, а реактивное сопротивление параллельного плеча X_2 делится на тот же коэффициент. Кроме того, в параллельное плечо последовательно включается дополнительное реактивное сопротивление последовательного плеча X_1, умноженное на коэффициент $(1 - m^2)/4m$, как показано на фиг. 109, *в* (правая схема).

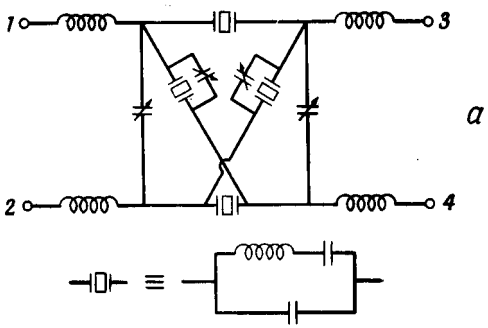
Если параметры фильтра выбраны указанным образом, то полоса пропускания и характеристическое сопротивление Т-звена

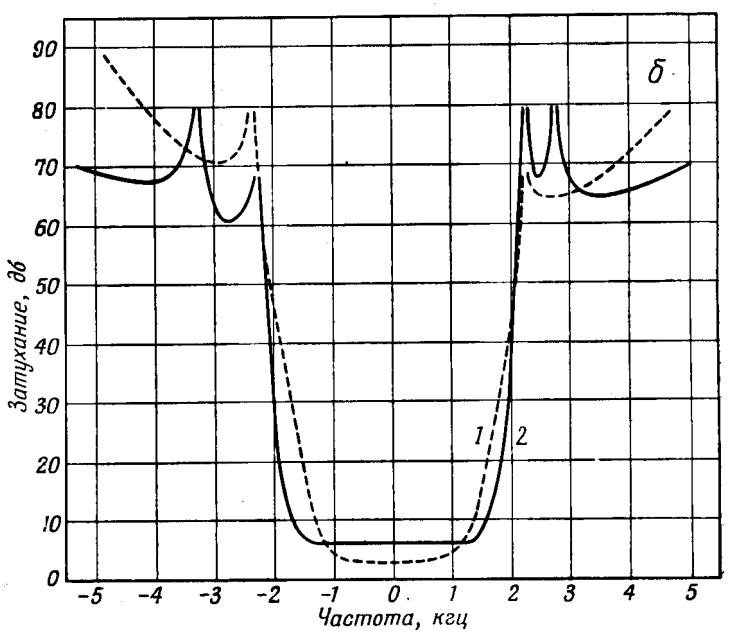


Ф и г. 109. Свойства фильтров типа K и типа m.

а — реактивное сопротивление последовательной и параллельной ветвей фильтра типа K; *б* — затухание однозвенного полосового фильтра (сплошные линии — для фильтра типа K, пунктирные — для фильтра типа m); *в* — электрическая схема звена полосового фильтра типа K (слева) и типа m (справа); *г* — характеристические сопротивления однозвенных фильтров типа K и типа m: *1* — сопротивление П-звена фильтра типа K; *2* — сопротивление Т-звена фильтра типа K; *3* — сопротивление П-звена фильтра типа m.

остаются неизменными, однако характеристика затухания в полосе ослабления становится более крутой (см. пунктирные кривые на фиг. 109, *б*), причем вблизи граничных частот полосы пропускания





Ф и г. 110. Сравнение характеристик затухания индуктивно-емкостного и кварцевого фильтров.

а — схема звена кварцевого фильтра; *б* — характеристики затухания: *1* — индуктивно-емкостный фильтр типа 38-Е, средняя частота 21,3 *кгц*, полоса пропускания 2550 *гц*, неравномерность 5 *дб*; *2* — кварцевый фильтр, средняя частота 62,3 *кгц*, полоса пропускания ~2850 *гц*, неравномерность 1 *дб*.

появляются пики затухания. В то же время сопротивление П-звена изменяется с частотой в соответствии с пунктирными кривыми на фиг. 109, *г*. Ввиду того, что полное сопротивление П-звена приближается к постоянному активному сопротивлению при частотах, значительно более близких к граничным частотам, чем в случае фильтра типа K, потери на отражение оказываются существенно сниженными. Поэтому в фильтрах типа m затухание вблизи граничных частот растет значительно быстрее, чем в фильтрах типа K. Кроме того, поскольку для фильтров обоих типов характеристические сопротивления Т-звеньев равны, ячейки фильтров типа K и m можно соединять вместе; при этом, пока рассеяние энергии в звеньях невелико, затухание для двух ячеек будет равно сумме затуханий обеих ячеек. Соединяя ячейки фильтров типа K и типа m, можно существенно улучшить полосу пропускания звуковых частот и снизить бесполезно теряемую часть спектра при разделении полос смежных телефонных каналов.

На фиг. 110, *б* пунктирной линией показана зависимость вносимого затухания от частоты для индуктивно-емкостного фильтра со средней частотой 21,3 *кгц*. Полезная полоса пропускания, составляющая 2550 *гц*, сопровождается бесполезно теряемой полосой около 1000 *гц*, необходимой для разделения смежных каналов. В то время, когда самые высокочастотные телефонные каналы имели среднюю частоту, не превышающую 30 *кгц*, такие фильтры позволяли получать удовлетворительные результаты: с помощью одной двухпроводной линии можно было одновременно обеспечить переговоры по шести каналам.

4. Влияние потерь в конденсаторах и катушках индуктивности

В связи с непрерывным расширением рабочего диапазона многоканальных телефонных систем в сторону высоких частот и увеличением полосы пропускания каналов, позволявшим улучшать качество передач в соответствии с возможностями усовершенствованной телефонной аппаратуры, фильтры, состоящие из конденсаторов и катушек индуктивности, перестали удовлетворять новым требованиям. Это объясняется тем, что на высоких частотах потери в элементах фильтров увеличиваются, в результате чего уменьшается крутизна склонов частотной характеристики затухания и одновременно повышается затухание в пределах полосы пропускания. Примерно в это же время появились коаксиальные линии, позволяющие передавать частоты порядка мегагерц. Поэтому большие усилия были направлены на изучение возможностей улучшения избирательности и расширения диапазона частот таких фильтров [10—12]. В результате проведенных исследований был создан кварцевый полосовой фильтр [13], в котором

вместо катушек индуктивности и конденсаторов, определяющих крутизну склонов частотной характеристики затухания, были использованы элементы, изготовленные из кристаллического кварца. Остальные же катушки индуктивности были включены таким образом, что они вносили лишь дополнительное затухание в полосе пропускания, но не влияли на крутизну склонов характеристики.

На фиг. 110, *б* сплошной линией показана характеристика одного из первых канальных фильтров со средней частотой 62,3 *кгц*, полосой пропускания 3 *кгц* и неравномерностью затухания 1 *дб*. Этот фильтр занимает такую же полосу частот, как и обычный фильтр с полосой пропускания 2550 *гц*, средней частотой 21,3 *кгц* и неравномерностью затухания 5 *дб*. С помощью таких элементов оказалось наиболее выгодным изготовлять 12-канальные блоки на диапазон частот 60—108 *кгц* и перекрывать любой другой диапазон частот с помощью систем, использующих двойную демодуляцию. Такие наборы фильтров до сих пор являются основными селективными устройствами во всех системах уплотнения фирмы «Белл», использующих воздушные провода, подземные или подводные кабельные линии, а также радиорелейные линии связи. Недавно разработанный метод искусственного выращивания кристаллов кварца [14, 15] обеспечивает получение недорогих кристаллов нужных размеров без каких-либо неоднородностей структуры.

Как указано в § 4 и 6, вместо кристаллов кварца можно использовать пьезокерамические элементы и электромеханические фильтры; однако до сих пор не удалось разработать устройства этих типов с аналогичными характеристиками, которые по стоимости могли бы сравняться с системами, в которых применены кварцевые элементы.

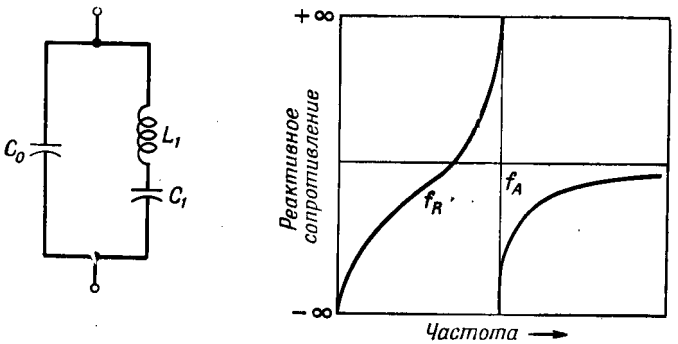
5. *Некоторые свойства кварцевых элементов, ограничивающие их использование в фильтрах*

Хотя кварцевые пластины обладают очень высокой добротностью (т. е. малыми внутренними потерями), они имеют другие недостатки, которые ограничивают их применение в качестве элементов электрических цепей. Эквивалентная схема пьезоэлектрического кристалла, детально рассмотренная в гл. 3 и показанная на фиг. 111, состоит из емкости C_0, параллельно которой включена цепь, состоящая из последовательно соединенных индуктивности L_1 и емкости C_1. C_0 представляет собой емкость кристалла на очень высоких частотах или емкость заторможенной пластины, когда параметры механической цепи L_1C_1 можно не принимать в расчет. Резонансное плечо эквивалентной цепи характеризуется первым, или основным, резонансом пластины, который легко

обнаружить, так как он значительно удален по частоте от других резонансов. Отношение C_0/C_1 определяется коэффициентом электромеханической связи k согласно следующему выражению:

$$\frac{C_0}{C_1} = r = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1-k^2}{k^2}\right). \qquad (5.3)$$

Для кварцевых пластин $+5°$ X-среза, наиболее часто применяемых в фильтрах, коэффициент электромеханической связи $k = 0{,}101$ и отношение емкостей C_0/C_1 является постоянной



Фиг. 111. Эквивалентная схема кристаллического резонатора и частотная зависимость его сопротивления.

$$C_0 = \frac{\varepsilon^s A}{l}, \quad C_1 = \frac{8}{\pi^2}\frac{d_{21}^2 A}{s_{11}^E l}, \quad L_1 = \frac{\rho l 3 (s_{11}^E)^2}{8 d_{21}^2 A},$$

$$\frac{C_0}{C_1} = \frac{\pi^2}{8}\frac{\varepsilon^s s_{11}^E}{d_{21}} = \frac{\pi^2}{8}\frac{(1-k^2)}{k^2}, \quad L_1 C_1 = \frac{\rho s_{11}^E l^2}{\pi^2} = \frac{1}{\omega_R^2}.$$

величиной r ($r = 120$). При этом реактивное сопротивление пластины имеет частотную характеристику, приведенную на фиг. 111, которая определяется уравнением

$$Z_c = -\frac{j}{\omega(C_0+C_1)}\left(\frac{1-f^2/f_R^2}{1-f^2/f_A^2}\right), \qquad (5.4)$$

где

$$f_A^2 = \frac{C_0+C_1}{C_0} f_R^2.$$

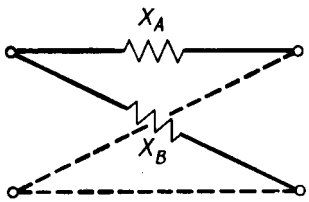
Следовательно, при $r = \text{const}$ частота антирезонанса f_A жестко связана с резонансной частотой f_R и отличается от последней для $r = 120$ на 0,41%. Частоту резонанса можно изменять, меняя размеры пластины, а емкость C_0 можно изменять путем выбора другого отношения площади пластины к ее толщине.

Использование кварцевых элементов для получения необходимой полосы пропускания и затухания без увеличения потерь

в пластине, требует применения более общей и фундаментальной теории четырехполюсников, чем та, которая применялась ранее для расчета цепочечных индуктивно-емкостных фильтров типа m.

6. Применение мостиковых схем

Наиболее общим типом фильтра является мостиковый фильтр с реактивным сопротивлением последовательного плеча X_A и реактивным сопротивлением параллельного плеча X_B (фиг. 112). Такой четырехполюсник, впервые рассмотренный Кемпбеллом



Фиг. 112. Мостиковая схема с последовательным реактивным сопротивлением X_A и диагональным реактивным сопротивлением X_B.

[16], имеет характеристическое или зеркальное полное сопротивление Z_I, равное корню квадратному из произведения реактивных сопротивлений плеч $X_A X_B$, и постоянную передачи g, зависящую от отношения этих сопротивлений:

$$Z_I = \sqrt{X_A X_B}, \qquad \operatorname{th}\frac{g}{2} = \operatorname{th}\left(\frac{A+jB}{2}\right) = \sqrt{\frac{X_A}{X_B}}, \tag{5.5}$$

где A — коэффициент затухания (в неперах) и B — фазовая постоянная (в радианах). С помощью тригонометрических соотношений для кратных углов можно преобразовать выражение для постоянной передачи:

$$\operatorname{th}\left(\frac{A+jB}{2}\right) = \frac{\operatorname{th}(A/2) + j\operatorname{tg}(B/2)}{1 + j\operatorname{th}(A/2)\operatorname{tg}(B/2)}, \tag{5.6}$$

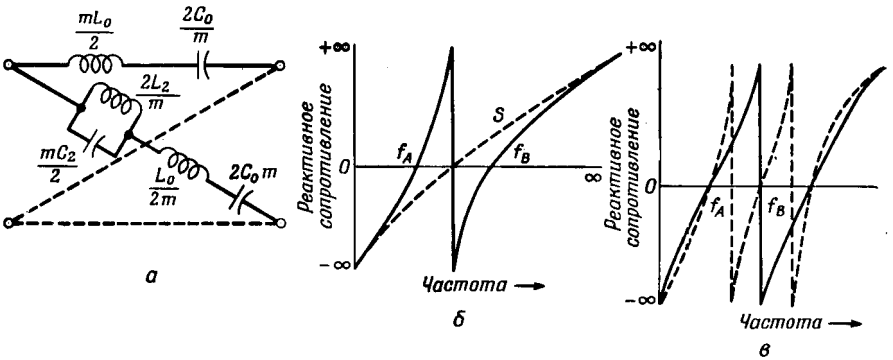
Если отношение X_A/X_B положительно, то фазовая постоянная B равна нулю или целому числу π, а коэффициент затухания определяется выражением

$$A = 2\operatorname{ar\,th}\sqrt{\frac{X_A}{X_B}}, \qquad \frac{X_A}{X_B} = +K(f). \tag{5.7}$$

Если же отношение X_A/X_B отрицательно, то равен нулю коэффициент затухания, а фазовая постоянная определяется выражением

$$B = 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{X_A}{X_B}}, \qquad \frac{X_A}{X_B} = -K(f). \tag{5.8}$$

Покажем, что любое Т- или П-звено можно свести к мостиковой схеме, для чего рассмотрим полосовой фильтр типа m, показанный на фиг. 109, *в*. Чтобы заменить этот фильтр мостиковым звеном, следует воспользоваться теоремой деления Бартлета [17] для симметричных схем, которая гласит: «Для цепей, обладающих зеркальной симметрией, последовательные плечи эквивалентного моста получаются путем разделения звена пополам вдоль линии симметрии, замыкания накоротко всех разрезанных проводников и использования полученных в результате этого двухполюсников



Ф и г. 113. Метод преобразования фильтра типа m в мостиковый фильтр. *а* — схема мостикового фильтра, эквивалентного фильтру типа m; *б* — зависимость реактивного сопротивления от частоты (пунктирная линия — для последовательного плеча, сплошная линия — для диагонального плеча); *в* — реактивные сопротивления, определяющие характеристическое сопротивление параллельной цепи.

в качестве последовательных плеч; диагональные плечи получаются путем использования двухполюсников, возникающих в результате размыкания всех разрезанных проводников». Если взять два параллельных плеча с сопротивлением, вдвое большим по сравнению с показанным на фиг. 109, *в*, и поместить их по одному с каждой стороны от центральной линии четырехполюсника, то можно получить схему с зеркальной симметрией.

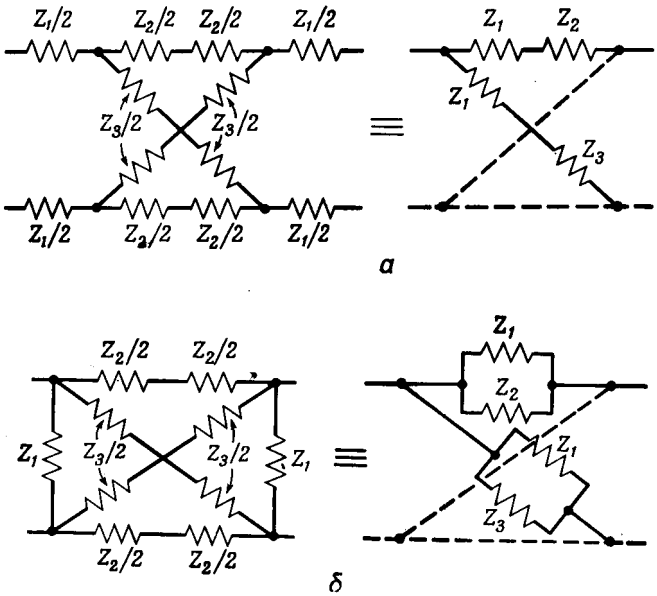
Схема эквивалентного мостикового четырехполюсника приведена на фиг. 113, *а*, где пунктирными линиями обозначены точно такие же последовательное и диагональное плечи, которые показаны на схеме. Зависимость реактивного сопротивления последовательного плеча от частоты показана на фиг. 113, *б* пунктирной линией, а та же зависимость для диагонального плеча — сплошными линиями. Полное сопротивление параллельного плеча Т-звена (см. фиг. 109, *в*) имеет то же число резонансов и антирезонансов, как и характеристика, показанная на фиг. 113, *б* сплошными линиями; антирезонанс имеет место при резонансе звена, состоящего из $L_0/2$ и $2C_0$. При добавлении к существующим

элементам $L_0/2$ и $2C_0$, чтобы удвоить параллельное плечо, форма кривых не изменяется, но резонансные частоты перемещаются ближе к антирезонансной частоте f_2. Кривые, соответствующие последовательным и параллельным плечам, пересекаются при резонансных частотах f_{R_1} и f_{R_2} исходной схемы, так как при этих частотах сопротивление диагонального плеча сводится к сопротивлению, определяемому параметрами $L_0/2$ и $2C_0$, т. е. становится равным сопротивлению последовательного плеча. Когда отношение реактивных сопротивлений X_A и X_B равно единице, из уравнения (5.6) следует, что $A = \infty$. Следовательно, кривая затухания будет иметь ту же форму, что и приведенная на фиг. 109, *б* кривая, относящаяся к фильтру типа m. Кривая характеристического сопротивления Т-звена, которое определяется как корень квадратный из произведения двух реактивных сопротивлений, совпадает с кривой сопротивления Т-звена, приведенной на фиг. 109, *г*.

Чтобы получить полное сопротивление П-звена, необходимо взять удвоенное сопротивление параллельного плеча на фиг. 109, *в* на каждом конце и включить между ними последовательное плечо, состоящее из индуктивности L_0, последовательно соединенной с емкостью C_0. Чтобы две половины схемы являлись зеркальным изображением друг друга, нужно разделить это плечо на две части, оставив в каждой элементы $L_0/2$ и $2C_0$. При использовании теоремы Бартлета последовательное плечо будет иметь три последовательных резонансных цепи с тремя резонансами: 1) цепь с резонансной частотой f_{R_1} и удвоенным сопротивлением параллельного плеча, 2) цепь с резонансной частотой f_{R_2} и удвоенным сопротивлением параллельного плеча и 3) цепь из элементов $L_0/2$ и $2C_0$, резонанс которой определяется средней частотой f_M. Диагональное плечо будет иметь последовательно соединенные первую и вторую цепи. Реактивные сопротивления этих плеч имеют резонансные и антирезонансные частоты, показанные на фиг. 113, *в*. Характеристики двух ветвей пересекаются при резонансных частотах f_{R_1} и f_{R_2}, откуда следует, что характеристика затухания не отличается от характеристики, приведенной на фиг. 109, *б*. Однако сопротивление полученного четырехполюсника стало совсем другим. Действительно, при вычислении произведения $\sqrt{X_A X_B}$ получается зависимость, показанная на фиг. 109, *г* для фильтра типа m, которая дает более постоянное сопротивление в пределах полосы пропускания, чем для П-звена. Поэтому фильтры типа m более пригодны для создания устройств с высокой избирательностью. Мы видим, что метод построения эквивалентных мостиковых звеньев весьма полезен для анализа свойств сложных цепочечных схем.

Мостиковый четырехполюсник, эквивалентный симметричной цепочечной схеме, можно получить всегда с помощью теоремы

Бартлета. Однако обратное преобразование не всегда возможно, т. е. в некоторых случаях невозможно получить цепочечную схему, эквивалентную мостиковому четырехполюснику. Чтобы мостиковый четырехполюсник был эквивалентен цепочечной схеме, плечи четырехполюсника должны допускать осуществление



Ф и г. 114. Две схемы, эквивалентные мостиковым звеньям.

двух операций, показанных на фиг. 114, где приведены эквивалентные схемы. Если последовательное и диагональное плечи имеют общие последовательно или параллельно включенные элементы, то эти элементы можно вынести за пределы мостикового звена. В тех случаях, когда такую операцию можно продолжить до конца, мостиковая и цепочечная схемы эквивалентны. Если же в плечах существуют элементы, которые не уничтожаются с помощью такого преобразования, то цепочечная схема не эквивалентна мостиковой.

Поскольку мостиковая схема является наиболее общим видом четырехполюсника, Боде [18, 19] и Кауер [20, 21] разработали теорию фильтров на основе анализа этой схемы. Ввиду того что характеристическое сопротивление зависит от произведения реактивных сопротивлений последовательной и диагональной ветвей $X_A X_B$, а постоянная передачи зависит от их отношения, эти две величины могут выбираться независимо друг от друга, что нельзя сделать в случае цепочечного фильтра типа m. Наиболее

удобно выбрать параметры таким образом, чтобы характеристическое сопротивление было постоянным и имело лишь активную компоненту, а затухание было бесконечно большим. Это сводится к требованиям

$$Z_I = \sqrt{X_A X_B} = R, \qquad \operatorname{th}\frac{g}{2} = \sqrt{\frac{X_A}{X_B}} \approx 1. \tag{5.9}$$

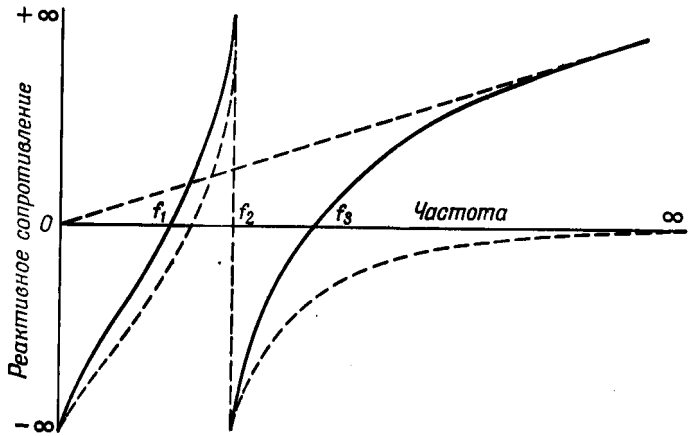
С помощью знакопеременных функций, аппроксимирующих эти два условия, можно показать, что оба требования будут удовлетворены с любой желаемой точностью, если использовать достаточное число резонансных цепей в двух плечах. Иногда ставится дополнительное условие обеспечения линейного изменения фазы в пределах полосы пропускания. Это требование также можно выполнить за счет уменьшения вносимого затухания в области ослабления фильтра путем выбора взаимного расположения максимумов и нулей характеристик двух плечей схемы. Иногда подобным образом проектируются специальные кристаллические фильтры, но в большинстве случаев их получают суммированием ряда простых звеньев, как это описано в § 4.

7. *Кристаллические элементы в цепочечных и мостиковых фильтрах*

Частотная зависимость сопротивления кварцевого элемента показана на фиг. 111. Если один элемент включить в одно последовательное плечо, другой аналогичный элемент — в другое последовательное плечо (вместо двух элементов можно взять одну пластину с двумя одинаковыми рабочими участками) и еще один подобный же элемент включить в диагональное плечо, настроенное таким образом, чтобы антирезонанс одного плеча совпал с резонансом другого, то полоса пропускания будет вдвое больше, чем для схемы с одним кварцевым резонатором: вместо 0,41% она будет составлять 0,82%. Этот же способ можно использовать и для пьезокерамических элементов, обладающих значительно большим коэффициентом электромеханической связи, чем кварц. Для кварца полоса пропускания оказывается слишком узкой, чтобы подобные устройства можно было использовать в системах связи; поэтому такие фильтры применяются лишь для выделения контрольного сигнала, используемого для управления коэффициентом усиления усилителя в системах уплотнения и в подводных кабельных линиях связи.

Можно показать, что последовательное или параллельное включение конденсаторов приводит к сужению полосы пропускания. Такой метод можно использовать для регулировки полосы пропускания узкополосных фильтров. Однако конденсаторы не позволяют решить подобную задачу в телефонных каналах, при-

меняемых в системах многоканальной высокочастотной связи. Чтобы получить требуемую ширину полосы, необходимо использовать схемы с кварцевыми пластинами, емкостями и катушками индуктивности. На фиг. 115 показано влияние добавочного реактивного сопротивления катушки индуктивности на реактивное



Ф и г. 115. Реактивное сопротивление катушки индуктивности, последовательно соединенной с кварцем.

сопротивление кварца; из графика видно, что схема имеет две резонансные частоты, значениями которых можно управлять. Если к реактивному сопротивлению кварца добавить реактивное сопротивление катушки $(j\omega L_0)$, то полное сопротивление будет равно

$$Z = j\omega L_0 - \frac{\frac{j}{\omega(C_0+C_1)}(1-f^2/f_R^2)}{1-f^2/f_A^2} = \\ = \frac{-j}{\omega(C_0+C_1)} \frac{\left[1-f^2\left(\frac{1}{f_R^2}+\frac{1}{f_M^2}\right)+\frac{f^4}{f_A^2 f_M^2}\right.}{1-f^2/f_A^2}, \qquad (5.10)$$

где

$$f_M^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 L_0 (C_0+C_1)}.$$

Это полное сопротивление можно также записать в виде

$$Z = \frac{-j}{\omega(C_0+C_1)} \left[\frac{(1-f^2/f_1^2)(1-f^2/f_2^2)}{1-f^2/f_A^2}\right], \qquad (5.11)$$

где

$$f_{1,2}^2 = \frac{(f_A^2/f_M^2)(f_R^2+f_M^2) \pm (f_A^2/f_M^2)\sqrt{(f_M^2-f_R^2)^2+(4f_M^2/f_A^2)(f_R^2 f_A^2-f_M^4)}}{2}.$$

Резонансные частоты f_1 и f_2 можно сделать симметричными относительно f_A, если положить $f_R = f_M$. Тогда, используя уравнение (5.4), получаем

$$f_{1,2}^2 = f_A^2 \left[1 \pm \sqrt{\frac{f_A^2 - f_R^2}{f_A^2}}\right] = f_A^2 \left[1 \pm \sqrt{\frac{1}{1+r}}\right]. \qquad (5.12)$$

Следовательно, для $r = 120$ резонансные частоты

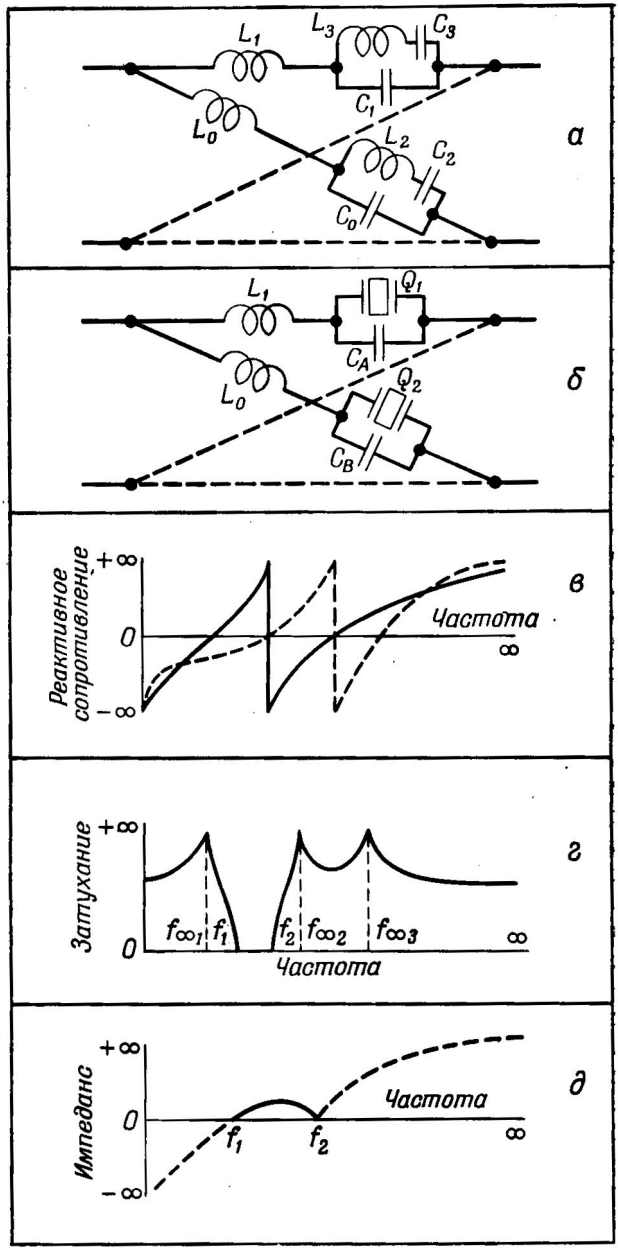
$$f_1 = 0{,}9534 f_A, \qquad f_2 = 1{,}0445 f_A, \qquad (5.13)$$

т. е. можно разнести резонансные частоты на 9,1% по отношению к средней частоте. Путем включения в схему дополнительных емкостей можно изменять значение r и, следовательно, менять расстояние между резонансными частотами, т. е. можно сделать ширину полосы регулируемой.

Полученное выражение для полного сопротивления фильтра с кварцевыми пластинами по форме совпадает с выражением для сопротивления параллельного плеча полосового фильтра типа m (фиг. 109, *в*), и, следовательно, если не принимать в расчет потери, то можно получить ячейку фильтра с полосой пропускания между двумя максимумами затухания, равной 8,5% [22]. Однако фильтр такого типа не нашел практического применения вследствие того, что потери энергии в последовательно включенной катушке оказывают существенное влияние на реальную характеристику фильтра. Поэтому если учесть потери в катушке индуктивности L_0, то выигрыш, получаемый от кварцевого фильтра, по сравнению с LC-фильтром оказывается незначительным. На частотах последовательного резонанса полное сопротивление определяется активным сопротивлением последовательно включенных катушек индуктивности. Если сравнивать цепи, имеющие ту же добротность Q, что и последовательно включенная катушка индуктивности L_0, то можно показать, что при последовательных резонансах активное сопротивление возрастет приблизительно вдвое по сравнению с сопротивлением кварца и катушки. Следовательно, такая комбинация дает увеличение добротности вдвое по сравнению со схемой, содержащей только конденсатор и катушку индуктивности. Однако такое повышение добротности не достаточно для того, чтобы обеспечить необходимое увеличение избирательности.

Если обратиться к более общей мостиковой схеме [1]), показанной на фиг. 116, то, как было показано автором, все активные

[1]) Схемы такого рода запатентованы автором применительно к различным типам фильтров. Полосовой фильтр, показанный на фиг. 110, защищен патентом США № 1 969 571. Другим типам фильтров (низкочастотным, высокочастотным и полосовым) посвящены патенты № 1 921 035, 1 974 081, 1 967 249, 1 967 250, 2 045 991 и 2 094 044.



Ф и г. 116. Общая схема мостикового полосового фильтра с последовательным соединением катушки индуктивности и кварца в каждом плече.

а — электрическая схема; *б* — физическая схема; *в* — кривые реактивного сопротивления для каждого плеча; *г* — характеристика затухания; *д* — полное сопротивление.

составляющие сопротивлений катушек можно отнести на концы фильтра, где, понижая сопротивления нагрузки источника или приемной цепи, они приводят лишь к появлению дополнительных потерь, которые, однако, не влияют на скорость нарастания вносимого затухания вблизи граничной частоты фильтра.

Ячейка фильтра, показанная на фиг. 116, которая более детально рассматривается в § 4, может дать три максимума затухания. Если две оконечные катушки индуктивности взять одинаковыми, то один из этих максимумов переместится в область очень высоких частот и тогда катушки можно будет удалить из мостиковой схемы; в таком виде обычно и используется указанная схема.

На фиг. 110 сплошной линией показана характеристика вносимого затухания для канального фильтра одной из ранних конструкций, который состоял из двух идентичных ячеек, показанных на фиг. 110. При такой форме эквивалентной схемы все потери в катушках индуктивности отнесены на концы ячейки фильтра. Чтобы полное сопротивление многозвенной цепи было равно активному сопротивлению нагрузки (с учетом компонент активного сопротивления катушек), между ячейками фильтра включены шунтирующие активные сопротивления. График, приведенный на фиг. 110, показывает постоянство дополнительных потерь в пределах полосы пропускания и большую крутизну склона характеристики затухания после граничной частоты.

8. *Распространение упругих волн в газообразных, жидких и твердых средах*

Кварцевые кристаллы, используемые в электрических фильтрах, можно представить в виде резонаторов, соединенных между собой цепями, обеспечивающими распространение волн (соединительными проводами), для которых сдвиг фазы и затухание очень малы. При значительно более высоких частотах положение меняется и соединительные цепи необходимо рассматривать как коаксиальные линии [23] или волноводные фильтры. Поскольку скорость распространения упругих волн существенно меньше, чем скорость распространения электромагнитных волн, все устройства, применяемые для передачи акустических, гидравлических и механических колебаний, следует рассматривать в большинстве случаев как распределенные системы.

Разработанные конструкции акустических и гидравлических фильтров используются главным образом для снижения уровня шума в воздухе или в воде, создаваемого в результате работы различных устройств. Вслед за появлением электрических волновых фильтров Стюарт [24—27] показал, что можно создать такую комбинацию труб и резонирующих камер, которая будет обла-

дать такими же характеристиками передачи на низких частотах, как и характеристики аналогичных электрических фильтров. Эта теория применима до тех пор, пока размеры конструкции малы или частоты низки; для крупногабаритных устройств или высоких частот ею пользоваться нельзя, так как в этих случаях параметры системы уже нельзя рассматривать как сосредоточенные.

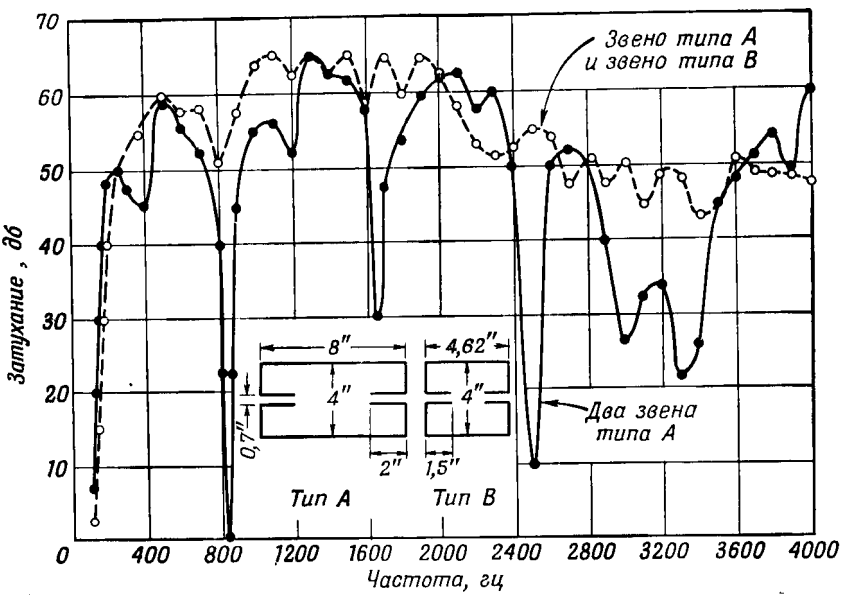
Теория акустических фильтров, разработанная автором данной главы [28], учитывает волновое движение в элементах; эта теория объясняет свойства фильтров до значительно более высоких частот. Позднее Линдсей со своими сотрудниками рассмотрел целый ряд акустических фильтров с различными типами боковых ответвлений и перегородок [1]).

Типичная ячейка фильтра и частотная зависимость вносимого затухания приведены на фиг. 117 [12]. Такая ячейка достаточно велика, чтобы в ней проявилось влияние многополосности, связанной с волновым распространением акустического сигнала через элементы фильтра. С помощью двух различных ячеек, отличающихся размерами, можно избавиться от паразитных полос пропускания. Большие фильтры такого типа используются, в частности, в вентиляционной системе заглушенной камеры акустической лаборатории фирмы «Белл телефон леборатриз» в Мерри-Хилл. Конструкция фильтра и связанных с ним заглушенных вентиляционных каналов показана на фиг. 118. Фильтры сконструированы для того, чтобы избавиться от шума, создаваемого лопастями вентилятора, однако они выполнены достаточно широкополосными, чтобы наряду с основным назначением они могли служить для подавления всех шумов, спектр которых лежит выше 16 *гц*. Металлические ребра фильтров хорошо обработаны со стороны набегающего воздушного потока, чтобы снизить турбулентность и связанные с нею шумы, возникающие в струе. Фильтры оканчиваются расширяющимся рупором для снижения скорости потока в линейных воздуховодах, в функции которого входит также снижение уровня шума на очень высоких частотах. Одна такая система предназначена для подачи воздуха в камеру, а другая — для удаления избыточного воздуха. Такая система фильтров и поглотителей позволяет снизить шум лопастей вентиляторов в диапазоне от 16 *гц* вплоть до очень высоких частот со 110 *дб* до уровня ниже порога слышимости.

Акустические фильтры находят широкое применение в автомобильных глушителях. Последние существовали задолго до того, как была создана теория акустических фильтров; в то время они выполнялись в виде ряда перегородок и поэтому создавали высо-

[1]) Линдсей [29] сделал прекрасный обзор по воздушным и твердым акустическим фильтрам.

кое сопротивление, что отрицательно сказывалось на работе двигателя. Более поздние конструкции глушителей представляют собой прямой воздуховод, по сторонам которого в соответствии с теорией акустических фильтров располагаются патрубки. Такие глушители имеют пропорционально увеличивающееся затухание для большинства частот в диапазоне выше 100 *гц*. Эффективность работы таких фильтров существенно улучшена, а сопротивление намного снижено по сравнению с аналогичными характеристиками для первых моделей глушителей.

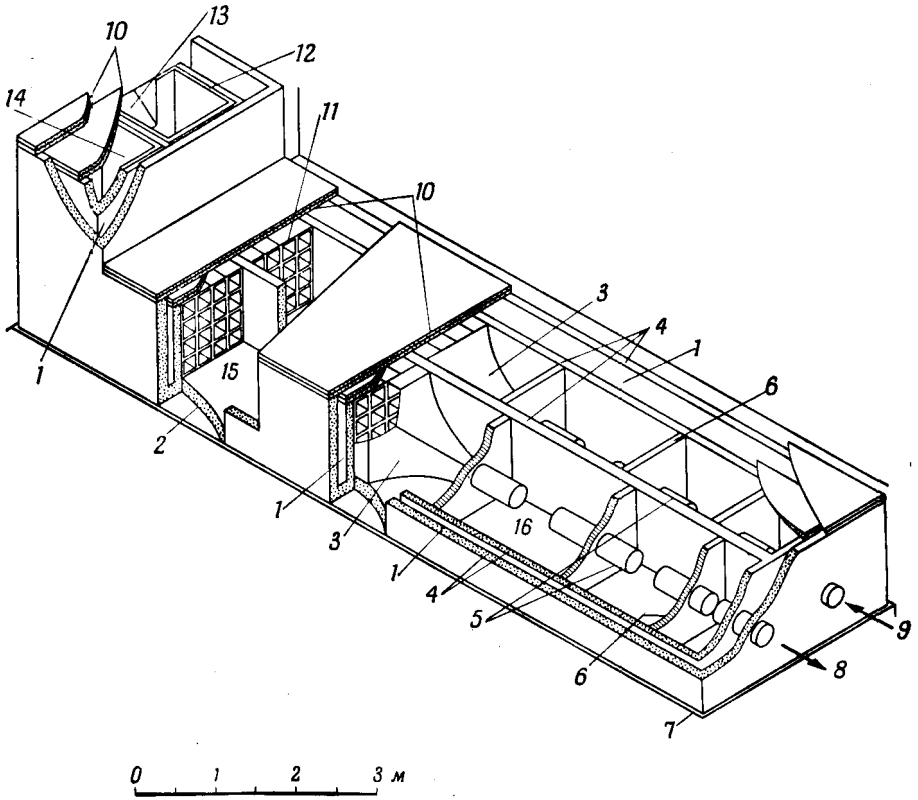


Ф и г. 117. Вносимое затухание акустического фильтра.

Гидравлические фильтры в виде труб с боковыми воздушными или водяными камерами, использующие воду как среду для распространения звука, еще недостаточно изучены [31]. Они применяются для защиты систем от гидравлических ударов и снижения шума струй, а также до некоторой степени полезны в системах подачи жидкого топлива, где могут использоваться для предотвращения возникновения вибраций.

Эти типы фильтров не представляют интереса для систем связи ввиду большой нестабильности параметров акустических элементов, которые сильно меняются при изменении температуры и давления. Наоборот, звуковые волны, распространяющиеся в твердых телах, весьма перспективны для использования в аппаратуре

связи; этому вопросу был посвящен ряд исследований и были созданы полосовые фильтры и радиочастотные фильтры для одной боковой полосы. Первые электромеханические фильтры были



Фиг. 118. Акустические фильтры и вентиляционные каналы, применяемые в заглушенной камере фирмы «Белл телефон леборатриз».

1 — воздушный зазор; *2* — бетонная плита; *3* — металлическая соединительная горловина; *4* — бетонные стены; *5* — металлическая труба диаметром 30 *см*; *6* — кирпичная стена толщиной 10 *см*, оштукатуренная с обеих сторон; *7* — изолирующая пробковая прокладка толщиной 50 *мм*; *8* — к всасывающему вентилятору; *9* — от воздуходувки; *10* — два слоя гипсовых панелей толщиной 50 *мм* со стальной арматурой; *11* — каналы из оцинкованного железа размером 23 × 23 *см* с акустическими панелями толщиной 25 *мм*; *12* — облицовочные плиты 25 × 50 *мм* с акустическими панелями толщиной 25 *мм*; *13* — основной канал; *14* — возвратный канал; *15* — высокочастотный заграждающий фильтр; *16* — низкочастотный акустический фильтр.

фильтрами низкой частоты и полосовыми фильтрами с областью затухания между ними. Они рассматривались в качестве моделей, к которым применима теория Кельвина.

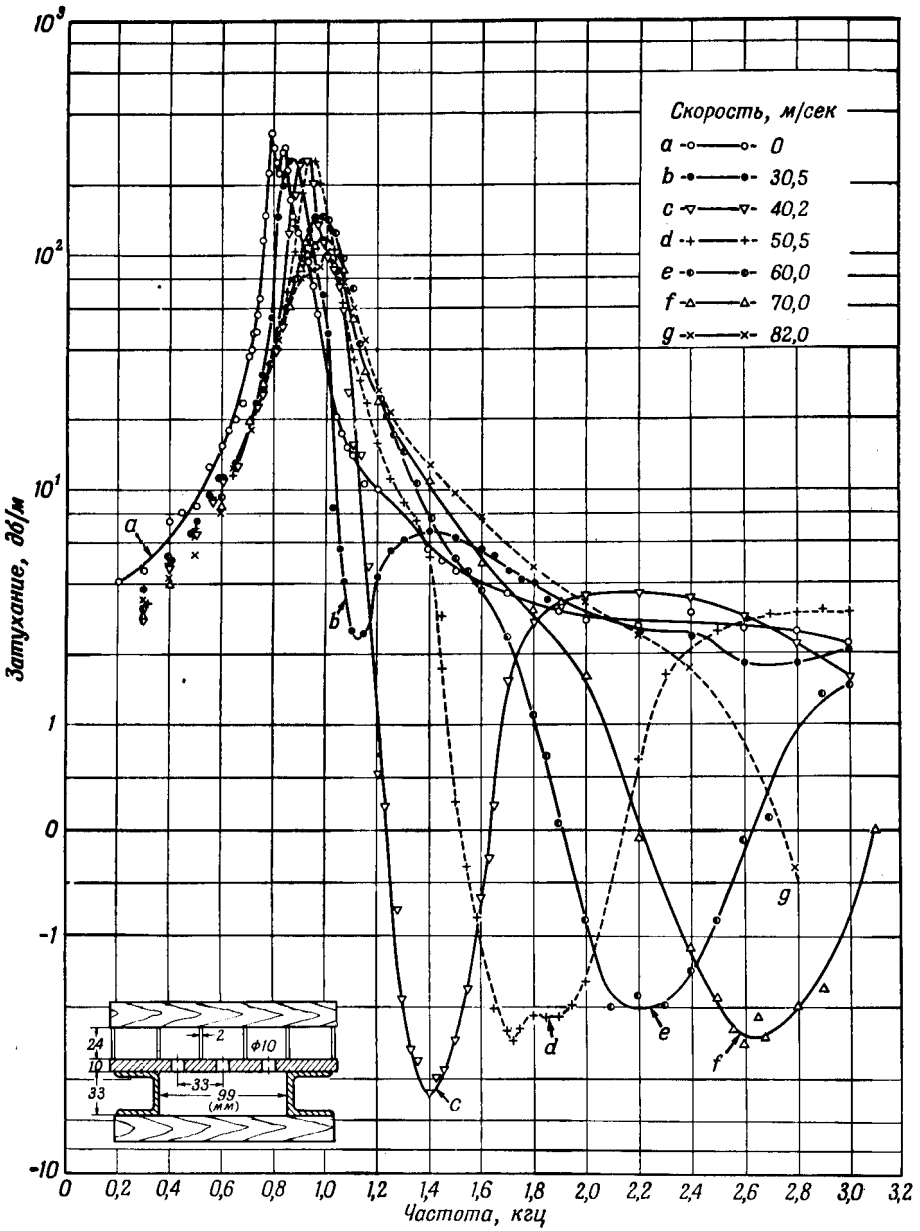
Устройство, показанное на фиг. 119, *а*, было предложено Томпсоном и выполнено Винсентом [32]. Грузы с массой M подвешены

том модели лучше всего начертить график зависимости показателя преломления от частоты; последний представляет собой величину, обратную фазовой скорости, которая определяется как ω/B, т. е. показатель преломления n равен B/ω.

На фиг. 119, *г* сплошной линией показан график величины n в системе без потерь; пунктирная линия соответствует случаю, когда учитывается затухание в системе. Если верхняя граничная частота f_3 значительно выше, чем f_2, то график становится очень похожим на кривую аномальной дисперсии, известную из оптики.

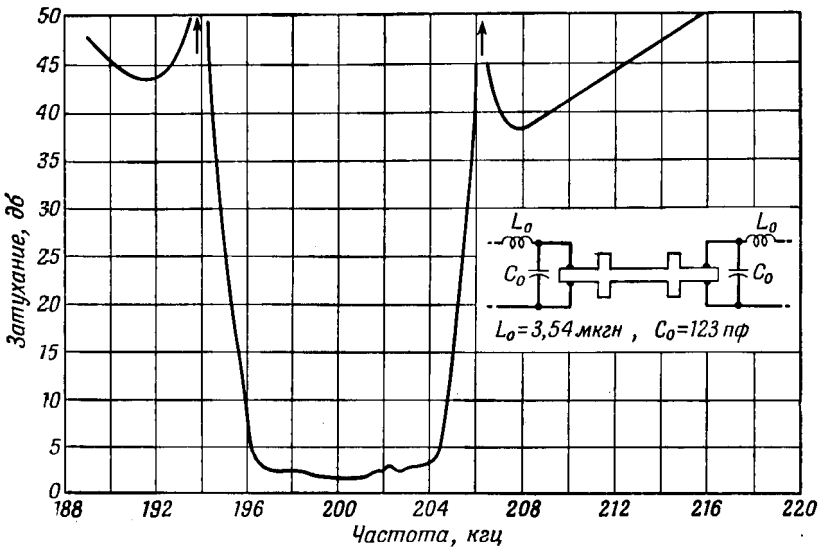
Примером акустического низкочастотного и полосового фильтра может служить конструкция [33], показанная в нижней части фиг. 120. Фильтр представляет собой канал с резонаторами Гельмгольца, имеющими квадратное сечение, расположенными в пределах 1 *м*. Частотная характеристика затухания фильтра (кривая *а*) снята в отсутствие воздушного потока. Приведенные графики показывают, что потери сильно возрастают вблизи резонансной частоты боковых резонаторов. Особенно интересно рассмотреть влияние скорости потока воздуха, протекающего по каналу. Оказывается, что при некоторых частотах, величина которых зависит от скорости установившегося потока воздуха, наблюдается усиление акустических колебаний, подводимых на вход системы. Это, по-видимому, был первый случай усиления акустических сигналов акустическим методом; такое устройство явилось праобразом акустического усилителя бегущей волны, который рассматривается в гл. 1 четвертого тома этой серии. С точки зрения снижения шумов явление усиления звука, конечно, нежелательно, поэтому его влияние должно быть уменьшено с помощью наклейки на соединительные отверстия резонаторов слоя шелковой ткани.

В последние годы было проведено много работ, направленных на создание механических колебательных устройств, предназначенных в качестве полосовых фильтров для систем связи. Один из первых таких фильтров [34, 35], схематически показанный на фиг. 121, представляет собой стержень, в котором распространяются продольные волны. Стержень снабжен поперечными стержнями, совершающими изгибные колебания и настроенными на частоты антирезонанса. Такой фильтр, изготовленный из одного куска керамики титаната бария, выполняет одновременно как функции преобразователей (входного и выходного), так и функции фильтрующих элементов. Два поперечных стержня создают два максимума затухания по обеим сторонам полосы пропускания. Катушки индуктивности и конденсаторы на входе и выходе фильтра предназначены для обеспечения необходимых входного и выходного сопротивлений и образуют дополнительную ячейку фильтра, обладающую бесконечно большим затуханием на высоких частотах.



Ф и г. 120. Акустический низкочастотный и полосовой фильтр, обладающий свойствами усилителя, зависящими от скорости потока воздуха (по Майеру, Михелю и Куртце).

Такая ячейка позволяет исключить низкочастотную и высокочастотную полосы пропускания, характерные для этой системы.



Фиг. 121. Вносимое затухание полосового фильтра стержневого типа, изготовленного из одного куска керамики титаната бария (по Гриффину).

На фиг. 121 показана характеристика вносимого затухания описанного фильтра. Существует много других типов фильтров, обсуждение и классификация которых даны в § 6.

§ 2. ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ГАЗАХ, ЖИДКОСТЯХ И ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

1. Внутреннее трение, затухание и скорость распространения упругих волн в газах и жидкостях

Упругие волны могут быть использованы в фильтрах и резонаторах только в том случае, если их затухание и сдвиг фазы в выбранной среде невелики и не обладают сильной зависимостью от температуры и давления. Как и в случае фильтров и других цепей, рассмотренных в § 1, уравнение распространения обычно записывается в форме

$$p = p_0 e^{-(A+jBx)} e^{j\omega t}, \qquad (5.15)$$

где A — коэффициент затухания волны в неперах на единицу длины (обычно на 1 *см*), а B — фазовая постоянная в радианах на

единицу длины. В такой форме уравнение описывает волну, распространяющуюся в одном направлении.

Для газов и жидкоетей, в которых сдвиговыми напряжениями можно пренебречь, уравнение плоской волны в бесконечной среде имеет вид

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+(\chi+2\eta)\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2}=\rho\frac{\partial \dot{u}}{\partial t}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,, \tag{5.16}$$

где p — звуковое давление, u — смещение частиц в направлении x, ρ — плотность, а χ и η — объемная и сдвиговая вязкости. (Смысл этих двух величин подробно рассматривается во втором томе.) Для газа имеет место соотношение [1])

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-p_0\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\rho V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{5.17}$$

где p_0 — постоянное давление, $\gamma=C_p/C_V$ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме и V — скорость распространения. Последнее уравнение справедливо и для жидких сред. Если исключить p или u из уравнения (5.16), то оно примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{j(\chi+2\eta)\,\omega}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\omega^2}{V^2}u=0, \tag{5.18}$$

где для простого гармонического движения $\partial/\partial t=j\omega$.

Решение этого уравнения ищется в виде (5.15), где p_0 заменено на u_0, а $A+jB$ представлено выражением

$$g=A+jB=\frac{j\omega/V}{\sqrt{1+j\,[(\chi+2\eta)/\rho V^2]}}\approx\frac{\omega^2(\chi+2\eta)}{2\rho V^3}+\frac{j\omega}{V}\,. \tag{5.19}$$

Для сред с малым поглощением Кирхгоф [37] показал, что перенос тепла из зон сжатия в зоны разрежения приводит к увеличению потерь энергии в соответствии с выражением

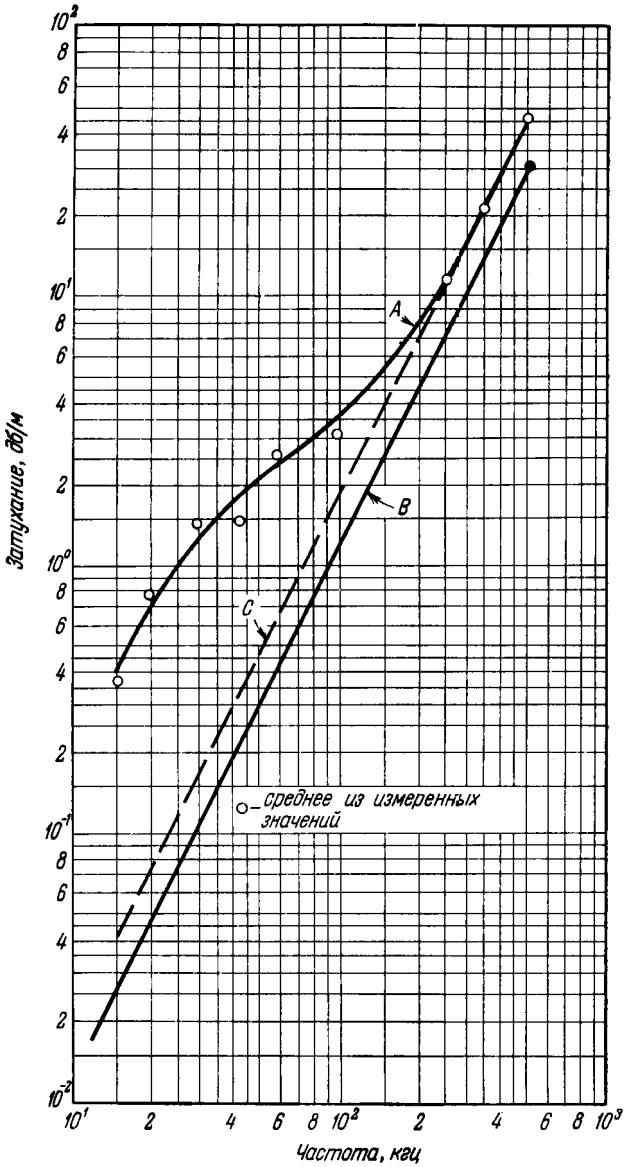
$$g=A+jB=\frac{\omega^2\{(\chi+2\eta)+[(\gamma-1)K/C_p]\}}{2\rho V^3}+\frac{j\omega}{V}\,, \tag{5.20}$$

где K — коэффициент теплопроводности. Из кинетической теории газов [38] известно отношение между сдвиговой вязкостью η и термодинамическими величинами $K/C_p=\frac{5}{2}\eta$. Для одноатомных газов из кинетической теории газов следует, что

$$(\chi+2\eta)=\frac{4}{3}\eta. \tag{5.21}$$

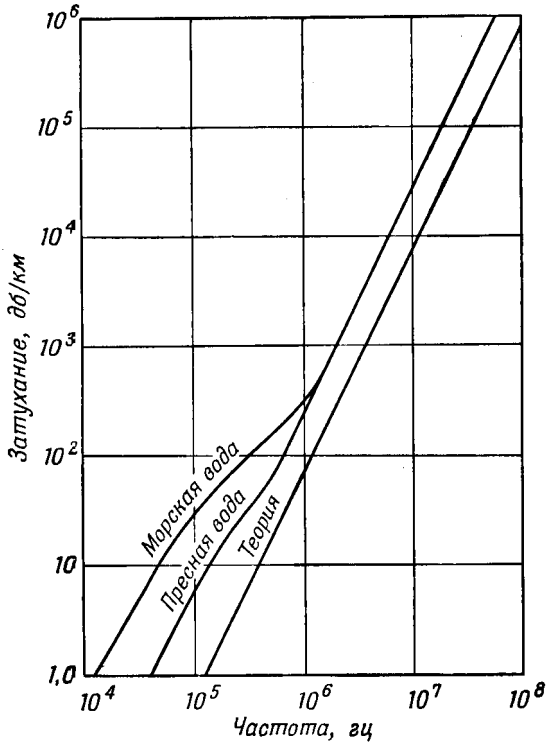
Для многоатомных газов и в особенности для жидкостей это соотношение не справедливо. Объемная вязкость χ в таких средах

[1]) Хант [36] весьма подробно рассматривает все вопросы, касающиеся затухания и скорости звука в жидкостях и газах.



Ф и г. 122. Измеренное затухание звука в сухом и влажном воздухе (по Сивиану).

положительна и приводит к существенному увеличению поглощения. В жидкостях член, обусловленный теплопроводностью, как правило, очень мал по сравнению с вязким членом и поэтому может не учитываться.



Фиг. 123. Измеренное затухание звука в пресной и морской воде (по Либерману).

На фиг. 122 приведены результаты измерений [39] поглощения в сухом воздухе в зависимости от частоты. Измеренное поглощение (кривая C) в 1,5 раза выше теоретического поглощения (кривая B). Кривая поглощения A получена при относительной влажности воздуха 37%, соответствующей содержанию 1,26 мол.% водяных паров при температуре 26,5° С. Таким образом, для сухого воздуха измеренное поглощение в 1,5 раза превышает поглощение, полученное согласно (5.21). Это различие можно объяснить конечной величиной χ. В присутствии водяных паров имеют место релаксационные процессы, при которых молекулы

воды облегчают взаимный обмен энергии между поступательными и вращательными степенями свободы.

На фиг. 123 приведены аналогичные результаты для поглощения звука в пресной и морской воде [40]. Для пресной воды измеренные значения поглощения в 2,5 раза больше, чем вычисленные с учетом соотношения (5.21) и теплопроводности. Полученное расхождение объясняется влиянием объемной вязкости, механизм которого рассматривается в статье Холла [41], а также во втором томе данной серии (в главе, написанной Литовицем). Увеличение поглощения в морской воде связано с релаксационными эффектами, обусловленными главным образом присутствием в воде $MgSO_4$.

Наряду с рассмотренными причинами, влияющими на распространение волн в свободном пространстве или в ограниченной среде на высоких частотах, существует еще один источник поглощения энергии, имеющий место в трубах на низких частотах, который дает существенно большие потери, чем потери, связанные с вязкостью и теплопроводностью среды. Поглощение в узких трубах объясняется тем, что газ или жидкость не скользит вдоль стенок трубы, а образует пограничный слой очень малой толщины. Этот слой между стенкой и движущейся жидкостью характерен тем, что в нем распространяются вязкие сдвиговые волны. Эти волны [12, 38] создают комплексное сопротивление движению, равное

$$Z = \sqrt{\frac{\omega\eta\varrho}{2}}(1+j) \tag{5.22}$$

на единицу поверхности. Толщина слоя при частоте 1 *кгц* имеет следующий порядок величины:

$$t \approx \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\varrho}} = 6{,}75\cdot 10^{-3}\ см \text{ (для воздуха)},$$

$$t = 1{,}78\cdot 10^{-3}\ см \text{ (для воды)}. \tag{5.23}$$

Следовательно, форма внутренней части трубы не играет существенного значения, в то время как отношение периметра к площади сечения является важным размерным параметром. Для газов поглощение, связанное с теплопроводностью, имеет тот же порядок величины, что и поглощение, обусловленное вязкими потерями. Для воздуха оба эти фактора можно объединить, увеличив коэффициент вязкости в 2,03 раза; таким образом, для воздуха

$$\eta' = 2{,}03\eta. \tag{5.24}$$

Присоединенную массу, обусловленную образованием пограничного слоя, можно определить, разделив реактивное сопротивление (5.22) на круговую частоту ω. Тогда уравнение движения может

быть записано в виде

$$\rho\left(1+\frac{P}{S}\sqrt{\frac{\eta'}{2\omega\varrho}}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{P}{S}\sqrt{\frac{\omega\eta'\varrho}{2}}\frac{\partial u}{\partial t}=p_0\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (5.25)$$

Разделив на ρ и решив полученное уравнение движения, получим

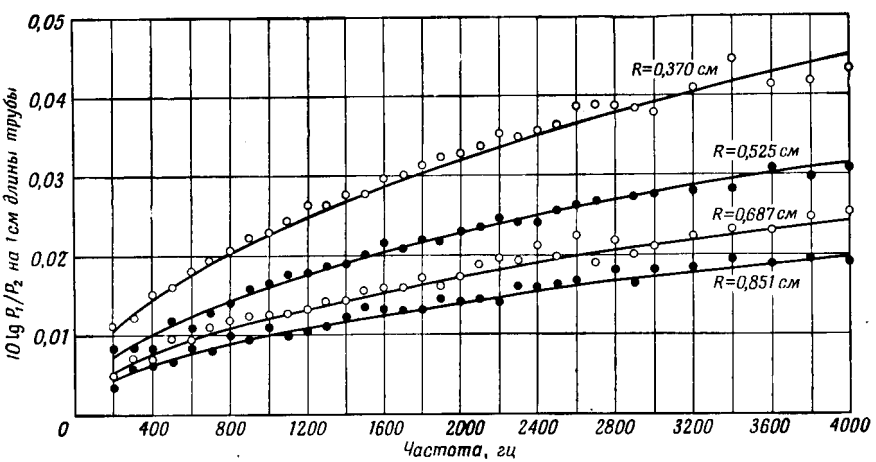
$$u=u_0e^{-(A+jB)x}e^{j\omega t},$$

где

$$A+jB=\frac{1}{2}\frac{P}{VS}\sqrt{\frac{\eta'\omega}{2\varrho}}+j\frac{\omega}{V}\left(1+\frac{1}{2}\frac{P}{S}\sqrt{\frac{\eta'}{2\omega\varrho}}\right); \qquad (5.26)$$

здесь V — скорость в среде, равная $\sqrt{p_0\gamma/\rho}$.

На фиг. 124 приведены результаты измерений поглощения звука (в *дб/см*) для труб различного диаметра [42]. Там же приведены кривые, соответствующие значениям поглощения, вычисленным по формуле (5.26) при $\eta'=2{,}03$ $\eta=3{,}77\cdot10^{-4}$ *пуаз*, $\rho=1{,}29\cdot10^{-3}$ *г/см*^{3} и $V=34{,}4\cdot10^3$ *см/сек*. Как видно из приведенных графиков, согласие между теорией и экспериментом хорошее.



Фиг. 124. Затухание звука в трубах различного диаметра.

Для воды соответствующее вычисленное поглощение в трубе радиусом 1 *см* для частоты 1 *кгц* составляет $3{,}25\cdot10^{-4}$ *дб/см*. Таким образом, поглощение в трубе в обоих случаях значительно выше, чем поглощение в бесконечной среде (см. фиг. 122 и 123).

Для акустических фильтров важную роль играет еще одна величина — характеристическое сопротивление элементов, т. е. отношение звукового давления к объемной скорости (в случае

когда волновод достаточно длинен, чтобы можно было пренебречь отражением от его конца). Для волн, распространяющихся в обоих направлениях, объемную скорость можно записать в виде

$$\dot{Su} = Se^{j\omega t}\left[Ce^{-(A+jB)x} + De^{(A+jB)x}\right], \tag{5.27}$$

где S — площадь поперечного сечения.

Соотношение (5.17) можно записать в следующем виде:

$$p = -\rho V^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{j\rho V^2}{\omega}\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = \frac{j\rho V^2}{\omega}(A+jB) \times$$
$$\times \left[Ce^{-(A+jB)x} - De^{+(A+jB)x}\right] e^{j\omega t}. \tag{5.28}$$

Для резонатора, которому соответствует электрический эквивалент в виде линии с разомкнутым концом, объемная скорость $\dot{Su} = 0$ (при $x = l$). Поэтому

$$D = -Ce^{-2(A+jB)l}. \tag{5.29}$$

Используя это соотношение и решая (5.28) относительно акустического сопротивления $-p/\dot{Su}$ при $x = 0$, получаем

$$-\frac{p}{\dot{Su}} = \frac{-j\rho V^2}{S\omega}(A+jB)\left[\frac{e^{(A+jB)l} + e^{-(A+jB)l}}{e^{(A+jB)l} - e^{-(A+jB)l}}\right] =$$
$$= \frac{j\rho V^2 (A+jB)}{S\omega}\left[\operatorname{cth}(A+jB)\,l\right]. \tag{5.30}$$

Преобразуя выражение в скобках с помощью тригонометрических формул, имеем

$$\operatorname{cth}(A+jB)\,l = \frac{\operatorname{cth} Al + j\operatorname{tg} Bl}{1 + j\operatorname{cth} Al \operatorname{tg} Bl}. \tag{5.31}$$

При $Al \to \infty$ $\operatorname{cth}(Al) \to 1$ и, следовательно, выражение (5.31) стремится к единице. Поэтому выражение для характеристического сопротивления системы запишется в виде

$$Z_0 = \frac{-j\rho V^2 (A+jB)}{S\omega} = \frac{\rho V^2 (B - jA)}{S\omega}. \tag{5.32}$$

В случае отсутствия потерь $B = \omega/V$ и сопротивление имеет лишь активную составляющую:

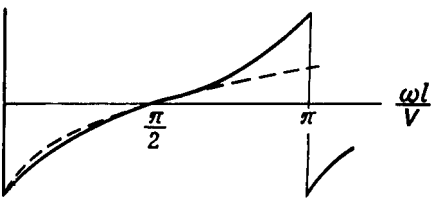
$$Z_0 = \frac{\rho V}{S}. \tag{5.33}$$

Для систем, в которых учитывается поглощение энергии, характеристическое сопротивление имеет небольшую реактивную составляющую, которая обычно значительно меньше, чем активная составляющая.

Если пренебречь коэффициентом затухания A, который обычно мал по сравнению с фазовой постоянной B, то сопротивление линии с разомкнутым концом будет равно

$$-jZ_0 \operatorname{ctg} Bl. \tag{5.34}$$

Как показано на фиг. 125, кривая полного сопротивления имеет ряд резонансных и антирезонансных частот (соответствующих нулевым и максимальным значениям сопротивления) и начинается с отрицательного реактивного сопротивления. При создании фильтров обычно используется первая резонансная частота, а элементы



Фиг. 125. Полное сопротивление $(-jZ_0 \operatorname{ctg} \omega L/V)$ и его аппроксимация, полученная с помощью конденсатора и катушки индуктивности.

фильтра рассматриваются как последовательно соединенные катушка индуктивности и конденсатор (или эквивалентные им масса и податливость). На фиг. 125 пунктирной линией показана частотная зависимость сопротивления цепи, состоящей из последовательно соединенных катушки индуктивности и конденсатора. Чтобы определить значения индуктивности и емкости, резонанс которых соответствует первому резонансу разомкнутой линии и для которых наклон кривой сопротивления приблизительно равен наклону кривой сопротивления линии, можно разложить в ряд функцию ctg в окрестности первого резонанса, который соответствует

$$Bl = \frac{\omega_R l}{V} = \frac{\pi}{2}, \tag{5.35}$$

и отбросить все члены, кроме первого. Тогда получим

$$Z_l = -jZ_0 \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega l}{V}\right) = -jZ_0 \operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_R}\right)\right] \approx$$
$$\approx jZ_0\left(\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_R}\right), \tag{5.36}$$

где $\omega_R = 2\pi f_R$ (f_R — первая резонансная частота). Подобным же образом полное сопротивление системы, состоящей из массы M_1 и податливости C_1, равно

$$Z_R = \frac{-j}{\omega C_1}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_R^2}\right) = \frac{-j}{\omega C_1}\left[1-\frac{(\omega_R+\Delta\omega)}{\omega_R^2}\right]^2 = \frac{2j\Delta\omega}{\omega_R^2 C_1}. \tag{5.37}$$

Приравняв эти два выражения, получим

$$C_1 = \frac{4}{\pi Z_0 \omega_R} = \frac{8lS}{\pi^2 \varrho V^2}, \qquad M_1 = \frac{1}{\omega_R^2 C_1} = \frac{\varrho l}{2S}. \tag{5.38}$$

Следовательно, в единицах акустического сопротивления податливость равна объему камеры, умноженному на $8/\pi^2$ и деленному на жесткость $\rho V^2 = p_0\gamma$, а масса, обычно называемая в акустике инертностью, равна половине произведения длины на плотность, деленного на площадь. В случае когда должно быть учтено затухание, активное сопротивление при резонансе

$$R = \frac{Z_0}{\operatorname{cth} Al} \approx \frac{\varrho V}{S}(Al). \tag{5.39}$$

Добротность Q резонансной цепи обычно определяется как отношение реактивного сопротивления катушки при резонансе к активному сопротивлению, т. е.

$$Q = \frac{\omega_R \varrho l/2S}{(\varrho V/S)(Al)} = \frac{\omega_R l/V}{2(Al)} = \frac{B}{2A}, \tag{5.40}$$

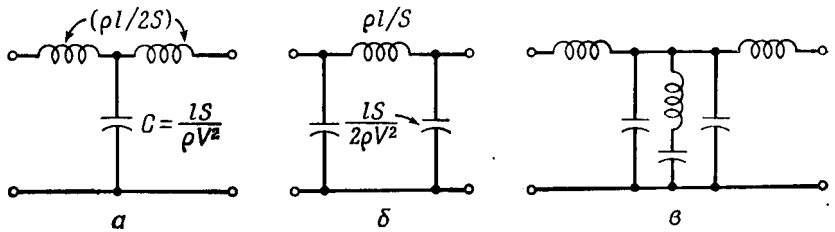
где B — фазовая постоянная (в радианах на единицу длины), а A — коэффициент затухания (в неперах на единицу длины). Например, добротность Q трубки радиусом 1 *см* (на частоте 1 *кгц*) для случаев заполнения ее воздухом и водой равна соответственно

$$Q_{\text{возд}} = 104, \qquad Q_{\text{вод}} = 540. \tag{5.41}$$

Вследствие такой низкой добротности, а также из-за сильного изменения резонансных частот в зависимости от температуры и давления среды акустические и гидравлические фильтры не представляют интерес с точки зрения создания фильтров для систем связи.

Когда такие резонирующие элементы, соединенные прямыми проводящими трубками, образуют фильтр, размеры которого невелики, эквивалентную схему в первом приближении можно получить, рассматривая резонаторы как последовательно соединенные массы и податливости, а соединительные трубки — как цепочечные фильтры. Такие Т-образные и П-образные цепи подробно рассмотрены в книге [12], а результаты показаны на фиг. 126. Для соединительных трубок, длина которых меньше четверти длины волны, применимы эквивалентные цепи, показанные на фиг. 126, *а* и *б*. В Т-образной цепи каждое последовательное плечо содержит индуктивность, соответствующую половине полной распределенной массы среды, заполняющей соединительную трубку, а в П-образной цепи индуктивность последовательного плеча соответствует полной распределенной массе [см (5.42)]. То же правило при построении эквивалентных схем относится и к после-

довательно включенным активным сопротивлениям. Что касается податливостей, то емкость параллельного плеча в Т-образной цепи соответствует полной распределенной податливости трубки [см. (5.42)], а в П-образной цепи емкость каждого из двух параллельных плеч соответствует половине податливости системы.



Фиг. 126. Четырехполюсники, моделирующие процесс распространения волн.

а — Т-образное звено; *б* — П-образное звено; *в* — эквивалентная схема фильтра, показанного на фиг. 120.

В таком приближении любые активные сопротивления утечки, которые определяются рассеянием энергии, связанным с потерями при распространении в среде, можно не учитывать. Таким образом,

$$M_1 = \frac{\varrho l}{S}, \qquad R_1 = \frac{P}{S^2}\sqrt{\frac{\eta'\omega\varrho}{2}}\,l, \qquad C_1 = \frac{lS}{\varrho V^2}. \qquad (5.42)$$

В качестве примера использования приведенных выражений на фиг. 126, *в* показана эквивалентная схема фильтра, изображенного на фиг. 120. На основании вида эквивалентной схемы можно сказать, что это низкочастотный и полосовой фильтр, имеющий пик затухания на резонансной частоте боковых резонаторов Гельмгольца.

Для фильтров бóльших размеров рассмотренное приближение не справедливо, и для расчетов полос пропускания и ослабления следует пользоваться методами, рассмотренными в § 6 настоящей главы.

2. *Особенности распространения волн в твердых телах и влияние температуры*

Распространение упругих волн в твердых телах сопровождается гораздо меньшими потерями, чем при прохождении волн через жидкости и газы, и отличается более высокой температурной стабильностью. В соответствии с этим твердые тела представляют значительно больший интерес в качестве элементов фильтров и резонаторов, предназначенных для аппаратуры связи.

Наибольшее распространение получили три типа материалов: поликристаллические металлы, например алюминиевый сплав марки 5052-H32, кристаллический кварц и поликристаллическая пьезоэлектрическая керамика. Последние два типа материалов применяются в качестве резонаторов в фильтрах, в то время как поликристаллические металлы используются в механических фильтрах, возбуждаемых преобразователями. Помимо алюминиевых сплавов, особый интерес представляют железо-никелевые сплавы, прошедшие горячую обработку, известные под названиями вибраллой [1]) и Ni-Span-C [2]). Эти сплавы имеют очень малый температурный коэффициент и особенно пригодны для изготовления высокочастотных фильтров.

Затухание в металлах заметно уменьшается с увеличением содержания присадок, и обычно оно меньше в сплавах, чем в чистых металлах. Это явление объясняется укорочением длины возможных дислокационных петель. Существует еще один интересный экспериментальный факт, который пока не удалось достаточно убедительно объяснить ни одной из предложенных для металлов теорий поглощения. Он состоит в том, что добротность практически не зависит от частоты вплоть до границы, где начинает сказываться рассеяние волн на зернах материала, в результате чего затухание начинает увеличиваться пропорционально четвертой степени частоты. Выбор алюминиевого сплава 5052-H32 в качестве материала для ультразвуковых линий задержки объясняется тем, что он обладает незначительным поглощением на низких частотах и малыми размерами зерен. Для этого материала коэффициент затухания дается выражением

$$\alpha = A_1 f + A_2 f^4, \tag{5.43}$$

где $A_1 = 10^{-10}$ *непер·сек/см* и $A_2 = 50 \cdot 10^{-32}$ *непер·сек*^{4}*/см*. Такая зависимость совпадает по форме с зависимостью, полученной для материалов с крупнозернистой структурой [44, 45]. При такой величине затухания и скорости сдвиговых волн, равной $3{,}11 \cdot 10^5$ *см/сек*, эффективная добротность на низких частотах, согласно (5.40), составляет

$$Q = 101\,000. \tag{5.44}$$

Детальное изучение алюминиевого сплава дюралюминий 24 ST в низкочастотной части диапазона (от 0,84 до 100 *кгц*) показало [46], что добротность Q монотонно снижается с $2{,}5 \cdot 10^5$ до $1{,}2 \cdot 10^5$. Скорость распространения при этом не обнаруживает каких-либо

[1]) См. [43]; сплав позволяет получить стержни, для которых температурный коэффициент скорости близок к нулю.

[2]) Сплав выпускается фирмой «Интернейшнл никел».

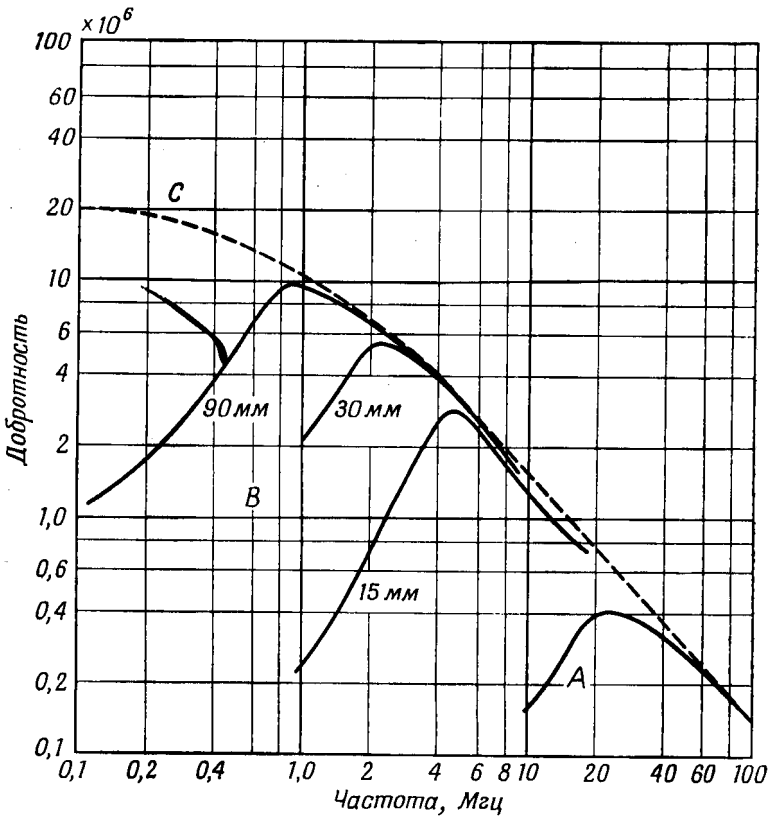
изменений, которые не объяснялись бы теорией распространения нормальных волн (как показано в гл. 2, фазовая и групповая скорости нормальных волн зависят от отношения длины волны к диаметру). Для крутильных волн не обнаружено дисперсии. Благодаря малым потерям этот материал может использоваться в линиях задержки. Однако вследствие сравнительно высокого температурного коэффициента ($-3 \cdot 10^{-4}$ *град*$^{-1}$) он в большинстве случаев требует применения температурной стабилизации. Железо-никелевые сплавы [43] имеют температурные коэффициенты $\pm 10 \cdot 10^{-6}$ *град*$^{-1}$, однако для них затухание в низкочастотном диапазоне в 5—10 раз выше, т. е. $Q = 10^4$—$2 \cdot 10^4$. Если такая добротность вполне приемлема для многих типов механических фильтров, она не удовлетворяет требованиям, предъявляемым к материалам для изготовления длинных линий задержки.

Кварцевые резонаторы обладают такой высокой добротностью, что ее трудно измерить (добротность определяется способом крепления кристалла, а не потерями в материале). Результаты измерений [47] с деформациями сдвига приведены на фиг. 127. На частотах выше 1 *Мгц* добротность уменьшается обратно пропорционально частоте, в то время как на частотах ниже 1 *Мгц* она приходит в соответствие с экспериментально полученными значениями добротности для металлов. Механизмы внутреннего трения в природном и синтетическом кварце подробно рассмотрены в гл. 11 третьего тома этой серии.

На фиг. 128 показаны основные срезы, применяемые при изготовлении кварцевых резонаторов, и их расположение по отношению к кристаллографическим осям. В фильтрах наиболее часто используется $+5°$ X-срез. Этот тип среза выбран из-за его высокой температурной стабильности, несмотря на то что он имеет довольно сложный частотный спектр [48]. Этот частотный спектр приведен на фиг. 129, *а*. Нижняя граница заштрихованной области соответствует резонансным частотам, в то время как ширина этой области пропорциональна разности частот резонанса и антирезонанса. Когда отношение ширины пластины w к ее длине l приближается к значению 0,23, возникает связь со второй модой изгибных колебаний, поэтому обычно пластины этого среза применяются при отношениях ширины к длине $w/l = 0$—$0{,}2$ и $w/l = 0{,}28$—$0{,}6$. Соответствующие температурные коэффициенты приведены на фиг. 129, *б*, а отношение емкостей дано на фиг. 132.

На фиг. 130 приведена фотография кристалла, смонтированного в откачанном стеклянном баллоне (чтобы устранить демпфирующее влияние воздуха и защитить кристалл от влажности и изменений давления окружающей среды). В настоящее время наружные баллоны обычно изготовляются из алюминия, а герметизация выводов осуществляется методом холодной сварки. Пла-

стина металлизирована с обеих сторон, но покрытие сделано не сплошным — посредине пластины (вдоль или поперек) проходит разделительная полоска. Одна пара электродов включается в одно плечо мостиковой схемы фильтра, а вторая — в другое плечо.

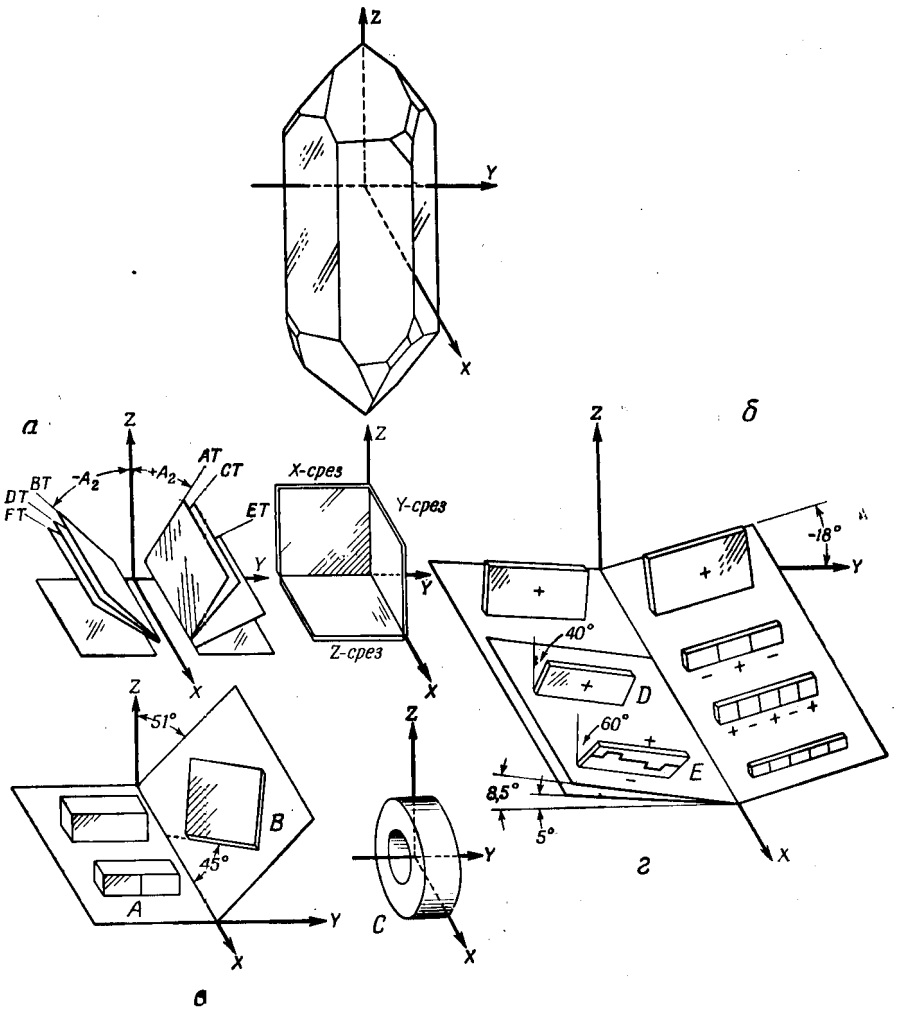


Фиг. 127. Измеренная зависимость добротности различных кварцевых элементов от частоты.

A — плоская пластина в воздухе; *B* — фасонные пластины различных размеров в вакууме; *C* — наиболее вероятная зависимость для пластины без держателей.

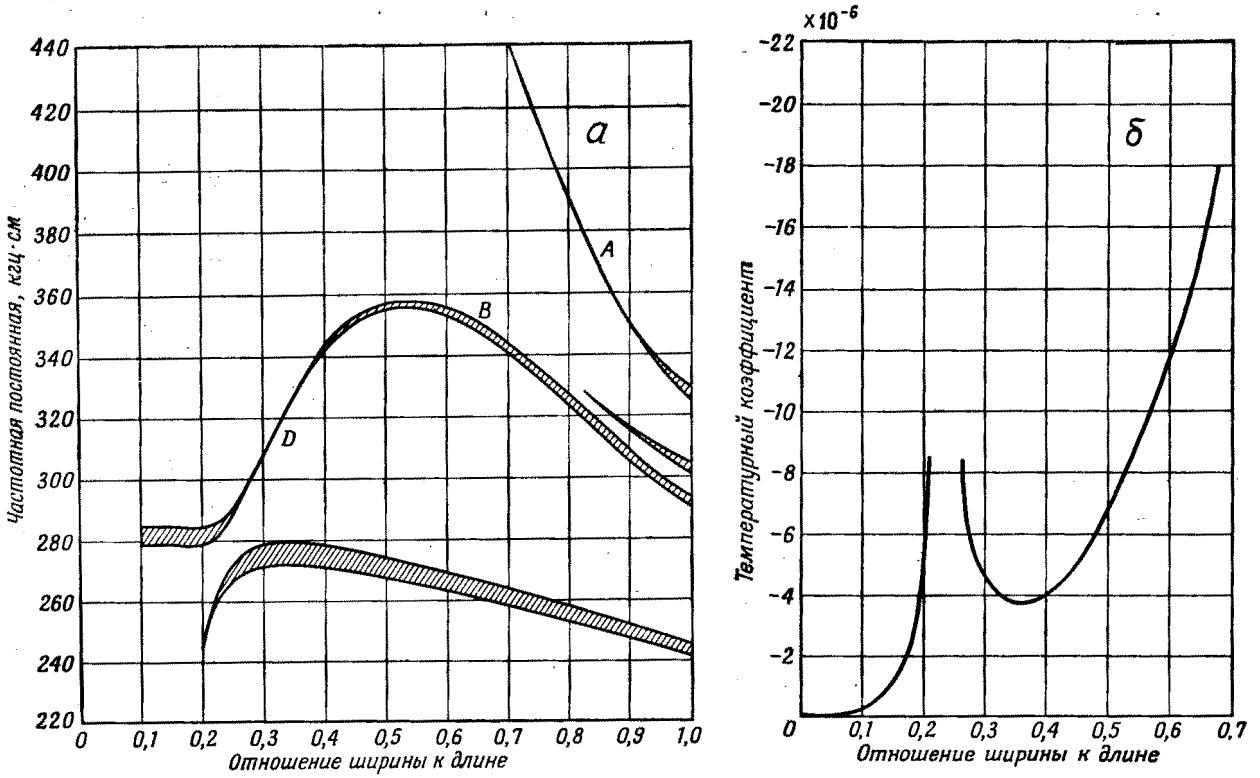
Было показано [49], что такая комбинация эквивалентна двум одиночным пластинам, полное сопротивление которых в 2 раза превышает сопротивление полностью покрытой пластины. Таким способом, используя всего две пластины, можно создать ячейку полосового фильтра, изображенную на фиг. 110.

Пластина подвешивается с помощью четырех проволочек, прикрепленных к серебряным точкам, нанесенным на поверхность



Ф и г. 128. Основные срезы, применяемые при изготовлении кварцевых резонаторов.

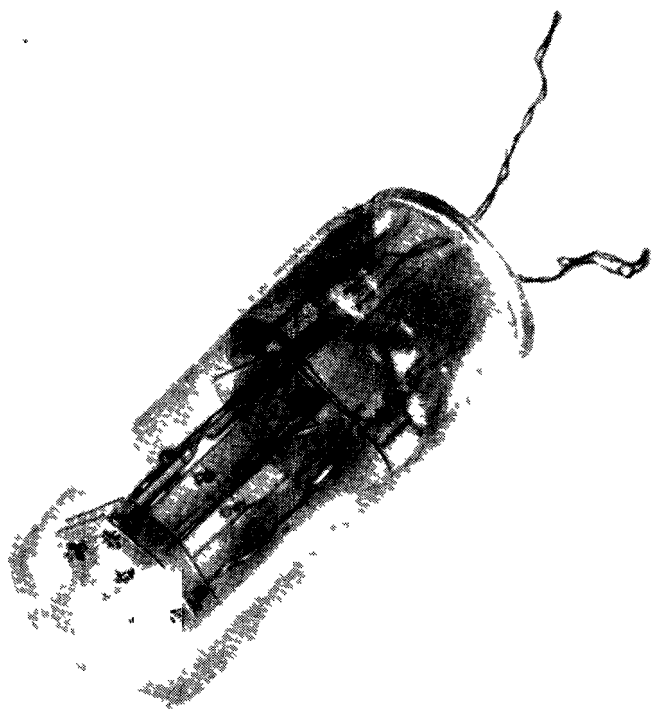
а — срезы с нулевым температурным коэффициентом (используемые в генераторах и фильтрах); высокочастотные — *AT* (+35°15′) и *BT* (—49°); низкочастотные — *CT* (+38°), *DT* (—52°), *ET* (+66°) и *FT* (—57°). *б* — срез с нулевым коэффициентом электромеханической связи ($s_{24} = 0$), работающий на 1, 3, 5 и 7 гармониках (—18° *X*-срез). *в* — срезы с нулевым температурным коэффициентом: *A* — 0° *Z*-срез, применяемый в генераторах на основной частоте и второй гармонике, *B* — *GT*-срез, применяемый в фильтрах и генераторах, *C* — тороидальный элемент. *г* — элементы с малым температурным коэффициентом для фильтров: *D* — продольно колеблющаяся пластина *MT*-среза, *E* — изгибно колеблющийся элемент *NT*-среза.



Фиг. 129. Свойства пластин + 5° *X*-среза.

а — частотный спектр; б — температурный коэффициент.

методом вжигания, а затем вся поверхность пластины методом напыления покрывается очень тонким слоем серебра. Удаление серебра с поверхности пластины на линии раздела осуществляется механическим способом. Если проволочки припаиваются к серебряным точкам, то добротность системы достигает 50 000, причем



Фиг. 130. Кварцевый резонатор с продольными колебаниями, смонтированный в стеклянном баллоне.

большая часть потерь связана с наличием на пластине припоя. Если проволочки соединяются с серебряным покрытием методом термокомпрессии [50, 51], то добротность повышается до 500 000.

Параметры пьезоэлемента можно определить на основании данных, приведенных на фиг. 132, и емкости C_0, вычисляемой по формуле

$$C_0 = \frac{4{,}55 \cdot 1{,}11 \cdot 10^{-12} lw}{4\pi t} = \frac{0{,}402 \cdot 10^{-12} lw}{t} \text{ фарад}, \qquad (5.45)$$

Таблица 23

Керамика PZT, предназначенная для использования в фильтрах

	k_p	Произведение f_R на диаметр, *гц · м*	$\varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0$	Q_M	$s_{11}^E \times 10^{-12}$, *м²/н*	s_{33}^E	Изменение f_R при изменении температуры от —40 до +85° С, %	Изменение f_A при изменении температуры от —40 до +85° С, %	Минимальное и максимальное значения Q_M в интервале температур от —40 до +85° С
PZT-6A 1	0,34—0,44	2360	1050—1150	450	11,0	—	<0,2	<0,2	225, 450
PZT-6A 2	0,20—0,35	2360	900—1000	550	11,0	—	<0,2	<0,2	370, 550
PZT-6B	0,0—0,21	2620	550—650	1500	8,95	9,30	<0,2	<0,2	1100, 1700

	Увеличение ε_{33}^T при изменении температуры от —40 до +85° С, %	Изменение k_p при изменении температуры от —40 до +85° С	Изменение f_R за 10 лет, %	Изменение f_A за 10 лет, %	Изменение ε_{33}^T за 10 лет, %	Изменение k_p за 10 лет, %
PZT-6A 1	38	<0,01	<0,1	<0,1	—0,6	(~ —0,2)
PZT-6A 2	35	<0,01	<0,1	<0,1	—0,6	(~ —0,2)
PZT-6 B	23	<0,01	<0,1	<0,1	—0,6	(~ —0,2)

где l — длина, w — ширина и t — толщина пластины в сантиметрах. Емкость C_1 определяется с помощью графиков отношения емкостей (фиг. 132), а индуктивность — по формуле

$$L_1 = \frac{1}{\omega_R^2 C_1}. \qquad (5.46)$$

Метод определения требуемой резонансной частоты f_R и емкостей C_1 и C_0 описан в § 4.

Преобразователи другого типа, используемые в фильтрах, изготовляются из поликристаллической пьезокерамики, обладающей значительно бóльшим коэффициентом электромеханической связи, чем кварц, и соответственно существенно пониженной добротностью ($Q \approx 400$). Основные свойства керамики и методы улучшения ее основных параметров подробно описаны в гл. 3. Для фильтров применяются две разновидности пьезокерамических материалов: титанат бария с добавками титаната свинца и титаната кальция и титанат-цирконат свинца типа PZT-6, свойства которых рассматриваются в гл. 3. При добавлении к титанату бария (80%) 12% титаната свинца и 8% титаната кальция [1]) [52] точка второго фазового перехода снижается, а температура Кюри повышается. Керамика такого состава имеет следующие свойства: частота в диапазоне температур от — 20 до + 60° С изменяется не более чем на 0,2%, радиальный коэффициент электромеханической связи превышает 20%, а добротность достигает 1500. Сравнительно большое изменение свойств при старении, происходящее в течение длительного времени, ограничивает использование этого материала в фильтрах, предназначенных для ответственных целей.

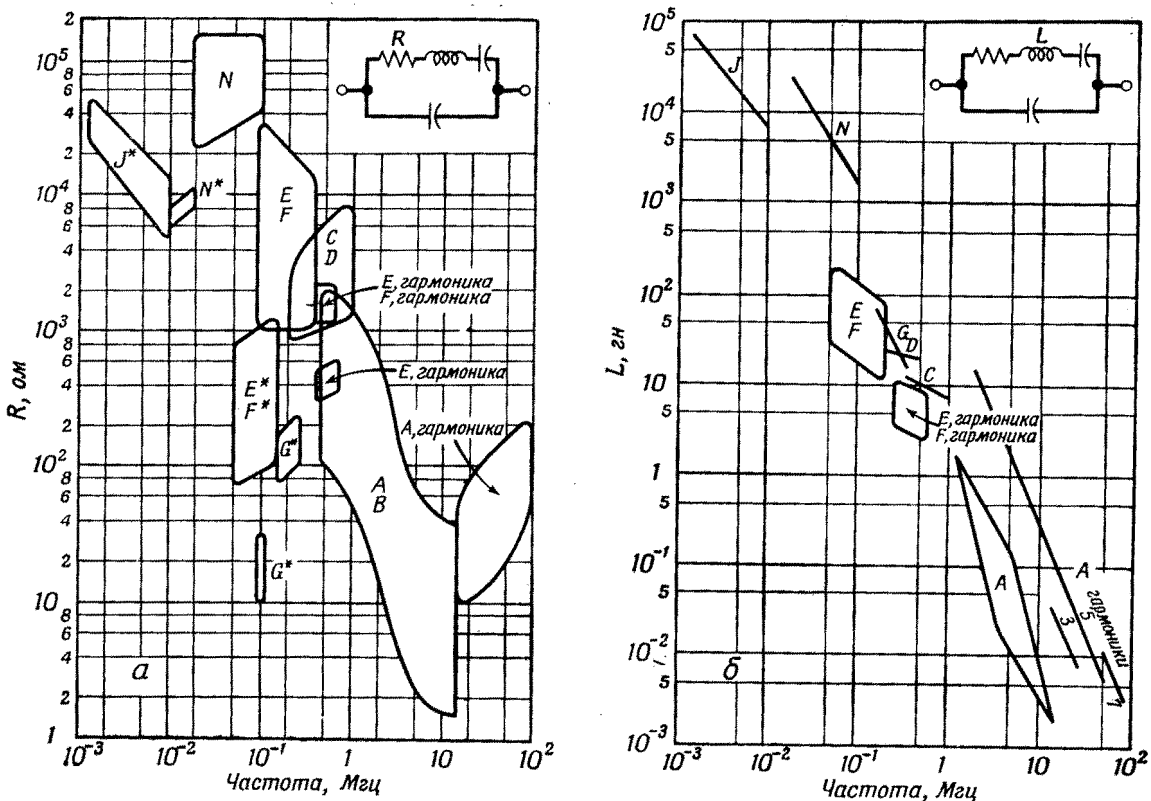
Несколько лучшие характеристики получены для керамики PZT-6. Некоторые свойства новейших керамических материалов приведены в табл. 23. PZT-6 имеет радиальный коэффициент электромеханической связи k_p, равный 45%, добротность $Q = 400$, а частота в интервале температур от —20 до +60° С изменяется не более чем на $\pm$ 0,1%. Кроме того, эффект старения в течение 10 лет оказался незначительным [61] и не превышает 0,1%. Применение таких элементов в фильтрах рассмотрено в § 4, п. 2.

§ 3. ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

1. Моды колебаний кварцевых пластин различных срезов

Кварцевые резонаторы, применяемые в фильтрах и для стабилизации частоты генераторов, изготовляются для частот от 1,2 *кгц* до 100 *Мгц*. В справочнике [53] дан перечень свойств, основных

[1]) Этот состав, разработанный для применения в фильтрах, описан в патенте США № 2 906 973.

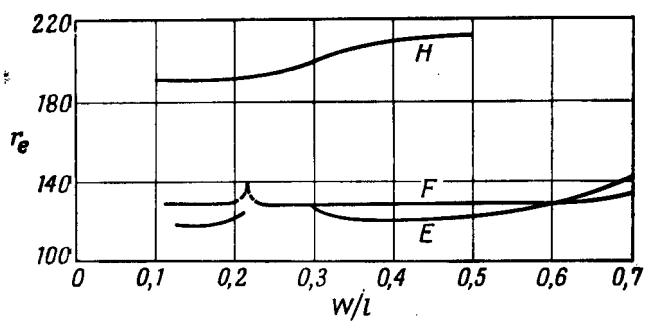


Ф и г. 131. Пределы изменения параметров кристаллов различных срезов при разных методах их изготовления.
а — **изменение сопротивления** *R* [звездочкой (*) отмечены данные для кристаллов в откачанном баллоне]; *б* — **изменение индуктивности** *L*.

Таблица 24

Условное обозначение элемента [1]	Стандартное обозначение среза	Колебания	Диапазон частот
A	*AT*	Сдвиговые по толщине	0,5—100 *Мгц*
B	*BT*	» » »	5—15 *Мгц*
C	*CT*	Сдвиговые	300—1000 *кгц*
D	*DT*	»	200—500 *кгц*
E	+5° *X*	Продольные	60—300 *кгц*
F	−18,5° *X*	»	60—300 *кгц*
G	*GT*	»	100—556 *кгц*
H	+5° *X*	Изгибные по длине — ширине	10—100 *кгц*
J	+5° *X* (2 пластины)	Изгибные по длине — толщине	1,2—10 *кгц*
M	*MT*	Продольные	10—100 *кгц*
N	*NT*	Изгибные по длине — ширине	10—100 *кгц*

[1] Обозначения и характеристики Сайкса [53].



Ф и г. 132. Отношение емкостей r для различных элементов.

Элемент	Основные размеры	r	Элемент	Основные размеры	r
A	$l/t > 5$	250	*G*	$w/l = 0{,}85$	350
B	$l/t > 5$	650	*J*	$t/l < 0{,}06$	200
C	$w/l = 1$	350	*M*	$w/l = 0{,}4$	190
D	$w/l = 1$	400	*N*	$w/l < 0{,}3$	900

параметров и областей применения таких кристаллов. В табл. 24 приведены условные обозначения, обычно применяемые названия срезов, моды колебаний и диапазоны частот, в которых могут работать кристаллы различных срезов.

При разработке схем важно также иметь данные о потерях энергии, связанных с наличием индуктивности, а также об отношении емкостей для таких элементов. На фиг. 131, *а* показаны пределы изменения активного сопротивления элемента, а на фиг. 131, *б* — индуктивности в зависимости от технологии изготовления. Большая часть элементов имеет определенную форму и фиксированное значение отношения емкостей, приведенное в подписи к фиг. 132. Однако элементы *E*, *F* и *H* применяются различных относительных размеров; графики на фиг. 132 показывают, как изменяется отношение емкостей в зависимости от отношения ширины элемента к его длине.

2. *Срезы кварца с минимальным температурным коэффициентом частоты*

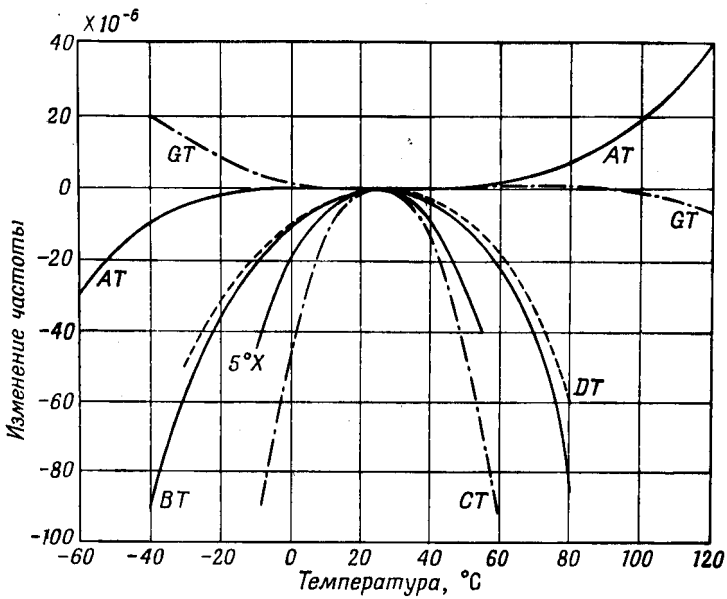
Большинство срезов кварца, показанных на фиг. 128, было получено в результате исследований [54], позволивших установить связь между ориентацией пластины по отношению к кристаллографическим осям и модой колебаний, при которой температурный коэффициент частоты оказывается минимальным. Одна из таких зависимостей, относящаяся к пластинам 5°*X*-среза (кристалл типа *E*), показана на фиг. 129, *б*; кривая построена для комнатной температуры. Зависимость относительного изменения частоты $\Delta f/f$ для этого среза в широком интервале температур, изображенная на фиг. 133, имеет параболическую форму. На фиг. 133 приведены также графики изменения частоты с температурой для нескольких стандартных срезов кварца, указанных в табл. 24. Большинство из них также имеет параболическую форму. Исключение составляют *AT*- и *GT*-срезы, для которых зависимость частоты от температуры определяется кубическим членом. В зависимости общего вида

$$f = f_0 [1 + a_1 (T - T_0) + a_2 (T - T_0)^2 + a_3 (T - T_0)^3 + \ldots] \quad (5.47)$$

коэффициент a_1 равен нулю для всех кристаллов с нулевым температурным коэффициентом; кроме того, для *AT*- и *GT*-срезов $a_2 = 0$. Поэтому указанные срезы, ориентация которых показана на фиг. 128, имеют постоянную частоту в широком интервале температур, вследствие чего пластины таких срезов используются в качестве стандартов частоты.

Кварцевые элементы *GT*-среза [55] предназначены для работы на продольных колебаниях по ширине кристалла, которые свя-

заны с продольными колебаниями по длине. При изменении отношения длины элемента к его ширине коэффициент a_2 меняет знак, а при значении отношения ширины к длине $w/l = 0{,}855$ коэффициент a_2 становится равным нулю, в результате чего температурная зависимость частоты приобретает вид, показанный на фиг. 133. Элементы такого типа работают в диапазоне частот 100—556 *кгц*; они применяются в качестве стандартов частоты в ряде

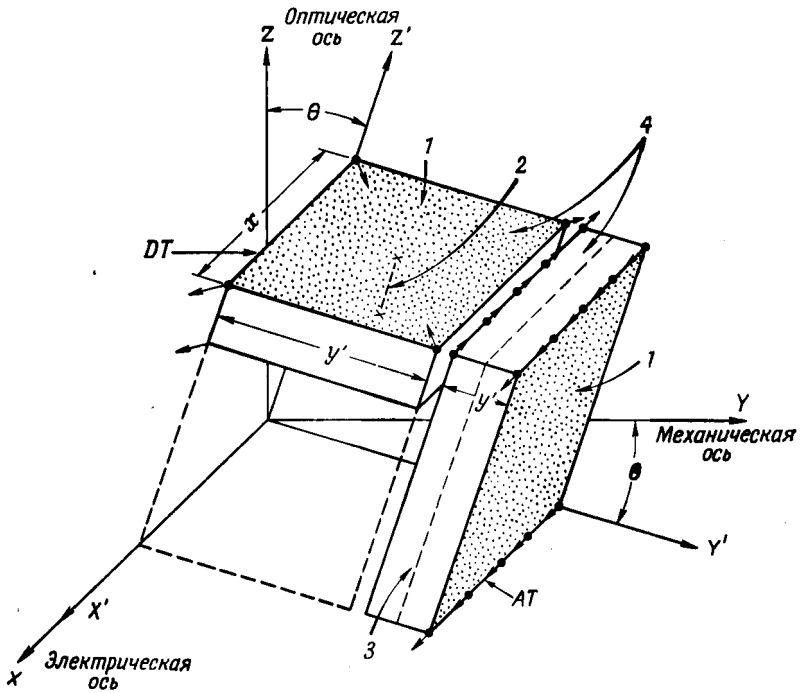


Ф и г. 133. Относительное изменение частоты в зависимости от температуры для различных кварцевых резонаторов с нулевым температурным коэффициентом.

устройств, в том числе в системе дальней навигации Лоран, в системе частотных стандартов фирмы «Белл», а также в качестве вторичных эталонов для атомных часов.

В кристаллах AT-среза нулевой температурный коэффициент частоты получается вследствие изменения упругого модуля сдвига в зависимости от ориентации: кристалл с поверхностью среза, перпендикулярной оси Y, имеет положительный температурный коэффициент, а кристалл с поверхностью среза, перпендикулярной оси Z, обладает отрицательным температурным коэффициентом. Путем изменения угла среза относительно оси X, как показано на фиг. 128, были найдены два угла (+35°15′ для AT-среза и —49° для BT-среза), при которых температурный коэффициент частоты

равен нулю для комнатной температуры. Для пластин AT-среза коэффициент a_2 в уравнении (5.47) равен нулю, в то время как для пластин BT-среза он имеет небольшое отрицательное значение, вследствие чего температурная зависимость частоты для этого среза имеет приблизительно параболическую форму. Оба среза широко используются в устройствах для стабилизации частоты



Ф и г. 134. Ориентация пластин DT- и AT-срезов относительно оптической (Z), электрической (X) и механической (Y) осей.

1 — поверхность для нанесения электрода; *2* — узловая линия; *3* — узловая плоскость; *4* — плоскость сдвига.

генераторов. Недавно было показано [56, 57], что пластина AT-среза определенной формы, колеблющаяся на пятой гармонике, перспективна в качестве стандарта высокой частоты.

Широко используются также кристаллы CT- и DT-срезов с колебаниями поверхностного сдвига. В этих кристаллах действующим является приблизительно тот же модуль сдвига, что и в случае сдвиговых колебаний по толщине для пластин AT- и BT-срезов; это видно на фиг. 134. Пластина DT-среза вырезается приблизительно под углом 90° к пластине AT-среза, а пластина

CT-среза аналогично расположена по отношению к пластине *BT*-среза. Оба эти кристалла имеют параболическую кривую зависимости частоты от температуры (см. фиг. 133). Такие элементы в форме квадратных пластин, подвешенные на проволочках, присоединенных в середине пластины к серебряному покрытию, широко применялись во время второй мировой войны в качестве стабилизаторов частоты в танковых радиостанциях.

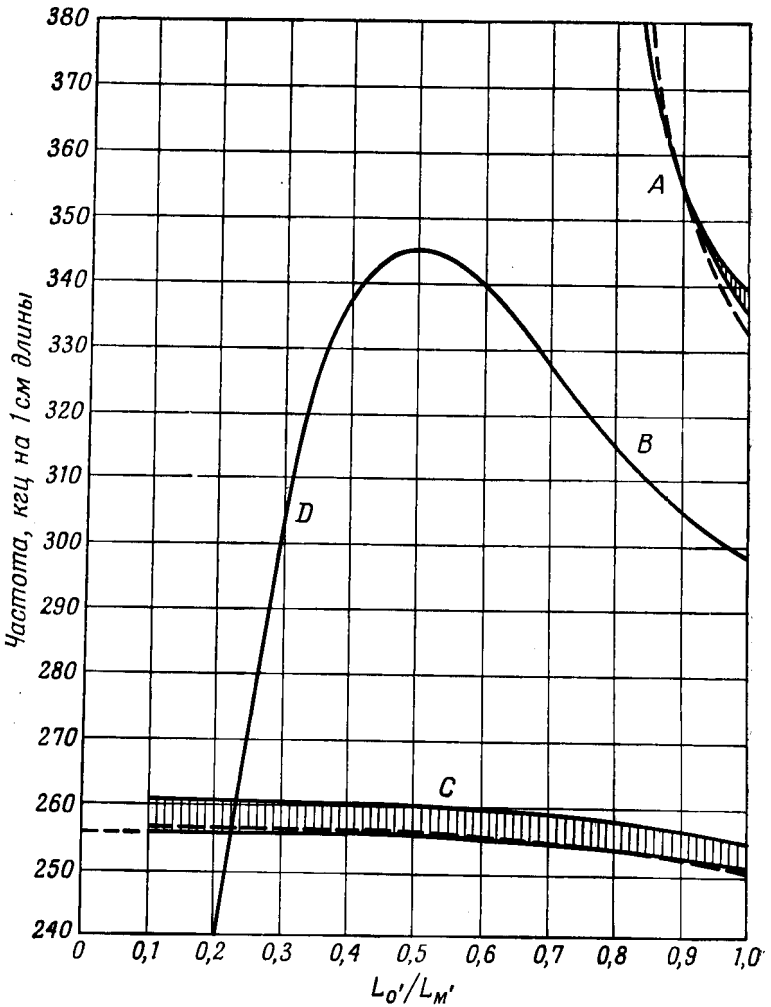
Кристаллы других срезов, приведенные в табл. 24, для стабилизации частоты генераторов применяются редко. Следует лишь указать, что, поскольку изгибные колебания могут возбуждаться на очень низких частотах при сравнительно небольших размерах пластин, эти колебания используются для стабилизации частоты низкочастотных генераторов.

3. Срезы кварца, обеспечивающие улучшение спектра частот

Было разработано несколько срезов, обладающих простыми модами колебаний. Температурный коэффициент этих кристаллов не столь мал, как для рассмотренных выше кристаллов, специально разработанных с этой целью, но они позволяют создавать преобразователи, в которых не возникают сложные моды колебаний.

Представляют интерес [58] пластины кварца — 18,5° *X*-среза, которые дают чисто продольные колебания, и *AC*- и *BC*-срезов, обеспечивающие чисто сдвиговые колебания. Все эти срезы показаны на фиг. 128. Простота их колебательного движения обусловлена тем, что при выбранных ориентациях пластин не существует связи между основной модой колебаний и поверхностными волнами сдвига, резонансы которых могут совпадать с резонансами выбранной моды колебаний. На фиг. 135 показаны резонансные частоты, полученные для пластины — 18,5°*X*-среза; при сравнении их с резонансами, приведенными на фиг. 129, становится очевидным, что связь, возникающая при значении $w/l = 0{,}23$, почти исчезла. Отношение емкостей, показанное на фиг. 132, практически постоянно до значения $w/l = 0{,}6$. Для этого среза движение частиц происходит в направлении длины, поэтому он используется для возбуждения чисто продольных колебаний в стержнях.

Пластины *AC*- и *BC*-срезов удобны в качестве высокочастотных преобразователей, создающих чисто сдвиговые колебания. Действительно, легко показать, что только для этих срезов, полученных в результате вращения *Y*-среза (показанного слева в верхней части на фиг. 128), направление распространения энергии совпадает с нормалью к главной поверхности. Поэтому они являются единственными кристаллами этого ряда, работающими на сдвиг, которые возбуждают волны, распространяющиеся только по оси



Ф и г. 135. Спектр резонансных частот кварца —18,5°X-среза.

без каких-либо составляющих, направленных к стенкам. Это очень важно для гиперзвуковых преобразователей, рассматриваемых в гл. 7 четвертого тома этой серии.

4. Керамические резонаторы

Все керамические резонаторы, используемые в фильтрах, работают либо на основной частоте, либо на первой гармонике радиального резонанса круглой пластины. Такая керамика поляризуется путем создания сильного постоянного электрического поля в направлении толщины пластины, в результате чего значительная часть сегнетоэлектрических доменов ориентируется в направлении приложенного поля [1]). Домены в неполяризованной керамике ориентированы в различных направлениях; электрическое поле может повернуть ориентацию некоторых доменов на 180° и осуществить движение 90-градусных границ между доменами в таком направлении, чтобы результирующая поляризация в направлении приложенного поля возросла. Механическое напряжение влияет на 90-градусные границы доменов, но оно не может вызвать поворота ориентации доменов на 180°.

Берлинкур и Крюгер [60] показали, что при использовании как механического напряжения, так и электрического поля в титанате бария практически все 180-градусные домены перестраиваются в нужном направлении, а поляризация за счет движения

пьезомодули, диэлектрические и упругие постоянные зависят не только от состава керамики, но и от степени поляризации и от того, как она меняется во времени.

С помощью термодинамической функции Гиббса, выраженной через механические напряжения и электрическую поляризацию, было показано [52], что упругие, диэлектрические и пьезоэлектрические постоянные пьезокерамики имеют те же составляющие, какими обладают гексагональные кристаллы класса $6mm$ (C_{6v}), т. е. три пьезоэлектрических модуля d_{33}, d_{31} и d_{15}, две диэлектрические проницаемости ε_{11} и ε_{33} и четыре упругие постоянные c_{11}, c_{12}, c_{13} и c_{44}.

До сих пор во всех пьезоэлектрических фильтрах используется основная частота или первая гармоника радиального резонанса пластины. Такая мода колебаний возникает в круглых образцах, толщина которых t мала по сравнению с радиусом r_0; действующим пьезомодулем является модуль $d_{31} = d_{32}$. Полное сопротивление такой пьезокерамической пластины [48] аналогично сопротивлению пьезоэлектрического кристалла с резонансной частотой f_R, определяемой уравнением

$$\left(\frac{\omega r_0}{V}\right) J_0\left(\frac{\omega r_0}{V}\right) - (1-\sigma) J_1\left(\frac{\omega r_0}{V}\right) = 0, \tag{5.48}$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядков, а скорость

$$V = \sqrt{\frac{Y_0^E}{(1-\sigma^2)\,\varrho}}. \tag{5.49}$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона (для такой керамики $\sigma = 0{,}3$), Y_0^E — модуль упругости при постоянной напряженности поля и ϱ — плотность материала. Для $\sigma = 0{,}3$ уравнение (5.48) имеет корни

$$R_1 = \left(\frac{\omega_R r_0}{V}\right) = 2{,}0488, \qquad R_2 = 5{,}39, \qquad R_3 = 7{,}57. \tag{5.50}$$

Следовательно, для трех первых мод колебаний круглого диска собственные частоты равны

$$f_{R_1} = \frac{2{,}0488}{2\pi r_0}\sqrt{\frac{Y_0^E}{(1-\sigma^2)\,\varrho}}, \qquad f_{R_2} = \frac{5{,}39}{2\pi r_0}\sqrt{\frac{Y_0^E}{(1-\sigma^2)\,\varrho}}, \qquad f_{R_3} = \frac{7{,}57}{2\pi r_0}\sqrt{\frac{Y_0^E}{(1-\sigma^2)\,\varrho}}. \tag{5.51}$$

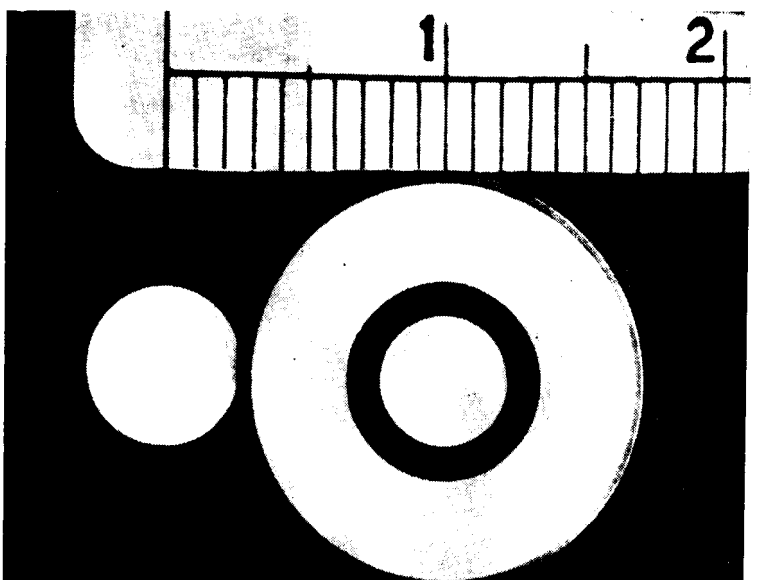
Частота антирезонанса определяется из уравнения

$$\frac{1}{Z} = \frac{j\omega a^2 \varepsilon^{RC}}{4}\left[1 + \frac{k^2}{1-k^2}\,\frac{(1+\sigma)\,J_1(\omega r_0/V)}{[(\omega r_0/V)\,J_0(\omega r_0/V) - (1-\sigma)\,J_1(\omega r_0/V)]}\right], \tag{5.52}$$

когда полное сопротивление стремится к бесконечности; здесь ε^{RC} — диэлектрическая проницаемость зажатой пластины, а коэффициент электромеханической связи

$$k_p = d_{31}\sqrt{\frac{2Y_0^E}{(1-\sigma)\,\varepsilon_{33}^T}}. \qquad (5.53)$$

Из уравнения (5.52) следует, что коэффициент связи можно найти на основании измерений резонансной f_R и антирезонансной



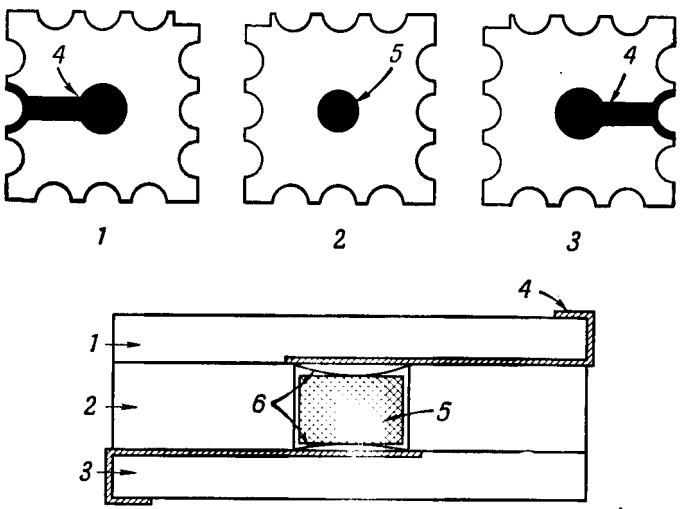
Фиг. 136. Относительные размеры (в *см*) и форма электродов для дисков керамики PZT-6, колеблющихся на основной частоте и первой гармонике.

f_A частот и выразить через их разность $\Delta f = f_A - f_R$:

$$k_p^2 = \frac{\Delta f}{f_R}\left[\frac{R_1-(1-\sigma^2)}{1+\sigma}\right]\left[1-\frac{\Delta f}{f_R}\left(\frac{R_1-(1-\sigma^2)}{1+\sigma}\right)\right]. \qquad (5.54)$$

Во всех керамических фильтрах используется либо первая, либо вторая радиальная мода колебаний. На фиг. 136 [61] показаны относительные размеры и конфигурация электродов двух таких резонаторов, работающих на частоте 450 *кгц*. Колебания на основной частоте возбуждаются с помощью особого соединения электродов: центральный круглый электрод на одной поверх-

ности диска соединен с кольцевым наружным электродом на другой поверхности, и наоборот. Такое устройство можно также использовать как селективный четырехполюсник с отношением сопротивлений 10 : 1, определяемым относительными размерами площадей двух электродов.



Ф и г. 137. Система подвески керамического элемента из PZT (по Керрану и Коневелу).

1 — верхняя плата; *2* — монтажная плата; *3* — нижняя плата; *4* — электрод; *5* — резонатор; *6* — контакты из золотой фольги.

Используются частоты от 400 *кгц* до 11 *Мгц* [62], а чаще всего частоты в области промежуточных частот, т. е. около 450 *кгц*. Так как требуемая добротность в этом случае составляет около 400, то нет необходимости в разработке специальных методов подвески пластины; на фиг. 137 показана одна из применяемых систем крепления. В одном из фильтров использовано 17 таких резонаторов, собранных в столбик размером $8{,}1 \times 8{,}1 \times 7{,}1$ *мм*. Как указано в следующем параграфе, такие наборы резонаторов применяются в многозвенных фильтрах.

§ 4. СХЕМЫ ФИЛЬТРОВ С КРИСТАЛЛИЧЕСКИМИ И КЕРАМИЧЕСКИМИ РЕЗОНАТОРАМИ

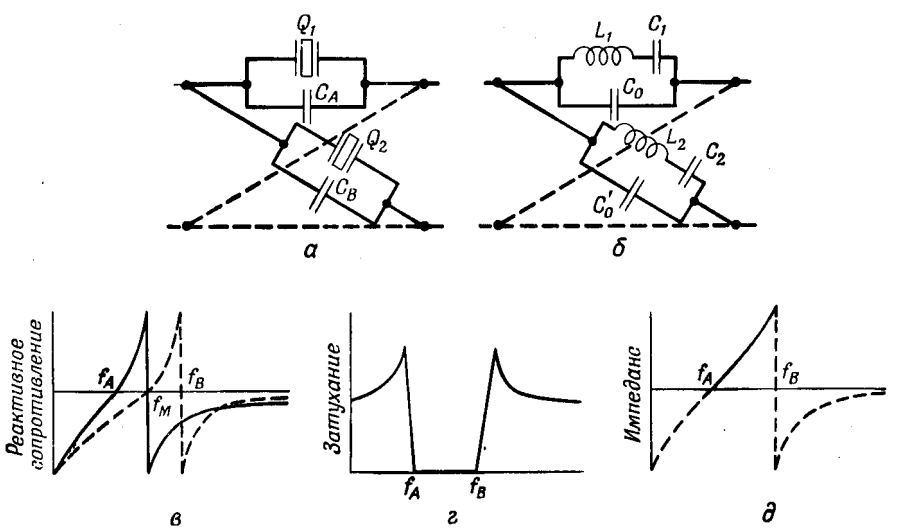
Как отмечалось во введении, кристаллические резонаторы широко используются в высококачественных избирательных фильтрах, предназначенных для систем связи. При рассмотрении таких фильтрующих цепей их удобно разделить на два класса, в один

из которых входят фильтры, содержащие только кристаллы и конденсаторы, а во второй — фильтры, в которых, помимо пьезокристаллов и конденсаторов, используются также катушки индуктивности. Фильтрующие устройства первого класса с кварцевыми резонаторами представляют собой узкополосные фильтры, которые могут применяться для выделения пилот-частоты и в других одночастотных устройствах.

При использовании керамических резонаторов с высоким коэффициентом электромеханической связи полоса пропускания достигает 9% [62]. Такие типы фильтров применяются главным образом в цепочечных многозвенных схемах.

1. Узкополосные фильтры с кварцевыми резонаторами и конденсаторами

Все ячейки фильтров с кварцевыми резонаторами и конденсаторами в настоящее время выполняются исключительно по мостиковой схеме, показанной на фиг. 138, *а*. На фиг. 138, *б* изображена

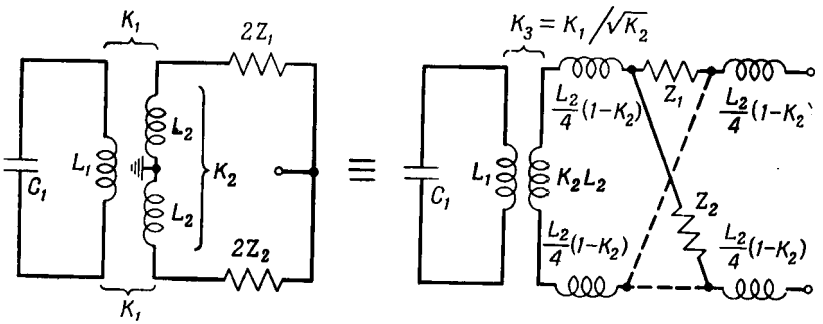


Фиг. 138. Узкополосный мостиковый фильтр.

а — схема с кристаллами и параллельно включенными конденсаторами; *б* — эквивалентная электрическая схема; *в* — реактивное сопротивление двух плеч; *г* — характеристика затухания; *д* — полное сопротивление.

эквивалентная схема такой ячейки, а на фиг. 138, *в*, *г* и *д* — некоторые характеристики такого фильтра: реактивные сопротивления двух плеч (последовательный резонанс одного плеча совпадает с антирезонансом другого плеча), затухание и полное сопроти-

вление. Как указывалось выше, ширина полосы пропускания такого фильтра ограничена двойным интервалом между резонансной и антирезонансной частотами плеча, что для кварца составляет приблизительно 0,8%. Пики затухания соответствуют частотам, при которых реактивные сопротивления последовательного



Ф и г. 139. Фильтр с дифференциальным трансформатором.

и параллельного плеч равны. Путем изменения отношения полных сопротивлений плеч эти частоты могут меняться произвольным образом.

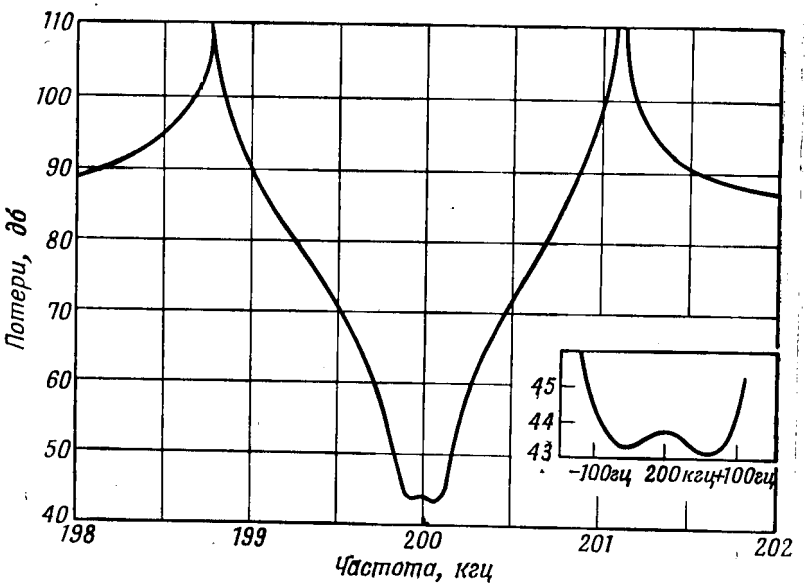
Для низкочастотного диапазона такие фильтры обычно изготовляются из двух разделенных (четырехэлектродных) кварцевых пластин, однако для высоких частот такая схема неприменима и используется схема с дифференциальным трансформатором, показанная на фиг. 139 (см. [12, 63]). В такой схеме баланс токов в двух элементах достигается уравновешиванием плеч обмотки трансформатора. Эквивалентная схема такого устройства, приведенная справа на фиг. 139, представляет собой обычную схему мостикового фильтра с последовательно включенными индуктивностями, значения которых определяются коэффициентом связи двух вторичных обмоток трансформатора. Так как коэффициент связи обычно выбирается большим, указанные индуктивности оказываются весьма незначительными и ими можно пренебречь. Результирующая схема эквивалентна схеме сбалансированного мостика, но она может быть и несимметричной, допускающей заземление средней точки и входной катушки.

Самый простой способ анализа этой схемы состоит в том, чтобы показать, что она дает то же затухание, что и сумма двух простых звеньев, каждое из которых имеет один максимум затухания и сдвиг фазы, равный 180° (π *рад*). Такое простое звено получается, если убрать один из резонаторов, например пластину в диагональном плече, заменив его конденсатором с емкостью C_B. Тогда из

уравнений (5.4) и (5.5) мы получим

$$\operatorname{th}\frac{g}{2}=\sqrt{\frac{Z_A}{Z_B}}=\sqrt{\frac{C_B(1-f^2/f_A^2)}{C_A(1-f^2/f_B^2)}}=b\sqrt{\frac{1-f^2/f_A^2}{1-f^2/f_B^2}}, \qquad (5.55)$$

где $C_A=(C_0+C_1)$ — сумма емкостей в уравнении (5.4), f_A — нижняя граничная частота, совпадающая с резонансной частотой пластины f_R, а f_B — верхняя граничная частота, совпадающая



Фиг. 140. Типичная характеристика узкополосного фильтра с дифференциальным трансформатором и двумя кварцами (по Виллису).

с частотой антирезонанса. Пусть $C_B/C_A=b^2$; так как затухание становится бесконечным при $\operatorname{th}\theta/2=1$, значение b определяется выражением

$$b=\sqrt{\frac{1-f_\infty^2/f_B^2}{1-f_\infty^2/f_A^2}}. \qquad (5.56)$$

Для максимума, расположенного ниже полосы пропускания, $1\leqslant b\leqslant\infty$, а для максимума, расположенного выше полосы пропускания, $0\leqslant b\leqslant f_A/f_B$.

Ячейка, показанная на фиг. 138, характеризуется постоянной передачи, определяемой из уравнения

$$\operatorname{th}\frac{g}{2}=\sqrt{\frac{C_B}{C_A}\frac{(1-f^2/f_A^2)(1-f^2/f_B^2)}{(1-f^2/f_M^2)^2}}, \qquad (5.57)$$

так как резонанс одной пластины совпадает с антирезонансом второй пластины при частоте f_M. Можно показать, что ту же форму имеет и постоянная передачи двух упрощенных звеньев, для которых справедливо уравнение (5.55), с теми же граничными частотами f_A и f_B. Для этого воспользуемся соотношением

$$\operatorname{tg}\left(\frac{g_1+g_2}{2}\right)=\frac{\operatorname{th}(g_1/2)+\operatorname{th}(g_2/2)}{1+\operatorname{th}(g_1/2)\operatorname{th}(g_2/2)}. \qquad (5.58)$$

Если теперь ввести сюда b_1 и b_2 для двух звеньев, используя уравнение (5.55), то после преобразования получим

$$\operatorname{th}\frac{g_1+g_2}{2}=\frac{b_1+b_2}{1+b_1b_2}\sqrt{\frac{(1-f^2/f_A^2)(1-f^2/f_B^2)}{(1-f^2/f_M^2)^2}}, \qquad (5.59)$$

где

$$f_M^2=\frac{(1+b_1b_2)f_A^2f_B^2}{f_A^2+b_1b_2f_B^2}.$$

Поскольку при заданных значениях граничных частот и параметров b величины f_A, f_B, f_M и $\sqrt{C_B/C_A}=(b_1+b_2)(1+b_1b_2)$ определены, можно найти элементы эквивалентной схемы, показанной на фиг. 138, *б*. Получаемые при этом формулы приведены в табл. 25, где Z_0 — характеристическое сопротивление фильтра на средней частоте полосы пропускания f_M.

Таблица 25

Элемент эквивалентной схемы	Формула
C_0	$\dfrac{f_A(b_1+b_2)}{2\pi Z_0(f_A^2+b_1b_2f_B^2)}$
C_0'	$\dfrac{f_A^2+b_1b_2f_B^2}{2\pi Z_0f_Af_B^2(b_1+b_2)}$
C_1	$\dfrac{(b_1+b_2)b_1b_2(f_B^2-f_A^2)}{2\pi Z_0f_A(1+b_1b_2)(f_A^2+b_1b_2f_B^2)}$
C_2	$\dfrac{(f_B^2-f_A^2)}{2\pi Z_0f_Af_B^2(b_1+b_2)}$
L_1	$\dfrac{Z_0(f_A^2+b_1b_2f_B^2)^2}{2\pi f_Af_B^2(b_1+b_2)b_1b_2(f_B^2-f_A^2)}$
L_2	$\dfrac{Z_0f_B^2(b_1+b_2)}{2\pi f_A(f_B^2-f_A^2)}$

На фиг. 140 приведена экспериментально полученная характеристика одного из узкополосных фильтров, используемого в системе уплотнения ближней связи типа *О*, который состоит из двух кристаллических резонаторов и дифференциального трансформатора.

2. Широкополосные цепочечные фильтры с пьезоэлектрической керамикой

Пьезоэлектрические кристаллы можно использовать также в цепочечных схемах, но при этом типы получаемых характеристик ограничены. Действительно, чтобы обеспечить получение одной полосы пропускания, полные сопротивления последовательного и параллельного плеч должны изображаться кривыми, показанными на фиг. 138, *в*, где пунктирная кривая соответствует последовательному плечу, а сплошная — параллельному. Характеристика затухания будет иметь тот же вид, что и показанная на фиг. 138, *г*, но нижний пик будет соответствовать частоте f_A, а верхний — частоте f_B. При этом расстояние между пиками для кварца составляет не более 0,8%, а ширина полосы пропускания получается еще меньшей. Следовательно, за исключением очень высоких частот [1]), типы характеристик весьма ограничены.

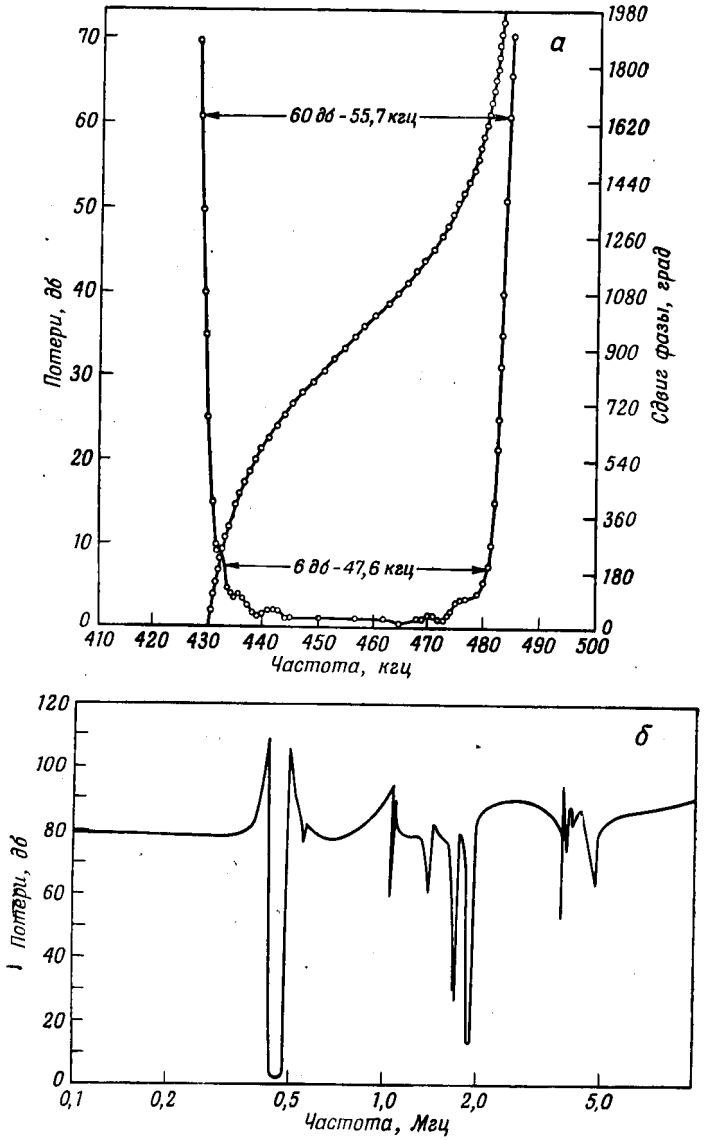
Однако для пьезоэлектрической керамики, обладающей большим электромеханическим коэффициентом связи, расстояние между пиками затухания значительно больше. Поэтому цепочечные схемы с пьезоэлектрической керамикой являются наиболее рациональным с экономической точки зрения типом широкополосных фильтров. Конструкции таких фильтров описаны в ряде работ [61, 62, 64]. На фиг. 141, *а* приведены кривые затухания и сдвига фазы в пределах полосы пропускания для фильтра, состоящего из 15 дисковых резонаторов. На фиг. 141, *б* приведена кривая затухания того же фильтра в широком диапазоне частот. Провалы характеристики вблизи 2 *Мгц* обусловлены более высокими модами колебаний дисков.

3. Широкополосные фильтры с катушками индуктивности

Как указано в § 1, п. 7, применение катушек индуктивности необходимо для расширения полосы пропускания фильтра с кварцевыми резонаторами в качестве избирательных элементов, что требуется для фильтров, используемых в аппаратуре уплотнения для кабелей и радиорелейных линий. На фиг. 116 показано звено

---

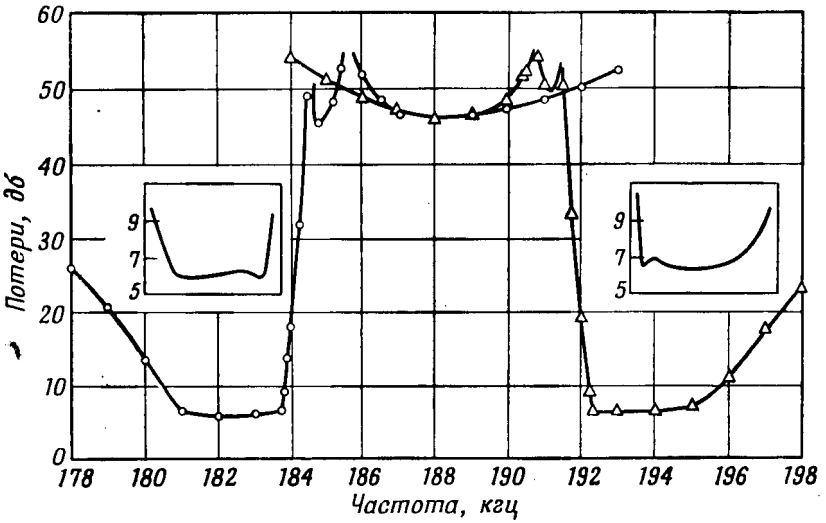
[1]) Сайкс [64] предполагает, что фильтры такого типа могут найти применение в верхней части мегагерцного диапазона частот.



Ф и г. 141. Характеристика полосового фильтра с 15 дисками керамики PZT-6.

а — затухание и сдвиг фазы в пределах полосы пропускания (по Керрану и Коневелу); *б* — затухание в широком диапазоне частот.

такого фильтра с катушкой индуктивности, включенной последовательно с кристаллом, в каждом плече мостиковой схемы. На фиг. 116 приведены также характеристики реактивных сопротивлений плеч, затухания и полного сопротивления. В общем случае



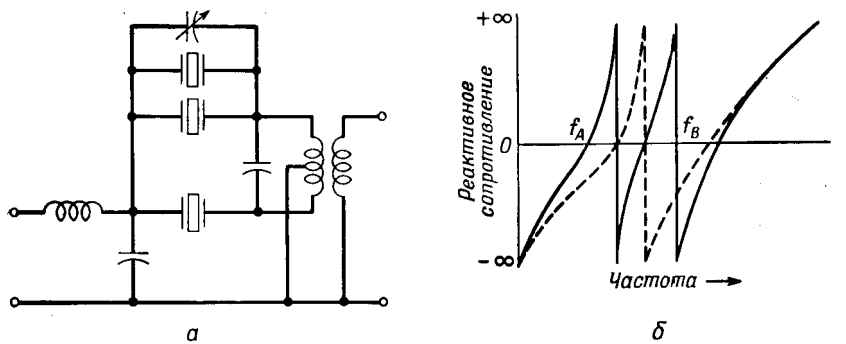
Ф и г. 142. Характеристики двух одиночных звеньев кварцевых фильтров (по Виллису).

возможны три произвольно расположенных максимума затухания. Если один из максимумов затухания переместить в область очень высоких частот, то обе индуктивности окажутся равными по величине и их можно вынести за пределы мостиковой схемы, как показано на фиг. 110.

Такой фильтр с дифференциальным трансформатором, показанным на фиг. 139, применяется в системах уплотнения малой дальности типа *О*. При использовании нижней боковой полосы с частотой 184 *кгц* и верхней боковой полосы с частотой 192 *кгц* требования к крутизне склонов характеристики затухания существенно снижаются и достаточно применить одно звено фильтра.

На фиг. 142 показаны экспериментально полученные характеристики двух таких фильтров, смонтированных в одном блоке. Другой комплект фильтров с выделением боковых полос при несущей частоте 188 *кгц* используется для создания четырехканального устройства. Такие конструкции, позволяющие снизить стоимость фильтров, разработаны для диапазона частот 180—196 *кгц* с возможностью использования более низких частот, для чего применяется специальная система модуляции.

Вследствие большой крутизны фазовой характеристики вблизи границы полосы ослабления в полосе пропускания наблюдается подъем затухания примерно на 0,5 *дб*. Этот подъем можно ослабить, если в одно из плеч включить дополнительный резонатор,



Фиг. 143. Метод улучшения характеристик сопротивления с помощью дополнительного кристалла в одном плече.
а — принципиальная схема; *б* — зависимость реактивного сопротивления от частоты.

как показано на фиг. 143, *а*, и использовать взаимное расположение резонансных и антирезонансных частот, показанное на фиг. 143, *б*. При этом характеристическое сопротивление вблизи граничной частоты меняется более плавно, в результате чего неравномерность затухания в полосе пропускания не превышает 0,1 *дб*. Последние модели фильтров для систем уплотнения типа *О* сконструированы таким образом. Интересно отметить, что для самых разнообразных систем ежегодно выпускается около 100 000 таких фильтров.

Значения параметров элементов, входящих в фильтры такого типа, можно определить, используя значения, полученные для мостикового фильтра с двумя кристаллами в каждом плече, который теперь широко применяется [65] во всех комплектах фильтров для диапазона частот от 60 до 108 *кгц*. Преимущество таких фильтров состоит в том, что в схеме используется только одна катушка индуктивности и, следовательно, потери в полосе пропускания составляют лишь половину потерь для двух звеньев фильтра, показанного на фиг. 110. Так как хорошая форма характеристики затухания в значительной степени зависит от симметрирования пластин в двух плечах, точность изготовления кварцевых элементов для этого фильтра должна быть выше, чем для фильтра с одним кристаллом в каждом плече. Однако при выпуске крупных партий фильтров экономически более выгодно осуществлять необходимый контроль при производстве пьезоэлементов,

чтобы получить возможность использовать однозвенную конструкцию. Практически требуется настройка частот всех кристаллов с точностью ± 7 *гц* при основной частоте 100 *кгц*; допуск для индуктивности составляет $\pm 0{,}7\%$. На фиг. 144 приведена типичная характеристика одного из новых канальных фильтров А5 [66], а на фиг. 145 показан внешний вид таких фильтров, смонтированных по два в блоке размером $140 \times 115 \times 70$ *мм*. Годовой выпуск таких фильтров составляет около 175 000 штук.

Чтобы найти формулу для расчета такого фильтра, необходимо просуммировать постоянные передачи пяти звеньев. Полученное выражение можно записать в виде [67]

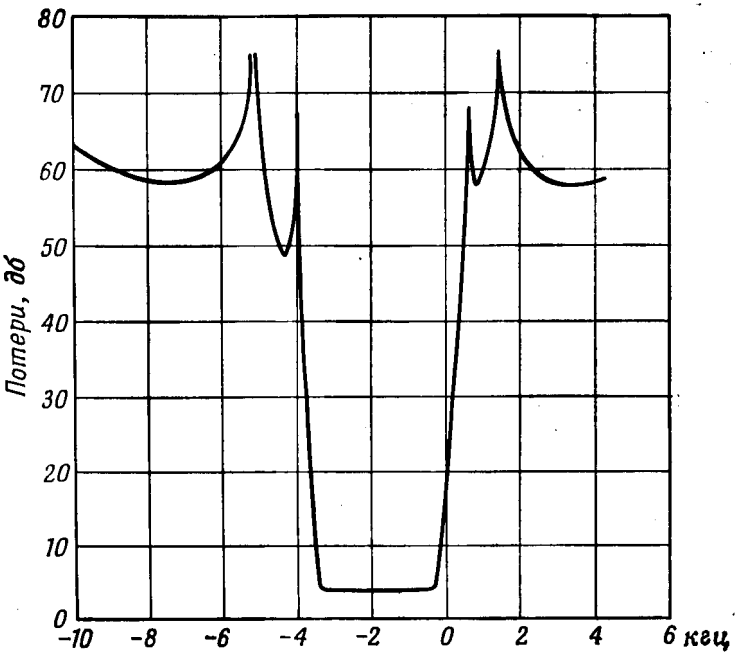
$$\operatorname{th}\left(\frac{g_1+g_2+g_3+g_4+g_5}{2}\right) = \frac{A+C+E}{1+B+D}\sqrt{\frac{(1-\omega^2/\omega_A^2)\,(1-\omega^2/\omega_3^2)^2\,(1-\omega^2/\omega_5^2)^2}{(1-\omega^2/\omega_2^2)^2\,(1-\omega^2/\omega_4^2)^2\,(1-\omega^2/\omega_B^2)}}, \tag{5.60}$$

где f_A и f_B — граничные частоты, а f_2, f_3, f_4, f_5 — промежуточные точки пересечения для резонансных и антирезонансных частот двух плеч. Константы A, B, C, D, E можно выразить через параметры b_1, b_2, ..., b_5 в виде

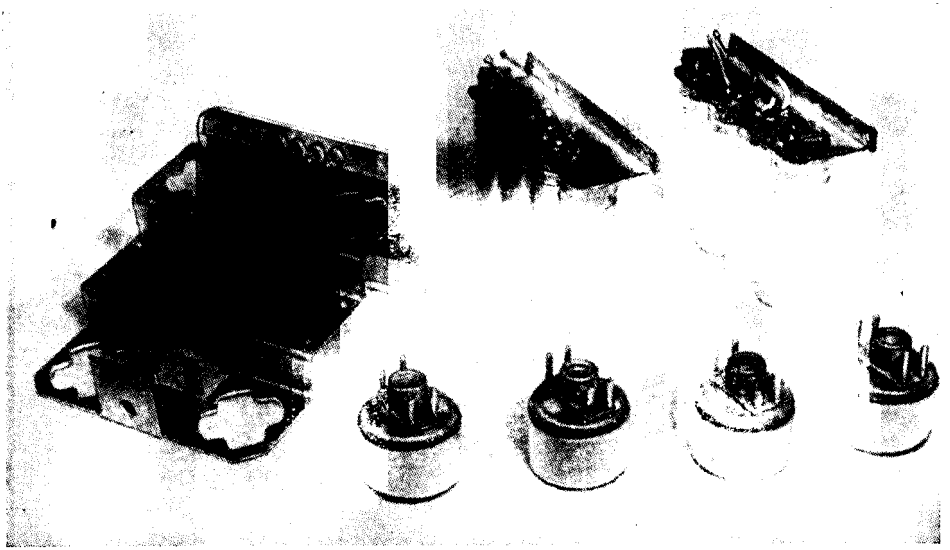
$$\begin{aligned}
A &= \sum_{n=1}^{5} b_n = b_1+b_2+b_3+b_4+b_5,\\
B &= \sum_{n=1}^{5}\sum_{o=1}^{5} b_n b_o = b_1(b_2+b_3+b_4+b_5)+\\
&\quad + b_2(b_3+b_4+b_5)+b_3(b_4+b_5)+b_4b_5, \quad n\neq o,\\
C &= \sum_{n=1}^{5}\sum_{o=1}^{5}\sum_{p=1}^{5} b_n b_o b_p, \qquad n\neq o,\ p, \qquad o\neq p,\\
D &= \sum_{n=1}^{5}\sum_{o=1}^{5}\sum_{p=1}^{5}\sum_{q=1}^{5} b_n b_o b_p b_q, \quad n\neq o,\ p,\ q, \quad p\neq o,\ q, \quad o\neq q,\\
E &= b_1b_2b_3b_4b_5.
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Критические частоты четырехполюсников определяются выражениями

$$\begin{aligned}
f_2^2 &= \frac{2f_A^2f_B^2(1+B+D)}{f_A^2(2+B-\sqrt{B^2-4D})+f_B^2(B+2D+\sqrt{B^2-4D})},\\
f_4^2 &= \frac{2f_A^2f_B^2(1+B+D)}{f_A^2(2+B+\sqrt{B^2-4D})+f_B^2(B+2D-\sqrt{B^2-4D})},\\
f_3^2 &= \frac{2f_A^2f_B^2(A+C+E)}{f_A^2(2A+C-\sqrt{C^2-4AE})+f_B^2(C+2E+\sqrt{C^2-4AE})},\\
f_5^2 &= \frac{2f_A^2f_B^2(A+C+E)}{f_A^2(2A+C+\sqrt{C^2-4AE})+f_B^2(C+2E-\sqrt{C^2-4AE})}.
\end{aligned} \tag{5.62}$$



Ф и г. 144. Измеренная характеристика затухания канального фильтра А5 (по Доногю).



Ф и г. 145. Кварцевые канальные фильтры, смонтированные попарно в одном кожухе (по Доногю).

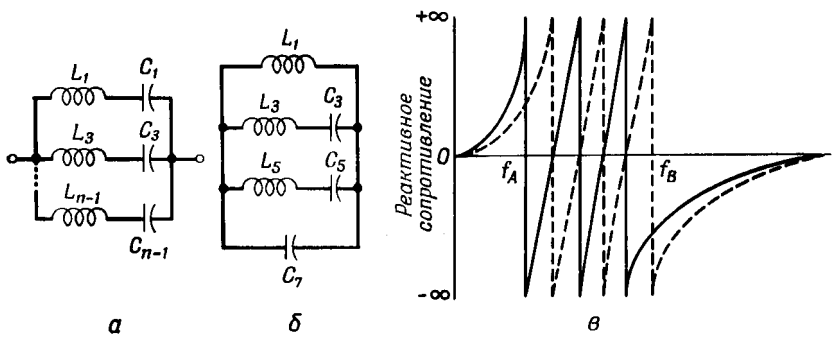
Для фильтра с одним пьезоэлементом в каждом плече, показанного на фиг. 116, соответствующие выражения для констант можно получить, положив $b_4 = b_5 = 0$; тогда

$$A = b_1 + b_2 + b_3, \qquad B = b_1(b_2 + b_3) + b_2 b_3,$$
$$C = b_1 b_2 b_3, \qquad D = E = 0. \tag{5.63}$$

Выражения для критических частот принимают вид

$$f_2^2 = \frac{f_A^2 f_B^2 (1+B)}{f_A^2 + B f_B^2}, \qquad f_3^2 = \frac{f_A^2 f_B^2 (A+C)}{A f_A^2 + C f_B^2}, \qquad f_4^2 = f_5^2 = f_B^2. \tag{5.64}$$

Следовательно, в выражении для постоянной передачи множители, содержащие ω_4 и ω_5, взаимно исключаются.



Ф и г. 146. Применение теоремы Фостера для расчета кварцевых фильтров.
а — последовательные резонансные цепи, включенные параллельно; *б* — два кварца, катушка индуктивности и конденсатор, включенные параллельно; *в* — реактивные сопротивления фильтра, состоящего из пяти звеньев с параллельно включенной катушкой и двумя кварцами в каждом плече.

Параметры элементов, входящих в фильтр, можно вычислить на основании известных частот f_A, f_B, f_2, f_3, f_4, f_5, применив теорему реактивных сопротивлений Фостера [68]. Для схемы параллельного соединения кристаллов, которая предпочтительнее последовательной схемы вследствие меньшего сопротивления, представляет интерес теорема Фостера для элементов, расположенных, как показано на фиг. 146, *а*. Полное сопротивление такого четырехполюсника можно записать в виде

$$Z = -jH\left[\frac{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{2n-1}^2}\right)}{\omega\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{2n-2}^2}\right)}\right], \tag{5.65}$$

где $H > 0$ и $0 = \omega_0 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_2 \ldots \leqslant \omega_{2n-1} = \infty$. Таким образом, сопротивление выражается с помощью ряда резонансных частот ω_1,

ω_3 и т. д. Из теоремы Фостера следует, что

$$L_i = \frac{1}{C_i \omega_i^2} = \lim_{\omega \to \omega_i} \left(\frac{jZ}{\omega_i^2 - \omega^2} \right), \qquad i = 1, 3, \ldots, 2n-1. \quad (5.66)$$

Если последний резонанс имеет место при бесконечно большой частоте, т. е. $\omega_{2n-1} = \infty$, то индуктивность $L_{2n-1} = 0$ и

$$C_{2n-1} = \frac{1}{H} \left(\frac{\omega_1^2 \omega_3^2 \ldots \omega_{2n-3}^2}{\omega_2^2 \omega_4^2 \ldots \omega_{2n-2}^2} \right). \quad (5.67)$$

В случае когда $\omega_1 = 0$, $C_1 = 0$, а $L_1 = H$. При параллельном соединении двух кристаллических резонаторов и катушки индуктивности L_1 (фиг. 146, *б*) зависимость реактивного сопротивления от частоты принимает вид, показанный на фиг. 146, *в*. Если такое звено поместить в одно из плеч мостика, а подобное же звено — в другое плечо, так чтобы первый антирезонанс совпадал с первым резонансом и т. д., как показано пунктирной линией на фиг. 146, *в*, то можно получить схему, эквивалентную пяти простым звеньям с характеристическими сопротивлениями П-звена (см. фиг. 109, *г*, фильтр типа K). В фильтре такого типа среднеполосовое сопротивление Z_0 имеет сравнительно большое значение, в связи с чем такие фильтры иногда применяются между электронными лампами.

Используя уравнения (5.62) и (5.66), можно найти значения элементов обоих плеч. Формулы для вычисления приведены в табл. 26.

Таблица 26

Диагональное плечо	Последовательное плечо
$L_1 = \frac{f_2^2 f_4^2}{4\pi^2 C_7 f_3^2 f_5^2 f_A^2}$	$L_0 = \frac{f_3^2 f_5^2}{4\pi^2 C_6 f_2^2 f_4^2 f_B^2}$
$L_3 = \frac{f_2^2 (f_4^2 - f_2^2)}{4\pi^2 C_7 (f_3^2 - f_2^2)(f_5^2 - f_2^2)(f_2^2 - f_A^2)}$	$L_2 = \frac{f_5^2 (f_5^2 - f_3^2)}{4\pi^2 C_6 (f_3^2 - f_2^2)(f_4^2 - f_3^2)(f_B^2 - f_3^2)}$
$L_5 = \frac{f_4^2 (f_4^2 - f_2^2)}{4\pi^2 C_7 (f_4^2 - f_3^2)(f_5^2 - f_4^2)(f_4^2 - f_A^2)}$	$L_4 = \frac{f_5^2 (f_5^2 - f_3^2)}{4\pi^2 C_6 (f_5^2 - f_2^2)(f_5^2 - f_4^2)(f_B^2 - f_5^2)}$
$C_3 = \frac{1}{4\pi^2 f_2^2 L_3}$	$C_2 = \frac{1}{4\pi^2 f_3^2 L_2}$
$C_5 = \frac{1}{4\pi^2 f_4^2 L_5}$	$C_4 = \frac{1}{4\pi^2 f_5^2 L_4}$
$C_7 = \frac{(1+B+D) f_2^2 f_4^2 f_B}{(A+C+E) f_3^2 f_5^2 f_A} \times \left(\frac{1}{2\pi Z_0 (f_B - f_A)} \right)$	$C_6 = \frac{(A+C+E) f_3^2 f_5^2 f_A}{(1+B+D) f_2^2 f_4^2 f_B} \times \left(\frac{1}{2\pi Z_0 (f_B - f_A)} \right)$

При использовании одного кварцевого резонатора в каждом плече

$$b_4 = b_5 = D = E = 0, \qquad f_4 = f_5 = f_B. \tag{5.68}$$

Поэтому $L_4 = L_5 = \infty$, $C_4 = C_5 = 0$, и выражения для других элементов существенно упрощаются.

Наиболее часто применяемый кварцевый фильтр с последовательно включенной катушкой индуктивности имеет полное сопротивление, равное сопротивлению фильтра типа K (см. фиг. 109, *г*), и значительно меньшее сопротивление Z_0 на частоте $f_M = \sqrt{f_A f_B}$. Так как полное сопротивление плеча не удается преобразовать непосредственно с помощью теоремы Фостера, следует вычесть из Z реактивное сопротивление катушки индуктивности. В результате получается последовательное плечо с двумя пьезоэлементами и параллельно включенным конденсатором, для которого

$$Z' = -jH\left[\frac{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_A^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_3^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_5^2}\right)}{\omega\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_4^2}\right)}\right] - j\omega H\left[\frac{\omega_2^2\omega_4^2}{\omega_A^2\omega_3^2\omega_5^2}\right]. \tag{5.69}$$

Преобразуя полученное выражение, можно привести его к виду

$$Z' = -jH\left[\frac{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{1,3}^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{1,5}^2}\right)}{\omega\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_4^2}\right)}\right], \tag{5.70}$$

где $\omega_{1,3}$ и $\omega_{1,5}$ — резонансные частоты пьезоэлементов. Они определяются формулами, справедливыми как для последовательных, так и для диагональных плеч:

$$f_{1r}^2 = f_A^2(f_3^2+f_5^2) + f_3^2f_5^2 - f_2^2f_4^2 \pm \pm \frac{\sqrt{[f_A^2(f_3^2+f_5^2)+f_3^2f_5^2-f_2^2f_4^2]^2 - 4[(f_A^2-f_2^2+f_3^2-f_4^2+f_5^2)(f_A^2f_3^2f_5^2)]}}{2(f_A^2-f_2^2+f_3^2-f_4^2+f_5^2)}$$

$$r = 3,\ 5, \tag{5.71}$$

$$f_{0q}^2 = f_2^2f_4^2 + f_B^2(f_2^2+f_4^2) - f_3^2f_5^2 \pm \pm \frac{\sqrt{[f_B^2(f_2^2+f_4^2)+f_2^2f_4^2-f_3^2f_5^2]^2 - 4[(f_2^2-f_3^2+f_4^2-f_5^2+f_B^2)(f_2^2f_4^2f_B^2)]}}{2(f_2^2-f_3^2+f_4^2-f_5^2+f_B^2)}$$

$$q = 2,\ 4.$$

При использовании одного кварцевого резонатора в каждом плече

$$b_4 = b_5 = D = E = 0, \qquad f_4 = f_5 = f_B. \tag{5.68}$$

Поэтому $L_4 = L_5 = \infty$, $C_4 = C_5 = 0$, и выражения для других элементов существенно упрощаются.

Наиболее часто применяемый кварцевый фильтр с последовательно включенной катушкой индуктивности имеет полное сопротивление, равное сопротивлению фильтра типа K (см. фиг. 109, *г*), и значительно меньшее сопротивление Z_0 на частоте $f_M = \sqrt{f_A f_B}$. Так как полное сопротивление плеча не удается преобразовать непосредственно с помощью теоремы Фостера, следует вычесть из Z реактивное сопротивление катушки индуктивности. В результате получается последовательное плечо с двумя пьезоэлементами и параллельно включенным конденсатором, для которого

$$Z' = -jH\left[\frac{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_A^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_3^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_5^2}\right)}{\omega\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_4^2}\right)}\right] - j\omega H\left[\frac{\omega_2^2\omega_4^2}{\omega_A^2\omega_3^2\omega_5^2}\right]. \tag{5.69}$$

Преобразуя полученное выражение, можно привести его к виду

$$Z' = -jH\left[\frac{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{1,3}^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{1,5}^2}\right)}{\omega\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_4^2}\right)}\right], \tag{5.70}$$

где $\omega_{1,3}$ и $\omega_{1,5}$ — резонансные частоты пьезоэлементов. Они определяются формулами, справедливыми как для последовательных, так и для диагональных плеч:

$$f_{1r}^2 = f_A^2(f_3^2+f_5^2) + f_3^2f_5^2 - f_2^2f_4^2 \pm \pm \frac{\sqrt{[f_A^2(f_3^2+f_5^2)+f_3^2f_5^2-f_2^2f_4^2]^2 - 4[(f_A^2-f_2^2+f_3^2-f_4^2+f_5^2)(f_A^2f_3^2f_5^2)]}}{2(f_A^2-f_2^2+f_3^2-f_4^2+f_5^2)}$$

$$r = 3,\ 5, \tag{5.71}$$

$$f_{0q}^2 = f_2^2f_4^2 + f_B^2(f_2^2+f_4^2) - f_3^2f_5^2 \pm \pm \frac{\sqrt{[f_B^2(f_2^2+f_4^2)+f_2^2f_4^2-f_3^2f_5^2]^2 - 4[(f_2^2-f_3^2+f_4^2-f_5^2+f_B^2)(f_2^2f_4^2f_B^2)]}}{2(f_2^2-f_3^2+f_4^2-f_5^2+f_B^2)}$$

$$q = 2,\ 4.$$

§ 5. ГЕНЕРАТОРЫ, СТАБИЛИЗИРОВАННЫЕ КВАРЦЕМ

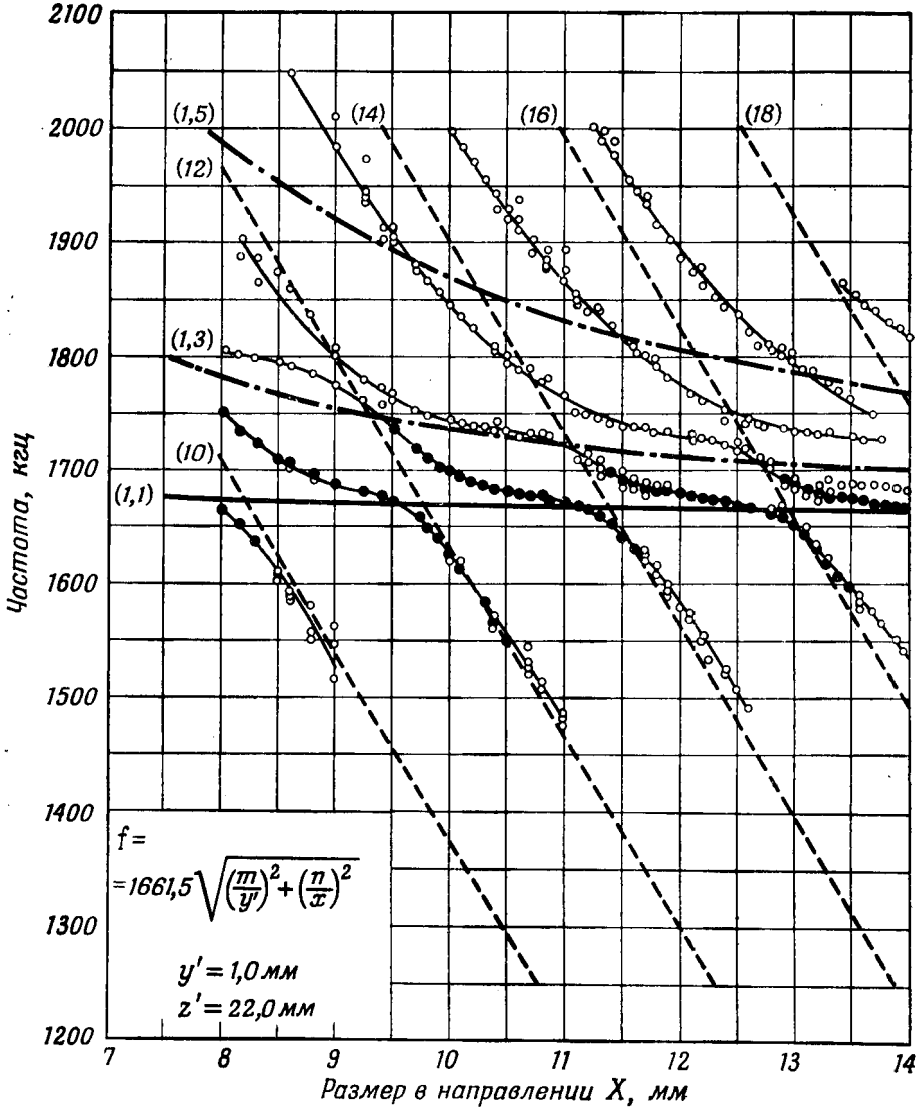
1. Свойства кристаллических резонаторов, предназначенных для стабилизации генераторов

Кварцевые резонаторы нашли очень широкое применение в качестве стабилизирующих элементов в ламповых генераторах, а также при создании стандартов частоты и эталонов времени. Во время второй мировой войны для этих целей было изготовлено свыше 30 млн. кристаллов. Хотя стабильность, которой можно достигнуть с помощью кварца, не идет ни в какое сравнение со стабильностью, получаемой с помощью атомных эталонов частоты, кварцевые резонаторы продолжают служить наиболее широко используемыми вторичными эталонами, а также применяются в качестве резонансных контуров атомных эталонов.

Свойства, обеспечивающие кварцу широкое применение в качестве стабилизатора частоты, заключаются в основном в очень малых внутренних потерях (т. е. в высокой добротности) и в незначительных изменениях частоты с изменением окружающей температуры, которые могут быть получены для некоторых срезов. Требования моночастотности пластин, столь важные для кристаллов, применяемых в фильтрах, здесь отходят на второй план. Для частот выше 1 *Мгц*, т. е. для диапазона, в котором обычно работают ламповые генераторы, наиболее часто применяются пластины AT- и BT-срезов.

Спектр частот прямоугольной пластины AT-среза [69] приведен на фиг. 147. Для этой пластины толщина постоянна и равна 1 *мм*, а длина (вдоль оси Z') равна 22 *мм*, в то время как размер по оси x меняется от 7 до 14 *мм*. Основная сдвиговая мода, обозначенная (1, 1) на фиг. 147, на графике изображается в виде прямой линии. Однако очевидно, что она сильно связана с изгибными модами колебаний четных порядков. Поэтому при расчете резонансных пластин для стабилизаторов необходимо выбирать такие размеры, при которых связь между этими типами колебаний оказывается минимальной. Было показано [70], что при возбуждении сдвиговых колебаний в пластине появление дополнительных изгибных колебаний объясняется возникновением напряжений на поверхностях пластины.

Делались различные попытки уменьшить эту связь. Один из методов [71] сводится к подшлифовке краев круглой пластины, имеющей отношение диаметра к толщине меньше 30. В другом методе [56, 57] предлагается применять профилированные пластины, а размеры электродов уменьшать по сравнению с размером кристалла. Третий метод [72], который, по утверждению его авторов, позволяет снизить величину нежелательных колебаний на 40 *дб*, сводится к использованию кристалла треугольной формы



Ф и г. 147. Спектр частот кварца AT-среза в зависимости от его ширины (по Сайксу).

с малой площадью электродов. Смысл всех этих методов состоит в том, чтобы распределить поверхностные силы на несколько длин волн изгибных колебаний. Они позволяют ослабить связь с изгибными модами колебаний, но полностью ее не устраняют.

Правильно рассчитанные пластины AT- и BT-срезов имеют отношение емкостей порядка 250 и 650, как показано на фиг. 132. Из уравнения (5.4) следует, что в этом случае кривая реактивного сопротивления будет иметь вид, показанный на фиг. 111, причем интервал между резонансной и антирезонансной частотами будет равен для AT-среза 0,2% и для BT-среза 0,07%. Можно показать, что условием управления частотой во всех схемах ламповых генераторов является работа пластины на резонансной частоте или в положительной области кривой реактивного сопротивления. Поэтому применение кристаллического резонатора ограничивает область возможного изменения частоты генератора. Изменение частоты может быть еще более уменьшено, если параллельно или последовательно с кварцем включить дополнительную емкость, которая увеличит отношение емкостей. Однако увеличение емкости нельзя продолжать до бесконечности; предел этому кладет добротность Q кристалла. Чтобы реактивное сопротивление было положительным, должно выполняться неравенство

$$M = \frac{Q}{r} \geqslant 2. \tag{5.72}$$

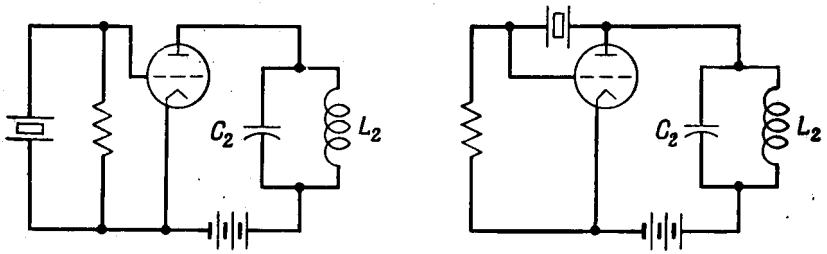
Величина M носит название коэффициента качества, так как она определяет, в каких пределах кварцевый элемент может управлять частотой генератора.

2. *Стандартные схемы генераторов*

Наиболее известными типами генераторов с кристаллическими стабилизаторами являются осцилляторные трехточечные схемы, известные как схемы Пирса — Миллера и Пирса[1]) (фиг. 148). В этих схемах обратная связь, осуществленная через емкость анод—сетка (схема Пирса — Миллера, фиг. 148, *а*) или через кварц (схема Пирса, фиг. 148, *б*), приводит к появлению колебаний. Принцип действия генератора состоит в использовании электронного (лампового или транзисторного) усилителя и цепи обратной связи, которая создает сдвиг фазы на 360° при частоте генерации. При включении генератора, когда возникает переходный режим, имеющий широкий спектр частот, усиливается только та частота, для которой сдвиг фазы равен 360°. Амплитуда колебаний этой

[1]) Пирс [73, 74] описал лишь генератор с кристаллом в сеточной цепи, тогда как Миллер [75] впервые указал на возможность включения кристалла между анодом и сеткой; однако патент на эту схему был выдан Пирсу.

частоты нарастает до тех пор, пока ее не ограничит нелинейность электронной лампы. Следовательно, условия, определяющие частоту и амплитуду колебаний, состоят в том, что усиление в цепи



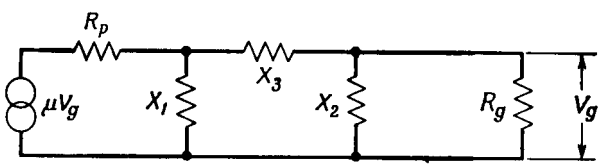
а *б*

Фиг. 148. Схемы стабилизированных генераторов.
а — схема Пирса — Миллера; *б* — схема Пирса.

обратной связи должно быть равно нулю, а сдвиг фазы в цепи обратной связи должен быть равен 2π или кратной величине. Этот критерий обычно записывается в виде

$$\mu\beta = 1, \tag{5.73}$$

где μ — комплексный коэффициент усиления усилителя (т. е. отношение выходного анодного напряжения к входному напряжению на сетке лампы), а β — аналогичный коэффициент для цепи обратной связи.



Фиг. 149. Эквивалентная схема для анализа работы генератора.

Общие условия, определяющие стабильность частоты генератора, были сформулированы Левеллином [76], а для случая генератора с кристаллическим резонатором даны Терри, Райтом, Вигуре, Кога, Хеегнером, Болла и Фэром [77]. Хотя общее решение требует рассмотрения нелинейных уравнений, однако приближенное представление об условиях стабильности частоты можно получить, если представить цепь обратной связи в виде трех реактивных сопротивлений X_1, X_2 и X_3 (фиг. 149), а ламповые параметры — внутренним сопротивлением лампы R_p, сопротивлением утечки сетки R_g и источником напряжения μV_g, где V_g — напряжение

на сопротивлении R_g, а μ — коэффициент усиления лампы по напряжению. Для схемы Пирса X_1 — реактивное сопротивление конденсатора настройки и катушки индуктивности в анодной цепи лампы, X_3 — реактивное сопротивление цепи обратной связи между анодом и сеткой и X_2 — реактивное сопротивление промежутка между сеткой и катодом. Для генератора с одной лампой знак коэффициента усиления μ отрицательный, так как увеличение напряжения на сетке уменьшает анодный ток лампы.

Если возбуждение генератора происходит в мягком режиме, т. е. сетка находится всегда под отрицательным потенциалом и сеточный ток отсутствует, то сопротивлением утечки сетки R_g можно пренебречь ввиду его очень большой величины. В этом случае частота близко удовлетворяет условию

$$X_1 + X_2 + X_3 = A \approx 0, \tag{5.74}$$

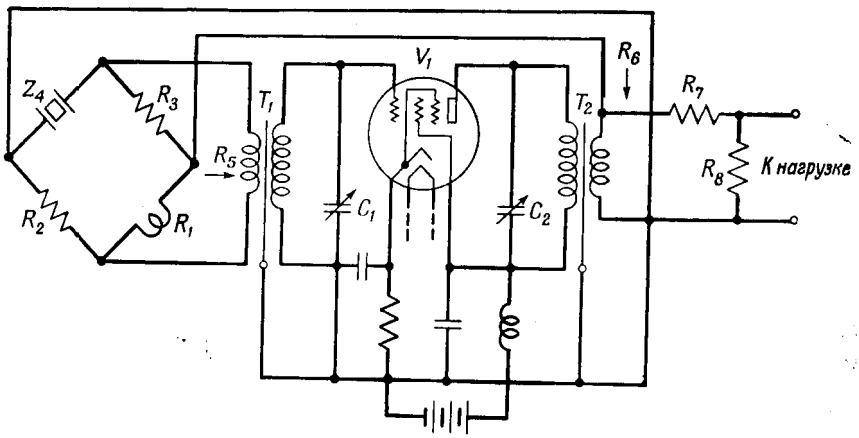
где A — малая величина, определяемая параметрами лампы, которая приближается к нулю для ламп с большим коэффициентом усиления. Условие (5.74) является следствием требования, чтобы три реактивные сопротивления давали суммарный сдвиг фазы на 180°; если коэффициент усиления μ велик, то сумма реактивных сопротивлений должна быть близкой к нулю, чтобы усиление было равно нулю. Кроме того, можно показать [78], что условия генерации не удовлетворяются до тех пор, пока реактивное сопротивление кристалла не станет положительным. Следовательно, рабочая частота генератора всегда находится между резонансной и антирезонансной частотами кристалла.

Настройка анодной цепи переменным конденсатором приводит к изменению реактивного сопротивления X_1, и в соответствии с уравнением (5.74) частота генератора будет изменяться. Однако, поскольку реактивное сопротивление изменяется с частотой очень сильно, пределы изменения частоты путем настройки очень невелики и могут быть еще уменьшены с помощью шунтирующего конденсатора в соответствии с условием (5.72). В схемах Пирса — Миллера и Пирса можно поддерживать частоту кварцевого генератора постоянной в пределах нескольких десятитысячных долей процента и изменять частоту с помощью настроечного конденсатора на 0,02%. Рассмотренные схемы кварцевых генераторов используются наиболее широко.

3. Прецизионные генераторы и резонаторы

В случае когда требуется очень высокая стабильность частоты, схема Пирса не является наилучшей. Это можно проследить на фиг. 149, если связь между анодом и сеткой осуществить с помощью омического сопротивления (при этом кристаллический резо-

натор работает на частоте последовательного резонанса). Тогда изменения падения напряжения на сопротивлениях R_p и R_g вследствие флуктуаций напряжения не повлекут за собой изменений частоты.



Фиг. 150. Мостиковый генератор Мичема.

В разработанной Мичемом [79] мостиковой схеме, показанной на фиг. 150, впервые была использована эта идея. В ней применен мостик, в одном плече которого находится переменное сопротивление типа термистора, предназначенное для ограничения тока, проходящего через кристалл. По мере роста амплитуды колебаний сопротивление этого элемента снижается, что приводит к уравновешиванию мостика при незначительной амплитуде колебаний кристалла. Это существенно в устройствах с очень высокой стабильностью частоты, так как известно [56, 57], что частота немного повышается при увеличении амплитуды колебаний кристалла. Современные методы тоже следуют этому принципу, но для повышения стабильности усиления и ограничения тока через кристалл теперь используются отрицательная обратная связь и автоматическая регулировка усиления.

Сравнительно недавно были опубликованы работы [56, 57], посвященные разработке малогабаритного эталона частоты. Хорошо сбалансированная конструкция осуществлена с помощью пластины AT-среза длиной 30 *мм*, плоской с одной стороны и слегка выгнутой с другой. Поверхности шлифовались мягким материалом, таким, как битум или пробка, чтобы предотвратить образование нарушений структуры, которые могут вызвать старение кристалла [81]. Кварцевая пластина подвешена за кромки с помощью никелевых ленточек, припаянных к поверхности. Все устройство

помещено в стеклянный эвакуированный баллон, как показано на фиг. 151. Полученная добротность устройства достигала $(5—6) \times \times 10^6$, т. е. приближалась к добротности самого кварца. В таком

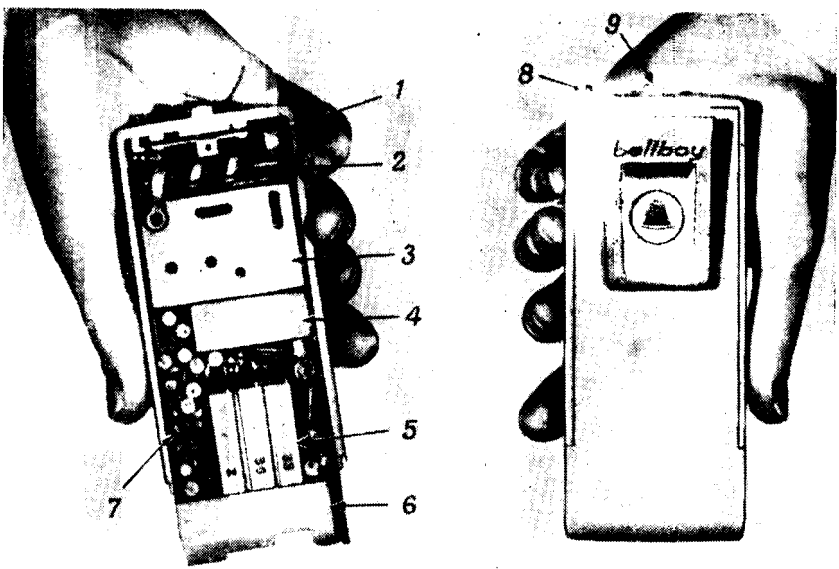
Фиг. 151. Кварцевый резонатор (по Уорнеру).

элементе влияние ударов сказывается в изменении частоты всего лишь на несколько десятимиллионных процента (10^{-9}). В течение трехлетнего периода старение изменило частоту (в сторону увеличения) не более чем на 10^{-8}; стабильность в течение более коротких промежутков времени достигала $2 \cdot 10^{-10}$.

§ 6. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ СЕЛЕКТОРЫ И ФИЛЬТРЫ

1. Язычковое реле

Механические резонаторы и их комбинации в виде механических фильтров нашли широкое применение в системах связи. Вероятно, наиболее простым и наиболее известным механическим

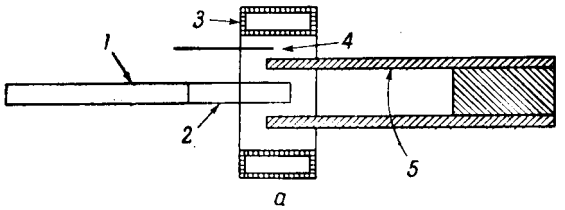


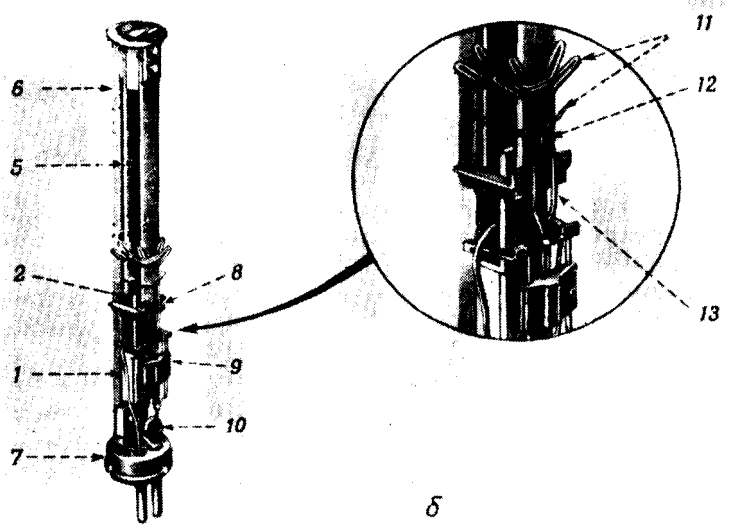
Фиг. 152. Приемник системы Беллбой (по Митчелу).

1 — звуковой преобразователь; *2* — антенна; *3* — высокочастотный усилитель и преобразователь частоты; *4* — фильтр промежуточной частоты; *5* — вибрационные реле; *6* — батарейный отсек; *7* — цепи промежуточной и звуковой частот; *8* — кнопка возврата; *9* — выключатель.

резонатором является настраиваемое язычковое реле. Это устройство было использовано [82] в качестве избирательного элемента в переносной радиосигнальной аппаратуре. Позднее миниатюрный вариант такого реле был применен в качестве селектора в радиостанциях персонального вызова [83, 84], известных как система Беллбой. На фиг. 152 показана фотография приемника такого устройства с тремя миниатюрными язычковыми реле, установленными в нижней части аппарата.

Конструктивно такие реле очень похожи на реле, показанное на фиг. 153 [82]. Постоянный магнит, расположенный между





Ф и г. 153. Конструкция язычкового реле (*а*) и собранного селектора (*б*) (по Келлеру и Боствику).

1 — магнит; *2* — полюсный наконечник; *3* — катушка; *4* — контакт; *5* — колеблющиеся язычки; *6* — рама; *7* — основание; *8* — медный хомутик; *9* — запрессованные контакты; *10* — гайка регулировки контакта; *11* — настроечные стержни; *12* — контактная проволока; *13* — держатель контакта.

двумя тонкими язычками, изготовленными из магнитного материала, создает поляризующее поле. Наружный соленоид, через который проходит возбуждающий переменный ток, увеличивая и уменьшая магнитный поток, заставляет язычки совершать изгибные колебания. Когда принимаемая частота совпадает с резонансной частотой язычка, амплитуда колебаний последнего увеличивается до тех пор, пока язычок не коснется контактной проволочки. В современных устройствах с тремя последовательно включенными реле сигнал возникает в тех случаях, когда осуществляется контакт во всех трех реле.

Эквивалентная механическая схема стержня, закрепленного на одном конце, представляет собой последовательное соединение массы и податливости. Значения последних определяются отношением приложенной силы к скорости на свободном конце стержня и могут быть вычислены по формулам

$$M = \frac{\varrho l t w}{4}, \qquad C = \frac{4l^3}{Y_0 I m^4} = \frac{48 l^3}{(1{,}875)^4 Y_0 w t^3}, \tag{5.75}$$

где I — момент инерции поперечного сечения, m — корень трансцендентного уравнения, ρ — плотность материала, а l, w и t — длина, ширина и толщина язычка соответственно. Дополнительное механическое сопротивление R представляет собой внутреннее трение в язычке и системе его крепления. Для большинства конструкций язычков это сопротивление недостаточно для получения требуемой ширины полосы 1,2 *гц* (на уровне 3 *дб* кривой избирательности).

Один из способов измерения добротности Q вибратора состоит в том, чтобы определить изменение частоты δf, при котором чувствительность снизится на 3 *дб* по сравнению с максимальным значением. Тогда для полосы 1,2 *гц*

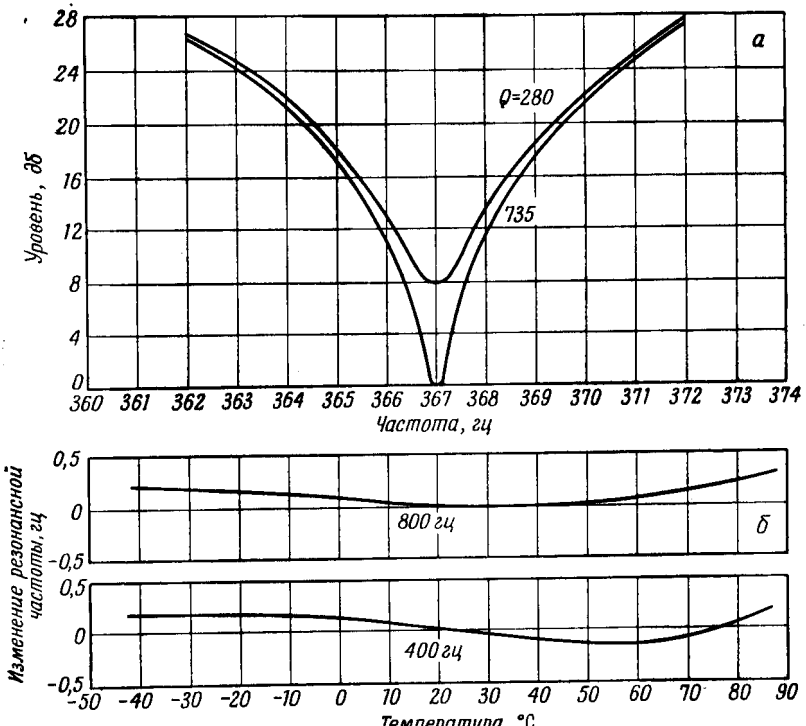
$$Q = \frac{f_R}{\delta f} = \frac{f_R}{1{,}2}. \tag{5.76}$$

В аппаратуре Беллбой используются 32 частоты в диапазоне 517,5—997,5 *гц*. С таким числом частот можно получить 4960 кодовых сообщений. Однако в рассматриваемой системе набор из четырех цифр представляет собой индивидуальные позывные для каждого приемника, которые преобразуются в три выбранные частоты (из возможных 32). Это преобразование упрощается, если использовать только 3200 кодовых сообщений. Добавка четвертого реле позволяет увеличить число абонентов до 10 000.

В диапазоне частот от 517,5 до 997,5 *гц* добротность, определяемая выражением (5.76), колеблется в пределах от 430 до 810. Для более низкочастотного диапазона (350—850 *гц*), используемого для радиосигнализации, добротность составляет от 290 до 710.

Чтобы снизить добротность устройства, применяются различные демпфирующие системы, в частности часто используются медные хомутики, располагаемые на полюсном наконечнике. Такой хомутик образует короткозамкнутый виток в магнитном поле, перемещая который можно регулировать величину вносимого затухания.

Чтобы полоса частот реле не смещалась относительно частоты сигнала при изменении окружающей температуры в пределах от



Фиг. 154. Характеристики вибрационного реле (по Келлеру и Боствику).

—40 до +90° С (обычный диапазон для сигнальных устройств, используемых вне помещений), язычки изготовляются из железоникелевого сплава [43], который имеет очень малый температурный коэффициент частоты. Необходимо также, чтобы магнитные свойства материала мало зависели от температуры, так как резонансная частота до некоторой степени управляется коэффициентом электромеханической связи.

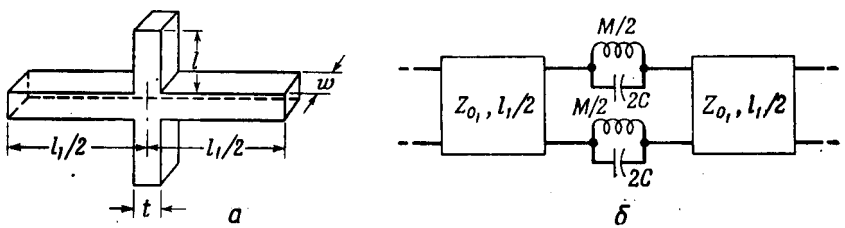
На фиг. 154, *а* приведены кривые избирательности реле: нижняя кривая — при естественном демпфировании, верхняя кривая

отрегулирована таким образом, чтобы получить необходимую ширину полосы. Размещая рабочие точки реле на 15 *гц* друг от друга, можно получить ослабление сигнала соседней частоты приблизительно на 25 *дб*. Зависимости, приведенные на фиг. 154, *б*, показывают изменение средней частоты полосы в зависимости от температуры.

Реле такого типа довольно часто используются в разработках фирмы «Белл». Годовой выпуск таких реле составляет 5000 штук, причем имеются перспективы дальнейшего увеличения выпуска.

2. *Электромеханические фильтры*

Фильтры продольно-изгибного типа. Наряду с рассмотренными системами были созданы и более сложные фильтрующие устройства со значительно более высокой избирательностью, причем



Ф и г. 155. Звено полосового фильтра, работающего на продольных и изгибных колебаниях.
а — геометрическая форма; *б* — эквивалентная схема.

некоторые из них нашли практическое применение. Один из первых электромеханических фильтров [34, 35], предназначенный для выделения несущей частоты, показан на фиг. 121. Его работу можно проанализировать, рассмотрев одно звено, показанное на фиг. 155. Звено состоит из возбуждаемого преобразователем продольно колеблющегося стержня, который имеет в средней части поперечный стержень. Последний вследствие существования различия в силах, действующих по разным сторонам стержня, начинает совершать изгибные колебания. Полное сопротивление такой крестообразной конструкции было вычислено [35]; было показано, что в первом приближении такое устройство эквивалентно антирезонансной цепи с параллельно включенными массой и податливостью:

$$M = 1{,}227\varrho lwt, \qquad C = \frac{l^3}{15{,}17Y_0 I} = \frac{l^3}{1{,}26Y_0 wt^3}, \tag{5.77}$$

где l — длина одного выступа (измеряемая обычно от его конца до одной четверти толщины продольно колеблющегося стержня), t — толщина в направлении изгиба, а w — ширина стержня.

Работу такого фильтра можно проанализировать с помощью эквивалентной схемы, показанной на фиг. 155, *б*. Она состоит из двух длинных линий с характеристическими сопротивлениями $Z_0 = \rho V wt$ и длиной $l_1/2$ (длина измеряется от конца продольного стержня до нейтральной оси крестовины), между которыми помещена антирезонансная цепочка, элементы которой определяются формулами (5.77). В этом случае уравнение распространения звука можно записать в виде (5.27), если учитывать распространение волн в обоих направлениях:

$$\dot{u}_2 = \dot{u}_1 \cos\frac{\omega l_1}{2V} - j\frac{F_1}{Z_0}\sin\frac{\omega l_1}{2V}, \qquad F_2 = F_1\cos\frac{\omega l_1}{2V} - j\dot{u}_1 Z_0 \sin\left(\frac{\omega l_1}{2V}\right),$$

$$F_3 - F_2 = \dot{u}_2\left[\frac{j\omega M}{1-\omega^2 MC}\right], \tag{5.78}$$

$$\dot{u}_0 = \dot{u}_2\cos\frac{\omega l_1}{2V} - j\frac{F_3}{Z_0}\sin\frac{\omega l_1}{2V}, \qquad F_0 = F_3\cos\frac{\omega l_1}{2V} - j\dot{u}_2 Z_0 \sin\frac{\omega l_1}{2V},$$

где $\dot{u}_0$, $\dot{u}_2$ и $\dot{u}_1$ — колебательные скорости на выходе, в среднем сечении и на входе звена соответственно, а F_0, F_3, F_2 и F_1 — силы на выходе, на обеих сторонах антирезонансной цепочки и на входе фильтра. Преобразуя уравнения, можно написать

$$\dot{u}_0 = \dot{u}_1 \operatorname{ch} g - j\frac{F_1}{Z_I}\operatorname{sh} g, \qquad F_0 = F_1 \operatorname{ch} g - j\dot{u}_1 Z_I \operatorname{sh} g; \tag{5.79}$$

здесь постоянная передачи g и характеристическое сопротивление Z_I определяются выражениями

$$\operatorname{ch} g = \frac{\cos\omega l_1}{V} - \frac{\omega M/(1-\omega^2 MC)}{2Z_0}\sin\frac{\omega l_1}{V},$$

$$Z_I = Z_0\sqrt{\frac{\sin(\omega l_1/V) + \{\omega M/[Z_0(1-\omega^2 MC)]\}\cos^2(\omega l_1/2V)}{\sin(\omega l_1/V) - \{\omega M/[Z_0(1-\omega^2 MC)]\}\sin^2(\omega l_1/2V)}}, \tag{5.80}$$

где Z_0 — характеристическое сопротивление линии, а V — скорость распространения:

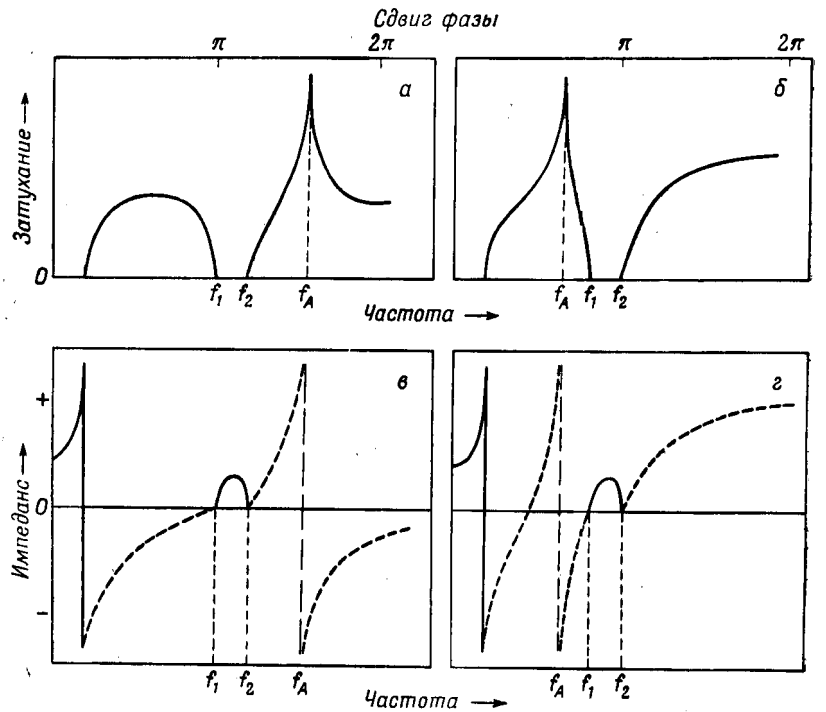
$$Z_0 = \rho V wt = \sqrt{\rho Y_0}\, wt, \qquad V = \sqrt{\frac{Y_0}{\rho}} \tag{5.81}$$

(Y_0 — модуль Юнга возбуждающего стержня, а ρ — его плотность).

Если l_1 меньше, чем $\lambda/4$, то характеристики совпадают с характеристиками, вычисленными при помощи эквивалентных схем, приведенных на фиг. 126. Обычно наилучшие результаты получаются в том случае, когда длины двух возбуждающих линий равны половине длины волны вблизи средней частоты полосы пропускания.

Рассматривая такой фильтр более детально, мы обнаружим, что существуют две его разновидности, различие между которыми

определяется тем, лежит ли антирезонансная частота выше или ниже, чем средняя частота полосы пропускания. Два типа характеристик затухания показаны на фиг. 156, *а* и *б*. Рассматриваемое



Фиг. 156. Характеристики затухания и сопротивления звена фильтра в случаях, когда $f_A > f_2$ (*а*, *в*) и когда $f_A < f_1$ (*б*, *г*).

устройство представляет собой комбинацию фильтра низкой частоты и полосового фильтра с максимумом затухания, расположенным либо выше, либо ниже полосы пропускания. Если провести вычисления для высоких частот, то можно обнаружить, что существуют еще высокочастотные полосы пропускания. Пропускание на низких частотах и высокочастотные полосы пропускания уничтожаются при подключении преобразователей, которые рассчитаны таким образом, что эффективно возбуждают линию только на частотах полосы пропускания полосового фильтра.

Для фильтра с антирезонансом в высокочастотной части полуволновая частота совпадает с нижней граничной частотой f_1, в то время как при расположении максимума затухания в низкочастотной части она совпадает с f_2. Типичные частотные зависимости

характеристического сопротивления приведены на фиг. 156, *в* и *г*. Если ввести расчетный параметр

$$b = \sqrt{\frac{1-f_A^2/f_2^2}{1-f_A^2/f_1^2}}, \tag{5.82}$$

где f_A — антирезонансная частота, а f_1 и f_2 — нижняя и верхняя граничные частоты полосы пропускания, то можно показать, что для максимума затухания, расположенного выше и ниже полосы пропускания, расчетные формулы для массы M и характеристического сопротивления в середине полосы Z_{I_0} принимают вид

$$\begin{gathered} M = \frac{8}{\pi}\,\frac{Z_0 b^2}{\omega_1(1-b^2)}, \\ Z_{I_0} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_M}\right) Z_0 \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2 b^2 + \left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_M}\right)\right]^2(\omega_1+b^2\omega_2)}}, \\ M = \frac{8}{\pi}\,\frac{Z_0}{\omega_2(b^2-1)}, \\ Z_{I_0} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_M}\right) Z_0 \sqrt{\frac{\omega_2 b^2}{\omega_1 + \left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_M}\right)\right]^2(\omega_1+b^2\omega_2)}}, \end{gathered} \tag{5.83}$$

где $\omega_M = \sqrt{\omega_1\omega_2}$. Поскольку длина линии l_1 равна половине длины волны при f_1 или при f_2, а b определяется антирезонансной частотой f_A, все величины входящих в схему элементов определены. Остается лишь выбрать ширину возбуждающего стержня (ширина поперечного стержня, совершающего изгибные колебания, для удобства берется такой же). Она обычно соответствует ширине возбуждающего преобразователя, который выбирается в соответствии с рекомендациями, приведенными в гл. 3. В книге [35] показано, что эквивалентную схему цепи, состоящей из катушки индуктивности, конденсатора и возбудителя, можно представить в таком виде, как показано на фиг. 157, *а*. Эту схему можно преобразовать в звено полосового фильтра, показанное на фиг. 157, *б* [85].

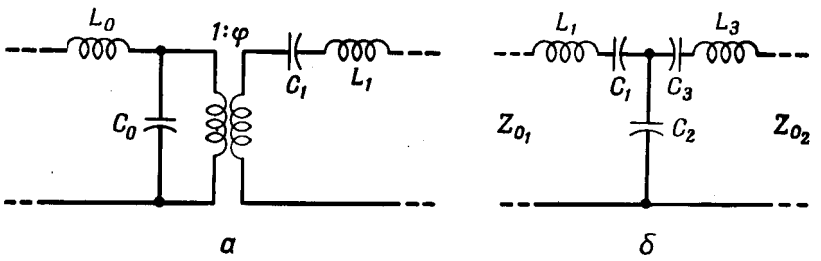
Параметры элементов цепи возбуждения определяются выражениями

$$C_0 = \frac{\varepsilon^s l w}{t}, \qquad C_1 = \frac{2l}{\pi^2 Y_0^E w t}, \qquad M_1 = \frac{\rho l w t}{2}, \qquad \varphi = 2dwY_0^E, \tag{5.84}$$

где ε^s — диэлектрическая проницаемость заторможенного преобразователя, Y_0^E — модуль Юнга при постоянном поле, ρ — плотность, d — действующий пьезоэлектрический модуль материала преобразователя, l — длина, w — ширина и t — толщина

преобразователя в направлении приложенного поля. Трансформатор с коэффициентом преобразования φ осуществляет переход от электрического сопротивления к механическому сопротивлению возбудителя.

Трансформирующий полосовой фильтр имеет, с одной стороны, характеристическое сопротивление Z_{01}, а с другой — характеристическое сопротивление Z_{02} и полосу пропускания между граничными частотами f_1 и f_2. Преобразование, которое можно



Ф и г. 157. Эквивалентная схема преобразователя с катушкой индуктивности и конденсатором.

а — первоначальная схема; *б* — эквивалентная схема преобразованного полосового фильтра.

осуществить, зависит от отношения $(f_2 - f_1)/f_M$, где $f_M = \sqrt{f_1 f_2}$ — средняя частота. Параметры такого фильтра определяются выражениями

$$L_1 = \frac{Z_{01}}{2\pi (f_2 - f_1)},$$

$$C_1 = \frac{f_2 - f_1}{\pi f_1 f_2 Z_{01} \left[\left(\frac{f_2}{f_1} + \frac{f_1}{f_2} \right) - \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \left(\frac{f_2}{f_1} - \frac{f_1}{f_2} \right) \right]}, \qquad (5.85)$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi (f_1 + f_2) \sqrt{Z_{01} Z_{02}}}, \qquad L_3 = \frac{Z_{02}}{2\pi (f_2 - f_1)},$$

$$C_3 = \frac{f_2 - f_1}{\pi f_1 f_2 Z_{02} \left[\left(\frac{f_2}{f_1} + \frac{f_1}{f_2} \right) - \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \left(\frac{f_2}{f_1} - \frac{f_1}{f_2} \right) \right]}.$$

Наиболее широкая полоса, получаемая при оптимальном преобразовании, имеет место при бесконечно большой емкости C_1, т. е. когда выполняются условия

$$\left[\frac{f_2}{f_1} + \frac{f_1}{f_2} \right] = \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \left(\frac{f_2}{f_1} - \frac{f_1}{f_2} \right), \text{ или } \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} = \frac{f_1^2 + f_2^2}{f_2^2 - f_1^2}. \qquad (5.86)$$

В этом случае выражения (5.85) для параметров схемы принимают вид

$$L_1 = \frac{Z_{01}}{2\pi (f_2 - f_1)}, \qquad C_2 = \frac{f_2 - f_1}{\pi Z_{01} (f_1^2 + f_2^2)},$$
$$L_3 = \frac{Z_{02}}{2\pi (f_2 - f_1)}, \qquad C_3 = \frac{(f_2 - f_1)(f_1^2 + f_2^2)}{2\pi f_1^2 f_2^2 Z_{02}}. \tag{5.87}$$

Когда механические элементы схемы представлены в виде электромеханического трансформатора, эквивалентная схема аналогична схеме кристаллического элемента, показанной на фиг. 116, для которой, как было указано выше, должно выполняться условие

$$\frac{C_0}{C_1} = r = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1-k^2}{k^2}\right), \quad \text{где} \quad k = d\sqrt{\frac{Y_0^E}{\varepsilon^T}}. \tag{5.88}$$

В случае преобразованного фильтра, показанного на фиг. 157, *б*, это ограничение сводится к требованию, чтобы

$$\frac{C_2}{C_3} = r = \frac{4 f_1^2 f_2^2}{(f_2^2 - f_1^2)^2}. \tag{5.89}$$

Таким образом, максимальная ширина полосы пропускания преобразователя равна

$$\frac{f_2 - f_1}{f_M} = \left(\frac{2f_M}{f_1 + f_2}\right)\frac{1}{\sqrt{r}} = \left(\frac{2f_M}{f_1 + f_2}\right)\sqrt{\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{k^2}{1-k^2}\right)}, \tag{5.90}$$

т. е. она совпадает с интервалом между резонансной и антирезонансной частотами в случае последовательного включения кристаллического резонатора и катушки индуктивности. Для уменьшения полосы пропускания параллельно с кристаллом может быть включен конденсатор соответствующей емкости.

При расчете всей цепи, состоящей из преобразователя и фильтра, аналогичной показанной на фиг. 121, необходимо обеспечить согласование сопротивления возбуждающего преобразователя на средней частоте полосы пропускания, которое определяется выражением

$$Z_D = 2\pi (f_2 - f_1)\left(\frac{\rho l w t}{2}\right), \tag{5.91}$$

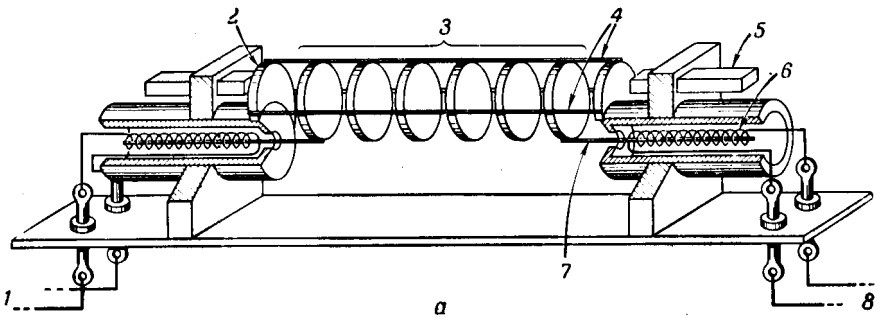
и сопротивления звена фильтра, вычисляемого по формуле (5.83). Для случая двух преобразователей с катушками индуктивности и двумя звеньями фильтра, создающими бесконечное затухание при бесконечно большой частоте ($b = f_1/f_2$), результирующая характеристика затухания приведена на фиг. 121. Добавочные емкости C_0 включены для согласования полосы пропускания преобразователя с полосой фильтра.

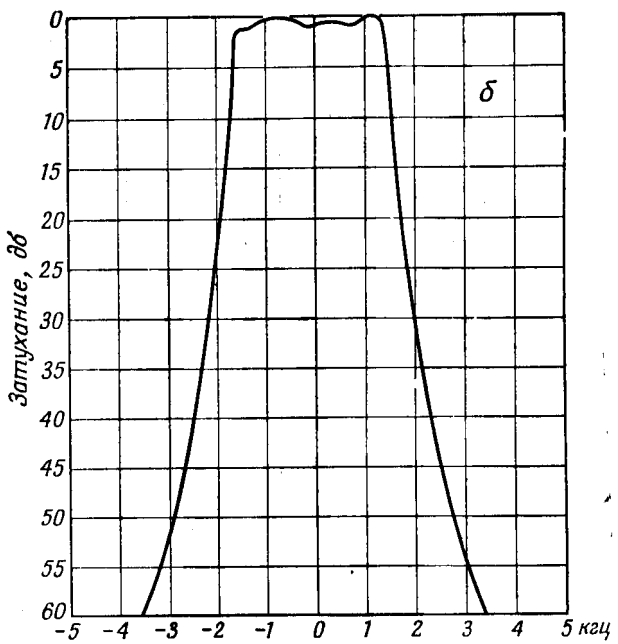
Другим фильтром, использующим продольные и изгибные колебания, который нашел значительное применение, является электромеханический полосовой фильтр Коллинза; его конструкция показана на фиг. 158, *а*. Фильтр состоит из дисков, которые скреплены между собой тремя металлическими полосками; вся эта конструкция подвешена на фиксирующих дисках, расположенных на каждом конце линии. Все соединения выполнены сваркой. Полуволновые магнитострикционные преобразователи, поляризованные постоянными магнитами, присоединены к оконечным резонирующим дискам и служат для преобразования электрических сигналов в механические и обратно. На фиг. 158, *б* приведена одна из опубликованных характеристик затухания такого фильтра.

Такой фильтр, по-видимому, воспроизводит фильтр, показанный на фиг. 157, *б*, для случая, когда сопротивления с обеих сторон одинаковы. При этом последовательное плечо образовано диском, который колеблется на первой резонансной частоте изгибных колебаний, причем эта частота значительно выше, чем первая антирезонансная частота. Шунтирующая податливость соответствует жесткости трех соединительных полосок. При использовании шести звеньев, показанных на фиг. 158, можно обеспечить очень быстрый рост затухания с частотой, в результате чего получается фильтр с высокой избирательностью. Фильтр имеет дополнительные резонансы, которые уменьшают затухание на соответствующих частотах; однако благодаря недостаточной эффективности преобразователя на этих частотах общая избирательность не снижается ниже 50 *дб*.

Другие типы фильтров. При использовании различных мод колебаний в возбуждающих преобразователях и фильтрующих механических звеньях можно получить много разнообразных типов фильтров. Фильтр, очень похожий на тот, который показан на фиг. 158, был получен с использованием крутильных колебаний цилиндрических элементов, соединенных между собой круглыми стерженьками [86]. Магнитострикционный преобразователь, прикрепленный к одному концу первого цилиндра, возбуждает в нем резонансные крутильные колебания. Это движение передается следующему цилиндру с помощью продольных колебаний промежуточных стерженьков; полуволновый магнитострикционный приемник преобразует механические колебания последнего цилиндра в электрический сигнал. Эквивалентная схема этого фильтра аналогична схеме, приведенной на фиг. 157, *б*.

В одном из аналогичных фильтров (см. [35], стр. 69) для возбуждения линии использованы крутильные колебания круглого цилиндра, в то время как тонкие круглые диски играют

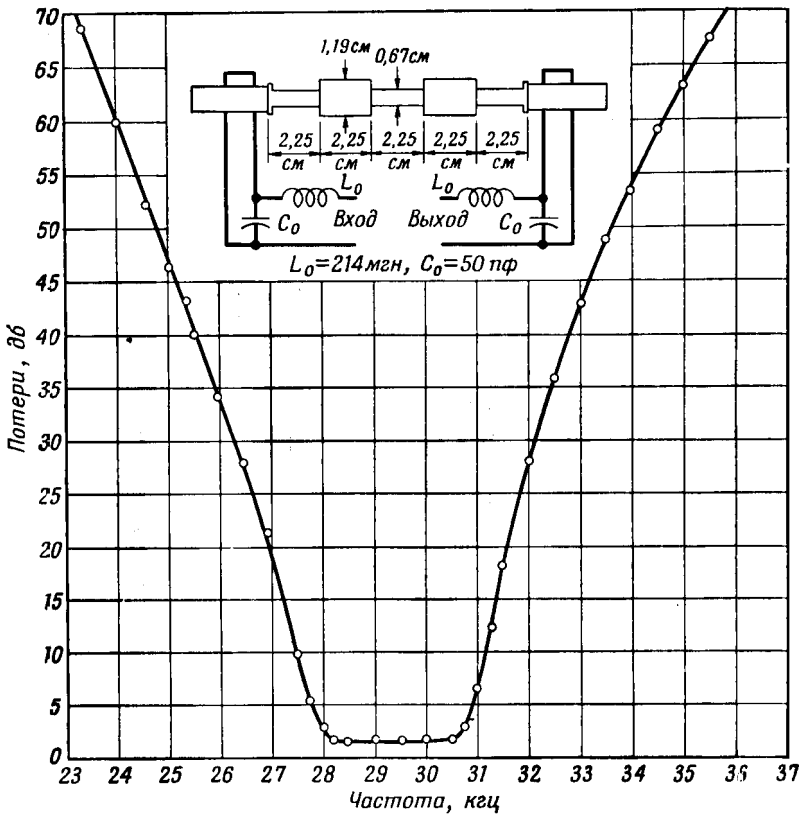




Ф и г. 158. Электромеханический фильтр.

а — конструкция: *1* — вход, *2* — диск для крепления (по одному с каждой стороны линии), *3* — резонансная механическая система (6 дисков), *4* — связующие стержни, *5* — поляризующий магнит, *6* — катушка преобразователя, *7* — магнитострикционный стержень, *8* — выход; *б* — характеристика затухания.

роль элементов, работающих в режиме антирезонанса. Разновидностью фильтра этого типа является фильтр [87], в котором чередуются тонкие стержни, работающие на скручивание, и стержни большого диаметра. Это эквивалентно соединению передающих линий с различными характеристическими сопротивлениями.

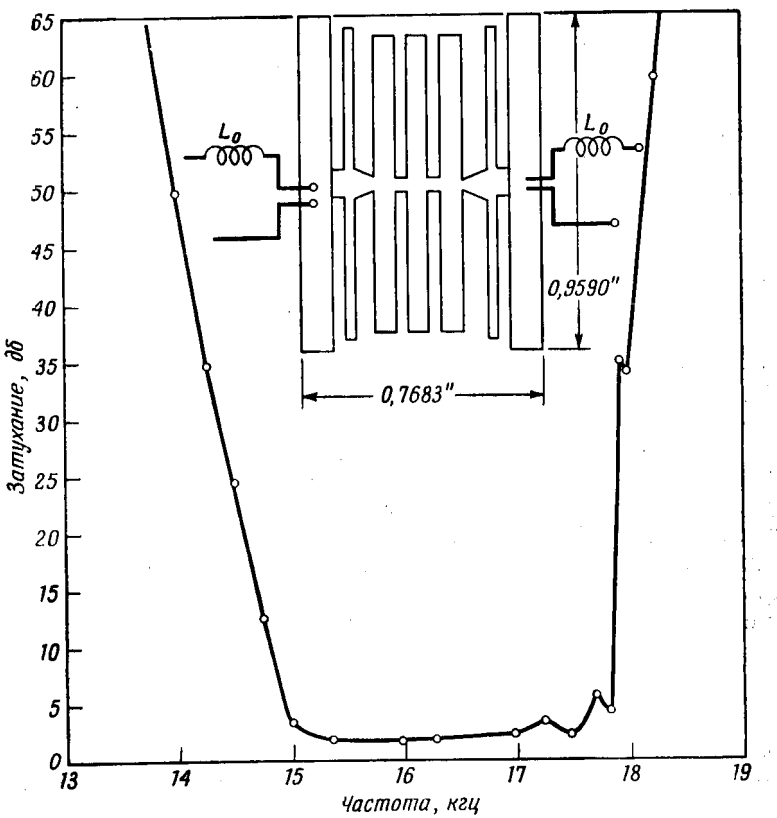


Ф и г. 159. Характеристика затухания и конструкция полосового фильтра на крутильных колебаниях.

Было показано [35], что такая комбинация линий представляет собой ряд низкочастотных и полосовых звеньев с шириной полосы пропускания и характеристикой затухания, зависящими от отношения характеристических сопротивлений двух соседних секций. На фиг. 159 показаны схема конструкции и экспериментальная характеристика двухсекционной линии с преобразователями из титаната бария, работающими на крутильных колебаниях.

Сам фильтр изготовлен из железо-никелевого сплава с низким температурным коэффициентом.

Третий тип фильтра на крутильных колебаниях, предназначенного для создания речевой полосы на низких частотах [88],



Ф и г. 160. Характеристика затухания и конструкция полосового фильтра, использующего крутильные и изгибные колебания.

схематически показан на фиг. 160. В этом фильтре элементом, передающим энергию, служит тонкая металлическая полоска, в которой преобразователь возбуждает крутильные колебания. Последний образован четырьмя керамическими пластинами из PZT, которые приклеены к тонкому держателю, связанному с передающим элементом. Керамические пластины, расположенные на противоположных сторонах преобразователя в направлении его толщины, поляризованы таким образом, что когда одна

из них удлиняется, то другая сжимается. На другом конце элементы поляризованы в противоположном направлении; поэтому система возбуждается на второй изгибной моде, создавая момент вращения относительно продольной оси фильтра и возбуждая в передающем элементе крутильные колебания. Фильтрующее действие возникает за счет изгибных колебаний боковых ветвей. Центр полосы пропускания находится вблизи частоты первого последовательного резонанса. Первый антирезонанс, расположенный ниже резонансной частоты, и второй антирезонанс создают пики затухания ниже и выше полосы пропускания. В этом фильтре до некоторой степени использована [88] трансформация сопротивлений между преобразователем и основной фильтрующей секцией, чтобы расширить полосу пропускания, возможную для данного материала преобразователя.

На фиг. 160 показана характеристика затухания, полученная для фильтра, механическая секция которого может быть размещена в объеме 25 × 25 × 3 *мм*. Такие фильтры могут применяться в аппаратуре уплотнения на частотах 10—60 *кгц* в системах связи малой дальности, в которых по экономическим соображениям не используется модуляция на высоких частотах.

В литературе описан ряд других фильтров [89], использующих аналогичные принципы работы. Обычно в них применяются крутильные колебания, которые слабее связаны с изгибными модами колебаний, чем другие колебания. До настоящего времени применение таких фильтров было довольно ограниченным, однако в принципе они могут конкурировать с фильтрами других типов как с точки зрения их стоимости, так и по техническим данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mason W. P., Bell System Techn. Journ., **20**, 405 (1941).
2. Kelvin, Baltimore Lectures, vol. 1, Baltimore, Maryland **1881**, p. 185.
3. Herschel, Phil. Mag. [5], 3, 405 (1833).
4. Campbell, G. A., Phil. Mag. [6], **5**, 313 (1903).
5. Campbell G. A., Collected Works, New York, 1937, p. 7.
6. Helmholtz H., Crelle, **57** (1860).
7. Zobel O. J., Bell System Techn. Journ., **2**, No. 1 (1923).
8. Zobel O. J., Bell System Techn. Journ., **10**, 284 (1931).
9. Guillemin E. A., Communication Networks, vol. 2, ch. 9, New York, 1935.
10. Mason W. P., Bell System Techn. Journ., **13**, 405 (1934).
11. Mason W. P., Bell System Techn. Journ., **16**, 423 (1937).
12. Mason W. P., Electromechanical Transducers and Wave Filters, New York, 1942.
13. Buckley O. E., Journ. Appl. Phys., **8**, 40 (1937).
14. Sullivan R. A., Western Electr. Eng., **3**, 2 (1959).
15. Laudise R. A., Nielsen J. W., Solid State Phys., **12**, 149 (1962).
16. Campbell G. A., Bell System Techn. Journ., **1**, No. 2, 1 (1922).

17. Bartlett A. C., Phil. Mag. [7] **4**, 902 (1927).
18. Bode H. W., Journ. Math. Phys., **13**, No. 3, 275 (1934).
19. Bode H. W., Dietzold R. L., Bell System Techn. Journ., **14**, 215 (1935).
20. Cauer W., Zs. angew. Math. Mech., **10**, 425 (1930).
21. Cauer W., Seibschaltungen, Berlin, 1931.
22. Espenschied L., US Patent No. 1 795 204 (1931).
23. Mason W. P., Sykes R. A., Bell System Techn. Journ., **16**, 279 (1937).
24. Stewart G. W., Phys. Rev., **20**, 528 (1922).
25. Stewart G. W., Phys. Rev., **23**, 520 (1924).
26. Stewart G. W., Phys. Rev., **25**, 590 (1925).
27. Stewart G. W., Lindsay R. B., Acoustics, Princeton, New Jersey, 1930, Ch. VII.
28. Mason W. P., Bell System Techn. Journ., **6**, 258 (1927).
29. Lindsay R. B., Journ. Appl. Phys., **9**, 612 (1938).
30. Lindsay R. B., Journ. Appl. Phys., **10**, 620 (1939).
31. Mason W. P., Stanton G. T., Tweeddale J. E., US Patent No. 2 100 404 (1947).
32. Vincent J. H., Phil. Mag. [5], **46**, 557 (1898).
33. Meyer E., Mechel F., Kurtze G., Journ. Acoust. Soc. Amer., **30**, 165 (1958).
34. Mason W. P., US Patent No. 2 345 941 (1941).
35. Mason W. P., Physical Acoustics and the Properties of Solids, Princeton, New Jersey, 1958.
36. Hunt F. V., в книге American Institute of Physics Handbook, Sec. 3-C, New York, 1957, p. 3-25.
37. Kirchoff G. R., Pog. Ann., **134**, 177 (1868).
38. Rayleigh, Theory of Sound, vol. 2, London, 1926, p. 319 (см. перевод: Рэлей, Теория звука, М.— Л., 1955).
39. Sivian L. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **19**, 914 (1947).
40. Liebermann L. N., Journ. Acoust. Soc. Amer., **20**, 868 (1948).
41. Hall L., Phys. Rev., **73**, 775 (1948).
42. Mason W. P., Phys. Rev., **31**, 283 (1928).
43. Fine M. E., Ellis W. C., Journ. Metals, **3**, 761 (1951).
44. Mason W. P., McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **19**, 464 (1947).
45. Mason W. P., McSkimin H. J., Journ. Appl. Phys., **19**, 940 (1948).
46. Zemanek J., Jr., Rudnick L., Journ. Acoust. Soc. Amer., **33**, 1283 (1961).
47. Bömmel H. E., Mason W. P., Warner A. W., Phys. Rev., **102**, 64 (1956).
48. Mason W. P., Piezoelectric Crystals and Their Uses in Ultrasonics, Princeton, New Jersey (1950) (см. перевод: У. Мэзон, Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике, М., 1952).
49. Mason W. P., US Patent No. 2 094 044 (1937).
50. Anderson O. L., Christenson H., US Patent No. 3 006 067.
51. Anderson O. L., Christenson H., Andreatch P., Journ. Appl. Phys., 28, 923 (1957).
52. Mason W. P., в книге American Institute of Physics Handbook, Sec. 3g, New York (1957), p. 3.
53. Bell Telephone Laboratories Reference Book on Quartz Crystal Units — X75501.
54. Mason W. P., Bell System Techn. Journ., **19**, 74 (discussion) (1940).
55. Mason W. P., Proc. IRE, **28**, 220 (1940).
56. Warner A. W., Proc. IRE, **43**, 790 (1955).

57. Warner A. W., Bell System Techn. Journ., **39**, 1193 (1960).
58. Mason W. P., Sykes R. A., US Patent No. 2 173 589 (1939).
59. Baerwald H. G., Phys. Rev., **105**, 480 (1957).
60. Berlincourt D., Krueger H. H. A., Journ. Appl. Phys., **30**, 1804 (1959).
61. Lungo L., Henderson K. W., IRE Nat. Conv. Record, 235 (1958).
62. Curran D. B., Koneval D. J., Proc. Nat. Electronics Conf., **17**, 514 (1961).
63. Mason W. P., US Patent No. 2 185 599 (1942).
64. Sykes R. A., IRE Nat. Conv. Record, pt. 2, 18 (1958).
65. Willis E. S., Trans. Amer. Inst. Electr. Eng., **65**, 134 (1946).
66. Blecker F. H., Hallenbeck F. J., Bell System Techn. Journ., **41**, 321 (1962).
67. Mason W. P., Sykes R. A., Bell System Techn. Journ., **19**, 221 (1940).
68. Foster R. M., Bell System Techn. Journ., **3**, 259 (1924).
69. Sykes R. A., в книге Quartz Crystals for Electrical Circuits, ed. R. A. Heising, Princeton, New Jersey, 1946, ch. 6.
70. Mindlin R. D., Journ. Appl. Phys., **22**, 316 (1954).
71. Bechmann R., Proc. IRE, **46**, 617 (1958).
72. Gerber E. A., Havel J. M., IRE Trans. on Military Electronics MIL-4, 424 (1960).
73. Pierce G. W., Proc. Amer. Acad. Arts and Sci., **59**, 9 (1923).
74. Pierce G. W., US Patent No. 1 789 496 (1931).
75. Miller J. M., US Navy Radio Rep., 53 (1925).
76. Llewellyn F. B., Proc. IRE, **19**, 2063 (1931).
77. Fair I. E., в книге Quartz Crystals for Electrical Circuits, ed. R. A. Heising, Princeton, New Jersey, 1946, ch. 12.
78. Mason W. P., Fair I. E., Proc. IRE, **30**, 464 (1942).
79. Meacham L. A., Proc. IRE, **26**, 1278 (1938).
80. Meacham L. A., Bell System Techn. Journ., **17**, 574 (1938).
81. Mason W. P., IRE Trans. on Instrumentation, I-**7**, 189 (1958).
82. Keller A. C., Bostwick L. G., Trans. Amer. Inst. Electr. Eng , **68**, 383 (1949).
83. Mitchell D., Van Wynen K. G., Bell System Techn. Journ., **40**, 1239 (1960).
84. Bostwick L. G., Bell System Techn. Journ., **41**, No. 2, 411 (1962).
85. Shea T. B., Transmission Networks and Wave Filters, Princeton, New Jersey, 1929.
86. Börner M., Kettel E., Ohnesorge H., Telefunken Ztg., **11**, 105 (1958).
87. Van B., Roberts W., Burns L. L., RCA Rev., **10**, No. 1, 348 (1949).
88. Mason W. P., Thurston R. N., IRE Trans. on Ultrasonic Eng. UE-**7**, 59 (1960).
89. Hathaway J. C., Babcock D. F., Proc. IRE, **45**, 5 (1957).

Глава 6

ВОЛНОВОДНЫЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫЕ ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ

ДЖ. МЕЙ [1])

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1. Краткая характеристика волноводных линий задержки

Основной принцип работы волноводных ультразвуковых линий задержки ничем не отличается от принципа работы ультразвуковых линий задержки других типов и состоит в том, что электрический сигнал с помощью электромеханического преобразователя преобразуется в механические колебания, которые затем распространяются в виде упругих волн по определенному направлению через задерживающую среду. Различие заключается в условиях распространения упругих волн в линии задержки. В обычных линиях задержки с пьезоэлектрическими преобразователями, например в линиях с прямым ходом луча или призматического типа, описанных в гл. 7, упругие волны распространяются как плоские волны в безграничной среде, не взаимодействуя с ограничивающими поверхностями. В волноводных же линиях задержки отношение поперечных размеров проволоки или прямоугольной ленты к длине волны выбирается таким, чтобы упругие волны, взаимодействуя с граничными поверхностями, распространялись как в волноводе. В упругом волноводе может существовать множество нормальных волн, причем для большинства из них фазовая скорость является функцией частоты. Линии задержки, использующие такие нормальные волны, носят название дисперсионных.

Важным исключением из этой общей схемы являются нормальные волны нулевого порядка (колебания сдвига по толщине в прямоугольных лентах и крутильные колебания в круглой проволоке). Они не обладают дисперсией, и, кроме них, ниже критической частоты самой низкой дисперсионной нормальной волны никакие другие колебания распространяться не могут. Нормальные волны нулевого порядка используются в линиях, для которых задержка не должна зависеть от частоты.

---

[1]) «Белл телефон леборатриз», Мерри-Хилл, Нью-Джерси.

Различные нормальные волны, распространяющиеся в прямоугольных полосах и лентах, а также в круглой проволоке, рассматриваются в гл. 2. Наряду с ними существует возможность использовать в волноводных линиях задержки нормальные волны, распространяющиеся в полых круглых трубах. Упругие колебания в линиях задержки возбуждаются и воспринимаются либо пьезоэлектрическими, либо магнитострикционными преобразователями. В линии задержки может существовать много нормальных волн, однако для создания линии задержки с нужными характеристиками следует возбуждать лишь вполне определенные нормальные волны. Необходимая степень подавления нежелательных колебаний зависит от назначения данной линии. Например, если задержке подлежит информация в цифровой форме, то допустимы довольно значительные искажения сигнала, так как в последующих цепях необходимо лишь различить присутствие или отсутствие импульса в течение определенного интервала времени. Поэтому избирательность 20 *дб* достаточна, чтобы избавиться от ложных сигналов. Если задержке подлежит информация в аналоговой форме, например радиолокационные или телевизионные сигналы, то искажения должны быть сведены к минимуму. В соответствии с этим избирательность по отношению к ложным сигналам должна составлять по крайней мере 40 *дб*, а в некоторых случаях требуется избирательность 60 *дб*.

Волноводные линии задержки можно характеризовать: 1) формой характеристики задержки, 2) избирательностью по отношению к нежелательным модам колебаний, 3) избирательностью по отношению к многократно отраженным сигналам, 4) средними потерями в полосе пропускания, 5) шириной полосы пропускания и 6) средней частотой. Когда преобразователь электрически согласован с нагрузкой [1], что необходимо для уменьшения потерь, три первые характеристики определяются главным образом типом упругих волн, распространяющихся в материале линии, и характером колебания преобразователя. Средние потери в полосе пропускания зависят от тех же факторов, но, кроме того, в значительной степени определяются затуханием ультразвука в материале линии задержки, которое для большинства материалов увеличивается с повышением частоты. Поэтому средние потери в полосе пропускания зависят также от материала и рабочей частоты.

Первые четыре характеристики для различных нормальных волн рассматриваются в § 2—6 настоящей главы. Ширина полосы пропускания зависит от акустических сопротивлений материала линии и преобразователя, пьезоэлектрических или магнитострикционных свойств преобразователя и электрического

согласования последнего с нагрузкой. Поскольку эта зависимость для всех рассматриваемых случаев аналогична, вопрос о ширине полосы пропускания рассматривается отдельно в § 7.

2. Исторический обзор

По-видимому, самыми первыми волноводными линиями задержки были проволочные магнитострикционные линии, в которых использовалась первая продольная нормальная волна [2, 3]. В магнитострикционном преобразователе сигнал подводился к катушке, расположенной вокруг проволоки из ферромагнитного материала, и в результате магнитострикционных свойств последнего в проволоке возникали напряжения, распространяющиеся в виде упругих волн (первой продольной нормальной волны). В такой линии при работе на линейном участке характеристики задержки, соответствующем малым значениям произведения диаметра на частоту, дисперсия может быть сведена к минимуму.

При исследовании линии, в которой используется крутильная нормальная волна нулевого порядка; оказалось, что такая линия не обладает дисперсией, при работе на частотах ниже критической в ней не возникает никаких других мод колебаний, и, кроме того, при одинаковом времени задержки она короче на 40%. Указанные преимущества были реализованы Скерротом и Нейлором [4] при создании магнитострикционной линии задержки на крутильных колебаниях, а также Терстоном и Торнилло [5] в аналогичной линии с пьезоэлектрическим возбуждением.

Сдвиговые колебания по толщине в бесконечной пластине использовал Мейтцлер [6] как в дисперсионных линиях задержки, так и в линиях без дисперсии. Эти колебания возбуждались пьезоэлектрическим способом и распространялись в ленте прямоугольного сечения с поглотителями на концах. Пьезоэлектрический метод возбуждения первой продольной нормальной волны в проволоке вблизи нижней точки перегиба характеристики задержки использовал также Мей [7] при создании линии, задержка в которой линейно зависела от частоты. Разработанная Микером [8] ленточная линия задержки на продольных колебаниях с аналогичной характеристикой задержки имела линейную дисперсию при очень хорошей избирательности в отношении ложных сигналов. Фич [9] исследовал возможность использования различных нормальных волн в полой трубе для создания дисперсионных линий задержки, но избирательность по отношению к ложным сигналам оказалась недостаточной для практического использования таких линий. Фич [10, 11] разработал ленточные линии задержки на продольных колебаниях, толщина которых

меняется по длине или непрерывно, или скачкообразно. В таких конструкциях удается создавать произвольные характеристики задержки; в частности, удается добиться большей линейности, чем та, которую можно получить в ленточных линиях постоянной толщины, работающих на продольных колебаниях.

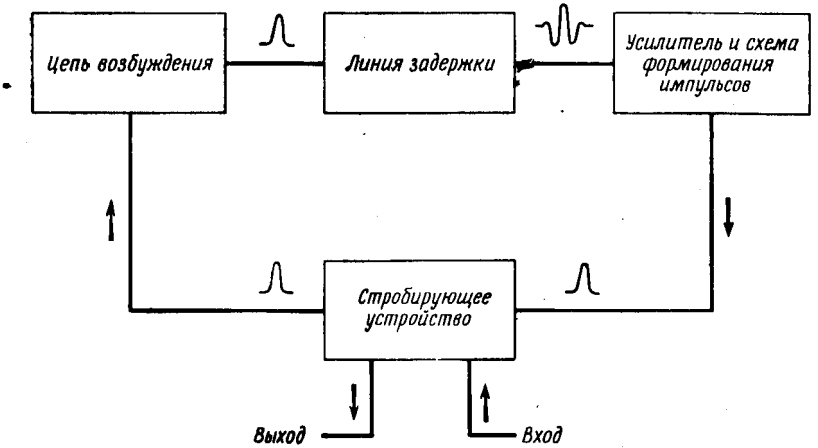
3. Применения волноводных линий задержки, не обладающих дисперсией

Линии задержки с многократными отражениями сигнала, позволяющие получать задержку порядка миллисекунд при ширине полосы пропускания в пределах 5—20 *Мгц*, в течение ряда лет использовались для осуществления задержки информации в аналоговой форме. Одно из первых и наиболее важных применений линий такого типа состояло в накоплении радиолокационных сигналов в системах подавления неподвижных эхосигналов, т. е. в устройствах, необходимых для создания индикатора движущихся целей [12, 13]. Многоугольные линии задержки нашли применение в некоторых системах обработки сигналов и в цифровых запоминающих устройствах, обладающих высокой скоростью [14]. Было разработано много линий задержки с прямым ходом луча для использования в качестве отметчиков времени и в системах кодирования импульсов для средств секретной связи [15, 16].

Большинство линий задержки с прямым ходом луча и линий с многократными отражениями сигнала создано для работы на частотах выше 10 *Мгц*. В отличие от этого волноводные линии задержки в основном предназначены для использования в нижней части мегагерцного диапазона или даже на еще более низких частотах. По-видимому, граница естественного разделения областей применения линий этих типов частично определяется соображениями стоимости. Дело в том, что волноводные линии существенно дешевле ультразвуковых линий задержки других типов, и поэтому в тех случаях, когда ширина полосы пропускания, обеспечиваемая при работе на низких частотах, оказывается достаточной, возможно получение значительной экономии. Другие преимущества волноводных линий задержки различных конструкций состоят в возможности создания переменных задержек, в компактности и малом весе, в очень большом времени задержки, независимости времени задержки от температуры, а также в малых потерях.

Большое значение линии задержки имеют в качестве накопителей цифровой информации в вычислительных машинах [17, 18]; при разработке таких устройств были проведены обширные исследования магнитострикционных линий. Время задержки D

линии делится на N временны́х интервалов длительностью $D_N = D/N$. Информация в цифровой форме непрерывно циркулирует через цепь возбуждения линии задержки, саму линию, усилитель, схему формирования импульсов и стробирующее устройство, как показано на фиг. 161. Импульс, соответствующий некоторому временно́му интервалу, проходит через стробирующую



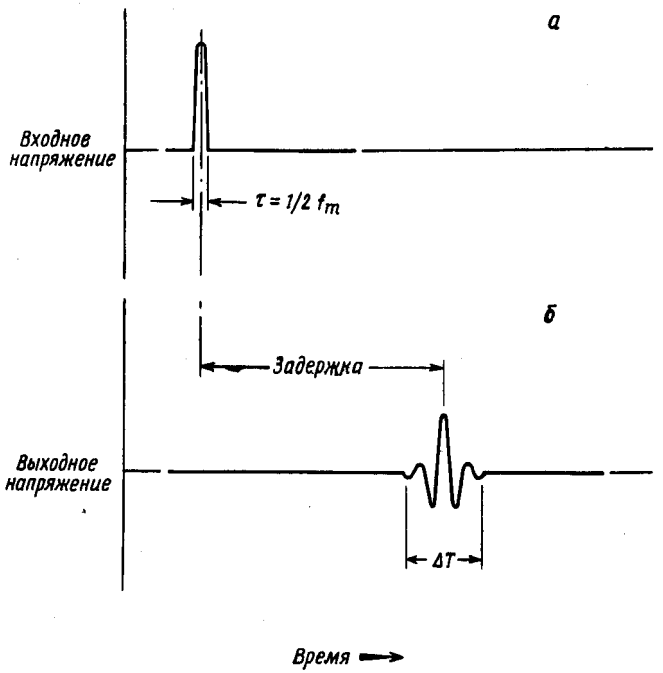
Фиг. 161. Блок-схема контура перезаписи информации, использующего линию задержки для последовательного накопления информации.

схему один раз каждые D *сек*, и за это время стробирующее устройство отмечает наличие или отсутствие импульса, а также может ввести импульс или удалить его в соответствии с командой счетно-решающего устройства. Величина, обратная D_N, носит название частоты следования. Таким образом, наиболее важными параметрами линии являются N — число накопленных двоичных единиц информации (емкость памяти) и $1/D_N$ — частота следования импульсов (скорость обзора).

Обычно на вход линии подается униполярный импульс длительностью τ; выходной импульс имеет длительность ΔT, как это показано на фиг. 162. ΔT должно быть приблизительно равно или меньше, чем D_N. Ширина полосы β связана с шириной импульса ΔT эмпирическим соотношением $\beta\,(\Delta T) \approx 2$. Таким образом, полное число двоичных единиц информации N равно половине произведения длительности импульса на ширину полосы.

Эти соображения относятся к выходным импульсам такой формы, при которой легко осуществляется разделение импульсов методом «возвращения к нулю». При использовании метода

работы «без возвращения к нулю» [19] эффективная частота следования удваивается при помощи подачи на линию задержки специального сигнала. Этот сигнал представляет собой постоянное напряжение с двумя уровнями; он изменяет свой уровень при

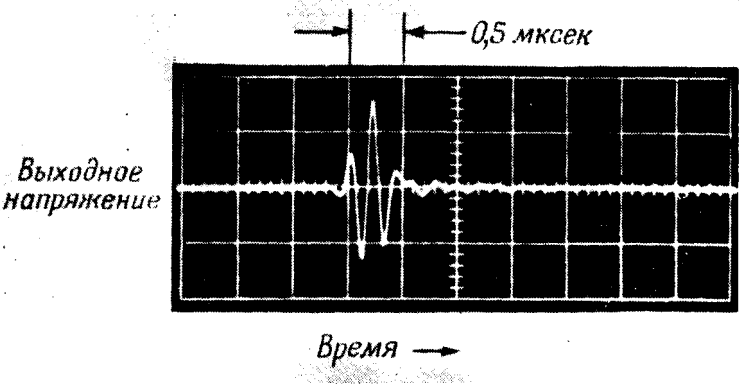


Ф и г. 162. Идеализированная форма импульса в линиях задержки для цифровых устройств (по Мейтцлеру [42]).
а — входной импульс постоянного тока; *б* — выходной радиочастотный импульс.

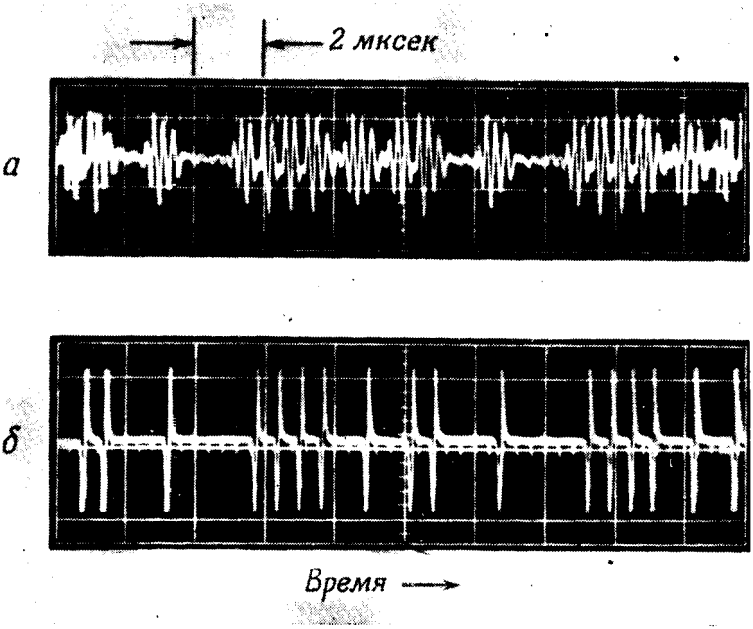
каждом появлении «единицы» во входном цифровом сигнале, но остается неизменным при каждом появлении «нуля».

Вследствие особенностей характеристик магнитострикционных и пьезоэлектрических линий задержки реакцией на униполярный импульс будут затухающие колебания со средней частотой f_M полосы пропускания. При длительности входного импульса, соответствующей частоте $^1/_2\, f_M$ (для данной комбинации преобразователя и звукопровода), удается получить оптимальную форму выходного импульса длительностью ΔT (фиг. 162).

На фиг. 163 показана осциллограмма импульса, полученного на выходе ленточной линии задержки, работающей на сдвиговых колебаниях с частотой 5 *Мгц*, при оптимальной длительности



Ф и г. 163. Импульс на выходе ленточной линии задержки на сдвиговых колебаниях (частота 5 *Мгц*, задержка 400 *мксек*, длительность входного импульса 0,1 *мксек*) (по Мейтцлеру [42]).



Ф и г. 164. Импульсы на выходе ленточной линии с задержкой 4,2 *мсек*, работающей на сдвиговых колебаниях (*а*), и те же импульсы после восстановления (*б*) (по Мейтцлеру [42]).

входного импульса. На фиг. 164 показана типичная серия импульсов, полученных на выходе ленточной линии на сдвиговых колебаниях с задержкой 4,2 *мсек* и преобразователями на 5 *Мгц*, при подаче на вход серии импульсов постоянного тока длительностью 0,2 *мксек*. На фиг. 164, *б* показаны сигналы, восстановленные из высокочастотных импульсов с помощью регенеративной схемы. Минимальная длина выходного импульса получается в том случае, когда сопротивления преобразователя и линии задержки согласованы (см. § 7, п. 1). Примером такого выходного импульса может служить импульс, показанный на фиг. 194. Хотя в настоящее время линии задержки без дисперсии в основном используются в счетно-решающих устройствах, но они находят применение и во многих других цифровых системах, где просмотр накопленной информации может осуществляться последовательным методом.

В других применениях магнитострикционных линий без дисперсии используется возможность создания легко регулируемой задержки. Поскольку магнитострикционный преобразователь представляет собой проволочную катушку, связанную с линией задержки лишь через магнитное поле, ее можно перемещать вдоль линии, получая, таким образом, переменную задержку сигналов. Так, например, была разработана регулируемая линия задержки со временем задержки, меняющимся в интервале 90 *мксек*, для самолетных навигационных устройств, где она использовалась для компенсации различного запаздывания сигналов от самолетов, находящихся на разной высоте [20]. В экспериментальной телефонной системе с импульсно-кодовой модуляцией переменная линия задержки со следящим приводом применена для компенсации изменений времени прохождения сигналов по телефонным линиям, вызванных колебаниями температуры [21]. Подобные же линии с ручной регулировкой задержки были использованы в устройстве для компенсации разницы пути прохождения сигналов между различными телефонными коммутаторами.

4. *Применения дисперсионных линий задержки*

В линиях задержки, описанных выше, ставилась задача обеспечить постоянство задержки в пределах некоторого диапазона частот. Однако во многих устройствах возникает изменение задержки с частотой, поэтому использование дисперсионных ультразвуковых линий задержки в качестве выравнивателя задержки позволяет обеспечить неискаженную передачу сигналов по линиям передачи и цепям.

В других случаях дисперсионные линии используются в качестве линий переменной задержки. Для этого сигналом, который

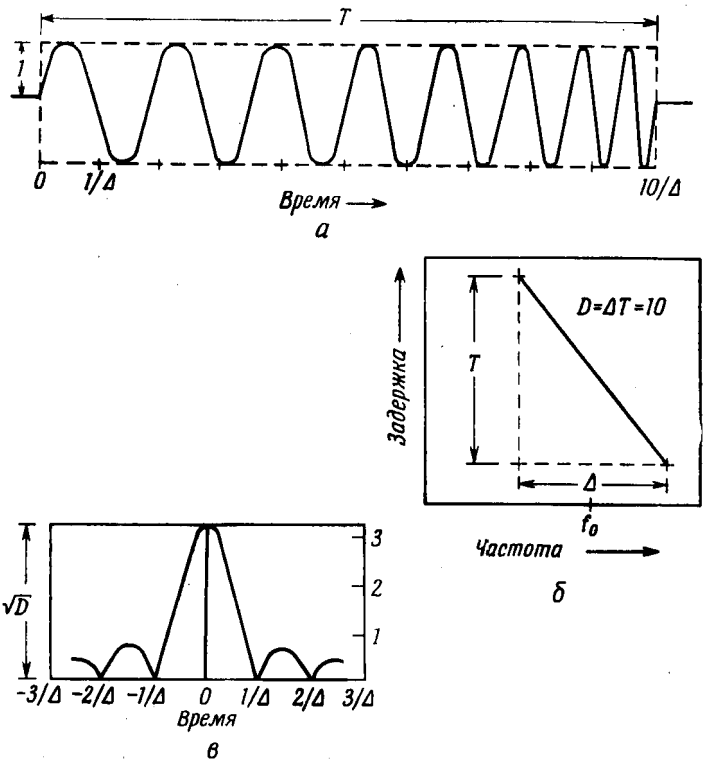
должен быть задержан, модулируют несущую частоту, передаваемую по линии. При изменении несущей частоты рабочая точка на кривой задержки в зависимости от частоты перемещается, в результате чего изменяется соответствующим образом средняя задержка сигнала.

Третья и наиболее важная в настоящее время задача, которую позволяют решать линии с линейной характеристикой задержки,— увеличение дальности действия радиолокационных станций без соответствующего увеличения мощности в импульсе. В обычных импульсных радиолокационных устройствах дальность действия может быть увеличена путем повышения средней мощности излучения, а разрешающая способность по дальности может быть улучшена путем уменьшения длительности импульсов. Чтобы увеличить дальность действия станции без соответствующего ухудшения разрешающей способности, необходимо увеличивать мощность в импульсе, которая в конечном счете ограничена напряжением пробоя. Хотя и были предложены различные решения этой задачи, мы ограничимся указанием на систему сжатия импульсов, разработанную Дарлингтоном [22, 23].

В этой системе используется известное явление, состоящее в том, что, когда короткий импульс проходит по цепи с линейной задержкой, имеющей положительный наклон, различные частотные составляющие спектра импульса при разложении в ряд Фурье линейно распределяются во времени; при этом высокие частоты задерживаются сильнее, чем низкие. Поэтому на выходе такого устройства получается линейно модулированный по частоте импульс с распределением амплитуд, описываемым функцией $(\sin x)/x$. Если такой импульс пропустить через вторую аналогичную линию задержки, имеющую отрицательный наклон характеристики задержки, то составляющие спектра частот будут задерживаться в обратном порядке, т. е. высокие частоты задержатся меньше, чем низкие. После прохождения сигнала через обе задерживающие цепи частотные составляющие восстанавливают свои первоначальные фазовые соотношения и, следовательно, выходной импульс приобретает тот же вид, какой имел входной импульс. Форма импульса на выходе линейной задерживающей цепи соответствует форме входного импульса после преобразования Фурье.

Второй этап преобразования импульса, т. е. процесс сжатия импульса с помощью описанного устройства, показан на фиг. 165. Напряжение на входе линии задержки с линейной характеристикой показано на фиг. 165, *а*; это линейно модулированный по частоте импульс единичной амплитуды и длительности T со спектром частот Δ. Наклон линейной характеристики задерживающей цепи определяется отношением T/Δ, а коэффициент

сжатия D выражается произведением $D = \Delta T$. Если импульс, показанный на фиг. 165, *а*, проходит через цепь с характеристикой, изображенной на фиг. 165, *б*, то выходной импульс будет иметь форму, определяемую выражением $\sqrt{D}\,(\sin \pi\Delta t)/\pi\Delta t$

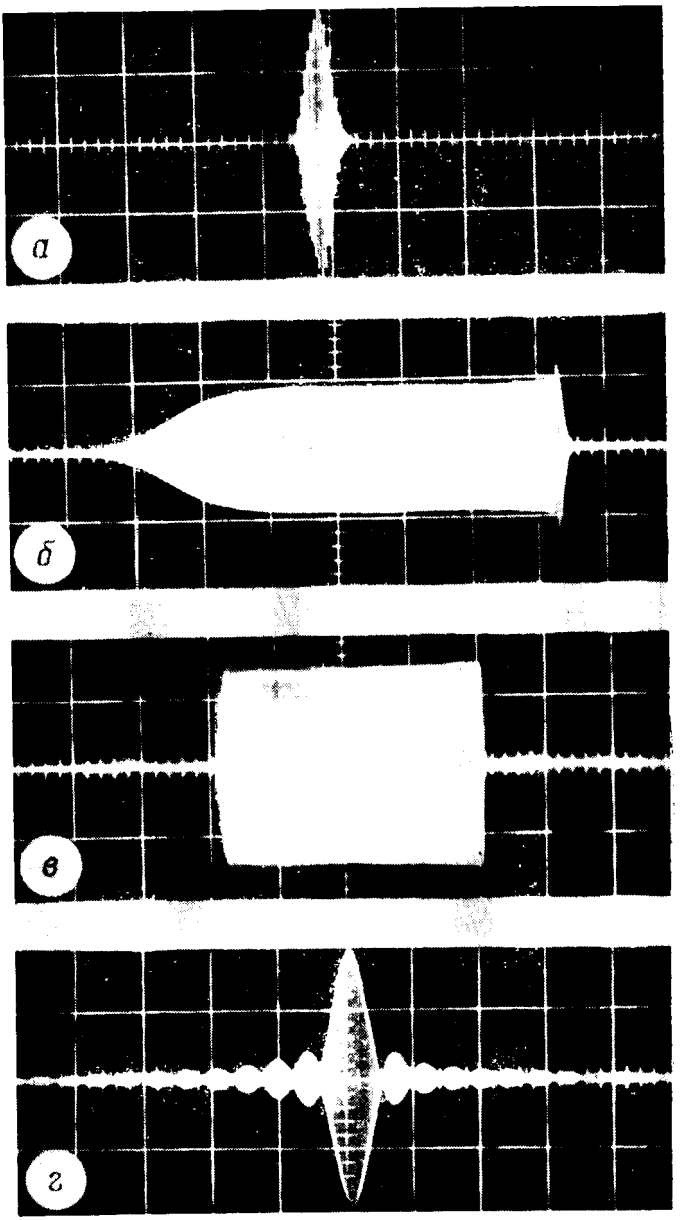


Ф и г. 165. Метод сжатия импульса (по Клаудеру [23]).

а — линейно модулированный по частоте входной импульс; *б* — характеристика задержки, линейно зависящая от частоты; *в* — сжатый импульс на выходе.

и показанную на фиг. 165, *в*. В приведенном примере $T = 10$ единиц, $\Delta = 1$ и, следовательно, $D = 10$. Основная часть выходного импульса имеет ширину $1/\Delta = 0{,}1\ T$; таким образом, происходит сжатие импульса в 10 раз. Это сжатие сопровождается увеличением амплитуды импульса в $\sqrt{D} = 3{,}16$ раза.

Фотография на фиг. 166 показывает форму импульса на различных стадиях преобразования в устройстве для сжатия импульса, использующем две идентичные линии задержки, работающие на продольных колебаниях. На вход первой линии подается короткий радиоимпульс, имеющий определенный спектр



Ф и г. 166. Осциллограммы импульсов, прошедших через две линейные ультразвуковые линии задержки (по Мею).

а — входной импульс; *б* — частотно-модулированный импульс на выходе первой линии; *в* — частотно-модулированный импульс на входе второй линии (после стробирования и инверсии частоты); *г* — импульс на выходе второй линии.

(фиг. 166, *а*). На выходе ее возникает частотно-модулированный сигнал (фиг. 166, *б*), схематически показанный на фиг. 165, распределение амплитуд в котором определяется функцией $(\sin x)/x$; искажения на высокой частоте объясняются здесь подъемом характеристики задержки. Вместо того чтобы создавать линию с отрицательным наклоном характеристики задержки, можно осуществить инверсию импульса, показанного на фиг. 166, *б*, путем модуляции высокой частотой с последующим выделением низкочастотной боковой полосы модулированного сигнала. Если частота модуляции в 2 раза выше средней частоты полосы пропускания первой линии, то низкочастотная боковая полоса будет лежать в пределах той же полосы пропускания. Следовательно, вторая линия, которая осуществляет сжатие импульса, может быть идентичной первой линии. Выделение нужного спектра частот из частотно-модулированного сигнала, подобного показанному на фиг. 166, *б*, можно произвести с помощью стробирующего устройства. Полученный частотно-модулированный импульс, после инверсии подаваемый на вход второй линии, показан на фиг. 166, *в*. Импульс на выходе второй линии, показанный на фиг. 166, *г*, имеет ту же ширину, что и импульс на входе первой линии.

Использование в радиолокации метода сжатия импульсов с помощью ультразвуковых линий задержки достаточно ясно из фиг. 166. Узкий импульс (фиг. 166, *а*) необходим для получения хорошей разрешающей способности по дальности. После прохождения через линейную линию задержки с коэффициентом сжатия D узкий импульс расширяется в D раз, становясь при этом частотно-модулированным (фиг. 166, *б*). Если излучаемый радиолокатором импульс имеет форму, показанную на фиг. 166, *б*, то среднюю излучаемую мощность можно увеличить в D раз по сравнению с мощностью для импульса, показанного на фиг. 166, *а*. После инверсии частоты отраженный импульс (фиг. 166, *в*) деформируется второй линией задержки и приобретает вид, показанный на фиг. 166, *г*, т. е. он имеет приближенно ту же ширину, что и начальный импульс. Такая система обладает разрешающей способностью по дальности, определяемой шириной начального импульса (фиг. 166, *а*), в то время как максимальная дальность зависит от средней излучаемой мощности, определяемой шириной растянутого импульса (фиг. 166, *б*).

Для выбранной ширины полосы Δ, которая по существу и определяет разрешающую способность по дальности, большой коэффициент дисперсии D может быть получен путем увеличения изменения задержки T. Хотя линейное изменение задержки с частотой можно осуществить с помощью электрических схем с сосредоточенными параметрами, однако, чтобы получить большой

коэффициент дисперсии, эти схемы требуют использования сотен деталей и многих регулирующих приспособлений, которые занимают большой объем и трудоемки в изготовлении. Кроме того, в большинстве случаев трудно получить требуемую линейность изменения задержки. Дисперсионная ультразвуковая линия задержки, предназначенная для тех же целей, может представлять собой, например, алюминиевую ленту шириной около 2,5 *см*, толщиной 0,18 *см* и длиной 4,56 *м*, свитую в спираль диаметром 30 *см*. Более того, подобные линии могут делаться многослойными без ухудшения их свойств. Чтобы получить аналогичные характеристики с помощью электрических схем, необходимы две релейные стойки размером 1,8 *м*, содержащие свыше 5000 деталей.

§ 2. ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ НА КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

1. Свойства крутильных волн в круглой проволоке и их преимущества

Как указано в гл. 2, решение волнового уравнения в цилиндрических координатах для случая смещения частиц только в направлении θ дает нормальные волны, обладающие дисперсией, критические частоты которых определяются выражением

$$f_c = \frac{R_p V_s}{\pi d}, \qquad R_p = 5{,}136, \quad 8{,}417, \quad 11{,}62, \tag{6.1}$$

где $d = 2a$ — диаметр цилиндра, а $R_p = \beta_p a$ — корень уравнения

$$J_2(\beta a) = 0. \tag{6.2}$$

Для таких нормальных волн фазовая скорость монотонно уменьшается с увеличением частоты и на очень высоких частотах приближается к скорости сдвиговой волны V_s. Кроме подобных нормальных волн, характеризующихся наличием дисперсии, существует еще нулевая волна, не обладающая дисперсией, для которой фазовая скорость равна V_s.

Для линий задержки нулевая нормальная волна представляет наибольший интерес по двум причинам. Во-первых, она не обладает дисперсией, и, во-вторых, ниже критической частоты первой дисперсионной волны она является единственной крутильной волной, которая может распространяться по волноводу. В отличие от первой продольной нормальной волны, для которой дисперсия хотя и мала, но все же существует (см. § 4, п. 2), крутильная волна характерна тем, что для нее дисперсия отсутствует полностью. Кроме того, в связи с тем что распространение колебаний происходит со скоростью сдвиговой волны V_s, меньшей, чем стержневая скорость V_0, при использовании крутильных колеба-

ний удается получить бо́льшую задержку на единицу длины линии; этот выигрыш определяется отношением

$$\frac{V_0}{V_s} = \sqrt{2(1+\sigma)}. \tag{6.3}$$

В отличие от нулевой сдвиговой нормальной волны в ленте, рассматриваемой в § 3, в случае крутильных колебаний имеется лишь одна граничная поверхность, в связи с чем отпадают проблемы, связанные с взаимодействием волны со вторым семейством поверхностей. Толщина h ленточной линии задержки связана с граничной частотой f_c соотношением

$$h = 0{,}5\,\frac{V_s}{f_c}, \tag{6.4}$$

а диаметр d проволоки связан с граничной частотой соотношением

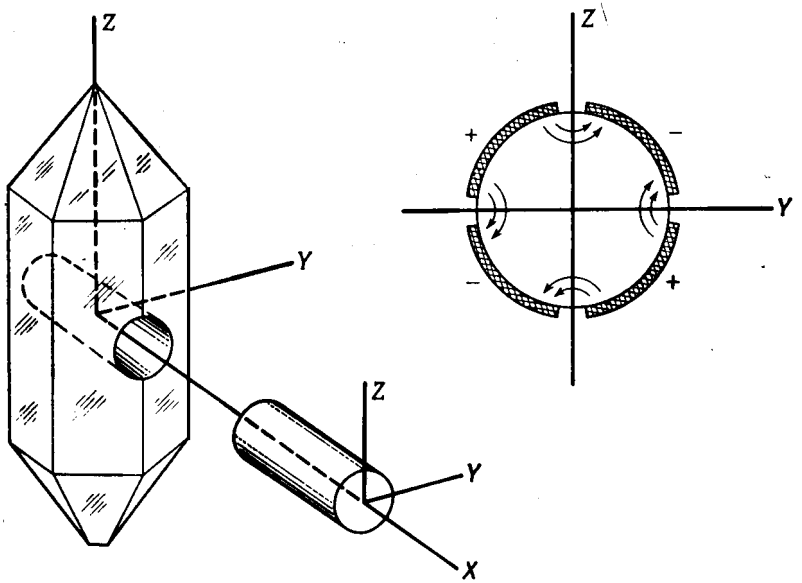
$$d = \frac{5{,}136}{\pi}\,\frac{V_s}{f_c}. \tag{6.5}$$

Таким образом, диаметр проволочной линии задержки приблизительно в 3 раза больше толщины ленточной линии. Однако, поскольку ширина ленты обычно не менее чем в 20 раз больше толщины, при данной частоте площадь преобразователя для ленточной линии задержки оказывается большей, а сопротивление соответственно меньшим, чем для проволочной линии задержки.

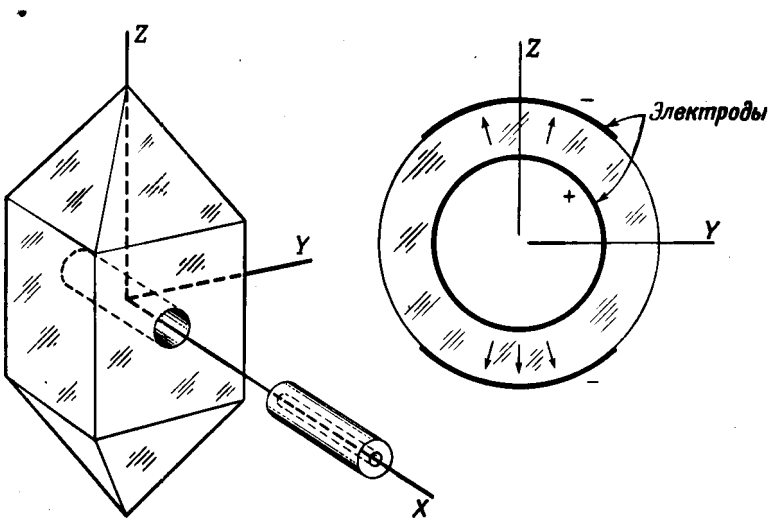
2. *Пьезоэлектрические преобразователи крутильных колебаний*

Деформации сжатия или сдвига в пьезоэлектрическом керамическом преобразователе можно получить путем создания в нем электрического поля между двумя плоскими параллельными электродами, расположенными либо параллельно, либо перпендикулярно направлению поляризации. В пьезоэлектрическом кристалле подобные деформации можно получить с помощью соответствующей ориентации двух электродов по отношению к кристаллографическим осям. Симметрия пьезоэлектрических кристаллов или пьезокерамики с однонаправленной поляризацией такова, что с одной парой электродов нельзя получить деформаций кручения; поэтому необходимо применять более сложные системы электродов.

В кристалле кварца, вырезанном в виде цилиндра с продольной осью, направленной по оси X, деформация кручения [24] может быть создана при использовании двух пар электродов, ориентированных под углами $\pm 45°$ к оси Y (фиг. 167). В кристаллах дигидрофосфата аммония (ADP) крутильные колебания

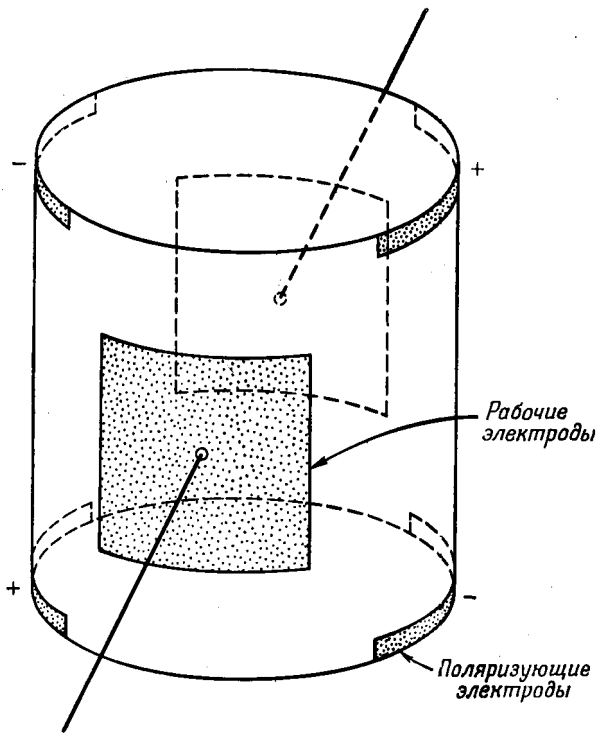


Ф и г. 167. Кварцевый преобразователь крутильных колебаний (по Терстону и Андричу [29]).



Ф и г. 168. Преобразователь крутильных колебаний из кристалла дигидрофосфата аммония (по Терстону и Андричу [29]).

[25] можно создать с помощью двух противоположно направленных (по диаметру) возбуждающих полей, как показано на фиг. 168. В цилиндре из пьезоэлектрической керамики [26] противоположная поляризация двух частей преобразователя обеспечивается двумя парами электродов, нанесенными на цилиндрическую поверхность у концов (фиг. 169). В дальнейшем эти



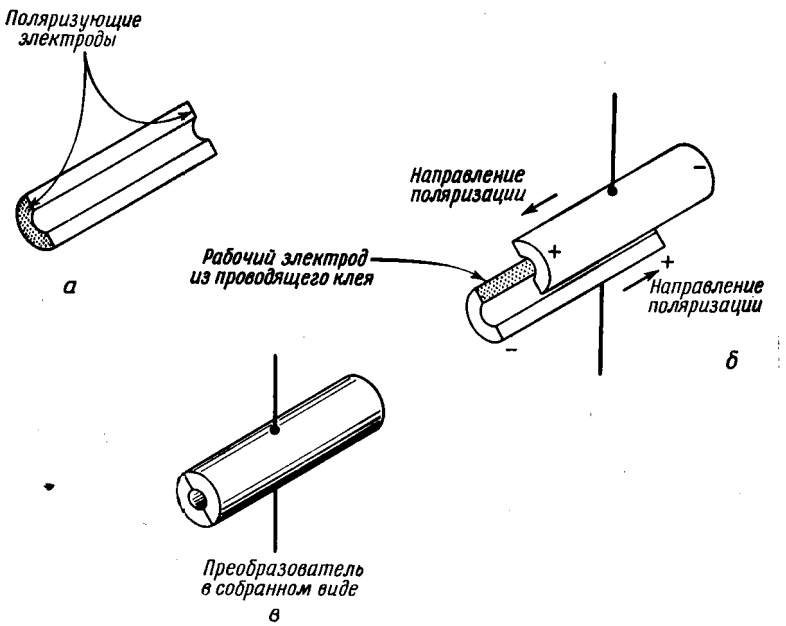
Ф и г. 169. Расположение электродов на цилиндрическом пьезокерамическом преобразователе крутильных колебаний (по Терстону и Андричу [29]).

электроды не используются и крутильные колебания возбуждаются с помощью двух электродов, расположенных на диаметрально противоположных сторонах цилиндрической поверхности.

Терстон [27—30] предложил методы изготовления излучателей крутильных колебаний в виде системы, состоящей из отдельных секторов, изготовленных из пьезоэлектрических кристаллов соответствующей ориентации. Во всех этих методах ни поляризующее, ни возбуждающее поля не являются однородными по всему объему, в результате чего не все элементы объема пре-

образователя испытывают одинаковые сдвиговые напряжения; поэтому получаемый в таких преобразователях коэффициент электромеханической связи несколько меньше, чем его значение, свойственное самому материалу.

Пьезокерамические материалы имеют более высокие коэффициенты электромеханической связи, чем пьезоэлектрические кристаллы. Поскольку в большинстве случаев стремятся получить



Ф и г. 170. Разрезной пьезокерамический преобразователь крутильных колебаний (по Терстону и Андричу [29]).

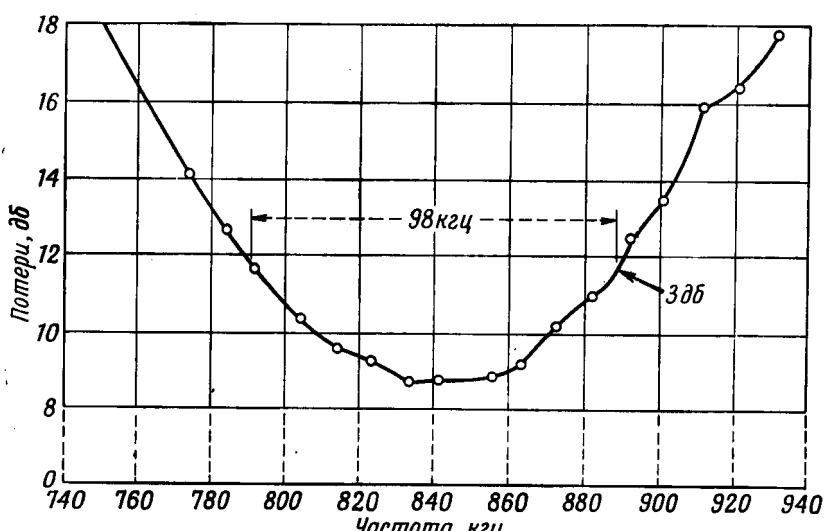
линию задержки с возможно большей относительной шириной полосы пропускания, для достижения которой необходимы материалы с высоким коэффициентом электромеханической связи, пьезоэлектрическая керамика представляет большой интерес в качестве материала для изготовления преобразователей, используемых в линиях задержки.

Устройство, в котором две половины полого цилиндра, поляризованные в продольном направлении, склеены электропроводящим клеем так, что их направления поляризации противоположны (как показано на фиг. 170), позволяет получить однородное поляризующее поле во всем объеме преобразователя. Для такого преобразователя, изготовленного из керамики титаната бария, Мэзон [26] получил коэффициент электромеханической

связи, равный 37%. Последний приближается к значению коэффициента связи 43%, которое получил Мей [31] для преобразователя из того же материала со сдвиговыми колебаниями пластинки по толщине. Однако такие устройства дороги и сложны в изготовлении, особенно при малых размерах, требуемых для работы в мегагерцном диапазоне частот. Это, несомненно, один из факторов, благодаря которым пьезоэлектрический метод возбуждения крутильных колебаний не нашел широкого применения в линиях задержки. Однако преимущества использования крутильных колебаний в линиях задержки были оценены, и эти колебания широко применяются в магнитострикционных линиях задержки.

3. Пьезоэлектрические линии задержки на крутильных колебаниях

Линия задержки на крутильных колебаниях, в которой применены преобразователи из керамики титаната бария, схематически показанные на фиг. 169, описана Терстоном и Торнилло [5].



Фиг. 171. Кривая вносимых потерь для линии задержки на крутильных колебаниях с керамическим преобразователем из $BaTiO_3$, показанным на фиг. 169, при импульсах длительностью 10 *мксек* (по Терстону и Торнилло [5]).

Линия изготовлена из сплава вибраллой [32]; использована проволока длиной 3,65 *м* и диаметром 0,059 *см*. Этот железо-никелевый сплав имеет малые потери и незначительный температурный

коэффициент задержки. Преобразователи диаметром 0,157 *см* и длиной 0,203 *см* имели резонансную частоту около 840 *кгц*. Измеренный коэффициент электромеханической связи этих преобразователей лежит в пределах 11—15%.

Характеристика полосы пропускания линии с задержкой 1,65 *мсек* приведена на фиг. 171. Потери в проволоке составляют приблизительно 3,64 *дб/мсек*, а потери на преобразование в излучателе и приемнике, а также во включенных последовательно индуктивностях настройки составляют около 3 *дб*. Минимальные потери наблюдаются для импульсов длительностью 10 *мксек* или больше, хотя хорошая разрешающая способность получена для импульсов шириной 6 *мксек*. Паразитные сигналы с тройным временем прохождения имеют амплитуду на 26 *дб* ниже основного импульса.

Эквивалентная схема преобразователя с последовательной индуктивностью представляет собой полосовой фильтр, подключенный с одной стороны к электрической цепи возбуждения, а с другой — нагруженный на механическое сопротивление проволоки. Отношение диаметров преобразователя и проволоки, равное 1,63, было выбрано, исходя из наилучшего согласования сопротивлений.

В таких линиях увеличение времени задержки сказывается лишь в том, что потери увеличиваются на 3,64 *дб/мсек*. Повышение рабочей частоты затруднено вследствие сложности изготовления преобразователя такого типа для высоких частот.

4. Магнитострикционные преобразователи крутильных колебаний

Чтобы создать крутильные колебания в цилиндре, изготовленном из магнитострикционного материала, необходимо определенное расположение полей: возбуждающее поле должно быть направлено вдоль оси, а поляризующее поле — по окружности или наоборот [2, 33, 34]. Ни один из этих методов не нашел сколько-нибудь заметного применения, тогда как метод, использующий механическое преобразование типов колебаний, описанный Скерротом и Нейлором [4], получил широкое распространение. В этом методе, как показано на фиг. 172, возбуждающие обмотки создают продольные колебания с противоположными фазами в двух металлических полосках, прикрепленных к проволоке. Напряжения кручения, возникающие при этом на конце проволоки, распространяются вдоль нее в виде крутильных волн.

Рассматривая условие согласования сопротивлений в месте соединения полоски и проволоки, Скеррот и Нейлор [4] в пер-

вом приближении полагают, что сопротивление полоски

$$Z_L = A\rho_0 V_0, \tag{6.6}$$

где A — площадь сечения, ρ_0 — плотность и V_0 — стержневая скорость. Для проволоки, по которой распространяются крутильные волны, механическое сопротивление

$$Z_T = \frac{\pi a^2 \rho_s V_s}{2}, \tag{6.7}$$

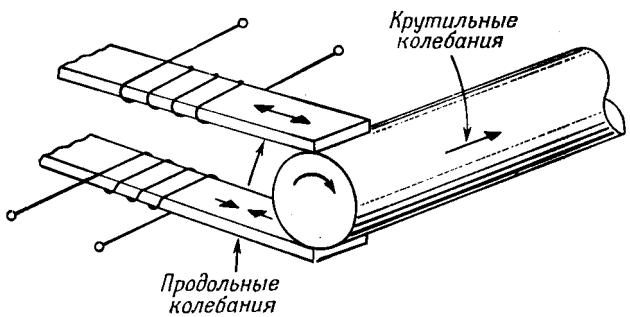
где a — радиус проволоки. Если к проволоке присоединено n полосок, то

$$Z_T = nZ_L. \tag{6.8}$$

Тогда условие согласования сопротивлений дает

$$A = \frac{\rho_s \pi a^2 V_s}{\rho_0 2nV_0}. \tag{6.9}$$

Минимальная длительность импульса или высокочастотная граница полосы пропускания линии определяется эффективной



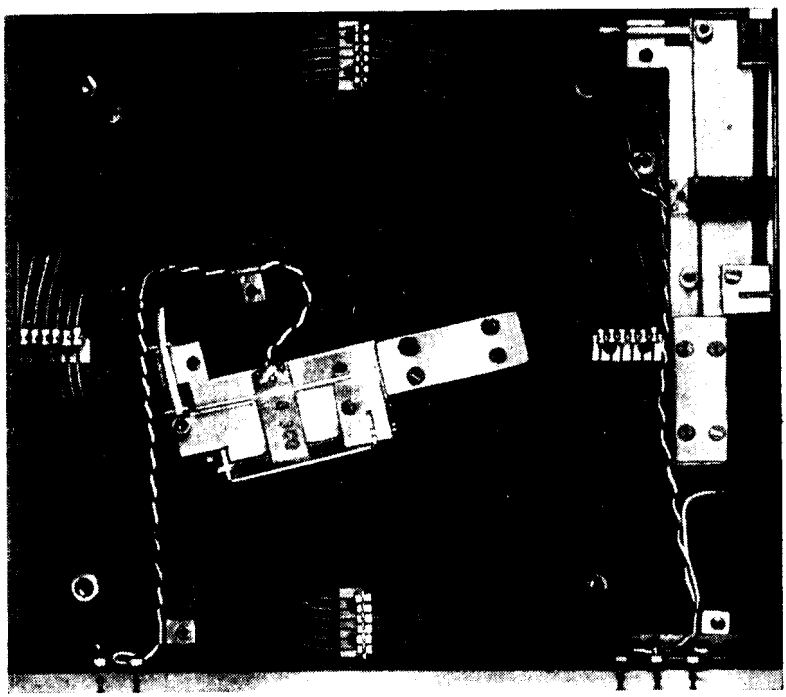
Ф и г. 172. Преобразование продольных колебаний магнитострикционных полос в крутильные колебания проволоки.

длиной возбуждающей обмотки. Но при укорочении возбуждающей катушки поле внутри проволоки становится менее однородным и результирующий коэффициент электромеханической связи уменьшается. Этот тип преобразователя при работе на высоких частотах имеет то преимущество, что длина преобразователя определяется скоростью продольных, а не поперечных волн, поэтому, например, для никеля длина преобразователя оказывается в 1,3 раза больше.

5. Магнитострикционные линии задержки на крутильных колебаниях

Линии задержки на крутильных колебаниях изготовляются по схеме преобразования одного типа колебаний в другой, описанной в предыдущем пункте. Поскольку при использовании

такого преобразования магнитострикцией должны обладать лишь возбуждающие полоски, материал звукопровода может быть выбран, исходя из оптимальных акустических свойств. Обычно используется проволока из железо-никелевого сплава, обладающего низким температурным коэффициентом задержки. Выбор



Фиг. 173. Магнитострикционная линия с задержкой 1 *мсек* на крутильных колебаниях.

материала для возбуждающих полосок состоит в нахождении компромиссного решения между требованием высокого коэффициента магнитострикции материала (такого, как у никеля) и необходимостью уменьшения до нуля температурного коэффициента задержки. Полоски делаются как можно более тонкими (обычно меньше 0,01 *см*), чтобы уменьшить дисперсию, и узкими (0,02—0,05 *см*), чтобы уменьшить длительность импульса. Задержка может регулироваться в пределах нескольких микросекунд путем изменения положения обмотки преобразователя на полоске с помощью винта. Конструкция линии задержки на крутильных колебаниях показана на фиг. 173. Для уменьшения отражений

свободные концы полосок обычно зажимают в блок поглощающего материала типа резины. Подавление этих отражений может достигать 20—25 *дб* по отношению к основному выходному сигналу.

Минимальная длительность импульса (или максимальная частота следования), при которой может работать линия задержки, зависит от ее длины. Для коротких линий, например с задержкой 200 *мксек*, частота следования импульсов может достигать 1,5 *Мгц*, причем она ограничивается главным образом удлинением импульса при преобразовании одного типа колебаний в другой. При увеличении длины линии максимальная частота следования импульсов снижается приблизительно до 1,25 *Мгц* при задержке 1 *мсек*, до 1 *Мгц* при 3 *мсек* [35, 36], до 600 *кгц* при 5 *мсек* и до 400 *кгц* при 10 *мсек*. С увеличением длины линии начинает сказываться влияние дисперсии; появлению последней способствует несколько факторов, в частности наличие катушки возбуждения и держателей, а также существование в возбуждающих полосках продольных колебаний. Влияние дисперсии сводится к увеличению длительности импульса.

Вследствие относительно невысокого коэффициента электромеханической связи магнитострикционных преобразователей потери в магнитострикционной линии велики и составляют от 50 до 70 *дб*.

6. *Материалы, применяемые для звукопровода*

Относительное изменение времени задержки D_T при изменении температуры можно выразить в виде

$$\frac{\Delta D_T/\Delta T}{D_T} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta L/\Delta T}{L} + \frac{\Delta E/\Delta T}{E}\right], \qquad (6.10)$$

где T — температура, L — длина линии, а E — соответствующий модуль упругости (модуль сдвига μ для крутильных волн или модуль Юнга Y_0 для продольных волн). Для большинства металлов член $(\Delta L/\Delta T)/L$ положителен, тогда как член $(\Delta E/\Delta T)/E$ отрицателен и превышает первый по величине. Следовательно, температурный коэффициент задержки положителен. Для железоникелевых сплавов, содержащих от 27 до 44% никеля, $(\Delta E/\Delta T)/E$ при 27% никеля изменяет знак с отрицательного на положительный, проходит через максимум при 36% никеля и затем снова пересекает нулевое значение при 44% никеля. Сплав с содержанием 36% никеля имеет нулевой коэффициент расширения и хорошо известен под названием инвар. При добавлении к сплаву, содержащему 36% никеля, хрома или молибдена максимальное значение температурного коэффициента модуля упругости при-

ближается к нулю и становится мало чувствительным к изменению содержания никеля.

Наилучшие результаты получены с указанными сплавами после увеличения их твердости, для чего сплавы с хромом и молибденом дополнительно упрочняют методом холодной обработки. В табл. 28 приведены типичные составы сплавов, используемых в линиях задержки. Сплавы, обозначенные буквами A, B, D, разработаны Мебсом и др. [37, 38], а сплавы № 1, 2 и 11 взяты из работы Кларка [39]. Сплав A под названием вибраллой

Таблица 28

Составы железо-никелевых сплавов

	Fe	Ni	Cr	Ti	Mo
A	49,2	41,5	—	—	9,2
№ 1	54,3	36,3	7,71	0,02	0,56
B	52,8	36,7	6,8	0,22	0,56
D	47,6	42,79	5,97	1,87	—
№ 2	49,1	42,3	5,05	2,42	—
№ 11	46,9	42,4	6,40	2,86	—

использовался Терстоном и Торнилло [5]. На основании измерений потерь при частоте 10 *Мгц* Мебс и др. [37, 38] нашли, что сплав B сочетает минимальные потери с почти нулевым температурным коэффициентом задержки. Последние результаты были подтверждены Фичем [40].

Чтобы получить материал, свойства которого менее чувствительны к холодной обработке, используют добавки титана, получая сплавы, которые могут упрочняться при горячей обработке. Эти сплавы носят фирменное название Ni Span C (сплав D в табл. 28). В экспериментах Кларка [39] состав сплава № 2 изменялся в небольших пределах с целью найти оптимальный состав. При увеличении содержания хрома до 6,7% и титана до 2,8% (состав № 11 в табл. 28) был получен наилучший состав, для которого температурный коэффициент задержки приблизительно равен нулю. По сравнению со сплавом № 2 этот сплав имеет более низкую температуру Кюри, меньшую намагниченность и повышенную твердость. Все эти факторы обеспечивают меньшую величину петли магнитоупругого гистерезиса и, следовательно, более низкие акустические потери, определяемые этим явлением.

Поскольку потери и до некоторой степени температурный коэффициент задержки зависят от точного состава сплава и режи-

ма холодной обработки или термообработки каждого образца, трудно сравнивать результаты, полученные различными исследователями. Скеррот и Нейлор [4], например, измерили потери на частоте 100 *кгц* и нашли значения добротности Q, равные 4050 для сплава Ni — Fe — Ti, 2500 для сплава Ni Span C и 2300 для сплава элинвар. Значения температурного коэффициента задержки для первого из этих сплавов изменяются от $+28\cdot10^{-6}$ до $-45\cdot10^{-6}$ в зависимости от термообработки.

7. *Влияние кривизны на характеристики задержки*

Для того чтобы длинную проволочную линию задержки сделать компактной, обычно проволоку навивают в виде плоской спирали. Дисперсия, обусловленная кривизной проволоки, ограничивает минимальный радиус такой спирали. Дисперсия, возникающая при распространении волн в изогнутом стержне, впервые была описана Лявом [41], исходя из приближенного уравнения

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\frac{1+\sigma}{R^2}\theta\right), \tag{6.11}$$

где x — расстояние вдоль оси проволоки, θ — угловое смещение, R — радиус кривизны, $\sqrt{\mu/\rho}$ — скорость поперечной волны и σ — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим поперечное сечение проволоки, угловое смещение которой однородно. Напряжения, действующие в поперечном сечении, являются функцией угла θ и создают общий восстанавливающий момент вращения, представленный вторым членом в правой части уравнения (6.11). Если до того как стержень был согнут в спираль, он имел естественный радиус кривизны R_n, то R^2 заменяется на R_nR. Решение уравнения (6.11) для распространяющихся волн дает соотношение для групповой скорости

$$U=\frac{d\omega}{d\beta}=V\sqrt{1-G}, \tag{6.12}$$

где

$$G=\frac{V_s^2(1+\sigma)}{\omega^2RR_n}. \tag{6.13}$$

Изменение задержки в пределах ширины полосы Δf составляет

$$\Delta D\approx\frac{dD}{df}\Delta f=2\pi L\Delta f\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{U}\right), \tag{6.14}$$

где L — длина линии.

Относительное изменение задержки в пределах ширины полосы частот [5]

$$\frac{\Delta D}{L/V_s}=\frac{\Delta f}{f}\left[\omega V\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{U}\right)\right]=\frac{\Delta f}{f}\left[\frac{-G}{(1-G)^{3/2}}\right]\approx\frac{\Delta f}{f}[-G]. \tag{6.15}$$

Здесь L/V_s — номинальное время задержки линии без дисперсии. Для линии задержки, описанной в п. 3 настоящего параграфа, средний радиус равен 3 *см*, $V_s = 3 \cdot 10^5$ *см/сек*, $\sigma = 0{,}4$, $\Delta f/f = 0{,}12$, $f = 0{,}84 \cdot 10^6$ *гц* и $G = 5 \cdot 10^{-4}$; таким образом,

$$\frac{\Delta D}{L/V_s} \approx 0{,}12 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 0{,}6 \cdot 10^{-4}.$$

Следует отметить, что величина G уменьшается как $1/\omega^2$.

§ 3. ЛЕНТОЧНЫЕ ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ НА СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ

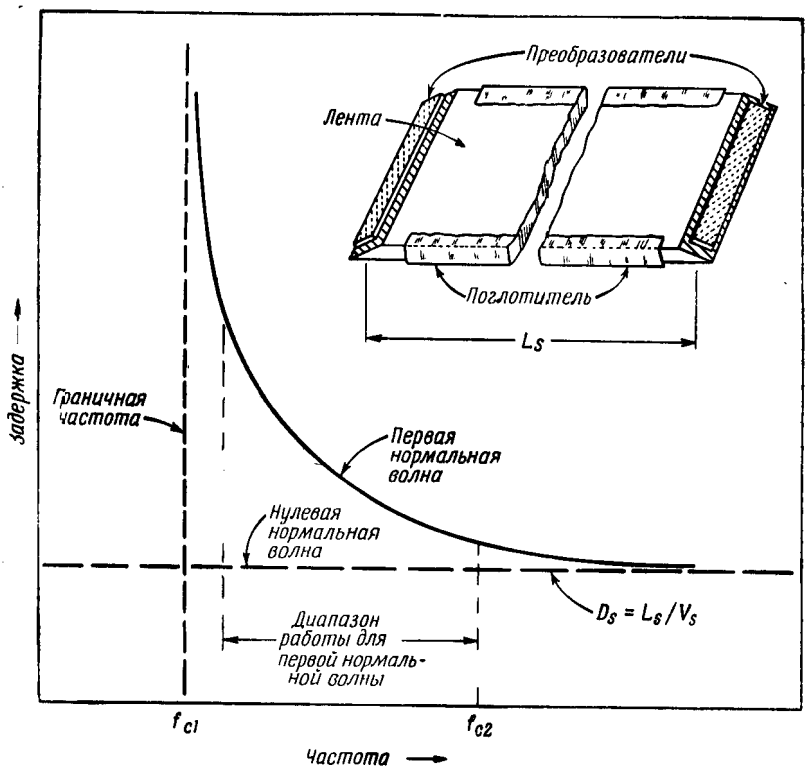
1. Свойства сдвиговых волн в пластине и их преимущества

Рассмотрим две плоские сдвиговые волны, распространяющиеся в бесконечной пластине, у которых смещения частиц направлены в плоскости пластины перпендикулярно направлению движения волны. При распространении плоские волны попеременно отражаются от ограничивающих поверхностей. Решение волнового уравнения для этого типа волнового движения с учетом граничных условий на свободных поверхностях дает зависимость между частотой и углом отражения. При этом набор волн распространяется с фазовой скоростью, которая изменяется с углом отражения и, следовательно, с частотой. По мере того как частота уменьшается, длина волны увеличивается и угол отражения уменьшается до тех пор, пока не будет достигнута критическая частота, для которой половина длины волны равна ширине волновода и ниже которой колебания не могут распространяться.

На фиг. 174 показано изменение групповой задержки в зависимости от частоты для первой нормальной волны из бесконечного набора нормальных волн, получаемого из решения волнового уравнения для этого случая. Заметим, что при критической частоте задержка стремится к бесконечности, а при высоких частотах достигает значения, определяемого скоростью сдвиговой волны V_s. На фиг. 174 показана критическая частота f_{c2} для второй нормальной волны.

Кроме сдвиговых колебаний, обладающих дисперсией, в волноводе может распространяться нулевая нормальная волна, которая не обладает дисперсией и, следовательно, может существовать вплоть до нулевой частоты. Распространение этой волны происходит со скоростью сдвиговой волны V_s, которая равна скорости сдвиговой волны в бесконечной среде. Нулевая нормальная волна особенно часто используется в линиях задержки без дисперсии, о чем сказано ниже.

До сих пор мы имели в виду теорию распространения волн в бесконечной пластине. Мейтцлер [6, 42, 43] при разработке ленточной линии задержки на сдвиговых колебаниях показал, что сдвиговые нормальные волны, рассматриваемые в этой теории,



Ф и г. 174. Зависимость задержки от частоты для сдвиговых колебаний в пластине (по Мейтцлеру [6]).

могут распространяться и в пластине конечных размеров. Необходимо лишь, чтобы ширина пластины составляла 10—20 длин волн, а на ее узких поверхностях был нанесен поглощающий материал. Такие линии изготовляются из металлической ленты; пьезокерамические преобразователи приклеиваются к концам линии, как показано на фиг. 174. Там же виден поглощающий материал в виде полосок, приклеенный по краям металлической ленты.

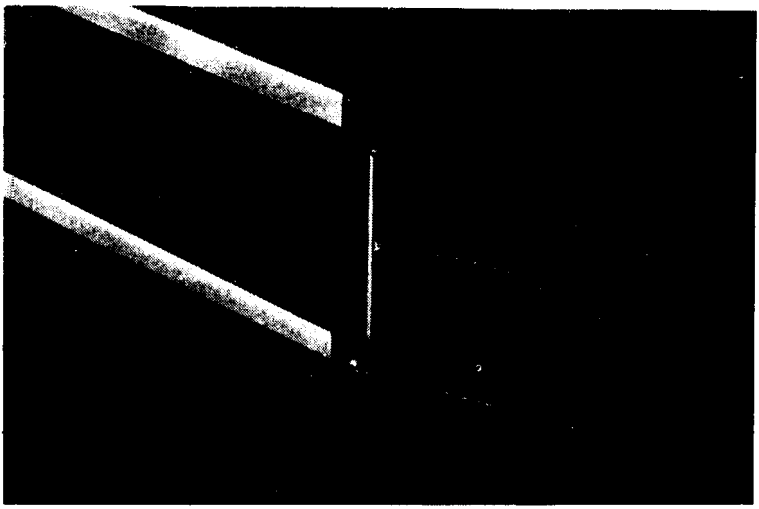
2. Пьезоэлектрические преобразователи сдвиговых колебаний по толщине

Пьезоэлектрические преобразователи, предназначенные для возбуждения сдвиговых колебаний в ленточной линии задержки, могут изготовляться в виде кристаллических пластинок, например из кварца Y-среза. Однако чаще применяются пьезокерамические материалы, так как они обладают более высоким коэффициентом электромеханической связи. Чтобы получить волны сдвига, ориентированные надлежащим образом, керамическая полоска поляризуется вдоль ее длинной стороны и возбуждается электрическим полем, направленным по толщине (параллельно направлению распространения волн в ленте). В отличие от преобразователей, работающих на продольных колебаниях, которые рассматриваются в § 5, п. 2, преобразователи, возбуждающие сдвиговые колебания по толщине, имеют частотную постоянную, не зависящую от отношения ширины пластины к ее толщине.

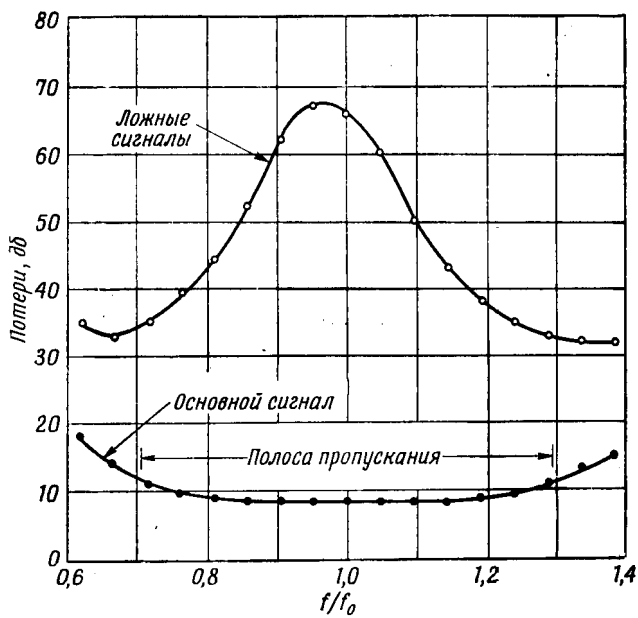
3. Ленточные линии задержки без дисперсии на сдвиговых колебаниях

Ниже критической частоты первой нормальной волны, характеризуемой наличием дисперсии, может распространяться только одна сдвиговая волна — нулевая нормальная волна. Используя ее, можно создать линию, свободную от нежелательных типов колебаний. При конструировании линий задержки с нулевой нормальной волной произведение толщины линии на частоту должно выбираться таким, чтобы оно было ниже критического значения для первой дисперсионной нормальной волны. Это критическое значение соответствует толщине линии, равной половине длины волны, т. е. равной $V_s/2f$. Материалом для линий задержки чаще всего служит алюминий марки 5052, для которого скорость сдвиговых волн равна $3{,}13 \cdot 10^5$ *см/сек*. В этом случае толщина линии задержки с полосой 3 *Мгц* при средней частоте 5 *Мгц* должна быть меньше 0,0238 *см*. Для линии задержки с нулевой нормальной волной преобразователь располагается перпендикулярно оси ленты, как показано на фиг. 175, а не под острым углом, как на фиг. 174. Поскольку резонансная частота таких преобразователей не зависит от их ширины, последняя может быть равной толщине ленты.

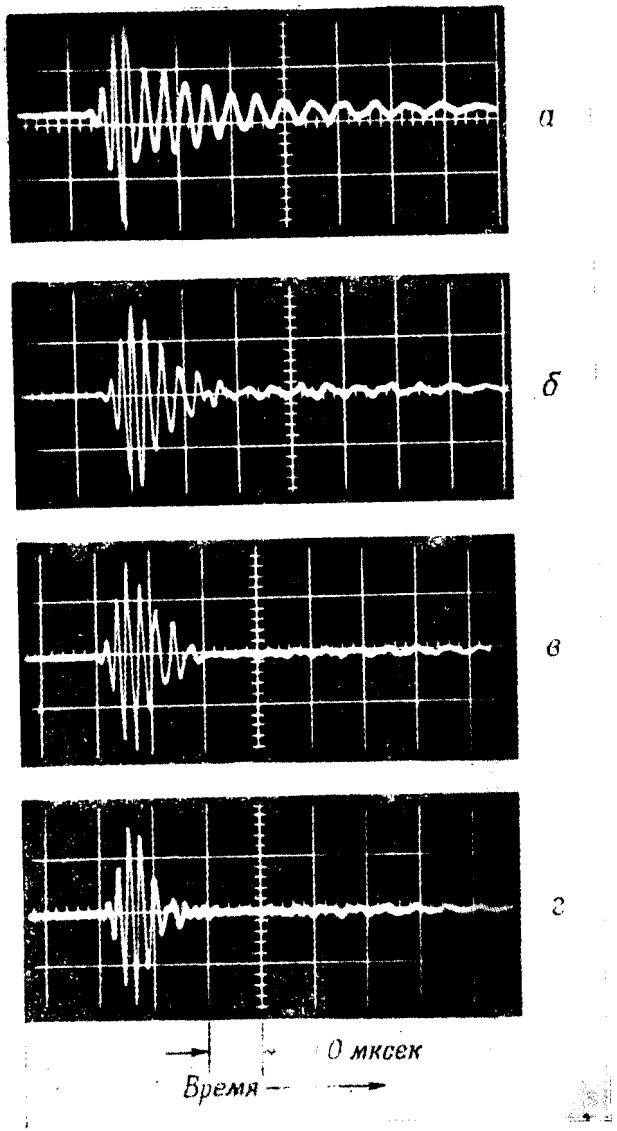
Типичная характеристика полосы пропускания алюминиевой ленточной линии задержки на сдвиговых колебаниях с керамическим преобразователем из цирконата-титаната свинца (PZT-5A) приведена на фиг. 176. Для частот до 5 *Мгц* ширина полосы (на



Фиг. 175. Преобразователь, прикрепленный к ленточной линии задержки (по Мейтцлеру [6]).



Фиг. 176. Потери в ленточной линии без дисперсии с задержкой 400 *мксек*, работающей на сдвиговых колебаниях (по Мейтцлеру).



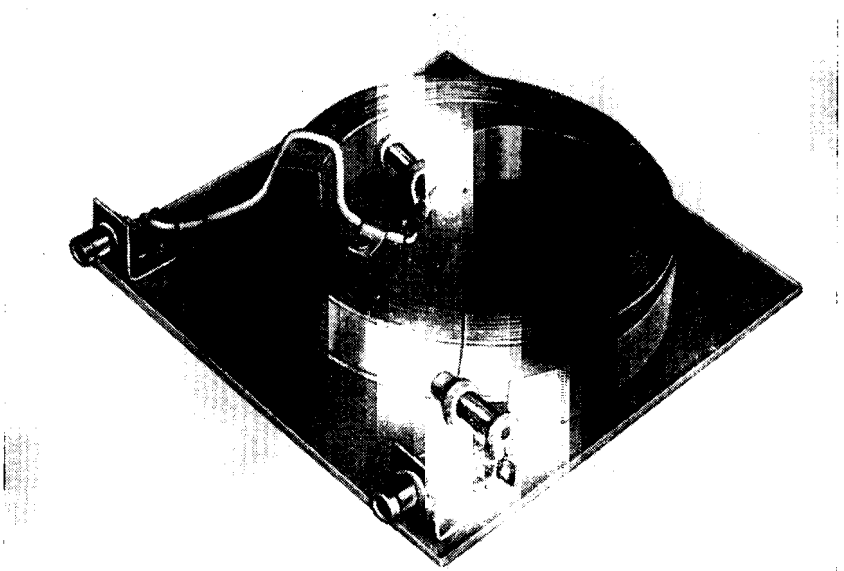
Ф и г. 177. Импульсы на выходе ленточной линии задержки на сдвиговых колебаниях (по Мейтцлеру [43]).

Частота 5 *Мгц*, задержка 6,6 *мсек*, длительность импульса на входе 0,1 *мксек*.

	а	*б*	*в*	*г*
Длина поглощающих полосок, *м*	без полосок	4,2	7,2	10,2
Минимальные потери, *дб*	27	30,5	33,5	37,5

уровне 3 *дб*) превышает 60% при задержке, достигающей нескольких сотен микросекунд. При этом в случае работы на согласованную нагрузку ширина полосы в основном зависит от свойств преобразователя. Следует указать также на высокую избирательность линии в центральной части полосы пропускания по отношению к другим сигналам.

На фиг. 163 приведена осциллограмма импульса на выходе линии задержки, работающей на частоте 5 *Мец*; длительность входного импульса 0,1 *мксек*, время задержки 400 *мксек*. Длительность импульса на выходе ΔT (измеренная в точках, где сигнал спадает до 10% максимального значения) связана с шириной полосы β на уровне 3 *дб* эмпирическим соотношением $\Delta T\beta \approx 2$. В цифровых запоминающих устройствах такие линии при работе по методу возвращения к нулю позволяют получить

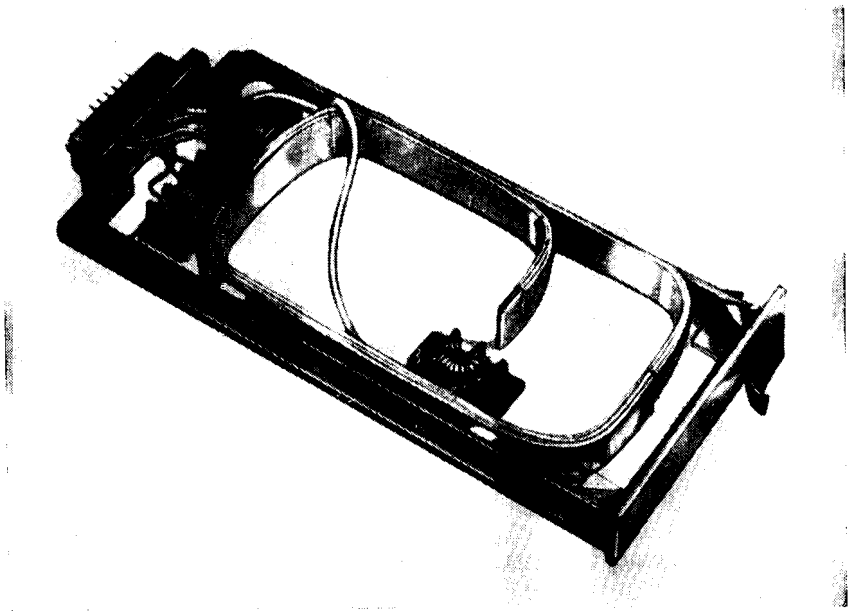


Фиг. 178. Линия задержки на 4,2 *мсек*, размером 17,8 × 17,8 *см* (по Мейтцлеру [43]).

частоту следования порядка $1/\Delta T$ с хорошо разделяемыми импульсами на выходе.

Основные потери в длинных линиях задержки, работающих на сдвиговых колебаниях, обусловлены расширением ультразву-

кового пучка в направлении ширины ленты, в результате которого энергия поглощается полосками поглощающего материала, наклеенными на узкие боковые поверхности ленты. Ввиду того что время задержки в подобных линиях достигает нескольких



Ф и г. 179. Комплект из пяти линий задержки (каждая на 125 *мксек*) модульной конструкции со штепсельными контактами (по Мейтцлеру).

миллисекунд, эти потери довольно значительны. С другой стороны, при работе линии без поглощающего покрытия длительность импульса увеличивается, а кривая потерь становится нерегулярной в результате эффектов дисперсии, являющихся следствием взаимодействия упругих волн с узкими боковыми поверхностями ленты. Оказалось возможным воспользоваться компромиссным решением, при котором потери не слишком велики и в то же время длительность импульса не возрастает в заметной степени. Это решение состоит в том, что поглощающий материал наносится не по всей длине линии, а лишь на некоторой ее части. Влияние длины поглощающего покрытия показано на фиг. 177, где приведено несколько осциллограмм выходного импульса для линии с задержкой 6,6 *мсек* при входном сигнале длительностью 0,1 *мксек*. Эта линия обеспечивает частоту следования импульсов

до 2 *Мгц*. Внешний вид линии с задержкой 4,2 *мсек* показан на фиг. 178. Она изготовлена из алюминиевой ленты длиной 11,3 *м*, свитой в спираль и расположенной на квадратной панели размером 17,8 × 17,8 *см*.

Кроме упомянутого выше влияния дисперсии в длинных линиях, следует учитывать тот факт, что потери в материале увеличиваются с частотой (см. п. 5 настоящего параграфа). В очень длинных линиях это увеличение может оказаться существенным в пределах полосы пропускания. Это приводит к тому, что полоса пропускания становится несимметричной относительно резонансной частоты преобразователя, причем минимум потерь лежит ниже резонансной частоты.

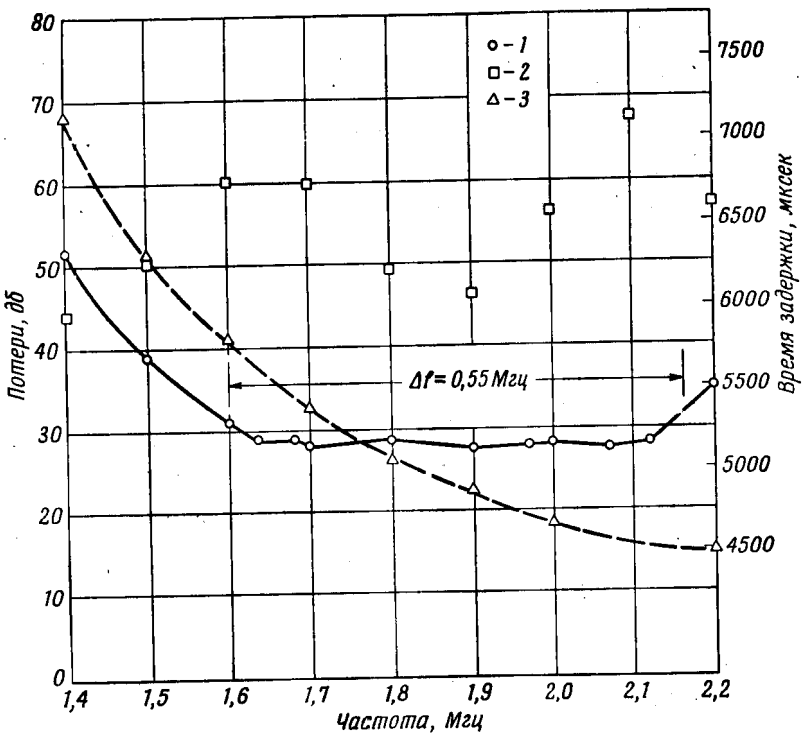
Алюминий марки 5052 имеет температурный коэффициент задержки $3 \cdot 10^{-4}$ *град*$^{-1}$. В случае если необходима бóльшая стабильность, используется температурная стабилизация окружающей среды, которая позволяет обеспечить постоянство задержки с точностью не менее 10^{-5}.

Ленточные линии задержки могут быть изготовлены в виде разнообразных компактных блоков. На фиг. 179 показан блок из пяти линий задержки на 125 *мксек*, расположенных на каркасной панели с печатным монтажом. Сочленение такого блока с аппаратурой осуществляется с помощью штепсельных контактов.

4. *Дисперсионные ленточные линии задержки на сдвиговых колебаниях*

Ленточные линии задержки, работающие на первой нормальной сдвиговой волне, характеризующейся наличием дисперсии, имеют задержку, изменяющуюся в зависимости от частоты, как показано на фиг. 174. Задержка меняется непрерывно, без максимумов или точек перегиба. Если полоса пропускания лежит ниже критической частоты второй нормальной волны f_{c2}, то главный недостаток такой линии состоит в появлении достаточно большого сигнала, обусловленного нулевой нормальной волной. Чтобы улучшить прохождение первой дисперсионной нормальной волны, Мейтцлер поместил преобразователи под некоторым углом по отношению к толщине ленты, как это показано на фиг. 174. Угол наклона был выбран равным углу отражения элементарной компоненты плоской волны, соответствующей центральной частоте полосы пропускания. При такой конструкции удалось ослабить нежелательные сигналы более чем на 30 *дб* по сравнению с основным сигналом. Типичные характеристики потерь и задержки сигнала приведены на фиг. 180. Поскольку в ленточных линиях задержки на сдвиговых колебаниях не удается полу-

чить значительного подавления ложных сигналов, эти линии, по-видимому, не найдут широкого применения в устройствах, где необходимо получить дисперсионные характеристики задержки



Ф и г. 180. Характеристики задержки и затухания дисперсионной ленточной линии на сдвиговых колебаниях (по Мейтцлеру [6]).

1 — основной сигнал (первая нормальная волна); *2* — стационарный уровень ложных сигналов (нулевая нормальная волна); *3* — задержка основного сигнала.

при высокой разрешающей способности. Такие свойства могут быть получены в ленточных линиях задержки на продольных колебаниях.

5. Материалы, применяемые для звукопровода

В нижней части мегагерцного диапазона частот алюминий марки 5052 имеет очень небольшие потери. Для поликристаллических металлов затухание плоских волн в бесконечной среде [44, 45] в зависимости от частоты может быть представлено

в виде

$$\alpha = a_1 f + a_4 f^4, \tag{6.16}$$

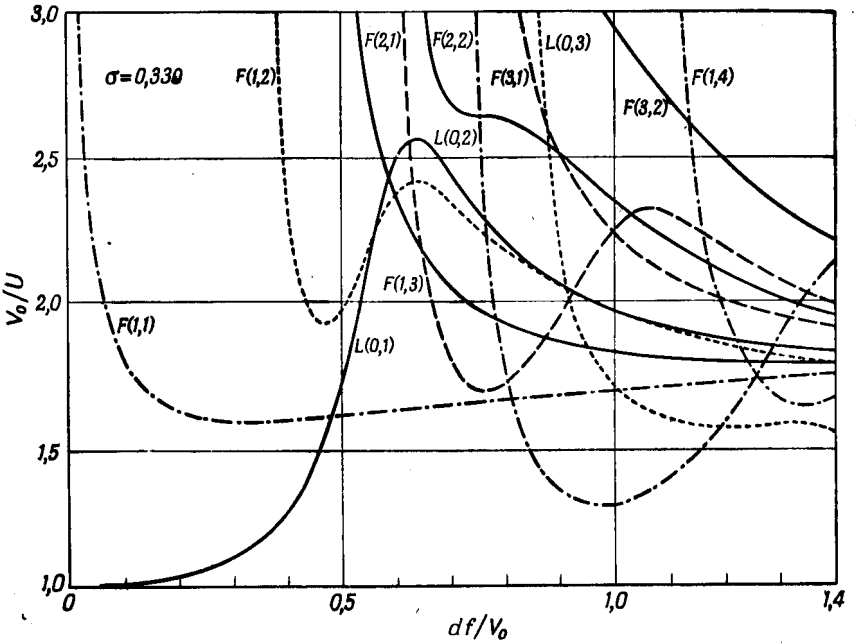
где α — коэффициент затухания (*непер/см*), f — частота, a_1 — постоянная, зависящая от потерь на гистерезис, и a_4 — постоянная, определяемая рассеянием волны на структурных зернах материала. Микрофотографические исследования показали, что средняя величина зерна для алюминия 5052 не превышает $0{,}4 \cdot 10^{-2}$ *см*. Ниже 5 *Мгц* для этого материала должна существовать линейная зависимость от частоты [первый член в (6.16)]; в этом диапазоне частот потери составляют не более 0,00055 *дб/см/Мгц*, как было найдено в экспериментах с длинными линиями. Влияние рассеяния увеличивается при более высоких частотах.

§ 4. ПРОВОЛОЧНЫЕ ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ НА ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

1. Свойства продольных и изгибных волн в круглой проволоке

Для целей исследования линий задержки решения частотных уравнений Похгаммера — Хри удобно представить в форме графиков безразмерной задержки V_0/U в зависимости от безразмерной частоты df/V_0, где $V_0 = \sqrt{E/\rho}$ — стержневая скорость, U — групповая скорость, d — диаметр и f — частота. График зависимости задержки от частоты для коэффициента Пуассона $\sigma = 0{,}33$, полученный Меем [7, 46], показан на фиг. 181. Поскольку при возбуждении продольных колебаний появляются также изгибные колебания, которые нежелательны, при исследовании линий задержки необходимо рассмотреть оба этих семейства упругих волн.

Распределение смещений для крутильных и продольных колебаний обладает полной симметрией относительно оси цилиндра, поэтому эти колебания не зависят от угловой координаты θ. Однако в случае изгибных колебаний зависимость от угла θ существует; более того, существует зависимость от $n0$, где n — целое число. Каждому значению n соответствует бесконечное множество нормальных волн, поэтому имеется «вдвойне бесконечный» набор изгибных нормальных волн. Изгибные волны самого низкого порядка соответствуют значению $n = 1$, причем этот набор аналогичен изгибным нормальным волнам в бесконечной пластине. Полный набор нормальных волн, распространяющихся в круглом цилиндре, вплоть до изгибных волн четвертого порядка приведен на фиг. 181. Здесь обозначения L и F соответствуют продоль-



Ф и г. 181. Относительная задержка для продольных и изгибных нормальных волн в круглой проволоке (по Мею [46]).

ным и изгибным нормальным волнам; первое число в скобках указывает значение n, второе — порядковый номер корня частотного уравнения.

2. Преимущества применения наинизшей продольной волны

Наинизшая продольная нормальная волна обладает рядом преимуществ с точки зрения ее применения в линиях задержки. Она существует вплоть до нулевой частоты, тогда как все высшие нормальные волны имеют критические частоты. Поэтому, используя преобразователь, чувствительный только к продольным колебаниям, в области частот ниже критической частоты нормальной волны L (0, 2) можно достичь высокой степени подавления нежелательных сигналов. В пределах этой области первая продольная волна имеет две полезные особенности. При малых значениях величины df/V_0 характеристика задержки обладает весьма незначительной дисперсией. Поэтому, используя проволоку малого диаметра и ограничиваясь небольшими временами

задержки или узкой полосой пропускания, можно применить нормальную волну L (0, 1) в линии задержки без дисперсии.

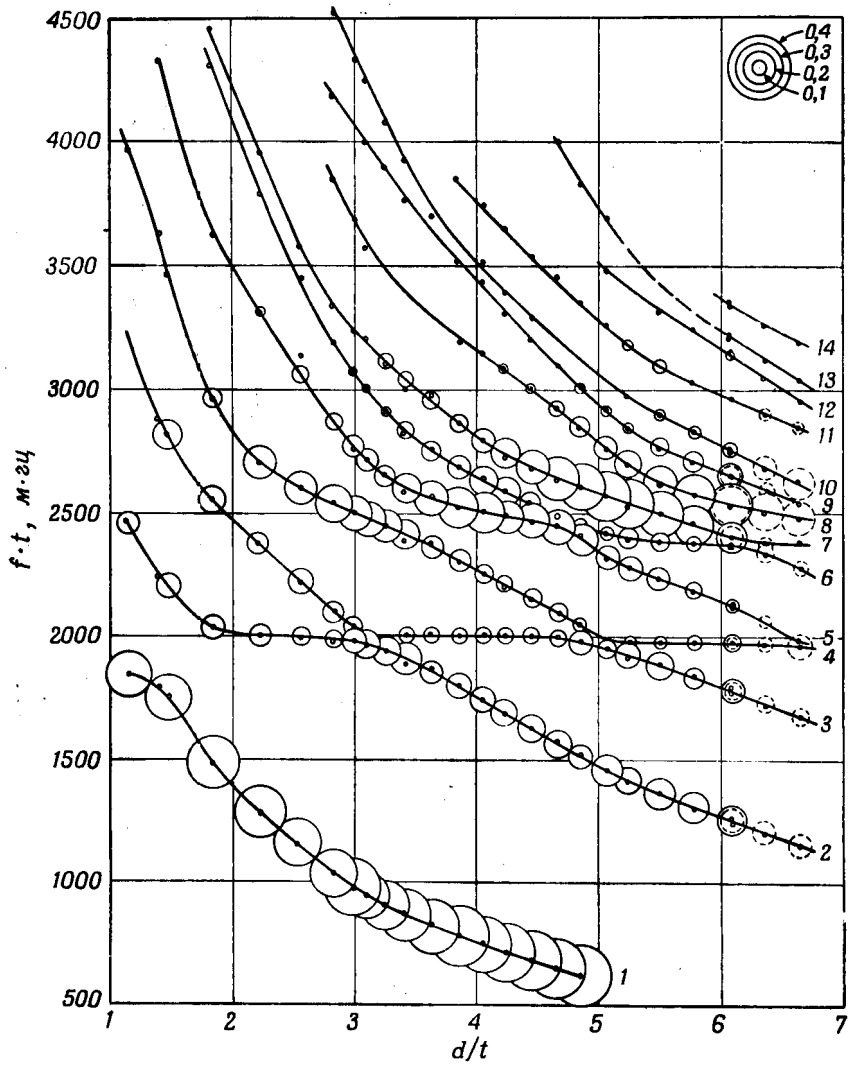
При больших значениях параметра df/V_0 нормальная волна L (0, 1) имеет точку перегиба, после которой характеристика задержки приблизительно линейна. По сравнению с ленточной линией, имеющей поглощающие покрытия, проволока является волноводом, обладающим лишь одной поверхностью; поэтому отсутствуют дополнительные потери на малых граничных поверхностях. Для очень больших времен задержки подобные линии весьма перспективны вследствие малых потерь на единицу длины.

3. Пьезоэлектрические преобразователи продольных колебаний

При пьезоэлектрическом возбуждении продольных колебаний преобразователь имеет форму цилиндра, изготовленного из пьезоэлектрического монокристалла или из поляризованной по длине пьезоэлектрической керамики. Для линий задержки, работающих на первой продольной нормальной волне L (0, 1) в области, где дисперсия незначительна, преобразователи выполняются в виде длинных тонких стержней; в этом случае длина является единственным размером, определяющим собственную частоту колебаний преобразователя. В области, где дисперсия для нормальной волны L (0, 1) линейна, отношение диаметра преобразователя к его длине приближается к единице и частотный коэффициент становится функцией этого отношения. Для ненагруженных преобразователей из керамики титаната бария Шоу [47] показал, что частотный коэффициент и до некоторой степени коэффициент электромеханической связи меняются с изменением отношения диаметра к длине (фиг. 182). Заметим, что наинизшая нормальная волна позволяет получить самые высокие значения коэффициента связи и максимальное расстояние между резонансными частотами. Шоу показал также, что амплитуда смещения в таких преобразователях зависит от отношения диаметра к длине и от порядка нормальной волны, как показано на фиг. 183. В то время как наинизшая нормальная волна приводит к максимуму смещения в центре, для некоторых нормальных волн и значений отношения диаметра к длине наблюдаются значительные смещения при радиусах, отличных от нуля.

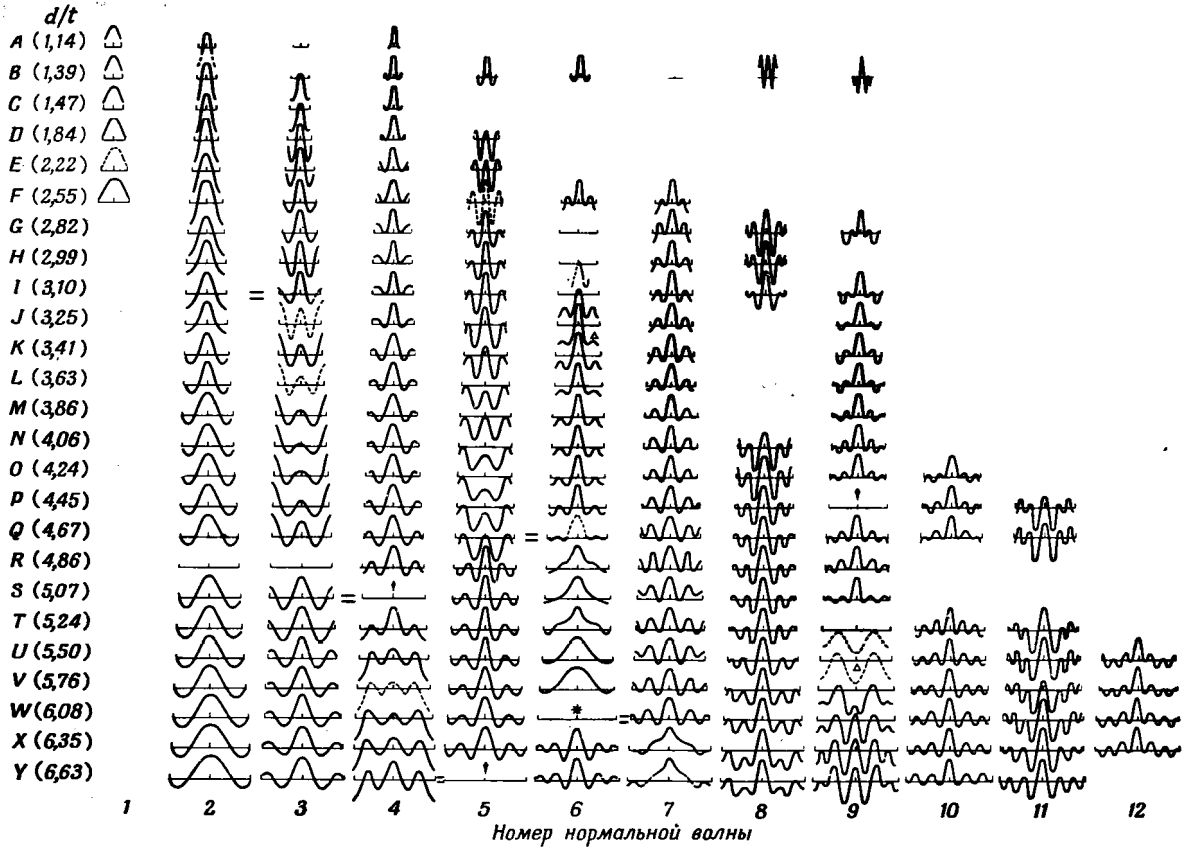
4. Проволочные пьезоэлектрические линии без дисперсии на продольных колебаниях

В тех случаях, когда допустимы небольшие изменения задержки, а также для очень низкочастотных линий задержки приме-



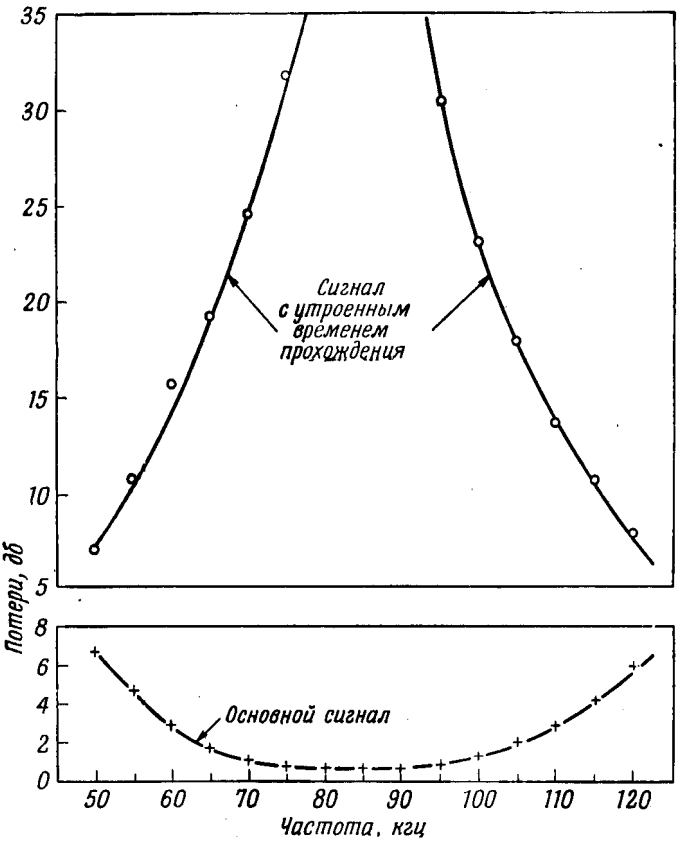
Ф и г. 182. Экспериментально полученные зависимости произведения резонансной частоты на толщину ft от отношения диаметра к толщине d/t (по Шоу [47]).

Кружки имеют диаметр, пропорциональный измеренной величине коэффициента электромеханической связи.



Ф и г. 183. Экспериментально полученные распределения смещений для разных значений отношения диаметра к толщине d/t (по Шоу [47]).

нение нормальной волны $L(0, 1)$ позволяет получить ряд преимуществ. Сюда относятся компактность конструкции, низкие потери, высокая степень подавления ложных сигналов и большая относительная ширина полосы, связанная с использованием



Ф и г. 184. Вносимые потери для проволочной линии с задержкой 1 *мсек* при частоте 84 *кгц* (по Мею).

керамических преобразователей. По сравнению с прямоугольными ленточными линиями, рассматриваемыми в § 5, ширина которых составляет от 10 до 20 длин волн (при частоте 100 *кгц* длина волны равна 5 *см*), проволочные линии могут иметь диаметр меньше 0,1 длины волны.

На фиг. 184 показана характеристика потерь для такой линии с задержкой 1 *мсек* при средней частоте 84 *кгц*. Эта линия изго-

товлена из алюминиевого стержня диаметром 0,62 *см* и имеет преобразователи из PZT-5. Минимальные потери равны 0,3 *дб* при нагрузке линии на сопротивление 2,4 *ком*. Наиболее сильно выраженные ложные сигналы, соответствующие импульсам, трижды прошедшим линию задержки, подавляются здесь главным образом в электрической цепи.

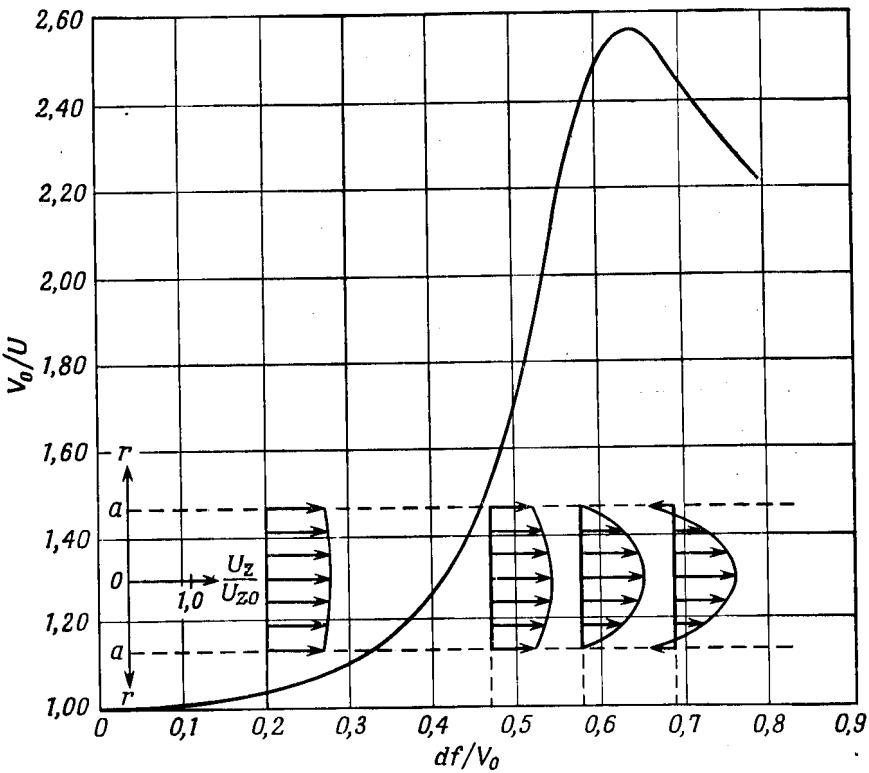
5. Проволочные пьезоэлектрические дисперсионные линии на продольных колебаниях

Мей [7] поставил ряд экспериментов с проволочными линиями задержки, возбуждаемыми с помощью цилиндрических пьезоэлектрических преобразователей. Работа проводилась в диапазоне нескольких мегагерц и преследовала цель получить линейное изменение задержки с частотой путем использования той части характеристики для нормальной волны $L(0, 1)$, которая расположена вблизи первой точки перегиба. Основная трудность состояла в преимущественном возбуждении первой продольной нормальной волны, так как опыты, проведенные Тью и др. [48], с импульсным возбуждением продольных колебаний в проволоке показали, что распространяется много различных нормальных волн.

Как указано в гл. 2, зависимость осевой компоненты смещения от радиуса является функцией частоты. Вблизи точки перегиба для волны $L(0, 1)$ это смещение обладает довольно ярко выраженным максимумом на оси и спадает до нуля на граничной поверхности, как показано на фиг. 185. С другой стороны, распределение смещений изгибных нормальных волн [49] характеризуется одним или несколькими узловыми диаметрами с максимумами осевых смещений в диаметрально противоположных точках на граничной поверхности. Если имеет место полная симметрия, то преобразователи, работающие на продольных колебаниях, не должны ни возбуждать, ни принимать изгибные волны. Факт появления изгибных волн в линиях задержки на продольных колебаниях связан с неоднородностью структуры и формы преобразователей и проволоки, а также с отклонениями от симметрии при установке преобразователя на проволоку.

Преобразователи для возбуждения продольных колебаний с диаметром, равным диаметру проволоки, оказались весьма чувствительными к изгибным колебаниям. При уменьшении диаметра преобразователя по сравнению с диаметром проволоки чувствительность к продольным колебаниям возрастает, в то время как чувствительность по отношению к изгибным волнам уменьшается. Вблизи точки перегиба кривой для волны $L(0, 1)$ в проволоке оптимальный диаметр преобразователя составляет 0,5—0,7 диаметра проволоки. При таком соотношении диаметров удается

получить приблизительно осевые смещения и одновременно обеспечить необходимое сопротивление преобразователя на средней частоте полосы пропускания. Сопротивление преобразователя довольно велико во всех реальных случаях, и оно увеличивается

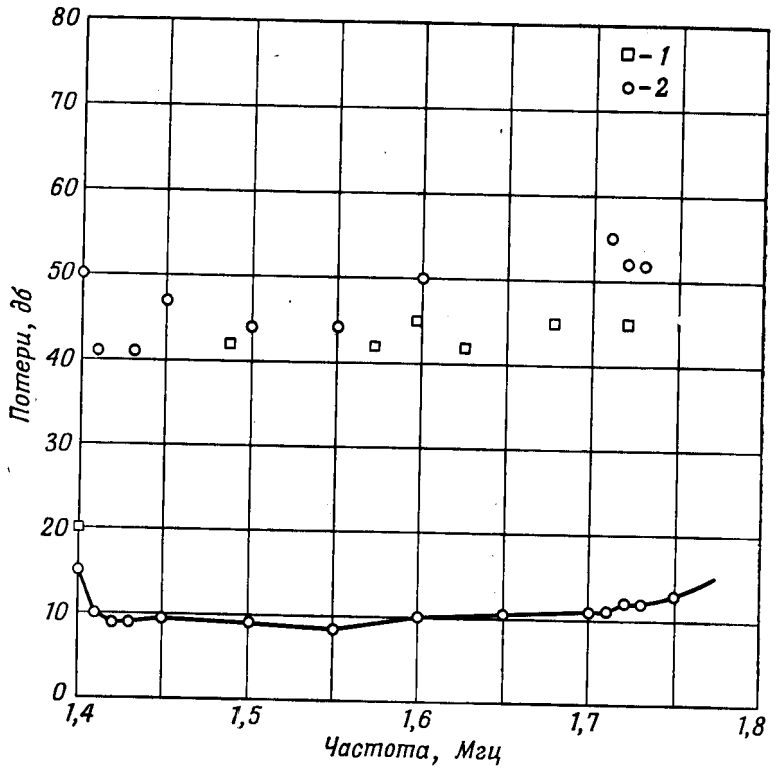


Ф и г. 185. Распределение осевых смещений в зависимости от радиуса проволоки для первой продольной нормальной волны (по Мею [7]).
Коэффициент Пуассона $\sigma = 0{,}33$; U_Z — осевое смещение при радиусе r; U_{Z0} — осевое смещение при $r = 0$.

с уменьшением диаметра. В тех случаях, когда диаметр проволоки больше, чем диаметр преобразователя, чтобы снизить отражение от ненагруженной торцевой поверхности проволоки, концы проволоки делают коническими.

В этих опытах по исследованию устройств с линейной характеристикой задержки на частотах порядка мегагерц было найдено, что алюминиевая проволока марки 5052 обладает малыми потерями и хорошими свойствами в отношении распространения

упругих волн. Наряду с выбором конструкции преобразователя много усилий было затрачено на усовершенствование самой линии. В частности, было найдено, что протяжку проволоки необходимо производить очень осторожно, чтобы получить гладкую поверхность и уменьшить размеры зерен. Были тщательно



Ф и г. 186. Кривая вносимых потерь для проволочной линии задержки из алюминия с линейной характеристикой задержки (по Мею [7]).

1 — уровень побочных колебаний; *2* — сигналы с тройным временем прохождения. Сопротивление нагрузки 12 000 *ом*; длина линии 3 *м*.

подобраны размеры преобразователей и их расположение по отношению к оси проволоки.

В результате исследований была создана линия с линейной задержкой, типичная характеристика которой показана на фиг. 186; подавление ложных сигналов в линии составляет в среднем 35 *дб*. Следует отметить, что в низкочастотной области полосы пропускания имеется узкая область, в которой потери возра-

стают, а уровень ложных сигналов заметно повышается. В этой области начинает сказываться близость к критической частоте, на что указал Мейтцлер [50] и что кратко рассмотрено в гл. 2. Близость критической частоты в низкочастотной области линейной характеристики задержки накладывает ограничение на относительную ширину полосы, для которой характеристика задержки симметрична.

Несовершенство как внутренней структуры, так и поверхности материала звукопровода приводит к появлению рассеивающих центров, которые способствуют перекачке энергии в другие типы колебаний. Относительная величина максимума потерь на критической частоте оказывается больше для линий с шероховатой поверхностью. Рассмотренные эксперименты проводились в диапазоне частот 1—5 *Мгц*, что соответствует длинам волн от 3 до 0,6 *мм*. Если размеры рассеивающих центров имеют некоторую минимальную величину, то отношение сечения рассеяния к длине волны уменьшается при понижении частоты; следовательно, на низких частотах характеристика проволочной линии должна улучшаться.

В § 5 показано, что в линейных ленточных линиях можно достичь очень высокой степени подавления ложных сигналов в диапазоне 1—5 *Мгц*, если ширина ленты линии по крайней мере в 10—20 раз превышает длину волны. При значительно более низких частотах ленточная линия с таким же отношением ширины к толщине становится слишком громоздкой. Поэтому на низких частотах проволочная линия обладает весьма существенными преимуществами — компактностью и высокой степенью подавления ложных сигналов.

6. Проволочные магнитострикционные линии задержки на продольных колебаниях, не обладающие дисперсией

Магнитострикционный метод возбуждения первой продольной нормальной волны в проволоке часто использовался в ранних моделях волноводных линий задержки [2, 3]. Преимущества, свойственные этому типу конструкции, обеспечили широкое распространение проволочных магнитострикционных линий [51]. В самой простой модели катушка преобразователя намотана на кусок магнитострикционной проволоки, а подмагничивающее поле создается постоянным магнитом. Так как нагрузкой преобразователя с обоих концов является сопротивление звукопровода, равное сопротивлению самого преобразователя, подобная линия представляет собой оптимальный вариант конструкции для работы с импульсами малой длительности, как указано в § 7.

Если один из магнитострикционных преобразователей сделать передвижным, то можно менять время задержки в пределах, ограниченных лишь длиной линии. Ввиду простоты установки на линии дополнительных преобразователей эта конструкция пригодна в качестве многоотводной линии задержки. Так как обычно цель разработки заключается в создании линии, не обладающей дисперсией, что требует использования первой продольной волны при малом значении отношения df/V_0, то для работы на высоких частотах диаметр проволоки следует выбирать малым. Соединение катушки преобразователя, возбуждающего продольные колебания, с проволокой даже весьма малого диаметра не представляет труда в отличие от пьезоэлектрических преобразователей, соединение которых с торцевой поверхностью проволоки малого диаметра представляет собой серьезную проблему, или от преобразователей для создания крутильных колебаний, в которых приходится приваривать к поверхности проволоки тонкие полоски.

Переменная линия задержки, позволяющая осуществлять регулировку времени задержки в пределах 5—130 *мксек*, описана в работе [21]. Она изготовлена в виде прямого отрезка проволоки длиной 100 *см* и диаметром 0,076 *мм*; частота следования импульсов равна 1,5 *Мгц* при вносимых потерях около 50 *дб* и снижении уровня ложных сигналов на 26 *дб*. Экспериментальная линия того же типа, но меньшей длины работала при частоте следования импульсов 4,5 *Мгц* [21, 29].

Преимущества линий на продольных колебаниях проявляются в основном при сравнительно небольших задержках, порядка нескольких сотен микросекунд. При этом важную роль играют такие особенности этих линий, как возможность плавного изменения времени задержки, простота создания промежуточных ответвлений, а также и то, что катушки сравнительно большой длины допускают работу на более высоких частотах. При больших задержках преимуществами обладают линии на крутильных колебаниях, так как у них больше время задержки на единицу длины и меньше дисперсия.

7. *Влияние кривизны на характеристики задержки*

Теория распространения продольных волн в бесконечном круглом цилиндре, приводящая к частотному уравнению Похгаммера — Хри, применима для случая прямой проволоки. Так как длина реальных линий задержки обычно составляет несколько метров, чтобы создать конструкцию приемлемых размеров, приходится свивать проволоку в плоскую или пространственную

спираль. При этом, однако, не следует забывать, что в изогнутом отрезке, подвергнутом растягивающим усилиям, согласно условию сохранения момента в плоскости кривизны, возникают дополнительные поперечные напряжения.

Считая, что волна распространяется в прямой проволоке с постоянной скоростью V_0 (величина df/V_0 мала), Скеррот и Нейлор [4] вывели приближенную формулу для влияния кривизны линии на фазовую скорость V

$$V = V_0\left[1-\left(\frac{V_0}{\omega R}\right)^2\right]^{-1/2}, \tag{6.17}$$

где R — радиус кривизны. Если $V_0^4 \ll (2\omega^2R^2)^2$, то

$$V \approx V_0\left(1+\frac{V_0^2}{2\omega^2R^2}\right). \tag{6.18}$$

В диапазоне частот, где первая продольная нормальная волна почти не обладает дисперсией, $V \approx V_0$, и групповую скорость можно приближенно представить в виде

$$U = \frac{d\omega}{d\beta} = V_0\left(1-\frac{V_0^2}{2\omega^2R^2}\right). \tag{6.19}$$

С помощью тех же преобразований, что и в § 2, п. 7, можно определить относительное изменение задержки в пределах полосы пропускания

$$\frac{\Delta D}{L/V_0} = \frac{\Delta f}{f}\left[\omega V_0\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{U}\right)\right] = \frac{\Delta f}{f}\left[\frac{2G}{1-2G}\right] \approx \frac{\Delta f}{f}2G, \tag{6.20}$$

где G определяется по формуле (6.13), а $R^2 \approx RR_n$.

В качестве примера рассмотрим линию задержки, изготовленную из алюминиевой проволоки, свитой в спираль со средним радиусом 6 *см*. Полоса пропускания линии равна 300 *кгц* при средней частоте 1 *Мгц*. Относительное изменение задержки составляет

$$\frac{\Delta D}{L/V} = 7{,}5\cdot10^{-6},$$

или всего $7{,}5\cdot10^{-3}$ *мксек* на 1 *мсек* задержки. Эта величина значительно меньше, чем изменение задержки вследствие дисперсии в прямом стержне.

§ 5. ЛЕНТОЧНЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ НА ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

1. Свойства продольных и изгибных колебаний в пластинах и их преимущества

Как указано в гл. 2, колебания в бесконечной пластине обладают многими свойствами, присущими колебаниям в круглом цилиндре. Так, например, можно провести аналогию между зависимостью задержки от толщины в случае распространения волн в пластине и зависимостью задержки от диаметра для случая круглого цилиндра. Существует семейство продольных нормальных волн, напоминающее по характеристикам задержки продольные нормальные волны в проволоке. А характеристики задержки семейства изгибных нормальных волн по форме похожи на характеристики семейства изгибных нормальных волн в проволоке при $n = 1$. Однако никаких нормальных волн, соответствующих волнам в проволоке при $n > 1$, не существует; в этом состоит большое преимущество пластин перед цилиндрическими стержнями с точки зрения их применения для создания дисперсионных линий задержки. Как следует из кривых фазовой скорости, приведенных на фиг. 23, в области, где первая продольная нормальная волна имеет линейную характеристику задержки, не существует двух нормальных волн, обладающих одинаковыми фазовыми скоростями при данной частоте. Таким образом, в этом диапазоне частот не существует влияния критической частоты, которое наблюдается в проволочных линиях задержки.

Другое важное преимущество плоских конструкций состоит в том, что при данной частоте площадь преобразователя может быть существенно больше, чем в случае проволочной линии, в результате чего значительно снижается электрическое сопротивление плоского преобразователя. Типичная проволочная дисперсионная линия на первой продольной нормальной волне может иметь диаметр, равный половине длины волны, тогда как подобная линия, использующая волны в пластинах, может иметь толщину, равную половине длины волны, и ширину, равную 20 длинам волн, т. е. ее поперечное сечение в 40 раз больше. В § 7 настоящей главы показано, что электрическое согласование сопротивления преобразователя в пределах рабочей полосы частот весьма существенно для снижения потерь и подавления многократных отражений. Еще одно ценное качество преобразователя, обладающего большой шириной, заключается в том, что он создает направленное излучение.

Хотя теория нормальных волн в пластинах, рассмотренная в гл. 2, относится к бесконечной пластине, она достаточно хорошо

описывает распространение колебаний в ограниченной пластине, если ширина последней много больше длины волны, меньшие поверхности покрыты поглощающим материалом и преобразователь имеет достаточно большую ширину, чтобы создавать в пластине направленное излучение. Выполнив эти требования, Микер [8, 52] разработал дисперсионную ленточную линию задержки на первой продольной нормальной волне, которая характеризуется весьма хорошими параметрами распространения на частотах порядка нескольких мегагерц. Отсутствие критических частот, более низкое сопротивление, направленное излучение преобразователя при использовании поглотителей на узких поверхностях ленты делают ленточную линию более перспективной для получения линейной характеристики задержки в диапазоне частот порядка мегагерц по сравнению с проволочной линией.

2. Пьезоэлектрические преобразователи продольных колебаний по толщине

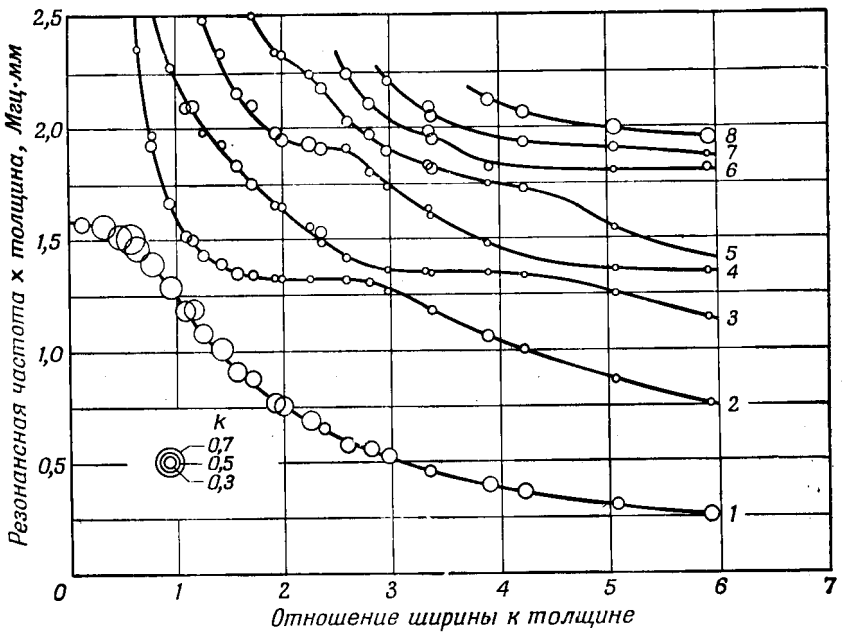
Для возбуждения продольных нормальных волн в ленте используются керамические пьезоэлектрические преобразователи в форме бруска, поляризованные по толщине. Распределение осевых компонент смещения по толщине ленты меняется с частотой аналогично тому, как оно меняется в проволоке по диаметру. Для возбуждения первой продольной нормальной волны вблизи первой точки перегиба (для алюминия $h/\lambda = 0{,}51$) необходимо, чтобы ширина преобразователя была меньше, чем толщина ленты. Преобразователи с малым отношением ширины к толщине обладают зависимостью произведения частоты на толщину от этого отношения, как было показано для ненагруженных преобразователей Фабиеном [53]. Типичные кривые для свободно колеблющегося резонатора из PZT-5 в виде бруска показаны на фиг. 187. Следует отметить, что для реализации максимального коэффициента электромеханической связи материала необходимо, чтобы отношение ширины преобразователя к толщине было меньше единицы.

3. Ленточные пьезоэлектрические дисперсионные линии задержки на продольных колебаниях

Обычно ленточные линии задержки изготовляются из алюминиевой ленты марки 5052, ширина которой равна 10—20 длинам волн. Преобразователи в форме брусков из керамики титаната бария или титаната-цирконата свинца (PZT-5) прикрепляются к омедненным концам ленты, как показано на фиг. 175. Погло-

щающий материал в виде тесьмы с клеем, застывающим при повышенной температуре, накладывается на узкие поверхности ленты и частично на основные поверхности.

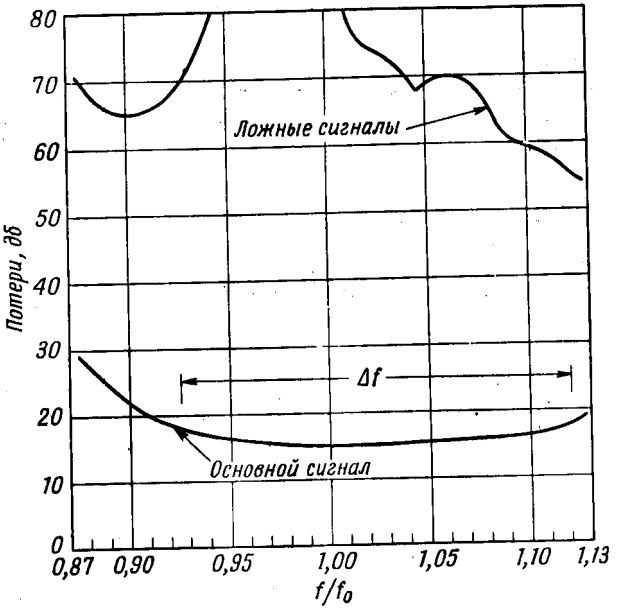
Ленточные линии задержки на продольных колебаниях, разработанные Микером, имеют прекрасные характеристики, которые приведены на фиг. 188. Уровень ложных сигналов снижен по крайней мере на 40 *дб* в пределах всей полосы пропускания



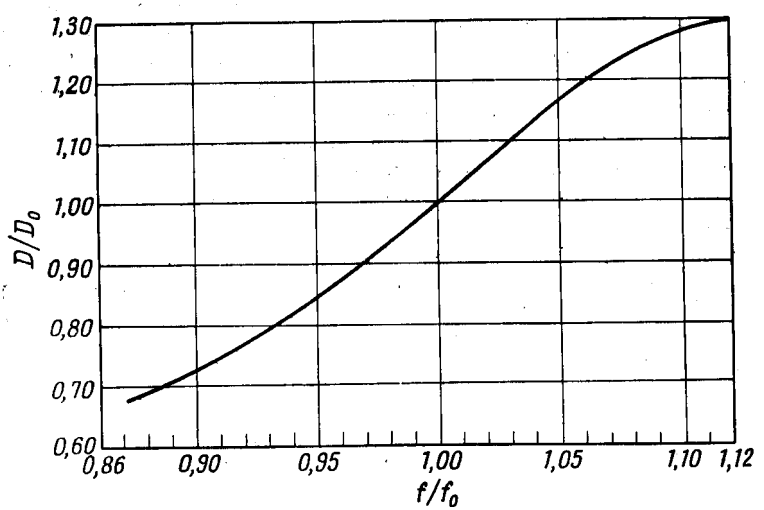
Ф и г. 187. Зависимость произведения частоты на толщину от отношения ширины к толщине для преобразователя в виде прямоугольного стержня из керамики PZT-5, поляризованной по толщине (по Фабиену [53]).

Диаметры кружков пропорциональны измеренной величине коэффициента электромеханической связи.

(на уровне 3 *дб*) и более чем на 65 *дб* для средней частоты. Характеристика задержки этой линии, приведенная на фиг. 189, отличается почти идеальной линейностью (постоянством наклона). От прямой линии, проведенной через точку перегиба и крайние значения полосы пропускания, равной 20%, характеристика задержки отличается приблизительно на 3,5% в области верхних частот и на 1,7% в низкочастотной области. Характеристика потерь этой линии задержки определялась при симметричной согласованной нагрузке с использованием электрических согласующих звеньев, которые приблизительно соответствовали



Ф и г. 188. Вносимые потери ленточной линии задержки на продольных колебаниях длиной около 3 *м* с линейной характеристикой задержки, приведенной на фиг. 189 (по Микеру).



Ф и г. 189. Характеристика задержки ленточной линии на продольных колебаниях, данные для которой приведены на фиг. 188 (по Микеру).

D_0 — задержка в точке перегиба характеристики; f_0 — частота в точке перегиба.

реактивной части проводимости преобразователя в пределах полосы 20%. Такое согласование необходимо для подавления сигналов с утроенным временем прохождения, так как затухание основного сигнала сравнительно невелико.

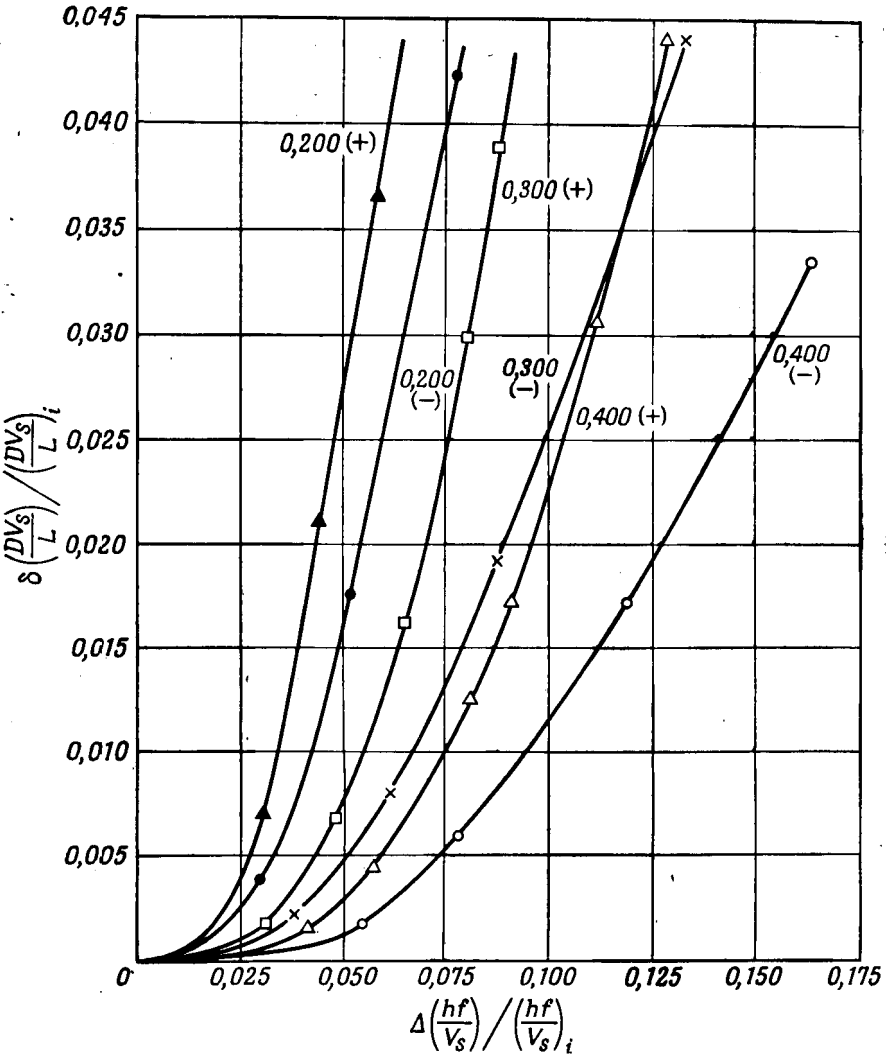
4. *Материалы, применяемые для звукопровода*

Мы рассмотрим здесь материалы, используемые в линиях задержки, которые работают в линейной области первой продольной нормальной волны.

Как указано в гл. 2, коэффициент Пуассона входит в качестве параметра в решение частотного уравнения для продольных и изгибных нормальных волн. Большинство металлов имеет коэффициент Пуассона σ, лежащий в пределах от 0,25 до 0,40. Некоторые стекла имеют коэффициент Пуассона $\sigma = 0{,}2$, а для плавленого кварца $\sigma = 0{,}17$. В пределах этой области максимальный наклон в самой нижней точке перегиба изменяется в 4 раза.

Из кривой задержки, приведенной на фиг. 189, видно, что полученное отклонение от линейности связано с определенным значением относительной ширины полосы пропускания. Таким образом, чтобы обеспечить ту же линейность при большей абсолютной ширине полосы, необходимо увеличивать рабочую частоту. Кроме того, отклонения величины задержки не являются полностью симметричными (наклон немного меняется). Как линейность в пределах полосы пропускания, так и отклонение от постоянства наклона меняются при изменении коэффициента Пуассона, что видно из кривых на фиг. 190. Для данной относительной ширины полосы устройство с большим коэффициентом Пуассона имеет меньшее отклонение от линейности по сравнению с устройством с меньшим коэффициентом Пуассона. Однако отклонение от постоянства наклона кривой меньше при малых значениях коэффициента Пуассона.

Большинство экспериментальных результатов, приведенных здесь, относится к характеристикам линейных дисперсионных линий со средней частотой в пределах 1—5 *Мгц* (что соответствует длине волны в алюминии от 3 до 0,6 *мм*). Во многих случаях длина линий превышает 4 *м*, что исключает возможность применения стеклообразных материалов [15, 54, 55], линии из которых изготовляются путем шлифовки или притирки. Из поликристаллических материалов, которые могут быть прокатаны до нужной толщины и легко доступны, наилучшим как с точки зрения минимальных потерь, так и по другим свойствам является алюминиевый сплав 5052. В опытах с линиями на продольных колебаниях, работающими на частотах выше 3 *Мгц*, были обнаружены



Ф и г. 190. Влияние коэффициента Пуассона и относительной полосы пропускания на максимальное отклонение от линейности для первой продольной нормальной волны в упругой пластине (по Микеру [52]).

D — задержка; L — длина; $[(DV_s/L)_i, (hf/V_s)_i]$ — координаты точки перегиба на графике зависимости задержки от частоты, $\delta\,(DV_s/L)$ — максимальное отклонение реальной задержки от линейной задержки; $\Delta\,(hf/V_s)$ — отклонение безразмерной частоты от $(hf/V_s)_i$. Обозначение 0,200 (—) указывает, что среднее значение коэффициента Пуассона равно 0,200 и что частота уменьшается по сравнению со значением $(hf/V_s)_i$.

различные пики затухания, которые не могут быть объяснены с точки зрения теории плоских волн или отнесены на счет характеристик преобразователя в полосе пропускания. Мейтцлер [56] установил корреляцию между кривыми потерь, полученными в опытах, и изменяющимся характером продольных и изгибных волновых движений, рассчитанным на основании теории селективного затухания, рассмотренной в гл. 2.

5. *Влияние формы ленты*

Для дисперсионных линий, рассматриваемых в этом параграфе, отклонение формы ленты от идеального прямоугольного параллелепипеда оказывает различное влияние на характеристики линии задержки. Так, распространение волн в прямоугольной ленте с поглощающим материалом, расположенным на узких поверхностях, отличается от случая идеальной бесконечной пластины тем, что в ленте существуют максимумы затухания, которые при увеличении ширины сдвигаются в сторону низких частот. Этот эффект наблюдается в лентах, ширина которых составляет 10—20 длин волн, если длина преобразователя такова, что удается получить параллельный пучок. В более узких лентах при уменьшении ширины потери увеличиваются вследствие увеличения расхождения пучка в направлении ширины.

Изменения толщины линии вдоль ее длины приводят к изменениям формы характеристик задержки и, следовательно, определяют воспроизводимость заданной характеристики задержки.

Наблюдалось увеличение затухания вследствие относительных изменений толщины ленты, составлявших $2 \cdot 10^{-4}$ на длину волны в направлении ширины ленты. Вследствие изменения фазовой скорости с толщиной клинообразная форма поперечного сечения вызывает такое изменение направления распространения волны, что часть пучка, попадающая на поверхности, покрытые поглощающим материалом, увеличивается.

§ 6. ЛЕНТОЧНЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ НА ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

1. *Ограничения, накладываемые на характеристики задержки для линий постоянной толщины*

Для ленточной линии задержки постоянной толщины, а также для проволочной линии постоянного диаметра характеристика задержки определяется решением частотных уравнений Релея — Лэмба или Похгаммера — Хри для данной нормальной волны и коэффициентом Пуассона, как указано в § 4 и 5. Это наклады-

вает ограничения на форму возможных характеристик задержки. Например, конструкция линии с линейной характеристикой задержки, использующей первую продольную нормальную волну, для заданной величины отклонения от линейности ограничена работой в сравнительно узкой относительной полосе частот. Увеличение ширины полосы может быть достигнуто путем повышения рабочей частоты; однако этот метод ограничен увеличением потерь в поликристаллических металлах, что отмечено в § 3, п. 5, и уменьшением толщины линии, которое для всех материалов связано с трудностями изготовления очень тонких лент.

Вообще говоря, очень трудно получить характеристику задержки, соответствующую некоторой математической формуле, так как ни одна характеристика задержки для продольных или изгибных колебаний не описывается простой формулой. Приближенный анализ продольных волн в пластине дали Миндлин [57], Кейн и Миндлин [58], Медик и Миндлин [59, 60] и другие авторы. Аналогичный приближенный анализ продольных волн в круглом стержне был дан Лявом [41], Херманом и Миндлиным [61] и другими авторами. Полученные решения представляют собой либо приближенные решения точных дифференциальных уравнений движения волны, либо точные решения приближенных дифференциальных уравнений. В обоих случаях ни одно из решений не дает удовлетворительного приближения, которое можно было бы использовать для точного расчета линии задержки с требуемыми свойствами.

Единственным видом волнового движения, для которого существует точное решение, выражаемое простой математической формулой, является волна сдвига по толщине в бесконечной пластине. Задержка на единицу длины d_n для n-й нормальной волны определяется выражением

$$d_n^2 = \frac{V_s^2}{1-(f_{cn}^2/f^2)}, \qquad (6.21)$$

где f_{cn} — критическая частота, а V_s — скорость сдвиговой волны. Однако для этих нормальных волн избирательность по отношению к нежелательным волнам меньше, чем та избирательность, которую можно получить при работе на первой продольной нормальной волне.

2. *Линии переменной толщины*

Проблема синтеза задержек была решена Фитчем [10, 11], предложившим ленточную линию, толщина которой меняется по длине; при этом удается получить требуемые характеристики задержки. Ленточная линия постоянной толщины (работающая

на первой продольной нормальной волне) с неизменной длиной l и толщиной h обладает определенной зависимостью времени задержки от частоты. Ленты разной длины и толщины имеют различные зависимости времени задержки от частоты. Если соединить концами ряд таких различных лент, то характеристика задержки такой составной линии будет представлять собой результат сложения индивидуальных характеристик задержки каждой линии. В пределе, при увеличении числа коротких отрезков, отличающихся между собой по толщине на бесконечно малую величину, мы получим ленту, толщина которой плавно меняется по длине.

Такой синтез может быть осуществлен путем изменения любых параметров, которые определяют зависимость задержки от частоты. Выразим характеристику задержки ленточной линии постоянного сечения в безразмерных величинах: по оси ординат отложим $V_s/U = D\,(V_s/L)$, где V_s — скорость сдвиговой волны, U — групповая скорость, D — полное время задержки и L — длина линии. Для ленточной линии постоянного сечения и определенной длины величина V_s/L постоянна; постоянна также величина h/V_s, входящая в безразмерную переменную hf/V_s, откладываемую по оси абсцисс. Параметры σ, V_s/L и h/V_s полностью определяют зависимость между D и f. Таким образом, можно соединить несколько лент с одинаковыми значениями V_s/L и h/V_s, но с различными коэффициентами Пуассона σ; при этом мы получим некоторую синтезированную характеристику задержки. Правда, скачкообразное изменение сопротивления на поверхностях раздела лент, по-видимому, должно привести к появлению значительных отражений и ухудшению свойств линии.

Подобным же образом можно менять каждый из этих трех параметров в отдельности. (Например, изменение параметра V_s/L приводит к тривиальному случаю простого изменения длины линии постоянной толщины.) Однако с конструктивной точки зрения более удобно изменять сразу два параметра, обычно L и h.

Если через a_{ij} обозначить удельную задержку D/L для i-й частоты j-й ленты, имеющей длину x_j, то полная задержка на частоте f_i будет равна

$$D(f_i) = \sum_{j}^{n} a_{ij} x_j. \tag{6.22}$$

Таким образом, с помощью ряда удельных задержек a_{ij} и соответствующих частот f_i, полученных из безразмерных величин, которые приведены на фиг. 23, можно вычислить результирующую характеристику задержки.

3. Синтез произвольных характеристик задержки

Хотя уравнение (6.22) позволяет получить характеристику задержки для данного набора отрезков ленты, оно не дает возможности непосредственно решить задачу о нахождении такой комбинации длин и толщин отдельных лент, которая дает наилучшее приближение к любой произвольно заданной характеристике задержки. Фич [10, 11] разработал способ вычисления этих величин путем применения к этой задаче методов линейного программирования.

В этом способе набор N лент, каждая из которых имеет различную толщину, рассматривается для каждой из M различных частот. Если для каждой из M частот составить уравнение вида (6.22), то получаемый в результате набор уравнений можно записать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(f_1) \\ D(f_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D(f_N) \end{bmatrix}. \tag{6.23}$$

Каждый столбец матрицы a представляет отдельную ленту толщиной h. Если этот набор уравнений для случая $N = M$ решить как систему совместных уравнений, то мы получим ряд значений x, которые, удовлетворяя уравнению (6.23), являются точными решениями для каждой из M частот. Некоторые значения x могут быть отрицательными.

Вообще говоря, задача, для которой применим метод линейного программирования, сводится к тому, что при известных матрице A и векторе $\mathbf{b}$ требуется найти вектор $\mathbf{x}$, все компоненты которого положительны и который удовлетворяет уравнению

$$A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}. \tag{6.24}$$

при условии, что величина

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N \tag{6.25}$$

имеет минимальное значение. Здесь c — произвольные постоянные. Чтобы применить этот метод к задаче синтезирования задержки, необходимо указать, какой тип приближения должно представлять решение. Для синтезируемой кривой задержки существует ряд значений задержки $b(f_i)$, каждое при частоте, соответствующей значению $D(f_i)$, которое получается как решение поставленной задачи. Различие при i-й частоте между прибли-

женным решением $D(f_i)$ и требуемой кривой $b(f_i)$ определяется как

$$\delta_i = D(f_i) - b(f_i). \tag{6.26}$$

Можно применить различные методы приближения, такие, как метод наименьших квадратов, который сводит к минимуму величину $\Sigma\delta_i^2$, метод Чебышева, который минимизирует максимальное значение $|\delta|$, метод абсолютных линейных отклонений, который минимизирует величину $\sum_i |\delta_i|$, и метод приближения первого порядка Баттерворта, минимизирующий $|\delta_{i+1} - \delta_i|$. В качестве примера рассмотрим приближение Чебышева

$$\begin{gathered} |\delta| = \left| \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j - b_i \right| \leqslant \varepsilon, \qquad i = 1, \ldots, M, \\ x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{6.27}$$

Исключая знаки абсолютных величин, получаем

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j - b_i \leqslant \varepsilon, \tag{6.28}$$

$$-\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j - b_i\right) \leqslant \varepsilon. \tag{6.29}$$

Если ε прибавить к вектору $\mathbf{x}$, то неравенства (6.28) и (6.29) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} & -1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} & -1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{M1} & a_{M2} & \ldots & a_{MN} & -1 \\ -a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1N} & -1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ -a_{M1} & -a_{M2} & \ldots & -a_{MN} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \\ x_N \\ \cdot \\ \varepsilon \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_M \\ -b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -b_M \end{bmatrix}. \tag{6.30}$$

Тогда уравнение (6.25) принимает вид

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + 1\varepsilon, \tag{6.31}$$

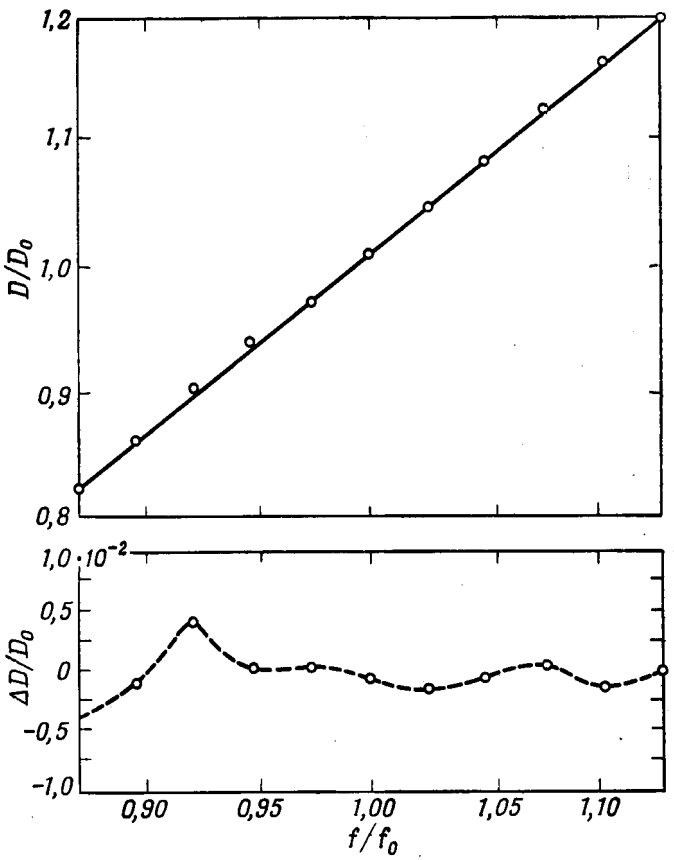
где $c_i = 0$ для $i = 1, \ldots, N$, $c_{N+1} = 1$. Условие, что $Z = \varepsilon$ должно быть сведено к минимуму, как раз и является условием, необходимым для (6.27); следовательно, приближение Чебышева может быть представлено в форме общей задачи линейного программирования. Величина вектора $(\psi_i, \ldots, \psi_N, \varepsilon)$ находится численным методом. В результате вычисления получают ряд значений толщины ленты (обычно число этих значений меньше, чем число столбцов a_{ij}) и соответствующих этим толщинам длин линий x_j, которые обеспечивают наилучшее приближение к заданной характеристике задержки.

Ленточные линии с непрерывным изменением толщины могут рассчитываться путем сглаживания дискретных значений длины и толщины, полученных с помощью вычислительной машины, так чтобы толщина плавно менялась по длине линии. Один из методов сглаживания заключается в вычерчивании профиля толщин рассчитываемой линии с последующим проведением плавной кривой через центральные точки каждого отрезка.

4. Ленточные линии переменной толщины с линейной характеристикой задержки

Одно из преимуществ такой конструкции состоит в том, что она позволяет создавать линии с линейной задержкой, для которых отклонение от линейности меньше, чем то, которого удается достигнуть в ленточных линиях постоянной толщины. Характеристика задержки, полученная Фичем для линии с плавно меняющейся толщиной, показана на фиг. 191. Отклонение от линейности составляет $\pm 1{,}5\%$ при ширине полосы, равной 50%. Для сравнения укажем, что в линиях с постоянным сечением отклонение от линейности составляет 3,5% при ширине полосы 20% и той же средней частоте. Эта линия задержки была изготовлена из алюминиевой ленты марки 5052 методом травления. Скорость подачи ленты из травильной ванны регулировалась в соответствии с требуемым характером изменения толщины ленты по длине.

Другая модель линии этой конструкции изготовлялась как непрерывная последовательность отрезков постоянной толщины, рассчитанных согласно (6.30). Чтобы исключить отражения, области скачка между ступеньками сглаживались в пределах 10 или более длин акустических волн. При изготовлении подобного устройства из одного куска алюминия либо методом проката, либо путем травления поверхности раздела между отдельными отрезками отсутствуют, а отражения от переходных областей снижаются более чем на 70 *дб* по сравнению с входным сигналом. В устройствах этого типа толщина меняется по длине ленты



Ф и г. 191. Ленточная дисперсионная линия переменной толщины с линейной характеристикой задержки (по Фичу [11]).
Кружками показаны измеренные значения.

в пределах до 50%. Другие конструктивные параметры, такие, как ширина ленты, поглощающее покрытие на краях, размеры преобразователей, остаются теми же, что и в случае линии постоянной толщины.

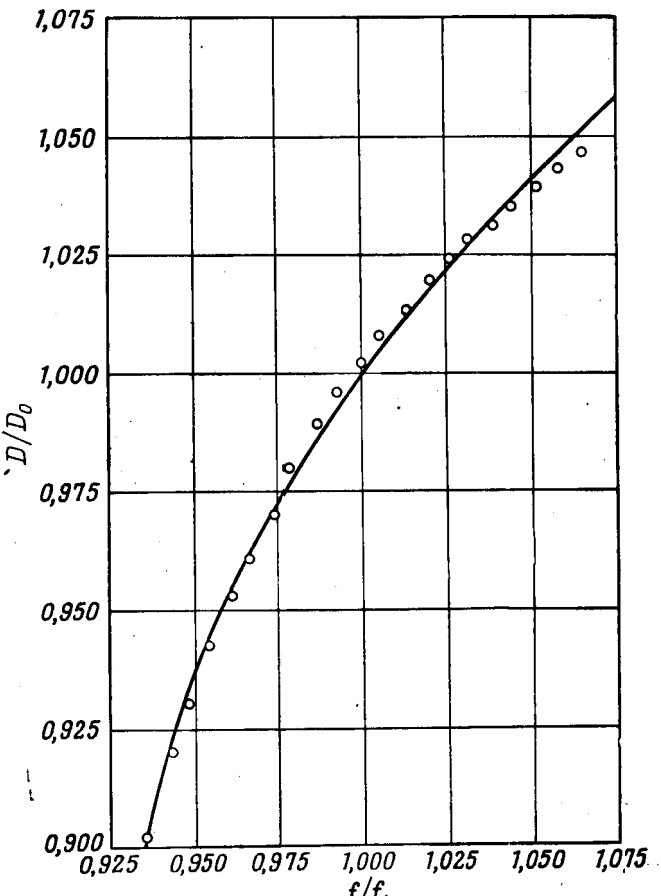
5. Ленточные линии переменной толщины с нелинейной характеристикой задержки

Методы линейного программирования могут быть использованы не только для расчета линейной характеристики задержки; с их помощью можно получить также приближенное решение для нелинейных характеристик задержки. В качестве примера можно

упомянуть дисперсионную линию, характеристика задержки которой имеет вид параболической функции

$$\frac{D}{D_0} = A + \sqrt{B + C\left(\frac{f}{f_0} - 1\right)}, \qquad (6.32)$$

где D_0 и f_0 — задержка и частота в середине полосы пропускания, а A, B и C — постоянные. На фиг. 192 расчетная кривая такого типа сравнивается с экспериментально полученными значениями задержки.



Ф и г. 192. Ленточная дисперсионная линия переменной толщины с параболической характеристикой задержки (по Фичу [11]).

Расчетная кривая $D/D_0 = 0{,}865 + \sqrt{0{,}01818 + 0{,}2617\,(f/f_0 - 1)}$, D_0 — задержка при средней частоте полосы f_0. Кружками обозначены экспериментальные точки.

Этот пример, а также пример, который упоминается в п. 4 настоящего параграфа, иллюстрируют случай положительного наклона характеристики задержки. Были созданы также модели с отрицательным наклоном характеристики задержки. Например, в одной из линий был использован участок кривой задержки для первой продольной нормальной волны вдали от максимума. Может быть применена также ленточная линия на сдвиговых колебаниях с использованием участка кривой задержки для первой дисперсионной нормальной волны.

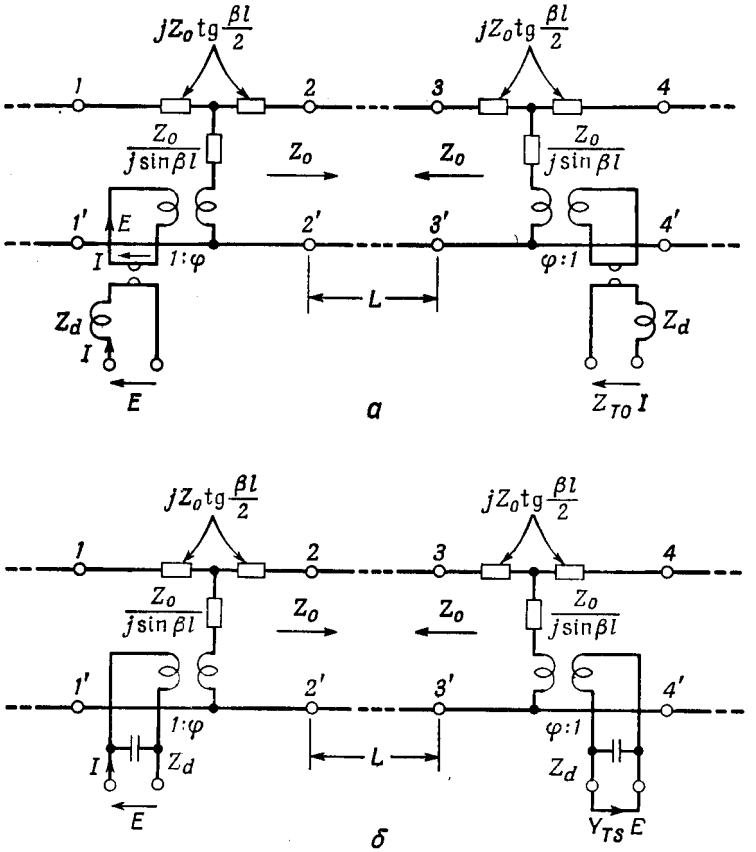
§ 7. ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ДЛЯ ЛИНИЙ ЗАДЕРЖКИ

1. Единый метод анализа магнитострикционных и пьезоэлектрических преобразователей

Эквивалентные схемы. В случае использования сравнительно простых типов волнового движения, таких, как первая продольная нормальная волна в проволоке или ленте (при малом значении произведения размера на частоту), нулевая крутильная нормальная волна в проволоке или нулевая нормальная волна сдвига по толщине в ленте, процесс распространения упругих волн может быть представлен одномерным уравнением. При этом распространение упругих волн можно выразить через силу и колебательную скорость на конце линии, а механическое сопротивление $Z_0 = \rho VA$ является постоянной величиной. При этих условиях отношение сил на выходном и входном концах линии можно записать в виде $\exp[-(\alpha + j\beta)L]$, где α — коэффициент поглощения, β — постоянная распространения, а L — длина линии.

Пьезоэлектрические преобразователи можно представить эквивалентной схемой, предложенной Мэзоном [25], которая идентична схеме, используемой для кварцевой многоугольной линии. Поскольку линии задержки применяются в основном для передачи импульсов, можно считать, что каждый преобразователь излучает в бесконечную среду, и влиянием отражений от другого конца линии можно пренебречь. Анализ этой эквивалентной схемы, проведенный для нескольких различных случаев [62—65], касался лишь установившихся режимов передачи радиочастотных импульсов и не учитывал неустановившихся процессов, которые должны учитываться в случае импульсов постоянного тока на входе. Многие линии задержки, описанные в этой главе, применяются для передачи информации в цифровой форме, причем чаще используются импульсы постоянного тока, подводимые непосредственно ко входу линии, чем модулированные высокочастотные импульсы, обычно применяемые для задержки информации в аналоговой форме.

Аналогичная ситуация наблюдается и для магнитострикционных преобразователей. Их эквивалентная схема [25] хорошо известна; опубликовано несколько исследований неустановившихся процессов [3, 19, 66—70]. Оноэ [34, 71] разработал единый



Фиг. 193. Эквивалентные схемы линий задержки (по Оноэ [34]).
а — магнитострикционный преобразователь; *б* — пьезоэлектрический преобразователь.

метод анализа, применимый к магнитострикционным и к пьезоэлектрическим преобразователям, как в установившемся режиме возбуждения высокочастотных импульсов, так и в неустановившемся режиме. В основу этого метода анализа положены полные эквивалентные схемы магнитострикционного и пьезоэлектрического преобразователей, приведенные на фиг. 193.

Эквивалентная схема, показанная на фиг. 193, *а*, соответствует преобразователю на продольных колебаниях, состоящему

из обмотки, расположенной вокруг магнитострикционной линии задержки. Протекающий по обмотке ток вызывает в проволоке деформацию растяжения (эффект Джоуля). При наложении продольного подмагничивающего поля между током I на входе и продольным смещением частиц в проволоке существует линейная связь. Подобным образом в выходном преобразователе упругая деформация изменяет магнитную проницаемость проволоки, которая в свою очередь (при наличии подмагничивающего поля) изменяет поток через приемную катушку. Этот эффект известен как эффект Виллари. В присутствии подмагничивающего поля существует линейная зависимость между током, протекающим в катушке, и деформацией в проволоке. Мы предполагаем, что проволока достаточно тонка, влиянием вихревых токов можно пренебречь и поле внутри катушки однородно, а вне ее равно нулю. При этих условиях работа преобразователей может быть описана уравнениями, приведенными в табл. 29.

Таблица 29

Уравнения для магнитострикционных преобразователей

Продольные колебания	Крутильные колебания
$T_{ZZ}=Y_0 S_{ZZ}-e_l H_Z$	$T_{\theta Z}=GS_{\theta Z}-\frac{e_T}{r}H_Z$
$B_Z=e_l S_{ZZ}+\mu H_Z$	$B_Z=\frac{e_T}{r}S_{\theta Z}+\mu H_Z$
$\varphi=e_l AN/l$	$\varphi=e_T AN/l$

Здесь e — магнитострикционная постоянная, φ — коэффициент электромеханического преобразования, A — площадь поперечного сечения, N — число витков обмотки, l — длина катушки.

Чтобы возбудить крутильные колебания, необходимо создать кольцевое поляризующее поле, а возбуждающее поле направить вдоль проволоки, либо наоборот, возбуждающее поле сделать кольцевым, а подмагничивающее — продольным. Приведенную эквивалентную схему можно использовать и для случая крутильных колебаний, если заменить переменные, как показано в табл. 29.

Эквивалентная схема для пьезоэлектрического преобразователя показана на фиг. 193, *б*, а соответствующие основные соотношения приведены в табл. 30.

Пьезоэлектрическая линия представляет собой пластину или трубку из пьезоэлектрического материала с электродами в виде пар полосок, расположенных на поверхностях. Физическая длина преобразователя определяется шириной электродов в направлении

Таблица 30

Уравнения для пьезоэлектрических преобразователей

Продольные колебания
$T_{ZZ}=Y_0 S_{ZZ}-e_l E_x$ $D_x=e_l S_{ZZ}+\varepsilon E_x$ $\varphi=e_l A/h$

Здесь e_l — пьезоэлектрическая постоянная, φ — коэффициент электромеханического преобразования, A — площадь поперечного сечения, h — толщина.

распространения волны. Характеристики передачи полных передающих цепей, приведенных на фиг. 193, выражаются через сопротивление преобразователя в режиме холостого хода Z_{T0} для магнитострикционной линии и через проводимость преобразователя в режиме короткого замыкания Y_{TS} для пьезоэлектрической линии. В дальнейшем изложении мы детально рассмотрим лишь магнитострикционную линию. В случае пьезоэлектрической линии можно воспользоваться данными, полученными для магнитострикционной линии, заменив схему фиг. 193, *а* на схему фиг. 193, *б* и подставив в уравнения вместо Z_{T0} параметр Y_{TS}, сохранив при этом правую часть уравнения неизменной.

Преобразователи, симметрично нагруженные на сопротивления, равные сопротивлению преобразователя. Этот случай соответствует обычной линии на продольных колебаниях, когда катушки преобразователей занимают часть магнитострикционной проволоки, концы которой помещены в поглощающий материал. Оноэ вывел следующее выражение для полного проходного сопротивления:

$$Z_{T0}=\frac{\varphi^2}{Z_0}\,\frac{2\sin^2(\beta l/2)}{e^{j\beta l}}\,e^{-(\alpha+j\beta)L}. \qquad (6.33)$$

Здесь φ — коэффициент электромеханического преобразования, Z_0 — волновое сопротивление материала преобразователя, $\beta = \omega/V$ — постоянная распространения, l — эффективная длина преобразователя, α — коэффициент затухания и L — расстояние между преобразователями. В выражении (6.33) множитель $\sin^2(\beta l/2)\, e^{-j\beta l}$ зависит от частоты; при значениях $\beta l/\pi$, кратных нечетным числам, эта функция имеет максимумы с полосой пропускания на уровне 3 *дб*, равной 75% основной частоты.

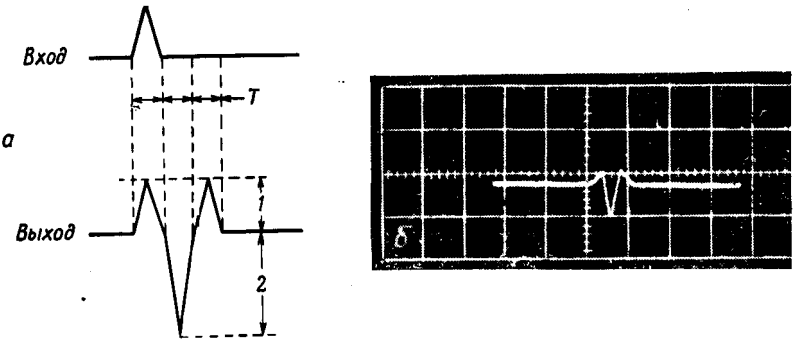
Чтобы исследовать характеристику в случае импульсов постоянного тока, Оноэ преобразовал выражение для проходного сопротивления, заменив $j\omega$ оператором p:

$$Z_{T0} = \Phi\,[1 - 2e^{-pT} + e^{-2pT}], \tag{6.34}$$

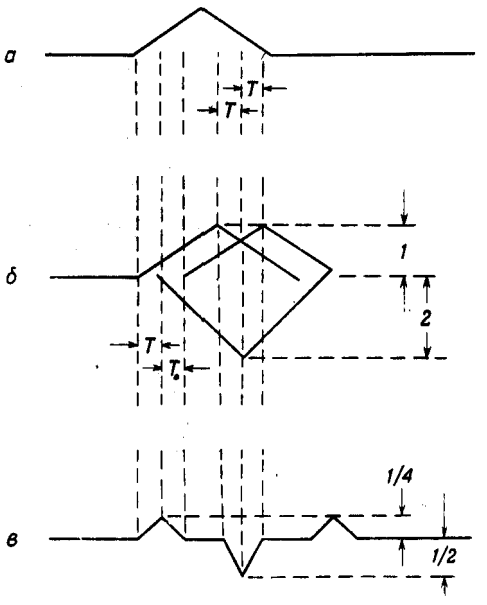
где $\Phi = (\varphi^2/2Z_0)\, e^{-\alpha L}\, e^{-p(L/V)}$, а $T = l/V$ — время, за которое волна проходит через преобразователь. Множители, входящие в выражение для Φ, представляют собой (в порядке их следования) коэффициент преобразования, затухание и задержку линии L/V. Применяя теорему запаздывания для преобразования Лапласа, получаем

$$e^{-pt'}\mathcal{L}f(t) = \mathcal{L}f(t - t'). \tag{6.35}$$

Члены выражения (6.34) содержат оператор временно́го смещения pT. Выходной сигнал состоит из входного сигнала, повторенного 3 раза через интервалы времени T, причем второй из этих сигналов имеет удвоенную амплитуду и противоположную полярность по сравнению с первым и третьим. Пример графического построения выходного импульса на основании формы входного импульса приведен на фиг. 194. Если длительность входного импульса больше, чем T, то все три сигнала алгебраически складываются, как показано на фиг. 195. Большое преимущество метода анализа Оноэ состоит в том, что он позволяет получить полную проходную проводимость, необходимую для вычисления характеристик передачи в установившемся режиме, и в то же время дает простой графический метод определения характеристики для произвольного импульса постоянного тока. Последний результат является обобщением анализа неустановившихся процессов, проведенного в ряде исследований [19, 66—70]. Этот метод обеспечивает также наглядность изучения процессов преобразования и затухания. Форма импульса, приведенного на фиг. 194, обеспечивает минимальную достижимую длительность выходного импульса для выбранной длины преобразователя и, следовательно, является идеальной формой сигнала с точки зрения накопления максимального возможного числа импульсов в данной линии задержки.



Ф и г. 194. Построение выходного импульса для преобразователей, симметрично нагруженных согласованными сопротивлениями (по Оноэ [34]).
а — графическое построение; *б* — осциллограмма импульса.

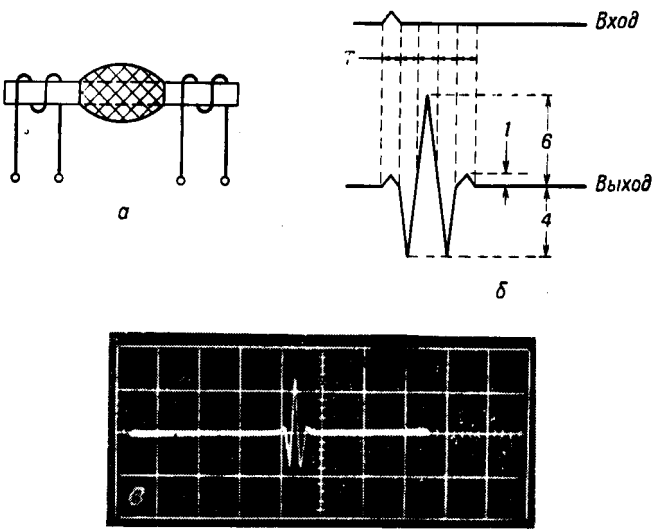


Ф и г. 195. Построение выходного импульса для преобразователей, симметрично нагруженных согласованными сопротивлениями (по Оноэ [34]).
Ширина импульса больше, чем $T = l/V$. *а* — входной импульс; *б* — построение импульса; *в* — импульс на выходе.

Преобразователи в режиме холостого хода, связанные со средой, имеющей сопротивление преобразователя Z_0. Полное проходное сопротивление

$$Z_{T0} = \frac{\varphi^2}{Z_0} \frac{8 \sin^4 (\beta l/2)}{e^{j2\beta l}} e^{-(\alpha+j\beta)L}. \qquad (6.36)$$

Здесь характеристика передачи $8 \sin^4 (\beta l/2)\, e^{-j2\beta l}$ имеет максимальное значение, которое в 4 раза больше, чем в предыдущем



Ф и г. 196. Построение выходного импульса для разомкнутых преобразователей, нагруженных механическими сопротивлениями Z_0 (по Оноэ [34]).
а — линия задержки с дополнительным поглощением; *б* — графическое построение; *в* — осциллограма выходного импульса.

случае; полоса пропускания на уровне 3 *дб* составляет 52% основной частоты. Вводя в качестве переменной время, преобразуем выражение для проходного сопротивления к следующему виду:

$$Z_{T0} = \Phi [1 - 4e^{-pT} + 6e^{-2pT} - 4e^{-3pT} + e^{-4pT}]. \qquad (6.37)$$

Теперь выходной импульс состоит из входного импульса, повторенного 5 раз; максимальная амплитуда здесь в 3 раза больше по сравнению с предыдущим случаем. Типичная форма импульса показана на фиг. 196.

Преобразователи в режиме холостого хода, связанные со средой, имеющей сопротивление, отличное от сопротивления преобразователя. Этот случай соответствует ферритовому преобразователю

с характеристическим сопротивлением Z_0', связанному с проволокой, имеющей сопротивление Z_0, или пьезоэлектрическому преобразователю, связанному со средой, сопротивление которой отлично от сопротивления преобразователя. Коэффициент отражения определяется как

$$P = \frac{Z_0' - Z_0}{Z_0' + Z_0}. \tag{6.38}$$

Проходное сопротивление выражается в виде

$$Z_{T0}' = Z_{T0}(1-P)^2 [1 + Pe^{-j\beta l}]^{-2}, \tag{6.39}$$

где Z_{T0} определяется выражением (6.36).

Проходное сопротивление, выраженное через оператор сдвига времени, имеет вид

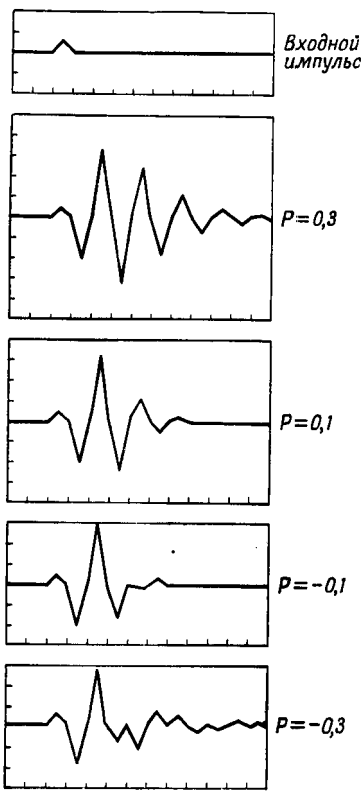
$$Z_{T0}' = \Phi [1 - 4X + (6 + 2P) X^2 + \\ + \sum_{K=0}^{\infty} \{-[(4K+4) P^K + (4K+2) P^{K+1}] X^{2K+3} + \\ + [(K+1) P^K + (6K+12) P^{K+1} + (K+3) P^{K+2}] X^{2K+4}\}], \tag{6.40}$$

где $X^K = e^{-pKT}$.

Следует заметить, что существует бесконечное число членов, которые зависят от коэффициента отражения P. Реакция на одиночный входной импульс может быть очень длительной, если коэффициент P не слишком мал. Для случая когда сопротивление преобразователя Z_0' меньше, чем сопротивление среды Z_0, коэффициент отражения P отрицателен и каждый последующий член в выходном сигнале меняет знак, что приводит к быстрому затуханию многократно отраженного импульса. Примеры формы волны для случая несогласованных сопротивлений, рассчитанные согласно (6.40), показаны на фиг. 197.

Для случая, рассмотренного на стр. 552, который является типичным для магнитострикционных линий, анализ Оноэ особенно полезен ввиду относительной простоты математического аппарата. Этот случай с некоторым приближением может быть распространен и на линии задержки на крутильных колебаниях, которые были описаны Скерротом и Нейлором [4]; при этом следует предполагать, что преобразователь согласован с нагрузкой. Для линий задержки пьезоэлектрического типа, которые рассмотрены в других параграфах этой главы, анализ, приведенный в настоящем параграфе, наиболее приемлем, так как сопротивление задерживающей среды, как правило, отличается от сопротивления преобразователя, а покрытия из других материалов используются редко. Математическое выражение для Z_{T0}' достаточно сложно, поэтому требуется проводить громоздкие расчеты.

Необходимо отметить, что анализ Оноэ не учитывает отрицательного члена $-4\varphi^2/C_0$, который соответствует последовательной с $Z_0/j \sin \beta l$ емкости в полной эквивалентной схеме для преобразователя на продольных колебаниях [25]. При оценке эквивалентной схемы преобразователя из керамики титаната бария, создающего продольные колебания по толщине, с коэффициентом связи 0,3 Мей [63] нашел, что при такой связи влияние отрицательного емкостного члена незначительно. Пьезоэлектрические преобразователи из таких материалов, как $KNaNbO_3$ [72] или PZT-5 [73], имеют коэффициент электромеханической связи в пределах от 0,6 до 0,7, поэтому для них член $-4\varphi^2/C_0$ обязательно следует учитывать.



Ф и г. 197. Импульсы на выходе преобразователя в режиме холостого хода, нагруженного на линию с несогласованным сопротивлением (по Оноэ [34]).

Другое преимущество метода Оноэ заключается в следующем. Для ранее рассмотренных случаев мы пренебрегали влиянием внешней цепи, предполагая, что либо ток на входе постоянен, а выходная цепь разомкнута (для магнитострикционной линии), либо постоянно входное напряжение, а выход замкнут накоротко (для пьезоэлектрической линии). Если же учитывать влияние внешней цепи, то выходное напряжение E_2 определяется формулой

$$E_2 = \frac{E_1 Z_2}{(Z_1 + Z_d)(Z_d + Z_2)} Z_{T0} \quad (6.41)$$

(для магнитострикционной линии) или формулой

$$E_2 = \frac{E_1 Y_1}{(Y_1 + Y_d)(Y_d + Y_2)} Y_{TS} \quad (6.42)$$

(для пьезоэлектрической линии), где Z_d — входное и выходное сопротивления преобразователей, Z_1 и Z_2 — входное и выходное сопротивления внешней цепи, а E_1 — входное напряжение. В тех случаях, когда следует учитывать член $-4\varphi^2/C_0$, его можно рассматривать как часть проводимости Y_d. Поскольку после перехода к временным переменным Z_{T0} и Y_{TS} содержат только операторы сдвига времени, выходное напряжение можно опре-

делить, использовав сначала преобразования Лапласа для первых членов в выражениях (6.41) и (6.42), а затем применив результаты, приведенные выше для Z_{T0} и Y_{TS}.

2. Влияние электрической нагрузки и коэффициента электромеханической связи на полосу пропускания пьезоэлектрического преобразователя

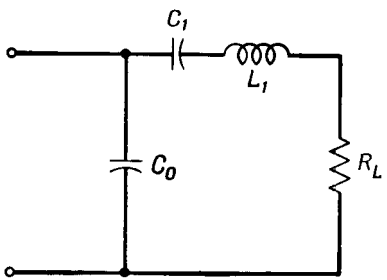
Хотя, как указывалось в п. 1 настоящего параграфа, только крутильные и сдвиговые волны нулевого порядка точно описываются одномерными уравнениями и, следовательно, могут быть представлены эквивалентной схемой, показанной на фиг. 193, однако линии задержки на продольных колебаниях, особенно те, которые работают при малых значениях отношения df/V_0, также могут быть с очень хорошей степенью приближения описаны этими уравнениями.

Емкостное сопротивление $-j/\omega C_0$, шунтирующее электрический выход пьезоэлектрического преобразователя, обычно компенсируется параллельно или последовательно включенным индуктивным сопротивлением. Когда данная частота антирезонанса (или резонанса) совпадает с частотой механического резонанса преобразователя, линия задержки со стороны входных клемм представляет собой активное сопротивление R_L. При этих условиях, если внешняя цепь согласована с сопротивлением R_L, вносимые потери на резонансной частоте оказываются минимальными, а подавление сигналов с утроенным временем прохождения достигает максимума. Такие условия, при которых 1) емкостное сопротивление C_0 на резонансной частоте скомпенсировано и 2) сопротивление внешней цепи активно и равно сопротивлению R_L, соответствуют согласованной симметричной оконечной нагрузке.

Подавление сигналов с утроенным временем прохождения путем электрического согласования особенно важно в пьезоэлектрических линиях, так как в них затухание в задерживающей среде обычно очень незначительно (от 5 до 20 *дб*) и, следовательно, его оказывается недостаточно для того, чтобы обеспечить подавление нежелательных сигналов на 40 *дб* или более, которое необходимо в высококачественных линиях задержки.

Исследование эквивалентной схемы с оконечной нагрузкой было проведено Терстоном [65]; его анализ основан на упрощенной эквивалентной схеме, показанной на фиг. 198. Здесь трансцендентные функции фиг. 193, *б* заменены сосредоточенными параметрами, а параллельная резонансная ветвь между точками *2* и *2'* исключена. Последнее упрощение допустимо в тех случаях, когда сопротивление преобразователя Z_0' равно или больше,

чем сопротивление Z_0 звукопровода. Если же $Z_0 \gg Z_0'$, то необходимо учитывать влияние этой параллельной ветви. Это последнее упрощение ограничивает область применимости данного метода;



Ф и г. 198. Эквивалентная схема пьезоэлектрического преобразователя.

однако поскольку большинство экспериментальных работ относится к алюминиевым или кварцевым линиям задержки и либо к кварцевым преобразователям, либо к преобразователям из керамики титаната бария или PZT-5, то, как можно видеть

Таблица 31

Акустическое сопротивление материалов, используемых в линиях задержки

Материал	Z, 10^{-5} г·см$^{-2}$·сек$^{-1}$	
	для продольных колебаний	для сдвиговых колебаний
Магний	10	5,31
Плавленый кварц	13,1	8,29
Алюминий	17,2	8,5
Сталь	32,5	24,6
Кварц X-среза	15,15	
Кварц Y-среза		10,4
$BaTiO_3$ (80-12-8)	33,5	19,9
$KNaNbO_3$	26,7	13,0
PZT-5	32,56	16,77
PZT-7	43,8	19,38

из табл. 31, условия, необходимые для применимости этого метода, в экспериментальных работах удовлетворяются.

В методе Терстона принимается, что преобразователь нагружен в точках *2—2'* сопротивлением R_L, представляющим собой

электрический эквивалент механического сопротивления Z_0 задерживающей среды:

$$R_L = \frac{Z_0}{4\varphi^2} = \frac{rZ_0}{\pi^2 C_0 f_R Z_0'}, \qquad (6.43)$$

где $r = C_0/C_1$ — отношение емкостей и f_R — частота параллельного резонанса. Преобразователь рассматривается как волновой фильтр, нагруженный на характеристическое сопротивление. Под теоретической относительной полосой пропускания $\Delta f/f$ в этом случае подразумевается диапазон частот, в котором собственное затухание равно нулю, а характеристическое сопротивление является чисто активным, хотя и не постоянным по величине. Результаты анализа сводятся к следующему:

1) без индуктивности:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2r}\left(1 - \frac{1}{2r} + \ldots\right), \qquad (6.44)$$

2) индуктивность включена параллельно:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{\sqrt{r}}, \qquad (6.45)$$

3) индуктивность включена последовательно:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(1 - \frac{1}{8r} + \ldots\right). \qquad (6.46)$$

Таким образом, если r не слишком мало, $\Delta f/f$ в первом случае равно $1/2r$, а во втором случае равно $1/\sqrt{r}$. Было получено [31]

Таблица 32

Сравнение относительной ширины полосы на уровне 3 *дб* с величиной $1/\sqrt{r}$ (экспериментальные данные)

Материал преобразователя	r	$1/\sqrt{r}$	$\Delta f/f$
Кварц *Y*-среза	60	0,129	0,08
Керамика $BaTiO_3$			
Сдвиговые колебания по толщине	4,8	0,46	0,43
Продольные колебания по толщине	7,1	0,38	0,37
Цирконат свинца	6,1	0,41	0,44
PZT-2	4,3	0,48	0,47
Ниобат калия-натрия	3,6	0,53	0,53

хорошее согласие между измеренной шириной полосы на уровне 3 *дб* линии из плавленого кварца, работающей на согласованную симметричную нагрузку, и величиной $1/\sqrt{r}$ для преобразователей из различных материалов (табл. 32).

Чтобы метод характеристических параметров был применим, сопротивление нагрузки R_L должно быть равно значению характеристического сопротивления при f_R:

$$Z_{Im} = \frac{\sqrt{r}}{\omega_R C_0}. \tag{6.47}$$

Для определения полосы пропускания при симметричной согласованной нагрузке весьма удобны формулы (6.44) — (6.46) при условии, что $Z_0 \leqslant Z_0'$.

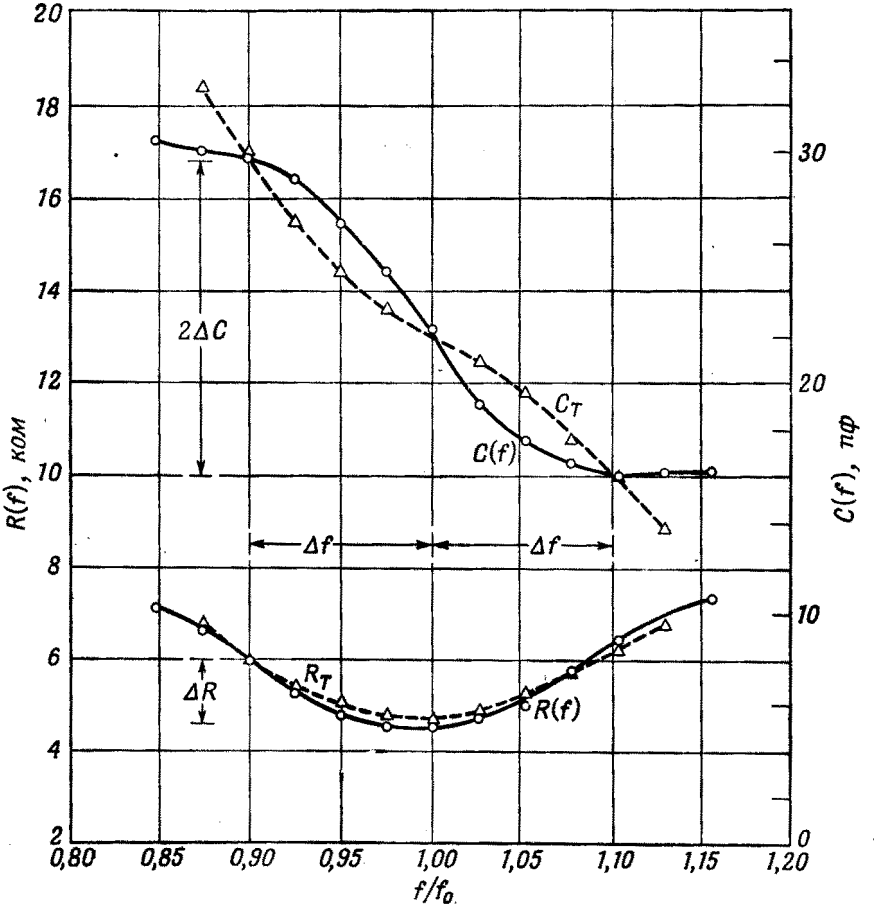
3. Получение широкополосной проводимости в согласующих цепях для пьезоэлектрических преобразователей

Как указывалось выше, главное преимущество линии задержки, работающей на симметричную согласованную нагрузку, состоит в достижении максимального подавления сигналов с утроенным временем прохождения. В описанных выше в этом параграфе схемах реактивное сопротивление преобразователя компенсируется только на резонансной частоте и поэтому максимальное подавление ложных сигналов обеспечивается лишь в узкой полосе вблизи резонансной частоты (см., например, фиг. 176 и 184). Здесь мы рассмотрим согласующую цепь, разработанную Янгом [1]). Эта цепь обеспечивает согласование активной механической проводимости и приближенное согласование реактивной механической проводимости преобразователя в пределах 25% полосы пропускания при коэффициенте отражения на концах преобразователя, меньшем 10%.

Характеристики проводимости преобразователя можно выразить через сопротивление $R(f)$ и параллельно включенную емкость $C(f)$, которые зависят от частоты. Типичный вид этих зависимостей показан на фиг. 199, где Δf — половина ширины полосы пропускания, ΔR — изменение сопротивления, а ΔC — половина изменения емкости в пределах полосы. Схема построена таким образом, что полная проводимость на выходе преобразователя равна величине, комплексно сопряженной проводимости преобразователя. Форма кривой $R(f)$ подбирается с помощью последовательной резонансной цепочки, нагруженной внешним сопротивлением R_E (фиг. 200, *а*). Минимальное значение сопротивления R_E

[1]) E. H. Young, частное сообщение (1962).

трансформируется до минимального значения сопротивления преобразователя R_L с помощью эквивалентного трансформатора, состоящего из емкостей C_2, C_3 и $-C$ (фиг. 200, *б*). Отрицательная



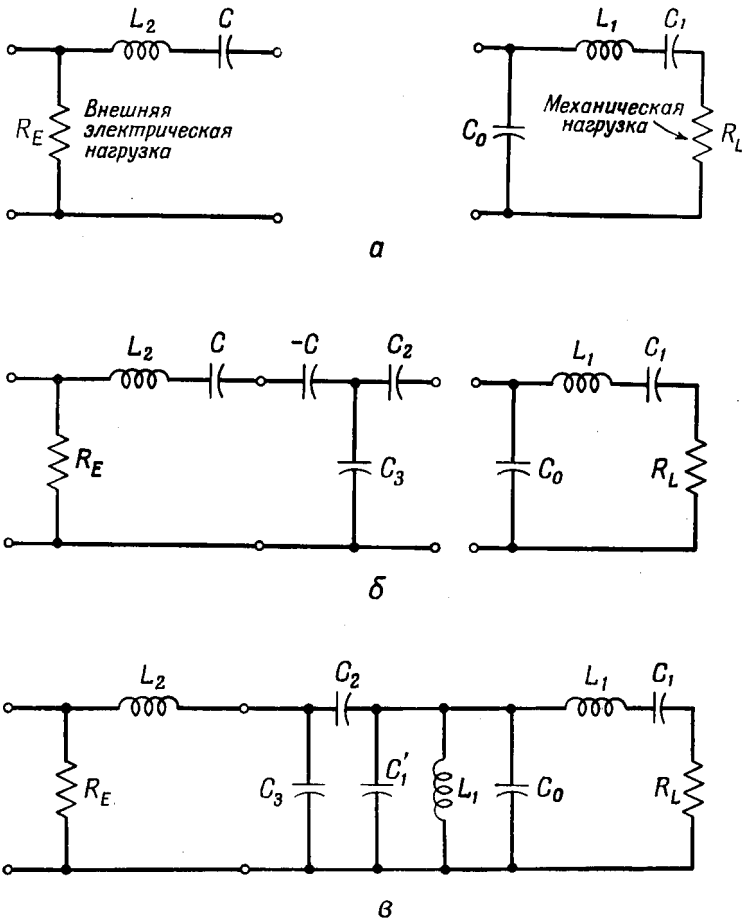
Фиг. 199. Типичные кривые полной проводимости для преобразователя из керамики $KNaNbO_3$ и широкополосной согласующей цепи (по Янгу).
Сплошные линии — преобразователь; пунктирные — согласующая цепь.

емкость — C выбирается равной емкости C в последовательной резонансной ветви; таким образом, обе емкости компенсируют друг друга.

Полная емкость на выходе преобразователя равна теперь

$$C_T = C^* + C_0 + C_1' + \frac{C_3 C_2}{C_3 - C_2}, \qquad (6.48)$$

где C^* — эффективная емкость, соответствующая реактивной механической проводимости последовательной резонансной цепи, показанной на фиг. 200, *а*, после пересчета ее на выход



Ф и г. 200. Согласующая цепь преобразователя (по Янгу).

а — последовательная цепь *RLC* для согласования действительной части проводимости преобразователя; *б* — включение эквивалентного трансформатора; *в* — полная согласующая цепь с преобразователем.

трансформатора, C_0 — параллельно включенная емкость преобразователя, C_1' — произвольная добавочная емкость и $C_3C_2/(C_3 - C_2)$ — эффективная емкость трансформатора. Шунтирующая индуктивность вводится для того, чтобы обеспечить резонанс цепи с емкостью C_T на частоте f_0. Шунтирующая емкость

C_1' подбирается таким образом, чтобы наклон емкостной кривой в точке f_0 был равен наклону функции $C(f)$. Полная цепь имеет вид, показанный на фиг. 200, *в*. Параметры этой цепи определяются следующими формулами:

$$L_2=\frac{R_E\sqrt{K'}}{4\pi\Delta f}, \qquad C_T=\left\{\frac{\sqrt{K'}}{2\pi f_0 R_L}+\Delta C\right\}\frac{f_0}{2\Delta f},$$
$$C=\frac{1}{(2\pi f_0)^2 L_2}, \qquad L_1=\frac{1}{(2\pi f_0)^2 C_T}, \tag{6.49}$$
$$C_2=\sqrt{K}C, \qquad C_1'=C_T-C_0-\frac{C_3C_2}{C_3-C_2},$$
$$C_3=(1-\sqrt{K})C,$$

где R_E — внешняя электрическая нагрузка, R_L — сопротивление преобразователя на резонансной частоте f_0, $K=R_E/R_L$ — коэффициент трансформации проводимостей, $K'=\Delta R/R_L$ — относительное изменение сопротивления преобразователя. Обычно кривая зависимости C_T от частоты пересекает кривую $C(f)$ в трех точках: при частоте f_0 и вблизи каждой границы полосы. В пределах между двумя последними точками согласование оказывается очень хорошим, в то время как для частот, находящихся вне этих пределов, рассогласование быстро увеличивается.

Пунктирными линиями на фиг. 199 показаны зависимости R_T и C_T, полученные экспериментально с помощью схемы, рассчитанной по формулам (6.49); измеренные зависимости $R(f)$ и $C(f)$ для преобразователя показаны сплошными линиями. Приведенные данные относятся к керамическому преобразователю из $KNaNbO_3$. При такой нагрузке было достигнуто подавление ложных сигналов, показанное на фиг. 188. Некоторые ложные сигналы, которые наблюдаются, обусловлены возникновением других нормальных волн. Однако в отсутствие согласующей цепи, представленной на фиг. 200, *в*, в пределах большей части полосы пропускания самыми большими по амплитуде были бы сигналы с утроенным временем прохождения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Meitzler A. H., IRE Trans. on Ultrasonics Eng. **UE-6**, 1 (1957).
2. Bradfield G., Electronic Eng., 20, 74 (1948).
3. Bradfield G., Acustica, 4, 171 (1954).
4. Scarrott G. G., Naylor R., Proc. Inst. Electr. Eng., **103B**, 497 (1956).
5. Thurston R. N., Tornillo L. M., IRE Nat. Conv. Record, 6, pt. 2, 109 (1958).
6. Meitzler A. H., IRE Trans. on Ultrasonics Eng., **UE-7**, 35 (1960).
7. May J. E., Jr., IRE Trans. on Ultrasonics Eng., **UE-7**, 44 (1960).

8. Meeker T. R., IRE Trans. on Ultrasonics Eng., UE-7, 53 (1960).
9. Fitch A. H., Journ. Acoust. Soc. Amer., 32, 939 (1960); 35, 706 (1963).
10. Fitch A. H., Journ. Acoust. Soc. Amer., 33, 1658 (1961).
11. Fitch A. H., Journ. Acoust. Soc. Amer., 35, 709 (1963).
12. Ridenour L., Radar Systems Engineering, New York, 1947, p. 626.
13. Arenberg D. L., Journ. Acoust. Soc. Amer., 20, 1 (1947).
14. Bickel H. J., IRE WESCON Conv. Record, 3, Pt. 8, 59 (1959).
15. Bieling C. A., Proc. Electronic Components Symposium (1957), p. 62.
16. Bieling C. A., Thomas N. C., Journ. Acoust. Soc. Amer., 33, 1658 (1961).
17. Millership R., Robbins R. C., De Barr A. E., Brit. Journ. Appl. Phys., 2, 304 (1951).
18. Rothbart A., Bibliography on Magnetostrictive Delay Lines, IRE Trans. on Electronic Computers, EC-10, 285 (1961).
19. Rothbart A., Proc. IRE, 48, 1486 (1960).
20. Bradburd E. M., Electr. Commun., 28, 46 (1951).
21. Aaronson D. A., James D. B., IRE Trans. on Electronic Computers, EC-9, 329 (1960).
22. Darlington S. J., US Patent No. 2 678 997 (1954).
23. Klauder J. R., Price A. C., Darlington S. J., Albersheim W. J., Bell System Techn. Journ., 39, 745 (1960).
24. Cady W. G., Piezoelectricity, New York, 1946 p. 449 (см. перевод: У. Кэди, Пьезоэлектричество и его практические применения, М., 1949).
25. Mason W. P., Electromechanical Transducers and Wave Filters, Princeton, New Jersey, 1948, p. 404.
26. Mason W. P., US Patent No. 2 880 334 (1955).
27. Thurston R. N., US Patent No. 2 838 695 (1955).
28. Thurston R. N., US Patent No. 2 838 696 (1955).
29. Thurston R. N., Andreatch P., IRE Nat. Conv. Record, 3, pt., 9, 45 (1955).
30. Thurston R. N., Andreatch P., Journ. Acoust. Soc. Amer., 29, 16 (1957).
31. May J. E., IRE Trans. on Ultrasonic Eng., UE-7, 7 (1960).
32. Fine M. E., Bell Lab. Record, 30, 345 (1952).
33. Rothbart A., Proc. IRE, 47, 1153 (1959).
34. Onoe M., Journ. Inst. Electr. Commun. Eng. Japan, 44, 29 (1961) (на японском языке).
35. Rothbart A., Brown A. J., Electronics, 34, 55 (1962).
36. Rothbart A., Brown A. J., Electronics, 35, 54 (1962).
37. Mebs R. W., Darr J. H., Grimsley J. D., Journ. Res. Nat. Bur. Stand. 51, 209 (1953).
38. Voznak E., Mebs R. W., IRE Trans. on Ultrasonics Eng., UE-3, 32 (1955).
39. Clark C. A., Proc. Inst. Electr. Eng. (pt. B), Suppl. 22, 389 (1961).
40. Fitch A. H., IRE Nat. Conv. Record, 8, pt. 6, 284 (1960).
41. Love A. E. H., The Mathematical Theory of Elasticity, New York, 1944, p. 453 (см. перевод более раннего издания: А. Ляв, Математическая теория упругости, М., 1935).
42. Meitzler A. H., Journ. Acoust. Soc. Amer., 33, 1658 (1961).
43. Meitzler A. H., IRE Trans. on Ultrasonics Eng., UE-9, 30 (1962).
44. Mason W. P., McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., 19, 464 (1947).
45. Bhatia A. H., Journ. Acoust. Soc. Amer., 31, 16 (1959).
46. May J. E., Journ. Acoust. Soc. Amer., 32, 1512 (1960).
47. Shaw E. A. G., Journ. Acoust. Soc. Amer., 28, 38 (1956).

48. Tu L. Y., Sauer J. A., Brennen J. N., Journ. Acoust. Soc. Amer., 27, 550 (1955).
49. Abramson H. N., Journ. Acoust. Soc. Amer., 29, 42 (1957).
50. Meitzler A. H., Journ. Acoust. Soc. Amer., 33, 435 (1961).
51. Williams R. C., IRE Trans. on Ultrasonics Eng. UE-7, 16 (1959).
52. Meeker T. R., IRE Intern. Conv. Record, 9, pt. 6, 327 (1961).
53. Fabian E. L., Journ. Acoust. Soc. Amer., 33, 1658 (1961).
54. Jenkins W., Low Temperature Coefficient Ultrasonic Delay Lines, Presented at the National Ultrasonic Symposium, Stanford, California, August 17, 1959.
55. Jenkins W., Electromechanical Design, March 1960, p. 14.
56. Meitzler A. H., Journ. Acoust. Soc. Amer., 34, 444 (1962).
57. Mindlin R. D., An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates, Monograph for Contract DA-36-039-SC-56772, US Signal Corps, Fort Monmouth, New Jersey, 1955.
58. Kane T. R., Mindlin R. D., Journ. Appl. Mech., 23, 277 (1956).
59. Medick M. A., Mindlin R. D., Journ. Appl. Mech., 26 (1959).
60. Medick M. A., Mindlin R. D., Trans. ASME, 81, Ser. E, 561 (1959).
61. Herrmann G., Mindlin R. D., Proc. 1st US Nat. Congr. Appl. Mech., Chicago, 1951, p. 187.
62. Fagen M. D., Proc. Nat. Electr. Conf., Chicago, 7, 380 (1951).
63. May J. E., Journ. Acoust. Soc. Amer., 26, 347 (1954).
64. Konig W. F., Lambert L. B., Schilling D. L., IRE WESCON Conv. Record, 5, Paper 37/3 (1961).
65. Thurston R. N., IRE Trans. on Ultrasonics Eng., UE-7, 16 (1960).
66. Epstein H., Stram O., Rev. Sci. Instr., 24, 231 (1953).
67. Epstein H., Stram O., IRE Trans. on Ultrasonics Eng., UE-6, 1 (1957).
68. Lyon J. A. M., Thompson T. B., IRE Trans. on Ultrasonics Eng., UE-4, 8 (1956).
69. Rothbart A., Rosenberg L., IRE Trans. on Ultrasonics Eng., UE-6, 32 (1957).
70. Williams R. C., IRE Trans. on Ultrasonics Eng., UE-7, 16 (1959).
71. Onoe M., Journ. Acoust. Soc. Amer., 34 1247 (1962).
72. Egerton L., Dillon D. M., IRE Nat. Conv. Record, 7, pt. 6, 219 (1959).
73. Berlincourt D., Jaffe B., Krueger H. A., IRE Trans. on Ultrasonics Eng., UE-7, 1 (1960).

Глава 7

УЛЬТРАЗВУКОВЫЕ ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ С МНОГОКРАТНЫМИ ОТРАЖЕНИЯМИ

У. МЭЗОН[1])

§ 1. ИСТОРИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Во время второй мировой войны возникла необходимость в разработке простых и дешевых устройств, предназначенных для накопления радиолокационных сигналов. В результате проведенных исследований были созданы твердые линии задержки, которые использовались главным образом в индикаторах движущихся целей радиолокационных устройств [1]. В этом случае назначение линий задержки состояло в том, чтобы сохранять все отраженные сигналы, полученные от одного зондирующего импульса, для их сравнения с отражениями последующих импульсов. Если отражающий объект неподвижен, то его изображение на экране может быть ослаблено приблизительно на 40 *дб* путем изменения фазы сравниваемых сигналов на 180°. При появлении движущегося объекта подобного уничтожения сигналов не происходит, так как отраженный сигнал, соответствующий одному зондирующему импульсу, не идентичен сигналу, полученному при отражении следующего зондирующего импульса. Частота повторения импульсов выбирается равной величине, обратной времени задержки сигналов в линии. Однако в некоторых случаях, когда необходимо устранить влияние температурных изменений задерживающей среды, частота повторения импульсов регулируется путем пропускания через линию задержки зондирующих импульсов.

Линии задержки с многократными отражениями были созданы в результате работ, проведенных большим числом исследователей. Так, в Лаборатории излучений Массачусетского технологического института [2—4] ряд сотрудников исследовали свойства различных материалов с точки зрения распространения в них

---

[1]) «Белл телефон леборатриз», Мерри-Хилл, Нью-Джерси.

упругих колебаний, преобразование волн на отражающих поверхностях, а также разрабатывали технологию присоединения пьезоэлектрических кристаллов при изготовлении линий задержки. В результате был создан ряд линий с многократными отражениями из плавленого кварца, работавших в области частот 15—30 *Мгц* и имевших задержку до 1000 *мксек*, ширину полосы пропускания от 3 до 4 *Мгц*, и общие потери в пределах 40—60 *дб*.

Сотрудники фирмы «Белл телефон леборатриз» провели исследования распространения продольных и сдвиговых волн в металлах, стеклах и плавленом кварце при различных частотах [5, 6]. Эти работы позволили установить величину потерь энергии, связанных с рассеянием волн на границах кристаллических зерен материала, в результате чего был определен диапазон частот, в котором в качестве задерживающей среды можно использовать металлы. Исследования показали также, что в плавленом кварце эти потери незначительны [7]. Было показано [8], что для линий задержки наиболее удобны сдвиговые волны, так как, если поляризация направлена параллельно отражающей поверхности, эти волны отражаются только в виде сдвиговых волн. При исследовании формы линий задержки было найдено, что линии с звукопроводом клиновидной формы [9, 10] в наибольшей степени свободны от ложных отражений (уровень последних на 45 *дб* ниже полезного сигнала) по сравнению с другими типами линий с многократными отражениями. Было показано, однако, что если при оценке учитывать не только этот показатель, но также удельную задержку на единицу площади звукопровода, то наилучшими характеристиками обладают линии с звукопроводом многоугольной формы [4, 11] (см. § 3).

Проводились широкие исследования по выбору материалов для преобразователей и способов связи преобразователей с звукопроводом. При использовании тонкослойной пайки потери для кварцевых преобразователей достигают 28 *дб*. Несколько лучшие результаты [12] дает использование переходного полуволнового слоя с сопротивлением, составляющим 0,2 сопротивления кварца. Наличие такого переходного слоя расширяет также полосу пропускания. Однако трудности настройки таких слоев не позволили использовать их в промышленных изделиях. Было найдено, что из преобразователей, работающих на сдвиговых колебаниях, наименьшими потерями обладают преобразователи, изготовленные из пьезокерамических материалов, обладающих высоким коэффициентом электромеханической связи, таких, как титанат бария, титанат-цирконат свинца или ниобат калия-натрия [13, 14]. Наибольшие трудности возникают для пластин, рассчитанных на частоты выше 15 *Мгц*. При таких частотах сами преобразователи и согласующие слои оказываются очень тон-

кими, поэтому технология изготовления становится весьма сложной независимо от способа соединения.

С помощью разработанной технологии были созданы линии задержки с удовлетворительными характеристиками для накопления импульсов длительностью порядка 0,1 *мксек* и их воспроизведения через время, достигающее 3000 *мксек*. При таких параметрах линии задержки емкость памяти составляет приблизительно 30 000 бит. Как указано в § 3, подобные линии широко используются в радиолокаторах, импульсных дешифраторах и цифровых вычислительных машинах.

§ 2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

1. Затухание звука в твердых телах

Несомненно, самым удобным материалом для передачи звуковых волн является металлическая проволока или лента. Такой материал, как указано в гл. 5, § 2, п. 2, имеет внутреннее трение Q^{-1} порядка 10^{-5}; путем соответствующего выбора сплава можно получить температурный коэффициент скорости, мало отличающийся от нуля. Однако диапазон частот, в котором может использоваться подобный материал, ограничен вследствие рассеяния звука на границах кристаллических зерен. Для алюминиевого сплава марки 5052-H32 с малыми размерами зерен затухание определяется следующим выражением:

$$\alpha = A_1 f + A_2 f^4, \tag{7.1}$$

где

$$A_1 = 10^{-10} \text{ непер} \cdot \text{сек}/\text{см}, \qquad A_2 = 50 \cdot 10^{-32} \text{ непер} \cdot \text{сек}^4/\text{см}.$$

Для линий задержки потери, связанные с рассеянием энергии на кристаллитах, не должны превышать 50% полных потерь. Это связано с тем, что такие потери приводят к искажениям сигнала, очень сильно меняющимся с частотой. Кроме того, многократные отражения рассеянных лучей создают хаотические помехи в конце принимаемых импульсов, которые ограничивают отношение сигнал/шум. Поэтому такие материалы могут использоваться для частот не выше 6 *Мгц*. При средней частоте 5 *Мгц* линия с задержкой 1000 *мксек* имеет полные потери около 0,5 *непер* (4,34 *дб*); поэтому такие линии задержки очень удобны для не слишком коротких импульсов (см. гл. 6).

Длительность импульса Δt (*сек*) определяется шириной полосы пропускания линии задержки Δf (*гц*) согласно уравнению

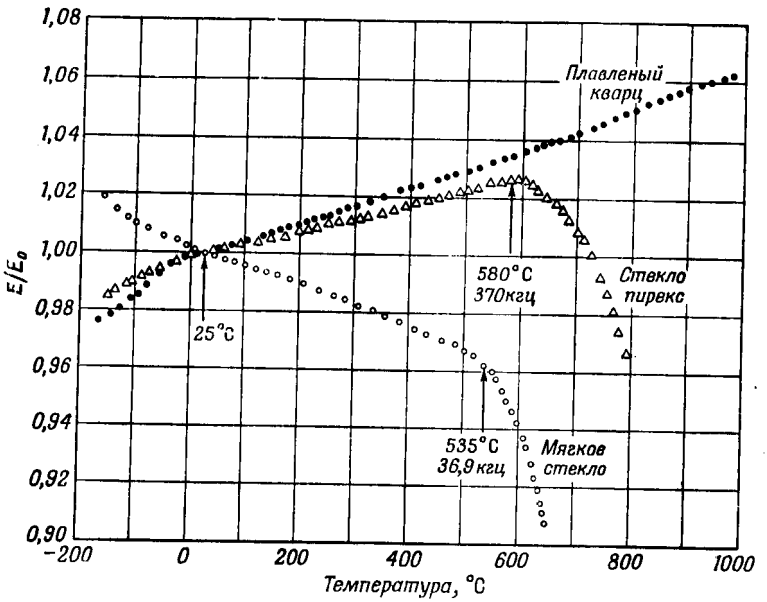
$$\Delta t = \frac{1{,}4}{\Delta f}. \tag{7.2}$$

Под полосой пропускания обычно понимают полосу, ограниченную частотами, для которых потери возрастают на 3 *дб* по сравнению с их минимальным значением. Нетрудно подсчитать, что для импульсов длительностью 0,1 *мксек* ширина полосы пропускания должна составлять по крайней мере 14 *Мгц*. Ширина полосы пропускания обычно определяется коэффициентом связи преобразователя и переходным слоем. Как правило, получить полосу пропускания, которая составляла бы более 50% средней частоты, весьма трудно. Следовательно, чтобы обеспечить задержку таких коротких импульсов, необходимо использовать частоты около 25 *Мгц*. Такие высокие частоты исключают возможность применения в линиях задержки металлов или любых других материалов, имеющих зернистую структуру или обладающих мелкими неоднородностями. Наряду с этим для таких высоких частот затухание должно быть малым, т. е. могут использоваться лишь материалы с очень малыми значениями Q^{-1}.

Исследования существующих материалов показали, что этим требованиям удовлетворяют лишь диэлектрические или полупроводниковые кристаллы, а также некоторые типы стекол, например плавленый кварц. Хотя кристаллы обладают самыми низкими потерями и, кроме того, для них можно получить очень малые значения температурного коэффициента скорости, их применение весьма ограничено. Это объясняется их высокой стоимостью, а также сравнительно малыми размерами образцов по сравнению с теми, которые необходимы для изготовления линий задержки. Наиболее подходящим материалом для линий задержки являются стекла, такие, как плавленый кварц, викор и некоторые другие типы стекла, обладающие нулевым температурным коэффициентом скорости. Наиболее широкое применение в линиях задержки получил плавленый кварц.

При комнатной температуре скорость продольных волн в плавленом кварце равна $5{,}968 \cdot 10^5$ *см/сек*, а скорость сдвиговых волн равна $3{,}764 \cdot 10^5$ *см/сек*. Для плавленого кварца изменение скорости в зависимости от температуры значительно меньше, чем для большинства металлов. Графики зависимости модуля Юнга от температуры, приведенные на фиг. 201, показывают, что для этого типа волн изменение скорости составляет приблизительно $7 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$. Это значение очень близко к температурному коэффициенту скорости для сдвиговых волн, причем температурный коэффициент скорости для продольных волн несколько больше. Кроме того, кривые на фиг. 201 показывают, что путем введения добавок в плавленый кварц можно изменить знак температурного коэффициента и, что особенно важно, можно получить нулевой температурный коэффициент скорости. Эти изменения связаны с увеличением внутреннего трения. Кварцевые стекла с добав-

ками окиси свинца и малыми присадками окиси титана имеют очень малый температурный коэффициент, составляющий $\pm (1—2)\cdot 10^{-6}$, однако добротность таких стекол не превышает 2000.



Фиг. 201. Зависимости модуля упругости E, нормированного по отношению к значению при температуре 25° С, от температуры для плавленого кварца и двух сортов стекла.

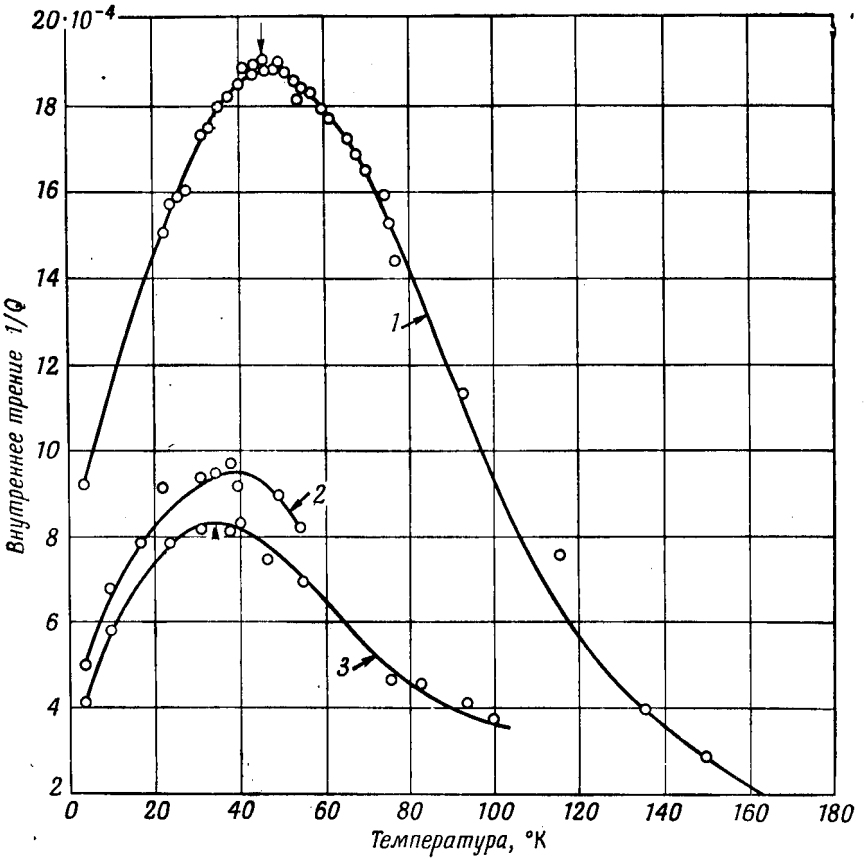
Потери в плавленом кварце измерить трудно, но наиболее тщательно проведенные исследования [7, 15, 16] показывают, что затухание определяется выражением

$$A = (3\cdot 10^{-4} f + 1{,}9\cdot 10^{-5} f^2)\ дб/см, \qquad (7.3)$$

где f — частота в мегагерцах. Измерения, проведенные для продольных волн, показали, что добротность Q приблизительно равна 150 000. Для линии с задержкой 1000 *мксек*, которая соответствует длине пути в звукопроводе 600 *см*, потери на частоте 25 *Мгц* составляют около 11,5 *дб*. Для сдвиговых волн измерения с такой степенью точности не производились, однако, по-видимому, при одинаковом времени задержки потери имеют тот же порядок величины. Таким образом, используя сдвиговые волны с более низкой скоростью распространения, можно на 37% сократить длину линии (по сравнению с линией на продольных колебаниях) при приблизительно одинаковых потерях. Кроме того,

при сдвиговых колебаниях размеры излучателя по отношению к длине волны увеличиваются, в результате чего снижаются потери энергии вследствие дифракции.

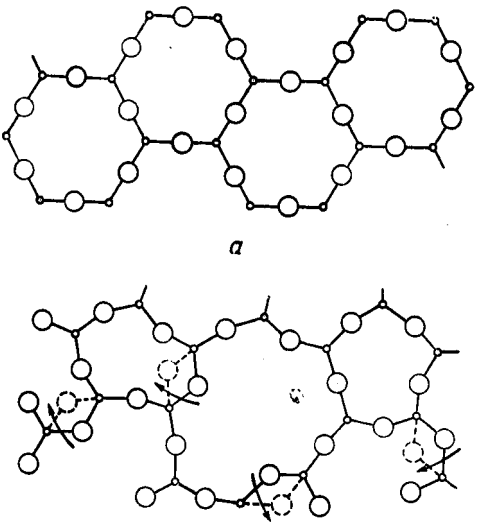
Плавленый кварц обладает очень большими потерями при низких температурах, что видно из графиков на фиг. 202, где



Ф и г. 202. Зависимость внутреннего трения от температуры для плавленого кварца при трех различных частотах.

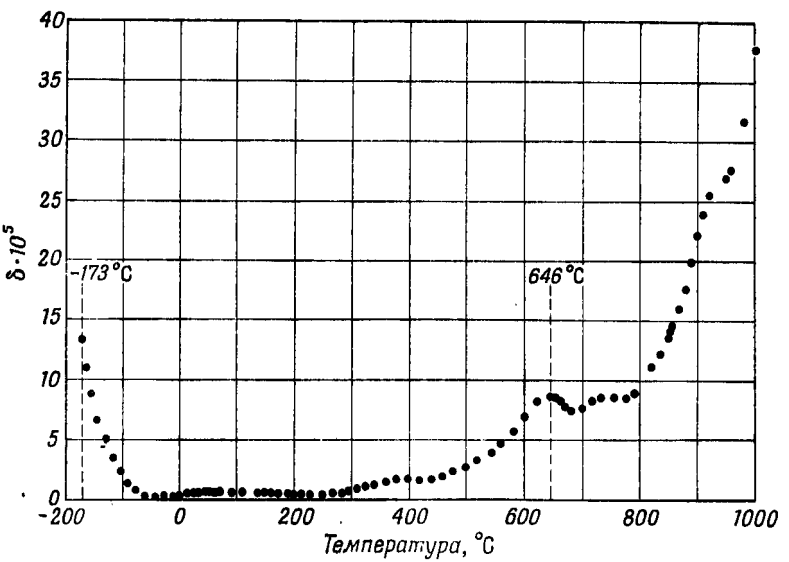
Самая высокая частота относится к сдвиговым волнам, а более низкие — к крутильным волнам. *1*—20 *Мгц* (Бёммель); *2* — 201 *кгц* (Файн); *3* — 66 *кгц* (Файн).

показаны результаты измерений для сдвиговых и крутильных волн в диапазоне от 66 *кгц* до 20 *Мгц*. Поскольку температура максимума потерь увеличивается с повышением частоты, очевидно, что этот процесс является релаксационным; однако этот максимум очень широк. Было проведено исследование [17, 18]



Ф и г. 203. Модель для объяснения процессов внутреннего трения в плавленом кварце (по Андерсону и Бёммелю).

а — регулярная структура кристалла; *б* — цепи связей, в которых атомы кислорода занимают различные положения равной энергии.



Ф и г. 204. Зависимость декремента затухания δ ($\delta/\pi = Q^{-1}$) для плавленого кварца от температуры (по Марксу и Сивертсену).

этого максимума и найдено, что требуемая энергия активации меняется в пределах от менее чем 100 *кал/моль* до 12 *ккал/моль*.

Такой широкий диапазон изменения энергии активации объясняется с помощью модели, показанной на фиг. 203. Предполагается, что произвольная структурная цепочка имеет множество связей Si — O — Si, которые расположены не точно по прямой, а отклоняются от прямой на углы до 15° и даже больше. С помощью рентгеновского анализа было подтверждено, что это отклонение составляет по крайней мере ±5°. Существуют два почти эквивалентных состояния, которые показаны на фиг. 203 пунктирными линиями; при тепловом возбуждении атомы кислорода перемещаются между этими двумя устойчивыми положениями. При создании в стекле периодически меняющихся механических напряжений (в особенности сдвиговых, которые оказывают наибольшее влияние), если частота совпадает с частотой внутренних (температурных) колебаний, то затухание звука оказывается максимальным. В этом случае говорят о релаксационном характере поглощения. Большой диапазон значений энергии активации обусловлен большим различием углов между связями; можно показать, что энергия, необходимая для того, чтобы увеличить расстояние между двумя атомами кремния и перевести атом кислорода в другое устойчивое положение, пропорциональна квадрату угла отклонения связей между двумя атомами кремния от прямой. Описанная модель более подробно рассмотрена Бёммелем в одном из последующих томов этой серии.

Предполагается, что внутреннее трение при более высоких температурах также можно объяснить с помощью этой модели. На фиг. 204 показаны результаты измерений на частоте 37 *кгц* в широком диапазоне температур [19]. В интервале до 200° С внутреннее трение почти не зависит от температуры. Кроме того, добротность Q не зависит от частоты, так как декремент затухания имеет тот же порядок величины, что и при измерениях на высоких частотах, а декремент, деленный на π, равен Q^{-1}. При более высоких температурах дополнительные потери на внутреннее трение, по-видимому, обусловлены релаксацией вследствие миграции ионов.

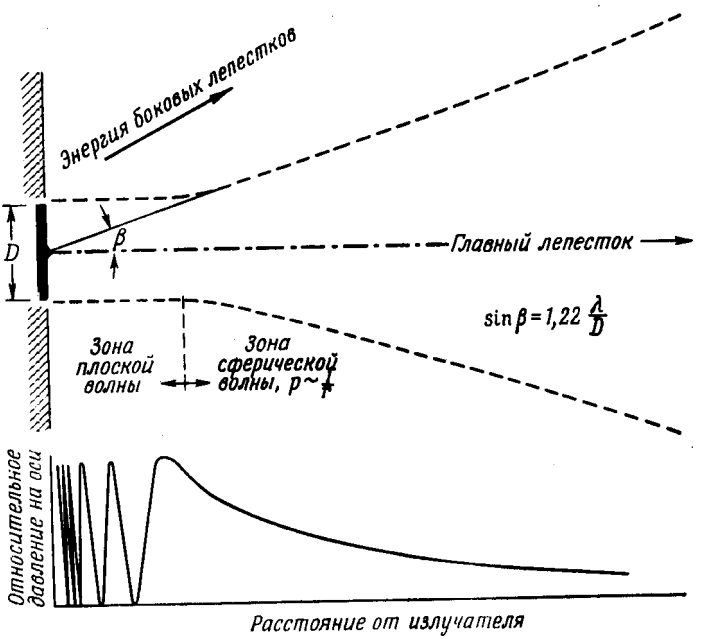
2. Расширение пучка

Другой причиной потерь в линиях задержки с многократными отражениями является расширение ультразвукового пучка по мере удаления от преобразователя. Все проведенные до сих пор вычисления влияния этого дифракционного эффекта основаны на предположении о распространении звука в идеальной жидкой среде, т. е. не учитывают существования продольных и сдвиговых волн, которое фактически имеет место в твердых телах. Решение

для этого случая показывает, что вблизи излучателя существует зона Френеля, в которой волны имеют плоский фронт, как показано на фиг. 205. Зона Френеля (ближнее поле) простирается на расстояние

$$d_0 \approx \frac{R^2}{2\lambda}, \tag{7.4}$$

где R — радиус излучателя (предполагается, что он круглый) и λ — длина звуковой волны в среде. Вне зоны Френеля пучок



Ф и г. 205. Излучение круглого поршня.
Показана зона плоской волны (зона Френеля) и начало зоны расхождения пучка. Нижняя кривая показывает распределение звукового давления на оси излучателя.

начинает расходиться, причем угол расхождения β определяется из уравнения

$$\sin\beta = 1{,}22\,\frac{\lambda}{2R}. \tag{7.5}$$

Звуковое давление в расходящемся пучке уменьшается по мере удаления от излучателя обратно пропорционально расстоянию r. На фиг. 205 внизу показано распределение абсолютного давления вдоль оси, причем видно, что в зоне Френеля имеет место ряд максимумов и нулевых точек давления. Положения нулевых точек

определяются формулой

$$d = \frac{R^2 - n^2\lambda^2}{2n\lambda}, \qquad \text{где } n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{7.6}$$

Если при измерениях затухания и скорости звука в твердых телах используются расходящиеся пучки, то необходимо тщательно учитывать дифракционные эффекты, как указано в гл. 4. Чтобы определить действительные потери энергии в среде, необходимо из измеренных потерь вычесть величину, обусловленную дифракционными эффектами; такие вычисления проведены в работах [20, 21]. Примером служит график потерь, приведенный на фиг. 79.

Большинство линий задержки имеют достаточную длину, чтобы можно было пользоваться законом $p \sim 1/r$. Поэтому дополнительные потери могут быть приблизительно учтены с помощью отношения давлений

$$\frac{p}{p_0} \approx \frac{d_0}{d} = \frac{R^2}{2d\lambda} . \tag{7.7}$$

Другой фактор, который следует учитывать в связи с расширением пучка, заключается в том, что звуковая волна попадает не только на тот участок поверхности, где расположен приемный преобразователь. Это может привести к появлению ложных сигналов, приходящих на приемный преобразователь либо до, либо после основного сигнала. Этот эффект можно значительно ослабить с помощью нанесения поглощающего материала, такого, как, например, мягкий припой, на все поверхности, которые не предназначены для отражения или приема сигналов. Подобные поглощающие покрытия показаны на фиг. 209 для многоугольной линии задержки и на фиг. 210 для клиновидной линии задержки.

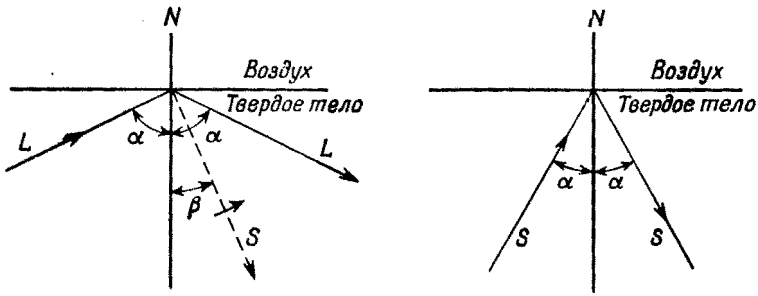
3. Отражение волн от плоских поверхностей

При падении продольной волны на плоскую поверхность под углом α она отражается под таким же углом α; кроме нее, возникает еще поперечная (сдвиговая) волна, движущаяся от поверхности под углом β (фиг. 206). Последний определяется на основании закона Снеллиуса

$$\frac{\sin\alpha}{\lambda_L} = \frac{\sin\beta}{\lambda_S}, \quad \text{или} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\lambda_L}{\lambda_S} = \frac{V_L}{V_S}, \tag{7.8}$$

где λ_L и V_L — длина волны и скорость распространения продольных волн, а λ_S и V_S — длина волны и скорость распространения поперечных волн. Связь между амплитудами этих волн рассматривается в гл. 1, § 5, п. 4 [4, 11].

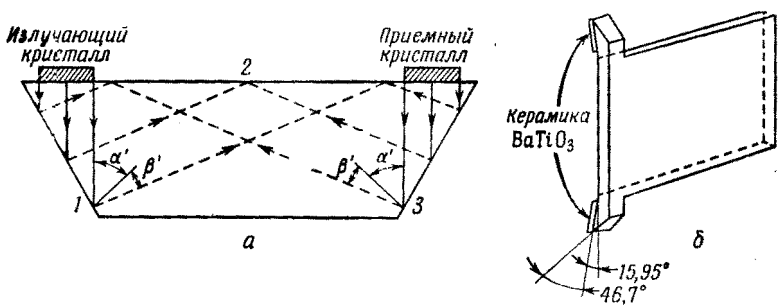
При определенном угле падения, который зависит от коэффициента Пауссона для данного материала, вся энергия оказывается сосредоточенной в поперечной волне, тогда как продольная волна полностью исчезает. Для плавленого кварца



Ф и г. 206. Отражение продольной и поперечной волн от поверхности раздела твердое тело — воздух (L — продольная волна, S — поперечная волна).

с коэффициентом Пуассона $\sigma = 0{,}17$ этот угол α составляет 46,7°; при этом поперечная волна отражается под углом $\beta = 27°27'$. Наоборот, если на поверхность под тем же углом падает поперечная волна, то вся энергия переходит в энергию продольных колебаний.

На фиг. 207, *а* показано, как этот эффект преобразования одних типов колебаний в другие используется в линиях задержки



Ф и г. 207. Применение эффекта полного преобразования продольных волн в поперечные в линии задержки, возбуждаемой преобразователем, работающим на продольных колебаниях.

на сдвиговых волнах [19], имеющих более низкую скорость распространения и малый температурный коэффициент, которые возбуждаются продольно колеблющимися кристаллами. На фиг. 207, *б* показана другая линия задержки [22], в которой использован

тот же принцип преобразования типов колебаний. В последней конструкции продольно колеблющаяся пьезокерамическая пластина, обладающая высоким коэффициентом электромеханической связи, использована для возбуждения волны, которая затем превращается в сдвиговую волну, распространяющуюся в линии. Для приема сигналов сдвиговая волна снова преобразуется в продольную. Однако с появлением керамических преобразователей, позволяющих возбуждать поперечные колебания [13, 14], потребность в таких линиях, требующих точной шлифовки поверхностей, осуществляющих трансформацию волн, отпала, и они в настоящее время не производятся.

Если поперечная волна отражается от поверхности, параллельной направлению поляризации волны (см. гл. 1, § 5, п. 4), то единственная отраженная волна будет тоже поперечной с тем же направлением поляризации и с углом отражения, равным углу падения. Все выпускаемые промышленностью линии задержки, описанные в следующем параграфе, основаны на этом принципе.

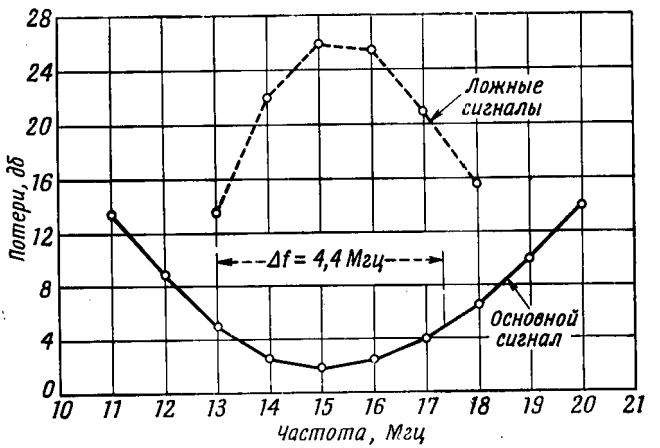
§ 3. РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ ЛИНИЙ ЗАДЕРЖКИ

1. Линии задержки с прямым ходом луча

Наиболее простая высокочастотная линия задержки представляет собой звукопровод в виде длинной призмы, на концах которой расположены два преобразователя. Такие линии обычно имеют не очень большую длину (до 30 *см*) и позволяют получать задержки до 60 *мксек*. Ввиду того что температурная стабильность является одним из важнейших параметров линии, а полные потери невелики вследствие малой длины, эти линии чаще всего изготовляются из стекла. Так как в настоящее время разработаны стекла с малым температурным коэффициентом скорости лишь для продольных волн, в таких линиях обычно применяются пьезокерамические преобразователи, колеблющиеся по толщине.

Поскольку потери в рассматриваемых линиях задержки невелики, чтобы получить удовлетворительное подавление ложных сигналов, необходимо обеспечить хорошее согласование преобразователя с линией задержки. На фиг. 208 показана зависимость потерь от частоты [12] для линии с задержкой 4 *мксек*, возбуждаемой преобразователем из керамики состава 80% $BaTiO_3$, 12% $PbTiO_3$, 8% $CaTiO_3$. Среднее значение потерь в полосе пропускания, равной 4,4 *Мгц* (при средней частоте 15 *Мгц*), составляет всего 2 *дб*. Согласующий переходный слой толщиной около 1/16 длины волны на частоте 15 *Мгц* изготовлен из эвтектического сплава свинец — олово — висмут. Соединения пре-

образователей с линией выполнены достаточно хорошо, а нагрузки оконечных цепей согласованы, поэтому уровень сигналов с утроенным временем прохождения, показанный на фиг. 208 пунктирной линией, составляет около —25 *дб* по отношению к основному сигналу. Ширину полосы пропускания можно увеличить при



Ф и г. 208. Потери и уровень ложных сигналов для линии с задержкой 4 *мксек*, возбуждаемой преобразователем из керамики состава 80% $BaTiO_3$, 12% $PbTiO_3$ и 8% $CaTiO_3$.

использовании керамики, обладающей более высоким коэффициентом электромеханической связи, такой, как титанат-цирконат свинца (см. гл. 3) или ниобат калия-натрия.

Такие линии задержки, обычно изготовляемые из стекла с малым температурным коэффициентом скорости, используются в системах импульсного кодирования [23] в качестве отметчиков времени в радиолокационных системах и в устройствах для борьбы с помехами, вызываемыми работой других станций. Большие потенциальные возможности использования [1]) открываются перед такими линиями задержки (с задержкой 60 *мксек*) в связи с началом работы Европейского цветного телевидения (система СЕКАМ). В этой системе линии задержки используются для накопления информации изображения одного из цветов для каждого кадра с последующей передачей ее на трубку в конце этого интервала времени. Для такой системы необходима полоса пропускания около 5,5 *Мгц*; ее можно получить при частоте 15 *Мгц*, применяя преобразователи из титаната-цирконата свинца. Потери в линиях из стекла с малым температурным коэффициентом, по-видимому,

[1]) C. M. van der Burgt, частное сообщение (1962).

будут невелики и составят примерно 10 *дб*, что вполне приемлемо для устройств подобного рода. Если эта область использования линий задержки будет развиваться, выпуск таких линий будет очень большим.

2. Свернутые и многоугольные линии задержки

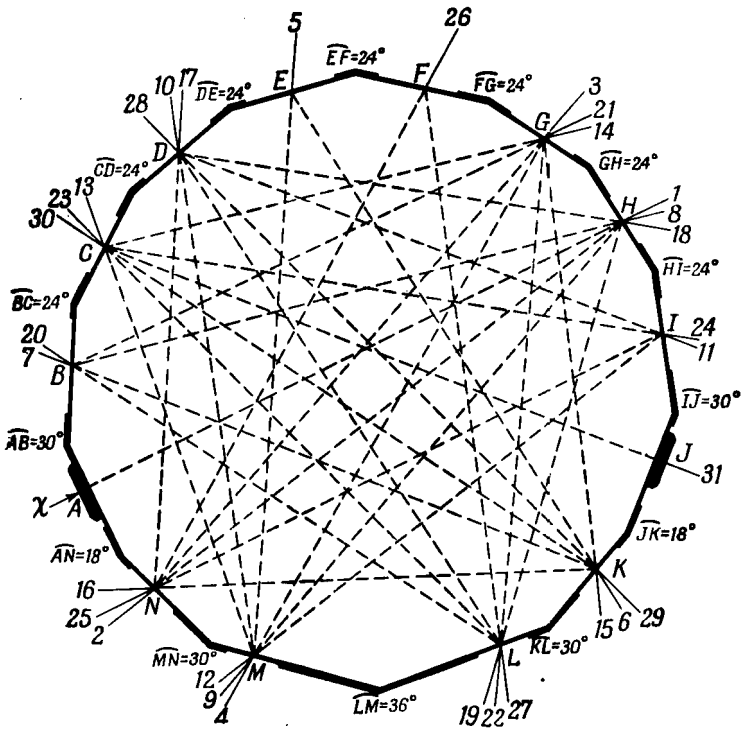
При увеличении времени задержки длина пути в звукопроводе становится слишком большой, чтобы можно было осуществить линию с прямым ходом луча. Например, для линий с задержкой 1 *мсек*, которые часто применяются в индикаторах движущихся целей радиолокационных станций, длина прямого звукопровода из плавленого кварца (при использовании поперечных волн) должна составлять 377 *см*.

Один из очевидных способов уменьшения габаритов линии заключается в том, чтобы сделать звукопровод из нескольких отрезков, соединенных между собой; для передачи сигнала из одного отрезка в другой на конце каждого отрезка необходимо поместить отражатели под углом 45°. Одна из таких линий описана в работе [8]. Конечно, можно было бы подобным образом изгибать линию многократно, однако после появления многоугольных линий с большим числом отражающих граней оказалось, что они при одинаковом времени задержки имеют меньшие размеры и более низкую стоимость, чем свернутые линии. Тем не менее, если необходимо получить отношение амплитуд основного и ложного сигналов больше 45 *дб*, единственный возможный способ состоит в использовании многосекционной свернутой линии с однократным прохождением импульса.

Многоугольные линии задержки были разработаны Аренбергом [4, 11]. В результате тщательных исследований возможных путей прохождения ультразвукового луча в твердом теле были найдены оптимальные формы многогранных призм из плавленого кварца для получения наибольшей длины пути в заданном объеме при наилучшем отношении амплитуд основного и ложных сигналов. Оказалось, что наилучшее сочетание этих основных показателей дают многоугольники с нечетным числом граней — 9, 15 или 21.

Возможности многогранных призм наилучшим образом использованы в линии задержки в форме призмы с 15 гранями (фиг. 209), получившей наиболее широкое распространение. В этой призме путь луча состоит из 31 отрезка. Импульс проходит последовательно все эти отрезки, отражаясь от 14 граней; пятнадцатая грань предназначена для установки излучателя. В такой линии с кварцевыми преобразователями (при задержке 1 *мсек*) потери на частоте 15 *Мгц* составляют 45 *дб*. Уровень ложных сигналов

ниже амплитуды основного сигнала на 40 *дб*, причем некоторые из них попадают на приемную пластину до основного импульса, а некоторые позже него. Полоса пропускания такой линии на уровне 3 *дб* равна 6 *Мгц*, вес линии около 400 *г*, объем призмы



Фиг. 209. Многоугольная линия задержки с многократными отражениями (по Аренбергу).

из плавленого кварца 205 *см*³, ее диаметр около 12,5 *см*. С помощью самых больших блоков из плавленого кварца (диаметром 43 *см*) удается получить задержку, достигающую 3,3 *мсек*.

Допустимые отклонения в положении отражающих граней (исходя из требования, чтобы прямой сигнал отличался от максимального значения не более чем на 1 *дб*) составляют 11,5 дуговых минут, в то время как шлифовальный круг можно установить с точностью в 5 дуговых секунд, а точность обработки углов в 12 дуговых секунд можно обеспечить без особых затруднений. Плавленый кварц для линий задержки должен быть оптического

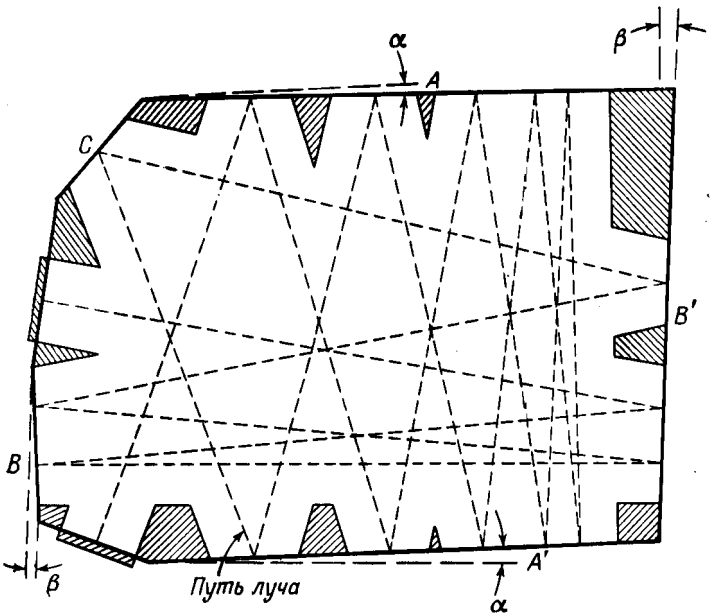
качества без трещин, пузырьков или внутренних напряжений. Первоначально такие требования приводили к серьезным затруднениям при производстве линий задержки, однако после введения ряда усовершенствований теперь эта проблема, по-видимому, решена.

Подобные линии задержки использовались главным образом в индикаторах движущихся целей радиолокационных устройств. Дополнительная информация, получаемая для неподвижных или медленно движущихся объектов, таких, как морские волны, гарантирует этим устройствам широкое применение.

В связи с разработкой различных вычислительных машин и аппаратов для обработки данных к существующим линиям задержки предъявляются очень высокие требования. Высокая скорость вычислений, потребность в увеличении емкости памяти и стремление уменьшить время считывания привели к тому, что начали применяться широкополосные и сравнительно короткие линии задержки [24]. Такие линии задержки, разработанные на основании описанных выше методов, являются важными элементами запоминающих устройств для вычислительных машин и аппаратов для обработки данных.

3. Клиновидные линии задержки

Клиновидные линии задержки [9, 10] не обладают столь высоким отношением времени задержки к весу линии, как многоугольные линии, описанные выше, однако они более перспективны в том отношении, что позволяют получать лучшее разделение основных и ложных сигналов. Наиболее опасным типом ложных импульсов в линиях задержки являются дополнительные импульсы, появляющиеся в результате расширения пучка. Влияние этих импульсов может быть уменьшено с помощью нанесения поглощающего материала (типа мягкого припоя) на те поверхности, на которые нерасширенный пучок не попадает. Применение поглощающего материала показано для многоугольной линии на фиг. 209. Клиновидная линия, показанная на фиг. 210, особенно удобна с точки зрения уменьшения уровня ложных сигналов. Это связано с тем, что приемный кристалл можно поместить в такой области, куда последующие отражения попадают в наименьшем количестве. На фиг. 210 показаны конструкция линии и путь ультразвукового луча, который сначала идет в одном направлении, а затем движется обратно. Эффект двойного клина можно получить, если изменить движение луча на обратное в точке C. В точке приема энергия пучка поглощается приемным кристаллом. Так как луч пересекает призму только 17 раз, вместо 31, как это имеет место в призме с 15 гранями, для одинако-



Фиг. 210. Линия задержки клиновидного типа (по Мак-Скимину). Приблизительные размеры линии для задержки 500 *мксек* 100 × 137 *мм*.

вого времени задержки объем кварцевого бруска должен быть увеличен на 80%. Поэтому линии такого типа не нашли широкого применения.

§ 4. ПОСЛЕДУЮЩИЕ РАБОТЫ И ДАЛЬНЕЙШИЕ УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ЛИНИЙ ЗАДЕРЖКИ

В кратком обзоре свойств твердых линий задержки, приведенном в предыдущем параграфе, не упоминаются многие важные работы, проведенные в этой области за последние несколько лет. Для тех, кто интересуется этим вопросом, мы даем здесь ссылки на соответствующие работы.

Пеннел [25] рассмотрел методы получения плавленого кварца, методы проверки материала и сорта материала, которые могут быть использованы при производстве линий задержки.

Как и следовало ожидать, наличие внутренних границ, свойственных структуре материала линий задержки, приводит к искажениям передаваемых импульсов. Расчет таких искажений приведен в работе Сеттона [26]. Когда такие линии используются в запоминающих устройствах с рециркуляцией, которые экви-

валентны линиям с очень большой длиной пути, результирующие искажения могут оказаться очень большими. В связи с этим Фасс и Ловер [27] рассмотрели метод использования электрических схем для уменьшения результирующих искажений.

Значительное число исследований, связанных с разработкой твердых линий задержки, проведено лабораторией электроники Колумбийского университета. Работа велась по трем основным направлениям. Первое направление относится к разработке технологии соединения линий задержки с тонкими преобразователями, позволяющей получать линии с воспроизводимыми параметрами — полосой пропускания, величиной вносимых потерь, коэффициентом отражения [28]. Второе направление, связанное с разделением импульсов и нахождением оптимальных вариантов путей луча в линиях задержки, имело своей целью уменьшить уровень ложных сигналов [29]. Работа сводилась в основном к определению наилучших размеров отражающих поверхностей и углов, под которыми они расположены. Третье направление связано с изучением структуры ультразвукового пучка в зависимости от метода присоединения преобразователя к звукопроводу.

Усовершенствованные методы присоединения преобразователя изложены в работе [30]; там же дан расчет влияния толщины и акустического сопротивления переходных слоев.

Высокочастотные линии задержки (250 *Мгц*) на кварцевых кристаллах разработаны Меркуловым и Яковлевым [31]. Они сконструированы таким образом, что учитывают отклонение потока энергии от нормали к волновому фронту (см. гл. 1); кристалл возбуждается высоким напряжением с помощью металлических электродов, нанесенных непосредственно на поверхность кристалла. Другой метод генерирования упругих волн очень высоких частот с помощью преобразователей с обедненным и диффузионным слоями, рассматривается в т. I, Б настоящей серии.

Способы соединения нескольких линий задержки описаны в патентах США [32, 33].

Прекрасный обзор, в котором рассмотрены свойства и области использования кварцевых линий задержки, сделал Хаммонд [34]. В нем описаны многоотводные линии задержки, регулируемые линии с перемещающимися клиновидными призмами, а также уделено внимание фотоупругим эффектам, возникающим под действием ультразвуковых волн. Кроме того, в обзоре рассматривается применение таких линий в индикаторах движущихся целей радиолокационных устройств, в цифровых быстродействующих вычислительных машинах и аппаратуре цветного телевидения СЕКАМ. Линии задержки начинают применяться и в других областях техники, например в медицинской электронике. Так,

следует отметить, что с помощью линии задержки на плавленом кварце удалось существенно упростить схему прибора для автоматического счета бактериальных колоний [35].

Общая тенденция развития кварцевых линий задержки заключается в увеличении рабочих частот и расширении полосы пропускания. Керамические и кварцевые преобразователи сильно ограничены в отношении диапазона частот ввиду трудности обработки тонких пластин, требуемых для работы на основной частоте. Конечно, можно использовать высшие гармоники, однако в этом случае ограничением служит ширина полосы, которая определяется основной частотой пластины.

Преобразователи с обедненным и диффузионным слоями, а также с эпитаксиальным слоем (см. т. I, Б) позволили продвинуться в область высоких частот и получить широкую полосу пропускания. Полученный эффект акустического усиления при помещении пьезоэлектрических полупроводников в электрическое поле, обеспечивающее скорость дрейфа электронов, превышающую скорость звука (это новое направление акустики описано Мак-Фи и Хатсоном в одном из последующих томов этой серии), позволяет надеяться на возможность создания очень высокочастотных линий задержки с малыми потерями. Если такие устройства будут осуществлены, область применимости кварцевых линий задержки значительно увеличится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Emslie A. G., McConnel R. L., Radar Systems Engineering, vol. 1, New York, 1947, ch. 16.
2. Huntington H. B., Emslie A. G., Hughes W. V., Journ. Franklin Inst., 245, No. 1, 1 (1948).
3. Emslie A. G., Huntington H. B., Shapiro H., Benfield A. E., Journ. Franklin Inst., **245**, No. 2, 110 (1948) (ртутные линии задержки).
4. Arenburg D. L., Journ. Acoust. Soc. Amer., **20**, 1 (1948) (твердые линии задержки).
5. Mason W. P., McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **19**, 464 (1947).
6. Mason W. P., McSkimin H. J., Journ. Appl. Phys., **27**, 1086 (1948).
7. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **28**, 484 (1956).
8. McSkimin H. J., US Patent No. 2 727 214 (1949).
9. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., Paper I-1 (1953).
10. McSkimin H. J., US Patent No. 2 839 731 (1958).
11. Arenburg D. L., Conv. Record IRE, **2**, pt. 6, 63 (1954).
12. McSkimin H. J., Journ. Acoust. Soc. Amer., **27**, 302 (1955).
13. Mason W. P., Physical Acoustics and the Properties of Solids, Princeton, New Jersey, 1958, p. 134.
14. May J. E., IRE Trans. Ultrasonic Eng., **UE-7**, 7 (1960).
15. Redwood M., Lamb J., Inst. Electr. Eng., **103**, pt. B., 773 (1956).

16. Redwood M., Lamb J., Phys. Rev. Letters, **3**, 28 (1959).
17. Anderson O. L., Bömmel H. E., Journ. Ceram. Soc., **38**, 125 (1955).
18. Mason W. P., Physical Acoustics and the Properties of Solids, Princeton, New Jersey, 1958, ch. 10.3.
19. Marx J. W., Sivertsen J. H., Journ. Appl. Phys., **24**, 81 (1953).
20. Williams A. O., Jr., Journ. Acoust. Soc. Amer., **17**, 109 (1951).
21. Seki H., Granato A., Truell R., Journ. Acoust. Soc. Amer., **28**, 230 (1956).
22. May J. E., Jr., IRE Trans. Ultrasonic Eng., **UE-4**, 3 (1956).
23. Busignies H., Adams P. R., Collins R. I., Electr. Commun., **23**, 113 (1946).
24. Spaeth D. A., Rogers T. F., Johnson S. T., IRE Conv. Record, **2**, Pt. 6, 73 (1954).
25. Pennel E. S., Electr. Eng., **71**, 817 (1952).
26. Sutton P. M., Journ. Acoust. Soc. Amer., **31**, 34 (1959).
27. Fuss P. S., Lauver R. M., IRE WESCON Conv. Record, **5**, 4 (1962).
28. Konig W. F., Lambert L. B., Schilling D. L., IRE Intern. Conv. Record, 285 (1961).
29. Bernstein S., Technical Rep. T-2/152. Columbia Univ. Electronics Laboratory, New York, 1960.
30. Александров К. С., Гурович Л. С., Каменский Е. И., Акуст. журн., **6**, 171 (1960).
31. Меркулов Л. Г., Яковлев Л. А., Акуст. журн., **8**, 199 (1962).
32. Geoghegan T. J., US Patent No. 2 781 494 (1956).
33. Wolfskill J. M., US Patent No. 3 025 479 (1962).
34. Hammond V. J., Brit. Commun. and Electronics, **9**, 104 (1962).
35. Alexander N. E., Glick D. P., IRE Trans. Med. Electron., **ME-12**, 89 (1958).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода 5
Предисловие У. Мэзона 9

Глава 1. Распространение волн в жидкостях и твердых телах (*Р. Терстон*) 13

§ 1. Введение 13
§ 2. Основы механики сплошных сред 13
1. Материальное и пространственное описание (14). 2. Баланс массы, импульса, момента количества движения и энергии (21). 3. Деформация (33). 4. Скорость деформации и вихрь (44). 5. Нелинейная термоупругость твердых тел (47). 6. Термодинамика жидкостей и твердых тел под гидростатическим давлением (61). 7. Изотропные жидкие среды (68). 8. Малые деформации (72).
§ 3. Колебания и волны 75
1. Комплексное описание осциллирующих величин (75). 2. Бегущие волны (75). 3. Стоячие волны (76). 4. Добротность (77).
§ 4. Волны малой амплитуды в жидкостях 79
1. Тепловая релаксация в невязкой теплопроводящей жидкости (79). 2. Сдвиговые волны в ньютоновской жидкости (85). 3. Плоские волны сжатия, распространяющиеся в жидкости с постоянной сдвиговой и объемной вязкостями (88). 4. Отражение от поверхности раздела между двумя жидкостями (91).
§ 5. Волны малой амплитуды в изотропном линейном упругом твердом теле 94
1. Основные уравнения (94). 2. Тепловые потери (99). 3. Волны в неограниченной среде (101). 4. Отражение и преломление плоских волн на поверхности раздела (103). 5. Релеевские поверхностные волны (111).
§ 6. Волны малой амплитуды в линейной вязкоупругой среде . . 112
1. Сдвиговые волны (113). 2. Продольные волны (114).

§ 7. Волны малой амплитуды в кристаллах 115
§ 8. Волны малой амплитуды в упругих кристаллах, подвергнутых деформации 117
1. Общее рассмотрение (117). 2. Акустический тензор для случая адиабатического распространения (120). 3. Малые адиабатические деформации в кристалле, подвергнутом конечной деформации (122). 4. Скорости распространения волн, полученные из линеаризованной теории (124). 5. Определение коэффициентов упругости третьего порядка из данных по измерению скорости распространения как функции напряжения (125). 6. Пример: кубические кристаллы с симметрией $m3m$, 432 или $43m$ (130).
Литература 138

Глава 2. Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках (*Т. Микер и А. Мейтцлер*) 140
§ 1. Введение 140
§ 2. Нормальные волны в пластинках 141
1. Интегрирование уравнений упругого движения с использованием потенциальных функций и вывод основного дисперсионного уравнения (141). 2. Семейства антисимметричных и симметричных нормальных волн SH (148). 3. Семейства продольных и изгибных нормальных волн (152).
§ 3. Нормальные волны в твердых цилиндрах 161
1. Интегрирование уравнений упругого движения с использованием потенциальных функций и вывод основного дисперсионного уравнения (161). 2. Семейство крутильных нормальных волн (165). 3. Семейство продольных нормальных волн (166). 4. Семейство изгибных нормальных волн с $n=1$ (169). 5. Семейства изгибных нормальных волн более высокого кругового порядка (171).
§ 4. Применения теории к волнам в пластинках и цилиндрах . . 173
1. Вступительные замечания об ограниченных пластинках и цилиндрах (173). 2. Распространение упругих волн в бесконечно длинном стержне прямоугольного сечения (174). 3. Полубесконечные цилиндры и пластинки (178). 4. Определение упругих постоянных твердых тел с помощью нормальных волн (181).
§ 5. Особые эффекты, связанные с волноводным распространением упругих волн в пластинках и цилиндрах 187
1. Взаимодействие нормальных волн (187). 2. Понятие «характеристика» нормальной волны и явление селективного затухания (193).
Литература 200
Литература общего характера 202

Глава 3. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях (*Д. Берлинкур, Д. Керран и Г. Жаффе*) 204

§ 1. Введение 204

§ 2. Пьезоэлектрические свойства наиболее важных кристаллов 206
1. Влияние симметрии кристалла (206). 2. Величина пьезоэлектрического эффекта в монокристаллах (213).

§ 3. Уравнения для пьезоэлектрической среды 220
1. Четыре типа статических уравнений; константы связи (220). 2. Волновые уравнения для пьезоэлектрической среды (234).

§ 4. Поликристаллические сегнетоэлектрики 238
1. Общие положения; электрострикция; линейные уравнения для поляризованной среды при слабых возбуждениях (238). 2. Численные значения при слабых возбуждениях (245). 3. Свойства при сильных электрических возбуждениях (250). 4. Свойства при сильных механических возбуждениях и постоянных нагрузках (254). 5. Физическая интерпретация; сопоставление со свойствами монокристалла; доменный механизм (263).

§ 5. Моды колебаний пьезоэлектрических элементов 265
1. Системы с сосредоточенными постоянными (266). 2. Продольные колебания стержня в поле, перпендикулярном его длине (272). 3. Продольные колебания стержня в поле, параллельном его длине (275). 4. Моды колебаний по толщине тонких пьезоэлектрических пластин (277). 5. Радиальные и контурные моды (280). 6. Возбуждение наиболее важных мод колебаний в кристаллах и пьезоэлектрической керамике (281).

§ 6. Эквивалентные схемы 283
1. Эквивалентная схема для стержня, совершающего продольные колебания по длине в электрическом поле, параллельном его длине (284). 2. Эквивалентная схема для стержня, совершающего продольные колебания по длине в электрическом поле, перпендикулярном его длине (288). 3. Эквивалентная схема для пластины, совершающей колебания по толщине в электрическом поле, параллельном ее толщине (289). 4. Пьезоэлектрический стержень, нагруженный с одной стороны (291). 5. Ненагруженный пьезоэлектрический резонатор (294). 6. Применение эквивалентных схем (297). 7. Применение эквивалентных схем с сосредоточенными постоянными в случае составных преобразователей (298). 8. Материалы, используемые для преобразователей большой мощности (302).

§ 7. Пьезомагнитные материалы 311
1. Условия симметрии. Аксиальный и полярный векторы (311).

2. Численные данные (313). 3. Эквивалентная схема пьезомагнитного преобразователя (320).
Литература 324

Глава 4. Ультразвуковые методы измерения механических характеристик жидкостей и твердых тел (*Г. Мак-Скимин*) 327

§ 1. Общий обзор методов 327
1. Введение (327). 2. Методы измерений с помощью бегущих волн (327). 3. Методы, основанные на измерении импеданса (329). 4. Резонанс и спадание амплитуды колебаний (331).
§ 2. Уравнения механических колебаний в длинных линиях. 331
1. Уравнения для скорости частиц, силы и входного сопротивления (331). 2. Некоторые формулы (332).
§ 3. Методы измерений в жидкостях с малой вязкостью 333
1. Реверберационный метод на низких частотах (333). 2. Оптические методы (335). 3. Методы, основанные на измерении радиационного давления и акустических потоков (337). 4. Акустические интерферометры (339). 5. Импульсные методы (343). 6. Акустические измерения при изменении температуры и давления (349).
§ 4. Вязкоупругие жидкости 350
1. Измеряемые величины (350). 2. Измерения на продольных волнах (351). 3. Измерение сдвиговых параметров (352).
§ 5. Пластические и резиноподобные материалы 355
1. Измеряемые величины (355). 2. Методы измерений на частотах ниже 20 *кгц* (356). 3. Методы измерений на высоких частотах (357).
§ 6. Методы измерений в твердых телах 362
1. Резонансные методы (362). 2. Импульсный метод (371). 3. Гиперзвук (378). 4. Методы измерений при изменяющихся внешних условиях (380).
§ 7. Измерение модулей упругости кристаллов 386
1. Теория упругости и резонансный метод (386). 2. Распространение плоских волн в кристаллах (387). 3. Расчет модулей упругости по измеренной скорости звуковых волн (389). 4. Измерение модулей упругости пьезоэлектрических материалов (391). 5. Модули упругости третьего порядка (392).
Литература 393

Глава 5. Применение пьезоэлектрических кристаллов и механических резонаторов в фильтрах и генераторах (*У. Мэзон*) 398

§ 1. Введение 398
1. Исторический обзор (398). 2. Возникновение теории электрических фильтров (399). 3. Цепочечные фильтры типа m (401).

4. Влияние потерь в конденсаторах и катушках индуктивности (404). 5. Некоторые свойства кварцевых элементов, ограничивающие их использование в фильтрах (405). 6. Применение мостиковых схем (407). 7. Кристаллические элементы в цепочечных и мостиковых фильтрах (411). 8. Распространение упругих волн в газообразных, жидких и твердых средах (415).

§ 2. Особенности распространения волн в газах, жидкостях и твердых телах 422

1. Внутреннее трение, затухание и скорость распространения упругих волн в газах и жидкостях (422). 2. Особенности распространения волн в твердых телах и влияние температуры (431).

§ 3. Пьезоэлектрические элементы 439

1. Моды колебаний кварцевых пластин различных срезов (439). 2. Срезы кварца с минимальным температурным коэффициентом частоты (442). 3. Срезы кварца, обеспечивающие улучшение спектра частот (445). 4. Керамические резонаторы (447).

§ 4. Схемы фильтров с кристаллическими и керамическими резонаторами 450

1. Узкополосные фильтры с кварцевыми резонаторами и конденсаторами (451). 2. Широкополосные цепочечные фильтры с пьезоэлектрической керамикой (455). 3. Широкополосные фильтры с катушками индуктивности (455). 4. Фильтры низких частот, фильтры высоких частот и заграждающие фильтры (464).

§ 5. Генераторы, стабилизированные кварцем 465

1. Свойства кристаллических резонаторов, предназначенных для стабилизации генераторов (465). 2. Стандартные схемы генераторов (467). 3. Прецизионные генераторы и резонаторы (469).

§ 6. Электромеханические селекторы и фильтры 473

1. Язычковое реле (472). 2. Электромеханические фильтры (476).

Литература 486

Глава 6. Волноводные ультразвуковые линии задержки (*Дж. Мей*) 489

§ 1. Введение 489

1. Краткая характеристика волноводных линий задержки (489). 2. Исторический обзор (491). 3. Применения волноводных линий задержки, не обладающих дисперсией (492). 4. Применения дисперсионных линий задержки (496).

§ 2. Линии задержки на крутильных колебаниях 501

1. Свойства крутильных волн в круглой проволоке и их

преимущества (501). 2. Пьезоэлектрические преобразователи крутильных колебаний (502). 3. Пьезоэлектрические линии задержки на крутильных колебаниях (506). 4. Магнитострикционные преобразователи крутильных колебаний (507). 5. Магнитострикционные линии задержки на крутильных колебаниях (508). 6. Материалы, применяемые для звукопровода (510). 7. Влияние кривизны на характеристики задержки (512).

§ 4. Ленточные линии задержки на сдвиговых колебаниях . . . 513

1. Свойства сдвиговых волн в пластине и их преимущества (513). 2. Пьезоэлектрические преобразователи сдвиговых колебаний по толщине (515). 3. Ленточные линии задержки без дисперсии на сдвиговых колебаниях (515). 4. Дисперсионные ленточные линии задержки на сдвиговых колебаниях (520). 5. Материалы, применяемые для звукопровода (521).

§ 4. Проволочные линии задержки на продольных колебаниях. 522

1. Свойства продольных и изгибных волн в круглой проволоке (522). 2. Преимущества применения наинизшей продольной волны (523). 3. Пьезоэлектрические преобразователи продольных колебаний (524). 4. Проволочные пьезоэлектрические линии без дисперсии на продольных колебаниях (524). 5. Проволочные пьезоэлектрические дисперсионные линии на продольных колебаниях (528). 6. Проволочные магнитострикционные линии задержки на продольных колебаниях, не обладающие дисперсией (531). 7. Влияние кривизны на характеристики задержки (532).

§ 5. Ленточные дисперсионные линии задержки на продольных колебаниях 534

1. Свойства продольных и изгибных колебаний в пластинах и их преимущества (534). 2. Пьезоэлектрические преобразователи продольных колебаний по толщине (535). 3. Ленточные пьезоэлектрические дисперсионные линии задержки на продольных колебаниях (535). 4. Материалы, применяемые для звукопровода (538). 5. Влияние формы ленты (540).

§ 6. Ленточные дисперсионные линии задержки переменной толщины на продольных колебаниях 540

1. Ограничения, накладываемые на характеристики задержки для линий постоянной толщины (540). 2. Линии переменной толщины (541). 3. Синтез произвольных характеристик задержки (543). 4. Ленточные линии переменной толщины с линейной характеристикой задержки (545). 5. Ленточные линии переменной толщины с нелинейной характеристикой задержки (546).

§ 7. Преобразователи для линий задержки 548

1. Единый метод анализа магнитострикционных и пьезоэлектрических преобразователей (548). 2. Влияние электри-

ческой нагрузки и коэффициента электромеханической связи на полосу пропускания пьезоэлектрического преобразователя (557). 3. Получение широкополосной проводимости в согласующих цепях для пьезоэлектрических преобразователей (560).
Литература 563

Глава 7. Ультразвуковые линии задержки с многократными отражениями (*У. Мэзон*) 566

§ 1. Историческое введение 566
§ 2. Распространение звуковых волн в твердых телах 568
1. Затухание звука в твердых телах (568). 2. Расширение пучка (573). 3. Отражение волн от плоских поверхностей (575).
§ 3. Различные типы линий задержки 577
1. Линии задержки с прямым ходом луча (577). 2. Свернутые и многоугольные линии задержки (579). 3. Клиновидные линии задержки (581).
§ 4. Последующие работы и дальнейшие усовершенствования линий задержки 582
Литература 584

ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА, т. I, ч. А
МЕТОДЫ И ПРИБОРЫ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Редактор *Н. Л. Телеснин*
Художник *Л. Г. Ларский*
Художественный редактор *П. Ф. Некунда*
Технический редактор *Л. П. Кондюкова*
Корректор *В. С. Соколов*

Сдано в производство 13/VII 1966 г. Подписано к печати 19/X 1966 г.
Бумага 60×90¹/₁₆=18,5 бум. л. 37 печ. л. Уч.-изд. л. 34,2.
Изд. № 2/3672. Цена 2 р. 66 к. Зак. 364
(Темплан 1966 г. изд-ва «МИР», пор. № 65)

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР, Москва, Трехпрудный пер., 9