

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В.А.КРАСИЛЬНИКОВ

ВВЕДЕНИЕ В АКУСТИКУ

Издательство
Московского университета

1992

ББК 22.32

К 78

УДК 534

Рецензенты:

профессор К.Н.Баранский;

кандидат физ.-мат. наук П.Н.Кравчун

Печатается по постановлению

Редакционно-издательского совета

Московского университета

Красильников В.А.

К 78 Введение в акустику: Учебное пособие. - М.: Изд-во МГУ, 1992. - 152 с.

ISBN 5-211-02249-4

В учебном пособии даются основные сведения по акустике. Кратко излагается история развития акустики и ее место среди других наук. Приводятся данные о звуковом поле и величинах его характеризующих. Рассмотрены задачи об отражении и преломлении волн на плоской границе раздела, об акустических волноводах, геометрической акустике, акустике движущейся среды, представлений об излучении звука, интенсивности, рассеянии звука и его поглощении. Приводятся основные сведения по акустике твердого тела, нелинейной акустике, физиологической акустике и электроакустике.

Для студентов младших курсов физических факультетов университетов специализирующихся по акустике.

077(02)-92 - заказное

ББК 22.32

© Московский государственный
университет,
1992

ISBN 5-211-02249-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ	
§ 1. Акустическое поле. Основные величины	14
§ 2. Уравнения гидродинамики	22
§ 3. Волновое уравнение. Плоская волна	27
§ 4. Волновое уравнение для сферических и цилиндрических волн	31
§ 5. Энергия и импульс акустического поля	36
ГЛАВА 2. ВОЛНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ГРАНИЦ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АКУСТИКА. АКУСТИКА ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЫ	
§ 6. Отражение и преломление плоских волн на границе раздела	39
§ 7. Акустические волноводы. Нормальные волны	47
§ 8. Геометрическая акустика. Акустика движущейся среды	54
ГЛАВА 3. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА. ИНТЕНСИМЕТРИЯ	
§ 9. Излучение звука. Пульсирующая сфера. Диполь	64
§ 10. Поршневая диафрагма	74
§ 11. Энергетические характеристики звукового поля. Инфразвук	82
ГЛАВА 4. РАССЕЯНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКА	
§ 12. Рассеяние звука	93
§ 13. Поглощение звука	99
ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТЫ АКУСТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА	
§ 14. О теории упругости	103
§ 15. Звуковые волны в изотропном однородном твердом теле	110
§ 16. Релеевские поверхностные волны	116
ГЛАВА 6. НЕЛИНЕЙНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ	
§ 17. Нелинейная акустика жидкостей и газов	123
§ 18. Нелинейная акустика твердых тел	131
ГЛАВА 7. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ФИЗИОЛОГИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ	
§ 19. Ухо человека	137
§ 20. Закон Вебера - Фехнера. Громкость. Бинауральный эффект	141
ГЛАВА 8. КРАТКО ОБ ЭЛЕКТРОАКУСТИКЕ	
§ 21. Об электромеханических преобразователях	146
§ 22. Пьезоэлектрические преобразователи	148

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие представляет собой слегка расширенное содержание вводных лекций для студентов, начинающих заниматься акустикой, и служит кратким введением к читающимся на кафедре акустики физического факультета МГУ специальным курсам лекций по акустике.

Даются краткие сведения по истории развития акустики и ее современному состоянию, элементарные понятия об акустическом поле и о величинах, характеризующих это поле, о распространении и излучении акустических волн, рассеянии и поглощении звука, акустике твердого тела, нелинейной акустике, физиологической акустике и электроакустике. Эти сведения даются в краткой, почти элементарной форме, и обращается внимание в первую очередь на физическое содержание рассматриваемых вопросов, хотя и имеется в небольшом объеме математический аппарат.

Заметим, что эти лекции читаются на весеннем семестре третьего курса, когда студенты уже прослушали лекции по общему курсу физики, теории колебаний, теоретической механике и уравнениям математической физики. Поэтому предполагается, что читатель знаком с основными представлениями о волновом движении и волновом уравнении.

В узком смысле слова акустика-это учение о звуке, т.е. об упругих колебаниях и волнах в газах, жидкостях и твердых телах, слышимых человеческим ухом; частоты таких колебаний и волн лежат в диапазоне примерно от 16 до 20 000 Гц. В широком смысле слова это область физики, изучающая упругие колебания и волны в различных средах от самых низких частот (инфразвук, условно от 0 до 16 Гц) до предельно высоких частот 10^{13} Гц (гиперзвук в кристаллических твердых телах при низких температурах).

Историю развития акустики условно можно разбить на три периода. Первый период - начиная с древней истории до конца 17-го и начала 18 в. Пифагор (6 в до н.э.) открыл связь между высотой тона и длиной струны (или трубы), Аристотель (4 в. до н.э.) объяснил эхо отражением звука от препятствий и понимал, что звучащее тело создает сжатия и разрежения воздуха. Леонардо да Винчи (15 - 16 вв.) сформулировал принцип независимости распространения звуковых волн от различных источников. Галилей (конец 17 в.) обнаружил, что звучащее тело совершает колебания, а высота звука зависит от частоты, тогда как сила звука - от амплитуды этих колебаний. Французский ученый М. Мерсенн измерил впервые скорость звука в воздухе.

Второй период охватывает время от конца 17-го до 20-х годов нашего века. И. Ньютон создает основу механики. Р. Гук (Англия) на опыте устанавливает пропорциональность между напряжениями и деформациями в твердых телах - основной закон теории упругости. Х.Гюйгенс (Голландия) формулирует важный принцип - так называемый принцип Гюйгенса в волновом движении. С этого времени начинается расцвет классической физики. Механика, гидродинамика и теория упругости, математическая физика, теория колебаний и волн, акустика и оптика развиваются в тесной взаимосвязи. В этот период акустика развивается как раздел механики. Создается общая теория механических колебаний, теория излучения и распространения упругих (звуковых) волн в различных средах, разрабатываются методы измерения характеристик звука (скорости звука, звукового давления в среде, импульса, энергии и потока энергии звуковых волн). Диапазон частот звуковых волн расширяется и охватывает как область инфразвука, так и ультразвука (свыше 20 кГц).Выяс-

няется физическая сущность тембра звука (его "окраска").

Члены Петербургской Академии наук Л. Эйлер и Д. Бернулли и французские ученые Ж. Д'Аламбер и Ж. Лангранж разрабатывают теорию колебаний струн, стержней и пластинок, объясняют происхождение обертонов. Т. Юнг (Англия) и О. Френель (Франция) развивают представления Гюйгенса о распространении волн, создают теорию интерференции и дифракции волн. Х. Доплер (Австрия) устанавливает закон изменения частоты волны при движении источника звука относительно наблюдателя. Огромное значение не только для акустики, но и для физики в целом имело создание методов разложения сложного колебательного процесса на простые составляющие — анализа колебаний и синтеза сложных колебаний из простых (Ж. Фурье, Франция). Экспериментально анализ звука — разложение его в спектр гармонических колебаний с помощью набора резонаторов — и синтез сложного звука из простых составляющих осуществил немецкий ученый Г. Гельмгольц. Он исследовал состав музыкальных звуков, объяснил тембр звука характерным для него набором добавочных тонов (гармоник). На основе своей теории Гельмгольц построил первую физическую теорию слухового аппарата (уха человека), в дальнейшем усовершенствованную. Исследования Гельмгольца заложили основу физиологической акустики и музыкальной акустики. Дж. Г. Стокс (Англия) и Г. Р. Кирхгоф (Германия) создают классическую теорию поглощения плоской звуковой волны в вязкой теплопроводящей среде.

Весь этот этап развития акустики подытожен в классическом труде "Теория звука" английским физиком Рэлеем (Дж. Стретт); этот выдающийся труд не потерял своего значения и в наше время.

На рубеже 19 и 20 веков важные работы были выполнены русскими физиками Н. А. Умовым (введение понятия плотности потока энергии упругих волн — вектор Умова), П. Н. Лебедевым и П. Н. Неклепаевым, которые выделили из резкого звука электрической искры ультразвуковые волны в воздухе и определили их коэффициент поглощения. Американский акустик У. Сэбин заложил основы архитектурной акустики.

Существенный вклад в акустику внес Рэлей; он предсказал и создал теорию (1885) так называемых поверхностных акустических волн (ПАВ) на границе твердых тел, называемых в его честь рэлеевскими волнами. Эти волны составляют сейчас целую обширную область акустики и сейсмологии. Он также установил так называемое уравнение Рэрея для пульсаций кавитационной полости в жидкости

(1919), играющее основную роль в теории ультразвуковой кавитации, объяснил закономерности рассеяния волн (в том числе упругих) для случаев, когда длина волны меньше размеров неоднородностей (рассеяние Рэлея). Братья П. и Ж. Кюри (Франция) открывают (1880) прямой, а Г. Липшман (1881) обратный пьезоэффект в ряде кристаллов (в первую очередь, в пьезокварце), а в 1916 г. П. Ланжевен (Франция) создает на основе этого эффекта первый в мире эхолот для измерения глубины моря; с этого времени началось бурное развитие гидроакустики.

Можно сказать, что третий, современный период в истории акустики начинается в 20-х годах нашего века. Он вызван прежде всего возникновением радиотехники и в связи с этим - с развитием электроакустики, радиовещания, звукозаписи, звуковоспроизведения. Новые открывшиеся возможности в усилении слабых сигналов и генерации мощных сигналов, кардинальное усовершенствование акустических измерений, анализа и воспроизведения звука, внедрение акустических методов в самые различные области физических измерений, автоматизации экспериментальных исследований, широкое использование вычислительной техники, а также громадное число разнообразных практических применений, революционизировали акустику, превратив ее из считавшейся завершенным разделом механики и физики в самостоятельную область физики и техники.

Развитие акустики в значительной мере было стимулировано запросами военной техники. Задача определения положения и скорости самолета и вертолета (звуковая локация в воздухе), подводной лодки, связь под водой (гидроакустика) - все эти проблемы требовали более глубокого изучения механизма генерации и поглощения звука, распространения звуковых и ультразвуковых волн в сложных условиях. Проблемы генерации звука стали предметом обширных исследований и в связи с общей теорией колебаний и волн, охватывающей во-едино механические, электрические и электромеханические колебательные и волновые процессы.

Большой интерес вызвал вопрос о распространении звуковых волн большой интенсивности, что в немалой степени было вызвано запросами техники; работы русских физиков Н.Н. Андреева и А.А. Эйхенвальда в этой области внесли значительный вклад в так называемую нелинейную акустику - область, где при распространении упругих волн уже не выполняется принцип суперпозиции и волны взаимодействуют между собой. Н.Н. Андреев и И.Г. Русаков (1934), Д.И. Блохинцев (1946) разработали основы акустики движущейся

среды. М. Лайтхилл (1952, Англия) дал общую теорию аэродинамической генерации звука в движущейся среде за счет неустойчивости потока газа.

В гидроакустике М. Ивигом и Д. Ворцелем (1944) и русскими учеными Л.М. Бреховских и Л.Д. Розенбергом (1946) было независимо открыто сверхдальнее распространение звука взрыва в океане в так называемом подводном звуковом канале (дальность несколько тысяч километров). Проблема звукопоглощения получила особую актуальность в связи с развитием архитектурной и строительной акустики. Этой проблеме были посвящены исследования С.Н. Ржевкина, Г.Д. Малежница, В.В. Фурдуева. Огромное внимание (особенно в последнее время) уделяется во всем мире изучению акустических шумов и методам их устранения.

Изучение влияния структуры среды на распространение звука создало возможность применения звуковых волн для акустического зондирования среды, в частности атмосферы; это привело к дальнейшему развитию атмосферной акустики (А.М. Обухов, В.А. Красильников, В.И. Татарский).

В 1932 г. П. Бикар и Р. Лика во Франции и П. Дебай в Германии открыли явление дифракции света на ультразвуке, сыгравшее большую роль в физике ультразвука и его применений. В 20-х гг. русский ученый С.Я. Соколов применил ультразвук для неразрушающего контроля (дефектоскопии) металлов. В Германии Х.О. Кнезер (1933) обнаружил явление сильного поглощения и дисперсии звука в многоатомных газах (например, в CO_2). Позднее дисперсия и аномальное поглощение ультразвука были обнаружены также и в жидкостях. Общая теория этих явлений, так называемая релаксационная теория, дана Л.И. Мандельштамом и М.А. Леонтовичем (1937). На стыке акустики и оптики Л.И. Мандельштам (1918, 1926) и Л. Бриллюэн (Франция) создали теорию рассеяния света на ультразвуковых волнах в жидкостях и твердых телах (так называемое рассеяние Мандельштама - Бриллюэна). Это явление оказалось важным для изучения молекулярной структуры вещества.

Большое значение приобрели исследования гиперзвука (частота 10^9 Гц = 1 Гигагерц и выше). Первые экспериментальные методы генерации и приема гиперзвука были разработаны на физическом факультете МГУ К.Н. Баранским (1957). Еще в 1935 г. Л.Д. Ландау и Ю.Б. Румер (1937) развили теорию поглощения гиперзвука для случая низких температур, близких к температуре жидкого гелия. Используя метод К.Н. Баранского, Х. Боммель и К. Дрансфельд

(США) в 1959 г. в существенной мере подтвердили эту теорию (см. § 18). В дальнейшем была развита теория поглощения ультразвука при комнатных температурах (А.И. Ахизер). Обе эти теории, в основе которых лежат представления о нелинейном взаимодействии когерентного звука (искусственного звука в виде плоских волн, получаемого в лаборатории) с тепловыми фонами, сыграли (и играют в настоящее время) большую роль в физике твердого тела и практических приложениях. Исследуются взаимодействия упругих волн с веществом, в частности ультразвуковых и гиперзвуковых волн с электронами в полупроводниках и металлах. Возникают новые области акустики — нелинейная акустика, акустоэлектроника, акустооптика, кристаллоакустика, магнитоакустика, физика поверхностных упругих волн, акустогидродинамика, акустика движущейся среды и др., которые составляют в целом физическую акустику. В указанных областях в особенности велика роль Р.В. Хохлова (нелинейная акустика) и Ю.В. Гуляева (поверхностные акустические волны, акустоэлектроника).

В настоящее время физическая акустика представляет собой обширный раздел современной акустики и играет большую роль в смежных с акустикой областях физики. В круг ее задач входит изучение особенностей распространения звука в средах с различными физическими свойствами; она изучает взаимодействие звука с веществом как на макроскопическом, так и на микроскопическом уровнях. В этот круг проблем входит изучение особенностей распространения звука в средах с различными физическими свойствами и использование этих особенностей в практических целях. Это — прямые задачи физической акустики. С другой стороны, зондируя исследуемую среду звуком различной частоты и амплитуды, оказывается возможным определить многие ее физические свойства. Это — обратные задачи физической акустики.

Глубокие преобразования произошли и в старых, классических областях акустики. В середине нашего века начинается быстрое развитие психофизиологической акустики, вызванное необходимостью разработки методов неискаженной передачи и воспроизведения сигналов — речи и музыки по ограниченному числу каналов связи и при наличии помех. Эти вопросы акустики входят в круг проблем общей теории информации и связи. Исследовались механизмы образования различных звуков речи, характер их звукового спектра, основные показатели качества речи, воспринимаемых на слух. Разрабатываются методы кодирования речи (сжатой передачи ее основных эле-

ментов) и ее расшифровки (синтеза), развернулись исследования механизмов слухового восприятия, ощущение громкости, определение направления звука (венгерский ученый, лауреат Нобелевской премии Г. Бекеши; премия получена им за работы в области физиологической акустики). В этой области акустика соприкасается с физиологией органов чувств и биофизикой.

Успешно развивается новое направление в акустике — решение так называемых обратных задач рассеяния, что важно, например, для целей ультразвуковой томографии, которая уже началась широко применяться в медицине и дефектоскопии.

Подводя итог, можно сказать, что современная акустика по своему содержанию и значению далеко перешагнула границы, в которых она находилась до 20-го века.

Современную акустику условно можно разделить на общую акустику, прикладную и психофизиологическую. Общая акустика занимается теоретическим и экспериментальным изучением закономерностей излучения, распространения и приема упругих колебаний и волн в различных средах и системах. Условно ее можно разделить на теорию звука, физическую акустику и нелинейную акустику, хотя, вообще говоря, нелинейную акустику можно считать и частью физической акустики.

Прикладная акустика — чрезвычайно обширная область акустики, к которой прежде всего следует отнести электроакустику. Сюда же относятся акустические измерения, архитектурная акустика, изучение шумов и вибраций, инфразвук, геоакустика, атмосферная акустика, гидроакустика, нелинейная акустика, применение ультразвука и гиперзвука для целей дефектоскопии, диагностики и контроля, а также в интенсификации производственных процессов, для ультразвукового сверления, резки, пайки, ультразвуковой очистки, обработки поверхности и т.д.

Психофизиологическая акустика занимается изучением слуха и речи как человека, так и животных, проблемами речеобразования и восприятия речи. Результаты исследований используются в электроакустике, архитектурной акустике, системах передачи речи, теории информации и связи, в музыке, медицине, биофизике и т.д.

Американский акустик Р.Б. Линдсей представил современную акустику и ее связь с другими областями знания и человеческой деятельности в виде диаграммы в форме "колеса", которое называют колесом Линдсея. Это "колесо" с некоторыми изменениями, которые мы позволили себе сделать, представлено на рисунке 1.1. При-

веденная диаграмма в значительной степени соответствует содержанию современной акустики, изложенному выше.

Вопросами акустики в нашей стране занимаются в Москве, кроме кафедры акустики физического факультета МГУ – Акустический институт им. акад. Н.Н. Андреева, Научно-исследовательский кинофотостудий институт (НИКФИ), Институт звукозаписи, институты Российской Академии Наук (РАН) – Общей физики, Институт физики атмосферы (атмосферная акустика), институт Океанологии (акустика океана), Институт физики Земли (сейсмоакустика), Институт радиотехники и электроники (акустоэлектроника), другие многочисленные внеакадемические институты и лаборатории.

В Санкт-Петербурге – Институт радиоприема и акустики, физико-технический институт им. акад. А.Ф. Иоффе РАН, кораблестроительный институт, физический факультет университета, электротехнический институт и ряд других институтов и лабораторий.

В Нижнем Новгороде – Институт прикладной физики РАН и Нижегородский университет. В Новосибирске – Институт физики полупроводников РАН, Институт гидродинамики РАН. Имеется ряд акустических лабораторий в ВУЗах Российской Федерации в гг. Казани, Саратове, Таганроге и других.

Отметим наиболее крупные высшие учебные заведения, научные институты и промышленные предприятия в США, Великобритании, Франции, Дании, где ведутся работы как в теоретических, так и в прикладных исследованиях по акустике. В США – это Массачусетский технологический институт ("эм-ай-ти"), Калифорнийский университет, Стэнфордский университет, Брауновский университет (г. Провиденс), фирма "Делл-систем лаборатории" в ряде городов США и т.д. В Великобритании – Институт звука и вибраций (г. Саутгемптон), Империял Колледж (Лондон), Бирмингемский университет и многие другие университеты и лаборатории. Во Франции – Университет им. Жюлио-Кюри (Париж), Национальный научно-исследовательский центр (Марсель). В Дании – крупный исследовательский центр и завод прецизионной акустической аппаратуры фирмы Бржль и Кьер. Широко развиты научные исследования по акустике в ФРГ, Италии, Венгрии, КНР, Японии (в особенности, по прикладным разделам акустики) и многих других странах.

Как в нашей стране, так и за рубежом часто проводятся многочисленные конференции и симпозиумы по различным направлениям акустики. Раз в три года Международной комиссией по акустике под

эгией ЮНЕСКО при Организации Объединенных Наций созывается Международный акустический конгресс, охватывающий все области акустики, на котором заслушиваются 10-15 пленарных приглашенных докладов. Эти доклады читаются крупными учеными с мировым именем в области акустики; делается множество докладов на различных секциях (их бывает несколько десятков). Таких конгрессов уже состоялось 13 (первый конгресс был в 1953 г.). Последний конгресс проходил в Белграде (Югославия) летом 1989 г. На конгрессах присутствует обычно более 1500 специалистов акустиков из многих стран мира. Конгрессы сопровождаются выставками акустической аппаратуры ведущих акустических фирм; труды конгрессов издаются.

Основными журналами, в которых печатаются статьи в области акустики являются "Акустический журнал" (в нашей стране), в США - "Журнал акустического общества Америки", в Великобритании - "Звук и вибрации" и т.д. Статьи акустического содержания печатаются также во многих журналах - физических, технических, геофизических, медицинских, биологических, а также в журналах, относящихся к другим областям науки и техники.

§ I. Акустическое поле. Основные величины

Остановимся сначала на величинах, характеризующих звуковое поле; возникающее при распространении акустических волн в газах и жидкостях. При рассмотрении тех или иных акустических задач, делая различные предварительные оценки, почти всегда приходится пользоваться понятием плоских волн. Приведем поэтому основные соотношения, имеющие место для плоской акустической волны; позже мы получим эти соотношения из волнового рассмотрения задачи. Строго говоря, под плоской волной следует понимать волну с плоским фронтом, бесконечным по протяженности, что является идеализацией. Тем не менее, если протяженность фронта с постоянной фазой составляет порядка 10 длин волн λ , его (с определенными ограничениями, о которых речь пойдет дальше) уже можно для практических оценок считать приблизительно плоским.

Связь между звуковым давлением P (амплитуда избыточного давления в звуковой волне по отношению к давлению в окружающей среде) с амплитудой колебательной скорости в такой звуковой волне v и скоростью звука c дается формулой

$$v = \frac{P}{\rho c}, \quad (1.1)$$

где ρ — плотность среды. Вспомним, что звуковые волны в газах и жидкостях продольные. Колебательную скорость v можно поставить в соответствие току I , звуковое давление — напряжению V и произведение ρc — омическому сопротивлению R ; ρc и называется в акустике акустическим сопротивлением среды. Конечно, эта аналогия формальна, поскольку природа механических и электрических явлений различна, однако использование этой аналогии в ряде случаев оказывается весьма полезной.

Если плоская звуковая волна распространяющаяся в положительном направлении оси x гармоническая и колебательную скорость v частиц среды из положения равновесия можно записать в виде

$$v = v_m \sin(\omega t - kx), \text{ где } v_m - \text{максимальная амплитуда ско-}$$

рости и $\omega = 2\pi f$ - круговая частота, $\kappa = \frac{\omega}{c}$ - волновое число, то акустическое смещение ξ определяется формулой (поскольку $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$)

$$\begin{aligned}\xi &= \int v dt = -\frac{v_m}{\omega} \cos(\omega t - \kappa x) = \\ &= \frac{v_m}{\omega} \sin(\omega t - \kappa x - \frac{\pi}{2}) = \xi_m \sin(\omega t - \kappa x - \frac{\pi}{2}).\end{aligned}\quad (1.2)$$

Пользуясь (1.1) и (1.2), можно для максимума амплитуды смещения ξ_m написать

$$\xi_m = \frac{p_m}{\omega \rho c}.\quad (1.3)$$

Найдем значение смещения ξ_m , если амплитуда звукового давления $p = 3000$ бар = 3000 дин.см⁻² = 300 Па^{*}; такое давление при частоте 1000 Гц находится на пороге болевого ощущения. Оно возникает, например, вблизи вытекающей из сопла реактивной струи самолета, создающей шумовое акустическое поле. Акустическое сопротивление воздуха $\rho c = 41$ г.см⁻².с⁻¹ и согласно (1.1)

$v_m = \frac{p_m}{\rho c} = 3000/41 = 73$ см.с⁻¹. Заметим, что акустическое число Маха $Ma = \frac{v_m}{c}$ в этом случае (имея в виду, что скорость звука в воздухе при атмосферном давлении и температуре 18° составляет 342 м/с) равно ≈ 0.05 , т.е. весьма мало даже при таком сильном звуке. Амплитуда смещения частиц из положения равновесия при таком звуке составляет $\xi_m = 3000/6,28 \cdot 41 \cdot 1000 = 0,01$ см.

Звуки на пределе слышимости на частоте 1000 Гц (ухо человека весьма чувствительно к этой частоте), что соответствует звуковому давлению примерно $2 \cdot 10^{-4}$ бар, имеет смещения $\xi = 0,8 \cdot 10^{-9}$ см. Заметим, что современные методы измерений периодических смещений в принципе дают возможность измерять ξ порядка 10^{-16} см.

Для плоской звуковой волны средняя по времени энергия, переносимая ею за t с через площадку в 1 см², перпендикулярную направлению движения волны, называют интенсивностью или силой звука $\mathcal{I}$. При этом усреднение (для периодического звука) производится за промежуток времени больший, чем период звука или за целое число периодов. Среднее значение силы звука $\mathcal{I}$ для синус-

* Напомним, что 1 Па = 1 Н.м⁻² = 10 дин см⁻² = 10 бар.

социальной плоской волны дается формулой

$$J = \frac{P_m^2}{2\rho c}, \quad (1.4)$$

где P_m и v_m - максимальные значения амплитуд P и v .

Напомним, что для гармонических волн эффективные или средние звуковое давление и колебательная скорость (именно они измеряются на опыте) $P_{эф} = P_m/\sqrt{2}$, $v_{эф} = v_m/\sqrt{2}$. Поэтому

$$J = \frac{P_m^2}{2\rho c} = \frac{v_m^2 \rho c}{2} = \frac{P_m v_m}{2} = v_{эф}^2 \rho c. \quad (1.5)$$

Отметим также, что формулы для J аналогичны формулам для мощности и переменного тока, выделяющейся на активном сопротивлении R

$$W = \frac{I_m^2 R}{2} = \frac{V_m^2}{2R} = \frac{I_m V_m}{2} = I_{эф} V_{эф},$$

где, как уже говорилось выше, сила тока I аналогична v , напряжение V аналогично P и омическое сопротивление R аналогично ρc .

Для сферической бегущей волны J обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника, а в стоячей волне $J = 0$, т.е. в среднем в стоячей волне потока звуковой энергии нет. В бегущей волне, помножив плотность потока энергии E на скорость звука c , найдем за t с звуковое поле в объеме цилиндра с длиной образующей равной l и основанием 1 см^2 . Тогда

$$J = Ec = \frac{1}{2} \frac{P_m^2}{\rho c} = \frac{P_{эф}^2}{\rho c} = \rho c v_{эф}^2 = \frac{1}{2} \rho c v_m^2. \quad (1.6)$$

В плоской звуковой волне

$$\vec{J} = \rho c v^2 \vec{n} = Ec \vec{n}, \quad (1.7)$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор волновой нормали, совпадающей с направлением распространения звука. Поток звуковой энергии характеризуется вектором Умова - Пойтинга $\vec{J}$; он равен произведению $|\vec{J}|$ на единичный вектор $\vec{n}$. Обычно под интенсивностью звука понимают модуль вектора Умова - Пойтинга, т.е. скалярную величину. Употребляется также понятие мощности звука. Мощность звука - это энергия, передаваемая звуковой волной за единицу времени через рассматриваемую поверхность. Среднее значение мощ-

ности звука, отнесенное к единице поверхности, называют средней удельной мощностью или интенсивностью (силой) звука. Таким образом, если поток звуковой энергии протекает через единицу поверхности, то сила звука, интенсивность звука, мощность звука, модуль вектора Умова - Пойтинга, это все одни и те же величины.

Вспомним, что за единицу силы принимают силу, сообщаящую массе в 1 г ускорение в 1 см·с⁻², равную 1 дина, за единицу работы принимают работу в 1 эрг, произведенную за 1 с, а за единицу мощности, размерность которой эрг·с⁻¹·см² в системе СГС, принимают работу в 1 эрг за 1 с, т.е. 10⁻⁷ Вт. Если, как в приведенном выше примере, $P_m = 3000 \text{ бар} = 3000 \text{ дин} \cdot \text{см}^{-2}$, то

$$J = \frac{P_m^2}{2\rho c} = \frac{(3000)^2}{2 \cdot 41} = 1 \cdot 10^5 \text{ эрг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2} \approx 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2}.$$

Для самых слабых звуков, еще слышимых ухом на частоте 1000 Гц, $P \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ бар}$, и тогда $J \approx 10^{-16} \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2} = 10^{-12} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2}$.

Обратимся теперь к скорости звука c . Она определяется (для газов) формулой Лапласа*) (здесь P давление окружающей среды)

$$c = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}, \quad (1.8)$$

где $\gamma = C_p/C_v$ - отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме, равное для воздуха, например, 1,43 при 18°C и атмосферном давлении. Эта формула говорит о том, что распространение звука есть процесс адиабатический; изменение температуры в звуковой волне на расстоянии половины длины волны (т.е. во времени - за полпериода) не успевает выравняться. Скорость звука в идеальном газе не зависит от давления газа (поскольку при изменении P в таком же отношении изменяется ρ), но зависит от температуры T . При увеличении на 1°C c увеличивается в воздухе примерно на 0,5 м/с и выражается формулой

$$c \approx 20 \sqrt{T} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (1.9)$$

*) Ньютоновой скоростью звука называют скорость, определяемую формулой $c = \sqrt{P/\rho}$. Эта формула, предложенная Ньютоном не учитывает адиабатичность звука. Ньютонову скорость звука называют также изотермической скоростью звука.

где T выражается в кельвинах (К). Эту формулу получаем, если воспользуемся уравнением состояния идеального газа:

$$PV = \frac{P}{\rho} = RT, \quad (1.10)$$

где $R = C_p - C_v$ - газовая постоянная. Отметим, что скорость звука в газах по порядку величины совпадает со средней скоростью движения молекул. Приведем значения скорости звука в некоторых газах (температура $t = 0^\circ\text{C}$) и жидкостях ($t = 20^\circ\text{C}$; кроме водорода и гелия):

Газы		Жидкости	
воздух	331 м/с	вода	1490 м/с
азот	334 "	этиловый спирт	1180 "
кислород	316 "	ртуть	1453 "
углекислота	216 "	водород $t = -252^\circ\text{C}$	1127 "
гелий	965 "	гелий $t = -269^\circ\text{C}$	180 "
водород	1265 "		

В дополнение к указанным величинам акустического поля, следует также сказать об ускорении $\ddot{v}$ и коэффициенте поглощения для плоской волны α .

В звуковых полях (на ультразвуковых частотах порядка нескольких мегагерц) интенсивности могут достигать, например в воде, нескольких сотен Вт/см² (в плоском звуковом пучке), а с использованием фокусирующих ультразвуковых устройств даже более десяти кВт/см². Ускорения могут достигать очень больших значений. Действительно, на частоте 1 МГц, например, и интенсивности 100 Вт/см² в воде ($C = 1,5 \cdot 10^5$ см·с⁻¹) ускорение, согласно формулам (1.1), (1.3) и (1.4), равно

$$\ddot{v} = \omega v = 2\pi f \frac{P}{\rho c} = 6,3 \cdot 10^8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2} \approx 10^5 g,$$

где $g = 981 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ - ускорение свободного падения. Как видно, при интенсивностях вполне доступных для их получения в лабораториях, ускорения достигают огромных величин. Это следует иметь в виду при исследовании воздействия ультразвуковых частот больших интенсивностей на вещество, особенно в биологических исследованиях с использованием ультразвука.

При распространении плоской волны амплитуда звукового давления P (и других величин, характеризующих волну v, ξ и т.д.) уменьшаются вследствие потерь звуковой энергии из-за действия

вязкости и теплопроводности; в конечном счете эта энергия переходит в тепло. Это уменьшение характеризуется коэффициентом поглощения α , которое определяется выражением (например, для амплитуды звукового давления p)

$$p = p_0 e^{-\alpha x}. \quad (I.II)$$

Здесь p_0 - амплитуда звукового давления при $x = 0$ и x расстояние, проходимое волной, $\alpha = \text{const}$ - так называемый амплитудный пространственный коэффициент поглощения, характеризующий убыль амплитуды звукового давления в $e = 2,7$ раз на расстоянии (в единицах длины) $x = 1$. Поскольку, как мы увидим ниже, средняя энергия единицы объема плоской волны (средняя кинетическая вместе с равной ей средней потенциальной) $E = \rho v^2$ пропорциональна квадрату амплитуды колебательной скорости v (или квадрату амплитуды давления p), а согласно (I.4) $J \sim v^2$, коэффициент поглощения по энергии α_z определяется из выражения

$$J = J_0 e^{-2\alpha x}. \quad (I.I2)$$

Таким образом, $\alpha_z = 2\alpha$.

Забегая вперед, отметим, что для плоской гармонической волны

$$\alpha = \frac{4}{3} \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \eta, \quad (I.I3)$$

где $[\eta] = \text{г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ сдвиговая вязкость среды. Более точную формулировку с учетом так называемой объемной вязкости и теплопроводности мы приведем позже.

Заметим, что коэффициент поглощения α пропорционален квадрату частоты. Этим объясняется, почему звук выстрела, в спектре которого присутствуют как высокие, так и низкие частоты, вблизи резкий, а вдали глухой и мягкий, поскольку на больших расстояниях остаются мало поглощенными только низкие частоты. Заметим еще, что кинематическая вязкость $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ для воды примерно в тысячу раз меньше, чем для воздуха; этим объясняется существенно меньшее поглощение звука в воде (в том числе, и в морской), чем в воздухе. Формулу (I.II) нельзя, конечно, применять для больших расстояний, поскольку для таких расстояний приходится иметь дело с расходящейся волной, а не плоской, для которой она написана.

и это обстоятельство следует учитывать.

Кроме пространственного коэффициента поглощения α часто пользуются временным коэффициентом поглощения α_2 . Этот коэффициент поглощения характеризуется временем τ , за которое амплитуда волны убывает в e раз:

$$P = P_0 e^{-\alpha_2 c t} = P_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.14)$$

Здесь c - скорость звука и $\alpha_2 = (\tau c)^{-1}$. Пользуются также логарифмическим коэффициентом поглощения, который определяется выражением

$$\gamma = \ln \frac{P_1}{P_2} = \gamma_0 (t + T). \quad (1.15)$$

Если $P_1 = P_0 e^{-\gamma_0 t}$, $P_2 = P_0 e^{-\gamma_0 (t+T)}$ (здесь T - период волны), γ представляет собой натуральный логарифм отношения амплитуд двух следующих друг за другом колебаний.

$$\gamma = \ln e^{-\gamma_0 T} = \gamma_0 T = \frac{c \alpha}{f} = \alpha \lambda, \quad (1.16)$$

где λ - длина волны звука.

В качестве примера приведем приближенные экспериментальные значения α/f^2 (имея в виду, что $\alpha \sim f^2$, f - частота в герцах) для воды, глицерина и воздуха в меггерцевом диапазоне частот:

вода	$\alpha/f^2 \cdot 10^{-17} \text{ см}^{-1} \text{ с}^2$	20
глицерин	" $\cdot 10^{-17}$ "	2600
воздух	" $\cdot 10^{-13}$ "	2

В воздухе, при прочих равных условиях, поглощение больше, чем в воде (примерно в 1000 раз), на что уже обращалось внимание. Говоря о поглощении, считалось, что это поглощение относится к распространению плоской волны. В общем случае, для неплоских волн (сферических, цилиндрических и т.д.) убыль амплитуды волны будет происходить за счет (кроме диссипации) геометрического расхождения. Кроме того, если в среде имеются неоднородности, приводящие к рассеянию на них акустических волн, энергия звука также будет убывать в заданном направлении распространения волны, уходя в стороны. В таких случаях принято говорить о затухании волн, считая, что поглощение относится только к случаю диссипативных потерь.

Полезно иметь представление, какая разность температур

возникает в газе на расстоянии половины длины звуковой волны, т.е. между участками сжатия и разрежения. Для того чтобы оценить величину ΔT , воспользуемся уравнением состояния для идеального газа в виде уравнения адиабаты Пуассона

$$P = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (1.17)$$

где P_0 - давление среды невозмущенной звуком (например, атмосферное давление, равное 10^6 бар = 1 атм), $P = P_0 + p$ - давление отличное от невозмущенного на величину звукового (избыточного) давления p и $\gamma = C_p/C_v$ отношение теплоемкостей. Кроме того, вспомним уравнение (1.10) (в отсутствие звука $P = \rho R T$). Уравнение адиабаты Пуассона можно записать в виде

$$\left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

и тогда

$$\left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}.$$

Заменяя ρ и P_0 соответственно на P/RT и P_0/RT_0 , найдем

$$T = T_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Поскольку $T \approx T_0 + \Delta T$, а $P \approx P_0 + p$, то, считая $\Delta T/T_0 \ll 1$, $p/P_0 \ll 1$, получим

$$1 + \frac{\Delta T}{T_0} \approx \left(1 + \frac{p}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad (1.18)$$

откуда (после разложения в ряд) имеем

$$\Delta T \approx \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p}{P_0} T_0. \quad (1.19)$$

Сделаем такие оценки. Пусть имеем два случая: в первом $P_0 = 10^3$ бар и во втором $P_0 = 1$ бар. Тогда согласно (1.19) в первом случае $\Delta T \approx 0.09^\circ\text{C}$, а во втором $\Delta T \approx 9 \cdot 10^{-5}^\circ\text{C}$ и отношения $\Delta T/T_0$ соответственно $3 \cdot 10^{-4}$ и $3 \cdot 10^{-7}$. Заметим, что в этих случаях соответственно p/P_0 10^{-3} и 10^{-6} . Таким образом,

$$\frac{\Delta T}{T_0} \lesssim \frac{p}{P_0}.$$

§ 2. Уравнения гидродинамики

После того как мы познакомились с основными величинами, характеризующими звуковое поле, получим связь между ними исходя из описания распространения волн на основе волнового уравнения. Это уравнение является следствием уравнений гидродинамики, с которыми нам предварительно и нужно, хотя бы и в простейшей форме, познакомиться.

Пусть мы имеем идеальную жидкость, т.е. жидкость, не имеющую ни вязкости, ни теплопроводности. К такой идеальной жидкости может быть также отнесен и газ, поскольку в большом числе случаев (по крайней мере, будем так считать) движения газа и жидкости описываются одними и теми же уравнениями. Конечно, любая жидкость или газ не являются идеальными, но об этом будет речь дальше. Получим уравнение движения сплошной среды, когда дискретность ее (молекулярная или атомная структура) не принимается во внимание. Для этого рассмотрим элемент поверхности среды

S и положим, что при $x = 0$ давление на него равно P_0 . При изменении положения элемента от $x = 0$ до dx будем иметь $P - P_0 = \frac{\partial P}{\partial x} dx = \frac{\partial P}{\partial x} dx$. Если выделенный элемент имеет скорость v , а плотность среды есть ρ , то по второму закону Ньютона

$$\rho S dx \frac{dv}{dt} = -S dx \frac{\partial P}{\partial x},$$

откуда

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x}.$$

(2.1)

В гидродинамике описание движения жидкости проводится двумя способами. Первый из них основан на выделении какого-либо элемента объема и далее изучается поведение гидродинамических параметров в этом элементе с течением времени, т.е. следят за перемещением выбранного элемента объема жидкости. Это так называемое лагранжево описание движения жидкости. В этом случае производная $\frac{dv}{dt}$ относится именно к данному элементу жидкости и может быть записана как $\frac{dv}{dt}$.

Другой, более часто применяемый способ основан на использовании представления о поле скоростей и ускорений, а также других гидродинамических параметров — ρ , P и т.д. в неподвижной системе координат, аналогично тому, как поступают в электродина-

мике. При этом открывается возможность широко пользоваться детально разработанными векторным и тензорным исчислениями. Координаты в таком представлении впервые введенном Эйлером, называются эйлеровыми координатами. Полная производная $\frac{dv}{dt}$ выражается как сумма так называемой локальной (местной) или субстанциональной производной $\frac{\partial v}{\partial t}$, относящейся к выделенному фиксированному элементу объема (субстанции) и связанной с нестационарностью движения жидкости, и конвективной производной $v \frac{\partial v}{\partial x}$ данного элемента жидкости, связанной с неоднородностью потока жидкости.

Действительно, изменение скорости данного элемента жидкости со временем в данной фиксированной точке пространства равно $\frac{\partial v}{\partial t}$. Однако это еще не будет в неподвижной системе координат полным изменением скорости данного элемента жидкости. За малый промежуток времени Δt этот элемент передвинулся на расстояние $\Delta x = v_x \Delta t$ (для простоты, ограничимся одномерным случаем), и если скорость данного элемента в момент t была v_x , то через время Δt она будет

$$v_x(x + v_x \Delta t, t + \Delta t) = v_x(x, t) + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x \Delta t. \quad (2.2)$$

Пренебрегая в разложении в ряд членами более высокого порядка, добавочное ускорение $\Delta v / \Delta t$ будет равно $v_x \partial v_x / \partial x$. Совершенно такое же рассуждение может быть использовано и для трехмерного случая.

Таким образом, для одномерного случая получим

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (2.3)$$

а в трехмерном случае

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v}. \quad (2.4)$$

Тогда уравнение движения (2.1) запишется в виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2.5)$$

Это уравнение называется уравнением Эйлера.

В тензорной записи это уравнение в отсутствии внешних объемных сил (например, силы тяжести) имеет вид (для трехмерного случая)

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i, j = x, y, z \quad (2.6)$$

(по индексам повторяющимся дважды, производится суммирование).

Рассматриваемая нами среда не имеет разрывов сплошности и поэтому количество жидкости, ушедшее из рассматриваемого объема среды, равно количеству жидкости, которое приходит в этот объем. Этот факт выражается уравнением непрерывности (неразрывности):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \quad (2.7)$$

или для трехмерного случая

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0; \quad (2.8)$$

в тензорной форме записи

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (2.9)$$

Оно легко получается аналогично тому, как получается уравнение движения.

Действительно, для одномерного случая (S — элемент поверхности)

$$S dx \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} dx \cdot S, \quad (2.10)$$

откуда и следует (2.7). Переход к трехмерному случаю не вызывает затруднений. Отметим, что если $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ и ρ не зависит от координат, т.е. если жидкость несжимаема, то

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.11)$$

Это есть условие несжимаемости жидкости в отсутствии источников и стоков жидкости.

Последнее уравнение, которое замыкает систему уравнений гидродинамики идеальной жидкости есть уравнение состояния. Распространение звука есть процесс адиабатический и уравнение состояния для газа определяется адиабатой Пуассона (I.17). По-

сколько для воздуха при комнатной температуре и атмосферном давлении $\gamma = 1,43$, то это уравнение нелинейно. Уравнение состояния в линейной форме (для малых деформаций) есть уравнение Гука для газа или жидкости и для всестороннего сжатия оно имеет вид

$$P = K \frac{\Delta \rho}{\rho}, \quad (2.12)$$

где K - так называемый модуль объемной упругости. Для жидкости аналогом уравнения адиабаты Пуассона (1.17) уравнением состояния является полуэмпирическое уравнение Тета

$$P = P_* \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\Gamma - 1 \right], \quad (2.13)$$

где P_* - внутреннее давление жидкости, физическая причина появления которого есть молекулярное взаимодействие (оно составляет для большинства жидкостей без пузырьков и различных включений несколько тысяч атмосфер), Γ - так называемый нелинейный параметр, который для воды, например, равен $\simeq 7$.

Уравнение движения (2.5), уравнение непрерывности (2.8) и уравнение состояния (1.17) или (2.13) содержат 5 гидродинамических переменных v_x, v_y, v_z, P, ρ , т.е. столько же (уравнение движения, поскольку скорость $\vec{v}$ есть вектор, - векторное, т.е. представляет собой систему из трех уравнений) сколько и уравнений, т.е. система гидродинамических уравнений является замкнутой.

В одномерном случае, имеем три неизвестных v, P и ρ и три уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0, \quad (2.15)$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^\gamma, \quad (2.16)$$

где P_0 и ρ_0 - давление и плотность в отсутствие звука (равновесные значения этих величин). Для жидкости вместо (2.16) нуж-

но использовать (2.13).

Выписанные уравнения движения и неразрывности в равной степени применимы как к газам, так и к жидкостям, лишенным вязкости и теплопроводности.

В действительности все газы и жидкости обладают вязкостью. Если, например, жидкость течет вдоль плоскости стенки, то на самой стенке скорость ее течения равна нулю, т.е. она "прилипает" к этой стенке, и только при удалении от стенки ее скорость становится такой же, какое значение она имеет и вдалеке от нее. Такое поведение скорости течения возникает из-за действия внутреннего трения жидкости, которое описывается законом Ньютона

$$\sigma = \rho \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.17)$$

где σ - касательное напряжение, v - скорость жидкости, y - координата нормальная к стенке и ρ - сдвиговая вязкость.

В случае вязкой жидкости в правую часть уравнения Эйлера нужно добавить член с вязкостью ρ и оно примет вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\rho}{\rho} \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \frac{\rho}{\rho} \text{grad div } \vec{v}. \quad (2.18)$$

Отметим, что в этом уравнении, которое носит имя французского ученого Навье и английского ученого Стокса, не фигурирует еще так называемая объемная вязкость ρ' (вязкость при изменении объема), которая также оказывает влияние на распространение звуковых волн. Для того чтобы учесть ρ' в уравнении (2.18), последний член в правой части нужно записать в виде $\frac{1}{3} \rho (\rho' + \frac{2}{3}) \times \text{grad div } \vec{v}$. Величины ρ , ρ' определяют (наряду с теплопроводностью) потери энергии звуковой волны при распространении. Поскольку условием несжимаемости является $\text{div } \vec{v} = 0$, то для несжимаемой жидкости в уравнении Навье - Стокса (2.18) последний член в правой части равен нулю.

При рассмотрении задач линейной акустики, когда амплитуда колебательной скорости в волне $\vec{v}$ мала (или, как говорят, бесконечно мала), т.е. когда волны не взаимодействуют друг с другом и распространяются независимо (выполняется принцип суперпозиции или наложения волн), то членом $(\vec{v} \nabla) \vec{v}$ пренебрегают, поскольку в акустике колебательная скорость $\vec{v}$ малая величина и этот член второго порядка малости. В теории волн конечной амплитуды (нелинейная акустика, о которой мы будем говорить

далее), такого пренебрежения уже не делают и тогда возникает большое количество различных нелинейных явлений.

§ 3. Волновое уравнение. Плоская волна

Волновое уравнение есть следствие уравнений гидродинамики и уравнения состояния. Получим его для случая бесконечно малых возмущений гидродинамических параметров — плотности, давления, колебательной скорости. В этом предположении, рассматривая наиболее простой случай одномерного распространения волны, в отсутствии внешних (объемных) сил, в неподвижной однородной среде и в отсутствии диссипативных сил, имеем в качестве исходных уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$

В уравнении Эйлера (3.1), в соответствии со сказанным выше, мы пренебрегли членом $v \partial v / \partial x$ и в уравнении непрерывности (2.15) членом $\rho \partial v / \partial x$ как величинами второго порядка малости, т.е. рассматриваем линейный случай.

Из уравнения состояния идеального газа (1.17)

$$P \rho^{-\gamma} = \text{const} \quad (3.3')$$

и $P = P_0 + p$ находим

$$d(P \rho^{-\gamma}) = -\gamma P \rho^{-\gamma-1} d\rho + \rho^{-\gamma} dP = 0,$$

или

$$\frac{\gamma P}{\rho} d\rho = dP = dp.$$

Отсюда

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma P}{\rho} = c^2,$$

или при малых ρ , $\partial p / \partial \rho = c_0^2$, где c_0 — скорость звука при малых амплитудах звукового давления*) $c \approx c_0$ и, таким

*) См. подробнее § 17.

образом

$$\rho = \rho_0 c^2. \quad (3.4)$$

Если теперь взять производную от (3.1) по x и производную по t от (3.2) и воспользоваться (3.4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} &= -\frac{c_0^2}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \\ -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Складывая эти уравнения, получим волновое уравнение для изменения плотности

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0. \quad (3.6)$$

В трехмерном случае это уравнение запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho = 0. \quad (3.7)$$

Такой же вид будет иметь волновое уравнение для ρ и v :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 v = 0. \quad (3.9)$$

Так как в акустических задачах движения жидкости незначительны и колебательная скорость v мала, то в большом числе случаев вихревое движение отсутствует и $\text{rot } \vec{v} = 0$ (но см. § 12). По этой причине колебательная скорость $\vec{v}$ может быть представлена в виде градиента некоторой скалярной функции φ :

$$\vec{v} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi, \quad (3.10)$$

которую называют потенциалом; им часто удобно пользоваться. Из линеаризованного уравнения движения имеем, после интегрирования,

$$\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \int \nabla \rho dt = -\nabla \left(\int \frac{\rho}{\rho_0} dt \right). \quad (3.11)$$

Отсюда получаем выражение для потенциала

$$\varphi = \frac{1}{\rho_0} \int p dt. \quad (3.12)$$

Проводя дифференцирование по времени, найдем выражение, связывающее p и φ

$$p = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (3.13)$$

Для потенциала также имеем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \varphi = 0. \quad (3.14)$$

Волновое уравнение в таком виде, как известно, имеет решение в форме Д'Аламбера

$$\varphi = f(t - \frac{x}{c}) + f(t + \frac{x}{c}), \quad (3.15)$$

где f есть произвольная функция, вид которой определяется характером возмущения φ . Это решение стационарно; форма волны при ее распространении не меняется. Если это возмущение представляет собой гармоническую волну, то для волны, бегущей в положительном направлении

$$\varphi = \varphi_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} = \varphi_0 e^{i(\omega t - kx)} = \varphi_0 \exp i(\omega t - kx), \quad (3.16)$$

Это выражение описывает собой плоскую волну с плоскостями (фронтами) равных фаз, перпендикулярными оси x . Так, если круглая пластинка радиусом R совершает колебания, перпендикулярные своей плоскости (поршневая диафрагма), то она будет создавать плоские волны, если только $R \gg \lambda$ (на расстояниях больших $\approx R^2/\lambda$ фронт уже не будет плоским, волна начнет расходиться; об этом мы будем говорить ниже). В качестве другого примера, где мы имеем дело с плоскими волнами, но которые с расстоянием не расходятся, а остаются плоскими, укажем на случай распространения звука в жесткой трубе с поперечным сечением меньше λ (см. § 7).

Согласно формулам (3.13) и (3.10)

$$p = \rho_0 \dot{\varphi} = i\omega \rho_0 \exp i(\omega t - kx), \quad (3.17)$$

$$v = -\kappa \varphi_0 \exp i(\omega t - \kappa x). \quad (3.18)$$

Из этих уравнений получим

$$\rho = -\omega \rho_0 \sin(\omega t - \kappa x), \quad (3.19)$$

$$v = -\kappa \varphi_0 \sin(\omega t - \kappa x), \quad (3.20)$$

откуда, разделив одно уравнение на другое, найдем основную формулу (I.I) для плоской волны, дающую связь между ρ , v , ρ_0 и c ж).

$$v = \frac{\rho}{\rho c}.$$

Отметим, что эта формула справедлива не только для взятого нами синусоидального профиля волны, но и для профиля волны произвольной формы, доказательство чего мы предоставляем проделать самому читателю.

Если плоская гармоническая волна распространяется не по направлению x , а под углом θ к оси x в плоскости XOY (двумерный случай), то тогда

$$\varphi = \varphi_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \vec{z}), \quad (3.21)$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}, \quad (3.22)$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор в направлении распространения волны, а $\vec{z}$ характеризует точку, для которой определяется φ , $\vec{k}$ - волновой вектор. В рассматриваемом случае

$$\vec{k} \vec{z} = k_x x + k_y y = k(x \cos \theta + y \sin \theta) \quad (3.23)$$

и

$$\varphi = \varphi_0 \exp i[\omega t - \kappa(x \cos \theta + y \sin \theta)]. \quad (3.24)$$

Подобным образом обстоит дело для трехмерного случая.

При выводе волнового уравнения (3.14) делался ряд предположений, к числу которых относятся малость числа Маха $M_{ax} = v/c$, отсутствие процессов диссипации, неподвижность среды, в которой

*) Для волны, бегущей в направлении $-x$, в правой части (I.I) будет знак „минус“.

распространяется звук. Кроме того, движение считалось безвихревым, среда непрерывной и однородной. Однако о форме волнового процесса не делалось никаких предположений.

Отметим, что в том случае, если волновое движение происходит по гармоническому закону (3.16) (а этим предположением мы пользовались), то уравнение (3.14) приобретает более простой вид

$$\nabla^2 \tilde{\varphi} + k^2 \tilde{\varphi} = 0, \quad (3.25)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число. Это уравнение носит название уравнения Гельмгольца. Для одномерного случая оно записывается в еще более простом виде

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k^2 \varphi = 0. \quad (3.26)$$

§ 4. Волновое уравнение для сферических и цилиндрических волн

Волновое уравнение в сферических координатах имеет вид.

$$\frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(z^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{1}{z^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{z^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (4.1)$$

Чтобы его получить, нужно в волновом уравнении (3.14) декартовы координаты x, y, z заменить на сферические координаты z, φ и θ согласно выражениям (см. рис. 4.1)

$$\begin{aligned} x &= z \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= z \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= z \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \varphi &= \arctg \frac{y}{x}, \\ \theta &= \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Если звуковые волны, излучаемые точечным источником (размер $\ll \lambda$), распространяются в однородной среде равномерно по всем направлениям, то в (4.1) потенциал φ будет функцией только z , т.е. зависит только от расстояния от источника и от времени и не будет зависеть от θ и φ . В этом случае мы будем иметь дело с шаровой или сферической волной, для которой волновое уравнение принимает вид

$$\frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(z^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (4.4)$$

Выполнив дифференцирование, найдем

$$\frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(z^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{2}{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{z} \frac{\partial^2 (\varphi z)}{\partial z^2}. \quad (4.5)$$

Поэтому (4.4) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 (z\varphi)}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 (z\varphi)}{\partial t^2}, \quad (4.6)$$

совпадающим с одномерным волновым уравнением (3.6), в котором φ заменено на $z\varphi$. Если ввести обозначение $f = z\varphi$, то решение волнового уравнения в сферических координатах, аналогично (3.15), будет иметь вид решения Д'Аламбера

$$\varphi = \frac{1}{z} f\left(t - \frac{z}{c_0}\right) + \frac{1}{z} f\left(t + \frac{z}{c_0}\right). \quad (4.7)$$

Первый член в этом выражении представляет собой расходящуюся волну, а второй — сходящуюся волну. Смысл этого решения состоит в том, что в точке z , удаленной от начала сферической системы координат ($z = 0$), где произошло произвольное возмущение в момент t , возникает такое же по форме возмущение в точке z , но с запозданием (если в (4.7) ограничиться только первым членом в правой части) во времени $t = z/c_0$. Таким образом, возмущение любой формы от точечного источника распространяется в среде со скоростью c_0 .

Пусть

$$\varphi = \frac{A}{z} \exp i\omega\left(t - \frac{z}{c_0}\right) = \frac{A}{z} \exp i(\omega t - kz), \quad (4.8)$$

где A — некоторая постоянная, зависящая от условий задачи. Найдем, используя (3.17) и (3.18),

$$p = \rho_0 \dot{\varphi} = i\omega \rho_0 \frac{A}{z} \exp i(\omega t - kz), \quad (4.9)$$

$$v = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (ik + \frac{i}{z}) \frac{A}{z} \exp i(\omega t - kz), \quad (4.10)$$

что дает для действительных частей p и v

$$p = -\frac{\omega \rho_0}{z} A \sin(\omega t - kz), \quad (4.11)$$

$$v = -\frac{k}{z} A \sin(\omega t - kz). \quad (4.12)$$

Таким образом, при больших z (дальнее поле) амплитуды p и v убывают обратно пропорционально z .

Сделав подстановку

$$\frac{1}{z} = a \cos \alpha, \quad \frac{1}{kz} = a \sin \alpha,$$

получим

$$v = -\frac{kA}{z \cos \alpha} \sin(\omega t - kz - \alpha), \quad (4.13)$$

$$\alpha = \arctg \frac{1}{kz} \quad (4.14)$$

Сравнивая формулы (4.11) и (4.12), видим, что для сферической волны v отстает по фазе от p на угол α , определяемый формулой (4.14).

Разность фаз α быстро уменьшается с увеличением z .

Так, при $z \gg \lambda$ эта разность фаз пренебрежимо мала, тогда как при $z \approx \lambda$, $\alpha \approx 90^\circ$ и $\cos \alpha = 0,98$. Эта разность фаз имеет существенное значение в задаче об излучении колеблющейся сферы, о чем мы скажем позже. Заметим, что для дальнего поля при $z = \infty$, $v = p/c$, т.е. связь между p , v и pc такая же, как и для плоских волн.

Цилиндрические координаты (см. рис. 4.2), определяются формулами

$$x = z \cos \theta, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (4.15)$$

$$y = z \sin \theta, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{z},$$

и волновое уравнение в цилиндрических координатах записывается в виде (это уравнение получается, если в волновом уравнении в декартовых координатах x , y , z заменить на координаты z , θ , z согласно (4.15)):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right). \quad (4.16)$$

Если рассматривать наиболее простой случай осесимметричных волн, когда $\varphi = \varphi(z)$ и нет зависимости от θ и z ,

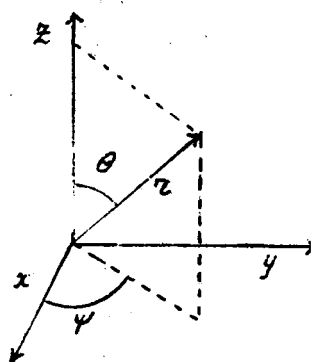


Рис. 4.1

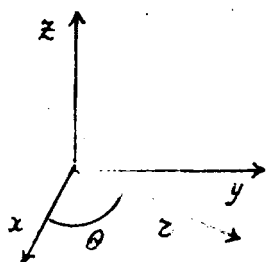


Рис. 4.2

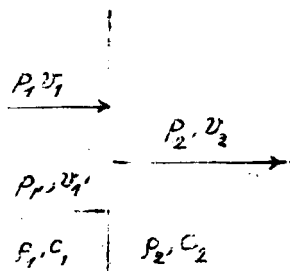


Рис. 6.1

то уравнение (4.16) упрощается и приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (4.17)$$

В дальнем поле, при больших z приближенный вид этого волнового уравнения с точностью до членов, содержащих $1/z^2$, будет таким

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{c_0^2}{\sqrt{z}} \frac{\partial^2 (\sqrt{z} \varphi)}{\partial z^2}. \quad (4.18)$$

Решение этого уравнения записываем в виде

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{z}} \psi_1 \left(t - \frac{z}{c_0} \right) + \frac{1}{\sqrt{z}} \psi_2 \left(t + \frac{z}{c_0} \right), \quad (4.19)$$

где $\psi_{1,2}$ — произвольные функции указанного аргумента; первый член означает расходящуюся волну, а второй — сходящуюся.

Таким образом, оставляя только первый член, имеем

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{z}} \psi \left(t - \frac{z}{c_0} \right), \quad (4.20)$$

т.е. амплитуда цилиндрической осесимметричной волны обратно пропорциональна $\sqrt{z}$, тогда как для сферической волны эта амплитуда обратно пропорциональна z .

Вспоминая, что $v = -\partial \varphi / \partial z$ и $p = \rho \dot{\varphi}$, получаем в нашем случае для дальнего поля

$$v = -\frac{1}{c\sqrt{z}} \frac{\partial \psi \left(t - \frac{z}{c_0} \right)}{\partial t}, \quad (4.21)$$

$$p = \frac{\rho}{\sqrt{z}} \frac{\partial \psi \left(t - \frac{z}{c_0} \right)}{\partial t}, \quad (4.22)$$

откуда, в частности, следует, что $v = p / \rho c_0$, т.е. такая же формула, как и для плоской волны (1.1).

В случае гармонической волны $\varphi = \varphi_m \exp i(\omega t - kx)$, уравнение (4.6) приводится к виду

$$\frac{d^2 \varphi_m}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d \varphi_m}{dz} + k^2 \varphi_m = 0. \quad (4.23)$$

Это известное уравнение Бесселя нулевого порядка, решение которого выражается через специальные функции Бесселя и Неймана, о чем

здесь говорить не будем.

§ 5. Энергия и импульс акустического поля

Для того чтобы определить энергию, переносимую звуковой волной, среду будем считать неподвижной. Воспользуемся уравнением Эйлера, в котором в силу малости акустической скорости v , пренебрежем конвективным членом как членом второго порядка малости. Оно будет иметь вид

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla p = 0. \quad (5.1)$$

Умножив это уравнение скалярно на $\vec{v}$, получим

$$\rho_0 \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla p = 0. \quad (5.2)$$

Поскольку

$$\vec{v} \nabla p = \operatorname{div}(\rho \vec{v}) - \rho \operatorname{div} \vec{v}, \quad (5.3)$$

то

$$\rho_0 \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \rho \operatorname{div} \vec{v} = -\operatorname{div}(\rho \vec{v}). \quad (5.4)$$

Но из уравнения непрерывности (при $\rho \approx \rho_0$) и того, что $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0^2$, имеем

$$-\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (5.5)$$

и тогда (5.4) запишется в виде

$$\rho_0 \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0^2} \rho \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \vec{v}), \quad (5.6)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho_0^2} \frac{p^2}{2} \right) = -\operatorname{div}(\rho \vec{v}). \quad (5.7)$$

Первый член в скобках представляет собой кинетическую энергию, а второй — потенциальную; та и другая энергии отнесены к единице объема. То, что второй член есть потенциальная энергия, следует из такого рассуждения. Потенциальная энергия элемента объема (энергия упругой деформации) равна, по определению, той работе,

которую нужно совершить, чтобы изменить объем на величину dV . Тогда $-p dV/V = p dp/p$ есть работа против сил избыточного давления. После интегрирования по V получаем (считаем $p \approx p_0$), что второй член в скобке в (5.7), равный $p^2/p_0 c_0^2$, представляет собой потенциальную энергию единицы объема. Таким образом, для неподвижной жидкости и неизменной ее массы выражение

$$\varepsilon = \frac{p_0 v^2}{2} + \frac{p^2}{2 p_0 c_0^2} \quad (5.8)$$

представляет собой плотность энергии звукового поля, она равна сумме кинетической и потенциальной энергии единицы объема, а уравнение

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(p \vec{v}) = 0 \quad (5.9)$$

выражает собой закон сохранения звуковой энергии в дифференциальной форме.

Вектор

$$\vec{J} = p \vec{v} \quad (5.10)$$

есть вектор плотности потока энергии звука. Если полную энергию объема V обозначить через E , то

$$E = \int_V \varepsilon dV \quad (5.11)$$

и

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \oint J_n dS = \int p v_n dS. \quad (5.12)$$

Это интегральная форма закона сохранения энергии.

Вектор $\vec{J} = p \vec{v}$, как об этом уже шла речь ранее, называют вектором Умова - Пойнтинга; он представляет собой вектор плотности потока звуковой энергии через единицу поверхности. Напомним, что среднее по времени значение энергии, переносимое звуковой волной через единицу поверхности, в акустике называют силой звука или интенсивностью звука (см. также § I).

Акустическая волна, занимающая конечную область неограниченного пространства (волновой пакет), обладает импульсом, который можно определить следующим образом. Плотность среды $\rho = \rho_0 + \rho'$, где ρ' - изменение ее плотности, вызываемое звуковой волной и ρ_0 - равновесное значение плотности. Импульс единицы объема

жидкости $\vec{q}$ определяется выражением $\vec{q} = \rho \vec{v}$. Подставляя сюда $\rho = \rho_0 + \rho'$ и воспользовавшись соотношением $\rho' = \rho/c^2$, получаем

$$\vec{q} = \rho_0 \vec{v} + \frac{\vec{J}}{c^2}, \quad (5.13)$$

поскольку $\vec{J} = \rho \vec{v}$. Первый член для потенциального движения, когда $\vec{v} = -\nabla \varphi$ обращается в нуль. Это можно показать, используя преобразование объемного интеграла в поверхностный и того обстоятельства, что $\oint \varphi dS$ равен нулю вне пространства занимаемого волновым пакетом. После интегрирования получим поэтому отличный от нуля результат

$$\int \vec{q} dV = \frac{1}{c^2} \int \vec{J} dV. \quad (5.14)$$

Мы приходим к выводу, что распространение звука (волнового пакета) приводит к переносу вещества жидкости, т.е. к ее движению или течению. Такое течение в акустике называют акустическим течением. Вид и характер этого течения зависит от геометрии звукового поля, создаваемого излучателем (течение в клавете, размеры которой больше длины волны λ , течение в трубе и т.д.). Скорость акустического течения значительно меньше колебательной скорости v , и сам эффект представляет собой эффект второго порядка по v , однако с ним нередко приходится встречаться, в особенности в физике и технике ультразвука.

§ 6. Отражение и преломление плоских волн
на границах раздела

До сих пор мы рассматривали звуковое поле в неограниченной среде. Перейдем к случаю, когда имеются какие-либо границы раздела. Остановимся на наиболее простом случае, когда граница раздела между двумя однородными средами плоская и на эту границу нормально к ней падает плоская гармоническая волна (Рис.6.1). Пусть первая среда имеет плотность ρ_1 и c_1 - скорость звука в ней; вторая среда имеет плотность ρ_2 и скорость звука в ней c_2 . Запишем потенциалы для падающей, отраженной и проходящей волн; ось x пусть совпадает с направлением падающей и проходящей волн:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{1m} e^{i(\omega t - kx)} \\ \varphi_1' &= \varphi_{1m}' e^{i(\omega t + kx)} \\ \varphi_2 &= \varphi_{2m} e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Соотношения между акустическими величинами падающей, отраженной и проходящей волн определяются граничными условиями при $x=0$, которые для акустических давлений p и скорости v будут

$$\begin{aligned} p_1 + p_1' &= p_2, \\ v_1 + v_1' &= v_2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Эти условия следуют из необходимости сохранения непрерывности p и нормальной компоненты v на границе раздела. Если бы был скачок давления, на границе был бы источник звука, а если бы был скачок скорости, то был бы скачок смещения, т.е. разрыв сплошности среды.

Заметим, что для плоской волны $p = \rho \partial \varphi / \partial t$ и $v = -\partial \varphi / \partial x$, и граничные условия, выраженные через потенциал будут

$$\begin{aligned} p_1 \dot{\varphi}_1 + p_1 \dot{\varphi}_1' &= p_2 \dot{\varphi}_2, \\ \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1 - \varphi_1') &= p_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Для плоской волны связь между p, v, p, c дается формулами

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1 c_1 v_1, \\ p_1' &= -p_1 c_1 v_1', \\ p_2 &= p_2 c_2 v_2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Подставляя эти значения в (6.2), получим при $x=0$ для колебательных скоростей

$$\begin{aligned} v_1 + v_1' &= v_2, \\ R_1 (v_1 - v_1') &= R_2 v_2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где акустические сопротивления сред 1 и 2 равны соответственно

$$\begin{aligned} R_1 &= p_1 c_1, \\ R_2 &= p_2 c_2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

При $x=0$ будем иметь для звуковых давлений

$$\begin{aligned} p_1 + p_1' &= p_2, \\ \frac{p_1 - p_1'}{R_1} &= \frac{p_2}{R_2} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Из полученных выражений находим коэффициенты отражения K_2 и прохождения K_2 , которые для p и v имеют вид

$$\begin{aligned} K_{pz} &= \frac{p_1'}{p_1} = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}, \\ K_{pt} &= \frac{p_2}{p_1} = \frac{2R_2}{R_1 + R_2}, \\ K_{vz} &= \frac{v_1'}{v_2} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}, \\ K_{vt} &= \frac{v_2}{v_1} = \frac{2R_1}{R_1 + R_2}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из (6.8) вытекает ряд важных следствий. Во-первых, если акустические сопротивления обеих сред одинаковы, то $K_{pz} = K_{vz} = 0$ и падающая волна беспрепятственно проходит во вторую среду; отражение отсутствует.

Во-вторых, если $R_2 \gg 1$ (вторая среда акустически более жесткая (например, вода), чем первая (например, воздух), то из третьего выражения (6.8) следует, что числитель будет отрицательным, т.е. фаза колебательной скорости v_1 меняется почти на π . Из первого выражения (6.8) следует, что при отражении от более жесткой среды фаза давления приблизительно остается постоянной. В случае $R_2 = \infty$ (абсолютно твердая поверхность) фаза скорости в отраженной волне меняется точно на π и $v_1 + v_1' = 0$ и амплитуда скорости на границе равна нулю, тогда как $p_1 + p_2 = 2p_1$, т.е. на границе амплитуда давления оказывается в два раза больше в отраженной волне. Примерно так обстоит дело, например, когда звук распространяется из воздуха в воду; в этом случае в единицах СИ $R_1 = \rho_1 c_1 = 41$, а для воды $R_2 = \rho_2 c_2 = 1,5 \cdot 10^5$ и $R_2 \gg 1$.

В третьих, в волне, прошедшей во вторую среду, ρ и v оказываются в фазе.

В дополнение к формулам (6.8) приведем выражения для коэффициентов отражения и прохождения, для интенсивности. Имея в виду, что $T = \frac{p_2^2}{\rho c} = \rho c v_2^2$, коэффициент прохождения и отражения по энергии равен

$$K_{\pm 2} = \frac{R_2 v_2^2}{R_1 v_1^2} = \frac{4 R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}. \quad (6.9)$$

Эта формула, в силу симметрии ее относительно R_1 и R_2 , показывает, что коэффициент прохождения по энергии будет одинаковым независимо от того, идет ли волна из воздуха в воду или, наоборот, из воды в воздух, что есть следствие закона сохранения энергии.

При нормальном падении гармонических волн на акустически жесткую границу ($R_2 \gg R_1$), когда $K_{p2} \approx 1$, как уже отмечалось, возникнет отраженная волна $p_1' = p_{10} \exp i(\omega t + Kx)$; при этом $p_{10} \approx p_{10}$. Таким образом, в первой среде поле давлений

$$p = p_{10} \exp i(\omega t - Kx) + p_{10} \exp i(\omega t + Kx) = 2p_{10} \cos Kx \exp i\omega t \quad (6.10)$$

с амплитудой $2v_0 \cos Kx$, зависящей от x и K ($p_0 = p_{10} = p_{10}$).

Поле колебательной скорости имеет вид

$$v = v_{10} \exp i(\omega t - kx) - v_{10} \exp i(\omega t + kx) = i2v_0 \sin kx \exp i\omega t \quad (6.11)$$

с амплитудой $2v_0 \sin kx$ ($v_0 = v_{10} = v_{10}$). Таким образом, перед границей возникает интерференционное поле, образуются стоячие волны полей p и v , при этом на границе $p_{10} = 2p_0$ и $v_{10} = 0$.

В другом предельном случае абсолютно мягкой границы $R_2 \ll 1$, $p_{10} = 0$ и $v_{10} = 2v_0$. В промежуточном случае интерференционное поле определяется коэффициентами отражения и прохождения. При этом следует иметь в виду, что во второй среде, куда проникнут волны, имеются потери их энергии. Во многих акустических задачах стремятся создать такие потери как можно большими. Так обстоит, например, дело при некоторых типах звукопоглотителей, устройств, необходимых в архитектурной акустике и других прикладных задачах.

В решении таких задач чрезвычайно полезным является введение понятия нормального импеданса границы.

В практических задачах об отражении и прохождении звука при наличии границ раздела, при распространении звука в трубах и других сложных акустических системах, границу или препятствие характеризуют комплексным импедансом границы.

При рассмотрении нормального отражения от границы, характеризующейся акустическим сопротивлением $R_2 c_2$, получим для коэффициента отражения:

$$K_{p2} = \frac{R_2 c_2 - R_1 c_1}{R_2 c_2 + R_1 c_1} \quad (6.12)$$

Акустическое сопротивление $R_2 c_2$ можно представить следующим образом. В плоской волне звуковое давление p_2 и колебательная скорость v_2 связаны соотношением $p_2/v_2 = R_2 c_2$. Таким образом, границу можно считать некоторой плоскостью ("щитом"), которая под действием p_2 будет вести себя так же, как если бы это была вторая среда. Эту величину назовем импедансом границы Z_{2p} . Тогда

$$K_{p2} = \frac{Z_{2p} - R_1 c_1}{Z_{2p} + R_1 c_1} \quad (6.13)$$

Отметим, что, строго говоря, такое введение величины Z_{2p}

справедливо только для нормального падения и ее называют нормальным импедансом границы:

$$Z_{np} = \frac{p}{v_n}, \quad (6.14)$$

где v_n - нормальная компонента вектора колебательной скорости частиц, перпендикулярная границе. Этот импеданс можно рассчитать и измерить, и все выкладки, проведенные выше удобно проводить в терминах нормальных импедансов. Для бегущей волны в неограниченной среде нужно взять Z_{np} , равному $\rho_1 c_1$, т.е. равному волновому сопротивлению среды, тогда как, если стенка имеется и она абсолютно жесткая, $Z_{np} = \infty$. Величину, обратную Z_{np} ,

$$Y = \frac{1}{Z_{np}}, \quad (6.15)$$

называют проводимостью или адмитансом границы. При наличии потерь во второй среде (или когда вместо стенки имеется тонкий слой или несколько слоев), на которую падает плоская волна, Z_{np} представляет собой комплексную величину

$$Z_{np} = R_1 + iX. \quad (6.16)$$

Если вторая среда имеет конечную толщину (слой), то $Z_{np} \neq \rho_2 c_2$ и Z_{np} будет сложной функцией частоты.

Обратимся теперь к случаю падения на границу раздела плоской волны под углом (наклонное или косое падение (рис. 6.2)). Согласно обозначениям, указанным на этом рисунке, можно записать:

$$\varphi = A \exp i(\omega t - \vec{k} \vec{r}), \quad (6.17)$$

где для падающей, отраженной и преломленной волн имеем

$$\vec{k} \vec{r} \begin{cases} \text{пад. волна (} i \text{)} & k_1(x \cos \alpha + z \sin \alpha), \\ \text{отр. волна (} z \text{)} & k_1(-x \cos \beta + z \sin \beta), \\ \text{прел. волна (} t \text{)} & k_2(x \cos \gamma + z \sin \gamma), \end{cases}$$

где $k_1 = \omega/c_1$ и $k_2 = \omega/c_2$ и для потенциалов этих волн получим

$$\begin{aligned} \varphi_i &= A_i \exp i[\omega t - k_1(x \cos \alpha + z \sin \alpha)], \\ \varphi_z &= A_z \exp i[\omega t + k_1(-x \cos \beta + z \sin \beta)], \\ \varphi_t &= A_t \exp i[\omega t - k_2(x \cos \gamma + z \sin \gamma)]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

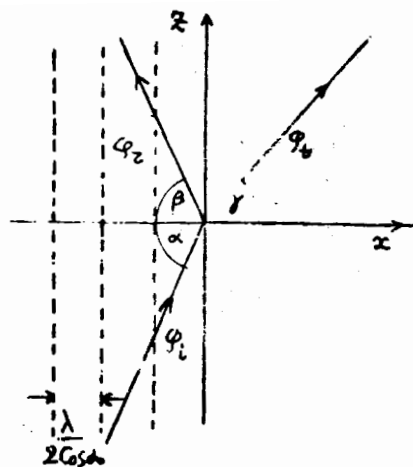


Рис. 6.2

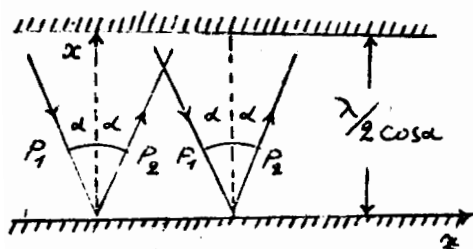


Рис. 7.1

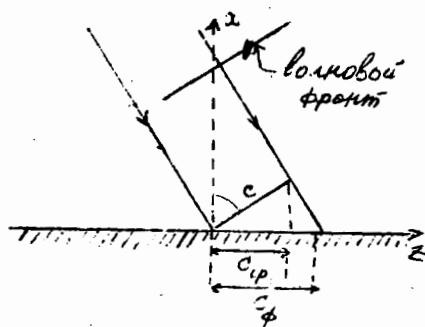


Рис. 7.2

Для звукового давления граничные условия имеют вид $p_1 + p_2 = p_0$, откуда, переходя к потенциалам, получим

$$\rho_1(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) = \rho_2 \dot{\varphi}_2. \quad (6.19)$$

Для колебательной скорости

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (6.20)$$

Воспользовавшись (6.18), получим

$$\begin{aligned} i\omega\rho_1 \exp i\omega t [A_1 \exp(-ik_1 z \sin \alpha) + A_2 \exp(-ik_1 z \sin \beta)] = \\ = i\omega\rho_2 \exp i\omega t [A_2 \exp(-ik_2 z \sin \gamma)]; \\ i k_1 \exp i\omega t [A_1 \cos \alpha \exp(-ik_1 z \sin \alpha) - A_2 \cos \beta \exp(-ik_1 z \sin \beta)] = \\ = i k_2 \exp i\omega t A_2 \cos \gamma \exp(-ik_2 z \sin \gamma). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Поскольку эти уравнения справедливы при любых z , то коэффициенты при z должны быть равны, откуда имеем

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \beta, \\ k_1 \sin \alpha &= k_2 \sin \gamma. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Из этих уравнений получаем $\alpha = \beta$, т.е. угол падения равен углу отражения и

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{n_{\text{ак}}}, \quad (6.23)$$

где $n_{\text{ак}} = c_2/c_1 = \sin \gamma / \sin \alpha$ - акустический коэффициент преломления. Заметим, что формулы (6.23) дающие связь между углами α и γ , а также скоростями c_1 и c_2 , представляют собой закон Снеллиуса. Обычно в оптике скорость света в материале линзы c_2 меньше скорости света c_1 в среде, где помещена эта линза (воздух, вода), так что оптический коэффициент преломления $n_{\text{опт}} = c_2/c_1 < 1$; собирательные (фокусирующие) линзы имеют в оптике, как известно, выпуклые поверхности. Часто для фокусировки звука в воде, где скорость его c_1 , применяют линзы из плексиглаза; скорость продольных волн в нем c_2 больше чем c_1 . Таким образом, в этом случае $n_{\text{ак}} = c_2/c_1 > 1$. Такое отличие $n_{\text{ак}}$ от $n_{\text{опт}}$ в рассмотренных оптическом и акустическом

случаях приводят к выводу о том, что фокусирующие линзы из плексигласа, помещенные в воду, должны иметь вогнутые поверхности (часто одна сторона линзы делается плоской, другая - вогнутой). Этим обстоятельством пользуются в технике и экспериментальных исследованиях. Разумеется, необходимая геометрия акустических линз может быть рассчитана теоретически.

С учетом полученных соотношений можно найти значения амплитуд A_i , A_z , A_t и интенсивностей J_i , J_z , J_t из уравнений

$$\begin{aligned} \rho_1(A_i + A_z) &= \rho_2 A_t, \\ K_1 \cos \alpha (A_i - A_z) &= K_2 \cos \gamma A_t. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Из этих уравнений найдем

$$\frac{A_z}{A_i} = K_z = \frac{R_2 \cos \alpha - R_1 \cos \gamma}{R_2 \cos \alpha + R_1 \cos \gamma}. \quad (6.25)$$

Заметим, что, полагая $\alpha = \beta = 0$ (нормальное падение), приходим к полученной ранее формуле для K_{p2} (6.8). Для коэффициента прохождения получим

$$\frac{A_t}{A_i} = K_t = \frac{2 \rho_1 \rho_2 \cos \alpha}{R_2 \cos \alpha + R_1 \cos \gamma}. \quad (6.26)$$

Если обе среды I и 2 имеют одинаковые плотности и $\rho_1 = \rho_2$, то из (6.25) и (6.26) следуют соотношения

$$\frac{A_z}{A_i} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(\alpha + \gamma)}, \quad (6.27)$$

а при $\rho_1 c_1^2 = \rho_2 c_2^2$ (одинаковые упругости)

$$\frac{A_z}{A_i} = \frac{\tan(\alpha - \gamma)}{\tan(\alpha + \gamma)}. \quad (6.28)$$

Эти формулы соответствуют формулам Френеля в оптике при отражении света, поляризация которого в первом случае параллельна, а во втором - перпендикулярна плоскости падения.

Подобные формулы нетрудно получить для коэффициентов отражения, преломления и прохождения для интенсивностей, из которых

приведем формулу для коэффициента отражения по интенсивности:

$$\frac{I_2}{I_i} = \frac{R_1 \cos \gamma - R_2 \cos \alpha}{R_1 \cos \gamma + R_2 \cos \alpha} \quad (6.29)$$

Из условия сохранения энергии можно написать

$$1 - K_z = K_t = \frac{4 R_1 R_2 \cos \alpha \cos \gamma}{(R_1 \cos \gamma + R_2 \cos \alpha)^2} \quad (6.30)$$

Заметим, что если $K_z = 0$ и $K_t = 1$ (полная прозрачность), должно соблюдаться условие $R_1 \cos \gamma = R_2 \cos \alpha$ углы α и γ связаны законом преломления (6.23).

Из (6.30) следует, что при $c_2/c_1 > 1$ угол преломления γ должен быть больше, чем угол падения α . Если угол α увеличивать, то направление распространения преломленной волны будет приближаться к направлению оси x , т.е. вдоль границы раздела. Наконец, при некотором угле $\alpha_{кр}$ преломленная волна пойдет по границе раздела, а при углах $\alpha > \alpha_{кр}$ преломленной волны не будет, а только волна отраженная.

Если угол падения α больше некоторого критического угла $\alpha_{кр}$, т.е. если

$$\alpha \geq \alpha_{кр} = \arcsin \frac{c_1}{c_2}, \quad (6.31)$$

то волна будет полностью отражаться от границы раздела. Как принято говорить, будет иметь место явление полного внутреннего отражения (или просто "полного отражения").

§ 7. Акустические волноводы; нормальные волны

Вернемся к случаю отражения плоских волн от жесткой границы раздела и рассмотрим еще раз поле интерференции волны падающей и отраженной для косого падения. На рис. 7.1 изображено падение на границу под углом α плоской гармонической волны частоты

$\omega = 2\pi f$; она характеризуется звуковым давлением P_1 и волновым числом $k = \omega/c$, где c — скорость звука в среде перед границей. Суммарное поле звукового давления перед границей будет состоять из поля падающей волны $P_1 = P_0 \exp i(\omega t + k_x x + k_z z)$.

и поля отраженной волны $P_2 = P_{20} \exp i(\omega t - k_x x + k_z z)$.
Здесь

$$K_x = k \cos \alpha, \quad K_z = k \sin \alpha, \quad (7.1)$$

$$k^2 = K_x^2 + K_z^2. \quad (7.2)$$

Полное поле звукового давления перед границей запишется в виде

$$P = P_1 + P_2 = P_{10} \exp i(\omega t + K_z z) \left[\exp i K_x x - \exp(-i K_x x) \right] = 2 P_{10} \cos K_x x \exp i(\omega t + K_z z), \quad (7.3)$$

где мы использовали граничное условие $P_{10} = P_{20}$.

При $x = 0$, $P_{\max} = 2 P_{10}$ и при $x = \lambda/2 \cos \alpha$, $P_{\max}$ тоже равно $2 P_{10}$. Для нормальных составляющих колебательной скорости:

$$v_1^H = v_{10}^H \exp i(\omega t + K_x x + K_z z),$$

$$v_2^H = v_{20}^H \exp i(\omega t - K_x x + K_z z).$$

Из граничного условия $v_{10}^H + v_{20}^H = 0$ следует, что $v_{20}^H = -v_{10}^H$.
Поступая аналогично тому, как это было при получении (7.3), имеем

$$v_H = 2 v_{10}^H i \sin K_x x \exp i(\omega t + K_z z). \quad (7.4)$$

Из (7.4) находим, что $v_H = 0$ при $x = 0$ на границе и $v_H = 0$ при $x = \lambda/2 \cos \alpha$. Таким образом, если при $x = \lambda/2 \cos \alpha$ поставить другую жесткую границу (стенку), то в нашем рассмотрении ничего не изменится и мы приходим к выводу, что интерференционное поле в случае двух жестких стенок с указанным расстоянием между ними такое же, как и вычисленное поле, соответствующее формулам (7.3) и (7.4). Мы получаем двумерный или плоский волновод с жесткими стенками, в котором волны, падающие на стенку под углом α , курсируют между двумя этими стенками, двигаясь (если $\alpha \neq 0$) в направлении z рис. 7.1; при $\alpha = 0$ в направлении z волны не распространяются и превращаются в чисто стоячие волны (поперечный резонанс). Фазовая скорость распространения c_ϕ в направлении z , т.е. скорость точки пересечения волны со стенкой в направлении z (ее называют также скоростью следа), определяется из соотношения

$$K_z = k \sin \alpha = \frac{\omega}{c} \sin \alpha = \frac{\omega}{c_\phi} = \frac{c}{\sin \alpha}. \quad (7.5)$$

Из этой формулы следует, что $C_\phi > C$. Ясно, что групповая скорость C_{gp} , характеризующая перенос энергии вдоль волновода, меньше, чем C , поскольку при движении энергии в направлении, волны будут попеременно отражаться от стенок волновода. Скорость передачи энергии по z или групповая скорость, по определению z равна $C_{gp} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z}$. Дифференцируя $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2}$ по ω , найдем, поскольку

$$\frac{\partial k_z}{\partial \omega} = \frac{k}{k_z} \cdot \frac{1}{C} = \frac{1}{C \sin \alpha}, \quad (7.6)$$

$$C_{gp} = C \sin \alpha. \quad (7.7)$$

На рис. 7.2 показано соотношение между C , C_ϕ и C_{gp} .

Естественно, что результаты проведенного рассмотрения могут быть получены на основе волнового уравнения. Потенциал скорости можно записать в виде

$$\Phi(x, z, t) = \varphi(x, z) \exp i \omega t. \quad (7.8)$$

Подставляя это значение потенциала в волновое уравнение, получаем уравнение Гельмгольца (3.25) для двумерного случая

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{C^2} \varphi = 0; \quad (7.9)$$

или, используя представление функции $\varphi(x, z)$ в виде

$$\varphi(x, z) = \tilde{\varphi}(x) \exp(-i k_z z) \exp(i \omega t) \quad (7.10)$$

(имея в виду, что волны распространяются в положительном направлении z) и подставляя (7.10) в (7.9), получаем уравнение

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}}{dx^2} + K_x^2 = 0. \quad (7.11)$$

Решение этого уравнения представляет собой совокупность двух волн, распространяющихся по направлениям $\pm x$ навстречу друг другу:

$$\tilde{\varphi}(x) = [A \exp(-i k_x x) + B \exp(i k_x x)] \exp(i \omega t). \quad (7.12)$$

Граничное условие $\varphi'_0 = 0$ при $x = 0$ дает $A = B$. Исполь-

зудя далее связь потенциалов $\tilde{\varphi}$ с ρ и v

$$\rho = \rho \tilde{\varphi}; \quad v_x = -\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}, \quad v_z = -\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z},$$

получаем выражения (7.3) и (7.4), к которым мы пришли ранее.

Граничное условие v_z'' при $x=0$ (здесь l - расстояние между стенками) приводит к дисперсионному уравнению (оно следует также из (7.4))

$$\sin(k_x l) = 0. \quad (7.13)$$

Решение этого уравнения есть дискретный ряд значений

$$k_x = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.14)$$

Так как

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2,$$

то волновые числа распространения k_z (k_x называют поперечным волновым числом и k_z - продольным волновым числом) имеют вид

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}. \quad (7.15)$$

При $n=0$ $k_z = \omega/c$, т.е. мы имеем в этом случае дело с плоской волной, распространяющейся со скоростью c в среде в направлении z , без дисперсии.

Решение волнового уравнения для рассматриваемого случая плоского волновода с жесткими стенками - набор гармонических волн с частотой ω :

$$\Phi_n = A_n \cos \frac{n\pi x}{l} \exp i(\omega t - k_z z). \quad (7.16)$$

Амплитуда этих волн зависит от x , так как определена функцией $\cos n\pi x/l$; при этом каждая из волн номера n , распространяясь по z , не меняет своей формы. Согласно (7.15) и тому, что $k_z = \omega/c_\phi$, фазовая скорость распространения c_ϕ равна при $n \neq 0$ (см. также (7.5) и (7.15))

$$c_{\phi n} = c \left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (7.17)$$

где $\omega_n = \omega_{kp} = \frac{n\pi c}{l}$ называется критической частотой (или частотой отсечки) номера n . Это наименьшая частота, при которой волна номера n может распространяться.

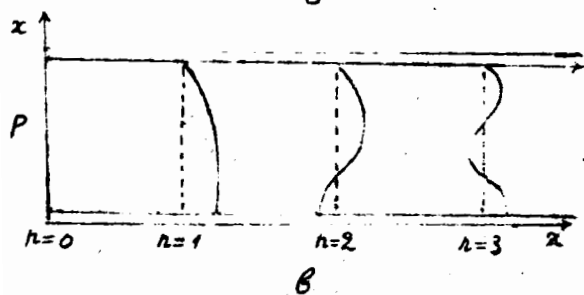
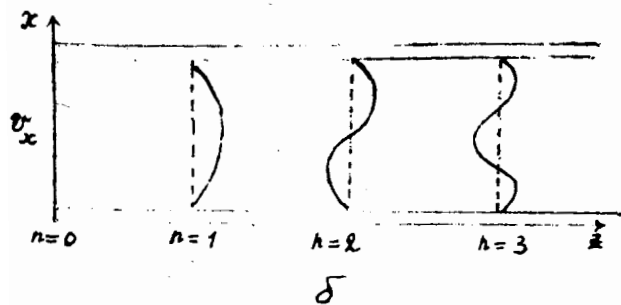
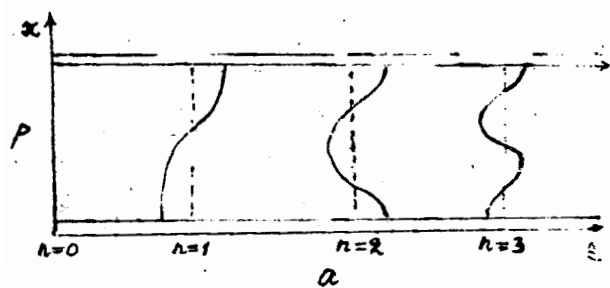


Рис. 7.3

Такие волны, стоячие по x и бегущие по z называют нормальными волнами или модами. Число n называется порядком нормальной волны или моды.

Критическая частота $\omega_{кр}$ растёт с увеличением n ; ниже критического значения $\omega_{кр}$, как уже говорилось, нормальная волна не распространяется. В этом случае имеет место синфазное колебание, амплитуда которого меняется с z по экспоненциальному закону и волновод заперт для моды данного порядка. Такие нормальные волны или моды называются нераспространяющимися.

Действительно, если частоты ниже $\omega_{кр}$, то при $n > 0, k_x > k$

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} = \pm i k \sqrt{\left(\frac{k_x}{k}\right)^2 - 1} = \pm i k \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{k^2 \ell^2} - 1} \quad (7.18)$$

и (см. (7.3); (7.14); (7.16))

$$p = A \cos k_x x \exp(\pm i k_z z + i \omega t). \quad (7.19)$$

Присутствие множителя $\exp(-i k_z z)$ показывает, что здесь мы имеем дело с экспоненциально убывающими с расстоянием z амплитудами, модулированными по фронту волнами (такие волны называют неоднородными).

При $n = 1$ возникает первая нормальная волна. Критическая частота находится из условия $\frac{\pi^2}{k^2 \ell^2} = 1$, откуда

$$k = \frac{\pi}{\ell}, f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{2\ell}, \lambda_1 = \frac{c}{f_1} = 2\ell, \ell = \frac{\lambda_1}{2}; \quad (7.20)$$

k_z при этом оказывается действительной величиной. Для первой нормальной волны $k_z = k \cos \alpha = 0$, т.е. направление ее распространения на критической частоте нормально к стенкам волновода. Это есть стоячая волна; в направлении z при $n = 1$ звуковая энергия не распространяется.

При $n = 2$, т.е. при $\lambda = \ell$ возникает вторая нормальная волна частоты f_2 , при $n = 3$ - третья нормальная волна и т.д. На рис. 7.3а показано распределение амплитуды по фазовому фронту нормальных волн звукового давления при $n = 0, 1, 2, 3$, а на рис. 7.3б то же для x составляющей колебательной скорости

v_x . Случай $n = 0$ соответствует нулевой нормальной волне, амплитуда ее по фазовому фронту не изменяется. Эта волна, для которой $k = \omega/c$, как уже говорилось выше, распространяется без дисперсии в отличие от нормальных волн при $n \neq 0$, имею-

ших дисперсию (см. (7.17)), определяемую геометрией волновода (так называемая геометрическая дисперсия) и не зависящая от физических свойств среды, заполняющей волновод. Отметим, что число узлов звукового давления (или пучностей значений $2x_c$) по ширине волновода равно номеру нормальной волны.

Амплитуда нормальной волны меняется вдоль ее фронта по гармоническому закону, а сама форма фронта не меняется при распространении вдоль волновода в направлении z . При увеличении частоты f_n возрастает также k_z и направление распространения нормальных волн все более приближается к направлению оси волновода. Рассмотрение задачи без труда проводится также и для трехмерных волноводов (для случая простейшей формы волновода).

Если одна граница жесткая (например, скальный грунт океана), а другая мягкая (водная поверхность), то вид нормальных волн иной, поскольку изменились граничные условия. Для звукового давления он изображен на рис. 7.3, в.

В волноводах с жесткими стенками большой интерес имеет случай, когда $l \ll \lambda/2$. Плоская волна при этом условии возникает независимо от вида возбуждения в начальном участке волновода. Возникшие в каком-либо сечении трубы (или на ее входе) сложное возмущение поля p и v быстро затухает и им можно пренебречь, останется только плоская волна. Этим обстоятельством широко пользуются при измерениях нормального импеданса звукопоглотителей ограниченного размера, помещая образцы в трубу с жесткими стенками, радиус которой меньше длины волны.

Ниже критической частоты $f_{kp} = 0,61 c/z_0$, где z_0 — радиус трубы, в ней могут распространяться только однородные плоские волны, фронт которых перпендикулярен оси трубы и амплитуда вдоль фронта постоянна. Следует отметить, что при $l \ll \lambda/2$, когда труба (волновод) очень узкая, на распространяющиеся в ней плоские волны практически не влияют изгибы и изломы трубы. Скорость звука в этих случаях равна скорости звука в среде, заполняющей трубу; она может незначительно изменяться из-за влияния вязкости у стенки трубы. Это свойство узких труб используется в переговорных трубах, а также в духовых музыкальных инструментах, позволяя компактно сворачивать длинные трубы без нарушения работы таких музыкальных инструментов.

Мы кратко рассмотрели распространение звука в двумерных волноводах с жесткими стенками. Задачи при этом существенно усложняют-

ся, когда их границы имеют неровности, разбития и не могут считаться ни жесткими, ни мягкими.

Основные особенности волноводного распространения звука заключаются в том, что звуковая энергия концентрируется в сечении волновода, а не рассеивается в пространстве.

§ 8. Геометрическая акустика. Акустика движущейся среды

До сих пор мы пользовались волновым уравнением при рассмотрении задач распространения звука. Однако в большом числе случаев решать акустические задачи можно проще, не прибегая к решению волнового уравнения, а пользуясь так называемой геометрической акустикой и понятием не волны, а луча. Луч это линия, касательная в которой в каждой ее точке совпадает с направлением распространения фронта волны. Пользоваться понятием луча можно, когда на расстоянии порядка длины волны λ амплитуда волны и направление ее распространения (направление луча) меняются весьма незначительно, т.е. в этом случае в малом участке пространства, если волна и не плоская, ее с хорошим приближением все же можно считать плоской. При рассмотрении энергетических задач пользуются представлением лучевой трубки, под которой понимается трубка некоторого сечения (площадь его много больше λ^2), боковые стенки которой образованы линиями (лучами).

Напишем волновое уравнение для потенциала φ при распространении плоской гармонической волны в неоднородной неподвижной и стационарной среде (в этом случае $\omega = \text{const}$, меняется только направление распространения волны)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \varphi = 0. \quad (8.1)$$

Представим потенциал φ в виде

$$\varphi = A_0(x, y, z) \exp i\omega \left[t - \frac{S(x, y, z)}{c} \right]. \quad (8.2)$$

Здесь

$$S(x, y, z) = \int n dl \quad (8.3)$$

— "акустическая длина" пути, фазовая функция или эйконал;

$$n(x, y, z) = \frac{c_0}{c} \quad (8.4)$$

— коэффициент преломления; dl — элемент пути; c_0 — скорость звука в начальной точке; c — скорость звука на расстоянии dl от этой точки; считаем, что скорость звука в среде может претерпевать плавные изменения. Эйконал S связан с фазой θ соотношением

$$\theta = \frac{\omega}{c} S = \kappa S. \quad (8.5)$$

Если подставить значение для φ из (8.2) в волновое уравнение, то проводя указанные в нем операции дифференцирования дважды по времени и дважды по координатам и приравняв действительные и мнимые части полученного выражения, найдем два уравнения

$$\frac{n^2 \lambda^2}{4\pi} \frac{\nabla^2 A}{A_0} + n^2 - (\nabla S)^2 = 0, \quad (8.6)$$

$$2 \nabla \ln A_0 \nabla S + \nabla^2 S = 0. \quad (8.7)$$

При стремлении длины волны λ к нулю, т.е. осуществляя переход от волновой к геометрической акустике, первый член в уравнении (8.6) для слабо искривленных фронтов волны (радиус кривизны должен быть много больше λ) можно отбросить, и мы получаем так называемое уравнение эйконала — основное уравнение геометрической акустики; оно представляет собой уравнение траектории луча

$$(\nabla S)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2 = \left(\frac{c_0}{c}\right)^2. \quad (8.8)$$

Уравнение (8.7) дает связь между амплитудной и фазовой функциями и представляет собой закон сохранения энергии вдоль лучевой трубки.

Направление распространения волны (луча) зависит от показателя преломления среды $n = n(x, y, z)$. Из (8.8) для неподвижной среды имеем

$$|\nabla S| = \frac{\partial S}{\partial n'} = n = \frac{c_0}{c}, \quad (8.9)$$

где $\frac{\partial S}{\partial n'}$ есть производная S по нормали n' к поверхности постоянной фазы, т.е. вдоль луча. Так, если луч распростра-

няется по направлению x и $n = n(x)$, то $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x}$.

Нахождение траектории луча в аналитическом виде для слоисто-неоднородной среды в общем случае представляет собой сложную задачу. Поэтому для решения этой задачи (например, в гидроакустике) кривую часто заменяют ступенчатой функцией и для нахождения траектории используют ЭВМ.

Рассмотрим несколько простых примеров распространения звука, используя представления геометрической акустики.

Пусть звуковой луч распространяется вертикально вверх в изотермической атмосфере в отсутствие ветра, когда на поверхности земли, так же как и на высоте h , температура постоянна и равна T , и $c = c_0 = \text{const}$. Считая атмосферу идеальным газом, имеем для убывания плотности с высотой барометрическую формулу

$$p_h = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right). \quad (8.10)$$

Здесь p_0 - плотность у поверхности земли и p_h - на высоте h , M - молекулярный вес, R - газовая постоянная и g - ускорение силы тяжести.

Плотность потока энергии в простом случае плоской волны постоянна вдоль сечения лучевой трубки, если не учитывать поглощения; для сферической волны сечение трубки увеличивается пропорционально квадрату проходимого расстояния z .

Согласно (5.8) плотность потенциальной E_n и кинетической энергии E_k для плоской волны у поверхности при $h = 0$ выражается формулой

$$E_k = E_n = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c_0^2} z^2. \quad (8.11)$$

Так как (см. 8.9) $\nabla S = \frac{\partial S}{\partial x} = n = 1$ при $c = \text{const}$ и сечение лучевой трубки не изменяется с высотой h , то

$$\frac{p_0^2}{2\rho_0 c_0^2} z^2 = \frac{p_h^2}{2\rho_h c_h^2} z^2, \quad (8.12)$$

где p_h , c_h , ρ_h - значения p , c и ρ на высоте h , то отсюда следует, что

$$p_h = p_0 (p_h / p_0)^{1/2}. \quad (8.13)$$

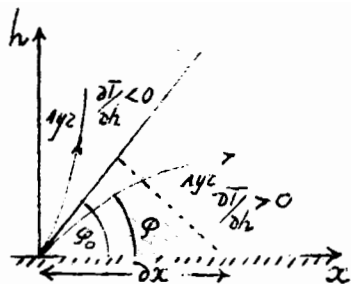


Рис. 8.1

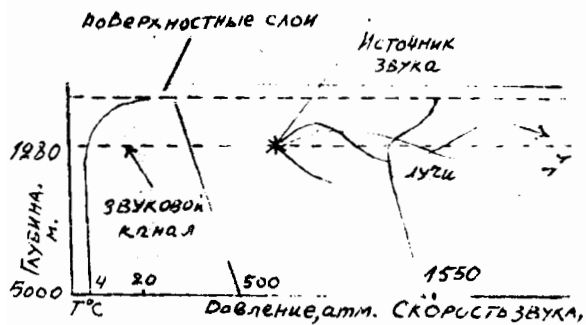


Рис. 8.2

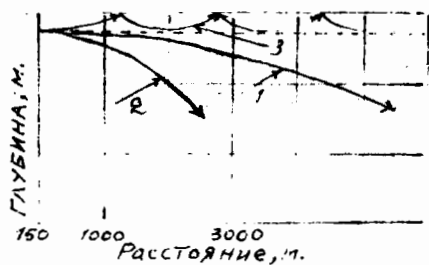


Рис. 8.3

Из выражений (8.10), (8.13) видно, что звуковое давление убывает с высотой h по экспоненциальному закону.

Интересно отметить, что если звуковое давление с высотой падает, то колебательная скорость, наоборот, возрастает. Это следует из того, что для рассматриваемого случая плоской волны $v = \frac{p}{\rho c}$, и тогда из (8.11)

$$v_h = \frac{p_0}{\rho c_0} \left(\frac{\rho_0}{\rho_h} \right)^{1/2}. \quad (8.14)$$

Как видим, по сравнению с (8.13) отношение плотностей ρ_0 и ρ_h обратное.

Рассмотрим теперь случай $*$), когда в приземном слое атмосферы с высотой h температура меняется и градиент температуры $\nabla T \neq 0$. Температура может понижаться с высотой h (это более частый случай), а может и повышаться (в этом случае говорят об инверсии температуры). Каково при наличии градиента температуры поведение лучей?

Поскольку $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T}$ и $n = c_0/c = \sqrt{T_0/T}$, где, как и раньше, c_0 и T_0 - скорость звука и температура у поверхности земли, то согласно (8.8) (рассматривается плоская задача)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial h} \right)^2 = n^2 = \frac{c_0^2}{c^2} = \frac{T_0}{T}. \quad (8.15)$$

При $h = 0$ согласно рис. (8.2)

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \cos \varphi_0 \quad (8.16)$$

и при угле между осью x и нормалью к волне равном φ

$$\cos \varphi = \frac{\partial S}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial h} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (8.17)$$

Из написанных формул следует, что

$*$) Приведенные далее примеры хорошо известны. В области атмосферной акустики они, в частности, приводятся также в книге Д.И. Блохинцева "Акустика неоднородной движущейся среды" М.: Наука, 1981.

$$\cos \varphi = \cos \varphi_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}. \quad (8.18)$$

Таким образом, когда T убывает с высотой, $\cos \varphi$ уменьшается и луч загибается (рефрактирует) вверх. При возрастании T с высотой луч загибается вниз. Луч загибается в сторону, где скорость звука меньше. Это обстоятельство имеет большое значение в природных волноводах, например при распространении звука в так называемом подводном звуковом канале (подобные звуковые каналы имеются также в атмосфере и земной коре). Так, звуковой канал, в котором скорость звука минимальна, имеется в море и океане. Это происходит из-за того, что гидростатическое давление с глубиной монотонно возрастает и возрастает также (хотя и незначительно) скорость звука, а температура с глубиной сначала сравнительно быстро падает (и убывает скорость звука, а потом практически остается постоянной (рис. 8.2).

Поскольку луч загибается в сторону, где скорость звука минимальна, звуковые лучи, идущие под малыми углами к оси канала, концентрируются в канале и потери энергии значительно уменьшаются. Это обстоятельство приводит к интересному и практически важному явлению - сверхдальному распространению звука в океане. Взрыв небольшого заряда на оси канала можно обнаружить при благоприятных условиях на расстоянии в несколько тысяч километров.

Изменения скорости звука с глубиной вообще говоря, незначительны (порядка нескольких процентов или меньше), но этого достаточно, чтобы лучи от точечного источника, расположенного вблизи оси канала или на самой его оси, не достигали бы дна или поверхности (где они поглощаются или рассеиваются) или достигали лишь частично и таким образом концентрировались на оси (см. рис. 8.2); на рис. 8.3 схематически показаны характерные пути лучей при различных температурных условиях вблизи поверхности моря. Траектория луча 1 соответствует случаю, когда температура с глубиной слегка понижается (обычно это имеет место летом), траектория 2 соответствует большому искривлению луча, когда вода у поверхности значительно теплее чем внизу (лето) и траектория 3 соответствует случаю, когда вода у поверхности моря холоднее чем на глубине, что бывает зимой. В последнем случае образуется приповерхностный звуковой канал.

Если среда не неподвижна, а имеется поток жидкости со скоростью u (ветер в атмосфере, течение воды в океане), то звук,

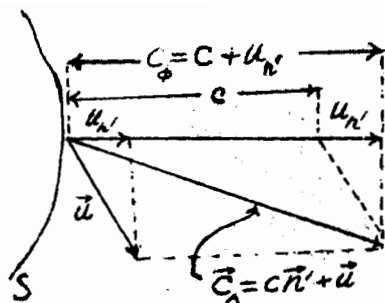


Рис. 8.4

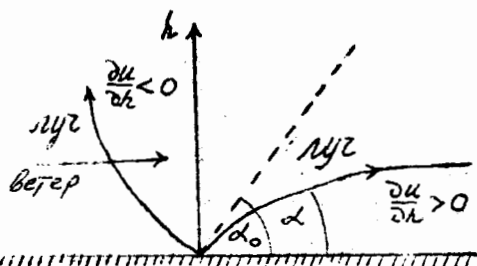


Рис. 8.5

распространяющийся в такой среде, "сносится" этим потоком. На рис. 8.4 показан фронт волны S и геометрическое построение, из которого следует, что скорость звука по лучу (лучевая скорость)

$\vec{c}_\lambda = c\vec{n}' + \vec{u}$, а фазовая скорость c_ϕ равна местной скорости звука c , сложенной с проекцией скорости потока $\vec{u}$ на направленные нормали к фронту волны $\vec{n}'$. Таким образом, получается очевидная формула

$$c_\phi = c + u_{n'}. \quad (8.19)$$

Заметим, что лучевая скорость это та скорость, с которой звуковая энергия передается по лучу, т.е. она представляет собой групповую скорость, так что $c_\lambda = c_{gr}$.

Рассмотрим в виде примера, каковы будут траектории лучей, если скорость ветра u зависит от высоты h над поверхностью земли, а $T = \text{const}$. Считаем, что $u = 0$ при $h = 0$ (рис. 8.5) и $T = \text{const}$. Напишем для нашего случая уравнение эйконала в виде (8.8) (здесь, в этой формуле u было равно нулю)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)^2 = \left[\frac{c_0 - u_h \frac{\partial S}{\partial h}}{c}\right]^2. \quad (8.20)$$

Считая угол начального выхода луча равным α_0 и $\frac{\partial S}{\partial x} = \cos \alpha$, из (8.20) и рис. 5.8 получаем

$$\cos \alpha = \cos \alpha_0 \left[1 - \cos \alpha_0 \frac{u(h)}{c_0} \right], \quad (8.21)$$

поскольку

$$\cos \alpha = \frac{\partial S}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (8.22)$$

Отсюда следует, что если направление звукового луча совпадает с направлением ветра, то при увеличении u с высотой угол α уменьшается ($\cos \alpha$ растет) и луч прижимается к земле (слышимость для наблюдателя, находящегося справа от источника, при этом возрастает). При распространении звука против ветра, луч, напротив, отклонится вверх и слышимость падает.

Распределение скорости ветра и температуры с высотой в атмосфере приводят к ряду интересных явлений при распространении сильных звуков. Возникают зоны молчания на некотором расстоянии от источника и зоны слышимости, появляющиеся на большом расстоя-

или от источника (за зоной молчания). Всеми этими интересными вопросами занимается акустика движущейся среды и, в частности, атмосферная акустика, несколько примеров из области которой мы привели. Большое значение в атмосферной акустике играет турбулентное состояние атмосферы, когда происходят пульсации скорости ветра и температуры, а вместе с ними испытывает флуктуации коэффициент преломления среды n и как следствие — скорость звука C , что приводит к флуктуациям амплитуды звука и его фазы (флуктуации пеленга на источник звука).

В заключение этого параграфа остановимся на одном эффекте, характерном для акустики движущейся среды, когда $\vec{u} \neq 0$. Запишем формулу для групповой скорости

$$\vec{C}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = C \frac{\vec{k}}{k} + \vec{u} = c \vec{n}' + \vec{u} = \vec{C}_A. \quad (8.23)$$

Эта скорость, как уже указывалось, есть сумма скорости C в направлении $\vec{k}$ и скорости $\vec{u}$ "сноса" звука в движущейся жидкой среде.

Частота волны ω связана со скоростью звука C и волновым числом k в неподвижной среде напряжением $\omega = c k$, а в движущейся со скоростью $\vec{u}$ среде соотношением

$$\omega = c k + \vec{u} \vec{k}. \quad (8.24)$$

Отсюда, кстати, и получена предыдущая формула.

Это выражение показывает, что если, например, источник звука с частотой $\omega_c = k c$ неподвижен относительно среды, а наблюдатель движется со скоростью $\vec{u}$, удаляясь от источника, то в системе координат, движущейся вместе с наблюдателем, среда движется со скоростью $-\vec{u}$ и частота звука, слышимая наблюдателем, имеет вид

$$\omega = c k - \vec{u} \vec{k}, \quad (8.25)$$

т.е. понизится.

Так как $k = \omega_0 / c$ и если φ — угол между $\vec{u}$ и $\vec{k}$, то

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{u}{c} \cos \varphi \right). \quad (8.26)$$

Обратное положение имеется в случае, если среда неподвижна и источник с частотой ω_0 движется со скоростью $\vec{u}$, приближаясь к наблюдателю. В этом случае нетрудно получить формулу

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{u}{c} \cos \varphi\right)^{-1} \quad (8.27)$$

В этих формулах проявляется известный эффект Доплера.

При рассмотрении в этой и предыдущих главах вопросов распространения волн как в неограниченных, так и в средах с границами, мы имели дело лишь с гармоническими волнами. Если волны имеют более сложную форму, произвольно зависящую от времени, то, как известно, такие волны можно представить как суперпозицию гармонических волн различных частот в виде разложения в ряд Фурье. Задача о распространении таких сложных волн (в том числе, задачи об отражении, преломлении и т.д.) сводится к определению поведения каждой из гармонических составляющих этой волны.

Мы имеем дело со спектральным представлением, разложением периодической (точнее, почти периодической) волны на сумму синусоидальных волн с разными частотами. Напомним, что, используя комплексное представление гармонических функций, амплитуду сигнала какой-либо величины акустического поля, например звукового давления, можно представить рядом Фурье

$$S(\vec{z}, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} P_n(\vec{z}) e^{-i\omega_0 t} d\omega, \quad (8.28)$$

где

$$P_n(\vec{z}) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^T S(\vec{z}, t) e^{in\omega_0 t} dt. \quad (8.29)$$

Здесь $\vec{z}$ — пространственная координата, $T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega}$ — период этой функции.

Для непериодической волны (достаточно резкий импульс, импульс с заполнением несущей частотой и т.д.), разложение производится не в ряд, а в интеграл Фурье

$$S(\vec{z}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\omega}(\vec{z}) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (8.30)$$

Здесь $P_{\omega}(\vec{z})$ — спектральная плотность амплитуды разложения. Спектр сигнала (его преобразование Фурье) дается при этом выражением.

$$P_{\omega}(\vec{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\vec{z}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (8.31)$$

В настоящем учебном пособии мы не имеем возможности уделить большее внимание этому чрезвычайно важному вопросу о спектральных представлениях, играющему, например, основную роль в математической обработке сигналов.

§ 9. Пульсирующая сфера. Диполь

Колеблющиеся тела (например, мембрана) перемещают прилегающие к ним частицы газа или жидкости одной стороной поверхности, "выталкивая" их в окружающую среду в положительный полупериод колебаний и "втягивают" их из окружающей среды в отрицательный полупериод колебаний. Это в основном гидродинамическое явление. При медленных колебаниях тел этим явлением почти все и ограничивается. Однако часть энергии даже при сравнительно медленных колебаниях тела (очень низких частотах) идет на излучение звука, т.е. на совершение сжатий и разрежений, на изменение плотности среды благодаря ее сжимаемости. Эти изменения плотности "отпочковываются" от колеблющегося тела и распространяются далее, но не со скоростью частиц среды, а со скоростью звука в виде упругих или звуковых волн. Звуковые волны возникают благодаря действию сил упругости и сил инерции, подобно тому, как волны на воде образуются благодаря действию сил тяжести и сил инерции (гравитационные волны) или сил поверхностного натяжения и сил инерции (капиллярные волны или рябь).

С повышением частоты эффективность излучения звука увеличивается, тогда как чисто гидродинамический эффект "выталкивания" и "втягивания" частиц среды ослабевает, и при определенных условиях большая часть механической энергии колеблющегося тела превращается в звук.

Обращаясь к задачам излучения звука, начнем с наиболее простого случая, когда источником звука является пульсирующая сфера радиуса z_0 . При $z_0 \ll \lambda$ такой источник звука называют точечным источником, излучателем нулевого порядка или монополем.

Согласно § 4, потенциал пульсирующей сферы находится из решения волнового уравнения в сферических координатах и для гармонических колебаний имеет вид

$$\varphi = \frac{A}{z} \exp i(\omega t - kz + \psi), \quad (9.1)$$

где z - расстояние от центра сферы и ψ - угол сдвига фаз между p и v на расстоянии z .

Колебательная скорость поверхности сферы $v = v_0 \exp(i\omega t)$, а граничное условие на ней состоит в том, что

$$v_0 \exp(i\omega t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=z_0} \quad (9.2)$$

На бесконечно далеком расстоянии (среда считается безграничной и изотропной) $\varphi_\infty = 0$; это условие называют условием на бесконечности.

Подставляя (9.1) в (9.2), получим при $z = z_0$

$$v_0 \exp(i\omega t) = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) \frac{A}{z_0} \exp i(\omega t - \kappa z_0 + \psi) \quad (9.3)$$

Из этого выражения следует, что

$$\left(i\kappa + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) = \frac{A}{z_0} = v_0, \quad (9.4)$$

$$\omega t - \kappa z_0 + \psi = \omega t, \quad (9.5)$$

откуда определяются постоянная A и фаза ψ :

$$A = \frac{v_0 z_0^2}{1 + i\kappa z_0}, \quad (9.6)$$

$$\psi = \kappa z_0.$$

Теперь (9.1) можно записать в виде

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \frac{v_0 z_0^2}{1 + i\kappa z_0} \exp i[\omega t - \kappa(z - z_0)]. \quad (9.7)$$

По существу этим задача об излучении звука пульсирующей сферой решена. Далее, воспользовавшись связью ρ и v с потенциалом φ , можно найти ρ , v и интенсивность звукового поля $\mathcal{I}$. Из изложенного видим, что задача об излучении пульсирующей сферой сводится к решению волнового уравнения в сферических координатах, удовлетворяющего условию на границе излучателя со средой и условию на бесконечности. Для такого излучателя согласно (9.7)*)

$$\rho = \rho_0 \dot{\varphi} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{i\rho\omega v_0 z_0^2}{1 + i\kappa z_0} \exp i[\omega t - \kappa(z - z_0)], \quad (9.8)$$

$$v = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{(1 + i\kappa z)^2}{1 + i\kappa z_0} v_0 z_0^2 \exp i[\omega t - \kappa(z - z_0)]. \quad (9.9)$$

*) Далее вместо ρ_0 и C_0 будем писать ρ и C , имея в виду малость отклонения ρ и C от равновесных значений.

Если $S = 4\pi z_0^2$ - поверхность сферы, то для всей поверхности

$$S p(z) = \rho c S \frac{ikz_0}{1+ikz_0} v_0 \exp(i\omega t). \quad (9.10)$$

В задачах теории излучения большое значение имеет так называемое сопротивление излучения; эта величина в общем случае комплексная.

Комплексное сопротивление излучения или импеданс $Z = X + iY$ определяется отношением действующей со стороны среды силы к колебательной скорости поверхности; оно показывает эффективность излучения источника звука. Его величина, согласно (9.8), (9.9), (9.10), дается выражением

$$Z = X + iY = \frac{p(z_0) S}{v} = \frac{\rho c S}{(1+ikz_0)} [(kz_0)^2 + ikz_0]. \quad (9.11)$$

Отсюда имеем для действительной (активной) и мнимой (реактивной) частей Z :

$$X = \frac{\rho c}{1+(kz_0)^2} S (kz_0)^2, \quad (9.12)$$

$$Y = \frac{\rho c}{1+(kz_0)^2} S kz_0. \quad (9.13)$$

Отношение Y к kz_0 имеет размерность массы и оказывается равным

$$\frac{Y}{kz_0} = \frac{Y}{\omega} = \frac{4}{3} \pi z_0^3 \rho \frac{3}{1+(kz_0)^2} = \frac{3M_0}{1+(kz_0)^2}. \quad (9.14)$$

Отсюда следует, что $M_0 = \frac{4}{3} \pi \rho z_0^3$ - масса среды в объеме сферы, ее называют соколеблющейся или присоединенной массой пульсирующей сферы; она возникает вследствие инерции окружающей среды. При $kz_0 \ll 1$ (длинные волны, низкие частоты) присоединенная масса оказывается равной утроенной массе пульсирующей сферы.

Как видно из (9.12) и (9.13), при низких частотах, когда $kz_0 \ll 1$, активная часть сопротивления излучения пропорциональна удельному акустическому сопротивлению среды ρc , пропорциональна S и $(kz_0)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot z_0^2$, т.е. квадрату частоты звука, а реактивная часть пропорциональна $\rho c S$ и kz_0 .

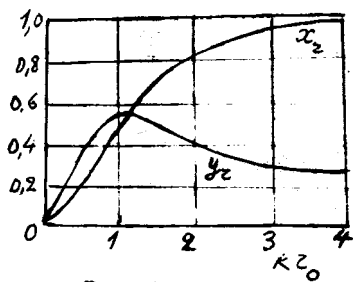


Рис. 9.1

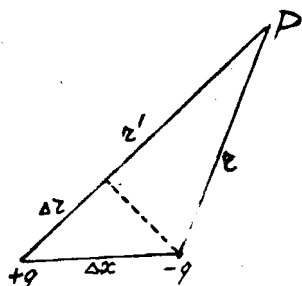


Рис. 9.2

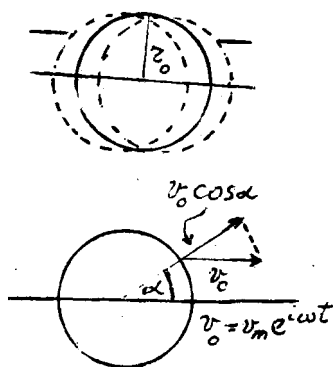


Рис. 9.3

т.е. пропорциональна ω .

Если ввести безразмерные активное и реактивное сопротивления, соответственно

$$x_z = \frac{X}{\rho c S} = \frac{(kz_0)^2}{1 + (kz_0)^2}, \quad (9.15)$$

$$y_z = \frac{Y}{\rho c S} = \frac{kz_0}{1 + (kz_0)^2}, \quad (9.16)$$

то их поведение в зависимости от kz_0 можно представить на рис. 9.1.

Формулы (9.15) и (9.16) и приведенный график показывают, что при малых kz_0 сначала превалирует y_z , затем роль реактивного сопротивления, достигнув максимального своего значения при $kz_0 \approx 1$, начинает уменьшаться. Активное же сопротивление при возрастании kz_0 увеличивается, стремясь асимптотически к 1. Действительная, т.е. активная часть импеданса Z , характеризует излучение звука. Можно считать, что она связана с распространяющейся звуковой энергией, тогда как мнимая или реактивная часть Z соответствует энергии не распространяющейся, а как бы запасенной в ближнем поле пульсирующей сферы. Именно наличие разности фаз ψ (9.6) (см. также (4.14)), возникающей в ближнем поле из-за интерференции от различных точек излучателя, приводит к появлению реактивной интенсивности. Формулы (9.15) и (9.16) дают возможность найти условия, при которых можно определить эффективность излучения звука пульсирующей сферой. Так, расчет показывает, что при 2000 Гц условие $X \geq Y$ выполнено, если $kz_0 \approx 1$, откуда $z_0 = 2,7$ см (для частоты 100 Гц соответственно $z_0 = 54$ см).

Формулы (9.8) и (9.9) дают возможность, переходя к действительным величинам, найти выражения для интенсивности в излучаемой волне:

$$J = \frac{\rho c v_0^2 z_0^4 k^2}{32 \pi^2 (1 + k^2 z_0^2)} \cdot \frac{1}{z^2}. \quad (9.17)$$

Полная же мощность излучения I равна

$$I = 4\pi z^2 J. \quad (9.18)$$

▼ Следующим по сложности элементарным источником излучения яв-

ляется двойной источник — диполь или излучатель первого порядка. Типичным примером такого источника служит колеблющийся камертон. Такой источник представляет собой комбинацию двух монополей разного знака, т.е. колеблющихся в противофазе и находящихся друг от друга на расстоянии Δx (рис. 9.2). На этом рисунке $\pm q$ — производительность монополя.* При конечных q и малых Δx произведение $q \Delta x = m$ носит название момента диполя. Согласно решению волнового уравнения в сферических координатах, потенциал φ в точке наблюдения $P(x, y, z)$ при $\lambda \gg x$ и $z \gg \lambda$ может быть записан в виде

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{q}{4\pi} \left[\frac{\exp(-ikz')}{z'} - \frac{\exp(ikz)}{z} \right] \exp(i\omega t) = \frac{q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\exp(ikz)}{z} \exp(i\omega t) \Delta x = \\ &= \frac{q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(-ikz)}{z} \right] \frac{\partial z}{\partial x} \exp(i\omega t).\end{aligned}\quad (9.19)$$

Поскольку $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos \alpha$, то

$$\varphi = \frac{q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(-ikz)}{z} \right] \cos \alpha \Delta x \exp(i\omega t) = -\frac{m(1+ikz)}{4\pi} \cos \alpha e^{-i(\omega t - kz)}.\quad (9.20)$$

Из этого выражения следует, что

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_{\dot{\varphi}} = \frac{\rho c m k^2}{4\pi z} \left(1 + \frac{1}{ikz}\right) \cos \alpha \exp i(\omega t - kz), \\ v_x &= -\frac{1}{z} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{imk}{4\pi z} \left(1 + \frac{1}{ikz}\right) \sin \alpha \exp i(\omega t - kz), \\ v_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{mz^2}{4\pi z} \left[1 + \frac{2}{ikz} + \frac{2}{(ikz)^2}\right] \cos \alpha \exp i(\omega t - kz).\end{aligned}\quad (9.21)$$

Из приведенных выражений следует также, что при $kz \gg 1$ вдали от диполя $\rho \sim 1/z$, $v_z \sim 1/z^2$, т.е. ρ и v_z убывают обратно пропорционально z и находятся в одной фазе.

Двойной источник или диполь, как можно показать, эквивалентен сфере радиусом z_0 , осциллирующей вдоль некоторой оси, проходящей через ее центр (ось колебаний) с колебательной скоростью $v = v_0 \exp(i\omega t)$ (рис. 9.3).

*) Производительностью источника принято называть амплитуду скорости изменения объема монополя; объемная скорость каждого из источников $q = 4\pi z_0^2 v_0$.

Отличие от диполя состоит в том, что для осциллирующей сферы величина m оказывается несколько иной. Решение волнового уравнения в сферических координатах для потенциала $\varphi(z, \alpha, t)$ должно удовлетворять граничному условию

$$-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=z_0} = v_0 \cos \alpha \exp(i\omega t). \quad (9.22)$$

Это решение приводится к виду (см. (9.20))

$$\varphi = \frac{A}{z^2} (1 + i\kappa z) \cos \alpha \exp[i(\omega t - \kappa z + \psi)]. \quad (9.23)$$

Вычислив $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ и приняв во внимание граничное условие на поверхности осциллирующей сферы, можно найти постоянную A и фазу ψ , которые оказываются равными

$$A = \frac{v_0 z_0^3}{2(1 + i\kappa z_0) - (\kappa z_0)^2}, \quad \psi = \kappa z_0. \quad (9.24)$$

Не будем выписывать полное выражение $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, которое получается при подстановке A и ψ в (9.23), а приведем формулы для p , v_z и v_α :

$$p = p\dot{\varphi} = i\omega A \exp[i\omega t - \kappa(z - z_0)] \frac{(1 + i\kappa z)}{z^2} \cos \alpha, \quad (9.25)$$

$$v_\alpha = -\frac{1}{z} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{A}{z^3} (1 + i\kappa z) \exp[i\omega t - \kappa(z - z_0)] \sin \alpha, \quad (9.26)$$

$$v_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = A \left[\frac{2(1 + i\kappa z) - (\kappa z)^2}{z^3} \right] \cos \alpha \exp[i\omega t - \kappa(z - z_0)]. \quad (9.27)$$

Как видно из этих формул при $\kappa z < 1$, колебательная скорость частиц убывает с расстоянием как $1/z^3$, т.е. быстрее, чем убывает звуковое давление p , которое убывает как $1/z^2$.

Для того чтобы найти импеданс $Z_{\text{осц}}$ осциллирующей сферы, т.е. отношение силы давления F на сферу со стороны среды к колебательной скорости поверхности сферы v_0 , нужно найти F . Эта полная сила, действующая на осциллирующую сферу, определяется выражением

$$F = \int_0^\pi p(z_0) \cos \alpha \cdot 2\pi z_0^2 \sin \alpha d\alpha \quad (9.28)$$

и оказывается равной (мы опускаем простые преобразования и вычисления интеграла $\int_0^\pi \cos^2 \alpha d(\cos \alpha)$).

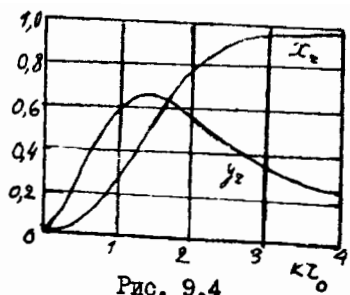


Рис. 9.4

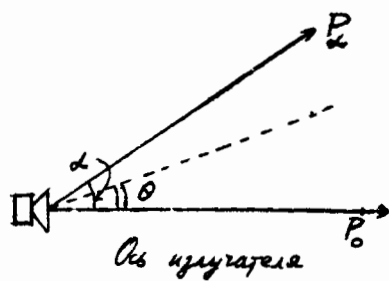


Рис. 9.5

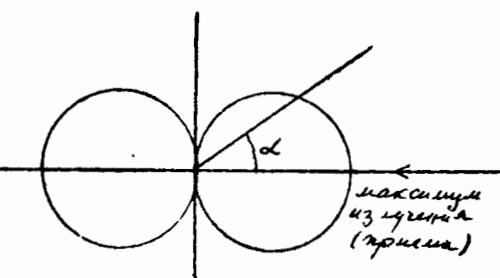


Рис. 9.6

$$F = v \left[\frac{1}{3} \frac{4\pi z_0^2 \rho c (Kz_0)^4}{4 + (Kz_0)^4} + i\omega \left(\frac{4}{3} \pi z_0^3 \rho \right) \frac{[2 + (Kz_0)^2]}{4 + (Kz_0)^4} \right], \quad (9.29)$$

откуда*)

$$Z_{осч} = \frac{F}{v} = X + iY = \frac{1}{3} \frac{4\pi \rho c (Kz_0)^4}{4 + (Kz_0)^4} + i\omega M_{осч} \frac{2 + (Kz_0)^2}{4 + (Kz_0)^4}, \quad (9.30)$$

где $M_{осч} = \frac{4}{3} \pi z_0^3 \rho$ - масса среды, вытесненная осциллирующей сферой; X - активная часть импеданса (сопротивление излучения) и Y реактивная (инерционная) часть, возникающая из-за присоединенной массы.

Безразмерные компоненты сопротивлений излучения равны

$$x_z = \frac{X}{\rho c S} = \frac{1}{3} \frac{(Kz_0)^4}{4 + (Kz_0)^4},$$

$$y_z = \frac{Y}{\rho c S} = \frac{1}{3} \frac{Kz_0 [2 + (Kz_0)^2]}{4 + (Kz_0)^4}. \quad (9.31)$$

Поведение x_z и y_z в зависимости от Kz_0 показано на рис. 9.4. Присоединенная масса осциллирующей сферы $M_{осч}$ находится (см. также (9.14)) из соотношения $M_{осч} = \frac{Y}{\omega}$, она оказывается равной

$$M_{осч} = \frac{4}{3} \pi z_0^3 \rho \frac{2 + (Kz_0)^2}{4 + (Kz_0)^4} = M_0 \frac{2 + (Kz_0)^2}{4 + (Kz_0)^4} \quad (9.32)$$

и при $Kz_0 \ll 1$ $M_{осч} \simeq M_0/2$, тогда как при $Kz_0 \gg 1$, $M_{осч} \simeq 0$.

Приведем еще выражение для интенсивности звука осциллирующей сферы (диполя). Интенсивность J , как мы знаем, равна среднему значению потока энергии через 1 см^2 , т.е. согласно (9.27) и (9.24)

$$J = \overline{p v_z} = \frac{1}{2} \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \frac{(Kz_0)^2}{4 + (Kz_0)^4} \cos^2 \alpha \cdot v_0^2 \quad (9.33)$$

*) Эти формулы предлагается получить читателю. См. также [1, с.71].

(сравни с (9.17)).

Интегрируя по всей сфере, найдем полную излученную энергию

$$I = \int_0^{2\pi} 2\pi r^2 \sin\alpha J d\alpha = \frac{1}{2} X v_0^2 = X v_{\text{эф}}^2. \quad (9.34)$$

Активное сопротивление X есть потеря энергии на излучение звука (сопротивление излучения). Вспомним, что для плоской волны и для пульсирующей сферы $J = P_m / 2\rho c$ (P_m — максимальная амплитуда звукового давления).

Для осциллирующей сферы получим

$$J = \frac{1}{2} \frac{P_m^2 (kz)^2}{\rho c (1 + (kz)^2)^2} \quad (9.35)$$

и только при $kz \gg 1$

$$J = \frac{1}{2} \frac{P_m^2}{\rho c}. \quad (9.36)$$

Комбинация двух диполей (или четырех монополей) представляет следующий по сложности излучатель звука, называемый квадруполем или излучателем второго порядка. Можно показать, что если $M_{\text{ак}} = v/c$ есть акустическое число Маха, то интенсивность монополя $J_m \sim M_{\text{ак}}$, интенсивность диполя или осциллирующей сферы $J_d \sim M_{\text{ак}}^3$, а интенсивность, излучаемая квадруполем, $J_{\text{кв}} \sim M^5$. Поскольку в акустике $M_{\text{ак}} \ll 1$, то отсюда следует, что диполь представляет собой мало эффективный источник звука, а квадруполь еще менее эффективный излучатель.

Излучение диполя, как и излучение любого излучателя, характеризуется определенным распределением интенсивности в пространстве, отличным от сферического. Это распределение называют характеристикой направленности источника. Для наиболее простого случая, когда имеется осевая симметрия излучения, т.е. когда зависимости от азимутального угла θ нет, характеристика направленности $\Phi(\alpha)$ (см. рис. 9.5) определяется отношением

$$\Phi(\alpha) = \frac{P_\alpha}{P_0}, \quad (9.37)$$

которую представляют в полярных координатах. Здесь P_α — эффективное давление излучения под углом α к оси и P_0 — эффективное давление на оси *) при $z \gg z_0$, где z_0 — радиус из-

*) P_α и P_0 равноудалены от центра источника.

лучателя. Для сферической волны, когда направленность отсутствует акустическая мощность (полный поток энергии) I_0 записывается в виде

$$I_0 = \frac{P_0^2}{\rho c} 4\pi z^2 = \frac{P_0}{\rho c} S. \quad (9.38)$$

Если излучатель имеет направленность, то пользуются так называемым коэффициентом осевой концентрации, который определяется отношением

$$\Omega = \frac{I_0}{I} = S \left[\int \Phi^2(\alpha, \theta) dS \right]^{-1}, \quad (9.39)$$

где $I = \frac{P^2}{\rho c} = \int \Phi^2(\alpha, \theta) dS$. Это отношение говорит о том, во сколько раз меньшую мощность должен иметь излучатель, обладающий направленностью, чтобы создать то же эффективное давление на оси, как и ненаправленный излучатель. Отметим, что коэффициент концентрации для излучения диполя равен 3, а характеристика направленности диполя имеет форму восьмерки. Действительно, для диполя $\Phi(\alpha) = \cos \alpha$ (рис. 9.6) и

$$\Omega = \frac{4\pi z^2}{\int \Phi^2(\alpha) 2\pi z^2 \sin \alpha d\alpha} = \frac{2}{\int_0^\pi \cos^2 \alpha \sin \alpha d\alpha} = 3. \quad (9.40)$$

§ 10. Поршневая диафрагма

Большое значение в теории излучения и практических приложениях имеет задача о генерации звука круглым диском, свободно колеблющимся как поршень перпендикулярно своей плоскости в жестком плоском бесконечном экране (рис. 10.1). Такой излучатель обычно называют поршневым излучателем или поршневой диафрагмой. Реальные поршневые излучатели часто работают без экрана. Преимущественно так обстоит дело, например, в ультразвуковом диапазоне частот, когда излучает пьезоэлектрическая пластинка, радиус которой z_0 больше длины излучаемой волны. Однако решение задачи в этом случае сложнее, а главные особенности излучения поршня в экране и без экрана в основном сохраняются. Поэтому рассмотрение задачи мы приведем для круглого поршня радиуса $z_0 \gg \lambda$ в бесконечном экране. Точный расчет поршневого излучателя достаточно громоздок и здесь мы ограничимся лишь сводкой основных результатов и поясним способ их получения. Эта задача в значительной мере эквивалентна задаче Кирхгофа о дифракции света на круглом от-

верстии в оптике. Одно из различий состоит в том, что в акустике (в простейшем случае) мы имеем дело со скалярным потенциалом, тогда как в оптике с векторным потенциалом.

Звуковое поле в полупространстве перед экраном, согласно принципу Гюйгенса, определяется суммой полей, излучаемых всеми точечными источниками (рассматриваем линейную акустическую задачу), расположенными на поверхности колеблющейся поршневой диафрагмы. Поле в точке наблюдения есть результат интерференции приходящих в эту точку звуковых волн.

Расчет излучения звукового поля поршневой диафрагмой в окружающее полупространство состоит в следующем. Решается волновое уравнение (рассматривается гармонический процесс) и используются граничные условия на диафрагме, состоящие в задании потенциала скорости, а также условие равенства нулю потенциала на бесконечности.

Трудность решения этой задачи, впервые рассмотренной Рэлеем, состоит в нахождении ближнего поля ($kz < 1$, $z \sim$ расстояние от центра диафрагмы), в так называемой зоне Френеля. В этом случае в каждой точке этой зоны поле определяется интерференцией волн от совокупности элементарных источников, составляющих колеблющуюся диафрагму и имеющих заметную разность хода прихода в точку наблюдения. Эта разность хода с увеличением расстояния z от центра поршня становится малой и в дальнем поле (зоне Фраунгофера) уже не играет такой роли, какую она играет в ближнем поле.

Рассмотрим случай, когда частоты высокие и на радиусе z_0 поршневой диафрагмы укладывается несколько длин волн $n\lambda$ (n — целое число). Поле в точке наблюдения P от элемента поверхности диафрагмы dS имеет вид

$$d\varphi_P = \frac{dS}{2\pi z_0} v_0 \exp i(\omega t - kz) \quad (10.1)$$

(вместо 4π здесь стоит 2π , так как излучение происходит в полупространство). От всей поверхности диафрагмы потенциал в точке P определится выражением

$$\varphi_P = \frac{v_0 e^{i\omega t}}{2\pi} \iint_S \frac{e^{-ikz}}{z} dS. \quad (10.2)$$

Ограничимся случаем, когда нужно найти поле только на оси x в точке P . Оно запишется согласно (10.2) в виде

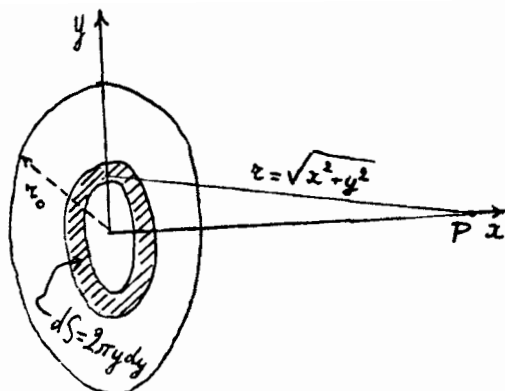


Рис. 10.1

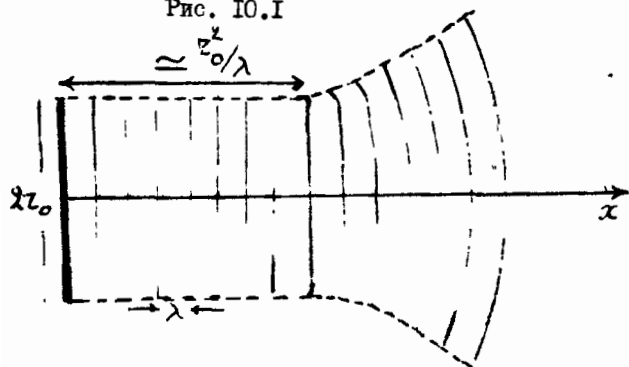


Рис. 10.2

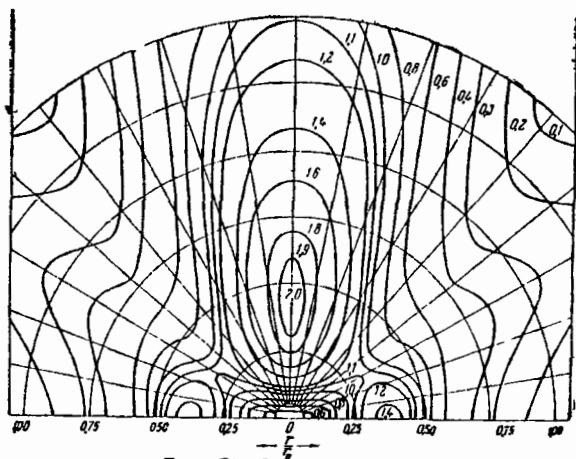


Рис. 10.3

$$\varphi_P = \frac{v_0 e^{i\omega t}}{2\pi} \int_{y=0}^{y=z_0} \frac{2\pi y dy}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-ik\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{iv_0}{k} e^{i\omega t} e^{-ik\sqrt{x^2+y^2}} \Big|_{y=0}^{y=z_0},$$

где элемент поверхности $dS = 2\pi y dy$ представляет собой кольцо радиуса y и шириной dy . Задача определения поля только на оси поршневого излучателя существенно упрощается по сравнению с тем, как если нужно было бы определить поле в любой точке полупространства. Тогда нельзя было бы ограничиться только интегрированием по элементарным кольцевым полоскам шириной dy согласно рис. 10.1, поскольку из какой-либо точки не лежащей на оси, эти кольцевые полоски были бы видны под различными углами. Поскольку $z_0 = n\lambda$, то действительная часть этого выражения имеет вид

$$\varphi_P(x, t) = \frac{v_0}{k} [\sin(\omega t - k\sqrt{x^2+z_0^2}) - \sin(\omega t - kx)]. \quad (10.4)$$

Колебательная скорость найдется из соотношения $v = -\partial\varphi/\partial x$; она будет равна (как это и было задано) $v = v_0 \cos \omega t$ при $x=0$.

При достаточно больших x (уже когда $x \approx 3 \div 4$) справедливо приближение

$$\sqrt{x^2+n^2\lambda^2} \approx x(1 + \frac{n^2\lambda^2}{2x^2}) = x + \delta. \quad (10.5)$$

Пользуясь формулой

$$\sin(\beta - \kappa\delta) - \sin\beta = -2\cos(\beta - \frac{\kappa\delta}{2})\sin\frac{\kappa\delta}{2}, \quad (10.6)$$

получим для звукового давления на оси

$$p_{max} = \rho \dot{\varphi} = \frac{2\rho v_0 \omega}{k} \sin\frac{\kappa\delta}{2} = 2\rho c v_0 \sin\frac{\pi}{2} \frac{n^2\lambda^2}{\lambda x}, \quad (10.7)$$

а для интенсивности найдем

$$J = \frac{1}{2} \frac{p_{max}^2}{\rho c} = 2\rho c v_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{n^2\lambda}{x}\right). \quad (10.8)$$

Как и в оптике (в задаче о дифракции на круглом отверстии в экроне), при излучении поршня различают ближнюю и дальнюю зоны акустического излучения. В ближней зоне (зона Френеля) сильно сказывается интерференция волн, исходящих от различных точек поршня;

p_{max} и J на оси x осциллируют (как это можно видеть

из (10.7) и (10.8), происходит поочередная смена максимумов и минимумов поля, причем частота осцилляций тем больше, чем меньше значение x . До значений $x^2 = n^2 \lambda$, как это можно видеть из (10.8), в области $0 < x < n^2 \lambda$ излучение состоит из приблизительно-ного плоского фронта. Из-за интерференции по сечению пучка имеются темные и светлые дифракционные круги, аналогично тому, как обстоит дело в оптике. При больших x из (10.8) следует, что

$$J = \frac{\pi \rho c}{2} \pi z_0^2 v_0^2 \frac{n^2}{x^2} \quad (10.9)$$

и при $x > n^2 \lambda$ расхождение становится более заметным. Дальнее поле (зона Фраунгофера) начинается с расстояния, когда вся поверхность поршня представляет собой так называемую первую зону Френеля, которая получается, если из точки x на оси провести сферу радиуса $z = z_0 \approx \sqrt{x \lambda}$. После расстояния

$$x \approx \frac{z_0^2}{\lambda} \quad (10.10)$$

излучение начинает расходиться (рис. 10.2). До этого расстояния цилиндрическое излучение от круглой поршневой диафрагмы имеет приблизительно плоский фронт, как об этом уже говорилось выше. Оценим, например, это критическое расстояние для случая $z_0 = 10$ см при частоте 100 кГц. Если излучение происходит в воду, где $c = 1,5 \cdot 10^5$ см/с, то в этом случае $\lambda = 1,5$ см и $n \lambda / \lambda = 60$ см, после чего волна постепенно приобретает сферический фронт.

Как уже говорилось, значительно сложнее определить поле во всем полупространстве в зоне Френеля. Это поле весьма сложно по своей структуре; аналитически впервые оно было рассчитано Штенцелем. На рис. 10.3 приведен пример распределения линий равного давления вблизи круглого поршневого излучателя при $K z_0 = 6$, т.е. когда диаметр диафрагмы несколько больше 2λ . Сложная структура звукового поля позволяет, тем не менее, говорить о среднем значении звукового давления в каком-либо сечении x и пользоваться этим средним значением (в особенности, в ультразвуковых измерениях).

При больших x (зона Фраунгофера, дальнее поле) в формуле (10.3) для φ_p можно вынести из-под интеграла в знаменателе

$z \approx \text{const}$ для любых точек наблюдения под углом α вне оси и после несложных вычислений получить для амплитуды давления как функции угла

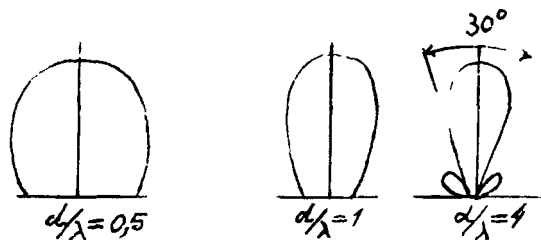


Рис. 10.4

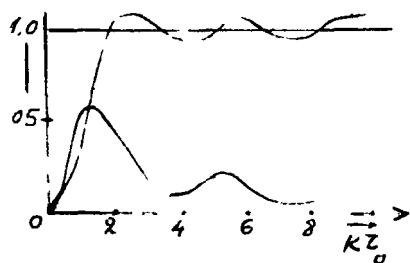


Рис. 10.5

$$P(\alpha) = \frac{\rho c (kz_0)^2 v_0}{2kz} \left[\frac{2J_1(kz_0 \sin \alpha)}{kz_0 \sin \alpha} \right] = \frac{\rho_0 2J_1(z)}{z}. \quad (10.11)$$

Здесь J_1 - функция Бесселя первого рода. Ее значение при $\alpha \approx 0$ (направление по оси x) равно единице, а при $z = kz_0 \sin \alpha = 3,83$ первый раз обращается в нуль, когда

$$\sin \alpha = \frac{3,83}{kz_0} = \frac{0,63\lambda}{z_0}. \quad (10.12)$$

Если $z = 5,3$, P имеет следующий максимум и интенсивность при этом примерно в 60 раз меньше, чем на оси.

Характеристика направленности, имеющая осевую симметрию согласно (9,37) определяется выражением

$$\phi(\alpha) = \frac{P_\alpha}{P_0} = \frac{2J_1(z)}{z}. \quad (10.13)$$

График $\phi(\alpha)$ в зависимости от аргумента $z = kz_0 \sin \alpha = \frac{d}{\lambda} \sin \alpha$ представлен на рис. 10.4. Обратим внимание на появление при $d/\lambda = 4$ дифракционных боковых лепестков, присутствие которых в излучении поршневой диафрагмы (да и любого другого излучателя) играет в практических задачах чрезвычайно большую роль. Они возникают из-за интерференции волн в ближнем поле, излучаемых точечными источниками поверхности колеблющегося поршня.

Можно показать, что действительная и комплексная составляющие импеданса поршневой диафрагмы, т.е. отношение суммарной силы давления, действующей на поршень со стороны среды, к колебательной скорости, даются выражениями (в области низких частот, когда $kz_0 \ll 1$)

$$X = S \rho c x_z = \frac{\rho \omega^2 S^2}{2\pi c}, \quad (10.14)$$

$$Y = S \rho c y_z = \frac{8}{3} \omega \rho z_0^3 = \omega M_n, \quad (10.15)$$

где $M_n \approx \frac{8}{3} \rho z_0^3$ - присоединенная масса, а x_z и y_z - безразмерные компоненты комплексного импеданса. Для высоких частот

$$x_z \approx \frac{kz_0^3}{2} \left[1 - \frac{kz_0^2}{6} + \dots \right], \quad (10.16)$$

$$y_z \approx \frac{2kz_0}{\pi} \left[1 - \frac{4}{15} (kz_0)^2 \right]. \quad (10.17)$$

оведение x_z и y_z в зависимости от kz_0 приведены на рис. 10.5, из которого можно заключить, что при $kz_0 < 1$ сначала преобладает реактивная составляющая, а после $kz_0 \simeq 1,35$ составляющая x_z испытывает осцилляции около значения, равного единице. Как видно из (10.14), сопротивление излучения пропорционально $\omega^2 z_c^2$ при $kz_0 \ll 1$. Такая зависимость активного сопротивления излучения от ω и z является, вообще говоря, типичной для излучателей любой формы.

Излучаемая мощность в дальнем поле при низких частотах определяется выражением

$$I = \frac{1}{2} \times v_0^2 = \frac{\rho \omega^2 S}{4\pi c} v_0^2. \quad (10.18)$$

Рассмотренные выше основные характерные особенности излучения, пульсирующей сферой, диполем и поршневым диафрагмой относились к случаю излучения звука механическими колебаниями твердых тел.

Есть, однако, много других физических механизмов, приводящих к излучению звука. К их числу относится, например, тепловой механизм. Изменение температуры участка среды тепловым импульсом приводит к сжатию и последующему расширению среды. Так, в результате электрического пробоя участка среды (появление искры) возникает разряд, сопровождаемый резким звуковым ударом. Периодическое изменение температуры окружающего воздуха путем нагревания переменным электрическим током металлической проволоочки — другой пример генерации звука. Импульс мощного лазера в виде светового пучка, направленного на поверхность металла или на водную поверхность моря, за счет поглощения света и теплового расширения при его поглощении излучает звук освещенным участком этой поверхности. Лазер может быть промодулирован звуковой частотой. Лазерно-акустическим методом может осуществляться диагностика дефектов металлических или других конструктивных материалов, передана звуковая информация с поверхности моря на подводный объект и т.д. Весьма существенно, что лазерный метод генерации звука является "безконтактным", т.е. при его использовании источник звука (лазер) удален от озвучиваемой поверхности.

Нестационарный поток газа (жидкости) также приводит к излучению звука; в таком потоке пульсирует (около своих средних значений) давление, плотность, температура. Струя, истекающая из сопла реактивного самолета, создает звук (шум), а "рокот" реак-

тивной струи космической ракеты представляет собой самый мощный искусственный периодический звук, созданный человеком. Хотя звук или гул реактивной струи, как теперь установлено, квадрупольного происхождения, а квадруполь весьма малоэффективный звуковой источник и только примерно 10^{-5} часть энергии ракеты переходит в звук, однако этого достаточно, чтобы звук от такой ракеты с гигантской мощностью был бы и самым мощным искусственным периодическим звуком.

Звук также генерируется при обтекании потоком жидкости или газа различных твердых тел, находящихся в этом потоке. Звук вращения винта (так называемый вихревой звук), звук при обтекании воздухом проводов ("эоловы" тона), некоторые другие источники звуков, относятся к звукам порожденным условиями обтекания твердых тел в потоке. К этому классу явлений можно в определенной степени отнести и генерацию звука различными свистками, излучение звука голосовыми связками человека. В этих случаях существенную роль играют возникновение в процессе генерации звука автоколебаний.

Проблема излучения звука аэродинамическим или гидродинамическим потоком, когда играют роль изменения пульсаций давления и изменение температуры, принадлежит к обширной области современной акустики - аэрогидроакустики и термоакустики.

§ II. Векторные энергетические характеристики звукового поля. Инфразвук

Будем считать интенсивность $\vec{J}_c$ комплексной величиной, записывая ее в виде суммы активной $\vec{J}_a$ и реактивной $\vec{J}_i$ интенсивностей

$$\vec{J}_c = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\rho v^*) + \frac{1}{2} I_m(\rho v^*) = \vec{J}_a + i \vec{J}_i. \quad (\text{II.I})$$

(Звездочка, как всегда, означает комплексно сопряженную величину *).

) Напомним, что две величины являются комплексно сопряженными, если их абсолютные значения равны, а фазовые углы противоположны по знаку. Так, если $A_c = a + i\beta = A e^{i\psi}$, $A_c^ = a - i\beta = A e^{-i\psi}$, то $A_c + A_c^* = 2a$ и $a = \frac{1}{2}(A_c + A_c^*)$; $\beta = \frac{1}{2i}(A_c - A_c^*)$.

Для того чтобы полностью характеризовать звуковое поле в линейной акустике, нужно знать p и $\vec{v}$, т.е. p и три компоненты скорости v_x , v_y , v_z , а также разность фаз между и этими компонентами $\psi(pv_x)$, $\psi(pv_y)$, $\psi(pv_z)$. Эти четыре величины можно определить несколькими способами. Один из таких способов состоит в том, чтобы измерить двумя одинаковыми приемниками давления (микрофонами, реагирующими на звуковое давление), находящимися поблизости друг от друга в точках 1 и 2, градиент давления ∇p , вычислить $\vec{v}$ в данном направлении и интенсивность в этом направлении $\vec{J}$. Это вычисление проводится по формуле

$$J_a = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p v^*) = -\frac{p^2}{2\rho a} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{p^2}{2\rho c} \frac{1}{k} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (\text{II.2})$$

где p^2 — квадрат среднего арифметического от звуковых давлений p_1 и p_2 . Покажем это. Поскольку мы предполагаем, что потенциал $\varphi \sim e^{i\omega t}$, то $p = \rho \dot{\varphi} = i\omega \rho \varphi$ и

$$\nabla p = i\omega \rho \nabla \varphi. \quad (\text{II.3})$$

С другой стороны, пользуясь этим равенством, имеем

$$\vec{v} = -\nabla \varphi = -\frac{\nabla p}{i\omega \rho}. \quad (\text{II.4})$$

Отсюда

$$\rho \vec{v} = -\frac{\nabla p}{i\omega \rho} \quad (\text{II.5})$$

и, полагая $p = |p| e^{i\psi}$, получим

$$\vec{v} = -\frac{i}{\rho \omega} e^{i\psi} [\nabla |p| + i|p| \nabla \psi]. \quad (\text{II.6})$$

Поэтому

$$\rho \vec{v}^* = -\frac{i}{\rho \omega} [\nabla |p| - i|p| \nabla \psi] = -\frac{i}{\omega \rho} [\nabla |p| - i p^2 \nabla \psi], \quad (\text{II.7})$$

$$J_a = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p v^*) = -\frac{1}{2\omega \rho} p^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{2\omega \rho} p^2 \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

т.е. получаем формулу (II.2).

Другой метод, определяющий активную и реактивную интенсивности $\vec{J}_a$ и $\vec{J}_r$ состоит в использовании так называемого приемника колебательной скорости, конструктивно совмещенного с приемником давления.

Используя выражения для ρ и $\vec{v}^*$ через связь их с потенциалом φ , а также применяя правила обращения с комплексно сопряженными величинами, можно получить такие выражения для компонент $\vec{J}_a$ и $\vec{J}_r$:

$$\begin{aligned} J_{ax} &= \frac{i\omega\rho}{4} \left(\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \\ J_{ay} &= \frac{i\omega\rho}{4} \left(\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \\ J_{az} &= \frac{i\omega\rho}{4} \left(\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (II.8)$$

$$\begin{aligned} J_{rx} &= -\omega\rho \frac{\partial(\varphi\varphi^*)}{\partial x}, \\ J_{ry} &= -\omega\rho \frac{\partial(\varphi\varphi^*)}{\partial y}, \\ J_{rz} &= -\omega\rho \frac{\partial(\varphi\varphi^*)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (II.9)$$

Из (II.8) и (II.9) следует, принимая во внимание (II.3) и (II.4) что

$$\vec{J}_i = -\frac{1}{4\omega\rho} \nabla(\rho\rho^*). \quad (II.10)$$

Поскольку квадрат звукового давления является потенциалом, то

$$\text{rot} \vec{J}_i = 0. \quad (II.11)$$

Свойства поля интенсивности (как, впрочем, и других векторных полей) определяется его ротором и дивергенцией. Для их нахождения запишем $\text{rot} \vec{J}_c$ в виде (имея в виду (II.10))

$$\text{rot} \vec{J}_c = \text{rot} \vec{J}_a + i \text{rot} \vec{J}_i = \text{rot} \vec{J}_a. \quad (II.12)$$

Расписывая выражение для компонент ротора, можно получить (для двумерного случая, когда $v_z = 0$, $J_{az} = J_{rz} = 0$):

$$\text{rot} \vec{J}_c = -\omega\rho I_m(\vec{v}_x \vec{v}_y^*). \quad (II.13)$$

Выражение для $\text{rot } \vec{J}$ можно привести к такому виду:

$$\text{rot } \vec{J}_a = \frac{\kappa}{c} \frac{[\vec{J}_a \vec{J}_i]}{E_n} \quad (\text{II.14})$$

(что нетрудно проверить, раскрывая векторное произведение $[\vec{J}_a \vec{J}_i]$), где

$$E_n = \frac{1}{4\pi c^2} \rho p^* \quad (\text{II.15})$$

- потенциальная энергия.

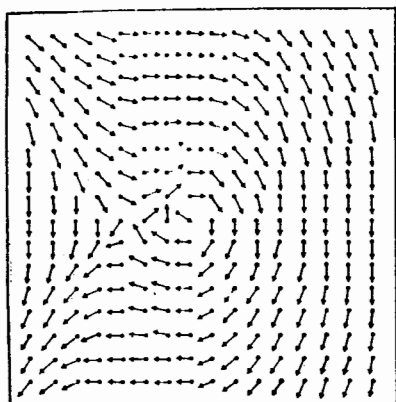
Исследование поведений $\text{rot } \vec{J}_a = 0$ дает важные сведения о движении частиц среды и соотношении между $\vec{J}_a$ и $\vec{J}_i$.

В звуковом поле какого-либо излучателя (особенно в ближнем поле) из-за пространственной неоднородности поля, $\text{rot } \vec{J}_i \neq 0$, поэтому $\vec{J}_a$ может протекать по замкнутым траекториям: Приблизительно они имеют вид эллипсов. Замкнутость траектории свидетельствует о вихревом характере поля. В тех местах пространства звукового поля, где $\vec{J}_a$ и $\vec{J}_i$ совпадают по направлению или их направления противоположны, частицы движутся не по эллипсам, а по прямым линиям. Такое их поведение имеет место в ближнем звуковом поле на расстояниях от источника порядка длины волны звука. Для дальнего поля $\vec{J}_a$ обращается в нуль, как это и должно быть. Равенство нулю $\text{rot } \vec{J}_i$ говорит о том, что $\vec{J}_i$ не может протекать по замкнутым траекториям; $\vec{J}_i$ имеет источники и стоки. По этой причине реактивная интенсивность может использоваться для нахождения распределения источников на каком-либо сложном акустическом излучателе (например, двигателе машины, металлообрабатывающем станке и т.д.). По измерению активной интенсивности этого сделать нельзя, так как в ближнем поле возникает вихревое движение (имеются кольцевые потоки движения звуковой энергии). Сведения об источниках и стоках можно получить, исследуя

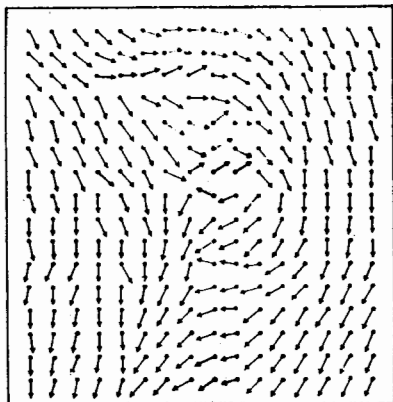
$$\text{div } \vec{J}_c = \frac{\partial \vec{J}_{cx}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{J}_{cy}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{J}_{cz}}{\partial z} \quad (\text{II.16})$$

На основании (II.8) и (II.10) получаем

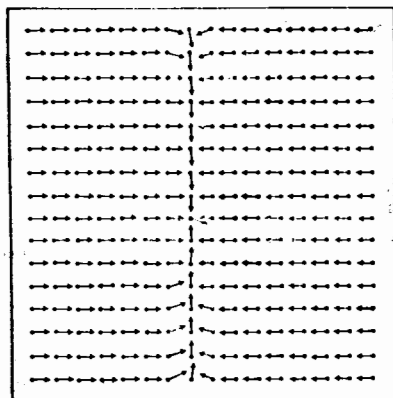
$$\begin{aligned} \text{div } \vec{J}_c &= \text{div } \vec{J}_a + i \text{div } \vec{J}_i = -\frac{i\omega\rho}{2} \left(\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - k^2 \varphi \varphi^*. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$



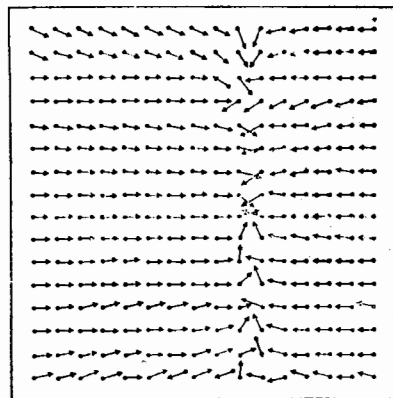
a



b



c



d

Рис. II.I

Отсюда следует, что

$$\operatorname{div} \vec{J}_a = 0.$$

(II.18)

Изложенные представления об активной и реактивной интенсивностях (эту область акустических исследований принято называть акустической интенсивиметрией), как показали исследования последнего времени, играют большую роль прежде всего в нахождении векторных полей низкочастотных источников звука (шума) звукового и, в особенности, инфразвукового диапазонов и их локализации в ближнем поле различного рода источников, в том числе сложных. Большое значение стала играть роль интенсивиметрия, когда началось применение цифровой обработки аналоговых сигналов, ЭВМ и графо-построителей. При их помощи можно детально и быстро определить (измерить) звуковую мощность, излучаемую отдельными частями различных машин и механизмов, например локализовать источники шума станков и т.д. даже при наличии помех, что другими методами сделать чрезвычайно трудно, если вообще возможно. Удаётся получать в ближнем поле наглядные и подробные карты поведения $\vec{J}_a$, $\vec{J}_r$ и данные о взаимодействии звуковых полей с различными объектами - звукопоглотителями, потоками среды и т.д., т.е. получать исчерпывающие сведения о ближнем звуковом поле. Проведенное рассмотрение можно при определенных условиях обобщить на сигналы сложной формы (например, для шума).

На рис. II.1,а приведен результат численного расчета ближнего поля двумерной карты энергетической структуры звукового поля активной интенсивности $\vec{J}_a$ от трех одинаковых точечных источников (частота порядка 300 Гц, $\lambda \approx 1$ м) в плоскости, проходящей через их центры^{*)}.

Источники расположены на одной прямой, и расстояние между ними равно λ , центральный источник работает в противофазе с двумя другими. На этих рисунках представлены выделенные квадраты из общей карты $\vec{J}_a$ и $\vec{J}_r$. Каждый из этих четырех квадратов находится над линией соединяющей все три источника и локализован между левым и центральным источниками на расстоянии от этой линии (выше ее) примерно $0,5 \lambda$; сторона квадрата равна $0,4 \lambda$.

*) Взято из работы А.Н. Иванникова и Д.И. Кравченко "Экспериментальное исследование энергетической структуры акустического поля вблизи системы источников" // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1989. Т. 30, № 5. С. 37-39.

Заметим, что векторы $\vec{J}_a$ и $\vec{J}_i$ нормированы на одинаковую длину, чтобы характеризовать только направление потока энергии. Стрелки указывают направление этих векторов в точках равномерной координатной сетки. Вектор $\vec{J}_a$, как уже указывалось, имеет вихревую природу, что ясно видно на рис. II.1, а. На рис. II.1, в приведены экспериментальные данные измерения $\vec{J}_a$. Как видно из сравнения этих рисунков, эксперимент довольно хорошо совпадает с расчетом. Некоторые отклонения связаны, по-видимому, с ролью побочных отражений от элементов конструкции установки.

Подобным образом получается картина поведения для рассматриваемого случая реактивной интенсивности $\vec{J}_i$ (численный расчет рис. II.1, б; эксперимент II.1, г). Из этих рисунков видно, что $\vec{J}_i$ "стекает" из всей области в центральную точку ("узел") которая совпадает с центром вихря активной интенсивности $\vec{J}_a$; центр вихря $\vec{J}_a$ является стоком для $\vec{J}_i$, а ее поток направлен в центр со всех сторон в активный поток акустической энергии $\vec{J}_a$.

Следует отметить, что получение графической картины в рассмотренных примерах возможно для стационарного случая, когда фазовые соотношения в звуковом поле сохраняются.

Здесь следует сделать важное замечание. Обычно существует мнение, что когда имеет дело с низкими частотами и длина волны звука значительно больше, чем размеры излучателя (например, звуковое поле частот 10–20 Гц в салоне легкового автомобиля, где "излучателем" звука служат отдельные узлы двигателя, а также колеблющиеся "пластины" типа крыш, ходовой части самой машины при ее движении и т.д.), по существу никакой акустики нет, есть только гидродинамика. Действительно, если масштаб l тела (в приведенном примере с легковой автомашиной – размер салона) заметно меньше длины волны λ , то в волновом уравнении для потенциала

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = 0 \quad (\text{II.19})$$

оценка членов дает

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \approx \varphi \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\varphi}{\lambda^2}; \quad \nabla^2 \varphi \approx \frac{\varphi}{l^2}, \quad (\text{II.20})$$

откуда следует, что при $l \ll \lambda$

$$\nabla^2 \varphi \approx 0, \quad (\text{II.21})$$

и, следовательно, жидкость можно считать несжимаемой^{*}). Однако такое заключение, вообще говоря, является лишь приближенным, что и следует из приведенного выше рассмотрения. В действительности, как это мы видели в этом параграфе, в ближнем звуковом поле при $\epsilon \ll \lambda$ имеется и, более того, звук (шум) в нем может оказаться значительным, если достаточно интенсивны сами источники. Структура звукового поля достаточно хорошо может быть определена (даже в деталях) методами интенсиметрии.

Заметим, что колебания крыши автомашины, особенно при ее движении, если их не снизить применением различных приемов, приводят к генерации инфразвука в салоне на частотах 7-15 Гц, вредно действующих на организм человека.

Здесь уместно привести некоторые сведения по инфразвуку. Как об этом уже говорилось в самом начале этой книги, обычно под инфразвуком понимают область частот упругих волн ниже примерно 16-20 Гц, которые человеческое ухо уже не воспринимает как тональный звук. Отметим, впрочем, что ощущение в форме ударов или "щелчков" мы чувствуем до частот в несколько Гц, если амплитуда таких инфразвуковых волн достаточно велика.

Обратимся сначала к инфразвуку в "воздушной" акустике. Инфразвук возникает при работе машин и механизмов (из-за вибрации их отдельных узлов) дизельных двигателей, компрессоров и т.д. Возникает он в автомобильном транспорте (пример, приведенный выше), авиационном транспорте, на промышленных предприятиях, приводит к экологическому загрязнению среды, понижает производительность труда и вызывает при определенных условиях (длительность воздействия, значительная интенсивность, диапазон частот) вредное действие на организм человека. Поскольку, как мы знаем, поглощение упругих волн в газах и жидкостях за счет вязкости и теплопроводности пропорционально квадрату частоты, а частоты инфразвука малы, то инфразвук в воздухе поглощается слабо и распространяется на большие расстояния.

По причине малого поглощения, применение каких-либо звукопоглощающих устройств, которые дают эффект при использовании их

^{*}) Вспомним, что условие несжимаемости $\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = 0$. Если в правой части волнового уравнения имеются источники, то это не меняет существа дела; вывод о несжимаемости остается справедливым.

в звуковом диапазоне частот (жилые дома, концертные студии, театры и т.д.) в случае инфразвуковых волн практически исключено. Поэтому для снижения уровня инфразвука основной метод состоит в уменьшении интенсивности его генерации самими источниками.

Воздействие на человека может оказывать как инфразвуковое поле, так и непосредственный контакт с колеблющимися на низких частотах узлами машин и механизмов (типичный пример - вибрации сиденья тракториста). Следует отметить, что вибрации, как и инфразвук, могут кроме вредного влияния, играть и полезную роль. Вибрационные устройства (например, вибрационные столы и т.д.) позволяют в существенной мере изменить технологию ряда производств. Они позволяют упрочнять и разрушать, уплотнять и разрыхлять, перемешивать и разделять различные материалы и осуществлять много других технологических операций. Все эти вопросы принадлежат к новой области механики и техники, так называемой вибрационной механике.

Если вибрации действуют на среду активно, то инфразвук может, в качестве его полезного применения, быть использован как средство изучения этой среды при помощи ее зондирования инфразвуком, а также как средство связи и локации. Искусственно излучать периодический инфразвук достаточно большой интенсивности, чтобы он распространялся на большие расстояния в атмосфере это сложная и почти неразрешимая задача. Возникающие при этом трудности объясняются формулой (10.14) для активной части сопротивления поршневой диафрагмы в дальнем поле и формулой (10.18). Из этих формул, как мы видели, следует, что излучаемая мощность при низких частотах пропорциональна ω^2 . Вместе с тем, создание направленного излучения инфразвука в силу больших длин волн наталкивается на почти непреодолимые трудности. Для этого должны были бы применяться слишком громоздкие системы. Однако в задачах приема инфразвуковых волн положение улучшается. Можно использовать группу инфразвуковых приемников выстроенных, например, в линию (линейная антенна). Такие групповые низкочастотные антенны применяются в гидроакустике. В атмосферной акустике для направленного приема используются длинные трубы с отверстиями, где расположены инфразвуковые приемники.

Инфразвук в атмосфере возникает во многих случаях. Так он возникает при взрывах (например, ядерные взрывы, производившиеся ранее в атмосфере), при извержении вулканов. Известно, что при

катастрофическом извержении вулкана Кракатау в Индонезии (август 1883 г.), когда в атмосферу была выброшена вулканическая масса и пепел объемом в 10 км^3 , звук был слышен на расстоянии более 5000 км, а инфразвуковые волны несколько раз обогнули земной шар. Спектр взрыва, конечно, достаточно широк, в нем присутствуют инфразвуковые, низкочастотные компоненты. Инфразвук в атмосфере возникает (при определенных условиях) от колеблющейся поверхности моря. Известен так называемый "голос моря" (инфразвуковые частоты порядка нескольких герц), возникающий при срыве вихрей с гребней волн при сильном ветре. Аналогичное явление, называемое вихревым звуком имеет место при срыве вихрей с проводов, снастей кораблей и т.д. частоты которого определяются формулой $f = St \frac{v}{d}$ Гц, где v - скорость ветра, d - диаметр провода и St - безразмерное число Струхала (для цилиндрической проволоки $St = 0,2$).

В указанных случаях распространение низкочастотного звука и инфразвука на большие расстояния объясняется такими рассмотренными в § 8 волноводными свойствами атмосферы и океана.

Реактивный самолет, движущийся со скоростью большей скорости звука, когда число Маха $M = \frac{v}{c}$ больше единицы, создает ударную волну (здесь проявляется акустический эффект Черенкова), которая для наблюдателя на земле воспринимается как "звуковой удар" или хлопок. В спектре этого хлопка присутствуют инфразвуковые частоты. При определенных условиях сила такого удара приводит к повреждению легких строений, выбиванию стекол в окнах и т.д.

Более существенное значение имеет инфразвук в гидроакустике, главным образом в задачах обнаружения низкочастотных шумов от инфразвуковых источников (пассивная локация подводных лодок и других излучающих объектов).

Большое значение имеет инфразвук, распространяющийся в твердой оболочке Земли. Инфразвуковые волны в земной коре возникают вследствие крупных землетрясений и часто возникающих в толще земной коры малых землетрясений (микросейсмы). Эти волны можно вызывать при помощи взрывов. Небольшие взрывы используются в прикладной (инженерной) сейсмологии для проведения разведки полезных ископаемых (нефти, газа, руды и т.д.). Применяется (для небольших глубин разведки) и тональные методы излучения, но уже не на инфразвуке, а на низких звуковых частотах.

Подземные ядерные взрывы создают интенсивные инфразвуковые

волны, которые можно регистрировать чувствительными сейсмографами почти на любых расстояниях; это дает возможность в принципе проводить контроль над подземными ядерными взрывами (пока единственный метод контроля). Низкие инфразвуковые частоты с периодами минут или долей минуты от взрывных источников (не обязательно ядерных взрывов) регистрируются при прохождении всей толщи Земли через 30-40 минут, имея в виду, что скорость инфразвука в толще Земли примерно 5-6 км/с. Методом взрывов проведено прозвучивание Земли. В частности, установлено, что ядро Земли жидкое. К такому заключению можно прийти потому, что это прозвучивание удастся провести на продольных волнах; на поперечных (сдвиговых) T -волнах этого сделать не удастся. Причина этого состоит в том, что в жидкости T -волны не распространяются (об акустике твердого тела будет идти речь в главе 4). Всеми этими вопросами занимается, как часто ее называют, "Большая сейсмология".

§ 12. Рассеяние звука

Рассеяние волн имеет большое значение в физике вообще. Достаточно сказать, что именно рассеяние света (вместе с переотражением) в основном дает нам возможность видеть мир во всем его многообразии, видеть друг друга и окружающие предметы. При этом видении мы решаем так называемую обратную задачу рассеяния — получаем в результате обработки нашей человеческой СМ зрительный образ.

В акустике рассеяние звука также играет огромную роль. Изобильно, пробоиши рассеяния звука мы остановимся лишь на основных чертах этого явления. Как можно определить, что такое рассеяние? Если плоская волна падает на плоское препятствие бесконечной протяженности, то возникает отражение и преломление, о чем мы говорили в § 6. Но положение дела меняется, если препятствие имеет конечные размеры, формы которого при этом чаще всего разнообразны. В акустике размеры препятствий ℓ , если речь идет о слышимом диапазоне частот, либо сравнимы с длиной волны звука λ , либо меньше ее, да и на ультразвуковых частотах условие $\lambda \gg \ell$ встречается очень часто. На таких препятствиях падающая волна испытывает дифракцию и рассеяние. Нужно сказать, что оба эти термина в значительной степени являются синонимами. Под дифракцией в простейшем смысле понимают заг. бание волны в зону геометрической тени. Под рассеянием понимают возникновение искаженного звукового поля как позади, так и впереди препятствия. Таким образом, рассеянием называют возникновения искаженного поля; рассеяние — это вторичные волны, возникающие на препятствиях конечного размера или на неоднородностях среды.

Начнем с рассмотрения одного из наиболее важных случаев, с задачи о рассеянии падающей плоской гармонической волны на жесткой неподвижной (закрепленной) сфере радиуса z_0 , когда $kz_0 \ll 1$, т.е. когда $\lambda \gg z_0$, где $k = \omega/c$ — волновое число падающей волны (заметьте, что такая жесткая сфера может быть и не закрепленной, тогда при ее колебаниях может быть переизлучение). На рис. 12.1 показано расположение системы координат

неподвижной рассеивающей сферы; плоская гармоническая волна падает справа. Задача состоит в нахождении (рассеянного) поля вне сферы, в том числе в точке наблюдения. Для решения этой задачи поступают следующим образом. Поскольку падающая волна плоская, а рассеиватель — сфера, задачу решают, используя разложение плоской волны на сумму сферических волн, исходящих из центра сферы. Дальнейшее решение задачи сводится к определению коэффициентов разложения, что может быть сделано, если учесть граничные условия на поверхности сферы. Такими условиями для жесткой неподвижной сферы служит равенство нулю радиальных составляющих колебательной скорости в падающей и рассеянной волнах. Записывая граничное условие для потенциалов, имеем

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_0} = 0, \quad (12.1)$$

где φ_1 — потенциал падающей и φ_2 — потенциал рассеянной волны и z — расстояние от центра сферы до точки наблюдения. Решение задачи для случая $kz \gg 1$, т.е. на больших расстояниях от центра сферы, приводит к такому выражению для интенсивности рассеянных волн J_s :

$$J_s = J_i \frac{k^4 z_0^6}{9z^2} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \alpha \right)^2 = J_i \frac{\omega^4 z_0^6}{9c^4 z^2} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \alpha \right)^2. \quad (12.2)$$

Здесь c — скорость звука в среде и J_i — интенсивность падающей плоской волны. Как видно из этого выражения, интенсивность рассеяния, что особенно характерно, пропорциональна четвертой степени частоты падающей волны.

Теорию рассеяния света на сфере впервые дал Рэлей и описываемое рассеяние носит название рэлеевского рассеяния. Закон Рэля одинаково справедлив как для света (с учетом поляризационных эффектов), так и для звука; им, в частности, объясняется голубой цвет неба, причина которого в рассеянии света на мелких диэлектрических частицах в атмосфере, линейные размеры которых меньше длины световых волн.

Отношение $J_s / J_i \cdot z^2$ характеризует угловое распределение рассеянных волн — полярную диаграмму или индикатрису рассеяния для больших расстояний, когда $kz \gg 1$. На рис. 12.2 представлена индикатриса рассеяния для жесткого неподвижного шара

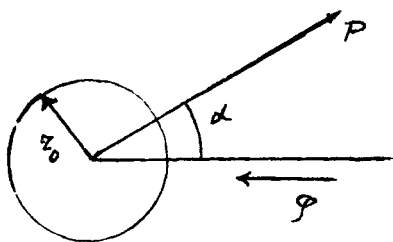


Рис. 12.1

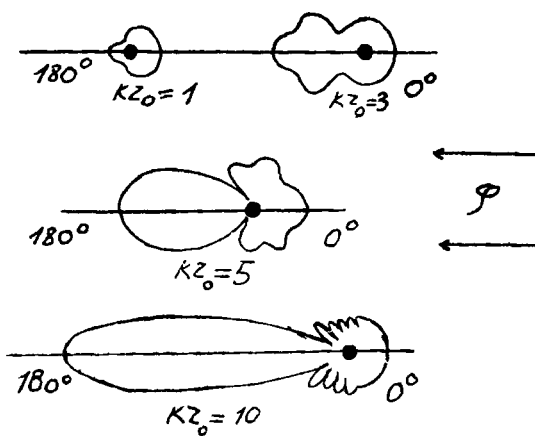


Рис. 12.2

при различных значениях κz_0 ; плоская волна падает на шар сзади. Интересной особенностью этой индикатриссы служит наличие большого рассеяния назад, т.е. навстречу падающей волне.

В задачах рассеяния часто пользуются так называемым эффективным сечением рассеяния, или поперечником рассеяния $\sigma_{эф}$, отношением полной рассеиваемой мощности эффективной площадью рассеивающего тела S (она зависит от формы тела и его ориентации по отношению к падающей волне), к интенсивности J_i падающей волны

$$\sigma_{эф} = \frac{J_s}{J_i} S. \quad (12.3)$$

Как видно, $\sigma_{эф}$ имеет размерность площади; $\sigma_{эф}$ характеризует эффективность рассеяния данной препятствием и определяет ту часть мощности звука, которая выдает (возвращает рассеяние) из направления падающей волны. Заметим, что в этом смысле $\sigma_{эф}$ характеризует затухание звука в данном направлении; чем больше $\sigma_{эф}$, тем больше затухание. Так, для случая $\kappa z_0 \ll 1$, где z_0 — радиус сферы, т.е. при "геометрическом" рассеянии, поперечник ее рассеяния будет равен, как это показывается в теории рассеяния удвоенной площади сечения $\sigma_{эф} = 2\pi z_0^2$. Для случая же $\kappa z_0 \ll 1$, т.е. для рэлеевского рассеяния, как можно считать

$$\sigma_{эф} = \frac{2}{9} \pi z_0^2 (\kappa z_0)^4 = \frac{2}{9} S (\kappa z_0)^4. \quad (12.4)$$

Из этой формулы следует, что при $\kappa z_0 \ll 1$ поперечник рассеяния существенно меньше πz_0^2 . Это, например, объясняется, почему звук в лесу слышен довольно далеко, тогда как видимость крайне ограничена, поскольку сечение рассеяния листьев мало для звука и велико для света (равно удвоенной площади листьев)*).

Когда размеры препятствия (сферы) малы и $\kappa z_0 \ll 1$, но сфера не жесткая, а сжимаемая (например, пузырек воздуха в воде), то граничные условия вместо (12.1) будут такими:

*) Этот термин "поперек волн" взят из книги Л.А. Исакевича "Общая акустика" (М.; Наука, 1973).

$$\left. \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) \right|_{z=z_0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z},$$

$$\rho(\varphi_1 + \varphi_2) \Big|_{z=z_0} = -\rho \varphi_1. \quad (12.5)$$

Здесь φ_1 - потенциал волны в частице и ρ - ее плотность, ρ - плотность окружающей среды. Расчет показывает, что в этом случае

$$T_z = \frac{\omega^4 \varepsilon_0^6}{i 9 c^4 z^2} \left[\frac{K_1 - K_2}{K_1} + \frac{3(\rho_1 - \rho) \cos \alpha}{2\rho_1 + \rho} \right]^2, \quad (12.6)$$

где K_1 и K_2 - модули объемной упругости частицы и окружающей среды, соответственно. Отметим, что если $K_1 \rightarrow \infty$, $\rho \gg \rho_1$, то мы приходим к предыдущему случаю жесткой частицы (формула (12.2)). В этой формуле сохраняются в основном те же зависимости от параметров рассеяния, что и в рассеянии Рэлея; отличие имеется в виде индикатрисы рассеяния.

Для случая сжимаемой сферы большое значение имеет наличие у нее возможных радиальных колебательных резонансов, возникающих под действием падающей волны. С такими условиями встречаются при распространении звука в воде, содержащей пузырьки газа. В этом случае при совпадении частоты падающей волны с собственной частотой колебаний пузырька, $\sigma_{\text{эф}}$ возрастает на несколько порядков. Это обстоятельство имеет большое значение в гидроакустике, поскольку оно приводит к большому затуханию звука в море, в особенности в приповерхностном слое, где бывает много пузырьков.

Возвращаясь к задаче о рассеянии на жесткой несжимаемой сфере, отметим сложность ее решения, когда $K z_0 \gtrsim 1$; подобную задачу в оптике рассмотрел Ми. На рис. 12.2 показаны индикатрисы рассеяния звука для различных значений $K z_0$. При малых $K z_0$ индикатриса близка к рэлеевскому рассеянию, а при увеличении $K z_0$ рассеяние вперед сильно возрастает, индикатриса вытягивается, возникает ряд дифракционных лепестков.

Сделаем несколько замечаний об очень распространенном случае, когда рассеивателей много. К таким случаям относится, например, упоминавшееся выше рассеяние звука на совокупности большого числа газовых пузырьков в воде, множество задач дефектоскопии, медицинской диагностики и т.д. Большую роль играет плот -

ность содержания пузырьков или других рассеивателей, т.е. их число в единице объема. Если число рассеивателей велико, то кроме того, что увеличивается σ_{Σ} , большую роль играет многократное рассеяние, когда рассеянная волна на одном рассеивателе далее перерассеивается на других рассеивателях. Такое многократное рассеяние в существенной мере увеличивает суммарное σ_{Σ} . Теоретически многократное рассеяние учесть становится трудно; однако при определенных условиях задача эта решается. При рассмотрении такой задачи следует принимать во внимание то, что распределение рассеивателей является, как правило, случайным - как по размерам, так и в пространстве.

Другим важным направлением в проблеме рассеяния является задача о рассеянии звука на случайных неоднородностях коэффициента преломления, вызванных изменениями (флуктуациями) плотности среды, ее температуры и случайных пульсаций скорости течения (течений), например благодаря турбулентному движению воздуха в атмосфере или воды в океане. Наконец, важной проблемой в целом ряде областей акустики является проблема рассеяния на шероховатостях (они могут быть периодическими, случайными и т.д.), линейные размеры которых сравнимы или меньше длины звуковой волны. К такого рода задачам относятся рассеяние звука на волнующейся поверхности океана, рассеяние поверхностных акустических волн (о поверхностных волнах см. ниже § 16) в устройствах акустоэлектроники и т.д.

В проблеме рассеяния звука определилась широкая область, охватывающая дефектоскопию, медицинскую диагностику, инженерную сейсмологию и геоакустику, акустику океана, которую объединяет общность задач - так называемые обратные задачи рассеяния (ОЗР). Под обратными задачами рассеяния в акустике понимают нахождение количественных характеристик локализованных неоднородностей среды (неоднородностей упругих постоянных, плотности, вязкости) на основе определения (теоретически и экспериментально) рассеянных полей от этих неоднородностей. Примером ОЗР служит нахождение дефекта в слитке металла, опухоли в теле человека и т.д. Указанные прикладные задачи часто называют акустической томографией. Вычислительная акустическая томография является наиболее эффективным методом решения ОЗР. Этим методом восстанавливаются распределения указанных неоднородностей исследуемого объекта. Для этого осуществляются вычислительные операции с экспериментально полученным набором параметров волновых полей, возникших из-за

взаимодействии с этими неоднородностями зондирующего (облучаемого) акустического поля.

Вообще говоря, под томографией, в узком смысле, понимают послойное отображение рассеивателя, тогда как в общей постановке ОЗР задача имеет существенно трехмерный характер. Следует подчеркнуть, что задача ОЗР с возникающим множеством не линейных дифференциальных уравнений в частных производных, решается с применением быстродействующих ЭВМ пока только, в основном, в так называемом Борновском приближении, когда рассеянное поле существенно меньше поля падающих волн и не учитывается перерассеяние. Это приближение применимо для слабых неоднородностей, чем не так часто бывает в реальных случаях. Нередко встречаются средние, да и сильные рассеиватели, когда из-за возможной фокусировки рассеянное поле в области приема оказывается даже больше, чем поле падающей на рассеиватели волны. И в таком сложном случае имеются надежды на получение образа локальных неоднородностей, т.е. получение решения ОЗР с использованием особых методов обработки данных по рассеянию на быстродействующих ЭВМ.

§ 13. Поглощение звука

Как сказано в § 1, при распространении звуковых волн происходит потеря энергии этих волн благодаря процессам диссипации из-за действия вязкости и теплопроводности, которые мы пока не учитывали. Там же введено понятие коэффициента поглощения α , относящееся к плоской волне. Здесь мы вновь вернемся к этому вопросу и покажем, как можно получить формулу для α .

Естественно, что для учета влияния η нужно воспользоваться уравнениями гидродинамики вязкой среды (уравнением Навье - Стокса) (2.18). Ограничимся рассмотрением влияния только сдвиговой вязкости η . Это уравнение при учете только η сильно упростится. К тому же для плоской волны, распространяющейся по направлению x , мы будем иметь дело с одномерной задачей. Поступая так, как мы поступали при выводе волнового уравнения для идеальной среды в рамках линейной теории, т.е. считая, что волны не взаимодействуют друг с другом и выполняется принцип суперпозиции, можно показать, что для среды, имеющей сдвиговую вязкость η , одномерное волновое уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (13.1)$$

Для плоской гармонической волны $\varphi = \varphi_0 e^{i(\omega t - kx)}$. Подставляя это значение φ в (13.2), получим

$$K = \frac{\omega}{c} \left(1 - i \frac{4}{3} \eta \frac{\omega}{2\rho c^3} \right). \quad (13.2)$$

Положим $K = K_1 + iK_2$. Тогда

$$e^{i(\omega t - Kx)} = e^{i\omega t} e^{-iKx} = e^{i(\omega t - K_1 x)} e^{-K_2 x}. \quad (13.3)$$

Отсюда видно, что мнимая часть волнового числа K_2 представляет собой пространственный коэффициент поглощения волны α . Вспомогательная, что для волны, бегущей в положительном направлении,

$$P = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = i \rho_0 \omega \varphi = \rho_0 e^{i(\omega t - Kx)}, \quad (13.4)$$

получаем

$$P = \rho_0 e^{-\frac{4}{3} \eta \frac{\omega^2}{2\rho c^3} x} e^{i(\omega t - K_1 x)}. \quad (13.5)$$

Таким образом, амплитуда звукового давления P для плоской волны убывает с расстоянием x , с коэффициентом поглощения

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \cdot \frac{4}{3} \eta. \quad (13.6)$$

При распространении звука в вязкой среде кроме сдвиговой вязкости η играет также роль так называемая объемная вязкость η' , о которой мы говорили в § 2. Рассмотрение, подобное предыдущему привлекая уравнения Навье - Стокса с учетом η' , приводит к такому выражению для коэффициента поглощения

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left(\frac{4}{3} \eta + \eta' \right). \quad (13.7)$$

Учет явления теплопроводности (перенос тепла из области сжатия в область разрежения в звуковой волне) дает такую формулу для α :

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left[\frac{4}{3} \eta + \eta' + \kappa \left(\frac{1}{c_p} - \frac{1}{c_v} \right) \right]. \quad (13.8)$$

Здесь α - коэффициент теплопроводности, а C_v и C_p - соответственно теплоемкость при постоянном объеме и теплоемкость при постоянном давлении единицы массы среды. Приведенную формулу для α называют формулой Стокса - Кирхгофа, хотя её, по-видимому, следовало бы называть формулой Стокса - Кирхгофа - Рэлея поскольку Рэлей первый четко указал на роль η' .

Вторая вязкость играет особую роль в акустике (главным образом в физике ультразвука) и в молекулярной физике. Ею с макроскопической точки зрения объясняются особенности поведения скорости звука и его поглощения в многоатомных газах и органических жидкостях.

В 1925 г. Г.В.Пирсом (США) экспериментально показано, что в многоатомных газах, молекулы которых состоят из нескольких атомов, при частотах звука, начиная с нескольких сот килогерц и выше, имеется дисперсия звука и его аномальное поглощение, т.е. поглощение, которое не следует формуле (13.8). Так, для углекислого газа (CO_2), молекулы которого состоят из трех атомов, при атмосферном давлении и комнатной температуре лапласова скорость звука до частоты 10^5 Гц постоянна и равна 258,9 м/с. На частоте 277 кГц эта скорость возрастает примерно на 12 м/с (область максимальной дисперсии), а при частоте 10^6 становится постоянной и равной 271 м/с. На частоте 277 кГц, т.е. на частоте, где имеется максимум дисперсии, имеется также максимум поглощения; при этом

α увеличивается примерно в 20 раз больше того значения, которое следует по классической теории (13.7); при повышении частоты величина α снова следует этой теории. Это явление далее объяснено процессами возбуждения внутренних степеней свободы колебаний сложной молекулы газа в положительный полупериод звуковой волны и возвращение этой энергии обратно звуковой волне от возбужденных молекул в отрицательный полупериод. Такой процесс при неупругих столкновениях молекул и обмене энергии между внутренними и внешними степенями свободы происходит не мгновенно, а с запаздыванием; процессы с запаздыванием принято называть процессами релаксации. Точнее говоря, релаксационный процесс - это процесс запаздывания на конечный промежуток времени при отклонении макроскопической среды (системы) от состояния термодинамического

равновесия или возвращение к этому состоянию. Заметим при этом, что временем релаксации τ , называют время, за которое в таком процессе какой-либо параметр среды (температура, скорость, поглощение звука и т.д.) изменяется в e раз. Этот процесс запаздывания за конечный промежуток времени приводит к потере энергии, "застревающих" в колебаниях внутри молекулы; в конечном счете эта "застревающая" часть энергии переходит в тепло. Теоретическое объяснение таких явлений в многоатомных газах было далее получено на основе кинематических и молекулярных представлений (Х.О.Кнезер, А.Эйнштейн).

В начале тридцатых годов подобное явление также обнаружено в ряде органических жидкостей (бензол, толуол, уксусная кислота и т.д.).

Нужно сказать, что вне области релаксации вклад объемной вязкости η' в поглощение примерно такой же, как и сдвиговой вязкости η . Вклад теплопроводности в поглощение звука в жидкостях вне области релаксации на порядок меньше, однако в металлических жидкостях (например, ртуть) роль теплопроводности сильно возрастает. В области частот релаксации вклад в поглощение оказывается существенно больше. Так, для уксусной кислоты в диапазоне частот 3,7 - 31 МГц эксперимент дает значение $\frac{2}{f^2} \cdot 10^{-17} \text{ с}^2/\text{см} = 2880$, тогда как по классической теории это значение составляет всего 17. Таким образом, поглощение, благодаря , может на два порядка и больше превышать поглощение, вызываемое сдвиговой вязкостью.

Феноменологическая теория релаксационных явлений в газах и жидкостях была создана в конце 30-х годов в ЛГУ акад. Л.И.Чандельштамом и акад. М.А.Леонтовичем. Но об этой теории здесь мы говорить не будем.

§ 14. О теории упругости

До сих пор мы занимались акустикой жидкостей и газов. Перейдем к акустике твердого тела.

Будем говорить о твердых телах; под такими телами мы будем понимать твердые тела, физические свойства которых в любом элементе объема одинаковы и эти тела не имеют каких — либо включений, неоднородностей, микротрещин и т.д. Кроме того, будем считать, что электрические и магнитные поля отсутствуют. Для нас важен вопрос об упругих свойствах твердых тел; именно этими свойствами определяются характер распространения упругих волн в твердых телах и возможные типы этих волн. Известно, что под действием механических сил твердые тела изменяют свои размеры и форму. Возможны различные деформации твердых тел — сжатие и растяжение, сдвиг, изгиб, кручение и т.д. Однако в теории упругости доказывается, что все виды деформаций могут быть сведены лишь к двум — к растяжению (сжатию) и сдвигу.

Напомним вкратце количественную связь между силами, приложенными к твердому телу, и возникающими в нем деформациями. Каково, например, будет растяжение стального круглого стержня, если растягивающая сила равна P ? Если площадь поперечного сечения стержня $S = \pi d^2/4$, где d — диаметр стержня, то величина растягивающей силы, отнесенной к единице площади (такую силу называют механическим напряжением или просто напряжением σ), равна $\sigma = P/S$. Под действием силы P стержень длины L_1 испытает деформацию растяжения и его новая длина будет равна L_2 . Растяжение или сжатие (в теории упругости это вектор смещения $|L| = L_2 - L_1$) при малых деформациях пропорционально напряжению σ . В этом состоит закон Гука в линейной теории упругости

$$\frac{\Delta L}{L} = \kappa' \frac{P}{S}, \quad (14.1)$$

где коэффициент пропорциональности κ' зависит от свойств материала стержня. Обычно используют обратную величину $1/\kappa'$ и обо-

значают ее через E ; E — это так называемый модуль Юнга или модуль продольной упругости. Следует отметить, что написанный выше закон Гука, как уже было сказано, справедлив лишь при малых деформациях; при снятии напряжений тело возвращается в исходное положение. В нем не образуются остаточные деформации и напряжения. При больших деформациях твердое тело может быть вообще разрушено, и в таком случае теория упругости в классическом ее понимании уже несправедлива. Заметим, что вообще говоря, даже и при малых напряжениях и деформациях, строго говоря, закон Гука несправедлив; на этом мы остановимся подробнее несколько ниже. Формулу (I4.1) можно записать в виде

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E S} P, \quad (I4.2)$$

и мы имеем определение модуля Юнга

$$E = \frac{L}{\Delta L} \frac{P}{S}. \quad (I4.3)$$

Закон Гука мы можем через E написать в виде

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L}. \quad (I4.4)$$

Формулировка закона Гука в данном случае такова: напряжение вызывает деформацию с коэффициентом пропорциональности $E = 1/k$. Здесь везде мы говорили о деформации растяжения; естественно, что если сила P направлена в противоположную сторону, будет иметь место сжатие, и все рассуждения можно повторить.

При растяжении стержня диаметр его уменьшится на величину Δd . На опыте установлено, что для данного материала отношение $\Delta d/d$ к относительному удлинению $\Delta L/L$ есть величина постоянная (конечно, с некоторым приближением). Это отношение называют коэффициентом Пуассона:

$$\sigma^* = \frac{\Delta d/d}{\Delta L/L} = \frac{E}{\sigma} \frac{\Delta d}{d}. \quad (I4.5)$$

Величина σ^* для металлов примерно составляет 0,25, для материалов типа резины $\sigma^* \approx 0,5$.

Зная E и σ^* , вообще говоря, можно полностью описать упругие свойства изотропного твердого тела. Чаще пользуются не σ^* , а так называемым модулем сдвига μ .

На рис. 14.1 показана деформация чистого сдвига. При этом

$$\frac{aa'}{oa} = \frac{bb'}{ob} = \frac{cc'}{oc} = \tan \alpha.$$

Для малых α $\tan \alpha \approx \alpha$, и относительный сдвиг просто равен углу сдвига. Сдвиг в теле кубической формы с площадью грани при приложении в плоскости грани силы F определяется законом Гука для деформации сдвига

$$\frac{F}{S} = \mu \alpha. \quad (14.6)$$

Отношение $\frac{F}{S}$ есть механическое напряжение σ , и мы имеем

$$\sigma = \mu \alpha. \quad (14.7)$$

Это закон Гука для деформации сдвига.

Как и модуль Юнга E , модуль сдвига μ зависит от физических свойств твердого тела и не зависит от его размеров и формы. E , σ^* и μ не являются независимыми; между ними имеется соотношение

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{E}{1 + \sigma^*}. \quad (14.8)$$

Модуль сдвига μ , как и E , измеряется либо в кг/мм² (техническая система единиц), либо в динах на 1 см² (система СГС), либо в Ньютон/м² в системе СИ; по порядку величины модули упругости приблизительно могут изменяться в пределах $(0,01 + 10) \cdot 10^{12}$ дин/см². Если твердое тело испытывает деформацию всестороннего сжатия, то вводят объемный модуль упругости или модуль всестороннего сжатия; обычно его обозначают через K :

$$K = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta P} \quad (14.9)$$

(при постоянной температуре $T = \text{const}$, K - адиабатический объемный модуль). В теории упругости также пользуются постоянными Ламе λ и μ . Между всеми этими постоянными (модулями) упругости E , μ , λ , K , σ^* имеется такая связь (только две из этих постоянных являются независимыми)

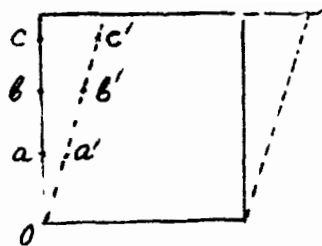


Рис. 11.1

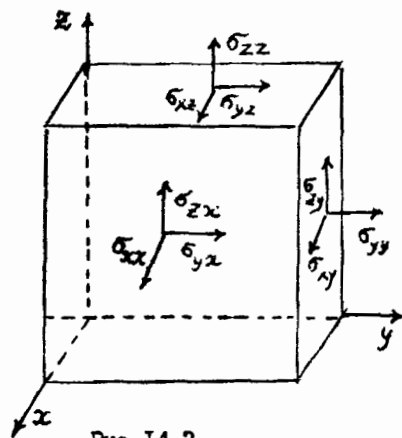


Рис. 14.2

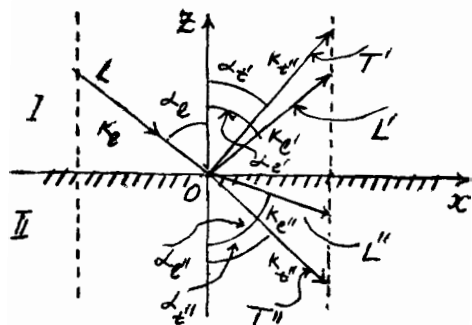


Рис. 15.1

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu; E = \frac{9K\mu}{3K+\mu}; \sigma^* = \frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}; \mu = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\sigma^*)}. \quad (14.10)$$

Отметим, что все эти модули упругости носят название линейных модулей упругости или модулей упругости второго порядка.

Теперь мы уточним основные представления о законе Гука. Для этого введем понятие тензора напряжений и тензора деформаций. Направление на элемент поверхности (единичную площадку) внутри твердого тела может действовать, вообще говоря, не по нормали к этой поверхности, как это имеет место в газе или жидкости, а имеет составляющие как по нормали к площадке, так и по касательной к ней. В декартовых координатах x, y, z (1, 2, 3), если рассмотреть напряжения, действующие на три плоскости перпендикулярно к этим осям, проходящим через рассматриваемую точку, получим девять компонент напряжений:

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{yx}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}.$$

Эту девять компонент напряжений образуют собой так называемый тензор напряжений. Первый индекс у σ означает направление приложенного напряжения, второй — плоскость, перпендикулярную той, на которую оно действует (рис. 14.2).

Рассматривая бесконечно малый прямоугольный параллелепипед с гранями, перпендикулярными осям x, y, z , можно убедиться, что для равновесия необходимо, чтобы удовлетворялись равенства

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{yx}, \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx}, \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy}. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Таким образом, независимыми остаются только 6 компонент тензора напряжений. Через эти 6 компонент можно выразить напряжение, действующее на любой элемент поверхности, т.е. они полностью определяют напряжение в какой-либо точке твердого тела.

Деформации, которые возникают под действием напряжений, образуют тензор деформаций. Когда тело деформируется, расстояние между его точками изменяется; эти изменения, как правило, являются малыми. Расстояние между двумя близкими точками и его изменение в процессе деформирования служит характеристикой деформированного состояния. Если вектор смещения $\vec{u}_M = \vec{r}_M - \vec{r}_{M'}$,

где $\vec{r}_M, \vec{r}_{M'}$ - радиусы-векторы, проведенные из начала координат, выбранного внутри тела, в близко расположенные друг от друга точки M и M' , то изменение расстояния между этими точками будет, как можно показать, $2u_{ik} dx_i dx_k$. Здесь u_{ik} есть тензор деформации

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (I4.12)$$

При $i=k$, $u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$, $u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$, $u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$ представляют собой относительные удлинения соответственно по осям x, y, z , а компоненты u_{ik} при $i \neq k$ определяют сдвиговые деформации. Тензор напряжений σ_{ik} , так же как и тензор деформаций u_{ik} , являются симметричными и $u_{ik} = u_{ki}$, $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$.

Вообще говоря, если твердое тело представляет собой кристалл с наиболее сложной симметрией, то связь между σ_{ik} и u_{ik} дается законом Гука в виде

$$\sigma_{ik} = C_{ijkl} u_{kl} (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (I4.13)$$

где C_{ijkl} - тензор (четвертого ранга) модулей упругости, общее число коэффициентов которого равно 81. Однако в силу симметрии тензоров напряжения σ_{ij} и деформации u_{kl} компоненты тензора C_{ijkl} симметричны относительно i и j , k и l , т.е. $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$. Эти соотношения снижают число независимых модулей до 36. В матричных обозначениях запись тензора

C_{ijkl} упрощается, пары индексов тензора заменяют одним индексом, следуя правилу

$$\begin{array}{ll} 11 \rightarrow 1 & 23, 32 \rightarrow 4 \\ 22 \rightarrow 2 & 13, 31 \rightarrow 5 \\ 33 \rightarrow 3 & 12, 21 \rightarrow 6 \end{array}$$

Тогда закон Гука записывается в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11} u_{xx} + C_{12} u_{yy} + C_{13} u_{zz} + C_{14} u_{yz} + C_{15} u_{zx} + C_{16} u_{xy} \\ \sigma_{yy} &= C_{21} u_{xx} + C_{22} u_{yy} + C_{23} u_{zz} + C_{24} u_{yz} + C_{25} u_{zx} + C_{26} u_{xy} \\ \sigma_{zz} &= C_{31} u_{xx} + C_{32} u_{yy} + C_{33} u_{zz} + C_{34} u_{yz} + C_{35} u_{zx} + C_{36} u_{xy} \\ \sigma_{yz} &= C_{41} u_{xx} + C_{42} u_{yy} + C_{43} u_{zz} + C_{44} u_{yz} + C_{45} u_{zx} + C_{46} u_{xy} \\ \sigma_{zx} &= C_{51} u_{xx} + C_{52} u_{yy} + C_{53} u_{zz} + C_{54} u_{yz} + C_{55} u_{zx} + C_{56} u_{xy} \\ \sigma_{xy} &= C_{61} u_{xx} + C_{62} u_{yy} + C_{63} u_{zz} + C_{64} u_{yz} + C_{65} u_{zx} + C_{66} u_{xy} \end{aligned} \quad (I4.14)$$

Всего, таким образом, имеется 36 независимых модулей упругости, число которых, используя дополнительные условия симметрии, снижается до 21, а специальным выбором координатной системы – до 18.

Для изотропного тела имеются только два модуля упругости,

λ и μ , и в этом случае

$$\lambda = c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{23} = c_{31} = c_{32}, \quad (14.15)$$

$$\mu = c_{44} = c_{55} = c_{66},$$

$$\lambda + 2\mu = c_{11} = c_{22} = c_{33}.$$

Для такого простейшего случая закон Гука записывается в виде

$$\sigma_{xx} = \lambda \Delta + 2\mu u_{xx},$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \Delta + 2\mu u_{yy},$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \Delta + 2\mu u_{zz},$$

$$\sigma_{yz} = 2\mu u_{yz}, \quad (14.16)$$

$$\sigma_{zx} = 2\mu u_{zx},$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu u_{xy},$$

где $\Delta = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Уравнения (14.16) можно записать также в виде $u_{\epsilon k} = f(\sigma_{\epsilon k})$, т.е. выразить деформации через компоненты напряжения.

Так как при равновесии силы внутренних напряжений, действующих на каждый элемент объема твердого тела, должны быть равными нулю, то уравнения статического равновесия деформированного тела записываются в виде

$$\frac{\partial \sigma_{\epsilon k}}{\partial x_k} = 0. \quad (14.17)$$

Если поверхность свободна, т.е. если внешняя сила, действующая на единицу поверхности, равна нулю, то

$$\sigma_{\epsilon k} n_k = 0, \quad (14.18)$$

где n_k – внешняя нормаль к поверхности. Это уравнение представляет собой граничное условие на свободной поверхности. Если к телу приложены объемные силы (например, сила тяжести $P_i = \rho g_i$, где g_i – компоненты ускорения силы тяжести), то граничные условия на поверхности будут иметь вид

$$\sigma_{\epsilon k} n_k = P_i. \quad (14.19)$$

Уравнения движения теории упругости получаются, если учесть, что при движении частиц твердого тела условия равновесия уже не выполняются, изменение напряжений в пространстве вызывает ускорение элемента объема (частицы) твердого тела, и, таким образом, необходимо в уравнении равновесия (I4.I7) правую часть приравнять $\rho \ddot{u}_i$, т.е. произведению $\ddot{u}_i$ ускорения на массу единицы объема тела:

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (I4.20)$$

При наличии внешних объемных сил, например силы тяжести ρg_i , уравнение движения упругой среды запишется в виде

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i. \quad (I4.2I)$$

§ I5. Звуковые волны в изотропном твердом теле

Задачи распространения упругих волн в безграничном твердом теле решаются подобно тому, как и в газах и в жидкостях, на основе волнового уравнения с использованием граничных и начальных условий. Волновое уравнение для твердых тел выводится исходя из уравнения движения и закона Гука.

Имея в виду уравнение (I4.I6), которое в тензорном виде записывается как $\sigma_{ik} = \lambda u_{ee} \delta_{ik} + 2\mu u_{ik}$, а u_{ik} дается (I4.I2), можно уравнение движения (I4.I9) в векторном представлении записать так:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \vec{u} - \mu \text{rot rot } \vec{u}. \quad (I5.I)$$

Поскольку в твердом теле есть сдвиговые деформации, в волновом уравнении для $\vec{u}$, которое может быть получено из (I5.I), присутствует вихревая часть смещения, а само поле упругих волн в общем случае представляет собой поле векторное. Для такого поля в изотропном твердом теле смещение может быть представлено в виде суммы потенциального $\vec{u}_e$ и вихревого $\vec{u}_z$ полей:

$$\vec{u} = \vec{u}_e + \vec{u}_z, \quad (I5.2)$$

причем $\text{rot } \vec{u}_e = 0$ и $\text{div } \vec{u}_z = 0$, вследствие чего $\vec{u}_e = \text{grad } \varphi$ и $\vec{u}_z = \text{rot } \vec{\psi}$, где φ — скалярный и $\vec{\psi}$ — векторный потенциалы. Из приведенных соотношений следует, что уравнение (I5.I) может

быть записано в виде двух волновых уравнений для $\vec{u}_e$ и $\vec{u}_t$:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{u}}_e - c_e^2 \nabla^2 \vec{u}_e &= 0, \\ \ddot{\vec{u}}_t - c_t^2 \nabla^2 \vec{u}_t &= 0.\end{aligned}\quad (15.3)$$

Первое из этих уравнений описывает распространение продольных волн или волн сжатия и расширения (L волн) со скоростью

$$c_e = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (15.4)$$

а второе - распространение сдвиговых (поперечных) упругих волн (T волн) со скоростью

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (15.5)$$

Если есть какое-либо возмущение, то его распространение будет независимой комбинацией L и T объемных волн, подчиняющихся волновым уравнениям (15.3). Скорость продольных и поперечных волн, имея в виду соотношения между упругими постоянными (14.10), может быть записана отлично от (15.4) и (15.5). Приведем здесь еще такие выражения для c_e и c_t :

$$c_e = \sqrt{\frac{E(1-\sigma^*)}{\rho(1+\sigma^*)(1-2\sigma^*)}}; \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma^*)}}. \quad (15.6)$$

Следует заметить, что $c_e > c_t$; обычно $c_e \geq \sqrt{4/3} c_t$, т.е. скорость T волн примерно в среднем составляет $\approx 70\%$ от скорости L волн. Некоторые данные для c_e , c_t , скорости волн в стержне (c_e^{CT} *), а также акустическое сопротивление ρc_e и моду-

*) Значения скоростей c_e и c_t относятся к неограниченной среде. Скорость продольных волн c_e^{CT} в стержне, диаметр которого значительно меньше длины продольной волны λ_e , дается формулой $c_e^{CT} = \sqrt{E/\rho}$. Для поперечных волн c_t^{CT} такая же, как скорость T волн в неограниченной среде, $c_t^{CT} = c_t$.

ли E и μ для некоторых твердых тел даются в следующей таблице:

Твердое тело	Плотн., г/см ³	$E \times 10^{-11}$ дин/см ²	$\mu \times 10^{11}$ дин/см	σ^*	Скорость, см/с		$\rho \times 10^6$
					c_e	c_{ct}	
Сталь	7,8	21,6	8,4	0,28	6,1	5,05	3,3
Чугун	7,7	11,5	4,4	0,27	4,5	3,85	2,4
Алюминий	2,65	10,0	2,63	0,32	6,4	5,25	3,1
Свинец	11,4	1,62	0,56	0,45	2,2	1,2	0,7
Медь	8,93	12,3	4,55	0,35	4,6	3,58	2,2
Латунь	8,5	10	3,5	0,37	4,25	3,42	2,0

Для гармонических волн $\vec{u}_{e,t}(\vec{r},t) = \vec{U}_{e,t} e^{-i\omega t}$ уравнения (15.3) переходят в уравнение Гальмгольца

$$\begin{aligned} \nabla^2 U_e + K_e^2 U_e &= 0, \\ \nabla^2 U_t + K_t^2 U_t &= 0, \end{aligned} \quad (15.7)$$

где $K_{e,t} = \omega / c_{e,t}$ — волновые числа для продольных и поперечных волн. Для одномерного случая плоской волны, распространяющейся в направлении оси x вектор смещения записывается в виде

$$\vec{u}(x,t) = \vec{i} u_x(x,t) + \vec{j} u_y(x,t) + \vec{k} u_z(x,t) \quad (15.8)$$

и уравнения (15.3) переходят в уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - c_e^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - c_t^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - c_t^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Из этих волновых уравнений следует, что в продольной $\angle$ волне (первое уравнение (15.9)) направление смещений совпадает с направлением распространения волны, тогда как в поперечной волне, описываемой двумя нижними уравнениями (15.9), компоненты вектора смещений u_y и u_z направлены перпендикулярно оси x , а сама волна распространяется по x . Каждое же из этих двух волновых уравнений описывает поведение соответствующей компоненты.

Законы отражения и преломления упругих волн от границ раздела в случае твердых тел гораздо сложнее, чем такие законы для звуковых волн в жидкостях и газах, о которых шла речь в § 6. Если плоская упругая волна падает нормально к плоской границе раздела, то в этом случае законы отражения и преломления как $\angle$ волны, так и T волны остаются теми же, что и для продольной волны в случае § 6. Однако, если волна падает под углом к плоской границе раздела, то положение дела существенно усложняется.

При рассмотрении этой задачи оказывается, что для того, чтобы удовлетворить граничным условиям, необходимо различать три характерных случая отражения и преломления $\angle$ и T волн. Обсудим сначала случай, когда на границу раздела из среды I в среду II падает $\angle$ волна (рис. 15.1)*). Можно показать, что в первой и во второй средах возникает по две волны. Происходит расщепление (трансформация) волны $\angle$. Возникают поперечные волны в первой и во второй средах; они имеют вертикальную поляризацию (TV волна). Это значит, что направление смещений в этих волнах происходит в плоскости падения XOZ . Для падающей и отраженной $\angle$ волн соблюдается закон равенства угла падения α , отражения $\alpha_e = \alpha_e'$. Если на плоскую границу раздела двух твердых тел падает T волна вертикальной поляризации TV (рис. 15.2), то в этом случае волна также расщепляется. В первой среде возникают две отраженные волны T' и $\angle'$, и во второй — две преломленные волны T'' и $\angle''$, при этом $\alpha_e = \alpha_e'$. Если падающая волна имеет горизонтальную поляризацию (TH волна, вектор смещения у такой волны перпендикулярен плоскости па-

*) Из условий симметрии можно считать, что касательные к поверхности раздела компоненты волнового вектора $\vec{k}_{e,t}$ изменяться не должны и $k = \text{const}$.

дения), то такая волна при падении на границу раздела в силу условий симметрии не испытывает расщепления, и отражение и преломление происходит по обычным законам.

Обращаясь к случаю падения $\angle$ волны (рис. 15.1), можно заметить, что при увеличении угла падения до $\alpha_{e'}$ наступает такой момент, когда $\angle$ волна уже не переходит во вторую среду, а начинает скользить вдоль поверхности раздела (рис. 15.3); угол при этом называют первым критическим углом. Это случай полного внутреннего отражения или просто полного отражения для $\angle$ волны. При дальнейшем увеличении угла до $\alpha_{e''}$ во вторую среду не передается и T волна (если $c_e < c_{e''}$); она тоже начинает скользить по границе раздела. Этот угол $\alpha_{e''}$ называют вторым критическим углом — имеет место полное отражение T волны. Если угол увеличить еще больше, во вторую среду волны проникать не будут. Значение критических углов зависит от соотношения скоростей в первой и второй средах. Полное отражение возможно при условии, когда скорость звука во второй среде больше, чем в первой среде. Для случая косоуго падения (рис. 15.1) закон преломления выражается формулой (закон Снеллиуса).

$$\frac{\sin \alpha_e}{c_e} = \frac{\sin \alpha_{e'}}{c_e} = \frac{\sin \alpha_{e''}}{c_{e'}} = \frac{\sin \alpha_{e''}}{c_{e''}} = \frac{\sin \alpha_{e''}}{c_{e''}} \quad (15.10)$$

Здесь c_e, c_t — скорости $\angle$ и T волн в первой среде, а $c_{e''}$ и $c_{t''}$ — скорости $\angle$ и T волн во второй среде. Первый критический угол имеет место при $\alpha_{e''} = \pi/2$, т.е. при $\sin \alpha_{e''} = 1$. Угол падения α_e определяется тогда формулой $\sin \alpha_e = c_e / c_{e''}$. Второй критический угол получается при $\alpha_{t''} = \pi/2$; он находится из равенства $\sin \alpha_{t''} = c_e / c_{t''}$. По значениям c_e, c_t в первой и во второй средах можно найти углы преломленных волн и критические углы.

Мы говорили выше о тех углах отражения и преломления для $\angle$ и T волн, которые возникают при падении упругих плоских волн на плоскую границу раздела, ничего не говоря об амплитудных соотношениях. Значения амплитуд отраженных и преломленных волн находятся из решения соответствующих волновых уравнений при учете граничных условий и физических параметров рассматриваемых двух сред.

§ 16. Рэлеевские поверхностные акустические волны

До сих пор шла речь об **объемных** акустических волнах (ОАВ) L и T , распространяющихся в объеме изотропного твердого тела. В 1885 г. английский физик Релей теоретически предсказал возможность распространения на поверхности твердого тела, граничащего с воздухом (вакуумом), поверхностных акустических волн, которые принято называть **релеевскими** волнами (будем дальше их называть R волнами). Затем эти волны были открыты в сейсмологии, где они играют большую роль в настоящее время в регистрации и расшифровке сейсмограмм землетрясений и колебаний почвы при наблюдении ядерных взрывов под землей. Энергия этих волн сосредоточена в узком поверхностном слое толщиной порядка длины волны, не испытывая (в отличие от ОАВ) **больших** потерь на геометрическое расхождение в объем полупространства и поэтому они распространяются на большие расстояния.

Дальнейшие исследования показали, что кроме R волн существует целый ряд других типов поверхностных акустических волн (ПАВ). Упомянем из них поверхностные поперечные волны в твердом слое, лежащем на твердом упругом полупространстве (волны Лява), волны в пластинках (волны Лэмба), волны на **искривленных** поверхностях, клиновые волны и т.д. Здесь мы остановимся лишь на **рэлеевских** волнах.

В настоящее время, в связи с широкими применениями акустических волн ультразвукового и гиперзвукового диапазона, **поверхностные акустические волны**, в том числе и **рэлеевские**, имеют большое значение в физике твердого тела, физике поверхностных явлений в твердых телах, ультразвуковой дефектоскопии поверхности и т.д. Начиная с 70-х годов, эти волны начали играть большую роль в акустоэлектронике и обработке сигналов.

R волны имеют некоторые общие черты с волнами на поверхности жидкости. Последние, как известно, образуются вследствие сил инерции и сил тяжести (длинные волны, которые также часто называют гравитационными) и вследствие сил инерции и сил поверхностного натяжения (капиллярные волны или рябь). И те, и другие волны быстро затухают с глубиной и распространяются лишь в поверхностном слое глубиной порядка длины волны. Они обладают **сильной дисперсией**; **азовая** скорость распространения длинных волн выражается формулой

$$c_{zp} = \sqrt{\frac{g\lambda_p}{2\pi}},$$

где g — ускорение силы тяжести и λ_p — длина гравитационной волны. Фазовая скорость c_k для коротких волн (рябь или капиллярные волны):

$$c_k = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda_k}},$$

где σ — капиллярная сила (поверхностное натяжение жидкости), ρ — плотность жидкости и λ_k — длина капиллярной волны. Как видно из этих приведенных формул, волны на поверхности жидкости имеют сильную дисперсию; c_{zp} растет с увеличением λ_p , а c_k падает с увеличением λ_k .

В области длин волн $\lambda \approx 1,7$ см (вода) роль гравитационных сил и сил поверхностного натяжения одинаковы и в этой области длин волн образуются смешанные гравитационно-капиллярные волны. Заметим, что в волнах на поверхности жидкости направление движения частиц среды в волне похоже на движение часовой стрелки (по отношению к направлению распространения волны), совершая периодические движения приблизительно по круговой траектории.

Как уже было сказано, R волны также распространяются в тонком приповерхностном слое толщиной порядка λ_R . Они образуются благодаря свойствам инерции и упругости среды. Однако в отличие от волн на поверхности жидкости движение частиц в волне, бегущих по плоской поверхности твердого тела, происходит против часовой стрелки, и эти волны не обладают дисперсией. Пусть на плоской неограниченной поверхности твердого тела возникло синусоидальное возмущение, которое распространяется вдоль границы в направлении x , в виде плоской волны. В отличие от объемных волн о L и T волнах в неограниченной среде, в ограниченном полупространстве на границе должны выполняться граничные условия, которые состоят в том, что поверхность свободна и напряжения должны отсутствовать, т.е.

$$\sigma_{ik} n_k = 0. \quad (16.1)$$

В нашем случае $K = z$ (см. рис. 16.1) и условия на границе имеют вид

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz} = 0. \quad (16.2)$$

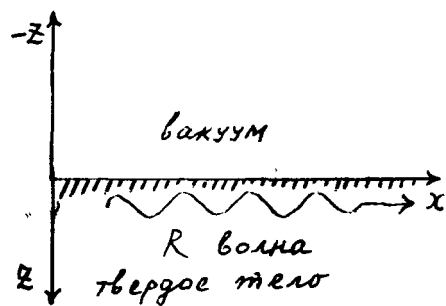


Рис. 16.1

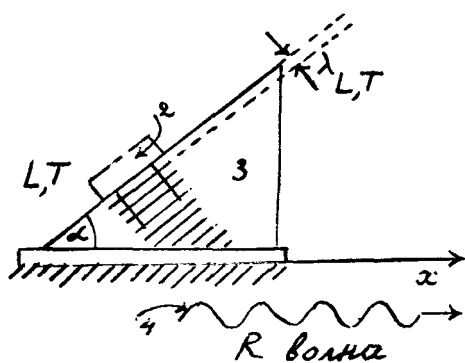


Рис. 16.2

Очевидно, задача состоит в том, чтобы найти решение уравнения движения (15.9) при граничных условиях (16.2). При этом, так как рассматриваем плоскую задачу и $u_y = 0$, второе уравнение в (15.9) учитывать не нужно; движение должно происходить в плоскости XOZ (сакгитальная плоскость).

Поскольку пространство считаем изотропным, можно пользоваться скалярным φ и векторным $\vec{\psi}$ потенциалами, воспользовавшись представлением (15.2). Уравнения движения запишутся в виде уравнений Гельмгольца (15.7) для потенциалов φ и $\vec{\psi}$, которые в нашем случае имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_c^2 \varphi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_c^2 \psi &= 0. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Напомним, что по определению $\text{rot} \vec{\psi} = e(\partial \psi / \partial y - \partial \psi / \partial z) + j(\partial \psi / \partial z - \partial \psi / \partial x) + k(\partial \psi / \partial x - \partial \psi / \partial y)$. Так как движение частиц в волне происходит в плоскости XOZ , то только y -компонента $\text{rot} \vec{\psi}$ не равна нулю: ψ_y далее будем обозначать через ψ . Задача состоит в том, чтобы найти решение этих уравнений при выполнении граничных условий (16.2).

Нами предполагалось, что распространяющаяся гармоническая волна плоская и что амплитуда ее затухает с глубиной z . Положим

$$\begin{aligned} \varphi &= f(z) e^{i(\omega t - k_R x)}, \\ \psi &= g(z) e^{i(\omega t - k_R x)}, \end{aligned} \quad (16.4)$$

где $k_R = \omega / c_R$ волновое число R волны и c_R фазовая скорость этой волны. Подставляя (16.4) в (16.3), найдем

$$\begin{aligned} f''(z) - \left[k_R^2 - \left(\frac{\omega}{c_e} \right)^2 \right] f(z) &= 0, \\ g(z) - \left[k_R^2 - \left(\frac{\omega}{c_e} \right)^2 \right] g(z) &= 0, \end{aligned} \quad (16.5)$$

откуда получим

$$\begin{aligned} f(z) &= a e^{-\alpha z} + a' e^{\alpha z}, \\ g(z) &= b e^{-\beta z} + b' e^{\beta z}, \end{aligned} \quad (16.6)$$

где

$$\alpha^2 = k_R^2 - \left(\frac{\omega}{c_R}\right)^2 = k_R^2 - k_e^2 = \left(\frac{\omega}{c_R}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c_e}\right)^2,$$

$$\beta^2 = k_R^2 - \left(\frac{\omega}{c_e}\right)^2 = k_R^2 - k_t^2 = \left(\frac{\omega}{c_R}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2, \quad (16.7)$$

а a, a', b, b' — некоторые постоянные, подлежащие определению. Поскольку ось z направлена вглубь среды, то в (16.6) члены с $e^{\alpha z}$, $e^{\beta z}$ должны быть отброшены, иначе с возрастанием z (функции $f(z)$ и $g(z)$) увеличивались бы безгранично. Таким образом, уравнения (16.4) можно переписать в виде

$$\varphi = a e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - k_R x)},$$

$$\psi = b e^{-\beta z} e^{i(\omega t - k_R x)}. \quad (16.8)$$

Постоянные a и b нужно найти из граничных условий (16.2). Эти граничные условия согласно закону Гука (14.16) и (16.2) записываются в виде

$$\sigma_{zz} = \lambda \Delta + 2\mu u_{zz} = \lambda(u_{xx} + u_{zz}) + 2\mu u_{zz} = 0,$$

$$\sigma_{zx} = 2\mu u_{zx} = 0. \quad (16.9)$$

Из (14.12) находим компоненты тензора деформации

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$u_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (16.10)$$

Поскольку $\vec{u} = u_e + u_t = \text{grad} \varphi + \text{rot} \vec{\psi}$ (см. (15.2)), то связь между φ и ψ определяется соотношениями (см. запись $\text{rot} \vec{\psi}$)

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (16.11)$$

Используя далее (16.10), (16.11) и проводя соответствующие дифференцирования, можно получить выражения для σ_{zz} и σ_{zx} , которые должны быть равны нулю при $z=0$:

$$\sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) = 0,$$

$$\sigma_{zx} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (16.12)$$

Пользуясь (I6.8), находим вторые производные по x и по z от φ и ψ и подставляя их в (I6.I2) получаем два уравнения, из которых можно найти a и b :

$$\begin{aligned} i k_R \beta b + \left[k_R^2 \frac{\lambda}{2\mu} - \Delta^2 \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu} \right) \right] a, \\ (k_R^2 + \beta^2) b + 2 i k_R \alpha a = 0. \end{aligned} \quad (\text{I6.I3})$$

Равенство нулю определителя (I6.I3) приводит к уравнению, которое называется уравнением Рэлея

$$4 k_R^2 \alpha \beta - (k_R^2 + \beta^2) = 0. \quad (\text{I6.I4})$$

Если ввести обозначения

$$\xi = \frac{k_e}{k_t} = \frac{c_t}{c_e}, \quad \eta = \frac{k_t}{k_R} = \frac{c_R}{c_e}, \quad (\text{I6.I5})$$

то уравнение Рэлея можно записать в виде

$$\eta^6 - 8 \eta^4 + 8 (3 - 2 \xi^2) \eta^2 - 16 (1 - \xi^2) = 0. \quad (\text{I6.I6})$$

Проведенное рассмотрение показывает, что волновые векторы R , L и T волн соответственно k_R , k_e и k_t в силу граничных условий связаны между собой и рэлеевская волна представляет собой волну сложную. Поскольку ρ и ξ согласно (I6.I5) определяются значениями скоростей c_R , c_e , c_t , т.е. зависят только от упругих свойств среды и не зависят от

ω , то рэлеевские волны в рассматриваемой постановке задачи не обладают дисперсией, их фазовая скорость c_R от частоты не зависит.

Скорость рэлеевских волн c_R оказывается несколько меньше скорости поперечных волн c_e . Так, при коэффициенте Пуассона $\nu^* \approx 0,25$ (часто встречающийся случай, например, для металлов) $c_R \approx 0,92 c_e$. С увеличением расстояния от поверхности $z = 0$ амплитуда рэлеевской волны быстро убывает. Расчеты показывают, что частицы среды движутся по эллиптическим траекториям; большая ось эллипсов перпендикулярна поверхности. Как уже говорилось, направление движения частиц на поверхности происходит против часовой стрелки относительно направления рас-

пространения волны, т.е. относительно положительного направления оси X .

Скажем немного о том, как экспериментально можно возбудить релеевские волны на плоской поверхности твердого тела в области ультразвуковых частот (порядка 1 МГц и выше), в которой релеевские волны (и другие типы поверхностных волн) главным образом и используются. На рис. 16.2 показан один из методов генерации релеевских волн на плоской поверхности твердого тела 1. Пьезоэлектрическая пластинка 2 (см. § 22), к электродам которой приложено переменное электрическое напряжение, излучает в материал клина L или T волны. В системе клин 3, подложка 4 и жидкий тонкий слой 5 образуется довольно сложная картина акустического поля, в том числе волны близкие к релеевским (в основном, в подложке). При условии $\sin \alpha = c_{kl}/c_R$, где c_{kl} — скорость акустических волн в клине и α — угол раскрытия клина,

R волны будут распространяться по поверхности 1. Чтобы это соотношение выполнялось, скорость L и T волн в материале клина c_{kl} должна быть меньше чем скорость R волн в подложке; часто клин делают из пластмассы (в которой, к сожалению, поглощение ультразвука велико), скорость L и T волн в которой меньше чем скорость релеевской волны в подложке.

При получении оптимальных условий излучения R волн играет роль выбор длины области возбуждения. Эффективность преобразования объемных волн в R волны в клиновых преобразователях теоретически может достигать $\approx 80\%$ (по акустической стороне, т.е. не считая потерь на преобразование электрической энергии в энергичную акустическую при работе пьезопластины).

Известно, что T волны в жидкости не распространяются. Поэтому может возникнуть вопрос, как можно с использованием жидкого слоя излучать релеевские волны при помощи T волн возбуждаемых в материале клина пьезоэлектрической пластиной. Однако в данном случае мы имеем дело с косым падением T волны, при котором, как мы знаем, происходит трансформация волн при их падении под углом, в результате чего возникает продольная компонента L волн.

Для твердых тел, обладающих пьезоэлектрическими свойствами известны другие (более эффективные) методы генерации R волн и поверхностных акустических волн других типов.

§ 17. Нелинейные акустические волны.

Жидкости и газы

Здесь кратко остановимся лишь на некоторых нелинейных явлениях в акустике, оставив в стороне такие вопросы (которые принято относить к этой обширной области), как кавитация, акустические течения, радиационное давление и многие другие.

До сих пор мы занимались линейной акустикой и считали, что выполняется принцип суперпозиции или наложения волн, при котором волны не взаимодействуют между собой, так что, например, акустическая волна, распространяющаяся в среде, где движется в той же области пространства другая волна, не оказывает никакого на нее влияния.

Принцип суперпозиции не выполняется. Однако, если интенсивности волн не малы и при своем распространении эти волны изменяют свойства среды, другая волна идет уже по измененной среде и испытывает определенные изменения. Если волна одна и других волн нет, ее "хвост" идет уже по среде, измененной "головой" волны; волна, как говорят, испытывает самовоздействие. Мы встречаемся в этих случаях с понятием нелинейных волн или волн конечной амплитуды.

Исторически сложилось так, что именно в акустике были получены первые результаты по теории нелинейных волн. Далее эти результаты были использованы в разработке теории нелинейных волн в гидродинамике, электромагнитной теории, в оптике (нелинейная оптика), в плазме и т.д. Можно сказать без преувеличения, что нелинейные волны, их изучение и различные применения пронизывают все разделы современной физики подобно тому, как это имеет место для нелинейных колебаний сосредоточенных систем.

Рассмотрим распространение плоской акустической волны конечной амплитуды в направлении x в идеальной газе или жидкости. Не будем пренебрегать нелинейным (конвективным) членом в уравнении движения (2.14) $\partial^2 v' / \partial x^2$ и членом второго порядка малости в уравнении неразрывности (2.15) $\partial^2 \rho' / \partial x^2$. Таким образом, будем исходить из уравнений идеальной жидкости

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (17.1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = - \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (17.2)$$

Воспользуемся так в выражении для квадрата скорости звука

$$c^2(p) = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho}. \quad (17.3)$$

Точное решение этой системы уравнений с учетом уравнения состояния в виде адиабаты Пуассона впервые в 1860 г. получено Риманом. Следуя Риману, подставив $\frac{\partial p}{\partial x}$ из (17.3) в (17.1), получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (17.4)$$

далее введем в рассмотрение функцию (ее называют функцией Римана)

$$\sigma(\rho) = \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho. \quad (17.5)$$

Поскольку

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (17.6)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (17.7)$$

то уравнение (17.2) и (17.4) примут вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (17.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (17.9)$$

Сложим эти уравнения и вычтем из одного из этих уравнение другое. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma + v) + (c + v) \frac{\partial}{\partial x} (\sigma + v) = 0, \quad (17.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma - v) + (c - v) \frac{\partial}{\partial x} (\sigma - v) = 0. \quad (17.11)$$

При $\sigma = \pm v$ эти уравнения приобретают вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} \pm (c \pm v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (17.12)$$

Они описывают распространение возмущений (волны), одно из которых движется в положительном направлении оси x , другое в направлении $-x$. Сумма (разность) $c_{\text{лок}} = c \pm v$ в формуле (17.12) представляет собой локальную (местную) скорость звука какой-либо точки профиля волны при данном значении x . В области сжатия к скорости звука прибавляется значение колебательной скорости v ; в области разрежения - вычитается такое же значение v .

К такому выводу нас привел учет нелинейности уравнений движения и уравнения неразрывности.

Посмотрим теперь, к чему приводит нелинейность уравнения состояния. Для этого воспользуемся уравнением адиабаты Пуассона (1.17) $P = P_0 (\rho/\rho_0)^\gamma$. Принимая во внимание (17.1), получим тогда

$$c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = c_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \quad (17.13)$$

(рассматриваются адиабатические процессы и энтропия S считается постоянной). Из (17.13) имеем

$$c = c_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}}. \quad (17.14)$$

Подставив это значение c в функцию Римана (17.5), найдем

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c^2(\rho) d\rho}{\rho} = c_0^2 \int_{\rho_0}^{\rho} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2c_0^2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \right]_{\rho_0}^{\rho} = \\ &= \frac{2c_0}{\gamma-1} \left[\frac{c}{c_0} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (17.15)$$

Таким образом, поскольку $\sigma = \pm v$, имеем

$$c = c_0 \pm \frac{v(\gamma-1)}{2}. \quad (17.16)$$

Отсюда видно, что вклад в значение скорости c за счет нелинейности уравнения состояния оказывается равным $\pm (\gamma-1)/2 \cdot v$. Общее же значение величины $c_{\text{лок}}$ будет

$$c_{\text{лок}} = c_0 \pm v \pm \frac{v(\gamma-1)}{2} = c_{\text{лок}} + \epsilon v = c_0 \left(1 \pm \frac{\epsilon v}{c_0} \right), \quad (17.17)$$

где $\varepsilon = (\delta+1)/2$ называют нелинейным параметром. Для воздуха $\varepsilon \approx 1,2$ и для воды $\varepsilon \approx 7$ *). Если волна движется только вправо, то (17.12) переходит в уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (c_0 + \varepsilon v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (17.18)$$

Это уравнение часто называют уравнением простой волны для нелинейного случая, имея в виду, что под простой волной обычно понимают одномерную бегущую волну в одном направлении. Приближенно можно считать, что нелинейность уравнения состояния изменяет

$c_{\text{лок}}$ на $\pm (\delta-1)v/2$, а нелинейность уравнения движения на $\pm v$. Заметим, что для воздуха нелинейность при прочих равных условиях проявляется в значительно меньшей степени, чем для воды.

Из приведенных соображений ясно, что скорости перемещения точек профиля гармонической волны различны. Точки профиля, для которых $v > 0$ (сгущение), движутся со скоростями $c > c_0$, а те точки профиля, для которых $v < 0$ (растяжение), движутся со скоростями $c < c_0$. Начальный профиль волны при прохождении ею расстояния x будет искажаться. Если двигаться вместе с волной (сопровождающая система координат), то те точки профиля, для которых $v = 0$ ("нули волны") останутся неподвижны, а те точки, для которых $v \gtrless 0$, будут двигаться с относительной скоростью

εv . На рис. 17.1 показано, как по мере распространения синусоидальной волны, начиная с момента $t = 0$, ее профиль постепенно меняется и, наконец, синусоидальная волна превращается в волну пилообразной формы. У нее имеется крутой фронт или, как принято говорить, разрыв. Ширина такого разрыва зависит от того, каковы диссипативные свойства среды. Эта ширина разрыва при достаточно больших интенсивностях волны, в такой мало поглощающей среде, как вода, может быть весьма малой как в пространстве, так и во времени. Обычно при ультразвуковом диапазоне частот порядка нескольких мГц и интенсивностях несколько Вт/см² или десятков Вт/см² эта ширина в воде составляет от нескольких сотых до десятых долей полупериода. В сильных одиночных ударных волнах в

*) В воде с пузырьками воздуха величина ε может достигать значений больших почти на два порядка по сравнению с указанным. Заметим, однако, что поглощение в такой среде велико.

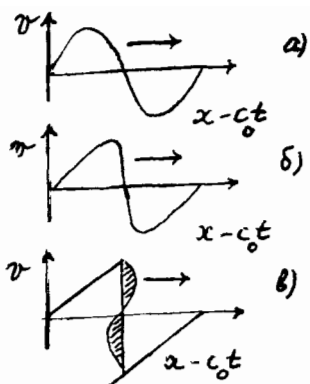


Рис. 17.1

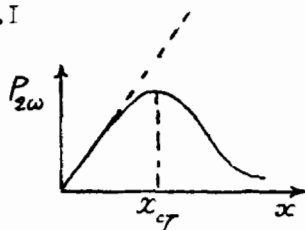


Рис. 17.2

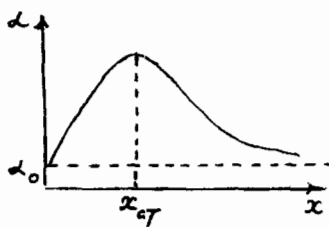


Рис. 17.3

газах, т.е. уже не в акустике, а в газодинамике, ширина фронта волны во времени может составлять несколько микросекунд, а в пространстве — порядка длины свободного пробега молекул газа.

Естественно, что в акустике пилообразная $\angle$ волна не может "захлестнуться", как это имеет место при опрокидывании волны на поверхности воды, подходящих к мелкому берегу (рис. 17.1, в, **штриховка**), поскольку в один и тот же момент времени, параметры характеризующие акустическую волну, не могут иметь три различных значения.

В отличие от линейной простой гармонической волны, когда $v = v_0 \sin(\omega t - kx) = v_0 \sin \omega(t - \frac{x}{c})$, для волны конечной амплитуды, согласно (17.17)

$$v = v_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c_0 + \varepsilon v} \right). \quad (17.19)$$

В акустике, как мы неоднократно говорили, число Маха $M_{ax} = \frac{v}{c}$ очень мало (даже для **сильных** звуков в воде $M_{ax} \approx 10^{-4} + 10^{-5}$). Поэтому (17.19) можно представить в виде разложения в ряд, ограничиваясь членами второго порядка малости по $\frac{v}{c}$

$$v = v_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c_0 + \varepsilon v} \right) \approx v_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c_0} + \frac{\varepsilon x v}{c_0^2} + \dots \right). \quad (17.20)$$

Это выражение легко преобразовать, пользуясь тригонометрической формулой для $\sin(\varphi_0 + \varphi_1)$, где $\varphi_0 = \omega(t - \frac{x}{c_0})$, а $\varphi_1 = \omega x \varepsilon \frac{v}{c_0^2}$, и считать, что при $v \ll c_0$, $\cos \varphi_1 \approx 1$, $\sin \varphi_1 \approx \varphi_1$. Разлагая (17.20) в ряд, получим, используя выражение для $\sin(\varphi_0 + \varphi_1)$:

$$v = v_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right) + \frac{\omega x \varepsilon}{2} \left[\frac{v_0 v}{c_0^2} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right) \right] \quad (17.21)$$

или

$$v = \frac{v_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right)}{\left[1 - \omega x \varepsilon \frac{v_0}{c_0^2} \cos \left(t - \frac{x}{c_0} \right) \right]}. \quad (17.22)$$

Разлагая далее в ряд знаменатель и ограничиваясь двумя членами разложения, найдем

$$v = v_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right) + \frac{\omega x \varepsilon}{2} \left(\frac{v_0}{c_0} \right)^2 \sin 2\omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right). \quad (17.23)$$

Как видим из этого выражения, по мере распространения гармонической волны возникает и растет с увеличением x амплитуда второй гармоники $v_{2\omega}$, величина которой определяется выражением

$$v_{2\omega} = \frac{\omega x \varepsilon}{2} \left(\frac{v_0}{c_0} \right)^2, \quad (17.24)$$

или, если воспользоваться для плоской волны формулой $v = \frac{P}{\rho c}$, найдем для акустического давления

$$P_{2\omega} = P_{01} \frac{\omega x \varepsilon}{2 \rho c_0^2}, \quad (17.25)$$

где P_{01} — амплитуда давления волны основной частоты ω при $x = 0$. Таким образом, амплитуда второй гармоники $P_{2\omega}$ пропорциональна проходимому волной расстоянию x , т.е. имеет место процесс "накопления" искажения формы волны. Кроме того, $P_{2\omega}$ пропорциональна частоте основной волны ω , нелинейному параметру ε и интенсивности волны основной частоты P_{01}^2 (вспомним, что $J \sim P_{01}^2 / 2 \rho c$). В воде на частотах порядка 1 МГц амплитуда второй гармоники $P_{2\omega}$ при интенсивностях несколько Вт/см² на основной частоте ω может достигать нескольких процентов от амплитуды основной частоты $P_{1\omega}$. Если проводить разложение, учитывая члены более высоких порядков, нетрудно получить выражения для амплитуд третьей и более высоких гармоник, величины которых становятся все меньше и меньше. Существенно отметить, что в проведенном рассмотрении предполагалось отсутствие дисперсии в нелинейной среде, и волны основной частоты, так же как и гармоники, распространяются с одинаковой скоростью. В среде с дисперсией зависимость от x усложняется и процесс накопления будет происходить только на так называемой длине синхронизма, обратно пропорциональной разности скоростей распространения волны основной частоты и второй гармоники.

Поскольку в проведенном рассмотрении не учитывалась диссипация, то (для плоской волны) амплитуда второй гармоники (энергия которой черпается из амплитуды основной частоты) растет безгранично с x , что конечно не может быть согласно закону сохранения энергии. В действительности, как и показывает эксперимент, по достижении некоторого расстояния x амплитуда $P_{2\omega}$ достигает максимума и затем начинает (вследствие диссипации) падать. Синусоидальная вначале, при входе в нелинейную среду ($x = 0$),

плоская волна по мере распространения при достаточной интенсивности в среде с малым поглощением и без дисперсии, как было показано, искажается и превращается в волну пилообразную. На спектральном языке она "обрастает" гармониками. Заметим, что когда, согласно рис. 17,2 $P_{2\omega}$ линейно растет с x и диссипативные потери еще сказываются незначительно, с помощью формулы (17.25), зная все параметры задачи, т.е. начальную интенсивность $P_0^2/2\rho c$, x , ρ_0 и c_0 , можно определить нелинейный параметр ε . Так это и делается, например, для определения ε для жидкостей в ультразвуковом диапазоне частот и при интенсивностях в доли Вт/см².

Мы знаем, что поглощение плоской волны пропорционально квадрату частоты, т.е. возникающие гармониками будут поглощаться с частотой как n^2 , где n — номер гармоники. Естественно поэтому ожидать, что поглощение волны конечной амплитуды может значительно отличаться от поглощения чисто синусоидальной волны. На рис. 17.3 схематично показано как изменяется поглощение интенсивной ультразвуковой плоской волны в зависимости от проходимого ею расстояния x (при $x=0$ волна синусоидальна). По мере увеличения x амплитуды гармоник увеличиваются, растет и поглощение волны конечной амплитуды α_n , достигая максимума при тех значениях $x_{ст}$, где достигает максимума амплитуды гармоник. Далее поглощение начинает уменьшаться, стремясь к значению, которое имеет волна бесконечно малой амплитуды α_0 . В мегагерцевом диапазоне частот при больших интенсивностях ($I \approx 100$ Вт/см²) нелинейный коэффициент поглощения α_n в воде может превышать α_0 на два порядка.

Решение задачи о распространении волны конечной амплитуды с учетом диссипативных процессов представляет собой значительно более сложную задачу, чем решение для идеальной жидкости. Представляют большое значение и нелинейные задачи, когда распространяется волна конечной амплитуды в среде с дисперсией. При распространении нелинейной волны в виде ограниченного пучка ("луч") играет роль проявление особенностей в дифракционных явлениях.

Наконец, сделаем еще одно замечание. Мы говорили о распространяющейся только одной волне. Если распространяется несколько волн конечной амплитуды, например две — с частотами ω_1 и ω_2 , то нелинейное взаимодействие между ними приводит к появлению как гармоник каждой из волн, т.е. волн с частотами $n\omega_1$ и $n_2\omega_2$,

так и волн с комбинационными частотами $n_1\omega_1 \pm n_2\omega_2$, где в данном случае $n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots$. Отметим, (см. ниже), что в средах без дисперсии (вода, воздух), эффективное взаимодействие нескольких волн может иметь место лишь в том случае, когда они распространяются в одном и том же направлении (т.е. коллинеарно; см. § 18) или, во всяком случае, под достаточно косыми углами.

§ 18. Нелинейные акустические волны в твердых телах

Перейдем к обсуждению нелинейных волн, распространяющихся в твердых телах. Мы в § 14 говорили о законе Гука как о точной линейной связи между напряжением σ и деформацией ϵ , правда отмечая, что такая линейная связь имеется только для малых σ и ϵ . Однако и при сколь угодно малых σ и ϵ , если говорить строго, такой точной линейной связи нет. На рис. 18.1 схематически изображена типичная зависимость потенциальной энергии взаимодействия U двух нейтральных атомов (молекул) от расстояния z между ними (так называемая потенциальная яма) для твердого изотропного тела. Как видно из этого рисунка, эта яма асимметрична. Асимметрию потенциальной ямы, называют ангармоничностью решетки твердого тела. Сближение атомов и удаление их друг от друга неэквивалентны, что приводит к отклонению (пусть чрезвычайно малому) от закона Гука. Этот закон становится нелинейным. Заметим, что хотя это отклонение очень мало, но на пути своего распространения волна сжатия и разрежения, т.е. продольная $\angle$ волна "пересчитывает" огромное число этих атомов и, таким образом, нелинейный эффект приводит (как это имеет место и в газах, и в жидкостях при распространении $\angle$ волны) к возникновению разнообразных нелинейных явлений.

Здесь мы не будем останавливаться на том, как можно получить выражения, например, для амплитуды волны второй гармоники или амплитуд волн комбинационных частот, используя в случае твердого тела нелинейные уравнения теории упругости, связанные в частности с нелинейностью закона Гука. Отметим только ряд обстоятельств, которые отличают нелинейные явления при распространении волн конечной амплитуды в твердых телах от таких явлений в жидкостях и газах.

В случае распространения нелинейной $\angle$ волны получаются

формулы для амплитуд гармоник, сходные с формулами для волн в жидкости. Однако в случае изотропных твердых тел плоская T волна за счет квадратичной нелинейности искажений не испытывает искажения, в том числе генерация второй гармоники для T волны может иметь место в такой твердой среде, где имеются неоднородности или асимметрия (например, слабо поглощающие звук кристаллы) и где деформации в направлении "право" - "лево" не равнозначны. Следует заметить, что нелинейность твердых тел, таких, например, как хорошо звукопроводные кристаллы, вообще говоря мала; нелинейный параметр ϵ имеет величину порядка $1 \div 10$, хотя во многих случаях с ней приходится считаться. Более того, нелинейные волны в кристаллах используются в практических приложениях, не говоря о том, что эти волны играют большую роль в физике твердого тела. Добавим к этому, что эффективность нелинейных процессов в твердых телах, при примерно одинаковых нелинейных модулях

ϵ значительно ниже (при прочих равных условиях), чем в жидкостях и газах. Причина состоит (как видно, например, из формул для амплитуд гармоник) в большей скорости звука в твердых телах, а также большей плотности твердых тел по сравнению с газами и жидкостями. Однако структурно неоднородные тела, такие как, например, тела с микротрещинами и микропорами (чугун, бетон, горные породы), имеют нелинейность на несколько порядков большую, чем кристаллы. Заметим, что по величине этой нелинейности оказывается возможным судить о прочности таких структурно-неоднородных тел. В этих случаях кроме квадратичной нелинейности, о которой мы только выше и говорили, существенную роль играет и кубическая нелинейность. Так, связь напряжения σ с деформацией $\tilde{u}$ может определяться уже не соотношением $\sigma = a(\tilde{u} + \frac{\epsilon}{2}\tilde{u}^2)$, где a эффективный линейный модуль упругости (его называют часто модулем упругости второго порядка, ϵ - модуль третьего порядка), а соотношением

$$\sigma = a\left(\tilde{u} + \frac{\epsilon}{2}\tilde{u}^2 + \frac{\epsilon_3}{2}\tilde{u}^3\right), \quad (18.1)$$

где $\frac{\epsilon_3}{2}$ - эффективный модуль упругости четвертого порядка. Член $\frac{\epsilon_3}{2}\tilde{u}^3$ представляет собой кубическую нелинейность. В структурно-неоднородных телах эта кубическая нелинейность может играть заметную роль.

В отличие от газов и жидкостей, где имеются лишь L волны и эффективным может быть только коллинеарное взаимодействие волн

конечной амплитуды (см. ниже), в твердых телах,*) могут распространяться как $\angle$, так и $\top$ волны (каждая из которых не испытывает дисперсии), но скорости которых различны и, таким образом, имеется "квазидисперсия". Тогда взаимодействие $\angle$ и $\top$ волн может быть и не коллинеарным, а под определенными углами, значение которых зависят от упругих свойств среды. Таким образом, для твердых тел может иметь место рассеяние звука на звуке в случае косо́го пересечения пучков.

Из рис. 18.2 для трехволнового взаимодействия нетрудно получить так называемые условия синхронизма, т.е. такие условия, которые должны быть выполнены, чтобы имело место эффективное взаимодействие волн. Эти условия есть ни что иное как условия сохранения энергии и импульса взаимодействующих волн.

Плоскую волну можно представить в виде фотона с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar/\kappa = \hbar\omega/c$ (точнее квазиимпульсом), где $\hbar = h/2\pi$ и h - постоянная Планка, а $\vec{\kappa}$ - волновой вектор.

Условия синхронизма для трехволновых взаимодействий могут состоять в выполнении законов сохранения энергии и сохранения импульса (рис. 18.2)

$$\begin{aligned}\omega_1 + \omega_2 &= \omega_3, \\ \vec{\kappa}_1 + \vec{\kappa}_2 &= \vec{\kappa}_3,\end{aligned}\quad (18.2)$$

где $\kappa_1 = \omega_1/c$, $\kappa_2 = \omega_2/c$, $\kappa_3 = \omega_3/c$; ω_1 , ω_2 , ω_3 - частоты волн и c_1 , c_2 , c_3 - их скорости распространения. В рассмотренном случае мы имеем слияние двух фотонов ω_1 и ω_2 , κ_1 и κ_2 ; возникает третий фотон. При $\omega_1 = \omega_2$ это рождение второй гармоники.

Во втором случае (рис. 18.2 б)

$$\begin{aligned}\omega_1 - \omega_2 &= \omega_3, \\ \vec{\kappa}_1 - \vec{\kappa}_2 &= \vec{\kappa}_3\end{aligned}\quad (18.3)$$

мы имеем так называемый распадный процесс (расщепление фотона на два фотона ω_1 и ω_2).

Из рис. 18.2 следует, что

$$\left(\frac{\omega_3}{c_3}\right)^2 = \left(\frac{\omega_1}{c_1}\right)^2 + \left(\frac{\omega_2}{c_2}\right)^2 \pm 2 \frac{\omega_1}{c_1} \frac{\omega_2}{c_2} \cos\alpha. \quad (18.4)$$

*) Гуден для конкретности говорить об изотропных диэлектриках.

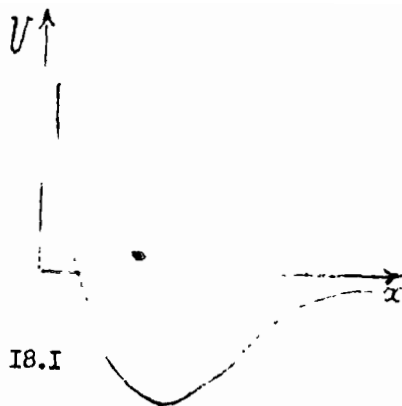


Рис. 18.1

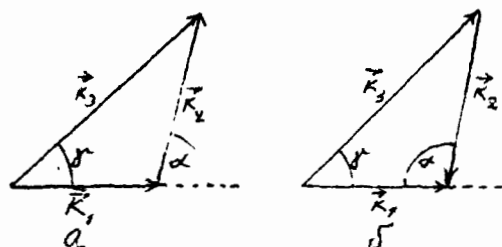


Рис. 18.2

Если $c_1 = c_2 = c_3$ (газ, жидкость, среда без дисперсии), то для того, чтобы это условие имело место, должно быть $\alpha = 0$, т.е. волны должны быть коллинеарны (см. конец § 17).

В случае же твердого тела $c_e \neq c_c$, т.е. имеется квазидисперсия и может происходить синхронное взаимодействие L и T волн под углом — оказывается возможным рассеяние звука на звуке при пересечении двух (или нескольких) акустических пучков с различными частотами и разного типа (L , T) волнами. Условия синхронизма (18.2) и (19.2) представляют собой правила отбора; они дают возможность определить будет ли иметь место эффективное взаимодействие волн или нет и найти угол при которых оно может происходить. Для нахождения амплитуд результирующих (рассеянных) волн условия синхронизма недостаточно и необходимо решать задачу, исходя из нелинейных волновых уравнений.

Нелинейное взаимодействие упругих волн имеет большое значение в теории поглощения звука в твердых телах. Основная идея объяснения поглощения звука состоит в следующем. Как известно из физики твердого тела, тепловое движение есть следствие колебаний атомов или молекул около своего положения равновесия. Такие колебания, передающиеся от одних атомов к другим, можно представить как хаотическое распространение в разных направлениях с разной частотой и разной интенсивностью так называемых дебаевских или тепловых упругих волн. При распространении звука т.е. когерентных фононов в среде с такими тепловыми колебаниями (тепловыми фононами), будет иметь место нелинейное взаимодействие когерентных фононов с тепловыми фононами.

Нелинейное взаимодействие представляет собой весьма сложный процесс. Когерентные L и T фононы будут нелинейно взаимодействовать с тепловыми L и T фононами, встречаясь под разными углами и имеющими разные энергии и волновые числа. Нелинейное взаимодействие приводит к потере энергии звука (когерентных фононов) и передачи этой энергии тепловым фононам, т.е. в конечном счете перекачке энергии звука в тепло.

Этот процесс будет различен в зависимости от того, в каком соотношении находится длина волны звука λ и длина свободного пробега теплового фонона ℓ_ϕ . Если $\ell_\phi \gg \lambda$, что имеет место при низких температурах, близких к гелиевым (тепловые фононы "заморожены"), и высоких частотах ($> 10^8$ Гц), то звуковой фонон испытывает непосредственное взаимодействие с тепловыми фононами и энергия звуковых фононов перекачивается в тепловой

резерватор. Этот механизм поглощения впервые был рассмотрен Ландау и Румером и называется их именем. Если же $\ell \ll \lambda$ (обычные комнатные температуры, сравнительно низкие — ультразвуковые частоты), то играет роль другой механизм. Звуковая волна нарушает тепловое равновесие фононов, которое затем из-за их нелинейного взаимодействия между собой релаксирует к равновесному состоянию (механизм Ахиезера).

Коэффициент поглощения когерентного звука можно найти, если определить скорость, с которой убывает число фононов звуковой мод. Например, в результате столкновения звукового и теплового фононов, звуковой фонон исчезает и образуется третий фонон. Это явление, как было отмечено выше, происходит за счет ангармоничности решетки.

Приведенные выше рассуждения относятся к кристаллам без дефектов. В большинстве твердых тел, имеющих чрезвычайно большое разнообразие по своим физическим и механическим свойствам распространение звука затрудняется различными макроскопическими (и микроскопическими) дефектами в виде трещин и микротрещин, мелких воздушных полостей. Обычные металлы имеют поликристаллическую зернистую структуру, да и совершенные кристаллы имеют дефекты в виде нарушения кристаллической структуры (так называемые дислокации, внедрение атомов и т.д.). Все эти неоднородности приводят к рассеянию звука и, в большом числе случаев, к плохой звукопроводности.

§ 19. Ухо человека. Закон Вебера - Фехнера. Громкость.
Бинауральный эффект

До сих пор речь шла о распространении и излучении звука. Теперь мы приведем краткие сведения из физиологической акустики.

На рис. 19.1 схематически показан в разрезе орган слуха - ухо человека. Ухо принято подразделять на три части - наружное ухо, среднее ухо и внутреннее ухо. К наружному уху относят ушную раковину 1 и слуховой проход 2 глубиной от 2 до 3-х см, заканчивающийся барабанной перепонкой 3. Барабанная перепонка представляет собой тонкую эластичную пленку (толщина 0,1 мм и площадь $0,5 \text{ см}^2$). Среднее ухо - это полость объемом около 1 см^3 , внутри которой находится воздух. Эта полость соединяется с носоглоткой так называемой евстахиевой трубой 4, служащей для выравнивания давления во внутреннем ухе с давлением окружающего воздуха. В этой полости располагаются три небольшие косточки: молоточек 5, рукоятка которого жестко связана с барабанной перепонкой. При колебаниях барабанной перепонки молоточек ударяет по другой косточке - наковальне 6 и через соединенное с ней стремячко 7 колебания далее передаются эластичной перепонке овального окна 8 во внутреннее ухо. Вес молоточка и наковальни примерно по 20-25 мг и вес стремячка около 3 мг. Эластичная мембрана круглого окна 9 служит для компенсации изменений объема жидкости, заполняющей внутреннее ухо. Овальным окном начинается спиральный улиточный слуховой ход внутреннего уха. Улиточный слуховой ход заполнен жидкостью; в нем происходит передача звукового давления за счет системы рычажков (молоточек, наковальня, стремя).

Внутреннее ухо расположено в костном лабиринте и состоит из ряда каналов в виде спирали (слуховая часть) так называемой улитки 11, трех полукружных каналов, взаимно перпендикулярных друг другу 10 (орган равновесия или вестибулярная часть) и нервных волокон 12. Схематический вид снаружи левого лабиринта внутреннего уха показан на рис. 19.2. На этом рисунке 1 - улитка, 2 - овальное окно, 3 - круглое окно и 4 - полукружные

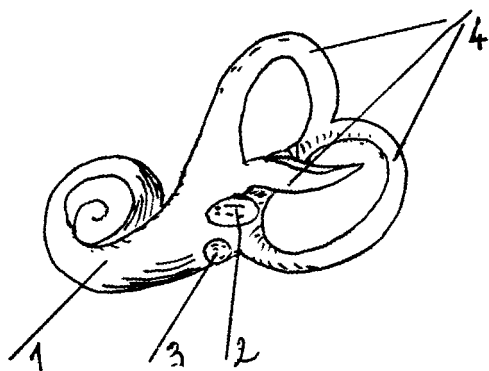
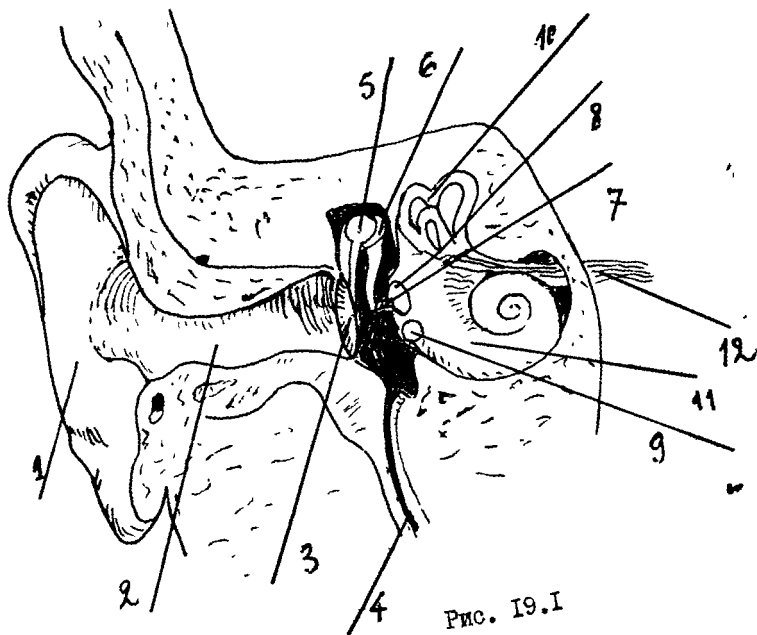


Рис. 19.2

каналы. На рис. 19.3 показан поперечный разрез улиточного хода (диаметр улитки у вершины около 0,18 см, длина улиточного хода (если его выпрямить) 30-33 мм. На этом рисунке показана внутренняя часть улитки. Улитка заключена в костную спираль и имеет три канала (хода) - вестибулярного 1, барабанного 2 и (трехгранного сечения улиточного слухового хода 3. Первые два канала заполнены студенистой жидкостью (перилимфа), улиточный канал - жидкостью, по плотности близкой к воде ($\rho = 1,034$) - эндолимфой. У вершины улитки вестибулярный и барабанный каналы соединяются малым отверстием, называемым геликоте́рой (площадь 0,25 мм²), при этом эндолимфа и перилимфа друг с другом не смешиваются. Средний (улиточный или слуховой) канал отделен от вестибулярного канала рейснеровой мембраной 4 и от барабанного - базиллярной (основной) мембраной 5. На этой мембране находится приемный слуховой аппарат, называемый органом Корти. Он содержит чувствительные волосковые клетки; к ним подходят нервные волокна, идущие к слуховому нерву. Орган Корти содержит несколько рядов волосковых клеток (их общее число около 24000) и покрыт так называемой текториальной мембраной 7, которая состоит из ряда волокон. Считается, что механические колебания, дошедшие до текториальной мембраны и органа Корти, приводят к возбуждению волосковых клеток. Колебания разной частоты действуют на различные участки органа Корти и через слуховой нерв передаются в центральную нервную систему, в которой далее осуществляется распознавание и анализ звука.

На рис. 19.4 приведена область слышимых звуков, порога слышимости и порог болевого ощущения человека для интенсивностей, выраженных в децибелах относительно нулевого уровня. При этом под нулевым уровнем слышимости принято понимать интенсивность в $I = 10^{-16}$ Вт/см² (или по давлению $p = 2 \cdot 10^{-5}$ Па = $2 \cdot 10^{-4}$ бар), соответствующую минимальному порогу слышимости (при отсутствии помех) на частоте 1000 Гц.

Напомним при этом, что разность уровней в 1 Бел названа в честь изобретателя телефона Г. Белла) соответствует отношению интенсивностей звука 10:1. Тогда число Бел выражается отношением $\lg \frac{I_2}{I_1}$. Более удобная величина (децибел - выражается отношением

$$N = 10 \lg \frac{I_2}{I_1} = 200 \lg \frac{I_2}{I_1}.$$

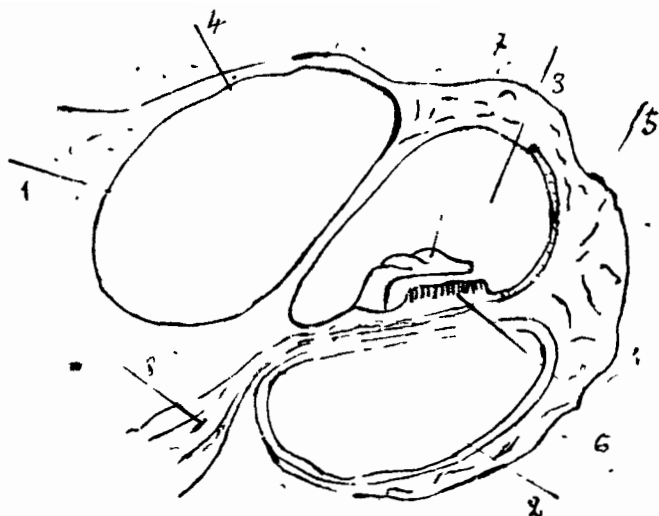


Рис. 19.3

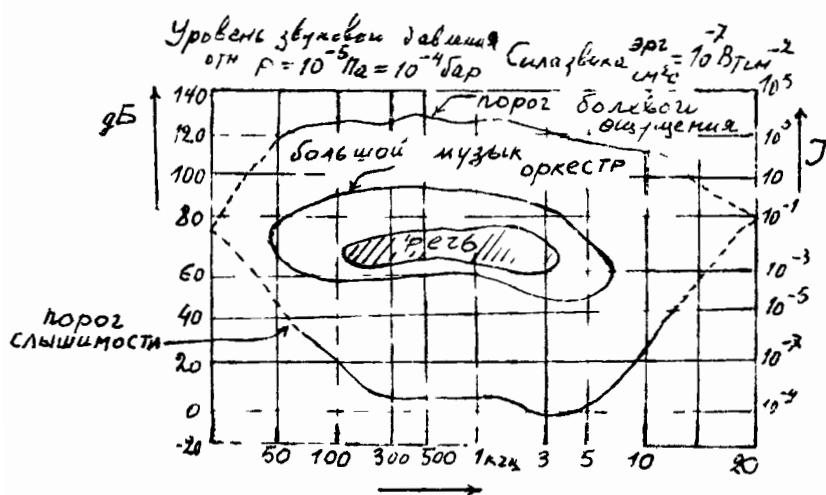


Рис. 19.4

Приведем таблицу связи между децибелами и отношениями интенсивностей I_1/I_2 и звуковых давлений P_1/P_2 :

$N, \text{дБ}$	0,5	1	2	3	5	10	20	40	60	80	100	14
I_1/I_2	1,12	1,26	1,59	2	3,16	10	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{14}
P_1/P_2	1,06	1,12	1,26	1,41	1,78	3,16	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^7

Интенсивность обычных звуков, выраженная в децибелах по отношению к порогу слышимости (см. следующий §), составляет, например: 40 дБ – тихий разговор на расстоянии ≈ 1 м, фортиссимо симфонического оркестра – 80 дБ, $L \approx 5 - 10$ м; отбойный молоток при $L \approx 1$ м – 100 дБ; болевые ощущения – 120 – 130 дБ*).

§ 20. Уровень ощущения. Громкость. Бинауральный эффект

Различают дифференциальные пороги восприятия (слышимости) интенсивности звука на одной и той же частоте (минимальная различимая на слух разность интенсивностей) и дифференциальный порог различимости звука по частоте.

Имеется общий психофизиологический закон, принадлежащий Веберу (1846), математическая формулировка которого дана Гельгером (1860). Он состоит в том, что минимально различимое изменение раздражения составляет приблизительно 10% от исходной интенсивности раздражения, т.е.

$$\frac{\Delta J}{J} = 10^{-1}; \quad (20.1)$$

здесь ΔJ – изменение интенсивности раздражения по отношению к ее первоначальному значению J . Отметим, что эта закономерность относится в равной мере как к звуку (звуковым раздражителям), так и к свету, к осязанию и т.д., и, таким образом, представляет собой общий психофизиологический закон.

Исходя из (20.1) можно считать, что

*) В ряде случаев иногда (например, в телефонии) применяется иная логарифмическая шкала и вместо децибелов используют непер (Нп); Нп $\approx 8,68$ дБ.

$$\frac{dJ}{J} = A dN, \quad (20.2)$$

где dJ - прирост интенсивности и dN - прирост величины ощущения, A - некоторый коэффициент. Из (20.2) имеем

$$\ln J + \text{const} = AN. \quad (20.3)$$

Будем считать, что порогу слышимости ($N=0$) соответствует интенсивность J_0 . Тогда

$$N = \frac{1}{A} \ln \frac{J}{J_0}, \quad (20.4)$$

где A определяет масштаб шкалы измерения N . Взяв $A = 0,23$, т.е. основание десятичных логарифмов, получаем

$$N = 10 \lg \frac{J}{J_0}. \quad (20.5)$$

Это выражение и называют обычно психофизиологическим законом Вебера - Фехнера. Величину N называют уровнем ощущения звука;

$N \approx 1$ по (20.5), если прирост интенсивности оказывается примерно 10-12%, т.е. величиной, близкой к минимально различимой на слух.

Мы уже говорили, что чувствительность уха к разным частотам неодинакова. Поэтому при определении уровня ощущения N в децибелах следует иметь в виду, что нулевой уровень (порог восприятия) зависит от частоты звука. Это обстоятельство необходимо принимать во внимание, а уровень ощущения N нужно относить к одной и той же частоте f , что и уровень интенсивности J и нулевой уровень J_f , т.е. должно быть для чистого тона

$$N_f = 10 \lg \frac{J_f}{J_{f_0}}. \quad (20.6)$$

Ухо может производить сравнение по громкости чистого тона даже в том случае, если два звука имеют различные частоты. Но согласно частотной зависимости чувствительности уха, звуки равной громкости имеют различную интенсивность. Можно на основании соответствующих экспериментов с испытуемыми найти средние кривые зависимости звукового давления или интенсивности от частоты для равногромких чистых тонов. Такие кривые равной громкости представлены на рис. 20.3. Для каждой кривой берут уровень тона, громкость которого следует определить, соответствующий уровню звукового давления

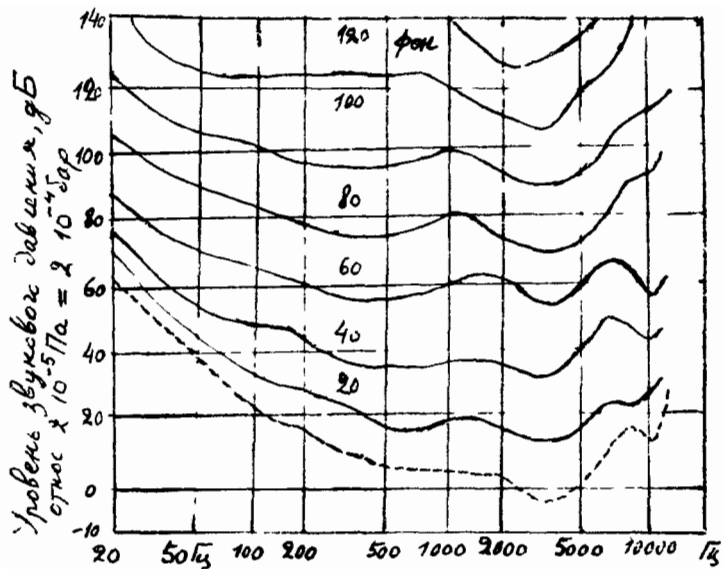


Рис. 20.1

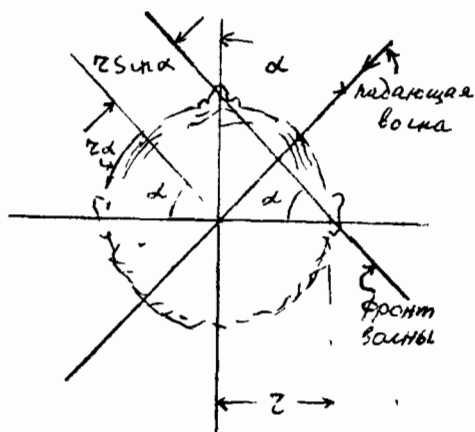


Рис. 20.2

или интенсивности на частоте 1000 Гц. Таким образом, уровень звукового давления чистого тона частоты 1000 Гц, равногромкого с данным чистым тоном (лежащий на одной кривой равной громкости) называется уровнем громкости. Громкость измеряется в фонах. Для тонального звука 1 фон равен 1 децибелу в выражении (20.6). Если звук не тональный, а произвольный, уровень его громкости можно найти подбором равногромкого тона 1 кГц с известным уровнем громкости. Кривыми равной громкости на рис. 20.1 можно пользоваться для оценок громкости как синусоидальных, так и узкополосных сигналов. Эти кривые, в частности, используются в шумомерах — приборах для измерения уровня громкости шумов.

Здесь мы не будем говорить о громкости сложных звуков и других тонкостях, связанных с особенностями звукового восприятия. Скажем лишь несколько слов о так называемой маскировке звука.

Правильно воспринять речь или обнаружить звук определенной частоты, как мы знаем, бывает затруднительно на фоне помех. Особенно это бывает сложно, когда помеха находится в той же области частот, что и полезный сигнал. Обычно маскировка звука оценивается величиной повышения порога слышимости для полезного сигнала (чистого тона при чистом тоне помехи).

Когда маскирующая помеха представляет собой шум, имеющий сплошной спектр (шум зала; американский термин „*cocktail party*“, главными компонентами "мешающего" спектра помех служат области частот вблизи частоты полезного сигнала.

Весьма важным в физиологической акустике является бинауральный эффект. На рис. 20.2 дано простейшее объяснение этого эффекта. Определение направления на источник звука в основном происходит из-за имеющейся разности хода звуковой волны

$2\sin\alpha + 2a$ (2 — радиус головы), возникающей между левым и правым ухом, а также из-за экранировки звука головой. К левому уху (см. рис. (20.2)) приходит несколько меньшая амплитуда звука, чем к правому. Разность хода во времени Δt между правым и левым ухом составляет

$$\Delta t = \frac{2\sin\alpha + 2a}{c}, \quad (20.7)$$

где c — скорость звука. Величина $2 \approx 10$ см, поэтому при частоте порядка 600–800 Гц и выше может быть равно или больше $\frac{T}{2}$, где T — период звуковой волн. По этой причине возникает неод-

нозначность в определении фазы, но тогда начинает играть эффект экранирования, о котором было сказано ранее.

Гинауральный эффект кроме того, что дает возможность определения направления на источник звука, играет существенную роль в музыкальной акустике (стереофония).

§ 21. Электромеханические преобразователи

Теперь, после того как мы познакомились с основными сведениями из физиологической акустики, перейдем к электроакустике, обширной области акустики звукового диапазона. Электроакустика включает в себя теорию и практику конструирования и применения разнообразной электроакустической аппаратуры, действие которой основано на множестве физических принципов. Эти принципы положены в основу различных приборов, при этом используются достижения современной радиифизики, радиотехники и, естественно, сведения по физиологической акустике. К области электроакустики можно отнести разработку и применение различных электромеханических преобразователей (излучение звука и его прием), звукоусиление, запись и воспроизведение звука, акустические измерения, применения акустической аппаратуры в радиосвязи, телефонии, телевидении и т.д.

Остановимся кратко на некоторых типах электромеханических преобразователей, обращая внимание только на принцип их работы без какой-либо детализации. Под такими преобразователями понимают главным образом обратимые преобразователи, преобразующие электрические колебания в механические (различного рода излучатели звука) и, наоборот, механические колебания в электрические (приемники звука).

К электромеханическим преобразователям прежде всего следует отнести электродинамический преобразователь (как излучатель, так и приемник) или динамик. Такой преобразователь обычно состоит из сильного кольцевого постоянного магнита, создающего однородное магнитное поле, в зазоре которого совершает колебания подвижная катушка, намотанная на легкий кольцевой каркас. Этот каркас вместе с катушкой скреплен с гибким воротником, который в свою очередь, жестко связан с верхней плоскостью кольцевого магнита и с легкой (обычно конусной) диафрагмой. Эта колеблющаяся диафрагма и является излучателем звука. Напомним, что движение катушки происходит под действием протекающего по катушке переменного тока (акустический сигнал, преобразованный в ток).

Благодаря магнитному полю, в ней (по закону индукции Фарадея) возникает противозлектродвижущая сила, и катушка колеблется. Наоборот, если катушка движется под действием переменной механической силы (звук), то на выходе катушки появляется ЭДС и соответствующий ток; динамик становится звукоприемником.

Электростатический преобразователь основан на возникновении сил притяжения и отталкивания одной из пластин (подвижной) заряженного конденсатора вследствие изменения расстояния (следовательно, и емкости) между его пластинами.

Сила F притяжения между пластинами конденсатора определяется выражением

$$F = \frac{q^2}{2C\ell}, \quad (21.1)$$

где q - заряд, C - емкость конденсатора и ℓ - расстояние между пластинами. Как отсюда видно, F пропорциональна q^2 , а для того чтобы сигнал не искажался, F должна зависеть от q линейно. Для неискаженной передачи конденсатор поляризуют, т.е. подают на него постоянное напряжение $V_0 = \text{const}$; конденсатор заряжается и его заряд становится равным $q_0 = V_0 C$. При подаче на такой заряженный конденсатор переменного напряжения (сигнал) $V_{\sim}$, так что $V = V_0 + V_{\sim}$, $V_{\sim} \ll V_0$, заряд на конденсаторе $q = q_0 + q_{\sim}$, $q_{\sim} \ll q_0$.

Сила притяжения между пластинами

$$F = \frac{(q_0 + q_{\sim})^2}{2C\ell} = \frac{q_0^2 + 2q_0 q_{\sim} + q_{\sim}^2}{2C\ell}. \quad (21.2)$$

Членом $q_{\sim}^2$ можно пренебречь по сравнению со вторым членом этого выражения в силу его малости, а первый член представляет собой постоянную величину. Таким образом,

$$F \approx \frac{q_0^2}{2C\ell} + \frac{V_0}{\ell} q_{\sim} = F + F_{\sim}$$

и переменная часть силы $F_{\sim}$ притяжения (отталкивания) линейно связана с сигналом, представляющим собой второй член в этом выражении.

Как уже говорилось, как электродинамический, так и электростатический преобразователи являются обратимыми, т.е. могут работать как излучателями, так и приемниками звука.

Следует несколько слов сказать об электромагнитном преобразователе, который также является обратимым. К таким преобразователям относится обычный электромагнитный телефон. В нем имеется якорь из ферромагнитного материала и катушки, по которой протекает ток (сигнал). Возникающее между магнитом и якорем сила притяжения тонкой ферромагнитной мембраны пропорциональна квадрату напряженности магнитного поля и, следовательно, также как и в случае электростатического преобразователя, будет искажение (удвоение) частоты сигнала, поскольку и здесь будет проявляться квадратичный ("четный") эффект. Предварительная "поляризация" в таком преобразователе создается путем включения в магнитопровод постоянного магнита или катушки подмагничивания.

В гидроакустике и в ряде устройств, используемых в технологических процессах, применяются магнитострикционные преобразователи, принцип работы которых, основан на эффекте магнитострикции. Не вдаваясь в подробности описания этого эффекта, отметим, что он заключается в следующем. В ферромагнитных материалах, таких

как железо, никель, различные сплавы железа, кобальта и ванадия, при их деформации возникает намагничивание образца. При действии же на магнитострикционный образец магнитного поля возникает обратный эффект — этот образец испытывает деформацию.

§ 22. Пьезоэлектрические преобразователи

Пьезоэлектрические преобразователи широко применяются в акустике как для генерации и приема волн ультразвуковых и гиперзвуковых частот, так и для частот звукового диапазона.

Приведем некоторые данные по пьезоэлектрическому эффекту. Этот эффект состоит в том, что на специальном образом вырезанной пластинке из пьезоэлектрического кристалла относительно его кристаллографических осей, на ее противоположных поверхностях (обычно металлизированных или покрытых металлическими электродами), возникают электрические заряды разных знаков, когда на пластинку действует механическое напряжение. Кристаллов пьезоэлектриков существует большое количество; имеются кристаллы природные, такие как, например, наиболее часто применяющийся кристалл пьезокварца. В последние десятилетия часто используются искусственно выращенные синтетические пьезокристаллы, из которых наибольшее применение получил кристалл ниобата лития LiNbO_3 .

Возникновение зарядов на пластинке при приложении механичес-

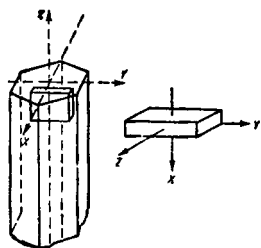


Рис. 22.1

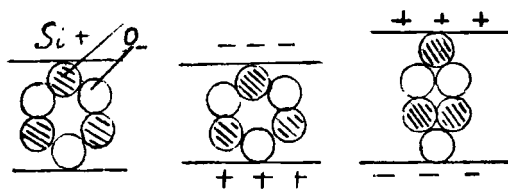


Рис. 22.2

кого напряжения носит название прямого пьезоэффекта ("пьеzo" в переводе с греческого означает "давить"). Обратный пьезоэффект состоит в возникновении деформаций пьезопластины под действием электрического напряжения, приложенного к ее электродам. Пьезоэлектрический эффект представляет собой эффект линейный до самых высоких частот гиперзвукового диапазона, по крайней мере для таких высококачественных пьезокристаллов, как кварц или ниобат лития. Однако аналогично тому, как закон Гука (о чем выше говорилось) даже при малых деформациях имеет отклонение от линейности, так, вообще говоря и пьезоэффект имеет небольшую нелинейность. Эта нелинейность, в частности, находит и практическое применение в пьезоэлектрических системах обработки сигналов.

На рис. 22.1 представлен кристалл пьезокварца. Главные оси кристалла носят такие названия: ось X - электрическая, ось Y - механическая и ось Z - оптическая. Пластинка, вырезанная из кристалла перпендикулярно электрической оси X , называется обычно пластинкой X среза или среза Кюри. Такая пластинка при приложении к ее металлическим электродам, нанесенным (приложенным) на ее большие поверхности, механического σ или электрического V напряжения, будет испытывать деформации по толщине и, таким образом, будет соответственно служить приемником или излучателем продольных акустических волн $\downarrow$. Для приема и излучения сдвиговых (или поперечных) волн $\uparrow$ используется срез Y . В этом случае пластинка вырезается так, что ее большая поверхность перпендикулярна оси Y . Если приложить к металлическим электродам такой пластинки электрическое напряжение V , пластинка будет испытывать деформации сдвига. При приложении сдвигового напряжения σ на электродах пластинки появляется электрическое напряжение.

Механизм пьезоэффекта объясняется возникновением или изменением дипольного момента элементарной ячейки кристаллической решетки из-за смещения электрических зарядов под действием механических напряжений σ . Если же к электродам пластинки приложено электрическое напряжение, то оно изменяет средние расстояния между элементарными зарядами в ячейке кристалла и эти заряды перемещаются, в результате чего появляются изменения средних расстояний между ними, т.е. деформация, что схематично изображено на рис. 22.2.

При действии переменного давления с частотой ω на пластинку X среза, на ее электродах появится изменяющееся с той же

частотой переменное электрическое напряжение. Это напряжение можно усилить с помощью усилителя. Таким образом, эта пластинка будет приемником колебаний давления. Находясь в акустическом поле в различных средах (газы, жидкости, твердые тела), эта пластинка может служить приемником колебаний давления, механического напряжения, или смещения. В свою очередь, в силу обратимости пьезоэффекта пьезоэлемент при подаче на него переменного электрического напряжения будет излучателем акустических волн.

Естественно, что наибольшая амплитуда колебаний пьезопластины будет в том случае, когда имеется резонанс, т.е. если, например, для продольных волн на ее толщине будет укладываться нечетное число половин длин волн $n \frac{\lambda}{2}$. При этом первый резонанс возникает при толщине пластинки равной $\frac{\lambda}{2}$. Это получается потому, что если бы n было четным, то с обеих сторон пластинки на ее электродах возникали бы электрические заряды одного знака, что невозможно. Поэтому общая формула для частот пьезорезонансов пластинки X среза имеет вид

$$f_n = \frac{n c}{2 \ell}, \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (22.1)$$

где ℓ — толщина пластинки. Поскольку скорость продольных волн, например, для пьезокварца по оси X равна $c \approx 5700$ м/с, то основная частота собственных колебаний пластинки такого среза определяется формулой

$$f \approx 2850 \frac{\kappa\sqrt{4}}{\text{мм}}. \quad (22.2)$$

Как известно, добротность колебательной системы определяет число возможных колебаний до уменьшения их амплитуды в e раз. Добротность Q для пьезоэлектрической пластинки, совершающей колебания на собственной частоте ($n = 1$), если она излучает акустические волны обеими ее сторонами (двухстороннее излучение), как можно показать, определяется отношением $Q = \frac{\infty}{\rho_c c_0}$. Здесь $\rho_c c_0$ — удельное акустическое сопротивление среды, в которой находится пластинка, и ρc — удельное акустическое сопротивление самой пластинки. Так, для пластинки из пьезокварца с X срезом $\rho c \approx 1.43 \cdot 10^6$ г/см²·с, а для воздуха $\rho_c c_0 \approx 41$ г/см²·с, и добротность в случае колебаний пластинки в воздухе составит (с учетом потерь в самой пластинке, потерь на излучение и потерь в устройстве крепления) $\approx 3 \cdot 10^4$. Если бы пластинка колебалась в вакууме, то $Q \approx 10^{5 \div 6}$. Для колебаний пластинки в воде $Q \approx 10$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ржевкин С.Н. Курс лекций по теории звука. Л.: Изд-во МГУ, 1960.
2. Красильников В.А. Звуковые и ультразвуковые волны. Л.: Ч-ука, 1960.
3. Путилов В.А. Основы физики ультразвука. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
4. Римский-Корсаков А.В. Электроакустика. Л.: Изд-во Связь, 1973.

Учебное издание

Красильников Владимир Александрович

ВВЕДЕНИЕ В АКУСТИКУ

Зав. редакцией Л.А.Николова. редактор Ф.И.Горобец

художественный редактор М.М.Добрянская

Н/к

подписано в печать 5.06.92. Формат 60х90 1/16. Бумага тип. № 2.

Офсетная печать. Усл. печ. л. 9,5. Уч.-изд. л. 7,2. тираж 500 экз.

Заказ № 1344 . изд. № 2031. цена 85 коп. Заказное.

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета.

103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография ордена "Знак Почета" изд-ва МГУ.

119899, Москва, Ленинские горы