

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

В. Т. ГРИНЧЕНКО, В. В. МЕЛЕШКО

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

КИЕВ «НАУКОВА ДУМКА» 1981

Гармонические колебания и волны в упругих телах / Гринченко В. Т., Мелешко В. В. — Киев : Наук. думка, 1981. — 284 с.

В книге изложены результаты исследования закономерностей распространения волн и стационарных волновых процессов в упругих телах. Основное внимание уделено освещению тех свойств таких процессов, которые вследствие особенностей отражения упругих волн от границы не имеют аналогов в акустике и электродинамике. С этой точки зрения проведен количественный и качественный анализ волновых полей в полупространстве, составном пространстве, бесконечных слое и цилиндре. Детально исследованы особенности частотных спектров и собственных форм колебаний конечных пластин, в частности раскрыта природа краевого и толщинного резонансов. Показана возможность существования изолированных резонансов в областях типа полуполосы.

Для широкого круга лиц, занимающихся изучением динамических напряжений в упругих телах сложной формы; может быть полезна также аспирантам и студентам, специализирующимся в области теории упругости и акустики.

Ил. 107. Табл. 11. Библиогр.: с. 273—283 (288 назв.)

Ответственный редактор Ю. Н. Шевченко

Рецензенты И. Т. Селезов, Г. А. Ванин

Редакция физико-математической литературы

20305-076
Г М221(04)-81 183-81.1703040000 © Издательство «Наукова думка», 1981

Предисловие	5
Введение	7
Глава 1. Общая характеристика динамических задач теории упругости	16
§ 1. Основные уравнения линейной динамической теории упругости	16
§ 2. Постановка динамической задачи теории упругости. Граничные и начальные условия	24
§ 3. Гармонические волны в безграничной среде. Поляризация	26
§ 4. Локальные особенности в волновых полях	30
§ 5. Гармонические волны. Условия излучения. Групповая скорость	37
Глава 2. Отражение и преломление гармонических волн на плоской границе	43
§ 1. Отражение от свободной границы полупространства	44
§ 2. Энергетический анализ процесса отражения от свободной поверхности	50
§ 3. Поверхностная волна Рэлея	53
§ 4. Отражение и преломление SH-волн на границе раздела двух сред	58
§ 5. Отражение и преломление продольных и сдвиговых волн на границе раздела двух упругих сред	63
§ 6. Поверхностная волна Стоунли	71
Глава 3. Возбуждение волн в полупространстве нагрузкой на поверхности	80
§ 1. Полупространство в условиях антиплоской деформации. Возбуждение SH-волн	81
§ 2. Задача Лэмба. Постановка задачи и формальное решение	87
§ 3. Задача Лэмба. Представления смещений контурными интегралами	90
§ 4. Задача Лэмба. Выражения для смещений в дальнем поле	95
§ 5. Задача Лэмба. Направленность излучения и энергетические соотношения	100
Глава 4. Волны в бесконечном слое и цилиндре	109
§ 1. Распространение SH-волн в слое	111
§ 2. Волны Рэлея — Лэмба. Дисперсионное уравнение	115
§ 3. Анализ дисперсионного уравнения Рэлея — Лэмба. Вещественные и мнимые корни	118
§ 4. Анализ дисперсионного уравнения Рэлея — Лэмба. Комплексные корни	128
§ 5. Волны Рэлея — Лэмба. Фазовые и групповые скорости	132

§ 6. Волны Рэлея — Лэмба. Кинематика распространяющихся мод	138
§ 7. Волны Рэлея — Лэмба. Явление «обратной» волны	140
§ 8. Волновые движения в бесконечном цилиндре. Общее решение уравнений	144
§ 9. Осесимметричные волны в цилиндре	148
§ 10. Неосесимметричные волновые движения в цилиндре	153
Глава 5. Установившиеся колебания прямоугольных тел	157
§ 1. Постановка задачи о колебаниях прямоугольника. Метод решения	158
§ 2. Методика использования общих решений	164
§ 3. Алгоритм количественной обработки общего решения	171
§ 4. Анализ спектра и форм колебаний прямоугольника в области низких частот	182
§ 5. Краевой резонанс в прямоугольнике	185
§ 6. Анализ спектра и форм изгибных колебаний прямоугольника в области высоких частот	192
Глава 6. Установившиеся колебания круговых цилиндров конечной длины	194
§ 1. Постановка граничных задач и построение общих решений в осесимметричном случае	195
§ 2. Алгоритм решения граничных задач в напряжениях	200
§ 3. Краевой резонанс в конечном цилиндре	203
§ 4. Общая характеристика толщинных колебаний диска	210
§ 5. Толщинные колебания диска с нулевым коэффициентом Пуассона	214
§ 6. Толщинные колебания диска с ненулевым коэффициентом Пуассона	220
§ 7. Осесимметричные колебания цилиндра с заземленной боковой поверхностью	226
§ 8. Построение общего решения в неосесимметричном случае	233
Глава 7. Вынужденные движения в волноводах	241
§ 1. Возбуждение SH-волн в плоском волноводе	242
§ 2. Возбуждение волн Рэлея — Лэмба в плоском волноводе	246
§ 3. Энергетический анализ полей в волноводе. Расчетные формулы	253
§ 4. Энергетический анализ полей в волноводе. Количественные результаты	258
§ 5. Резонансные явления в полубесконечном волноводе. Краевой резонанс	264
Список литературы	273

Закономерности распространения возмущений в сплошных средах представляют значительный интерес для многих областей науки и техники. Предлагаемая книга посвящена волнам в упругих телах, причем из всех возможных типов возмущений рассматривается наиболее простой — гармонические волны. Несмотря на принципиальную возможность описать общий нестационарный случай набором гармонических составляющих, принятое ограничение типа возмущений следует считать существенным. При этом из поля зрения выпадает ряд интересных эффектов, имеющих большое практическое значение. Однако и в рамках гармонических процессов удается показать некоторые характерные особенности деформирования упругих тел, связанных с существованием в них двух типов волн — волн расширения и сдвига.

Рассмотрение особенностей и количественный анализ колебательных процессов в упругих телах — основные вопросы книги. В определенной степени отличие этих процессов от аналогичных процессов в средах с единственной скоростью распространения возмущений (акустика, электродинамика) удается связать со спецификой отражения и преломления упругих волн на границе тела. Это предопределило подбор материала в книге.

Роль границы в формировании структуры волнового поля, а также таких важных характеристик упругих колебательных систем, как спектр собственных частот и собственные формы, раскрывается в ряде задач, последовательно возрастающих по трудности. При этом рассматриваются как задачи, возникшие на начальных этапах формирования теории упругости и решаемые с помощью сравнительно простых формул, так и задачи, для решения которых требуется современная вычислительная техника. Во всех случаях авторы стремились представить результаты так, чтобы сложность выкладок и вычислений не мешала раскрытию особенностей колебаний упругих тел.

Определенное внимание в книге уделено также вопросу корректной формулировки граничных задач, описывающих поведение гармонических волн. В частности, применительно к упругим телам рассматриваются возникновения локальных особенностей в волновых полях, а также специфика условий излучения в областях типа слоя.

Работа по написанию книги выполнялась авторами в коллективе Института механики АН УССР, где ведутся широкие исследования по различным направлениям динамики деформируемого твердого тела. Обмен мнениями с многочисленными коллегами служил важным стимулом в работе. Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить всех, кто проявлял интерес к их работе, и особенно сотрудников отдела термоупругости, выразить глубокую признательность доктору физико-математических наук А. Ф. Улитко за участие в обсуждении структуры книги и трактовку некоторых результатов, а также докторам технических наук Г. А. Ванину и Ю. Н. Шевченко и доктору физико-математических наук И. Т. Селезову за полезные критические замечания по содержанию книги.

А в т о р ы

Круг явлений в окружающем мире, которые можно достаточно полно качественно и количественно описать на основе волновых представлений, чрезвычайно широк. Изучение общих закономерностей распространения волн в различных средах составляет предмет теории колебаний, получившей в настоящее время большое развитие [21, 89, 110, 134].

Использование общих результатов теории колебаний приносит несомненную пользу при рассмотрении волновых процессов в каждом разделе физики. Однако при этом возникает большое число специфических вопросов, связанных со свойствами среды, способами возбуждения колебаний, геометрией тел и т. д., решение которых имеет, несомненно, принципиальное и прикладное значение и достигается с использованием различных методов.

В книге описываются закономерности волновых движений в идеальном упругом теле. Основным отличием такой среды от идеальной сжимаемой жидкости в акустике и от «эфира» в электродинамике является существование в ней, а в случае наличия границ и постоянное превращение друг в друга, двух различных по свойствам типов волн — волн расширения и сдвига. Можно сказать, что все вопросы, рассмотренные в данной книге, должны раскрыть специфику волновых процессов в упругих телах, обусловленную взаимодействием этих двух типов волн при наличии граничных поверхностей. Таким взаимодействием обусловлен чрезвычайно широкий круг особых явлений в процессах колебаний упругих тел и распространения волн в них. В качестве примеров здесь достаточно упомянуть известное явление существования поверхностной волны в упругом полупространстве и менее изученные вопросы, относящиеся к специфике собственных колебаний упругих тел конечных размеров.

В рамках одной книги трудно охватить все явления, специфика которых в той или иной мере связана с проявлением взаимодействия между двумя указанными типами волновых движений. Однако круг рассмотренных здесь задач, по нашему мнению, позволяет показать основные проявления этого взаимодействия в ряде последовательно возрастающих по трудности решения задач о распространении волн и колебаниях упругих тел.

Рассматриваемые в книге явления в значительной степени ограничиваются исходными предпосылками, относящимися к свойствам тела, характеру волнового процесса и геометрии рассматриваемых объектов. Изучаемые нами тела являются идеально упругими изотропными однородными телами, подверженными малым деформациям. Все происходящие в них волновые процессы характеризуются гармонической зависимостью от времени. Геометрия рассматриваемых тел такова, что ограничивающие их поверхности можно отождествить с частями координатных поверхностей декартовой и цилиндрической систем координат. Такая система предположений довольно существенно ограничивает круг рассматриваемых объектов. Однако с ее использованием удается получить обширную и полезную информацию о динамических процессах именно в реальных телах.

Изложению конкретных постановок задач и анализу результатов их решения предпосылается краткий исторический обзор исследований, в той или иной мере относящихся к предмету данной работы. Поскольку в книге рассматриваются только гармонические волновые процессы, то этот обзор ни в коей мере не может претендовать на воссоздание исторического процесса развития такого раздела механики, как динамическая теория упругости. В определенной мере решение этой трудной задачи достигается с помощью обширных исторических справок, помещенных в вышедших в последнее время фундаментальных работах [151, 160, 174, 182, 186, 250].

Ограничиваясь в историческом обзоре исследованиями, относящимися к гармоническим волновым процессам, мы вынуждены затрагивать темы, которые, однако, не развиваются основным содержанием книги. Сказанное относится к таким вопросам, как дифракция упругих волн и приближенные теории для описания колебательных процессов. Этим объясняется краткость изложения некоторых вопросов и появление дополнительных ссылок на источники более обширной информации. Однако мы помещаем краткий исторический обзор, считая, что с его помощью все же удастся показать некоторые важные этапы в развитии предмета.

1. «Упругая» теория света. Одним из важных стимулов разработки теории, описывающей сопротивление тел изменению как объема, так и формы, явилась выдвинутая Френелем (1821) гипотеза о поперечном характере световых колебаний, распространяющихся в гипотетической среде — эфире. И на протяжении всего XIX столетия характерным было стремление физиков объяснить все световые, а впоследствии и электромагнитные явления движениями упругого эфира [66, 67, 79, 284].

На основе своей гипотезы о поперечности световых колебаний Френель (1823) получил (а точнее, по замечанию Мандельштама [88, с. 393], «угадал») формулы для коэффициентов отражения и преломления плоской световой волны на прямолинейной границе раздела двух оптически прозрачных однородных сред. В зависимости от того, происходят ли световые колебания в плоскости падения или

перпендикулярно к ней, для коэффициента отражения были получены различные формулы, условно называемые формулами «тангенсов» и «синусов» соответственно.

В работах Пуассона (1828) и Стокса (1849) четко установлена возможность существования в неограниченной изотропной упругой среде двух типов волн, распространяющихся с различной скоростью. Одна из них характеризуется безвихревым изменением объема (безвихревая продольная волна), другая связана с искажением формы (эквиволумиальная поперечная волна). Открытие этих типов волн способствовало появлению трудностей в толковании исходной гипотезы Френеля. Особенно сильно эти трудности проявились при рассмотрении задачи об отражении и преломлении плоских волн на границе раздела двух упругих сред. В работах Коши (1830—1836) и Грина (1839) установлено, что для выполнения шести граничных условий, выражающих непрерывность смещений и напряжений на границе раздела, необходимо учитывать как поперечные, так и продольные волны. Однако продольные световые волны в экспериментах не были обнаружены. Интересно, что открытые Рентгеном (1895) новые лучи вначале отождествлялись рядом физиков (в том числе и автором открытия) с продольными световыми волнами.

Трудности в получении формул Френеля исходя из условия, что эфир имеет свойства реальных упругих тел, побудили ряд авторов к поиску путей устранения противоречий между результатами теории и экспериментом. Эти пути условно можно разделить на три класса.

1. Делались попытки строгие граничные условия теории упругости заменить более или менее произвольными условиями. К этому направлению относятся работы Неймана (1835), Кирхгофа (1876), Мак-Куллага (1836).

2. Способ устранения продольных волн в упругом теле заключался в принятии одной из двух противоположных гипотез: 1) эфир абсолютно несжимаем, продольные волны распространяются с бесконечно большой скоростью; 2) эфир бесконечно сжимаем, скорость продольных волн равна нулю [143].

На основе первой гипотезы Грин (1839) получил формулу «синусов» Френеля и показал, что формула «тангенсов» справедлива лишь приближенно. Используя вторую гипотезу, Томсон (лорд Кельвин) (1888) получил все формулы Френеля. Однако эта гипотеза связана с предположением об отрицательной сжимаемости среды и требует «закрепления» эфира на бесконечности. Необычность этой гипотезы привела к тому, что теория Кельвина не получила широкого распространения, тем более что в то время уже существовала электромагнитная теория Максвелла.

3. Делалась попытка более строго учесть взаимодействие вещества и эфира. Были выдвинуты различные теории этого взаимодействия (Буссинеск (1867), Ламе (1852), Гельмгольц (1875), Ломмель (1878), Кеттелер (1865—1885), Фойхт (1883) и др.) Данные теории в основном были направлены на объяснение эффекта

аномальной дисперсии, хотя последние два автора изучали и задачу об отражении и преломлении света. Введение дополнительных гипотез относительно характера взаимодействия на границе также не дало удовлетворительных результатов.

Интересная попытка решить противоречие в задаче об отражении и преломлении света на основе теории упругости принадлежит Мак-Куллагу (1839). Он постулировал модель «ротационно-упругого эфира», для которого потенциальная энергия зависит от вращения объемного элемента, а не от изменения его формы и объема. В такой теории продольная волна отсутствует и все волны распространяются с одной скоростью. Позднее Фитцджеральд (1880) обратил внимание на формальную аналогию между уравнениями электромагнитной теории Максвелла (1865) и механической теории Мак-Куллага. Отметим, что физические идеи, лежащие в основе обеих теорий, различны.

В работах Гельмгольца (1870), Лорентца (1875—1877), Д. Томсона (1880) четко выявлены преимущества электромагнитной теории Максвелла. В этой теории предусматривается отсутствие продольных волн и нет необходимости использовать дополнительные гипотезы для получения формул Френеля.

Экспериментальное подтверждение Герцем (1888) электромагнитной теории не оставило никаких сомнений в том, что свет не является упругой волной. Рэлей (1888) отмечал, что «упругую теорию света, ценную с чисто динамической точки зрения и, вероятно, не лишенную математической аналогии с реальностью, в оптике можно рассматривать лишь в качестве иллюстрации» [122, с. 7].

Интересно, что электромагнитная теория света наибольшее сопротивление встретила именно среди английских физиков. Так, В. Томсон (лорд Кельвин) строил большое количество механических моделей эфира [67, 79]. Даже в 1904 г. он утверждал [88, с. 102], что «так называемая электромагнитная теория света до сих пор нам ни в чем не помогла». Шустер в том же году в предисловии к книге [149] отметил, что «уравнения, составляющие современную электромагнитную теорию света, сослужили отличную службу; на них следует смотреть как на остов, к которому должна точно прийтись будущая более полная теория, но сами по себе они такой окончательной теории света не составляют». Вместе с тем еще в конце XIX века ряд важных работ по дифракции света основывался на теории упругих волн в среде.

2. Дифракция упругих волн. Возникновение и развитие упругой теории света естественно привело к исследованию явления дифракции. Первые работы в этом направлении принадлежат Стоксу (1849, 1852). Он изучал прохождение упругих волн через отверстие в экране и вычислял амплитуду, поляризацию дифрагированных волн на значительном по сравнению с длиной волны расстоянии от препятствия.

По-видимому, первое строгое рассмотрение дифракции упругих (векторных) волн на препятствиях принадлежит Клебшу (1863).

В обширной работе он использовал уравнения теории упругости для вычисления рассеяния волн твердой сферой в безграничной упругой среде. Однако ему не удалось из сложного точного решения получить полную информацию о законах отражения и преломления.

Большой вклад в изучение дифракции света, составление четкой физической картины явления внесли работы Рэля (1871). В них на основе упругой теории подробно исследован вопрос о рассеянии света малыми частицами и впервые объяснена причина голубого цвета неба.

Позднее Лоренц (1890) и Лэмб (1900) рассмотрели ряд случаев рассеяния волн в упругом теле, содержащем сферическое включение, и подробно исследовали энергетические соотношения для падающей и дифрагированных волн. Однако при этом среда считалась несжимаемой, что упрощает задачу. Довольно полный обзор ранних работ по дифракции волн на сфере приведен в работе [78].

В дальнейшем исследования явлений дифракции света проводились на основе электромагнитной теории, и теория упругости в этой области долгое время не использовалась. Интерес к задачам дифракции упругих волн и тесно связанной с ними проблеме динамической концентрации напряжений значительно возрос лишь в настоящее время [50, 51, 250].

3. Распространение гармонических волн в упругих телах при наличии границы. Существование двух типов волн в неограниченной упругой среде вызвало большой интерес к проблеме влияния граничных поверхностей на процесс распространения гармонических волн. По существу, задача об отражении и преломлении упругих волн на границе раздела двух полупространств — одна из основных задач в «упругой» теории света — раскрыла интересные проявления факта наличия двух типов волн в упругом теле. Так, оказалось, что при наклонном падении на свободную поверхность упругого полупространства продольной волны кроме отраженной под тем же углом продольной возникает и поперечная волна. Более того, при определенном угле падения продольной волны всю энергию уносит только отраженная поперечная волна.

Однако наиболее наглядная демонстрация значительного усложнения волновой картины в упругом теле при наличии границы содержится в работе Рэля (1885). В ней указана возможность существования в полубесконечном упругом теле нового типа волн, которые впоследствии получили название поверхностных волн Рэля. Амплитуда этих волн убывает по экспоненциальному закону при удалении от поверхности.

В дальнейшем в связи с развитием сейсмологии возник интерес к задачам о волноводном распространении в слоистых упругих средах, а также к изучению вынужденных колебаний полупространства под действием периодических нагрузок. В первом направлении следует отметить работы Лява (1911) и Стоунли (1924), в которых описаны новые типы волн для упругого слоя и полупространства, лежащих на упругом полупространстве с иными свойствами.

Второе направление получило название «задачи Лэмба» после фундаментальной работы Лэмба (1904). В этой работе построено аналитическое решение (в виде контурных интегралов) и частично проведен анализ общих закономерностей распространения волн в упругом полупространстве при воздействии гармонических нагрузок. Отмечена важная роль волн Рэлея, уносящих большую часть энергии, подводимой к упругому телу.

Задача о распространении гармонических волн в бесконечном упругом круговом цилиндре представляла значительный интерес при построении приближенных одномерных теорий колебаний стержней. В работах Похгаммера (1876) и Кри (1886) общие уравнения упругости применялись для изучения процесса распространения гармонических продольных, изгибных и крутильных волн в бесконечном цилиндре кругового сечения со свободной от нагрузок боковой поверхностью. Аналогичная задача для бесконечного слоя рассмотрена Рэлеем (1889) и Лэмбом (1891, 1917).

В этих классических исследованиях не только указано на существенное усложнение картины волноводного распространения при наличии границы (появление дисперсии), но и фактически построены наборы точных решений уравнений движения. Значение последнего результата трудно переоценить, поскольку это открыло путь к рассмотрению задач о колебаниях конечных цилиндров.

Отметим, что полученные соотношения между частотой и длиной волны — дисперсионные уравнения — выглядят обманчиво просто. Однако фактический и подробный анализ уравнений Похгаммера — Кри и Рэлея — Лэмба был проведен сравнительно недавно (в 40-х годах нашего столетия).

Еще сложнее оказалась задача о распространении гармонических волн в прямоугольном волноводе. Хотя Ламе (1852) удалось отыскать класс волновых движений для определенных отношений сторон волновода (эквиволлюминальные моды Ламе), общее строгое решение задачи практически не получено до настоящего времени.

4. Колебания ограниченных тел. Наряду с задачами о распространении волн в упругой среде немалый интерес представлял анализ гармонических колебаний ограниченных тел. Особое внимание уделялось аналитическому исследованию собственных частот и форм колебаний упругих тел канонического вида — сферы, кругового цилиндра, прямоугольной призмы.

Наиболее полно была изучена задача о колебаниях сферы. Простейшие радиальные колебания сферы проанализированы Пуассоном (1828), а общая пространственная задача о колебаниях сферы рассматривалась Йеришем (1879). Последний построил решение в сферических координатах, предложил классификацию форм колебаний и получил уравнения частот. Лэмб (1882), следуя традициям английской математической школы того времени, изучал аналогичную задачу в прямоугольных координатах. Он уточнил разделение мод колебаний сферы на два класса и провел подробное

численное исследование частотных уравнений для различных значений коэффициента Пуассона.

Точное решение пространственной задачи о сфере показало также несостоятельность предположения Ламе (1852) о природе мод колебаний в упругих телах. Ламе полагал, что во всех случаях моды колебаний должны делиться на два различных класса по аналогии с двумя типами волн в бесконечном упругом теле. В модах первого класса изменения объема не происходит, в то время как для второго класса движение безвихревое. Найденные два класса мод колебаний сферы не соответствовали этим предположениям. Ошибка в анализе Ламе объяснялась допущением, что волны не изменяют своего характера при отражении от границы тела.

Задача о колебаниях замкнутой сферической оболочки рассматривалась в работах Пуассона (1828), Лэмба (1889) и Кри (1896). Были построены общие выражения для смещений, проведен численный анализ некоторых частотных уравнений.

Собственные колебания сферы с жесткозакрепленной поверхностью изучались Дебаем (1912) в связи с разработкой теории удельной теплоемкости. Он нашел число собственных частот, не превышающих некоторое заданное значение.

Задача о колебаниях изотропной однородной сферы оказалась, по существу, единственным видом пространственных задач, которые имеют строгое решение.

Дальнейшие исследования колебаний сферы связаны с усложнением постановки задачи (учет неоднородности, вязкости, эффекта притяжения, начальных напряжений и т. д.) применительно к описанию собственных колебаний Земли. В настоящее время такие задачи детально изучаются в сейсмологии [15, 120].

Значительные трудности возникали при отыскании собственных колебаний конечных цилиндров. Путем набора частных решений для бесконечного цилиндра (Похгаммер (1876) и Кри (1886)) не удалось точно удовлетворить граничным условиям отсутствия нагрузок на торцах цилиндра. Точные решения были получены лишь для случая скользящей заделки торцов — при отсутствии на них нормальных смещений и касательных напряжений. Однако для определенных значений геометрических размеров и частот Кри (1886) и Лэмб (1917) нашли ряд собственных форм колебаний цилиндра со свободными границами — так называемые эквиволлюминальные моды. Аналогичные типы мод Ламе (1852) получил для прямоугольного параллелепипеда с определенным соотношением сторон.

Сложности в построении точных аналитических решений привели Лауэ (1925) к парадоксальному заключению о том, что собственных колебаний цилиндра со свободной поверхностью вообще не существует.

5. Приближенные теории. Трудности анализа колебаний стержней, пластин и оболочек на основе точных решений трехмерных задач теории упругости стимулировали интенсивное развитие приближенных теорий.

Отметим, что приближенные уравнения продольных и изгибных колебаний стержней были получены значительно раньше (Эйлер (1744), Бернулли (1751)), исходя из простейших гипотез. После этого задача заключалась в получении и уточнении этих уравнений с использованием трехмерных соотношений теории упругости, что составило предмет общей проблемы приведения. Данная задача решалась в основном двумя путями.

Первый подход заключался в разложении искомых величин смещений и напряжений в ряды по степеням вырожденной координаты, т. е. вдоль направления наименьшего характерного размера тела, и подстановке этих разложений в трехмерные уравнения. Таким способом Пуассон (1829) вывел уравнения продольных, поперечных и крутильных колебаний круглого стержня, совпадающие с элементарными. Уравнения продольных и поперечных колебаний пластины получены Коши (1828) и Пуассоном (1828).

Второй путь построения приближенных теорий заключался в введении гипотез физической природы относительно характера распределения смещений и напряжений. Использование вариационных принципов приводило к искомому уравнению движения и граничным условиям. Таким образом были построены уточненные уравнения продольных и поперечных колебаний, учитывающие влияние инерции поперечного движения (Рэлей (1878)), теория изгибных колебаний круглой пластины (Кирхгоф (1852)), различные варианты теории цилиндрических и сферических оболочек [123]. С. П. Тимошенко (1921) показал, что учет деформации сдвига в поперечном сечении также важен при поиске адекватных моделей поперечных колебаний стержней. Отметим, что поправки на скорость распространения волн в бесконечном цилиндре, получаемые из уточненных теорий колебаний стержней, совпадали с несколькими первыми членами разложения точных решений Похгаммера — Кри.

Мы здесь не приводим обзор результатов исследования колебаний струн, стержней, мембран, пластин, оболочек на основе приближенных теорий. В XIX веке такие решения строились практически всеми исследователями, работающими в области теории упругости и акустики. Довольно полное собрание результатов таких расчетов представлено в первом томе классического труда Рэля «Теория звука» [123].

Развитие подходов к построению уточненных динамических теорий и решение на их основе задач о колебаниях и волнах в упругих телах интенсивно продолжается и в наше время [35].

Круг практических вопросов, при рассмотрении которых в качестве модели среды используется идеально упругое тело, а в качестве модели процесса — гармоническая волна, чрезвычайно ши-

роста среды на пути распространения волн по наблюдениям на поверхности за свободными колебаниями Земли, вызванными землетрясениями.

Важной для сейсмологии задачей является изучение свойств неоднородных волноводов, а также исследование свободных колебаний Земли.

2. *Акустоэлектроника.* Основные задачи акустоэлектроники связаны с возбуждением, распространением и приемом высокочастотных волн в твердых телах, взаимодействием этих волн с электромагнитными полями. Из всех акустических волн наибольший интерес с точки зрения практических приложений представляют поверхностные акустические волны. Кроме того, важную роль волновые процессы в упругих телах играют в связи с задачами обработки сигналов, в частности в связи с созданием механических резонаторов и фильтров.

3. *Прикладная механика.* Таким названием целесообразно объединить те исследования гармонических волновых процессов, которые посвящены разработке прикладных приближенных методов анализа, анализу колебаний элементов конструкций, рассеянию и дифракции упругих волн.

4. *Неразрушающий контроль.* Во многих аспектах проблема неразрушающего контроля связана с постановкой и анализом количественных данных о распространении гармонических волн. Эти задачи возникают, например, при определении формы, объема, ориентации и расположения дефектов внутри упругого тела. Особенно сложные и интересные волновые задачи появляются в связи с использованием явления акустической эмиссии для предсказания долговечности конструкций.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Распространение волн в упругом теле связано со смещением и деформацией его элемента. Именно таким образом возмущение передается от одной точки упругого тела к другой. При этом важно различать движение частиц среды, связанное с распространением возмущения, и движение самого возмущения. Закономерности такого процесса в упругой среде описываются системой уравнений, отражающих связь между вектором смещений $\mathbf{u}$, тензорами деформаций $\hat{\epsilon}$ и напряжений $\hat{T}$, а также плотностью ρ .

В книге рассматриваются процессы распространения волн в идеальном линейно-упругом теле. Такая модель среды полностью характеризуется тремя величинами — двумя упругими постоянными и плотностью в невозмущенном состоянии.

Основные уравнения движения упругой среды, занимающей область V , задаются тремя группами соотношений [59]:

$$\operatorname{div} \hat{T} + \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{2} [\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\widetilde{\operatorname{grad} \mathbf{u}})], \quad (1.2)$$

$$\hat{T} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \hat{E} + 2\mu \hat{\epsilon}. \quad (1.3)$$

Здесь тильдой обозначена операция транспонирования квадратной матрицы; $\hat{E}$ — единичный тензор второго ранга; λ и μ — модули упругости, называемые постоянными Ламе; $\mathbf{b}$ — вектор плотности объемных сил.

Приведенная в инвариантной форме полная система соотношений для определения всех характеристик движения элемента упругого тела при практическом использовании привязывается к определенной системе координат. В современных представлениях о возможности описания движения тела или его частей выделяются четыре различных подхода [131]. В механике сплошной среды наибольшее распространение в историческом аспекте получили подходы Лагранжа и Эйлера, или в рамках терминологии работы [131] — отсчетный и пространственный. Поскольку мы далее будем говорить о смещении или скорости элемента упругого тела, а не о смещении

или скорости в какой-либо точке, то фактически речь будет идти об отсчетном (лагранжевом) описании процесса. Отметим, однако, что для линейного случая различия между двумя указанными подходами стираются [59].

Выбирая в качестве основной характеристики, знание которой позволяет воссоздать полную картину напряженно-деформированного состояния, вектор смещений $\mathbf{u}$ частиц среды, из (1.1) — (1.3) получаем векторное уравнение движения

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1.4)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа.

Учитывая векторное тождество

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}, \quad (1.5)$$

формулу (1.4) записываем в инвариантном виде:

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.4) и (1.6) обычно называют уравнениями движения Ламе. Они многократно выводились и использовались в работах по линейной теории упругости Навье (1821), Коши (1828, 1840), Пуассона (1829), Ламе и Клапейрона (1833), Стокса (1845, 1851), Ламе (1852). Приведенные ниже иные формы записи уравнений (1.6) и частные свойства их решений также установлены в отмеченных работах. Глубокий обзор исследований, выполненных на раннем этапе развития теории упругости, приведен в работе [186].

Расшифровка векторных дифференциальных операторов, введенных при записи (1.4) и (1.6), в декартовой и цилиндрической системах координат дана ниже. Здесь же мы обратим внимание на следующее обстоятельство, отмеченное, по-видимому, впервые Мандельштамом [89].

Уравнение (1.1) является записью второго закона Ньютона применительно к элементу сплошной среды. Известно, что законы Ньютона являются инвариантными по отношению к преобразованию Галилея. Легко проверить, что векторное уравнение (1.6) по отношению к этому преобразованию не инвариантно. Если в акустическом случае классическое волновое уравнение оказывается инвариантным по отношению к преобразованию Лорентца, то уравнение движения Ламе не инвариантно и по отношению к этому преобразованию. Причина такого положения в неточности, допущенной при вычислении ускорения элемента среды. Производная по времени для данного элемента среды d/dt и производная по времени в данном месте пространства $\partial/\partial t$ отличаются между собой. С учетом этого различия указанный парадокс исчезает, однако соответствующее уравнение движения становится нелинейным. Нелинейные слагаемые имеют тот же порядок малости, что и отброшенные при выводе уравнений (1.1) — (1.3) в лагранжевой системе координат, жестко связанной со средой.

Таблица 1

Упругие постоянные	Основная пара			
	λ, μ	E, ν	G, ν	K, G
λ	λ	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{2\nu G}{1-2\nu}$	$K - \frac{2}{3}G$
$\mu (G)$	μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	G	G
E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	E	$2G(1+\nu)$	$\frac{9KG}{3K+G}$
K	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	K
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	ν	ν	$\frac{3K-2G}{6K+2G}$
c_1	$\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$	$\sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$	$\sqrt{\frac{K+\frac{4}{3}G}{\rho}}$
c_2	$\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$	$\sqrt{\frac{G}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{G}{\rho}}$

модуль сдвига; E — модуль Юнга; K — модуль объемного сжатия; ν — коэффициент Пуассона. Связь между этими величинами дается в табл. 1. Значения величин c_1, c_2, ρ и ν для некоторых упругих материалов приведены в табл. 2 [6, 65, 124, 157].

Уравнение движения (1.6) относительно вектора смещений $\mathbf{u}$ является довольно сложным. Один из естественных путей его решения состоит в представлении вектора $\mathbf{u}$ в области B в виде суммы некоторых вспомогательных векторов, удовлетворяющих в этой области более простым уравнениям типа (1.11).

Вследствие теоремы Гельмгольца из векторного анализа [58, 116] векторное поле $\mathbf{b}/\rho$ допускает разложение

$$\frac{\mathbf{b}}{\rho} = -\text{grad } \kappa - \text{rot } \gamma, \quad \text{div } \gamma = 0. \quad (1.14)$$

Тогда для вектора смещений справедливо разложение Грина [185] — Ламе [209]

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \mathbf{a}, \quad (1.15)$$

где φ и $\mathbf{a}$ удовлетворяют уравнениям

$$\square_1 \varphi = \kappa, \quad \square_2 \mathbf{a} = \gamma. \quad (1.16)$$

Для понимания возможностей линейной теории волн в упругих телах важно рассмотреть комплекс кинематических и физических допущений, сделанных при выводе основной системы (1.1) — (1.3). Подробный анализ процесса вывода этих уравнений с такой точки зрения содержится в монографиях Новожилова [105, 106].

Возвращаясь к анализу линейного векторного уравнения движения Ламе (1.6), введем в рассмотрение величины

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (1.7)$$

имеющие размерность скоростей. Тогда уравнение (1.6) можно записать в виде

$$c_1^2 \text{grad div } \mathbf{u} - c_2^2 \text{rot rot } \mathbf{u} + \frac{\mathbf{b}}{\rho} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (1.8)$$

Вводя сокращенные обозначения

$$\square_\alpha f = c_\alpha^2 \nabla^2 f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (1.9)$$

для волновых операторов, уравнение (1.6) можно представить с учетом (1.5) в форме

$$\square_2 \mathbf{u} + (c_1^2 - c_2^2) \text{grad div } \mathbf{u} + \frac{\mathbf{b}}{\rho} = 0. \quad (1.10)$$

Рассмотрим случай отсутствия объемных сил, т. е. $\mathbf{b} = 0$. Тогда из уравнения (1.10) с использованием векторного тождества (1.5) легко следуют важные свойства частных решений $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ уравнений движения, а именно

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{u}_1 = 0 &\rightarrow \square_1 \mathbf{u}_1 = 0, \\ \text{div } \mathbf{u}_2 = 0 &\rightarrow \square_2 \mathbf{u}_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Видно, что частные решения для векторов смещений $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ описывают распространение возмущений с разными скоростями c_1 и c_2 . Исходя из указанных свойств векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ скорость c_1 называют скоростью безвихревой волны ($\text{rot } \mathbf{u}_1 = 0$), c_2 — скоростью эквиволуминальной волны ($\text{div } \mathbf{u}_2 = 0$).

Применяя к (1.6) при $\mathbf{b} = 0$ операции div , а затем rot , находим

$$\square_1 (\text{div } \mathbf{u}) = 0, \quad \square_2 (\text{rot } \mathbf{u}) = 0. \quad (1.12)$$

При этом использованы известные векторные соотношения

$$\text{div rot } \mathbf{a} = 0, \quad \text{rot grad } \varphi = 0. \quad (1.13)$$

Поскольку $c_1 > c_2$, то безвихревая часть возмущения, характеризуемая величиной $\text{div } \mathbf{u}$, распространяется быстрее, чем его вихревая часть, описываемая величиной $\text{rot } \mathbf{u}$. Поэтому в сейсмологии скорости c_1 и c_2 называются скоростями первичных c_P (P — primary) и вторичных c_S (S — secondary) по времени прихода возмущений. Такие обозначения используются и в данной книге.

Часто при характеристике упругих свойств среды вместо постоянных Ламе λ и μ используют пары (E, ν) , (G, ν) , (K, G) , где G —

Таблица 2

Вещество	$\rho \cdot 10^3, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	ν	$c_1, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	$c_2, \frac{\text{м}}{\text{с}}$
Алюминий	2,7	0,35	6420	3110
Вольфрам	18,7	0,29	5230	2860
Железо	7,87	0,28	5850	3230
Золото	19,3	0,42	3140	1170
Иттриевый алюминиевый гранат	4,55	0,24	8570	5030
Кварц плавленный	2,2	0,17	5970	3780
Латунь	8,5	0,33	4240	2140
Магний	1,74	0,35	6440	3090
Медь	8,9	0,33	4560	2250
Молибден	9,0	0,20	6540	3500
Никель	8,7	0,31	5630	2960
Олово	7,18	0,33	3320	1670
Платина	21,4	0,39	3960	1670
Резина	0,93	0,499	1040	30
Свинец	11,34	0,43	2120	740
Серебро	10,5	0,38	3600	1590
Сталь	7,86	0,29	5890	3210
Стекло	2,5	0,25	5800	3350
Титан	4,4	0,30	6110	3270
Цинк	6,92	0,11	4170	2410

Доказательство того, что (1.15) удовлетворяет уравнению (1.6), проверяется непосредственной подстановкой и использованием тождеств

$$\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi, \quad \text{rot rot } \mathbf{a} = -\text{rot } \nabla^2 \mathbf{a}. \quad (1.17)$$

Формально представление (1.15), (1.16) задает выражение трех компонентов вектора смещений через четыре другие функции — скалярный потенциал φ и три компоненты векторного потенциала $\mathbf{a}$. Это означает, что скалярный и векторный потенциалы должны подчиняться дополнительному условию.

Обычно при рассмотрении общих вопросов динамики упругого тела в качестве такого дополнительного условия используют соотношение

$$\text{div } \mathbf{a} = 0. \quad (1.18)$$

При построении наборов частных решений, необходимых для удовлетворения граничных условий в конкретных задачах, условие (1.18) иногда удобно заменить другим [96]. Однако равенство (1.18) широко используется при доказательстве полноты представления (1.15). Если $\mathbf{u}$ — решение уравнения (1.6) в области B , то существуют функции φ и $\mathbf{a}$, удовлетворяющие уравнениям (1.15), (1.16) и условию (1.18). Строгое доказательство этого важного утверждения содержится в работах [104, 186, 269]. Теорема о полноте решения Грина — Ламе впервые была сформулирована Клебшем (1863). Определенную роль в построении четкого доказательства теоремы

сыграли работы Кельвина (1884), Соммильяны (1892), Тедоне (1897), Дюгема (1898) [186]. По-видимому, эти работы до недавнего времени были мало известны. Так, в книге [119, с. 188] утверждалось, что решение Грина — Ламе полно только для безграничной среды. Наличие же границы приводит к появлению других типов волн, например поверхностных волн Рэлея.

Подчеркнем, что согласно теореме о полноте представления (1.15) любой волновой процесс в конечном или бесконечном упругом теле может быть описан как суперпозиция волновых движений со скоростями c_1 и c_2 . В случае неограниченного упругого тела волны обоих типов распространяются независимо друг от друга. Наличие границы приводит к взаимодействию двух типов волн и появлению волн, распространяющихся со скоростями, отличными от c_1 и c_2 . Примеры таких волн приведены в главах 2, 4. Однако и в этом случае вектор смещений $\mathbf{u}$ можно представить с помощью двух потенциалов φ и $\mathbf{a}$.

Вместе с тем отметим также следующее. Построению общих решений уравнений движения, как и в случае статических задач, уделяется очень большое внимание. Представление (1.15) и (1.16), конечно, является не единственно возможным [104, 186]. Работы по построению новых представлений несомненно важны с точки зрения исследования структуры уравнений динамики упругого тела. Однако если проанализировать полуторазековой исторический опыт, то окажется, что роль таких общих представлений при фактическом решении граничных задач теории упругости весьма мала.

Имеющиеся решения получены, вообще говоря, без существенного использования таких общих представлений. Они удобны лишь на начальном этапе поиска решений уравнений упругости, однако главный вопрос об удовлетворении граничных условий, как правило, решается уже без них.

Соотношения (1.15) и (1.16) в декартовой (x, y, z) и цилиндрической (r, θ, z) системах координат соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \\ u_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \\ u_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}; \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \frac{1}{c_1^2} \kappa, \quad \nabla^2 a_x - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 a_x}{\partial t^2} = \frac{1}{c_2^2} \gamma_x, \\ \nabla^2 a_y - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 a_y}{\partial t^2} &= \frac{1}{c_2^2} \gamma_y, \quad \nabla^2 a_z - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 a_z}{\partial t^2} = \frac{1}{c_2^2} \gamma_z, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned}
u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}, \\
u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}, \\
u_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta}; \\
\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{1}{c_1^2} \kappa, \quad \nabla^2 a_z - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 a_z}{\partial t^2} = \frac{1}{c_2^2} \gamma_z,
\end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\nabla^2 a_r - \frac{a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 a_r}{\partial t^2} = \frac{1}{c_2^2} \gamma_r, \quad (1.22)$$

$$\nabla^2 a_\theta - \frac{a_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 a_\theta}{\partial t^2} = \frac{1}{c_2^2} \gamma_\theta,$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Компоненты тензора деформации связаны с компонентами вектора перемещений в этих же системах соотношениями

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y};
\end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned}
e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
2e_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \quad 2e_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \\
2e_{rz} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}.
\end{aligned} \quad (1.24)$$

Напряжения и деформации связаны соотношениями закона Гука, имеющими в декартовой и цилиндрической системах координат вид

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2G} \sigma_x &= \varepsilon_x + \frac{\nu \Theta}{1-2\nu}, \quad \frac{1}{2G} \sigma_y = \varepsilon_y + \frac{\nu \Theta}{1-2\nu}, \\
\frac{1}{2G} \sigma_z &= \varepsilon_z + \frac{\nu \Theta}{1-2\nu}, \quad \frac{1}{2G} \tau_{xy} = \varepsilon_{xy}, \quad \frac{1}{2G} \tau_{yz} = \varepsilon_{yz}, \\
\frac{1}{2G} \tau_{zx} &= \varepsilon_{zx}, \quad \Theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\
\frac{1}{2G} \sigma_r &= \varepsilon_r + \frac{\nu \Theta}{1-2\nu}, \quad \frac{1}{2G} \sigma_\theta = \varepsilon_\theta + \frac{\nu \Theta}{1-2\nu}, \\
\frac{1}{2G} \sigma_z &= \varepsilon_z + \frac{\nu \Theta}{1-2\nu}, \quad \frac{1}{2G} \tau_{r\theta} = \varepsilon_{r\theta}, \quad \frac{1}{2G} \tau_{\theta z} = \varepsilon_{\theta z}, \\
\frac{1}{2G} \tau_{rz} &= \varepsilon_{rz}, \quad \Theta = e_r + e_\theta + e_z.
\end{aligned} \quad (1.26)$$

Рассмотрим некоторые частные решения уравнений (1.6), описывающие плоские волны в безграничной упругой среде при отсутствии объемных сил. Первое решение соответствует случаю $\mathbf{a} = 0$ в (1.15). Решение волнового уравнения (1.16) для скалярного потенциала имеет вид

$$\Phi = f(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - c_1 t). \quad (1.27)$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки упругого тела; $\mathbf{p}$ — единичный вектор, определяющий направление распространения волны, — волновой вектор. Из (1.16) находим соответствующее смещение

$$\mathbf{u} = \mathbf{p}' f'(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - c_1 t), \quad (1.28)$$

где штрих указывает на производную по полному аргументу.

Из последнего выражения следует, что в бесконечной упругой среде со скоростью c_1 распространяется плоская волна. Смещение частиц совпадает с направлением распространения волны, определяемым вектором $\mathbf{p}$. В связи с этим такая волна называется продольной. Движение частиц среды, обусловленное этой волной, безвихревое, т. е. $\text{rot } \mathbf{u} = 0$.

Иной тип частных решений уравнения движения получаем, полагая в (1.15) $\Phi = 0$. Решение в виде плоской волны векторного волнового уравнения (1.16) имеет вид

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}_0 g(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - c_2 t). \quad (1.29)$$

Здесь $\mathbf{A}_0$ — некоторый фиксированный вектор.

Соответствующий вектору $\mathbf{a}$ вектор смещений точек упругого тела определяется равенством

$$\mathbf{u} = (\mathbf{p} \times \mathbf{A}_0) g'(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - c_2 t). \quad (1.30)$$

Если представление (1.29) вектора $\mathbf{a}$ подчинить условию (1.18), то находим

$$\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{p} = 0, \quad (1.31)$$

т. е. векторы $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{p}$ взаимно перпендикулярны. Таким образом, в этом случае имеем плоскую волну, распространяющуюся со скоростью c_2 в направлении вектора $\mathbf{p}$. Вектор смещения частиц перпендикулярен вектору $\mathbf{p}$. В связи с таким свойством вектора смещений волна называется поперечной. При ее распространении объем элемента среды не изменяется, т. е. $\text{div } \mathbf{u} = 0$.

В частных решениях (1.28) и (1.30) конкретный вид функций f и g был несуществен. Дальнейшее изучение динамического поведения упругих тел связано, по существу, с решением вопроса о выборе конкретных выражений для f и g , дающих возможность удовлетворить систему дополнительных условий, отражающих взаимодействие упругого тела с другими объектами, и его начальное состояние. При этом оказывается, что произвольные волновые движения, которые описываются уравнениями (1.16), в общем случае могут быть образованы суперпозицией плоских волн, имеющих различные направления распространения и амплитуду [98].

§ 2. ПОСТАНОВКА ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ. ГРАНИЧНЫЕ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Линейные уравнения (1.6) описывают волновые движения в однородной изотропной упругой среде. Для полной постановки граничной задачи математической физики эти уравнения необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

Что касается начальных условий, то для уравнений (1.6) они формулируются так же, как и для классического волнового уравнения [129]. В начальный момент времени $t = 0$ во всем объеме B , занимаемом упругим телом, задаются смещения и скорости всех частиц среды, т. е.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}_0, \quad t = 0. \quad (2.1)$$

Интегрированию уравнений движения (1.6) с начальными условиями (2.1) в безграничной упругой среде посвящено значительное число работ выдающихся математиков и физиков прошлого столетия [82]. В них обобщалась картина движения [129], описывающегося классическим волновым уравнением. Несвязанность двух типов волн привела к тому, что и в случае упругого пространства физическая картина распространения возмущения из конечной области оказалась довольно ясной [82, 123, 270].

Стокс [270] установил, что вне возмущенной области со скоростями c_1 и c_2 распространяются продольные и поперечные волны. Если следить за некоторой отдаленной точкой Q , то в начальный момент времени $t = 0$ она находится в покое. Когда приходит продольная волна, точка смещается. По истечении промежутка времени $(r_2 - r_1)/c_1$, где r_1 и r_2 — минимальное и максимальное расстояния от точки Q до области начального возмущения, продольная волна уходит. В течение промежутка времени $\Delta t = r_2/c_1 - r_1/c_2$ не происходит ни растяжения, ни сдвига, однако среда не является абсолютно возмущенной. Движение в окрестности точки Q будет такого же характера, как и безвихревое движение идеальной несжимаемой жидкости. Затем в течение времени $(r_2 - r_1)/c_2$ действует поперечная волна. После прохождения этой волны волновое движение заканчивается.

Чрезвычайно важным моментом как с точки зрения усложнения волновой картины в рамках модели упругого тела, так и с точки зрения возможности практического использования результатов является введение в рассмотрение волновых ситуаций, связанных с наличием границ.

Вопрос о введении границы S упругого тела B и постановка условий на ней является, по существу, вопросом о схематизации процессов взаимодействия упругих тел между собой. В ряде случаев существенные различия в физико-механических свойствах взаимодействующих тел позволяют говорить о свободной или защем-

ленной границе. Подчеркнем, что выбор правильной модели для описания процесса динамического взаимодействия представляет собой очень сложную задачу. В связи с этим важным является понимание свойств границы как составного элемента модели идеального упругого тела.

К вопросу о свойствах границы, соответствующих этой модели, можно подойти формально. При этом на границе могут быть заданы смещения

$$\mathbf{u}|_S = \hat{\mathbf{U}}, \quad (2.2)$$

напряжения

$$2G \left(\frac{\nu \operatorname{div} \mathbf{u}}{1-2\nu} \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} \right) \Big|_S = \hat{\mathbf{q}} \quad (2.3)$$

или смешанные условия

$$2G \left(\frac{\nu \operatorname{div} \mathbf{u}}{1-2\nu} \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} \right) \Big|_{S_1} = \hat{\mathbf{q}}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u}|_{S_2} = \hat{\mathbf{U}},$$

где $S = S_1 \cup S_2$; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S_1 .

Кроме этих, так называемых основных, граничных задач существуют и другие, связанные с одновременным заданием нормального (касательного) компонента вектора смещений и касательной (нормальной) составляющей вектора усилий. Решение граничных задач с такими «перекрестными» условиями, как правило, оказывается значительно проще, чем решение основных.

Типы допустимых граничных условий также тесно связаны с доказательствами теорем существования и единственности решения [74, 200]. При доказательстве этих теорем обычно формулируется ряд предположений о свойствах гладкости границы (кусочно-гладкая поверхность). При этом четко отмечается, что граничная поверхность упругого тела есть нечто отличное от самой среды. Последнее обстоятельство, конечно, не является специфическим, относящимся только к упругости, а должно подчеркиваться во всех случаях, когда речь идет о математической формулировке соответствующей физической задачи.

Сама граница упругого тела рассматривается как поверхность в чисто геометрическом смысле. На такой поверхности считается возможным задавать самые различные условия для «выходящих» на нее компонентов тензора напряжений, вектора смещений или их комбинации. При этом здесь сразу могут проявляться противоречия между столь общими свойствами границы и свойствами ограниченного ею идеально упругого тела при условии малости деформаций. В частности, можно указать на постановку смешанных граничных задач (2.4) с резко выраженной линией раздела между областями S_1 и S_2 . При этом, как правило, в решении задачи возникают особенности, т. е. наблюдается неограниченный рост некоторых

физических характеристик поля при подходе к точкам смены типа граничных условий, что является характерным примером указанного выше противоречия.

Еще одним важным следствием принимаемого определения границы упругого тела является возможность существования угловых точек (линий), т. е. пересечения гладких частей границы. Наличие таких углов также может приводить к появлению особенностей в картине напряженно-деформированного состояния, что тоже отражает противоречивость в свойствах границы и упругого тела. Роль указанных противоречий при постановке и решении конкретных задач рассматривается в § 4 данной главы.

§ 3. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ. ПОЛЯРИЗАЦИЯ

В различных областях физики широко используется спектральный метод исследования волновых процессов. При таком подходе существует принципиальная возможность свести анализ поведения волн в общем случае к анализу простейших гармонических волн. Переход от характеристик гармонического процесса к оценкам общего волнового движения в упругом теле с начальными условиями связан с существенными трудностями. Однако интерес к исследованию гармонических процессов обусловлен тем, что уже на промежуточном этапе удастся получить важные данные о таких характеристиках колебательных систем, как собственные формы колебаний и спектр собственных частот. Часто этот «промежуточный» результат становится и конечным результатом исследования той или иной колебательной системы в виде упругого тела.

В нашей книге рассматриваются только гармонические колебания и волны. При их изучении удобно использовать комплексную запись выражений для основных характеристик изучаемых волновых полей. После решения конкретных граничных задач реальные физические характеристики получаются отделением действительной части во всех найденных величинах.

Предположение о периодичности (гармоничности) процессов во времени предопределяет некоторую пространственную и временную повторяемость в картине движений точек среды. В связи с этим общее выражение для скалярного потенциала плоской волны имеет вид

$$\varphi = \Phi_0(\mathbf{p}) \exp \left[i \frac{\omega}{c_1} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - c_1 t) \right]. \quad (3.1)$$

Здесь ω — круговая частота процесса. При такой записи величина $\Phi_0(\mathbf{p})$ является амплитудой плоской волны, зависящей только от направления распространения. Аналогично для векторного волнового уравнения в (1.16) решение в виде плоской гармонической

волны задается соотношением

$$\mathbf{a} = A_0(\mathbf{p}) \exp \left[i \frac{\omega}{c_2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - c_2 t) \right]. \quad (3.2)$$

Здесь амплитудный вектор $A_0(\mathbf{p})$ также может быть произвольной функцией направления распространения, характеризуемого волновым вектором $\mathbf{p}$.

Отмеченные выше возможности конструирования общего волнового движения как в скалярном, так и векторном случае в виде суперпозиции плоских волн, естественно, сохраняются и в случае гармонических волн. Однако при рассмотрении конкретных задач эта возможность непосредственно используется редко. Основным методом построения общих решений волновых уравнений для гармонических волн является прямое исследование уравнений, полученных после отделения временного множителя $\exp(-i\omega t)$ в общем представлении искомого величин. В этом случае, при отсутствии массовых сил, волновые уравнения (1.16) преобразуются в уравнения Гельмгольца для амплитудных значений соответствующих характеристик поля, а именно

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi + k_1^2 \varphi &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{a} + k_2^2 \mathbf{a} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь и далее мы не будем делать различия в обозначениях амплитудных и полных выражений для всех характеристик поля, поскольку в случае гармонических процессов это не приводит к каким-либо неясностям.

Введенные при записи уравнений (3.3) величины

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2} \quad (3.4)$$

называются волновыми числами и являются важными характеристиками гармонических волн.

Для описания основных характеристик гармонических волн обычно используются два приема. Так, можно, например, зафиксировать момент времени и исследовать соответствующее ему мгновенное состояние среды. При этом, как следует из выражений (3.1) и (3.2), мы получаем некоторую периодически повторяющуюся в пространстве картину, отражающую состояние точек среды. Периодичность здесь следует понимать в том смысле, что для каждой точки со своим набором параметров (смещения, скорости, напряжения) можно указать другую точку среды, имеющую такой же набор основных параметров. Важно, что расстояние между такими точками не зависит от выбора первой из них и поэтому является характеристикой гармонической волны.

Рассмотрим вначале случай, когда в безграничной упругой среде распространяется продольная волна, описываемая скалярным потенциалом φ в (3.1). Для фиксированного момента времени $t = t_0$ определение для данной точки с радиус-вектором $\mathbf{r}$ точки с

идентичным состоянием и отстоящей от исходной на расстояние r_0 сводится к решению уравнения

$$\frac{\omega}{c_1} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0 = 2\pi. \quad (3.5)$$

При заданном направлении распространения (т. е. при заданном волновом векторе $\mathbf{p}$) уравнение (3.5) имеет, вообще говоря, неоднозначное решение для $\mathbf{r}_0$. Это отражает тот физически очевидный факт, что в среде имеется бесконечно много точек с состоянием, идентичным состоянию выбранной точки. Важной характеристикой волны является поэтому наименьшее из возможных расстояний. Очевидно, при этом вектор $\mathbf{r}_0$ должен совпадать по направлению с вектором $\mathbf{p}$, а расстояние определяться величиной λ_1 в равенстве

$$\mathbf{r}_0 = \lambda_1 \mathbf{p}. \quad (3.6)$$

При подстановке выражения (3.6) в (3.5) находим

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1}. \quad (3.7)$$

Величина λ_1 называется длиной продольной волны.

Аналогично в случае распространения гармонической поперечной волны вводится определение ее длины

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2}. \quad (3.8)$$

Интересно, что уже здесь проявляется отличие упругой среды от акустической и электромагнитной. В двух последних случаях в бесконечной области при распространении плоских гармонических волн всегда есть точки с идентичными физическими характеристиками (давление, скорость, напряженность электрического и магнитного полей). Для упругой среды вследствие наличия продольных и поперечных волн существование таких точек возможно лишь при условии соизмеримости длин волн $n\lambda_1 = m\lambda_2$, где n и m — некоторые целые числа.

Если теперь в выражениях (3.1) и (3.2) зафиксировать значение вектора $\mathbf{r} = \mathbf{R}$, т. е. рассматривать изменение во времени состояния упругого тела в некоторой точке, то очевидно, что по истечении времени $T = \frac{2\pi}{\omega}$ состояние упругого тела в этой точке повторится. Величина интервала времени T , в данном случае общая для обоих типов волн, называется периодом гармонической волны.

Для каждого из двух типов плоских гармонических волн можно определить понятие фазовой скорости как скорости изменения состояния. Однако в общем случае наличия в безграничной упругой среде одновременно двух видов волн определить разумно фазовую скорость без соизмеримости длин волн нельзя. По существу, здесь происходит два невзаимодействующих волновых движения. Появление границы приводит к установлению через посредство граничных условий физической связи между ними и дает возможность однозначно определить фазовую скорость гармонической волны.

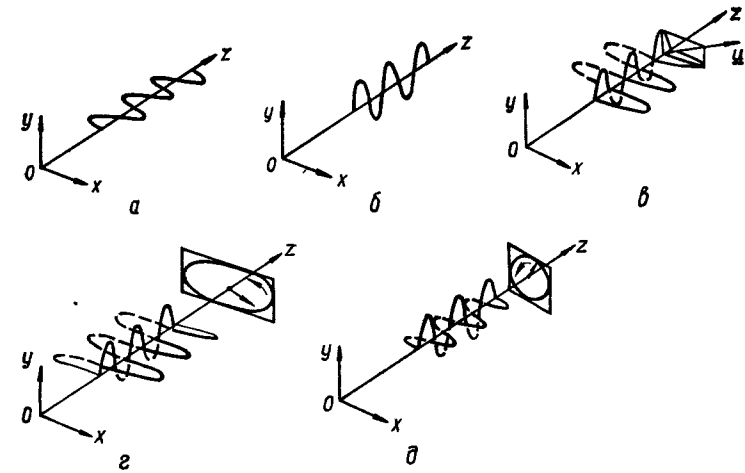


Рис. 1.

В связи с тем что волновой вектор и направление смещений частиц, возникающих при распространении волны, различаются для упругой среды, важной кинематической характеристикой волны является поляризация. Говоря о поляризации волн, обычно имеют в виду связь между направлением распространения волны и направлением смещения (скорости) частиц среды при ее прохождении.

Для случая продольных волн между направлением распространения возмущения и направлением смещения частиц нет отличия. Поэтому далее речь идет только о поперечных волнах. Для конкретного рассмотрения вопроса о поляризации необходимо ввести систему координат. Пусть ось Oz совпадает с направлением волнового вектора $\mathbf{p}$ поперечной волны, а остальные две оси условно назовем «горизонтальной» и «вертикальной». Тогда произвольное смещение частицы $\mathbf{u}$ в такой волне можно представить в виде суммы двух взаимно ортогональных векторов $\mathbf{u}_x$ и $\mathbf{u}_y$, направленных по выбранным осям Ox и Oy . При этом возможны следующие ситуации, показанные на рис. 1.

Если $\mathbf{u}_y = 0$, то имеем дело с волной, в которой вектор смещения частиц лежит в горизонтальной плоскости zOx и изменяется по закону (см. рис. 1, а).

$$\mathbf{u}_x = U_x \mathbf{e}_x \exp [i(k_2 z - \omega t)]; \quad \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z = 0. \quad (3.9)$$

Волна, у которой вектор смещения частиц параллелен некоторой фиксированной плоскости, называется плоскополяризованной. Выражение (3.9) определяет горизонтально поляризованную волну, обычно называемую SH-волной.

Аналогично определяется вертикально поляризованная волна (SV-волна), смещение частиц для которой задается выражением (см. рис. 1, б).

$$\mathbf{u}_y = U_y \mathbf{e}_y \exp [i(k_2 z - \omega t)], \quad \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_z = 0. \quad (3.10)$$

Произвольная линейная комбинация выражений (3.9) и (3.10) с действительными коэффициентами также определяет плоско поляризованную волну в плоскости, проходящей через ось Oz (см. рис. 1, ϵ).

Если рассматривать суперпозицию движений (3.9) и (3.10) с произвольным постоянным сдвигом фаз α , то получаем движение

$$u = (U_x e_x + U_y \exp(i\alpha) e_y) \exp[i(k_z z - \omega t)]. \quad (3.11)$$

Взяв вещественную часть от (3.11), находим, например, при $z = 0$

$$u(t) = e_x U_x \cos \omega t + e_y U_y \cos(\omega t + \alpha). \quad (3.12)$$

Отсюда следует, что с течением времени конец вектора смещений описывает эллипс (см. рис. 1, ζ). В частном случае $U_x = U_y$, $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ получаем поперечную волну с круговой поляризацией (см. рис. 1, δ).

§ 4. ЛОКАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ В ВОЛНОВЫХ ПОЛЯХ

Вопрос о локальных особенностях в физических полях различной природы при изучении их методами математической физики имеет принципиальное значение. Рассматривая кратко этот вопрос применительно к динамическим задачам теории упругости, следует обратить внимание на три существенных момента.

1. Возникновение локальных особенностей, т. е. стремление к бесконечности некоторых характеристик поля, следует рассматривать как «расплату» за слишком грубое и противоречивое моделирование реального явления. Причем речь идет не только о свойствах модельной среды (идеально упругое тело), но и о постановке задачи в целом, включая моделирование характера границы и свойств внешних объектов.

2. Как правило, при возникновении локальных особенностей в решении граничной задачи математической физики обнаруживается неоднозначность. Это значит, что возможно построение нескольких решений, удовлетворяющих основным уравнениям задачи и различающихся только скоростью стремления к бесконечности той или иной характеристики поля. Следовательно, для правильной формулировки граничной задачи в тех случаях, когда в ее решении возможно возникновение локальных особенностей, необходимо предопределить их характер. Только после этого задача становится однозначно разрешимой.

3. Знание характера особенности в решении граничной задачи до получения самого решения можно использовать для существенного повышения эффективности алгоритма количественной интерпретации общих формул.

В акустике и электродинамике после получения Зоммерфельдом (1895) решения задачи о дифракции на полуплоскости [57] исследованию характера особенностей в зависимости от свойств среды, геометрии области и характеристик границы уделялось большое внимание

[97, 144]. Постановка граничных задач в этих разделах физики в настоящее время включает задание типа особенности в месте ее возникновения.

В теории упругости всестороннее обсуждение вопроса об особенностях в полях напряжений (деформаций) началось позднее. Обсуждение одного из аспектов этой проблемы, а именно вопроса о постановке задач о трещинах в идеально упругом теле, было довольно глубоким и интересным [10, 61, 117]. Кроме того, следует отметить важные результаты, полученные в работах [26, 63, 173, 285]. Проведенные исследования относятся к случаю статических задач теории упругости. Если эти результаты характеризовать в целом, то следует выделить два аспекта. С одной стороны, накоплен обширный количественный материал о «показателе особенности» и его зависимости от свойств упругих сред, геометрии области. С другой — важным является сформулированный в процессе этих исследований принцип о том, что вопрос об особенности в каждом конкретном случае может быть решен на основании анализа упругих полей в очень малых окрестностях «подозрительных» относительно сингулярности точек без решения сложных граничных задач для всего тела [2, 147, 162, 276].

В рамках данной работы, посвященной вопросам установившихся колебаний идеально упругого тела, решение вопросов об особенностях проводится с использованием дополнительного важного положения. Смысл его состоит в том, что вопрос об особенностях при гармонических процессах в упругих телах может быть выяснен на основе анализа решений соответствующих статических граничных задач. Это положение можно обосновать, повторяя соображения, позволяющие пренебречь «инерционными» членами в уравнении Гельмгольца для акустики и Максвелла для электродинамики [97, 144]. При этом рассматривается деформирование области, размеры которой существенно меньше длины волны.

В настоящее время вопрос о типах особенностей, возникающих в статических граничных задачах теории упругости, решен не полностью. В частности, в качестве нерешенного можно отметить вопрос об особенности в окрестности угла клиновидного (прямоугольного) штампа на полупространстве. Однако многие ситуации уже достаточно ясны и знание характера особенности часто может служить основой для существенного улучшения алгоритма решения задачи.

1. Особенности напряженного состояния для гладкой граничной поверхности. В данном случае особенности в напряженно-деформированном состоянии могут возникнуть за счет разрывного характера нагрузок в граничной задаче (2.3) или смены типа граничных условий (задача (2.4)).

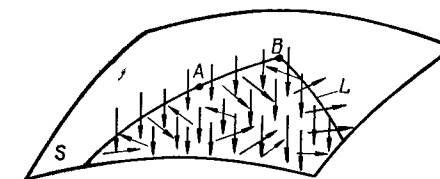


Рис. 2.

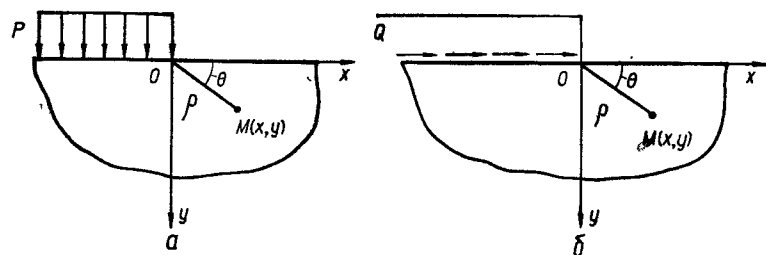


Рис. 3.

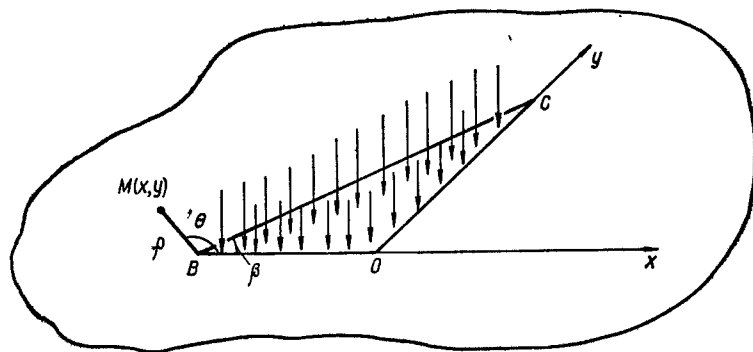


Рис. 4.

В случае разрывного характера нагрузки возможные ситуации представлены на рис. 2. Здесь показана часть гладкой граничной поверхности S упругого тела, вдоль линии L которой имеем разрыв нормальных или касательных нагрузок. На самой этой линии можно выделить два типа точек — точки A и B . Для точки A характерно то, что ее можно окружить малой областью, размер которой существенно меньше радиуса кривизны линии L в этой точке. Напротив, в точке B такую область указать нельзя.

Для точек первого типа (точки A) вопрос об особенностях в напряженно-деформированном состоянии можно решить на основе рассмотрения некоторых простых задач теории упругости о плоской деформации полупространства. Соответствующие разрывам нормальных и касательных нагрузок ситуации в этом случае схематически показаны на рис. 3. Полное решение таких задач хорошо известно [127]. Из их анализа следует, что в случае наличия скачка в нормальной нагрузке (см. рис. 3, а) логарифмическая особенность появляется при подходе к точке O в выражении для угла поворота относительно оси Oz , т. е.

$$\omega_z = \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \approx A(\theta) \ln \rho. \quad (4.1)$$

В случае разрыва в касательной нагрузке (см. рис. 3, б) возникает логарифмическая особенность в окрестности точки O для напряже-

ний σ_x , т. е.

$$\sigma_x \approx B(\theta) \ln \rho. \quad (4.2)$$

Все остальные характеристики напряженно-деформированного состояния в обеих рассматриваемых задачах остаются конечными при подходе к точке разрыва внешней нагрузки.

Несколько сложнее ситуация при рассмотрении локальных свойств напряженно-деформированного состояния в окрестности точки B (см. рис. 2). Это связано не столько с усложнением физической картины, сколько с тем, что для расшифровки такого состояния необходимо использовать решение более громоздкой пространственной задачи о нагружении по ограниченному участку упругого полупространства. При этом область нагружения должна обладать угловыми точками.

Одна из возможных постановок задач в данном случае показана на рис. 4, где область нагружения является прямоугольным треугольником с углом β при вершине B . Здесь для построения полного решения можно использовать результаты монографии [80]. Анализ соответствующего рассматриваемому способу нагружения решения показывает, что здесь углы поворота относительно осей Ox и Oy имеют логарифмическую особенность при подходе, например, к вершине B треугольника $B0C$, т. е.

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \approx C_1(\theta) \ln \rho, \\ \omega_y &= \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \approx C_2(\theta) \ln \rho. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отметим, что в соответствии с ранее указанными свойствами (3.1) угла поворота функция $C_1(\theta)$, в свою очередь, сингулярна (имеет логарифмическую особенность) в окрестности лучей $\theta = 0$ и $\theta = \beta$ в пределах длины соответствующих сторон треугольника. Для $C_2(\theta)$ сингулярным является лишь луч $\theta = \beta$.

Если рассматривать задачу о разрыве касательных нагрузок, заданных в пределах того же треугольника, то к аналогичному заключению приходим для нормальных напряжений σ_x и σ_y в окрестности вершин треугольника.

Следующий этап исследования связан с изучением особенностей, возникающих при задании на разных участках границы различных условий. Полностью этот вопрос еще не исследован. В частности, имеются определенные трудности при анализе характера особенности вблизи края клиновидного гладкого или жестко сцепленного штампа на полупространстве. Это затрудняет решение вопроса о характере особенности в окрестности точек типа B (см. рис. 2). Однако имеющиеся довольно полные результаты решения смешанных задач плоской теории упругости [99] позволяют полностью выяснить вопрос об особенностях в окрестности точек типа A (см. рис. 2).

К конкретному решению данного вопроса возможны два подхода. С одной стороны, можно исходить из хорошо изученных точных решений граничных задач (плоская задача о гладком или жестко сцепленном штампе) и использовать полученные в них особенности в более сложных граничных задачах. Такой подход имеет очевидное преимущество, в частности обладает большой наглядностью и дает возможность подчеркнуть родственность различных задач. Однако он имеет и недостаток, связанный с небольшим числом точно решенных задач, даже в плоской теории упругости. В связи с этим получил развитие метод, основанный на изучении поведения однородных решений для плоского клина. Таким путем получен ряд интересных и наглядных результатов довольно общего характера [173, 276, 285]. Отметим, что данный подход применим и в случае излома граничной поверхности. Вместе с тем ценность этих результатов несколько снижается в связи с тем, что проведенный в указанных работах анализ позволяет заключить, что в набор однородных решений для той или иной граничной задачи входят сингулярные слагаемые. Однако на вопрос об их наличии в окончательном решении можно ответить, учитывая лишь характер внешней нагрузки. Указанное обстоятельство, а также легкость, с которой можно построить несингулярные решения в тех случаях, когда в наборе однородных решений имеются сингулярные составляющие, на первый взгляд несколько снижают ценность анализа задач при нулевых граничных условиях. Однако такие несингулярные решения в «сингулярных ситуациях» являются скорее исключением, а не правилом.

Суммируя результаты имеющихся решений для точек типа A , заключаем [99, 173]:

1) если на области $S = S_1 \cup S_2$ всюду заданы гладкие касательные напряжения, на S_1 — нормальные напряжения, а на S_2 — нормальные смещения, то при подходе к точке A изнутри области S_2 нормальные напряжения возрастают к бесконечности как $\rho^{-1/2}$;

2) если на S_1 заданы напряжения, а на S_2 — смещения, то при подходе к точке A изнутри области S_2 нормальные напряжения имеют особенность типа $\text{Re} [D\rho^{-\frac{1}{2}+\gamma}]$, где $\gamma = \frac{1}{2\pi} \ln(3 - 4\nu)$.

2. Особенности напряженного состояния для граничной поверхности с изломом. Характер напряженного состояния вблизи линии излома L существенно изменяется. В этом случае снова целесообразно выделить ситуации разрывного характера нагрузок и смены типа граничных условий и рассматривать случаи в окрестностях точек A и B (рис. 5). Однако, как и для гладкой границы, ситуация в окрестности точки B , требующая в обоих случаях решения сложной пространственной задачи, в настоящее время не может быть исследована. В окрестности точки A исследование можно провести на основе рассмотрения соответствующих плоских задач теории упругости, в решении которых достигнуты значительные успехи.

Для данной работы необходима информация о характере осо-

бенности в окрестности лишь прямого угла, т. е. в окрестности угла упругой четвертьплоскости (рис. 6). Здесь можно выделить следующие ситуации:

а) на S_1 заданы напряжения, а на S_2 — касательные напряжения и нормальные смещения. В этом случае напряжения особенностей не имеют;

б) на S_1 заданы напряжения, а на S_2 — перемещения. В этом случае при подходе к угловой точке компоненты тензора напряжений можно представить в виде

$$\sigma_r \approx A_1(\theta) \rho^{-\alpha}, \quad \sigma_\theta \approx A_2(\theta) \rho^{-\alpha}, \quad \tau_{r\theta} \approx A_3(\theta) \rho^{-\alpha}, \quad (4.4)$$

где $0 < \alpha < 0,5$ — корень уравнения

$$(3 - 4\nu) \sin^2 \frac{\pi\alpha}{2} = (1 - \alpha)^2 - (1 - 2\nu)^2. \quad (4.5)$$

Отметим, что $A_2(0) = A_3(0) = 0$, $A_1(0) \neq 0$, т. е. особенность в напряжениях, заданных на поверхности S_1 , отсутствует.

Как уже отмечалось, подход, основанный на анализе однородных решений, имеет определенные недостатки с точки зрения выявления характера особенности в каждом конкретном случае. В частности, кроме возможности путем выбора ненулевой нагрузки устранить особенность, как на еще один недостаток такого подхода можно указать на следующую ситуацию. Рассматривая случай нагружения прямого угла касательной нагрузкой, показанной на рис. 7, т. е. при нарушении парности касательных напряжений в угловой точке, имеем логарифмическую особенность в угле поворота ω_2 относительно оси Oz [165, 258]. Этот результат, конечно, нельзя получить из однородной задачи. Из изложенного выше следует, что рассмотрение вопроса об особенностях связано с решением некоторых трансцендентных уравнений, имеющих, как правило, несколько корней. С этой точки зрения фиксация типа особенности является, по сути, указанием на то, какие из сингулярных однородных решений следует оставить, а какие отбросить. Физическим основанием для такого действия всегда можно принять требование конечности энергии деформации, накопленной в окрестности «подозрительной» на сингулярность точки границы. Фактически, как и в задачах электродинамики и акустики, лишь фиксация типа сингулярности позволяет поставить граничную задачу, допускающую однозначное решение.

Важным моментом в вопросе о сингулярности является также следующее обстоятельство. Часто анализ уровня напряженности колеблющегося упругого тела является одной из главных целей исследования. На основе оценки этого уровня делаются заключения о работоспособности того или иного узла (части) системы. Естественно,

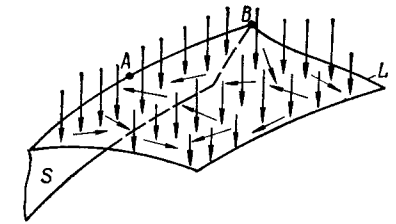


Рис. 5.

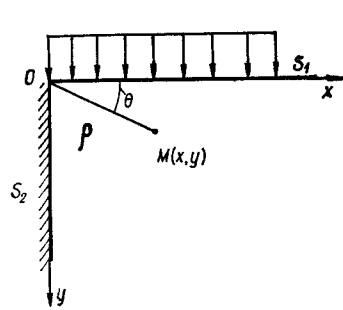


Рис. 6.

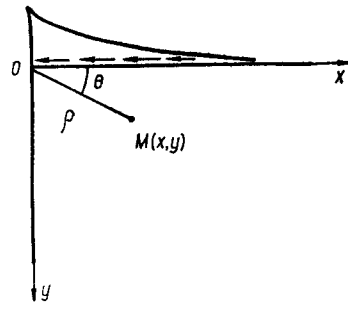


Рис. 7.

априорное указание на наличие особенности в этом случае не является указанием на необходимость использования приближенного подхода, «снимающего» особенность, а должно рассматриваться как указание на несоответствие принятой расчетной схемы и критериев оценки результатов, полученных с ее использованием.

Остановимся также еще на одном моменте, следующем из сделанных выше замечаний относительно возможности «убрать» особенность при помощи подбора нагрузки на поверхности упругого тела. Ситуация здесь абсолютно естественна в рамках следующих рассуждений. Пусть из анализа однородных условий известно, что в изучаемой задаче возможно возникновение сингулярности типа $\rho^{-\alpha}$ при подходе к некоторой точке. Тогда в каждом конкретном случае главное слагаемое в некотором компоненте тензора напряжений будет иметь вид $\sigma \approx A\rho^{-\alpha}$. Если величина α полностью определяется типом однородных граничных условий, материалом и геометрией области, то величина A зависит и от характера внешней нагрузки. В такой трактовке ясно, что частный случай $A = 0$ не является указанием на отсутствие особенности в общем случае.

Заканчивая рассмотрение вопроса об особенностях, объясним причину столь пристального внимания к этому вопросу в данной книге. Дело в том, что с появлением сингулярностей в граничной задаче связаны не только описанные трудности в трактовке конечных результатов решения. Оказывается, что априорное знание характера особенности в рассматриваемой задаче часто дает возможность сделать далеко идущие выводы о свойствах ее решения в целом. Особенно это относится к случаям, когда такое решение ищется в виде рядов по полным системам функции некоторой задачи Штурма — Лиувилля. Важнейшим свойством рядов по ним является зависимость характера убывания коэффициентов разложения от локальных свойств представляемых функций. Часто это позволяет еще до решения задачи найти асимптотические выражения для искомых величин. Такая возможность используется в рассматриваемых в книге задачах и является основой получения удовлетворительной точности в рамках достаточно простых вычислений.

§ 5. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ. УСЛОВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ. ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

В ряде случаев, когда границы области, в которой изучается волновое поле, уходят в бесконечность, неоднозначность решения соответствующей задачи можно связывать не только с наличием сингулярностей. В этих случаях кроме характера особенности необходимо указать дополнительные условия, описывающие структуру волнового поля на бесконечности в соответствии с физическими особенностями задачи. Когда все источники энергии сосредоточены в конечной области пространства, такие дополнительные условия называются условиями излучения.

Физическое содержание условий излучения для полей различной природы чрезвычайно ясно — они требуют, чтобы на бесконечности отсутствовали источники энергии. Трудности с использованием этих условий возникают при естественном стремлении перевести указанное физическое определение на язык математических соотношений, связывающих характеристики изучаемого поля.

В случае поглощающих сред формулировка условий излучения не представляет труда. Достаточно потребовать, чтобы все характеристики поля стремились к нулю с увеличением расстояния от имеющихся источников энергии. Для непоглощающей среды ситуация существенно усложняется.

Математическую формулировку условий излучения наиболее просто получить в случае акустических волн в изотропной среде. Впервые они получены Зоммерфельдом (1912) и подробно обсуждены в работах [85, 115, 128]. Если функция φ (потенциал скорости или избыточное давление в акустике) удовлетворяет уравнению Гельмгольца, то однозначность решения краевой задачи в бесконечной области — внешней части некоторой замкнутой поверхности, с границей, не уходящей в бесконечность, — можно обеспечить требованиями

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r\varphi = \text{const}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - ik\varphi \right) = 0. \quad (5.1)$$

Здесь r — радиус в сферической системе координат с центром внутри области, где расположены источники. Отметим, что знак минус во втором равенстве связан с выбором знака в экспоненциальном временном множителе; мы принимаем зависимость $\exp(-i\omega t)$.

Используя возможность представления вектора смещений в упругом теле в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad (5.2)$$

где $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ описывают движение соответственно в продольной и поперечной волнах и удовлетворяют порознь уравнениям Гельмгольца, условие (5.1) можно перенести на случай безграничной упругой среды [74, 171], а именно

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r |\mathbf{u}_l| = \text{const}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial r} - ik_l \mathbf{u}_l \right) = 0, \quad l = 1, 2. \quad (5.3)$$

Такую запись можно считать недостаточно четкой в том смысле, что по форме она связана с разбиением вектора смещений на две составляющие. Общий анализ интегральных представлений поля смещений через функцию Грина [251] приводит к условиям излучения, выраженным через полный вектор $\mathbf{u}$. Однако после подстановки в них выражения (5.2) снова приходим к соотношениям (5.3).

Условия (5.1) и (5.3) по существу являются правилами выбора знака фазовой скорости гармонических волн [84]. Во многих практически важных случаях для задач акустики, упругости и электродинамики выбор из двух возможных волн той, у которой фазовая скорость направлена в бесконечность, действительно отражает физический факт, что на бесконечности нет источников энергии. В связи с этим отметим, что запись условий излучения в виде (5.1) и (5.3) связана с предположением одинаковой направленности фазовой скорости и скорости переноса энергии в гармонической волне [84, 86, 88]. Чтобы более полно раскрыть следствия такого предположения, необходимо кратко остановиться на понятиях потока мощности и групповой скорости. Они особенно важны и необходимы при формулировке условий излучения для областей с уходящими в бесконечность границами.

Прежде чем перейти к описанию этих понятий, обратим внимание еще на один важный, с нашей точки зрения, вопрос. Тот факт, что в упругом теле следует разделять формулировать условия излучения для каждого возможного типа волнового движения, является очень важным. Если обобщить его на области с уходящими на бесконечность границами («слои»), то становится ясной принципиальная сторона трудностей, возникающих при формулировке условий излучения для таких областей. Эти трудности, очевидно, связаны с тем, что формулировке условий излучения должен предшествовать глубокий анализ структуры поля для определения возможных независимых типов волнового движения в области. Такая задача является довольно сложной. Ее решение применительно к распространению волн в слое и цилиндре приведено далее в главе 4. Для случая акустического слоя условия излучения сформулированы в работе [115].

Понятие потока мощности как энергетической характеристики процесса распространения волн впервые введено Умовым в 1874 г. [136]. В принятых обозначениях вектор плотности потока мощности $\mathbf{P}$ определяется равенством [116, 157]

$$\mathbf{P} = -\hat{T} \cdot \dot{\mathbf{u}}. \quad (5.4)$$

В декартовых координатах, определяемых единичными векторами $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, произведение тензора напряжений на вектор скорости частиц представляется в виде

$$\begin{aligned} -\mathbf{P} = & \mathbf{e}_x (\sigma_x \dot{u}_x + \tau_{xy} \dot{u}_y + \tau_{xz} \dot{u}_z) + \mathbf{e}_y (\tau_{yx} \dot{u}_x + \sigma_y \dot{u}_y + \tau_{yz} \dot{u}_z) + \\ & + \mathbf{e}_z (\tau_{zx} \dot{u}_x + \tau_{zy} \dot{u}_y + \sigma_z \dot{u}_z). \end{aligned} \quad (5.5)$$

При записи соотношений (5.4) и (5.5) тензор напряжений и вектор скоростей являются вещественными функциями. Однако при исследовании гармонических волновых процессов удобно пользоваться комплексными функциями. В связи с этим целесообразно указать способ вычисления потока мощности с использованием комплексных величин.

При рассмотрении гармонических волновых процессов обычно анализируется не мгновенное, а среднее за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ значение потока мощности. Оно определяется равенством

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{P} dt = -\frac{i\omega}{4} (\hat{T} \cdot \mathbf{u}^* - \hat{T}^* \cdot \mathbf{u}). \quad (5.6)$$

Здесь плотность потока мощности выражена через амплитуды тензора напряжений и вектора смещений, причем $*$ — знак комплексного сопряжения.

Используя правило (5.5), находим следующее представление для компонентов вектора $\bar{\mathbf{P}}$ в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \bar{P}_x = & -\frac{i\omega}{4} (\sigma_x \dot{u}_x^* + \tau_{xy} \dot{u}_y^* + \tau_{xz} \dot{u}_z^* - \sigma_x^* \dot{u}_x - \tau_{xy}^* \dot{u}_y - \tau_{xz}^* \dot{u}_z), \\ \bar{P}_y = & -\frac{i\omega}{4} (\tau_{yx} \dot{u}_x^* + \sigma_y \dot{u}_y^* + \tau_{yz} \dot{u}_z^* - \tau_{yx}^* \dot{u}_x - \sigma_y^* \dot{u}_y - \tau_{yz}^* \dot{u}_z), \\ \bar{P}_z = & -\frac{i\omega}{4} (\tau_{zx} \dot{u}_x^* + \tau_{zy} \dot{u}_y^* + \sigma_z \dot{u}_z^* - \tau_{zx}^* \dot{u}_x - \tau_{zy}^* \dot{u}_y - \sigma_z^* \dot{u}_z). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Вопрос о формулировке закона сохранения энергии при распространении волн и связанный с ним вопрос о возможности введения понятия потока мощности через незамкнутую поверхность подробно обсуждались применительно к электромагнитным полям [88, 125]. При этом указывалось на возможность неоднозначного определения потока мощности через незамкнутую площадку без нарушения закона сохранения энергии для замкнутого объема.

При рассмотрении акустических волн (упругое тело или идеальная сжимаемая жидкость) вектор плотности потока мощности можно ввести по определению мощности как произведение силы на скорость в точке ее приложения. Поэтому в данном случае нет необходимости понятие потока мощности связывать с замкнутыми поверхностями.

Для характеристики скорости переноса энергии в связи с распространением волн в средах без потерь очень важным оказывается понятие групповой скорости. Оно принадлежит к тем физическим понятиям, углубление содержания которых не прекращается и в наши дни. Среди публикаций на эту тему известны не только работы, интересные с точки зрения истории формирования понятия [77], но и посвященные дальнейшему его обобщению [112].

Существует несколько способов определения величины групповой скорости. Для гармонического процесса естественно определение,

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ

После введения понятий потока энергии и скорости ее переноса можно указать общий подход к формулировке условий излучения при изучении распространения гармонических волн. Для каждого конкретного случая необходимо:

1) представить общее волновое поле в виде суперпозиции пар независимых типов волн, отличающихся направлением фазовой скорости, каждая из которых характеризуется своим дисперсионным соотношением. Простейшими примерами таких пар являются сходящиеся и расходящиеся сферические волны в безграничной среде. При этом продольные и поперечные волны описываются разными дисперсионными соотношениями;

2) из каждой пары в общее представление решения краевой задачи необходимо включить волну, которая имеет соответствующий физической сущности задачи знак групповой скорости.

Использование принципа излучения в такой форме, естественно, затруднено, однако, как следует из анализа конкретных задач, трудно надеяться на возможность более простой формулировки условий однозначности. Трудности математического характера, возникающие при постановке граничных задач теории упругости, отражают сложность физического процесса распространения упругих волн.

В предыдущей главе важными являются два момента. Прежде всего ясно, что, каким бы ни было волновое движение в упругом теле, оно всегда представимо в виде суперпозиции продольных и поперечных волн. Кроме того, получение конкретных данных о различных частных случаях волновых движений возможно лишь на основе решения корректно поставленных краевых задач. Прежде чем перейти к построению и анализу решений ряда таких задач, остановимся на рассмотрении волновых процессов, для описания которых в полном объеме краевая задача не формулируется. Это процессы отражения и преломления упругих волн на плоской границе. При их изучении не ставится вопрос о способах генерации падающей плоской волны, хотя граничные условия на свободной поверхности или поверхности раздела выполняются точно. Такая постановка задачи приводит к некоторым противоречиям в случае скользящего падения, однако в остальных случаях дает чрезвычайно наглядную картину взаимодействия упругих волн с плоской границей.

Когда упругая волна достигает границы, то часть переносимой ею энергии отражается, а часть переходит в иную среду. В общих чертах здесь имеем явление, аналогичное наблюдаемым при распространении акустических и электромагнитных волн. Однако существование в упругом теле двух типов волн делает этот процесс более сложным; он отличается прежде всего возможностью взаимного преобразования волн расширения и сдвига на границе.

Исторически интерес к вопросу о преломлении и отражении упругих волн в значительной мере стимулировался развитием теории эфира [122, 149, 180]. Особенности поведения упругих волн вблизи границы интересны для сейсмологии [15, 175, 216]. В настоящее время количественный анализ процессов преломления и отражения на границе раздела различных сред представляет большой интерес для электронной техники, дефектоскопии и т. д. [20, 55, 139, 156]. Подробный обзор теоретических результатов и возможностей практического использования наблюдаемых здесь эффектов не является нашей целью. Здесь мы ограничимся рассмотрением только тех ситуаций, которые с помощью наиболее простых средств позволяют показать главные особенности процесса преломления и отражения упругих волн. Рассмотренные нами особенности взаимодействия

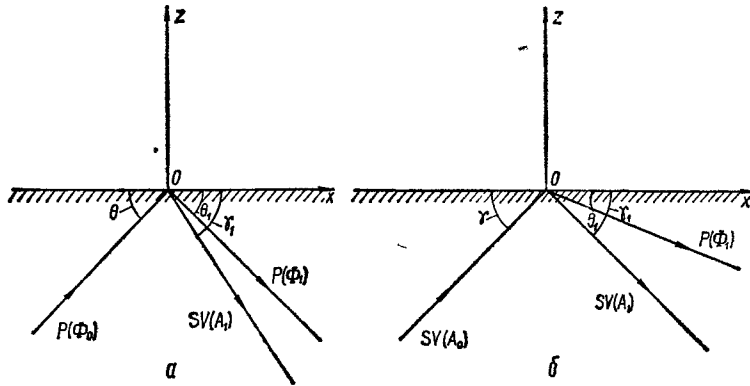


Рис. 9.

упругой волны с границей в значительной мере определяют исключительно сложную картину волновых полей в случае тел конечных размеров.

§ 1. ОТРАЖЕНИЕ ОТ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Важный частный случай общей проблемы составляет задача об отражении от свободной границы полупространства продольных и сдвиговых плоских двумерных волн. В этом случае выкладки достаточно просты и за счет наличия явных выражений для коэффициентов отражения достигается большая наглядность в оценке влияния разных факторов. Кроме того, полученные здесь соотношения позволят более глубоко осветить структуру дисперсионных соотношений в случае плоского волновода (см. гл. 4).

В процессе отражения сдвиговых и продольных волн от свободной границы $z = 0$ упругого полупространства существуют определенные различия, которые мы рассмотрим отдельно. Схематическое изображение ситуаций показано на рис. 9. Случай, показанный на рис. 9, а, соответствует падению продольной Р-волны, на рис. 9, б — падению сдвиговой SV-волны. Такое построение рис. 9 в значительной мере предполагает заданную направленность волнового процесса, которая необходима для полной конкретизации задачи (глава 1, § 5).

Пусть на свободную границу $z = 0$ упругого полупространства падает плоская волна расширения (Р-волна), которая описывается потенциалом (временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опущен)

$$\varphi = \Phi_0 \exp[ik_P(x \cos \theta + z \sin \theta)], \quad (1.1)$$

где $k_P = \frac{\omega}{c_P}$ — волновое число продольных волн.

В соответствии с возможностью существования двух типов волн предполагаем, что отраженные волны представляют собой сумму

продольных и поперечных волн, которые описываются потенциалами φ и a . Вследствие двумерности задачи из трех компонентов вектора a отличной от нуля будет только компонента a_y , т. е. компонента, перпендикулярная к плоскости zOx (см. рис. 9). В соответствии с принятыми на рис. 9, а обозначениями можно записать

$$\varphi = \Phi_1 \exp[ik_P(x \cos \theta_1 - z \sin \theta_1)], \quad (1.2)$$

$$a_y = A_1 \exp[ik_S(x \cos \gamma_1 - z \sin \gamma_1)],$$

где $k_S = \frac{\omega}{c_S}$ — волновое число сдвиговых волн. Волновые потенциалы удовлетворяют двумерным уравнениям Гельмгольца

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_P^2 \varphi &= 0, \\ \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} + k_S^2 a_y &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Соответствующие (1.1) и (1.2) компоненты вектора смещений определяются равенствами

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial a_y}{\partial x}. \quad (1.4)$$

Используя соотношения закона Гука, записываем следующие выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\nu k_P^2}{1-2\nu} \varphi + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z}, \\ \frac{1}{2G} \sigma_z &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\nu k_P^2}{1-2\nu} \varphi - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z}, \\ \frac{1}{2G} \tau_{xz} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Граничные условия для свободного полупространства имеют вид

$$\frac{1}{2G} \sigma_z = \frac{1}{2G} \tau_{zx} = 0, \quad z = 0. \quad (1.6)$$

Эти условия позволяют определить два коэффициента отраженных волн Φ_1 и A_1 через известную величину Φ_0 . Подставляя выражения (1.1), (1.2) в (1.5) и используя граничные условия (1.6), приходим к системе функциональных уравнений, содержащих координату x . Чтобы превратить их в алгебраические уравнения относительно произвольных постоянных Φ_1 и A_1 , необходимо уравнивать показатели экспонент во всех выражениях, что приводит к следующим связям между углами отражения:

$$k_P \cos \theta = k_P \cos \theta_1 = k_S \cos \gamma_1 = q. \quad (1.7)$$

Эти соотношения являются аналогами известных в акустике и оптике соотношений закона Снеллиуса [12, 60]. Из них, очевидно, следует, что $\theta_1 = \theta$, т. е. угол падения равен углу отражения для

продольных волн. Угол отражения сдвиговых волн определяется соотношением

$$\cos \gamma_1 = \frac{c_s}{c_p} \cos \theta. \quad (1.8)$$

Величины Φ_1 и A_1 в (1.2) имеют значения

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_0 \frac{4s_1 r_1 - (s_1^2 - 1)^2}{4s_1 r_1 + (s_1^2 - 1)^2} \equiv \Gamma_{pp} \Phi_0, \\ A_1 &= \Phi_0 \frac{4r_1 (1 - s_1^2)}{4s_1 r_1 + (s_1^2 - 1)^2} \equiv \Gamma_{sp} \Phi_0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $r_1 = \tan \theta_1$; $s_1 = \tan \gamma_1$.

Как следует из (1.8), угол γ_1 всегда больше угла θ , и в связи с этим при любом θ величины A_1 и Φ_1 вещественны.

Анализ соотношений (1.7) позволяет установить некоторые характерные черты процесса отражения. Прежде всего ясно, что отношение амплитуд падающей и отраженных волн определяется только углом θ , коэффициентом Пуассона ν материала ($c_p/c_s = \sqrt{2 \frac{1-\nu}{1-2\nu}}$) и не зависит от длины волны $\lambda = \frac{2\pi}{q}$.

В случае $\theta = 0^\circ$ (скользящее падение) формальный переход к пределу в (1.7) дает $\Phi_1 = -\Phi_0$; $A_1 = 0$. Если найденные значения постоянных подставить в выражения (1.1), (1.2), то убедимся, что движение отсутствует. Это обстоятельство следует считать указанием на неприменимость соотношений (1.7) для случая скользящего падения, в связи с чем предпринимались попытки построить для данного случая решение, свободное от указанного недостатка [181]. Подход авторов работы [181] представляется довольно искусственным, поскольку основывается на предельном переходе, в основе которого лежит предположение о неограниченном росте амплитуды падающей волны при стремлении угла падения к нулю. Тогда для отраженных волн получаются решения, которые имеют неограниченно возрастающую амплитуду при $z \rightarrow -\infty$. Однако построенное решение позволяет выполнить нулевые граничные условия на свободной поверхности полупространства.

При оценке отмеченного парадокса следует, конечно, иметь в виду, что изложенная задача об отражении плоских гармонических волн не является, по сути, изложением решения какой-либо граничной задачи, поскольку вопрос об источнике плоских волн не рассматривается. Если считать, что плоские волны являются достаточно хорошей аппроксимацией возмущений от некоторого конечного источника на большом расстоянии от него, то трудности с трактовкой скользящего падения (источник на границе) становятся понятными.

Чтобы проиллюстрировать общую тенденцию в изменении величин Φ_1 и A_1 , на рис. 10 представлена зависимость $\frac{\Phi_1}{\Phi_0}$ от угла

падения для различных значений коэффициента Пуассона. Главной характерной чертой процесса отражения от свободной границы падающей Р-волны является наличие в общем случае двух (Р и SV) отраженных волн. В бесконечном пространстве Р- и SV-волны могут распространяться независимо. Однако наличие свободной границы приводит к связи двух типов волновых движений через посредство граничных условий. Именно эта связь обуславливает те существенные (по сравнению с акустикой и электродинамикой) трудности, которые возникают при анализе волновых процессов в ограниченных упругих телах.

Из рис. 10 видно, что при некоторых значениях ν и углах падения θ амплитуда отраженной Р-волны равна нулю, т. е. падающая Р-волна в процессе отражения полностью преобразуется в сдвиговую SV-волну. Это явление называется превращением мод. Из выражения для Φ_1 видно, что оно наблюдается при

$$4s_1 r_1 - (s_1^2 - 1)^2 = 0. \quad (1.10)$$

Из анализа этого соотношения следует, что существует критическое значение $\nu^* = 0,2637$. Если в материале $\nu < \nu^*$, то уравнение (1.10) имеет два вещественных корня для угла падения в диапазоне $(0, 90^\circ)$. Для $\nu > \nu^*$ таких корней нет, т. е. при любых углах падения амплитуда отраженной Р-волны не равна нулю.

Рассмотренный случай отражения Р-волны от границы полупространства характеризуется также тем, что изменение угла падения не приводит к качественному изменению в волновой картине, т. е. мы всегда имеем отражение в виде распространяющихся волн. Иными словами, представленная на рис. 9, а лучевая картина процесса отражения продольной волны описывает и все характерные черты физики явления, за исключением случая скользящего падения.

В случае падения на свободную границу полупространства сдвиговой SV-волны ситуация существенно меняется. Движение частиц полупространства описывается скалярным потенциалом ϕ и компонентой a_y векторного потенциала, т. е.

$$\phi = \Phi_1 \exp [ik_P (x \cos \theta_1 - z \sin \theta_1)], \quad (1.11)$$

$$a_y = A_0 \exp [iks (x \cos \gamma + z \sin \gamma)] + A_1 \exp [iks (x \cos \gamma_1 - z \sin \gamma_1)].$$

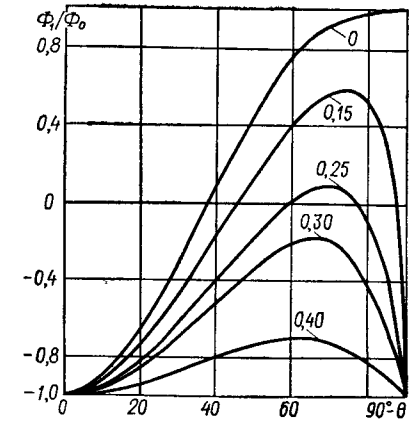


Рис. 10.

Удовлетворение граничных условий (1.6) в этом случае приводит к соотношениям

$$\gamma_1 = \gamma, \quad \cos \theta_1 = \frac{c_P}{c_S} \cos \gamma \quad (1.12)$$

и следующей связи между амплитудами падающей и отраженных волн:

$$\Phi_1 = A_0 \frac{4s_1(s_1^2 - 1)}{4s_1r_1 + (s_1^2 - 1)^2} \equiv \Gamma_{ps}A_0, \quad (1.13)$$

$$A_1 = A_0 \frac{4s_1r_1 - (s_1^2 - 1)^2}{4s_1r_1 + (s_1^2 - 1)^2} \equiv \Gamma_{ss}A_0,$$

где $r_1 = \tan \theta_1$; $s_1 = \tan \gamma_1$.

На рис. 9, б представлена лучевая картина процесса отражения сдвиговых волн от границы полупространства. Подчеркнем, что такое изображение процесса имеет смысл лишь до тех пор, пока при изменении угла γ угол θ_1 остается вещественным. При дальнейшем уменьшении угла γ процесс отражения сдвиговых волн уже невозможно истолковать в рамках лучевых представлений. Количественный анализ процесса отражения можно выполнить на основе выражений (1.13), которые, вообще говоря, применимы при любом значении γ . Однако при γ меньших γ' , где γ' определяется из равенства $\cos \gamma' = \frac{c_S}{c_P}$, величина r_1 становится чисто мнимой и вычисляется по формуле

$$r_1 = i \sqrt{1 - \frac{c_S^2}{c_P^2} \frac{1}{\cos^2 \gamma}}. \quad (1.14)$$

Исходя из этой формулы можно вычислить величины A_1 и Φ_1 в (1.13) при любых углах падения γ . Естественно, что для закритических углов падения физически оправданное решение получается после умножения выражений (1.11) на $\exp(-i\omega t)$ и выделения вещественной или мнимой части.

Представление о характере изменения величин $\frac{A_1}{A_0}$ (штриховая линия) и $\frac{\Phi_1}{A_0}$ (сплошная линия) можно получить на основе приведенных на рис. 11 кривых. Поведение этих кривых зависит от угла падения γ . При построении принималось $\nu = 0,15$ ($\frac{c_P}{c_S} = 1,56$).

Как и в ранее рассмотренном случае, здесь имеем полное преобразование падающей сдвиговой волны в продольную при определенных углах падения. На рис. 11 эти углы определяются по нулевым значениям величины $\frac{A_1}{A_0}$.

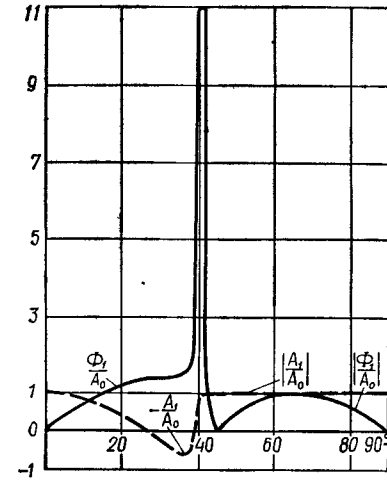


Рис. 11.

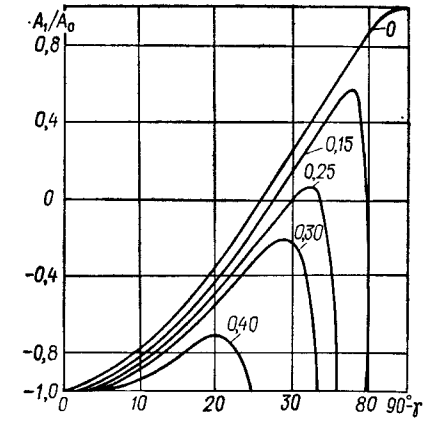


Рис. 12.

Интересной особенностью коэффициента отражения продольной волны является резкий рост его величины в окрестности критического угла падения. Максимальным он будет при значении угла γ , близком к углу полного превращения мод.

Проявление полного превращения мод, как и в случае падения продольной волны, существенно зависит от коэффициента Пуассона. В связи с этим на рис. 12 приведены данные об изменении величины коэффициента отражения сдвиговых волн от угла падения для различных значений коэффициента Пуассона. Вычисления выполнены лишь для углов, меньших критических, и поэтому рис. 12 характеризует также зависимость критического угла от ν .

Как и на рис. 10, здесь достаточно четко обнаруживается отсутствие полного превращения мод для значений ν , больших некоторого ν^* . Величина ν^* устанавливается при анализе того же уравнения (1.10) и, следовательно, равна 0,2637. Однако углы падения, при которых происходит полное превращение сдвиговых или продольных волн, будут, конечно, различными.

Явление полного превращения мод при отражении от свободной поверхности наблюдалось экспериментально [100, 187]. Оно используется в работе специального прибора — ультразвукового гониометра [253].

Кроме случая полного превращения одного типа движения в другой, в процессе отражения от свободной границы не меньший интерес представляет случай полного сохранения типа движения. Как можно установить из формул (1.9) и (1.13), для коэффициентов отражения единственным (за исключением нормального падения) таким случаем является случай $s_1 = 1$. В случае падения Р-волны величина s_1 не может быть равна единице. При падении SV-волны это равенство имеет место при $\gamma = 45^\circ$.

Такое значение угла падения является закритическим, т. е. лежит в той области значений γ , где при отражении SV-волны возбуждается неоднородная продольная волна. Для $\gamma = 45^\circ$ имеем, однако, $A_1 = A_0$ и $\Phi_1 = 0$, т. е. продольная волна не возбуждается. Этот случай представляет большой интерес в связи с анализом специальных форм колебаний в упругих телах конечных размеров.

§ 2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ОТРАЖЕНИЯ ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрение динамических процессов в упругих телах, в частности процесса отражения от свободной поверхности, было бы неполным без анализа его энергетических характеристик. Предметом анализа являются количественные соотношения, характеризующие распределение потока энергии в падающей волне между отраженными волнами. В рассматриваемом здесь двумерном случае гармонических волн средние за период компоненты вектора плотности потока мощности определяются соотношениями (5.7) гл. 1:

$$\bar{P}_x = -\frac{i\omega}{4} (\sigma_x \dot{u}_x - \sigma_x \dot{u}_x + \tau_{xz} \dot{u}_z - \tau_{xz} \dot{u}_z), \quad (2.1)$$

$$\bar{P}_z = -\frac{i\omega}{4} (\sigma_z \dot{u}_z - \sigma_z \dot{u}_z + \tau_{zx} \dot{u}_x - \tau_{zx} \dot{u}_x).$$

Довольно громоздкие вычисления для обоих типов падающих волн проводятся по одинаковой схеме — согласно соотношениям (1.4) и (1.5) находятся компоненты вектора смещений и тензора напряжений, а затем по формулам (2.1) и искомые величины $\bar{P}_x$ и $\bar{P}_z$.

Рассмотрим вначале случай падения на свободную поверхность полупространства Р-волны. Выражения для потенциалов ϕ и a_y задаются формулами (1.1) и (1.2). Учитывая вещественность величин r_1 , s_1 , Φ_0 , Φ_1 , A_1 для любых углов θ , окончательно получаем

$$\bar{P}_z = \frac{G}{2} \omega q^3 (1 + s_1^2) (\Phi_0^2 r_1 - \Phi_1^2 r_1 - A_1^2 s_1). \quad (2.2)$$

Члены с перекрестными произведениями $\Phi_0 \Phi_1$, $\Phi_0 A_1$, $\Phi_1 A_1$ здесь отсутствуют. Это свидетельствует о том, что для среднего за период потока мощности в направлении нормали к поверхности имеет место суперпозиция средних потоков, переносимых отдельными типами волн. Отметим, что такое положение справедливо и для мгновенных значений $\bar{P}_z$. Если в выражение (2.2) подставить значения Φ_1 и A_1 из (1.9), то находим $\bar{P}_z = 0$. Это равенство в данном случае выражает закон сохранения энергии — приносимая за период к границе энергия падающей волны равна энергии, уносимой отраженными волнами.

Выражение для $\bar{P}_x$ имеет вид

$$\bar{P}_x = \frac{G}{2} \omega q^3 \{ (1 + s_1^2) (\Phi_0^2 + \Phi_1^2 + A_1^2) + 2\Phi_0 \Phi_1 (1 + s_1^2 - 4r_1^2) \times$$

$$\times \cos 2qr_1 z - \Phi_0 A_1 [s_1 (3 + s_1^2 - 2r_1^2) + r_1 (3 - s_1^2)] \cos q (s_1 + r_1) z - \\ - \Phi_1 A_1 [s_1 (3 + s_1^2 - 2r_1^2) - r_1 (3 - s_1^2)] \cos q (s_1 - r_1) z \}. \quad (2.3)$$

Видно, что принцип суперпозиции при рассмотрении потока мощности вдоль поверхности полупространства не применим. Для рассматриваемой задачи наблюдается направленный поток мощности вдоль свободной поверхности, причем плотность потока зависит от величины z .

В случае падения SV-волны, описываемом соотношениями (1.11) и (1.13), необходимо учесть, что при $\gamma < \gamma'$ величины r_1 , Φ_1 , A_1 становятся комплексными. Окончательно выражение для $\bar{P}_z$ имеет вид

$$\bar{P}_z = \frac{G}{2} \omega q^3 (1 + s_1^2) \left[A_0 s_1 - |A_1|^2 s_1 - \right. \\ \left. - |\Phi_1|^2 \frac{r_1 + r_1^*}{2} \exp [iq(r_1^* - r_1)z] \right]. \quad (2.4)$$

Для докритического падения ($\gamma > \gamma'$) число $r_1^* = r_1$ вещественное, поэтому

$$\bar{P}_z = \frac{G}{2} \omega q^3 (1 + s_1^2) (A_0^2 s_1 - A_1^2 s_1 - \Phi_1^2 r_1). \quad (2.5)$$

При закритическом падении ($\gamma < \gamma'$) из (1.13) находим, что $r_1^* = -r_1$ и, следовательно,

$$\bar{P}_z = \frac{G}{2} \omega q^3 (1 + s_1^2) (A_0^2 - |A_1|^2) s_1. \quad (2.6)$$

Подстановка в формулы (2.5) и (2.6) величин Φ_1 и A_1 из (1.12) приводит к тождеству $\bar{P}_z = 0$, также выражающему закон сохранения энергии.

Общим для обоих случаев падения Р- и SV-волн является справедливость принципа суперпозиции средних потоков мощности $\bar{P}_z$, уносимых отдельными типами движений. Именно это делает физически обоснованным раздельное вычисление данной величины в каждой волне с целью наглядного изображения энергетических соотношений. Такие наглядные представления дают рис. 13 и 14, где показана относительная величина энергии, уносимой отраженной Р-волной в случае падения Р-волны (рис. 13, а) и SV-волны (рис. 14, а) и SV-волной для падения Р-волны (рис. 13, б) и SV-волны (рис. 14, б). Кривые 1—3 на рис. 13 и 14 соответствуют значениям коэффициента Пуассона ν , равным 0,15; 0,25 и 0,40.

Как видно из рис. 13 и 14, распределение энергии между отраженными волнами обнаруживает сильную зависимость его как от угла падения, так и от коэффициента Пуассона. В целом сравнение данных на рис. 13 и 14 свидетельствует об отсутствии качественных различий в процессах отражения продольных и поперечных волн при докритических углах падения.

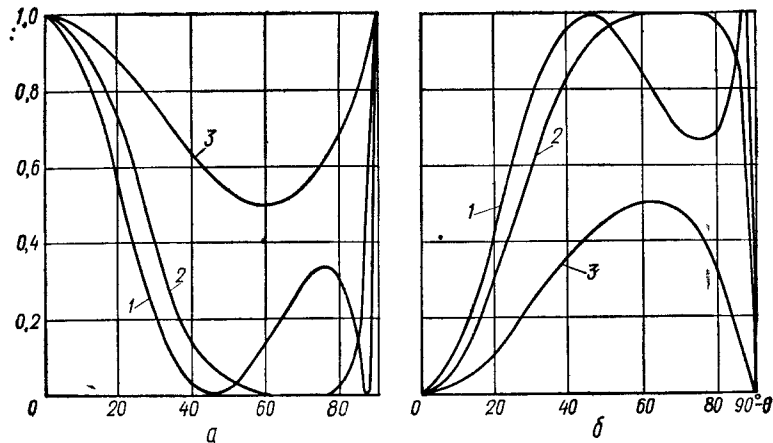


Рис. 13.

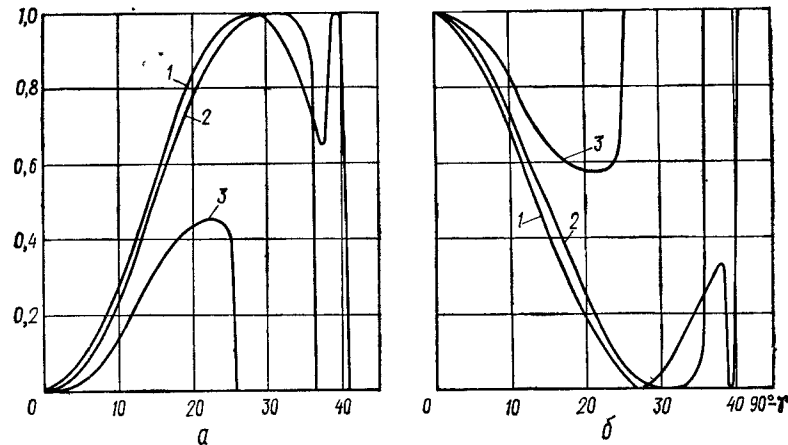


Рис. 14.

Приведенные кривые интересны также с точки зрения энергетического анализа отражения в условиях полного преобразования мод. Как для Р-, так и для SV-волн при $\nu < \nu^*$ имеем два значения угла падения (см. рис. 10, 12), при которых наблюдается полное преобразование мод. Для случаев относительно близких значений этих углов (ν близко к ν^*), как видно из кривых 2 на рис. 13 и 14 ($\nu = 0,25$), существует достаточно широкий диапазон углов падения, для которых энергия, приносимая падающей волной одного типа, практически полностью уносится волной другого типа. Для малых значений ν наблюдается сужение диапазонов углов, для которых полное превращение мод энергетически четко выражено (на рис. 13, 14 кривые 1). При этом для меньшего по величине угла падения интервал углов, в которых заметно явление преобразования мод, чрезвычайно узок.

Из результатов предыдущего параграфа можно заключить, что отражение упругих волн от свободной границы является довольно сложным процессом, включающим превращение одного типа движения в другой. Для сдвиговых волн в определенном диапазоне углов падения наблюдается возбуждение локализованных вблизи границы движений в виде нераспространяющихся в глубь полупространства неоднородных волн.

Важный вопрос о возможности существования локализованных вблизи поверхности гармонических волн впервые был поставлен и решен Рэлеем в 1885 г. [256]. Он установил, что вдоль плоской свободной границы полубесконечного упругого тела может распространяться гармоническая волна. Амплитуды компонент вектора перемещений в этой волне экспоненциально убывают с увеличением расстояния в глубь полупространства. Такая волна называется поверхностной волной Рэлея. Скорость распространения поверхностной волны оказалась несколько ниже скорости сдвиговых волн.

После выхода работы Рэлея теория упругих поверхностных волн была значительно обобщена применительно как к анизотропной упругой среде, так и к пьезоэлектрической среде, в которой механическое движение сопровождается электрическим полем внутри и вне среды. Взаимодействие электромагнитных и механических полей обуславливает существование нового типа сопряженных поверхностных волн, получивших название волн Гуляева — Блюстейна [52, 164].

Все расширяющиеся возможности практического использования явления локализации волновых движений вблизи поверхности упругого тела обуславливают непрерывающийся поток публикаций по этому вопросу. Примечательно здесь то, что накопленные к настоящему времени данные хорошо систематизированы в виде обширных обзоров, посвященных различным аспектам теории и применения поверхностных волн.

Подробная классификация типов поверхностных волн в упругом теле, а также вблизи границы раздела тел с разными свойствами содержится в работах [118, 246, 283]. Анализ поверхностных волн в анизотропных средах проведен в работе [139]. Практические потребности сделали актуальным вопрос о свойствах поверхностных волн в полупространстве, покрытом тонким упругим слоем. Выполненные в связи с этим исследования обобщены в обзоре [176]. Значительное внимание поверхностным волнам уделяется также в сейсмологических исследованиях [240].

Практическое использование поверхностных волн ставит задачу их эффективного возбуждения и обнаружения [20, 55]. В последнее время поверхностные волны широко используются при создании устройств обработки сигналов в системах связи [62, 111, 114, 132]. Важно, что создание такого типа устройств основано не только на возможности существования поверхностных волн, но и на тщательном анализе количественных характеристик процесса их распростра-

нения в каждом конкретном случае. Это обстоятельство и объясняет большое число публикаций, посвященных решению конкретных задач [111, 132].

На фоне чрезвычайно широкого практического использования поверхностных волн определенный исторический интерес представляет следующее предсказание Рэлея: «...не исключена возможность, что рассматриваемые здесь поверхностные волны играют важную роль при землетрясениях и при ударе упругих тел» [256, с. 10].

К построению решений уравнений движения, описывающих поверхностную волну Рэлея, можно подходить различными путями. Можно, следуя работе [256], искать некоторые решения волновых уравнений (1.3), которые описывают бегущую вдоль свободной поверхности волну с убывающей вглубь амплитудой. Такой подход описывается, например, в работах [68, 104].

Еще один путь построения таких решений [90, 157] связан с использованием общих решений задачи об отражении (см. § 1 данной главы) и поиском на основе их анализа определенной резонансной ситуации. Такая ситуация характеризуется наличием неоднородных «отраженных» продольных и сдвиговых волн при отсутствии падающей SV волны. Разумеется, это невозможно при действительном угле падения γ . Формальная возможность существования таких волн определяется обращением в нуль величины $4s_1r_1 + (s_1^2 - 1)^2$ при некоторых чисто мнимых углах $\theta_1 = i\tilde{\theta}$ и $\gamma_1 = i\tilde{\gamma}$. При этом

$$q = k_P \operatorname{ch} \tilde{\theta} = k_S \operatorname{ch} \tilde{\gamma} \quad (3.1)$$

и согласно (1.11)

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi_1 \exp(k_P z \operatorname{sh} \tilde{\theta}) \exp[i(qx - \omega t)], \\ a_y &= A_1 \exp(k_S z \operatorname{sh} \tilde{\gamma}) \exp[i(qx - \omega t)]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Вводя в рассмотрение фазовую скорость c бегущих вдоль оси Ox волн, по формуле

$$c = \frac{\omega}{q} \quad (3.3)$$

находим

$$\begin{aligned} r_1 &= i \operatorname{th} \tilde{\theta} = i \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_P}\right)^2}, \quad s_1 = i \operatorname{th} \tilde{\gamma} = i \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_S}\right)^2}, \\ k_P \operatorname{sh} \tilde{\theta} &= q \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_P}\right)^2}, \quad k_S \operatorname{sh} \tilde{\gamma} = q \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_S}\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из последних соотношений следует, что выражения (3.2) будут характеризовать бегущую вдоль оси Ox волну с убывающей амплитудой лишь при $c < c_S$.

Из изложенного выше следует возможность описания волновыми потенциалами φ и a_y неоднородных по z волн, оставляющих в сумме (при условии, что $\Phi_1/A_1 = 4s_1(s_1^2 - 1)/[4s_1r_1 - (s_1^2 - 1)^2]$) свободной от напряжений границу полупространства. Это решение приобретает физический смысл, если удастся доказать, что выражение $4s_1r_1 + (s_1^2 - 1)^2$ обращается в нуль для некоторого $c = c_R$, иными словами, что функция

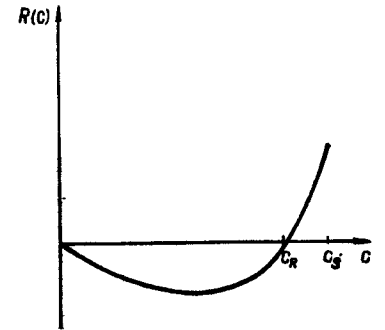


Рис. 15.

$$R(c) \equiv \left[2 - \left(\frac{c}{c_S}\right)^2\right]^2 - 4 \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_P}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_S}\right)^2} \quad (3.5)$$

обращается в нуль при $c = c_R < c_S$.

На рис. 15 схематически изображен график функции $R(c)$ в интервале $(0, c_S)$. Видно, что существует единственный корень $c = c_R$, соответствующий фазовой скорости волны Рэлея. Строгое доказательство существования и единственности на указанном интервале корня содержится в работах [5, 116].

Возводя функцию (3.5) в квадрат и обозначая $\eta = \frac{c^2}{c_S^2}$, $b = \frac{c_S^2}{c_P^2} < 1$, получаем следующее уравнение для определения η :

$$\eta[\eta^3 - 8\eta^2 + (24 - 16b)\eta - 16(1 - b)] = 0. \quad (3.6)$$

Отметим, что величина c_R не зависит от частоты ω и длины волны $\lambda = \frac{2\pi}{q}$, и, следовательно, для рэлеевских волн, распространяющихся вдоль плоской границы, дисперсия отсутствует.

Известно [182], что уравнение (3.6) при $v < v^* = 0,2637$ кроме тривиального корня $\eta = 0$ имеет три действительных корня, а при $v > v^*$ — один действительный и два комплексно сопряженных.

Вообще говоря, каждому корню уравнения (3.6) соответствует пара выражений (3.2) для потенциалов продольных и сдвиговых волн, которые удовлетворяют волновым уравнениям и в сумме дают такие выражения для перемещений, которые оставляют границу свободной от напряжений.

Для вещественных, отличных от рэлеевского, корней уравнения (3.6) решения в виде (3.2), по сути, рассматривались в § 1 данной главы. Они представляют собой частные случаи общих решений (1.2), и (1.10) задач об отражении продольных или сдвиговых волн в случаях проявления полного превращения мод. При этом волновое поле всегда представляется только двумя потенциалами — одним для падающей и одним для отраженной волн. Поскольку такие решения представляют распространяющиеся на бесконечность волны, то они

не удовлетворяют требованиям, предъявляемым к поверхностным волнам.

В случае комплексных корней уравнения (3.6) характер волнового движения, определяемого решениями (3.2), более сложен. Даже если ограничиться значениями корней с величиной $\text{Im } c < 0$ (экспоненциально убывающие по времени выражения в (3.2)), то и тогда вещественные части $k_p \text{sh } \tilde{\theta}$ и $k_s \text{sh } \tilde{\gamma}$ будут иметь разные знаки [189]. Следовательно, соответствующие (3.2) выражения для смещений являются суперпозицией экспоненциально убывающих и возрастающих с увеличением z слагаемых, что также противоречит предположениям о локализации движения вблизи границы полупространства.

Рассмотрение поверхностных волн для вязко-упругого полупространства приводит к получению всех комплексных корней уравнения (3.6). Однако лишь один из них можно связать с физически реализуемой ситуацией [169, 170].

Из проведенного анализа следует, что, несмотря на существование нескольких корней уравнения (3.6) и соответственно нескольких решений в форме (3.2), обеспечивающих нулевые значения напряжений на границе, решение в виде поверхностной волны единственное и соответствует вещественному корню $c_R < c_s$.

С ростом коэффициента Пуассона ν от $\nu = 0$ ($c_R/c_s = 0,874$) до $\nu = 0,5$ ($c_R/c_s = 0,955$) значение c_R/c_s меняется почти по линейному закону. Для приближенного вычисления c_R/c_s удобно пользоваться аппроксимацией [20]

$$\frac{c_R}{c_s} = \frac{0,87 + 1,12\nu}{1 + \nu}. \quad (3.7)$$

Сравнение значений, определяемых по формуле (3.7), с точным решением уравнения $R(c) = 0$ показывает, что погрешность аппроксимации не превышает 0,5%.

Обращаясь к анализу кинематики движений в поверхностной волне Рэлея, прежде всего приведем выражения для смещений частиц в волне:

$$u_x = D \left[\left(\frac{c_R^2}{c_s^2} - 2 \right) \exp(q l_1 z) + 2 l_1 l_2 \exp(q l_2 z) \right] \cos(qx - \omega t), \quad (3.8)$$

$$u_z = D l_1 \left[\left(\frac{c_R^2}{c_s^2} - 2 \right) \exp(q l_1 z) + 2 \exp(q l_2 z) \right] \sin(qx - \omega t),$$

где
$$l_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{c_R}{c_p} \right)^2}; \quad l_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{c_R}{c_s} \right)^2}.$$

Естественно, что смещения определены с точностью до произвольной постоянной D .

Выражения (3.8) описывают волны, экспоненциально убывающие с глубиной. Вид показателей экспонент в (3.8) позволяет за-

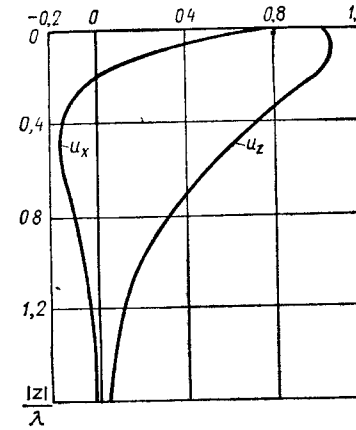


Рис. 16.

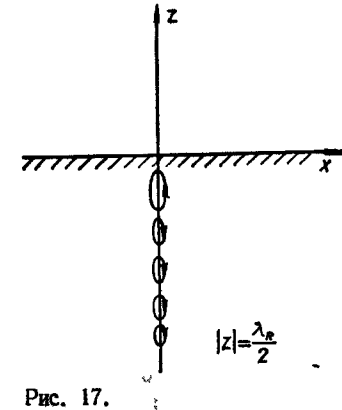


Рис. 17.

ключить, что короткие волны (q — велико) проникают на меньшую глубину, чем длинные. Это обстоятельство сближает явление распространения поверхностных волн с известным явлением скин-эффекта в электродинамике [125].

Из соотношения (3.8) видно, что частицы в волне Рэлея движутся по эллиптическим орбитам. Для величины $\nu = 0,25$ отношение меньшей полуоси эллипса (u_x) к большей (u_z) при $z = 0$ приблизительно составляет 0,667. Изменение коэффициента Пуассона ν от 0 до 0,5 приводит к изменению этого отношения от 0,634 до 0,841.

На рис. 16 представлены величины вертикальных и горизонтальных смещений, отнесенные к значению u_z на поверхности, $\nu = 0,25$. Вертикальное смещение достигает максимума на расстоянии $0,08\lambda$ от поверхности, а затем плавно убывает, не меняя знака. Горизонтальное смещение становится равным нулю при $z = -0,19\lambda$, а затем изменяет направление.

На рис. 17 представлены эллиптические траектории движения частиц. Для $|z| < 0,19\lambda$ движение частиц происходит против часовой стрелки, а при $|z| > 0,19\lambda$ — по часовой стрелке. Такая кинематика частиц в поверхностной упругой волне существенно отличается от гравитационных поверхностных волн в несжимаемой жидкости [256].

Энергетический анализ волны Рэлея показывает, что средняя за период нормальная к поверхности составляющая потока мощности $\bar{P}_z$ тождественно равна нулю. Средняя за период величина потока мощности вдоль границы $\bar{P}_x$ положительна и задается выражением

$$\bar{P}_x = D^2 G \omega q \{ a \exp(2q l_1 z) + b \exp(2q l_2 z) - c \exp[q(l_1 + l_2)z] \}, \quad (3.9)$$

где a, b, c — числовые коэффициенты. Для $\nu = 0,25$ $a = 1,47$; $b = 2,65$; $c = 3,44$. Отношение среднего потока мощности $\bar{P}_x$ для

частиц с вращением против часовой стрелки ($-0,19 \lambda \leq z \leq 0$) к общему потоку мощности в полупространстве составляет 38%. Практически вся энергия, переносимая поверхностной волной, сосредоточена в слое толщиной λ .

§ 4. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ SH-ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Некоторые новые данные о роли границы в волновых процессах в упругих телах раскрываются при анализе отражения и преломления плоских волн на поверхности раздела двух полупространств из разных материалов. Анализ таких процессов естественно начать с простейшего случая SH-волн.

Рассмотрим два упругих полупространства с общей границей, совпадающей с плоскостью $z = 0$ (рис. 18). Волновое движение считаем плоским, т. е. все его характеристики не зависят от координаты y .

Полупространства характеризуются упругими постоянными — модулями сдвига G_1 и G_2 , коэффициентами Пуассона ν_1 и ν_2 и плотностями ρ_1 и ρ_2 . Скорости продольных и поперечных волн в материалах обозначим соответственно c_{P1} , c_{P2} , c_{S1} , c_{S2} .

Для полноты постановки задачи необходимо указать математическое описание физических свойств взаимодействия полупространств на границе $z = 0$. Наиболее простым из возможных типов взаимодействия является такое, при котором соблюдается равенство кинематических и силовых характеристик по направлению нормали к поверхности раздела и допускается возможность проскальзывания вдоль самой поверхности. Эти условия можно записать в виде следующих равенств:

$$\begin{aligned} u_z^{(1)} &= u_z^{(2)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \\ \tau_{zx}^{(1)} &= \tau_{zx}^{(2)} = \tau_{zy}^{(1)} = \tau_{zy}^{(2)} = 0, \quad z = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В случае, который можно характеризовать как полное (жесткое) скрепление полупространств, система условий сопряжения на границе раздела имеет вид

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &= u_x^{(2)}, \quad u_y^{(1)} = u_y^{(2)}, \quad u_z^{(1)} = u_z^{(2)}, \\ \tau_{zx}^{(1)} &= \tau_{zx}^{(2)}, \quad \tau_{zy}^{(1)} = \tau_{zy}^{(2)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad z = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Первое условие характеризует отсутствие разрывов в среде, а второе налагается третьим законом Ньютона.

Падающая SH-волна задается следующим выражением единственной отличной от нуля компонентой вектора смещений (временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен):

$$u_y = U_0 \exp[ik_{S1}(x \cos \gamma + z \sin \gamma)], \quad k_{S1} = \frac{\omega}{c_{S1}}, \quad (4.3)$$

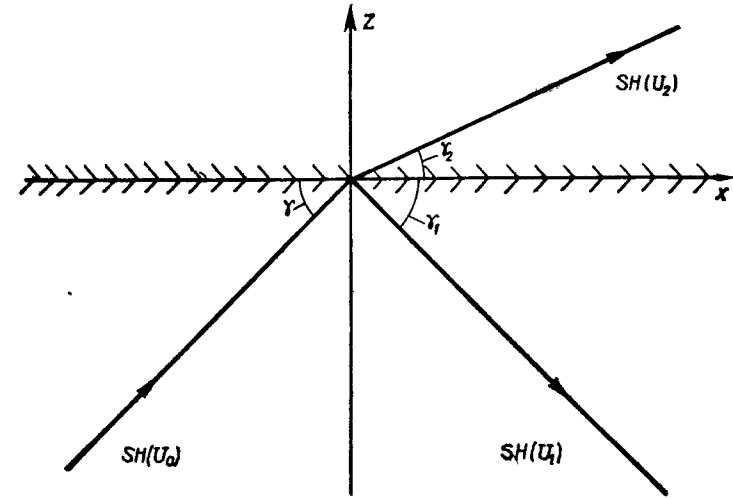


Рис. 18.

удовлетворяющим уравнению движения Ламе

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \frac{G_1}{\rho_1} \omega^2 u_y = 0. \quad (4.4)$$

Единственной отличной от нуля компонентой вектора усилий для смещений (4.3) на поверхности $z = 0$ является касательная компонента τ_{zy} . В связи с этим при гладком контакте полупространств движение, вызванное SH-волной в первой среде, не может быть передано во вторую — падающая волна полностью отразится от границы раздела. Выражение для смещений в отраженной волне имеет вид

$$u_y^{(1)} = U_0 \exp[ik_{S1}(x \cos \gamma - z \sin \gamma)]. \quad (4.5)$$

В случае граничных условий (4.2), т. е. жестко скрепленных сред, отражение и преломление SH волн происходит без генерации других типов волн, и решение является довольно простым. Перемещения в отраженной и преломленной волнах можно записать в виде

$$u_y^{(1)} = U_1 \exp[ik_{S1}(x \cos \gamma_1 - z \sin \gamma_1)], \quad (4.6)$$

$$u_y^{(2)} = U_2 \exp[ik_{S2}(x \cos \gamma_2 + z \sin \gamma_2)].$$

Граничные условия (4.2) приводят к следующим соотношениям:

$$U_0 \exp(ik_{S1} x \cos \gamma) + U_1 \exp(ik_{S1} x \cos \gamma_1) = U_2 \exp(ik_{S2} x \cos \gamma_2), \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} G_1 [U_0 k_{S1} \sin \gamma \exp(ik_{S1} x \cos \gamma) - U_1 k_{S1} \sin \gamma_1 \exp(ik_{S1} x \cos \gamma_1)] = \\ = G_2 U_2 k_{S2} \sin \gamma_2 \exp(ik_{S2} x \cos \gamma_2). \end{aligned}$$

Отсюда следует закон Снеллиуса для углов γ_1 и γ_2 отраженной и преломленной волн:

$$k_{S1} \cos \gamma = k_{S1} \cos \gamma_1 = k_{S2} \cos \gamma_2 = q, \quad (4.8)$$

$$\gamma_1 = \gamma, \quad \cos \gamma_2 = \frac{c_{S2}}{c_{S1}} \cos \gamma.$$

С учетом этих равенств выражения для коэффициентов отражения и преломления приобретают вид

$$U_1 = U_0 \frac{s_1 - gs_2}{s_1 + gs_2}, \quad U_2 = U_0 \frac{2s_1}{s_1 + gs_2}, \quad (4.9)$$

где $g = \frac{G_2}{G_1}$; $s_1 = \tan \gamma_1$; $s_2 = \tan \gamma_2$.

Рассматривая важные частные случаи сред с одинаковой плотностью или жесткостью, Грин [185] для амплитуды отраженной волны получил выражения $\frac{\tan(\gamma_1 - \gamma_2)}{\tan(\gamma_1 + \gamma_2)}$ и $\frac{\sin(\gamma_1 - \gamma_2)}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)}$ соответственно. Эти величины совпадают с формулами Френеля для отраженного света для двух возможных случаев поляризации. Такое совпадение послужило стимулом к проведению обширных исследований по изучению возможностей модели упругого эфира при объяснении оптических явлений [122, 149, 180, 284].

Из соотношений (4.8) для определения угла γ_2 следует, что при $\frac{c_{S2}}{c_{S1}} > 1$ возможны такие углы γ , при которых γ_2 становится чисто мнимым. Тогда во втором полупространстве возбуждается неоднородная волна, в которой компонента смещения убывает от границы по экспоненциальному закону. Ниже показано, что процесс отражения в таких случаях можно трактовать как явление полного внутреннего отражения.

Рассматриваемый случай распространения SH-волн в составном пространстве имеет много общего с задачей об отражении и преломлении света в изотропных диэлектриках. Это позволяет переносить накопленные в электромагнитной теории результаты на случай упругих SH-волн. Особенно важна эта аналогия при энергетическом анализе процессов отражения и преломления.

В случае распространения SH-волн компоненты вектора Умова $\mathbf{P}$ вычисляются по формулам

$$P_x = -\dot{u}_y \tau_{xy}, \quad P_z = -\dot{u}_y \tau_{zy}. \quad (4.10)$$

Из выражений (4.5) и (4.6) для компонентов векторов потока мощности в первом и во втором полупространствах получаем следующие значения:

$$P_x^{(1)} = \frac{G_1}{2} q \omega (U_0 \sin \alpha + U_1 \sin \beta)^2, \quad P_x^{(2)} = \frac{G_2}{2} q \omega U_2^2 \sin^2 \varepsilon, \quad (4.11)$$

$$P_z^{(1)} = \frac{G_1}{2} q \omega s_1 (U_0^2 \sin^2 \alpha - U_1^2 \sin^2 \beta), \quad P_z^{(2)} = \frac{G_2}{2} q \omega s_2 U_2^2 \sin^2 \varepsilon,$$

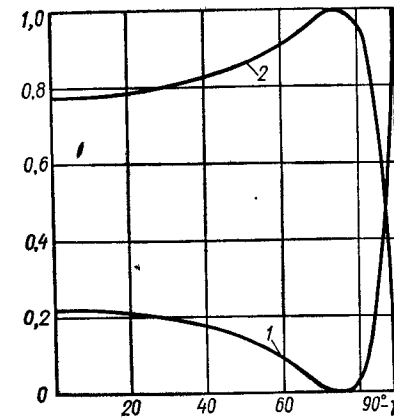


Рис. 19.

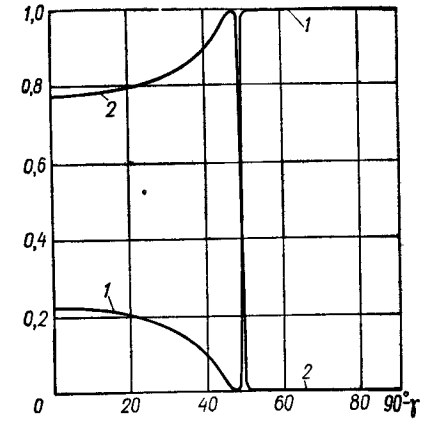


Рис. 20.

где $\alpha = q(x + s_1 z) - \omega t$; $\beta = q(x - s_1 z) - \omega t$; $\varepsilon = q(x + s_2 z) - \omega t$. Эти соотношения справедливы для случая, когда $\cos \gamma < \frac{c_{S1}}{c_{S2}}$ (правильное отражение).

Усредненные по времени значения нормальной к поверхности составляющей вектора потока мощности выражают закон сохранения энергии $\bar{P}_z^{(1)} = \bar{P}_z^{(2)}$. Этот закон можно записать также в виде

$$G_1 s_1 U_0^2 = G_1 s_1 U_1^2 + G_2 s_2 U_2^2 \quad (4.12)$$

и непосредственно проверить, используя (4.9).

На рис. 19 представлено относительное распределение энергии в отраженной (кривая 1) и преломленной (кривая 2) волнах. В качестве исследуемых материалов выбирались иттриево-алюминиевый гранат (YAG) — первое полупространство и плавный кварц — второе полупространство. Их свойства приведены в табл. 2. Видно, что при $\gamma \approx 15^\circ$ имеем случай полного прохождения, и вся энергия уносится только преломленной волной. Это явление имеет определенную аналогию с явлением отражения поляризованной световой волны, падающей на границу раздела под углом Брюстера [12].

Из соотношения (4.11) для компонент вектора $\mathbf{P}^{(2)}$ видно, что во втором полупространстве линии потока мощности совпадают с направлением нормали к фронту преломленной волны, т. е. $P_z^{(2)}/P_x^{(2)} = s_2$. В первом полупространстве за счет суперпозиций движений в падающей и отраженной волнах линии потока мощности образуют довольно причудливую картину. Ее подробный анализ для световых волн содержится в работах Эйхенвальда [150].

При указанном выборе материалов во втором полупространстве всегда существует волна, уносящая энергию от границы. Если же

рассмотреть случай падения на плоскость раздела волны, распространяющейся в плавленом кварце, то уносящая энергию волна в полупространстве YAG существует лишь при определенных значениях γ (рис. 20). На рис. 20 кривая 1 описывает изменение с углом падения среднего потока мощности в отраженной волне, а кривая 2 — в преломленной. Видно, что для рассматриваемой пары материалов неоднородная преломленная волна наблюдается в широком диапазоне углов $\gamma < 40^\circ$. Характерным при этом является всплеск прозрачности при углах γ , близких к критическому.

В случае полного внутреннего отражения ($\cos \gamma > \frac{c_{S1}}{c_{S2}}$) выражения для потоков мощности имеют вид

$$\begin{aligned} P_x^{(1)} &= \frac{G_1 q \omega}{2} [U_0^2 \sin^2 \alpha + |U_1|^2 \sin^2 (\beta + \varphi_1)], \\ P_z^{(1)} &= \frac{1}{2} G_1 q \omega s_1 [U_0^2 \sin^2 \alpha - |U_1|^2 \sin^2 (\beta + \varphi_1)], \\ P_x^{(2)} &= \frac{1}{2} G_2 q \omega |U_2|^2 \exp(-2|s_2|z) \sin^2 \varepsilon_1, \\ P_z^{(2)} &= \frac{1}{4} G_2 q \omega |s_2| |U_2|^2 \exp(-2|s_2|z) \sin 2\varepsilon_1, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $U_1 = |U_1| \exp(i\varphi_1)$; $U_2 = |U_2| \exp(i\varphi_2)$; $\varepsilon_1 = qx - \omega t + \varphi_2$.

Учитывая, что $\bar{P}_z^{(2)} = 0$, закон сохранения энергии записываем в виде $\bar{P}_z^{(1)} = 0$ или

$$U_0^2 = |U_1|^2, \quad (4.14)$$

что проверяется непосредственно.

Ситуация, когда в среднем за период энергия не проникает во второе полупространство, была названа «полным внутренним отражением». Однако мгновенная составляющая потока мощности во второе полупространство отлична от нуля и периодически с периодом $T = \pi/\omega$ изменяет свое направление. В один и тот же момент времени в различных точках границы энергия входит во вторую среду и выходит из нее. Чем дальше от границы, тем менее интенсивны колебания частиц второй среды. Отождествляя термины «луч» и «вектор Умова $\mathbf{P}$ », можно сказать, что в этом случае луч, попадая во вторую среду, изгибается и возвращается в первую. Для оптического случая явление полного внутреннего отражения исследовалось экспериментально в тонких опытах Мандельштама [87] и Вуда [27]. Обзор современного состояния вопроса приведен в работе [215].

В заключение отметим, что предельные случаи $\gamma = 0$ и $\cos \gamma = \frac{c_{S1}}{c_{S2}}$ нельзя полностью рассматривать как частные случаи

приведенных решений. Здесь мы имеем дело с лучами, ограниченными с одной стороны плоскостью $z = 0$ ($s_2 = 0$). Такие случаи должны рассматриваться особо как дифракционные явления [87].

§ 5. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ И СДВИГОВЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ УПРУГИХ СРЕД

Продолжая рассмотрение задачи о взаимодействии плоских упругих волн на границе раздела двух полупространств, перейдем к наиболее сложному в рамках такой постановки случаю — отражению и преломлению плоских продольных (P) и сдвиговых (SV) волн.

Общая формулировка задачи об отражении и преломлении плоских волн на границе раздела двух сред приведена в § 4 данной главы. Здесь мы рассмотрим двумерные волновые движения. Компоненты вектора перемещений в направлении оси Oy тождественно равны нулю, а все величины по-прежнему не зависят от координаты y . При этом условия сопряжения на границе принимают вид

$$\begin{aligned} u_z^{(1)} &= u_z^{(2)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \\ \tau_{zx}^{(1)} &= \tau_{zx}^{(2)} = 0, \quad z = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

для гладкого контакта и

$$\begin{aligned} u_z^{(1)} &= u_z^{(2)}, \quad u_x^{(1)} = u_x^{(2)}, \\ \sigma_z^{(1)} &= \sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{zx}^{(1)} = \tau_{zx}^{(2)}, \quad z = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

для полного сцепления.

Пусть в нижнем полупространстве (рис. 21, а) на границу раздела двух сред падает волна расширения (P-волна), которая описывается потенциалом $\varphi^{(0)} = \Phi_0 \exp[ik_{P1}(x \cos \theta + z \sin \theta)]$.

В соответствии с возможностью существования двух типов волн предполагаем, что отраженное и преломленное волновое движение представляет собой суперпозицию продольных и поперечных волн, которые описываются потенциалами φ и a . Вследствие двумерности задачи из трех компонентов вектора $\mathbf{a}$ отличной от нуля будет только компонента a_y . В соответствии с принятыми на рис. 21, а обозначениями можно записать

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \Phi_1 \exp[ik_{P1}(x \cos \theta_1 - z \sin \theta_1)], \\ a_y^{(1)} &= A_1 \exp[ik_{S1}(x \cos \gamma_1 - z \sin \gamma_1)], \\ \varphi^{(2)} &= \Phi_2 \exp[ik_P(x \cos \theta_2 + z \sin \theta_2)], \\ a_y^{(2)} &= A_2 \exp[ik_{S2}(x \cos \gamma_2 + z \sin \gamma_2)], \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $k_{P1} = \frac{\omega}{c_{P1}}$; $k_{P2} = \frac{\omega}{c_{P2}}$; $k_{S1} = \frac{\omega}{c_{S1}}$; $k_{S2} = \frac{\omega}{c_{S2}}$.

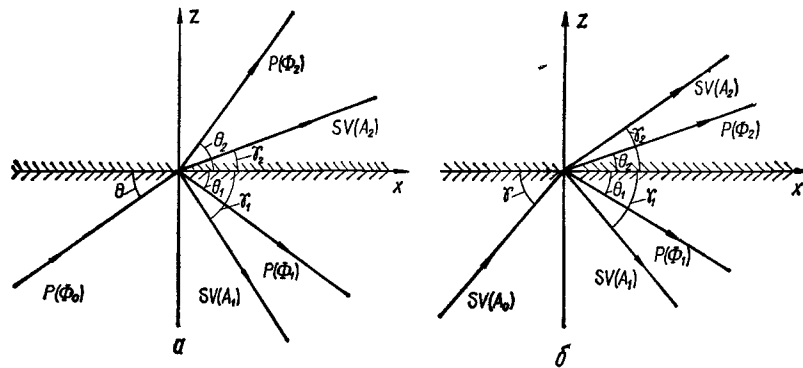


Рис. 21.

В принятой записи выражений (5.3) учитывается направленность волнового процесса, задание которой необходимо для полной конкретизации задачи.

Соответствующие (5.3) компоненты вектора перемещений определяются равенствами (1.4). На основе соотношений (1.5) можно записать выражения для напряжений, исходя из величин (5.3). Как и ранее, использование соответствующих выражений для смещений и напряжений позволяет записать в явном виде соотношения, вытекающие из требований условий сопряжения (5.1) и (5.2). Для сведения их к алгебраическим соотношениям необходимо выполнение равенств, выражающих закон Снеллиуса, а именно

$$k_{P1} \cos \theta = k_{P1} \cos \theta_1 = k_{P2} \cos \theta_2 = k_{S1} \cos \gamma_1 = k_{S2} \cos \gamma_2 = q. \quad (5.4)$$

Отсюда, очевидно, следует, что $\theta_1 = \theta$, т. е. для (в данном случае) продольных волн угол падения равен углу отражения. Соотношение (5.4) является, по сути, при заданном угле падения θ системой уравнений для определения углов отражения сдвиговой волны γ_1 и преломления θ_2 и γ_2 , прошедших во вторую среду продольной и сдвиговой волн. В общем случае соотношения механических характеристик материалов возможны чисто мнимые значения искомых углов. Соответствующие таким решениям волны являются неоднородными, т. е. их амплитуды экспоненциально убывают с удалением от поверхности раздела. В этом случае энергия не уносится в глубь второго полупространства такой волной и соответствующий случай трактуется как случай полного внутреннего отражения.

Из соотношений (5.4) для определения углов отражения и преломления получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta, \quad \cos \gamma_1 = \frac{c_{S1}}{c_{P1}} \cos \theta, \\ \cos \theta_2 &= \frac{c_{P2}}{c_{P1}} \cos \theta, \quad \cos \gamma_2 = \frac{c_{S2}}{c_{P1}} \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Таблица 3

Тип падающей волны в первом полупространстве			
Продольная		Сдвиговая	
$c_{P1} > c_{P2}$	Нет критических углов	$c_{S1} > c_{P2}$	Один критический угол $\gamma' = \arccos \frac{c_{S1}}{c_{P1}}$
$c_{P2} > c_{P1} > c_{S2}$	Один критический угол $\theta' = \arccos \frac{c_{P1}}{c_{P2}}$	$c_{P2} > c_{S1} > c_{S2}$	Два критических угла $\gamma' = \arccos \frac{c_{S1}}{c_{P1}}$ $\gamma'' = \arccos \frac{c_{S1}}{c_{P2}}$
$c_{P2} > c_{S2} > c_{P1}$	Два критических угла $\theta' = \arccos \frac{c_{P1}}{c_{P2}}$ $\theta'' = \arccos \frac{c_{P1}}{c_{S2}}$	$c_{P2} > c_{S2} > c_{S1}$	Три критических угла $\gamma' = \arccos \frac{c_{S1}}{c_{P1}}$ $\gamma'' = \arccos \frac{c_{S1}}{c_{P2}}$ $\gamma''' = \arccos \frac{c_{S1}}{c_{S2}}$

Аналогичные соотношения для углов отражения и преломления в случае падения под углом γ сдвиговой SV-волны (рис. 21, б) имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma, \quad \cos \theta_1 = \frac{c_{P1}}{c_{S1}} \cos \gamma, \\ \cos \theta_2 &= \frac{c_{P2}}{c_{S1}} \cos \gamma, \quad \cos \gamma_2 = \frac{c_{S2}}{c_{S1}} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Возможные комбинации упругих характеристик полупространств с точки зрения существования критических углов (углов падения θ или γ , при которых косинус какого-либо угла отражения или преломления становится равным единице) удобно представить так, как показано в табл. 3 [157].

Граничные условия (5.2) для выбранного вида потенциалов приводят к следующей системе четырех уравнений:

$$\begin{aligned} u_z: & \quad r_1(\Phi_0 - \Phi_1) - A_1 = r_2\Phi_2 - A_2, \\ \sigma_z: & \quad -G_1[(\Phi_0 + \Phi_1)(s_1^2 - 1) + 2s_1A_1] = -G_2[\Phi_2(s_2^2 - 1) - 2s_2A_2], \\ u_x: & \quad \Phi_0 + \Phi_1 - s_1A_1 = \Phi_2 + s_2A_2, \\ \tau_{zx}: & \quad G_1[2r_1(\Phi_1 - \Phi_0) + (1 - s_1^2)A_1] = G_2[-2r_2\Phi_2 + (1 - s_2^2)A_2]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Для случая падения SV-волны, задаваемой потенциалом $a_y^{(0)} = A_0 \exp [ik_{S1}(x \cos \gamma + z \sin \gamma)]$, система граничных условий приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} u_z: & -r_1 \Phi_1 - A_1 - A_0 = r_2 \Phi_2 - A_2, \\ \sigma_z: & -G_1 [(s_1^2 - 1) \Phi_1 + 2s_1 (A_1 - A_0)] = -G_2 [(s_2^2 - 1) \Phi_2 - 2s_2 A_2], \\ u_x: & \Phi_1 - s_1 (A_1 - A_0) = \Phi_2 + s_2 A_2, \\ \tau_{zx}: & G_1 [2r_1 \Phi_1 + (1 - s_1^2) (A_1 + A_0)] = G_2 [-2r_2 \Phi_2 + (1 - s_2^2) A_2]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

При записи систем (5.7) и (5.8) введены следующие обозначения:

$$r_1 = \operatorname{tg} \theta_1; \quad s_1 = \operatorname{tg} \gamma_1; \quad r_2 = \operatorname{tg} \theta_2; \quad s_2 = \operatorname{tg} \gamma_2. \quad (5.9)$$

Для случая скользящего контакта между полупространствами (условия (5.1)) в системах (5.7) и (5.8) нужно исключить третье уравнение, а из четвертого образовать два соотношения, потребовав, чтобы правая и левая части в нем были равны нулю.

Несмотря на возможность в принципе довести рассматриваемые задачи до конца в общем виде, окончательные выражения для искомых величин настолько громоздки, что провести аналитический анализ различных ситуаций довольно затруднительно. Сколь-нибудь полный анализ процесса отражения и преломления можно выполнить численно. В таких случаях выбор исходных данных для проведения расчетов — ответственный вопрос, поскольку в рамках двух-трех расчетных ситуаций необходимо показать все возможные характерные особенности процесса отражения и преломления волн.

Сложность рассматриваемой физической картины обусловливается большим числом параметров, которые характеризуют каждую конкретную ситуацию. Поскольку каждое полупространство характеризуется тремя параметрами (v , G , ρ), то анализируемая картина зависит от шести параметров. Если говорить более строго, то решение системы (5.7) или (5.8) однозначно определяется заданием четырех параметров — трех отношений скоростей в (5.5) или (5.6) и отношением жесткостей $g = \frac{G_2}{G_1}$.

Один из возможных вариантов решения связан с выбором в качестве материалов полупространств иттриево-алюминиевого граната (YAG) и плавного кварца [157]. Свойства этих материалов приведены в табл. 2. При этом, с одной стороны, удастся охватить все возможные ситуации по числу критических углов, а с другой — дополнить графики кинематических характеристик процесса [157] данными, раскрывающими энергетические аспекты процесса отражения и преломления.

При рассмотрении энергетических характеристик наибольший интерес, как и в случае свободного полупространства, представляет анализ нормальной к границе раздела составляющей вектора потока мощности $\bar{P}_z$. Приведенные для случая свободного полупро-

странства соотношения позволяют легко записать величины средних за период потоков мощности в каждом полупространстве.

Для случая падающей SV-волны в первом полупространстве имеем следующее выражение для $\bar{P}_z^{(1)}$ (случай докритического отражения):

$$\bar{P}_z^{(1)} = \frac{G_1}{2} \omega q^3 (1 + s_1^2) (s_1 A_0^2 - s_1 A_1^2 - r_1 \Phi_1^2). \quad (5.10)$$

Аналогично во втором полупространстве (случай докритического преломления)

$$\bar{P}_z^{(2)} = \frac{G_2}{2} \omega q^3 (1 + s_2^2) (A_2^2 s_2 + \Phi_2^2 r_2). \quad (5.11)$$

Здесь закон сохранения энергии выражается равенством $\bar{P}_z^1 = \bar{P}_z^2$ или

$$\begin{aligned} G_1 A_0^2 s_1 (1 + s_1^2) &= G_1 (1 + s_1^2) (s_1 A_1^2 + r_1 \Phi_1^2) + \\ &+ G_2 (1 + s_2^2) (s_2 A_2^2 + r_2 \Phi_2^2). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Справедливость этого соотношения легко проверить, непосредственно исходя из системы (5.8), не выписывая явного выражения для входящих в (5.12) неизвестных величин коэффициентов отражения и преломления. Для этого необходимо сложить произведения первого на второе и третьего на четвертое уравнение в системе (5.8).

В случае, когда какая-либо из совокупности возбуждаемых волн становится неоднородной, соотношение (5.12), выражающее закон сохранения энергии, приобретает иной вид. Система (5.8) становится системой с комплексными коэффициентами, а сами величины A_1 , A_2 , Φ_1 , Φ_2 — комплексными. При этом для записи соотношений закона сохранения энергии, усредненных по периоду, необходимо выполнить выкладки, аналогичные проведенным выше для одного полупространства. Здесь также оказывается, что средний поток мощности $\bar{P}_z$ в неоднородной волне становится равным нулю. Соотношения энергии приобретают вид

$$\begin{aligned} G_1 A_0^2 s_1 (1 + s_1^2) &= G_1 |A_1|^2 s_1 (1 + s_1^2) + \\ &+ G_2 (s_2 |A_2|^2 + r_2 |\Phi_2|^2) (1 + s_2^2) \end{aligned} \quad (5.13)$$

для случая, когда неоднородной становится отраженная Р-волна;

$$G_1 A_0^2 s_1 (1 + s_1^2) = G_1 |A_1|^2 s_1 (1 + s_1^2) + G_2 |A_2|^2 s_2 (1 + s_2^2), \quad (5.14)$$

если неоднородными становятся отраженная и преломленная Р-волны, и, наконец,

$$G_1 A_0^2 s_1 (1 + s_1^2) = G_1 |A_1|^2 s_1 (1 + s_1^2) \quad (5.15)$$

в случае, когда распространяющейся является только отраженная волна.

Аналогично можно записать соотношение энергии для случая падения Р-волны:

$$\begin{aligned} G_1 \Phi_0^2 r_1 (1 + s_1^2) &= G_1 (1 + s_1^2) (\Phi_1^2 r_1 + A_1^2 s_1) + \\ &+ G_2 (1 + s_2^2) (\Phi_2^2 r_2 + A_2^2 s_2), \\ G_1 \Phi_0^2 r_1 (1 + s_1^2) &= G_1 (1 + s_1^2) (|\Phi_1|^2 r_1 + |A_1|^2 s_1) + \\ &+ G_2 (1 + s_2^2) s_2 |A_2|^2, \\ G_1 \Phi_0^2 r_1 (1 + s_1^2) &= G_1 (1 + s_1^2) (|\Phi_1|^2 r_1 + |A_1|^2 s_1). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Наиболее простая ситуация возникает при падении распространяющейся в более жестком материале (YAG) продольной Р-волны на границу раздела с более мягким материалом (плавленый кварц). В этом случае нет критических углов и кривые, описывающие распределение энергии по отдельным типам колебаний, обладают довольно высокой степенью гладкости (рис. 22). При нормальном падении ($\theta = 90^\circ$) соотношение между отраженной и прошедшей энергией полностью определяется соотношением волновых сопротивлений материалов $B = \frac{(\rho c_P)_2}{(\rho c_P)_1}$ (для выбранных материалов $B \approx 3$). Здесь коэффициенты прохождения и отражения по энергии характеризуются соответственно величинами $\frac{4B}{(B+1)^2}$ и $\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^2$. Такая ситуация эквивалентна ситуации в акустической задаче (идеальная сжимаемая жидкость) — здесь сдвиговые волны не возникают.

При уменьшении угла падения θ появляется как отраженная, так и прошедшая сдвиговая волна. Однако если в первом полупространстве (YAG) уже при небольшом отклонении от нормального падения отраженные сдвиговые волны уносят заметную часть энергии (сравнимую с энергией отраженной Р-волны), то подавляющая часть ее в преломленных волнах уносится продольной волной.

Для получения ситуации, при которой возникает один критический угол при падении продольной волны, достаточно «обернуть» рассмотренный выше случай. Будем теперь считать, что падающая волна распространяется в плавленом кварце (первое полупространство) и падает на границу раздела с YAG (второе полупространство). Распределение энергии между отдельными типами движения приведено на рис. 23. Характерной особенностью процесса отражения и преломления в этом случае является практически полное повторение картины рис. 22, сжатой в область докритического значения угла $\theta' = 44^\circ$. Здесь также в преломленных волнах доминирует продольная волна.

При уменьшении угла падения в область $\theta < \theta'$ продольная преломленная волна становится нераспространяющейся. Область углов падения в окрестности критического характеризуется резким ростом энергии, уносимой отраженной продольной волной. Здесь

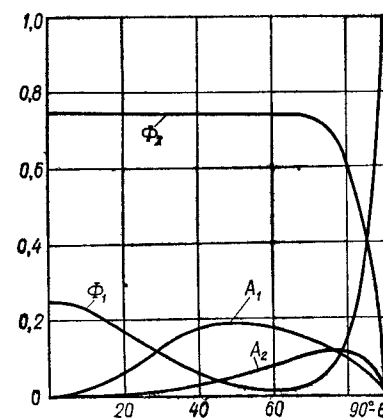


Рис. 22.

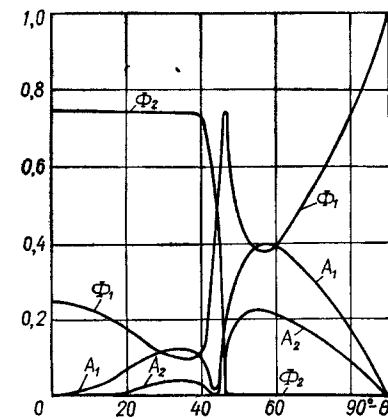


Рис. 23.

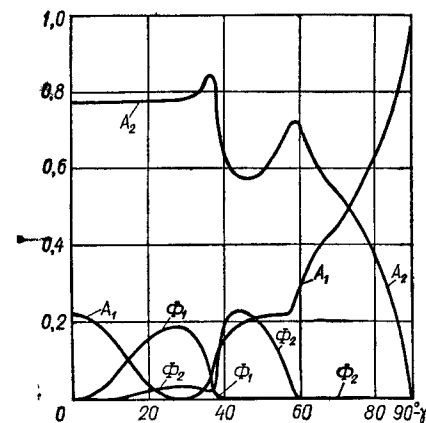


Рис. 24.

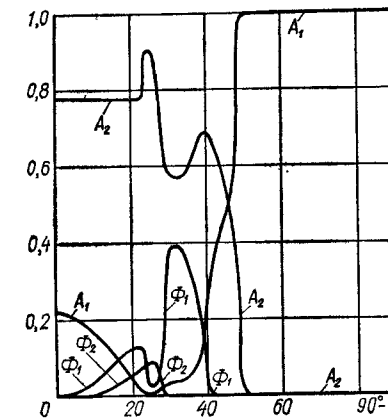


Рис. 25.

также характерно резкое уменьшение количества энергии, переносимой во вторую среду. Дальнейшее уменьшение углов падения приводит к росту энергии, проникающей во вторую среду. Теперь эта энергия полностью связана с распространяющейся сдвиговой волной.

Из сравнения рис. 22 и 23 следует, что появление критического угла значительно качественно меняет картину распределения энергии по отдельным типам движений, приводя к появлению ярко выраженных экстремумов. При этом имеем существенное изменение величин энергий при незначительном изменении углов падения.

Отмеченное свойство еще более ярко выражено на рис. 24 и 25, где показаны энергетические соотношения в процессе отражения и преломления SV-волн в тех же материалах. На рис. 24 показан случай падения сдвиговой волны из более жесткого полупространства

ства (YAG). В этом случае имеем два критических угла: $\gamma' = 32^\circ$ и $\gamma'' = 52^\circ$. На рис. 25 сдвиговая волна падает из менее жесткого материала (плавленный кварц). Здесь имеем три критических угла: $\gamma' = 39^\circ$; $\gamma'' = 49^\circ$; $\gamma''' = 61^\circ$. В первом случае этим значениям γ соответствует такая ситуация, когда нераспространяющимися с уменьшением угла падения последовательно становятся отраженная Р-волна, а затем преломленная волна. Во втором случае с указанными значениями критических углов связаны такие изменения в структуре рассматриваемых волновых полей, когда последовательно становятся нераспространяющимися преломленная Р-волна, отраженная Р-волна и, наконец, преломленная SV-волна.

При нормальном падении SV-волны на поверхность раздела возбуждаются только сдвиговые отраженные и прошедшие волны, энергия между которыми распределяется в соответствии со значениями волновых сопротивлений распространению сдвиговых волн, т. е. величин $\rho_1 c_{S1}$ и $\rho_2 c_{S2}$. Количественно здесь все определяется так же, как в рассмотренном выше случае падения Р-волны с заменой величины B на $B' = \frac{(\rho c_S)_2}{(\rho c_S)_1}$.

Кроме указанных резких изменений в распределении энергии по отдельным типам движений при малых изменениях угла падения в окрестности критических углов, все рассмотренные случаи характеризуются интересным общим свойством: при уменьшении угла падения от 90° (нормальное падение) до первого критического значения угла (на рис. 22 таким можно считать угол $\theta = 0^\circ$) основная часть энергии в преломленной волне уносится волной такого же типа, как падающая волна. Кроме того, эта энергия остается практически постоянной в широком диапазоне изменения угла падения. Отмеченное свойство проявляется на фоне довольно существенных изменений в энергии иных типов волн. Указанное постоянство энергии в преломленной волне при изменении угла падения является характерной чертой процесса преломления в упругих телах, связанной с наличием двух типов волн. В случае идеальных сжимаемых жидкостей (акустический случай) или падения SH-волн такое явление не наблюдается.

Иной случай упругих сред, встречающихся в задачах сейсмологии, подробно изучен в работе [201].

Энергетический анализ процесса отражения и преломления указывает на наличие ряда нулевых эффектов. В частности, можно отметить полное прохождение (отсутствие отраженной волны), отсутствие отраженной волны определенного типа и т. п. Эти эффекты имеют аналогию в электродинамике, где они используются как очень удобное средство проверки согласия теории и наблюдения. Была, например, проведена большая работа по определению количественных отклонений от формул Френеля, а также предложены убедительные объяснения наблюдавшихся отклонений [88]. Качественные объяснения отклонений от «нулевого» результата, связанные с тем, что при описании таких эффектов сред

вблизи границы нельзя считать однородной, по-видимому, справедливы и в случае упругой среды. Однако, как отмечалось в § 1 этой главы, некоторые отклонения от нуля не являются препятствием для практического использования данных эффектов.

§ 6. ПОВЕРХНОСТНАЯ ВОЛНА СТОУНЛИ

Наличие границы раздела двух сред приводит не только к эффектам отражения и преломления волн. Не менее интересными и важными являются эффекты резонансного типа, т. е. возможность существования волн, локализуемых вблизи границы

Как и для свободного полупространства (см. § 3 данной главы), к отысканию поверхностных волн можно подходить двояко. Стоунли [271], стараясь более детально изучить способы передачи энергии при землетрясении, пришел к анализу задачи о возможности распространения вдоль границы раздела двух полупространств плоской волны. Уравнение для отыскания фазовой скорости c волны Стоунли имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2r_1 & 2gr_2 & 2 - \frac{c^2}{c_{S1}^2} & g\left(2 - \frac{c^2}{c_{S2}^2}\right) \\ \frac{c^2}{c_{S1}^2} - 2 & g\left(2 - \frac{c^2}{c_{S2}^2}\right) & -2s_1 & 2gs_2 \\ 1 & -1 & s_1 & -s_2 \\ r_1 & r_2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (6.1)$$

где

$$r_j = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{Pj}^2}}; \quad s_j = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{Sj}^2}}, \quad j = 1, 2. \quad (6.2)$$

После раскрытия определителя уравнение (6.1) приводится к виду

$$\begin{aligned} R(c) \equiv & \left[\frac{c^2}{c_{S1}^2} - g \frac{c^2}{c_{S2}^2} - 2(1-g) \right]^2 - g \frac{c^4}{c_{S1}^2 c_{S2}^2} (r_1 s_2 + r_2 s_1) - \\ & - r_1 s_1 \left[g \frac{c^2}{c_{S2}^2} + 2(1-g) \right]^2 - r_2 s_2 \left[\frac{c^2}{c_{S1}^2} - 2(1-g) \right]^2 + \\ & + 4(1-g) r_1 r_2 s_1 s_2 = 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Наличие вещественных корней в этом уравнении является указанием на возможность существования волны Стоунли для данной пары материалов.

Уравнение (6.3) в общем виде тщательно проанализировано Гоголадзе [30]. Замечательным результатом его работы является очень простой для проверки критерий существования волн, сосредоточенных вблизи поверхности раздела. При заданных скоростях продольных и поперечных волн в контактирующих средах для существования вещественного корня необходимо и достаточно, чтобы

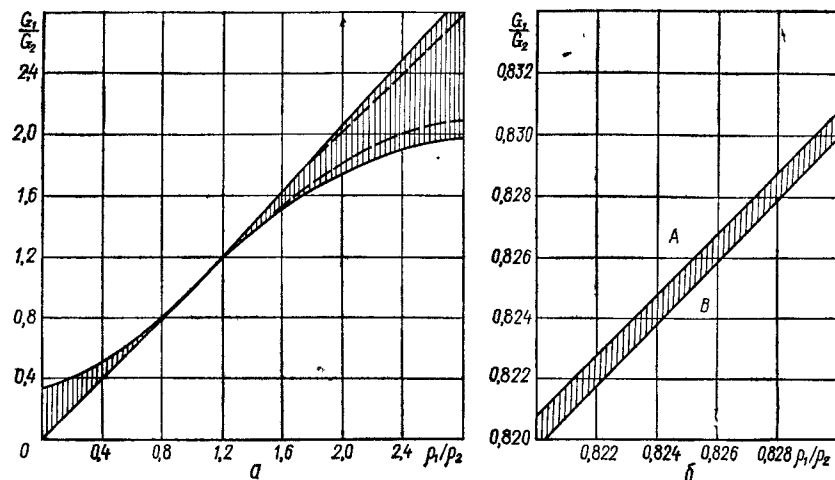


Рис. 26.

значение левой части уравнения (6.3) при c , равном наименьшему значению скорости из четырех возможных величин, было положительным, т. е. если $c_S^* = \min(c_{S1}, c_{S2})$, то

$$R(c_S^*) \geq 0. \quad (6.4)$$

Этот критерий дает возможность легко установить факт существования волны Стоунли при заданных свойствах материалов полупространств. Однако каждый раз, когда существование корня уравнения (6.3) установлено, его надо находить, чтобы определить кинематические характеристики волны. В связи с этим уравнение (6.3) подвергалось дополнительным исследованиям [176, 246]. В частности, было показано, что скорость волн Стоунли лежит в интервале

$$\hat{c}_R \leq c_S < c_S^*, \quad (6.5)$$

где $\hat{c}_R = \max(c_{R1}, c_{R2})$. Здесь c_{Rj} — скорость волн Рэлея в свободных полупространствах.

По аналогии с волной Рэлея изучалось также влияние коэффициентов Пуассона контактирующих сред на величину скорости волн Стоунли. Оказалось, что коэффициент Пуассона более плотной среды очень сильно влияет как на величину c_{Sj} , так и на само существование корня в (6.3), в то время как влияние коэффициента Пуассона менее плотности среды мало.

Большое число конкретных расчетов для различных комбинаций контактирующих материалов позволяют критерий Гоголадзе дополнить некоторыми практическими рекомендациями. Одним из практических критериев для оценки возможности существования корня в уравнении (6.3) есть близкое значение скоростей сдвиговых волн в полупространствах [246].

Отметим, что область параметров контактирующих сред, при которых возможно существование волны Стоунли, достаточно мала и весьма чувствительна к изменению этих параметров. Иллюстрацией данного положения является рис. 26, а, где на плоскости $(\frac{\rho_1}{\rho_2}, \frac{G_1}{G_2})$ штриховкой показана область существования волны Стоунли для двух полупространств [265, 277]. Сплошные линии соответствуют случаям $\nu_1 = 0, \nu_2 = 0,5$; штриховые — $\nu_1 = 0,5, \nu_2 = 0$.

Данная область практически не изменяется с изменением величин ν_1 и ν_2 . Асимптотой линии, соответствующей верхней правой границе заштрихованной области, является прямая, проходящая через начало координат с наклоном $\frac{c_{S1}^2}{c_{R1}^2}$. Асимптотой нижней правой границы есть горизонтальная прямая

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{2R_2 + \sqrt{1-R_1} + \sqrt{5-R_1+4R_2}\sqrt{1-R_1}}{1+R_2}, \quad (6.6)$$

где $R_j = \frac{c_{Sj}^2}{c_{Pj}^2}$, $j = 1, 2$.

В широком диапазоне изменения коэффициентов Пуассона в (6.6) $\frac{G_1}{G_2} \approx 3$.

Интересная особенность области существования волны Стоунли заключается в чрезвычайно узком диапазоне для постоянных материала, если только соотношение плотностей значительно не превосходит единицу. На рис. 26, б это показано для значений $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$ [277], однако и в этом случае граница области существования (линии А и В) остается малочувствительной к изменению величин ν_1 и ν_2 при $0,8 < \frac{\rho_1}{\rho_2} < 1,2$.

В табл. 4 [157, 246] приведены значения скорости волн Стоунли для различных металлов в отношении к наименьшей из двух сдвиговых скоростей. Для получения данных табл. 4 было рассмотрено около 900 комбинаций пар металлов, из которых только 30 оказались удачными с точки зрения существования волны Стоунли. Несмотря на это, в настоящее время волны Стоунли находят применение в неразрушающих испытаниях [18, 210]. Особенно они удобны при определении «полноты» контакта между различными металлами.

Общее уравнение (6.3), анализ которого позволяет выявить возможность существования поверхностных волн, можно легко преобразовать для случая, когда одно из полупространств является идеальной сжимаемой жидкостью. Для получения соответствующего уравнения следует преобразовать (6.3) к форме, допускающей переход к пределу, когда $G_2 = 0$ ($g = 0, c_{S2} = 0$). Рассмотрение случая жидкости интересно в том смысле, что здесь, в отличие от

Таблица 4

Среда 1	Среда 2				
	Алюминий	Альнито	Вольфрам	Дюраль	Кобальт
Алюминий					
Альнито	0,996			0,992	
Вольфрам	0,968	0,996		0,965	0,996
Дюраль					
Кобальт	0,995			0,992	
Магний		0,997			
Медь					
Монельме- талл	0,997		0,999	0,995	
Никель				0,986	
Платина					
Родий	0,982	0,998			
Сталь 0,08С	0,988				
Сталь 0,38С	0,987				
Сурьма					
Тантал					
Цинк					

Магний	Медь	Никель	Сталь 0,08С	Сталь 0,38С	Сурьма	c_s в сре- де 1, м/с
						3185
						3033
0,947			0,998			2810
						3065
0,973	0,987					2897
						2970
0,999						2140
						2785
0,977						
					0,999	3020
0,993						1728
						3005
						3118
						3172
	0,997					2108
0,982					0,992	2088
0,997						2220

случая двух упругих полупространств, поверхностная волна типа Стоунли существует всегда [14, 283]. В определенной мере этот факт связан с тем, что в случае взаимодействия с идеальной сжимаемой жидкостью на поверхности контакта отсутствуют касательные напряжения.

О большой роли этих напряжений при формировании волны Стоунли вблизи поверхности раздела свидетельствует также рассмотрение случая двух упругих полупространств с условиями проскальзывания (5.1) по поверхности контакта. При этом нетрудно получить уравнение для определения фазовой скорости c , а именно

$$S(c) \equiv gr_1 \left[\left(2 - \frac{c^2}{c_{s2}^2} \right)^2 - 4r_2s_2 \right] + \frac{c_{s1}^2}{c_{s2}^2} r_2 \left[\left(2 - \frac{c^2}{c_{s1}^2} \right)^2 - 4r_1s_1 \right] = 0. \quad (6.7)$$

При обозначении сред индексами 1 и 2 в качестве исходного принято условие $c_{R1} < c_{R2}$.

Уравнение (6.7) изучалось в работах [152, 210]. Если в интервале между значениями рэлеевских скоростей в полупространствах не содержится скорость c_s^* , то уравнение (6.7) всегда имеет корень $\tilde{c}_{st}$, лежащий в этом интервале. В качестве примера можно указать пару алюминий — никель, для которой волна Стоунли в случае жесткого контакта не существует.

Если в указанный интервал входит скорость c_s^* , то вопрос о существовании корня уравнения (6.7) также сводится к опре-

делению знака величины $S(c_s^*)$. Однако строгое доказательство необходимости и достаточности условия $S(c_s^*) \geq 0$ для существования величины $\tilde{c}_{st}$ пока отсутствует.

Непосредственным подсчетом значений $S(c_s^*)$ легко проверить, что для многих пар материалов поверхностная волна типа Стоунли в условиях скользящего контакта существует, что указывает на значительное расширение допустимых классов материалов по сравнению с обычной волной Стоунли.

Когда одно из полупространств является идеальной сжимаемой жидкостью, поверхностная волна существует всегда. Пример пары золото — вольфрам, для которой волна типа Стоунли при условии скользящего контакта не существует, свидетельствует о том, что в случае упругих полупространств волновая картина значительно сложнее, чем при контакте упругого полупространства с идеальной жидкостью.

Компоненты вектора смещений в полупространствах в поверхностной волне Стоунли определяются выражениями

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &= A [p_1 \exp(qr_1z) + p_3s_1 \exp(qs_1z)] \cos q(x - ct), \\ u_z^{(1)} &= A [p_1r_1 \exp(qr_1z) + p_3 \exp(qs_1z)] \sin q(x - ct), \\ u_x^{(2)} &= A [(p_2 \exp(-qr_2z) - s_2 \exp(-qs_2z)] \cos q(x - ct), \\ u_z^{(2)} &= A [-p_2r_2 \exp(-qr_2z) + \exp(-qs_2z)] \sin q(x - ct). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Величины p_1 , p_2 , p_3 находятся из уравнений

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 + p_3 s_1 &= -s_2, \\ p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 &= 1, \\ p_1 r_1 + p_2 g r_2 + p_3 \frac{1+s^2}{2} &= g \frac{1+s_2^2}{2} \end{aligned} \quad (6.9)$$

для случая жесткого контакта и равны значениям

$$p_1 = -\frac{c_{S1}^2}{c_{S2}^2} \frac{1+s_1^2}{2r_1}, \quad p_2 = \frac{1+s_2^2}{2r_2}, \quad p_3 = \frac{c_{S1}^2}{c_{S2}^2} \quad (6.10)$$

в случае скользящего контакта.

Распространение волны вблизи поверхности контакта связано с направленным переносом энергии. Анализ величины потоков энергии в каждом материале может помочь составить представление о степени вовлеченности в волновой процесс каждого из контактирующих полупространств.

Средние значения $\bar{P}_x^{(1)}$ и $\bar{P}_x^{(2)}$, очевидно, тождественно равны нулю, а величины $\bar{P}_x^{(1)}$ и $\bar{P}_x^{(2)}$ положительны. Интегрируя последние по координате z , находим, что в среднем за период через поперечное сечение $x = \text{const}$ в первом и втором полупространствах в положительном направлении оси Ox волной Стоунли переносится количество энергии

$$\begin{aligned} \bar{W}_1 &= \frac{A^2 G_1 \omega}{2} \left\{ \frac{p_1^2}{r_1} \left(1 + r_1^2 + \frac{v_1}{1-2v_1} \frac{c^2}{c_{P1}^2} \right) + \frac{p_3^2 (1+3s_1^2)}{2s_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_1 p_3}{r_1 + s_1} \left[2s_1 \left(2 + \frac{v_1 c^2}{(1-2v_1) c_{P1}^2} \right) + r_1 (3 + s_1^2) \right] \right\}, \\ \bar{W}_2 &= \frac{A^2 G_2 \omega}{2} \left\{ \frac{p_2^2}{r_2} \left(1 + r_2^2 + \frac{v_2}{1-2v_2} \frac{c^2}{c_{P2}^2} \right) + \frac{1+3s_2^2}{2s_2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{p_2}{r_2 + s_2} \left[2s_2 \left(2 + \frac{v_2 c^2}{(1-2v_2) c_{P2}^2} \right) + r_2 (3 + s_2^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Для анализа распределения общего потока энергии в волне Стоунли между полупространствами рассмотрим два конкретных примера.

Первый пример относится к паре алюминий — вольфрам со следующими свойствами [176]:

$$c_{P1} = 6420 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad c_{S1} = 3110 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$G_1 = 0,261 \cdot 10^{11} \frac{\text{н}}{\text{м}^2}, \quad v_1 = 0,347, \quad \rho_1 = 2,7 \frac{\text{г}}{\text{см}^3};$$

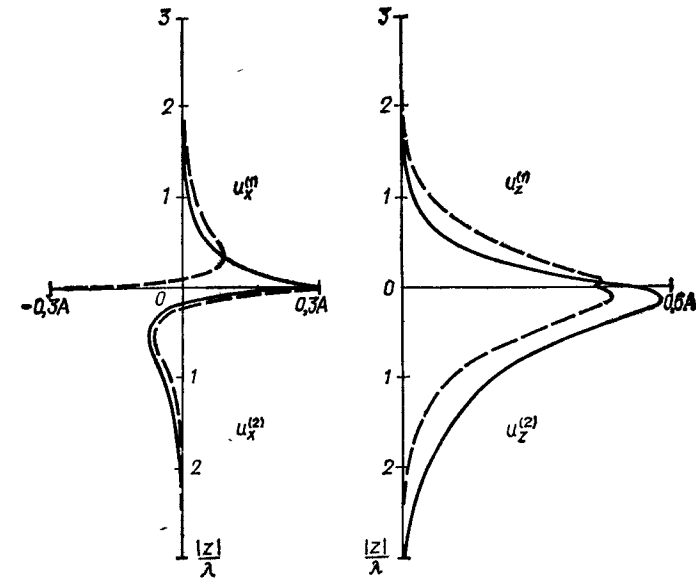


Рис. 27.

вольфрам

$$c_{P2} = 5230 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad c_{S2} = 2860 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$G_2 = 1,530 \cdot 10^{11} \frac{\text{н}}{\text{м}^2}, \quad v_2 = 0,287, \quad \rho_2 = 18,7 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Скорость волны Стоунли $c_{St} = 2769 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ для жесткого контакта и $\tilde{c}_{St} = 2765 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ для скользящего.

Зависимость компонентов векторов смещений в полупространствах от безразмерной координаты $|z|/\lambda$ для жесткого (сплошные линии) и скользящего (штриховые линии) случаев представлены на рис. 27.

При полном сцеплении распределение смещений в более жестком материале (вольфрам) подобно картине смещений в рэлеевской волне для свободного полупространства. Особенности распределения смещений в алюминиевом полупространстве (плавное убывание u_z , отсутствие перемены знака u_x) делают этот график похожим на аналогичную схему для идеальной сжимаемой жидкости, находящейся в контакте с упругим телом. Вместе с тем здесь наблюдаются и существенные различия — в случае жидкости поверхностная волна локализована в относительно толстом слое жидкости, в котором переносится почти вся энергия. Из подсчета же согласно формуле (6.11) с учетом (6.2) и (6.9) количества энергии для пары алюминий — вольфрам следует, что в алюминии в случае жесткого контакта переносится лишь 7% общей энергии поверхностной волны.

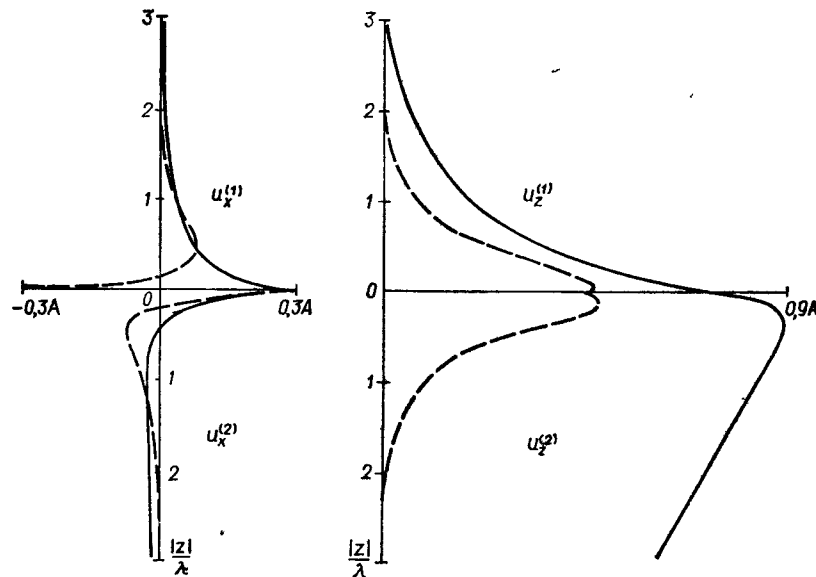


Рис. 28.

Изменение типа условий сопряжения приводит к изменению характера распределения смещений в алюминиевом полупространстве и оставляет без изменения кинематику движения в вольфраме. При этом в алюминии распределение смещений также становится похожим на их распределение в волне Рэлея (см. рис. 16). Однако это не приводит к заметному увеличению количества энергии в данном полупространстве. Ослабление связи между средами привело лишь к небольшому увеличению количества энергии, переносимой в более мягкой среде. Теперь в алюминии сосредоточено около 9% общей энергии поверхностной волны.

Можно сказать, что в обоих случаях алюминий (менее жесткое полупространство) только обеспечивает существование поверхностной волны, перенося сравнительно малую долю энергии. В определенной мере это связано с достаточно большим отличием в жесткостных свойствах материалов ($g = 5,86$) и по крайней мере в условиях жесткого контакта (равенств деформаций) представляется довольно естественным. В данном примере волна Стоунли характеризуется весьма сильной локализацией для обоих типов условий сопряжения.

Во втором примере рассматривается пара материалов [210] при условии, что волна Стоунли для жесткого контакта значительно проникает в более жесткое полупространство. Применялись следующие материалы:

титан

$$c_{P1} = 6110 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad c_{S1} = 3270 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$G_1 = 0,476 \cdot 10^{11} \frac{\text{н}}{\text{м}^2}, \quad \nu_1 = 0,300, \quad \rho_1 = 4,44 \frac{\text{г}}{\text{см}^3};$$

сталь

$$c_{P2} = 5290 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad c_{S2} = 3210 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$G_2 = 0,810 \cdot 10^{11} \frac{\text{н}}{\text{м}^2}, \quad \nu_2 = 0,288, \quad \rho_2 = 7,86 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Скорость волны Стоунли $c_{St} = 3208,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ для жесткого контакта и $\tilde{c}_{St} = 2993 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ для скользящего. Картина распределения смещений для указанных материалов представлена на рис. 28 (она аналогична картине на рис. 27). Видно значительное влияние типа условий сопряжения на кинематические характеристики поверхностных волн. В случае жесткого сцепления наблюдается значительное проникание интенсивных движений во второе полупространство — при $|z| = 10\lambda$ величина $u_z^{(2)}$ равна лишь четверти своего максимального значения вблизи границы. Этим, естественно, и объясняется тот факт, что 95% энергии поверхностной волны переносится в данном полупространстве.

Для скользящего контакта, как видно из рис. 28, кинематические характеристики в обоих полупространствах одинаковы. Поэтому распределение энергии в поверхностной волне в данном случае определяется практически соотношением жесткостей. В более жестком (стальном) полупространстве переносится 67% общей энергии.

Из рассмотренных примеров следует, что значительная часть энергии поверхностной волны переносится в полупространстве с большей жесткостью. Этот результат полностью отличается от случая поверхностной волны на границе твердое тело — жидкость, где практически вся энергия сосредоточена в жидкости.

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ НАГРУЗКОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ

В качестве следующего шага в изучении роли границы в формировании волнового поля в упругом теле рассмотрим вынужденные движения полупространства. В предыдущей главе не делались конкретные указания на способ возбуждения падающих волн. Это значительно упростило задачу с точки зрения математики, но одновременно привело к тому, что не рассматривались важные аспекты, связанные со взаимодействием источника волнового движения с упругим телом. В большинстве практических случаев процесс подвода энергии для создания волнового движения можно схематизировать заданием на его поверхностях силовых или кинематических факторов.

Простейшей задачей, которую можно сформулировать, является задача о вынужденном движении полупространства под действием приложенных на его границе гармонических нагрузок. Частный случай действия сосредоточенной нормальной силы был детально рассмотрен Лэмбом [207] еще в 1904 г. В связи с этим общая задача о силовом возбуждении полупространства названа задачей Лэмба. После его классической работы, в которой рассмотрен не только стационарный, но и нестационарный режим, задаче Лэмба посвящались многие работы. В книгах [9, 20, 175, 182] сделаны подробные обзоры постановок задач и полученных результатов в этой области.

Близкой по сути к задаче Лэмба является задача о кинематическом возбуждении полупространства, когда энергия волнового поля подводится путем задания переменных во времени перемещений некоторой части границы. Возникающая при этом смешанная граничная задача обладает рядом дополнительных специфических трудностей. Их характер, способ преодоления, а также обзор литературы рассматриваются в работе [118].

Задача Лэмба и задача о кинематическом возбуждении являются в определенном смысле предельными случаями по соотношению волновых сопротивлений возбудителя и среды в реально возникающих ситуациях о генерировании волнового поля. Однако получающаяся при этом «вилка» настолько широка, что целый ряд важных вопросов практического возбуждения волн в упругих телах на основе рассмотрения таких предельных случаев получает лишь качественное решение [20]. Например, задача о возбуждении поля пьезоактивным преобразователем, волновое сопротивление которо-

го соизмеримо с волновым сопротивлением среды, т. е. задача сопряжения, является чрезвычайно сложной.

В данной главе конкретные выкладки в задаче Лэмба выполнены для плоского случая, хотя некоторые количественные оценки приводятся также для осесимметричного и общего трехмерного случаев деформирования полупространства.

§ 1. ПОЛУПРОСТРАНСТВО В УСЛОВИЯХ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ. ВОЗБУЖДЕНИЕ SH-ВОЛН

Рассмотрим наиболее простой случай возбуждения волн в полупространстве при действии поверхностных нагрузок. Он характерен тем, что происходит генерация только сдвиговых горизонтально поляризованных SH-волн. При их распространении смещения частиц среды параллельны граничной поверхности. Такая задача описывается одним скалярным уравнением Гельмгольца и во многих аспектах подобна задаче для акустической среды. Относительная простота характера движения здесь обусловлена специальным выбором типа внешнего нагружения. Нагрузка схематически изображена на рис. 29 и состоит из единственного компонента вектора усилий $q_y = Gf(x) \exp(-i\omega t)$. Иные типы нагрузки $q_z(x)$ и $q_x(x)$, которые также приводят к двумерным задачам, возбуждают значительно более сложные волновые поля.

Опуская временной множитель, граничные условия представим в этом случае в виде

$$\frac{1}{G} \tau_{zy} = f(x), \quad \frac{1}{G} \tau_{zx} = \frac{1}{G} \sigma_z = 0, \quad z = 0. \quad (1.1)$$

Здесь на функцию $f(x)$ накладываются требования представимости интегралом Фурье [13].

Граничные условия (1.1) можно полностью удовлетворить, принимая отличным от нуля лишь один компонент вектора перемещений, т. е. $u_x = u_z \equiv 0$, $u_y(x, z) \neq 0$. Уравнения движения в этом случае сводятся к одному уравнению

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + k_2^2 u_y = 0, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad (1.2)$$

а граничные условия (1.1) к следующему равенству:

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = f(x), \quad z = 0. \quad (1.3)$$

Решение граничной задачи (1.2), (1.3) можно получить с помощью преобразования Фурье. Если обозначить

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_y(\xi, z) \\ \bar{f}(\xi) \end{array} \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} u_y(x, z) \\ f(x) \end{array} \right\} \exp(-i\xi x) dx, \\ \left\{ \begin{array}{l} u_y(x, z) \\ f(x) \end{array} \right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_y(\xi, z) \\ \bar{f}(\xi) \end{array} \right\} \exp(i\xi x) d\xi, \end{aligned} \quad (1.4)$$

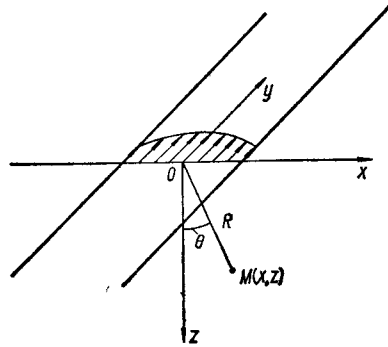


Рис. 29.

Отметим, что условие (1.3) не конкретизирует полностью рассматриваемую ситуацию и должно быть дополнено путем указания на направленность волнового процесса. В данном случае дополнительные условия должны выражать то, что единственным источником энергии является поверхностная нагрузка. Для того чтобы выполнить это условие, искомое решение граничной задачи (1.2) и (1.3) необходимо представить в виде

$$u_y(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(\xi)}{\gamma_2} \exp(i\xi x - \gamma_2 z) d\xi, \quad (1.7)$$

где $\gamma_2 = (\xi^2 - k_2^2)^{1/2}$.

Решение (1.7) носит формальный характер, связанный с неоднозначностью выбора знака корня γ_2 . При его выборе следует исходить из следующих соображений.

Представление искомой функции (1.7) является, по существу, суперпозицией частных решений уравнения (1.2) в виде плоских волн

$$u_y^{(0)}(x, z, t) = \exp(i\xi x - \gamma_2 z - i\omega t). \quad (1.8)$$

В связи с тем что единственным источником энергии является поверхностная нагрузка, эти волны должны быть убывающими по z (неоднородные волны) или уходящими от границы (однородные волны). Из первого требования следует, что при $|\xi| > k_2$ $\gamma_2 = \sqrt{\xi^2 - k_2^2}$, а при $|\xi| < k_2$ $\gamma_2 = -i\sqrt{k_2^2 - \xi^2}$. Здесь и далее символом $\sqrt{a}$ при $a > 0$ обозначено арифметическое значение квадратного корня.

После выбора знака в γ_2 решение (1.7) полностью определено. Входящий в него интеграл можно вычислять обычными численными методами с использованием асимптотики для больших значений $|\xi|$ [130]. Наличие корневой особенности $|\xi| = k_2$ в подынтегральном выражении следует учесть при выборе метода численного интегрирования на конечном интервале [73].

Еще один подход к вычислению интеграла в (1.7) основывается на использовании метода контурного интегрирования в комплекс-

ной плоскости. При этом иногда удается получить представление интеграла в явном виде через специальные функции или получить другое, более удобное для числовых расчетов, представление $u_y(x, z)$

$$\frac{d^2 \bar{u}_y}{dz^2} - (\xi^2 - k_2^2) \bar{u}_y = 0 \quad (1.5)$$

с граничными условиями в форме

$$\frac{d\bar{u}_y}{dz} = \bar{f}(\xi), \quad z = 0. \quad (1.6)$$

Целесообразность перехода к контурному интегрированию в комплексной плоскости связана также с возможностью получить для $u_y(x, z)$ эффективные асимптотические представления в дальнем поле, т. е. при больших значениях $R = \sqrt{x^2 + z^2}$. Получение таких оценок основывается на использовании стандартной процедуры метода наибыстрейшего спуска.

Для перехода в (1.7) к контурному интегралу в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ необходимо прежде всего выбрать область однозначности двужанной функции $\gamma_2 = (\zeta^2 - k_2^2)^{1/2}$. Из изложенных выше требований вытекает, что подходящими являются значения γ_2 , для которых $\text{Re } \gamma_2 \geq 0$. Кроме того, из условия излучения для плоских волн (1.8) следует, что подходящей областью изменения величины ζ для проведения контура является область, где $\text{Im } \gamma_2 \leq 0$.

Выделение области однозначности функции γ_2 приводит к рассмотрению комплексной плоскости ζ как двулистной римановой поверхности. На каждом из листов, которые соединяются по берегам разрезов, выходящих из точек ветвления $\zeta = \pm k_2$, функция γ_2 однозначно определена. Выбор разрезов довольно произволен, однако сформулированные выше требования к контуру наиболее просто учесть при специальном их выборе. В частности, разрезы целесообразно провести так, чтобы на листах римановой поверхности выполнялись условия $\text{Re } \gamma_2 \geq 0$ и $\text{Re } \gamma_2 \leq 0$ соответственно, т. е. провести разрезы вдоль линий $\text{Re } \gamma_2 = 0$.

Для большей четкости и наглядности при проведении контура интегрирования и разрезов в плоскости ζ выработан стандартный прием — введение малого затухания в среду и рассмотрение предельного перехода при его исчезновении [97]. Законность такого предельного перехода составляет содержание принципа предельного поглощения [85, 115], с помощью которого придается физический смысл решениям об установившихся колебаниях идеально упругих тел.

Введение затухания приводит к тому, что волновые числа для гармонических волн становятся комплексными, причем

$$\hat{k}_2 = k_2 + ik_2', \quad k_2' > 0, \quad |k_2| \gg k_2'. \quad (1.9)$$

В связи с этим точки ветвления $\zeta = \pm \hat{k}_2$ смещаются с вещественной оси в первый и третий квадранты плоскости ζ (рис. 30). Как указано выше, разрез целесообразно провести по линии $\text{Re } \gamma_2 = 0$. Это равенство эквивалентно следующей системе соотношений:

$$\xi\eta - k_2 k_2' = 0, \quad (1.10)$$

$$\xi^2 - \eta^2 - (k_2')^2 + (k_2')^2 < 0,$$

которые означают, что величина γ_2^2 является действительной и отрицательной. Соотношения (1.10) определяют разрезы в виде частей

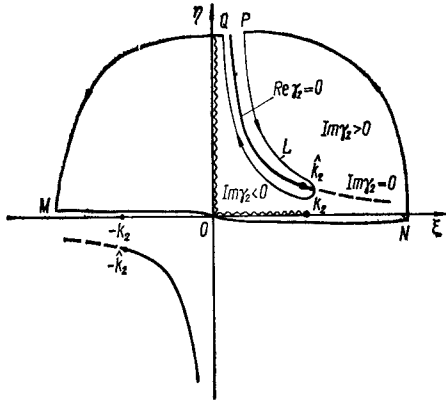


Рис. 30.

ется функция $u_y(x, z)$. Во всех случаях выкладки однотипны, но для $x > a$ замыкание контура следует проводить в верхней полуплоскости, а для $x < -a$ — в нижней. Это связано с последующим использованием леммы Жордана для оценки интегралов по окружностям большого радиуса [97]. Для $|x| < a$, $z = 0$ в зависимости от $\bar{f}(\xi)$ выражение (1.7) следует представить в виде суммы двух интегралов. Замыкание контура для одного из них необходимо проводить в верхней полуплоскости ζ , а для второго — в нижней. Последующие выкладки проводятся для значения $x > a$.

Рассмотрим интеграл в (1.7) вдоль замкнутого контура, показанного на рис. 30 и состоящего из отрезка вещественной оси MN , дуг окружностей MQ и NP и петли L , обходящей точку ветвления. Поскольку подынтегральное выражение не имеет особенностей внутри указанного контура, то по теореме Коши

$$\oint \frac{\bar{f}(\zeta)}{\gamma_2} \exp(i\zeta x - \gamma_2 z) d\zeta = 0. \quad (1.11)$$

Здесь $\bar{f}(\zeta)$ — аналитическая функция, значение которой на вещественной оси совпадает с величиной $\bar{f}(\xi)$.

Интеграл по замкнутому контуру (1.11) можно представить в виде суммы интегралов по отрезку вещественной оси MN , дугам окружностей NP и MQ и петле L вокруг точки ветвления. При предельном переходе, когда отрезок MN охватывает всю вещественную ось, вследствие выбора контура в верхней полуплоскости и наличия экспоненциально убывающего множителя в подынтегральной функции получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(\xi)}{\gamma_2} \exp(i\xi x - \gamma_2 z) d\xi = \\ = - \int_L \frac{\bar{f}(\xi)}{\gamma_2} \exp(i\xi x - \gamma_2 z) d\xi. \end{aligned} \quad (1.12)$$

гиперболы $\xi\eta = k_2^2 k_2^2$, показанных на рис. 30. Простое вычисление позволяет определить знак мнимых частей на берегах разрезов. Они указаны на рис. 30, который можно рассматривать как изображение верхнего листа римановой поверхности, на котором $\operatorname{Re} \gamma_2 \geq 0$.

При переходе от (1.7) к контурным интегралам необходимо зафиксировать, для каких значений x ($x < -a$; $|x| < a$; $x > a$) рассматривается

На первый взгляд из вида равенства (1.12) не очевидна целесообразность проделанной работы по замене исходного интеграла контурным. Отметим однако, что для интегралов по петле вокруг разреза из точки ветвления получены эффективные методы асимптотических оценок при больших значениях $R = \sqrt{x^2 + z^2}$ (дальнее поле) [141]. Переход к контурному интегралу может дать некоторые преимущества с вычислительной точки зрения также при анализе ближнего поля. Для этого данный интеграл следует рассмотреть при отсутствии демпфирования, т. е. при $k_2'' = 0$. Тогда разрез принимает вид, указанный на рис. 30 волнистой линией. Если совместить петлю L с берегами разреза, то, учитывая знаки мнимой части γ_2 на левом ($\operatorname{Im} \gamma_2 < 0$) и правом ($\operatorname{Im} \gamma_2 > 0$) берегах, интеграл по петле L можно представить в виде

$$\begin{aligned} - \int_L \frac{\bar{f}(\zeta)}{\gamma_2} \exp(i\zeta x - \gamma_2 z) d\zeta = \\ = 2 \int_0^{\infty} \frac{\bar{f}(i\eta) \exp(-\eta x) \cos(\sqrt{\eta^2 + k_2^2} z)}{\sqrt{\eta^2 + k_2^2}} d\eta + \\ + 2i \int_0^{k_2} \frac{\bar{f}(\xi) \exp(i\xi x) \cos(\sqrt{k_2^2 - \xi^2} z)}{\sqrt{k_2^2 - \xi^2}} d\xi. \end{aligned}$$

В связи с наличием экспоненциально убывающего множителя в интеграле в бесконечных пределах его вычисление может оказаться проще, чем вычисление исходного интеграла вдоль вещественной оси. Окончательно для вычисления смещений при $x > 0$ имеем следующее равенство:

$$\begin{aligned} u_y(x, z) = - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{f}(i\eta) \exp(-\eta x) \cos(\sqrt{\eta^2 + k_2^2} z)}{\sqrt{\eta^2 + k_2^2}} d\eta - \\ - \frac{i}{\pi} \int_0^{k_2} \frac{\bar{f}(\xi) \cos(\sqrt{k_2^2 - \xi^2} z) \exp(i\xi x)}{\sqrt{k_2^2 - \xi^2}} d\xi. \end{aligned} \quad (1.13)$$

При вычислениях для больших значений R следует пользоваться асимптотическими оценками интегралов в комплексной плоскости вдоль пути, концы которого лежат в бесконечности. Вводя в рассмотрение полярные координаты R, θ (см. рис. 29), $x = R \sin \theta$, $z = R \cos \theta$, интеграл по петле L представим в виде

$$I = \int_L \frac{\bar{f}(\zeta)}{\gamma_2} \exp[R(i\zeta \sin \theta - \gamma_2 \cos \theta)] d\zeta. \quad (1.14)$$

Рассматриваемый интеграл по контуру в комплексной плоскости имеет стандартную форму

$$I(R) = \int_L \Phi(\zeta) \exp[Rq(\zeta)] d\zeta, \quad (1.15)$$

где

$$\Phi(\zeta) = \frac{\bar{f}(\zeta)}{(\zeta^2 - k_2^2)^{1/2}}; \quad q(\zeta) = i\zeta \sin \theta - (\zeta^2 - k_2^2)^{1/2} \cos \theta. \quad (1.16)$$

Асимптотическое представление величины этого интеграла как функции большого параметра R имеет различный вид в зависимости от расположения на комплексной плоскости седловых точек функции $q(\zeta)$ и особенностей функции $\Phi(\zeta)$.

Единственной особенностью функции $\Phi(\zeta)$ в нашем случае является точка ветвления $\zeta_b = k_2$. Для определения седловой точки функции $q(\zeta)$ находим ее производную

$$q'(\zeta) = \frac{dq(\zeta)}{d\zeta} = i \sin \theta - \frac{\zeta \cos \theta}{(\zeta^2 - k_2^2)^{1/2}}.$$

Поскольку на рассматриваемом листе римановой поверхности $(k_2^2 \sin^2 \theta - k_2^2)^{1/2} = -ik_2 \cos \theta$, то точка $\zeta = k_2 \sin \theta$ является корнем уравнения $q'(\zeta) = 0$ и, следовательно, изолированной седловой точкой. Соответствующая деформация контура L [141] позволяет получить следующее асимптотическое выражение для $I(R)$ в (1.15) при больших значениях R :

$$I(R) = - \left[- \frac{2\pi}{Rq'(\zeta_c)} \right]^{1/2} \Phi(\zeta_c) \exp |Rq(\zeta_c)| + O(R^{-1/2}).$$

В нашем случае $q'(\zeta_c) = -\frac{i}{k_2 \sin \theta}$, и окончательно получаем

$$I(R) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{k_2 R}} \bar{f}(k_2 \sin \theta) \exp \left[i \left(k_2 R - \frac{3\pi}{4} \right) \right]. \quad (1.17)$$

Таким образом, на большом расстоянии от поверхности ($\theta \neq 90^\circ$) для вычисления компоненты вектора смещений можно использовать выражение

$$u_y(R, \theta) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi k_2 R}} \bar{f}(k_2 \sin \theta) \exp \left[i \left(k_2 R - \frac{3\pi}{4} \right) \right]. \quad (1.18)$$

Характерно, что направленность излучения и его эффективность полностью определяются видом приложенной нагрузки. Отметим также, что вид полученных соотношений свидетельствует о том, что разложение ведется не по параметру R , а по параметру $k_2 R$, т. е. речь идет об оценках на расстояниях, существенно больших длины волны.

По способу получения формулы (1.18) видно, что она не может быть использована для вычислений в предельном случае $\theta = 90^\circ$, т. е. на границе полупространства. Поскольку в этом случае $z = 0$, то функция $q(\zeta)$ не имеет седловых точек и поведение интеграла по петле L полностью определяется наличием точки ветвления $\zeta_b = k_2$ в подынтегральной функции $\Phi(\zeta)$. В этом случае для проведения вычислений удобно непосредственно использовать выражение (1.13).

Во многих случаях асимптотические оценки этого интеграла непосредственно можно получить из асимптотических разложений для функций Ханкеля.

§ 2. ЗАДАЧА ЛЭМБА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотренный выше случай возбуждения SH-волн является наиболее простым в рамках плоской динамической задачи об установившихся волновых движениях в полупространстве. При возбуждении волн нормальными $q_z(x)$ к поверхности полупространства и касательными $q_x(x)$ нагрузками в нем возникают как продольные, так и сдвиговые волны. Наличие границы предопределяет существование поверхностных волн Рэлея, т. е. физически картина волнового движения становится достаточно сложной, что отражается в сложности математических выражений для основных характеристик поля.

Математическая сложность задачи привела к тому, что сколько-нибудь подробный количественный анализ ближнего поля, т. е. зоны вблизи места приложения нагрузки, не выполнен до сих пор, за исключением расчета некоторых интегральных характеристик [233]. Для дальнего поля получены достаточно простые асимптотические выражения, которые наглядно отражают структуру волнового поля.

Особенности волновых полей в задаче Лэмба описаны ниже при подробном рассмотрении плоской задачи о действии на полупространство нормальной нагрузки, неизменной вдоль оси Oy , а именно

$$\frac{1}{2G} \sigma_z = f(x), \quad \frac{1}{2G} \tau_{zx} = 0, \quad z = 0, \quad (2.1)$$

$$f(x) \equiv 0 \quad \text{для} \quad |x| > a.$$

Как и в предыдущем параграфе, гармонический множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается и предполагается, что функция $f(x)$ представляется следующим интегралом Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi) \exp(i\xi x) d\xi, \quad \bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\xi x) dx. \quad (2.2)$$

Таким образом, необходимо найти решение уравнений (1.3) главы 2 для скалярного потенциала ϕ и компоненты a_y векторного потенциала, удовлетворяющее граничным условиям (2.2) и условию, что приложенная периодическая во времени нагрузка является единственным источником энергии. Способ выражения последнего требования через компоненты вектора смещений в данном случае следует обсудить подробнее после получения формального решения краевой задачи (2.1).

Вводя в рассмотрение преобразованные по Фурье потенциалы $\bar{\varphi}(\xi, z)$ и $\bar{a}_y(\xi, z)$, из исходных уравнений (1.3) главы 2 для их определения получаем

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dz^2} - (\xi^2 - k_1^2) \bar{\varphi} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2 \bar{a}_y}{dz^2} - (\xi^2 - k_2^2) \bar{a}_y = 0.$$

Решениями, формально удовлетворяющими этим уравнениям, являются функции

$$\bar{\varphi}(\xi, z) = \Phi_0(\xi) \exp(-\gamma_1 z), \quad (2.4)$$

$$\bar{a}_y(\xi, z) = A_0(\xi) \exp(-\gamma_2 z),$$

где

$$\gamma_1 = (\xi^2 - k_1^2)^{1/2}; \quad \gamma_2 = (\xi^2 - k_2^2)^{1/2}; \quad k_1 = \frac{\omega}{c_1}; \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}. \quad (2.5)$$

Здесь γ_1 и γ_2 — многозначные функции. Решением уравнений (2.3) будет любая линейная комбинация выражений (2.4), соответствующих разным значениям функций γ_1 и γ_2 . Эту неоднозначность в выборе решений можно устранить путем согласования вида выражений для $\varphi(x, z)$ и $a_y(x, z)$ с физическими требованиями единственности источника энергии. Казалось бы, что в данном случае достаточно потребовать, чтобы интеграл по поверхности полуцилиндра большого радиуса R от нормальной к его поверхности составляющей вектора Умова был положительным. Однако вследствие существования в упругом теле двух типов волн можно предположить такую ситуацию, когда указанное общее требование выполняется, однако в продольных или поперечных волнах имеется приток энергии из бесконечности. В связи с этим при конкретизации частных решений (2.4) потребуем, чтобы энергия от нагруженного участка границы уносилась на бесконечность каждым из двух возможных типов волн. Как показано в следующей главе, такой подход к формулировке условий излучения, когда накладываются ограничения на каждый возможный тип движения, особенно важен в задаче о волноводном распространении упругих волн.

Соответствующие решениям (2.4) выражения для компонент вектора смещений имеют вид

$$u_x = \int_{-\infty}^{\infty} [i\xi \Phi_0(\xi) \exp(i\xi x - \gamma_1 z) - \gamma_2 A_0(\xi) \exp(i\xi x - \gamma_2 z)] d\xi, \quad (2.6)$$

$$u_z = \int_{-\infty}^{\infty} [-\gamma_1 \Phi_0(\xi) \exp(i\xi x - \gamma_1 z) - i\xi A_0(\xi) \exp(i\xi x - \gamma_2 z)] d\xi.$$

Удовлетворение граничным условиям приводит к следующей системе для плотностей $\Phi_0(\xi)$ и $A_0(\xi)$ интегральных представлений (2.6):

$$\Phi_0(\xi) \frac{\xi^2 + \gamma_2^2}{2} + A_0(\xi) i\xi \gamma_2 = \frac{1}{2\pi} \bar{f}(\xi), \quad (2.7)$$

$$-\Phi_0(\xi) i\xi \gamma_1 + A_0(\xi) \frac{\xi^2 + \gamma_2^2}{2} = 0.$$

Ее решение имеет вид

$$\Phi_0(\xi) = \frac{(\xi^2 + \gamma_2^2) \bar{f}(\xi)}{\pi F(\xi)}, \quad A_0(\xi) = \frac{2i\xi \gamma_1 \bar{f}(\xi)}{\pi F(\xi)}, \quad (2.8)$$

где

$$F(\xi) = (\xi^2 + \gamma_2^2)^2 - 4\gamma_1 \gamma_2 \xi^2. \quad (2.9)$$

Таким образом, выражения для компонент вектора перемещений приобретают вид

$$\begin{aligned} u_x(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\xi \bar{f}(\xi) (2\xi^2 - k_2^2)}{\pi F(\xi)} \exp(i\xi x - \gamma_1 z) d\xi - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i\xi \gamma_1 \gamma_2 \bar{f}(\xi)}{\pi F(\xi)} \exp(i\xi x - \gamma_2 z) d\xi, \\ u_z(x, z) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1 (2\xi^2 - k_2^2) \bar{f}(\xi)}{\pi F(\xi)} \exp(i\xi x - \gamma_1 z) d\xi + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\xi^2 \gamma_1 \bar{f}(\xi)}{\pi F(\xi)} \exp(i\xi x - \gamma_2 z) d\xi. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Требование о раздельном удовлетворении условий излучения для каждого типа волн предопределяет выбор значений многозначных функций γ_1 и γ_2 в экспоненциальных выражениях, входящих в (2.6). Каждая из этих экспонент может рассматриваться как плоская волна. В связи с этим сформулированные выше условия излучения для достаточно больших z будут, конечно, выполнены, если каждая такая волна является либо неоднородной (убывающей экспоненциально по z), либо бегущей от границы в бесконечность.

Из первого требования следует, что при $|\xi| > k_1$ ($|\xi| > k_2$) значения функции γ_1 (γ_2) должны быть положительными, т. е.

$$\gamma_1 = \sqrt{\xi^2 - k_1^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\xi^2 - k_2^2}. \quad (2.11)$$

Второе требование следующим образом определяет допустимые значения γ_l при $|\xi| < k_l$, $l = 1, 2$;

$$\gamma_1 = -i\sqrt{k_1^2 - \xi^2}, \quad \gamma_2 = -i\sqrt{k_2^2 - \xi^2}. \quad (2.12)$$

После введения соотношений (2.11) и (2.12) подынтегральные выражения в (2.10) полностью конкретизированы. Однако значения u_x и u_z однозначно определить не удастся. Формально это связано с тем, что подынтегральные функции в (2.10) имеют особенность в точках $\xi = \pm k_R$, где k_R — рэлеевский корень уравнения $F(\xi) = 0$. При указанном выше выборе значений функций γ_1 и γ_2 , входящих в это уравнение, оно не имеет других корней. Однозначное определение значений u_x и u_z и, следовательно, всех характеристик волнового поля сводится к указанию способа вычисления несобственных интегралов в (2.10), соответствующего физическому содержанию задачи. Как указал Лэмб [207], трактовка выражений (2.10) в смысле главного значения приводит к результату, противоречащему физическому содержанию задачи.

Физически неоднозначность представления (2.10) связана с тем, что сформулированные выше требования к решению не исключают возможности добавить к компонентам смещений стоячую рэлеевскую волну с произвольной амплитудой A , т. е.

$$u_x^R = Ak_R \left[\exp(-\sqrt{k_R^2 - k_1^2}z) - \frac{2\sqrt{k_R^2 - k_1^2}\sqrt{k_R^2 - k_2^2}}{2k_R^2 - k_2^2} \times \right. \\ \left. \times \exp(-\sqrt{k_R^2 - k_2^2}z) \right] \sin k_R x, \quad (2.13) \\ u_z^R = A \sqrt{k_R^2 - k_1^2} \left[\exp(-\sqrt{k_R^2 - k_1^2}z) - \right. \\ \left. - \frac{2k_R^2}{2k_R^2 - k_2^2} \exp(-\sqrt{k_R^2 - k_2^2}z) \right] \cos k_R x.$$

Предыдущие ограничения или правила выбора значений многозначных функций определили направленность потока энергии в уходящих от границы продольных и сдвиговых волнах. Однако неоднородные по z и бегущие по x волны никаким дополнительным требованиям не подчинены. Именно это является причиной отмеченной неоднородности выражений (2.10). Суперпозиция неоднородных продольных и сдвиговых волн вблизи границы полупространства образует поверхностную волну Рэлея. Таким образом, для полной конкретизации задачи необходимо потребовать, чтобы поток энергии в рэлеевской волне был направлен от места приложения нагрузки.

§ 3. ЗАДАЧА ЛЭМБА. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СМЕЩЕНИЙ КОНТУРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Построение эффективного способа учета направленности рэлеевской волны является еще одним дополнительным стимулом, наряду с упомянутыми в § 1 данной главы при рассмотрении

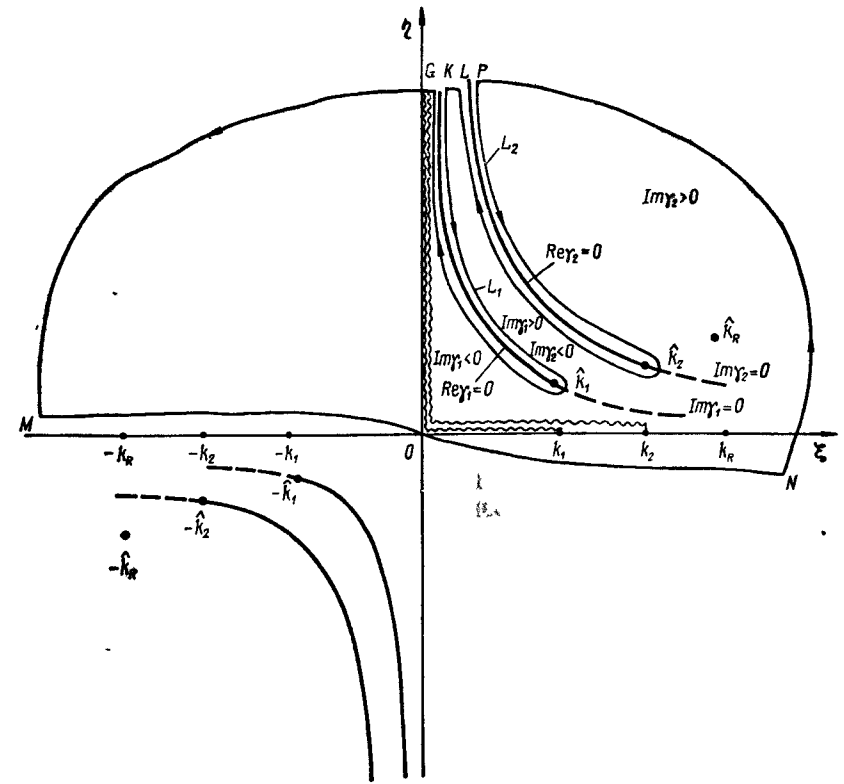


Рис. 31.

СН-волн, для перехода в выражениях (2.10) к контурному интегрированию. По высказанным выше соображениям здесь также удобно временно ввести в среду малое затухание. При этом как точки ветвления, так и полюса подынтегральных функций в (2.10) смещаются с вещественной оси. Схематическое изображение этих точек на комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ приведено на рис. 31. После введения затухания интегралы в (2.10) становятся однозначными и, в принципе, могут быть найдены численно. Их значения при отсутствии затухания можно получить при соответствующем предельном переходе.

Рассматриваемые на комплексной плоскости ζ подынтегральные выражения в (2.10) имеют четыре точки ветвления: $\pm(k_1' + ik_1'')$, $\pm(k_2' + ik_2'')$, $k_2' > 0$, $k_2'' > 0$, $|k_1| \gg k_1'$, $|k_1| \gg k_1''$ и два полюса в точках $\zeta_R = \pm(k_R' + ik_R'')$. Формирование области однозначности подынтегральной функции связано с проведением разрывов в плоскости ζ и образованием четырехлистной римановой поверхности. При выполнении разрывов и выборе нужного листа используются приемы и способы, описанные в § 1 данной главы. На рис. 31 показан

нужный лист, на котором $\text{Re } \gamma_1 \geq 0$ и $\text{Re } \gamma_2 \geq 0$. Здесь также указаны области постоянного знака мнимых частей функций γ_1 и γ_2 .

Для перехода от интеграла по вещественной оси к контурному интегралу необходимо зафиксировать величину x . Как и ранее, выкладки проведем для случая $x > a$. Тогда можно образовать контур $MNPL_2LKL_1G$ с окружностями большого радиуса в верхней полуплоскости. Используя теорему Коши и лемму Жордана, приходим к равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\xi)}{F(\xi)} \exp(i\xi x - \gamma z) d\xi = 2\pi i \frac{\Psi(\zeta_R)}{F'(\zeta_R)} \exp(i\zeta_R x - \gamma z) - \int_{L_1} \frac{\Psi(\zeta)}{F(\zeta)} \exp(i\zeta x - \gamma z) d\zeta - \int_{L_2} \frac{\Psi(\zeta)}{F(\zeta)} \exp(i\zeta x - \gamma z) d\zeta. \quad (3.1)$$

Следующий шаг в преобразовании выражений (3.1) заключается в рассмотрении предельного перехода к случаю среды без затухания и получении формул, позволяющих проводить вычисления при любых значениях x и z .

Устранение демпфирования в среде приводит к тому, что разрезы в плоскости ζ деформируются и занимают положение, показанное на рис. 31 волнистыми линиями. При этом разрез из точки $\xi = k_1$ состоит из отрезка вещественной оси $0 \leq \xi \leq k_1$ и положительной части мнимой оси $\eta \geq 0$. Разрез из точки $\xi = k_2$ состоит из отрезка вещественной оси $0 \leq \xi \leq k_2$ и также проходит по положительной мнимой полуоси $\eta \geq 0$. Очень важно при переходе в (3.1) к интегралам по берегам указанных разрезов правильно учесть знаки мнимых частей функций γ_1 и γ_2 . Подробности такого перехода проиллюстрируем на примере интеграла (3.1), для которого $\gamma = \gamma_1$.

Интеграл по петле L_1 с учетом знаков мнимых частей γ_1 и γ_2 , показанных на рис. 31, преобразуется в сумму четырех интегралов по следующим интервалам:

$$\begin{aligned} \infty > \eta \geq 0, \quad \gamma_1 &= i\sqrt{\eta^2 + k_1^2}, \quad \gamma_2 = -i\sqrt{\eta^2 + k_2^2}; \\ 0 \leq \xi \leq k_1, \quad \gamma_1 &= i\sqrt{k_1^2 - \xi^2}, \quad \gamma_2 = -i\sqrt{k_2^2 - \xi^2}; \\ k_1 \leq \xi \leq k_2, \quad \gamma_1 &= -i\sqrt{k_1^2 - \xi^2}, \quad \gamma_2 = -i\sqrt{k_2^2 - \xi^2}; \\ 0 \leq \eta \leq \infty, \quad \gamma_1 &= -i\sqrt{\eta^2 + k_1^2}, \quad \gamma_2 = -i\sqrt{\eta^2 + k_2^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} & \int_{L_1} \frac{\Psi(\zeta)}{F(\zeta)} \exp(i\zeta x - \gamma_1 z) d\zeta = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\Psi(i\eta) \exp(-\eta x + i\sqrt{\eta^2 + k_1^2} z) i d\eta}{(2\eta^2 + k_2^2)^2 - 4\eta^2 \sqrt{\eta^2 + k_1^2} \sqrt{\eta^2 + k_2^2}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^{\infty} \frac{\Psi(i\eta) \exp(-\eta x - i\sqrt{\eta^2 + k_1^2} z) i d\eta}{(2\eta^2 + k_2^2)^2 + 4\eta^2 \sqrt{\eta^2 + k_1^2} \sqrt{\eta^2 + k_2^2}} + \\ & + \int_0^{k_1} \frac{\Psi(\xi) \exp(i\xi x - i\sqrt{k_1^2 - \xi^2} z) d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^2 - 4\xi^2 \sqrt{k_1^2 - \xi^2} \sqrt{k_2^2 - \xi^2}} - \\ & - \int_0^{k_1} \frac{\Psi(\xi) \exp(i\xi x + i\sqrt{k_1^2 - \xi^2} z) d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^2 + 4\xi^2 \sqrt{k_1^2 - \xi^2} \sqrt{k_2^2 - \xi^2}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Интеграл по петле L_2 представляется в виде суммы шести интегралов по следующим интервалам:

$$\begin{aligned} \infty > \eta \geq 0, \quad \gamma_1 &= i\sqrt{\eta^2 + k_1^2}, \quad \gamma_2 = i\sqrt{\eta^2 + k_2^2}; \\ 0 \leq \xi \leq k_1, \quad \gamma_1 &= i\sqrt{k_1^2 - \xi^2}, \quad \gamma_2 = i\sqrt{k_2^2 - \xi^2}; \\ k_1 \leq \xi \leq k_2, \quad \gamma_1 &= \sqrt{\xi^2 - k_1^2}, \quad \gamma_2 = i\sqrt{k_2^2 - \xi^2}; \\ k_2 \geq \xi \geq k_1, \quad \gamma_1 &= \sqrt{\xi^2 - k_1^2}, \quad \gamma_2 = -i\sqrt{k_2^2 - \xi^2}; \\ k_1 \geq \xi \geq 0, \quad \gamma_1 &= i\sqrt{k_1^2 - \xi^2}, \quad \gamma_2 = -i\sqrt{k_2^2 - \xi^2}; \\ 0 \leq \eta < \infty, \quad \gamma_1 &= i\sqrt{\eta^2 + k_1^2}, \quad \gamma_2 = -i\sqrt{\eta^2 + k_2^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{L_2} \frac{\Psi(\zeta)}{F(\zeta)} \exp(i\zeta x - \gamma_1 z) d\zeta = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\Psi(i\eta) \exp(-\eta x - i\sqrt{\eta^2 + k_1^2} z) i d\eta}{(2\eta^2 + k_2^2)^2 + 4\eta^2 \sqrt{\eta^2 + k_1^2} \sqrt{\eta^2 + k_2^2}} - \\ & - \int_0^{\infty} \frac{\Psi(i\eta) \exp(-\eta x - i\sqrt{\eta^2 + k_1^2} z) i d\eta}{(2\eta^2 + k_2^2)^2 - 4\eta^2 \sqrt{\eta^2 + k_1^2} \sqrt{\eta^2 + k_2^2}} + \\ & + \int_0^{k_1} \frac{\Psi(\xi) \exp(i\xi x - i\sqrt{k_1^2 - \xi^2} z) d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^2 + 4\xi^2 \sqrt{k_1^2 - \xi^2} \sqrt{k_2^2 - \xi^2}} - \\ & - \int_0^{k_1} \frac{\Psi(\xi) \exp(i\xi x - i\sqrt{k_1^2 - \xi^2} z) d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^2 - 4\xi^2 \sqrt{k_1^2 - \xi^2} \sqrt{k_2^2 - \xi^2}} + \\ & + \int_{k_1}^{k_2} \frac{\Psi(\xi) \exp(i\xi x - \sqrt{\xi^2 - k_1^2} z) d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^2 - 4\xi^2 i \sqrt{\xi^2 - k_1^2} \sqrt{k_2^2 - \xi^2}} - \\ & - \int_{k_1}^{k_2} \frac{\Psi(\xi) \exp(i\xi x - \sqrt{\xi^2 - k_1^2} z) d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^2 + 4\xi^2 i \sqrt{\xi^2 - k_1^2} \sqrt{k_2^2 - \xi^2}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Следует обратить внимание на то, что при записи интервалов интегрирования в (3.2) и (3.4) соблюдена очевидная связь с направлением обхода петли.

При подстановке выражений для интегралов по петлям в соотношение (3.2) некоторые интегралы взаимно уничтожаются, и в результате приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\xi)}{F(\xi)} \exp(i\xi x - \gamma_1 z) d\xi = \\ & = 2\pi i \frac{\Psi(k_R)}{F'(k_R)} \exp(ik_R x - \sqrt{k_R^2 - k_1^2} z) + \\ & + 2 \int_0^{\infty} \frac{\psi(\eta) \exp(-\eta x) \sin(\sqrt{\eta^2 + k_1^2} z) d\eta}{(2\eta^2 + k_2^2)^2 - 4\eta^2 \sqrt{\eta^2 + k_1^2} \sqrt{\eta^2 + k_2^2}} + \\ & + 2i \int_0^{k_1} \frac{\psi(\xi) \exp(i\xi x) \sin(\sqrt{k_1^2 - \xi^2} z) d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^2 + 4\xi^2 \sqrt{k_1^2 - \xi^2} \sqrt{k_2^2 - \xi^2}} - \\ & - 8i \int_{k_1}^{k_2} \frac{\xi^2 \psi(\xi) \sqrt{\xi^2 - k_1^2} \sqrt{k_2^2 - \xi^2} \exp(i\xi x - \sqrt{\xi^2 - k_1^2} z) d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^4 + 16\xi^4 (\xi^2 - k_1^2) (k_2^2 - \xi^2)}. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Полученное соотношение, выражающее исходный интеграл вдоль вещественной оси, имеет значение не только с точки зрения отыскания удобных формул для проведения вычислений. Это равенство не является тождеством в строгом математическом смысле, поскольку интеграл слева неопределен, в то время как справа имеем однозначно трактуемое выражение. Поэтому равенством (3.6), по существу, задается правило расшифровки математически неопределенной величины в соответствии с физическим смыслом задачи.

Аналогично преобразуются и другие интегралы, входящие в соотношение (2.10). После несложных, но достаточно громоздких выкладок для функций $u_x(x, z)$ и $u_z(x, z)$ можно получить явные выражения в виде суммы однозначно определенных интегралов. Здесь мы приведем только формулы для смещений на свободной поверхности $x > a$:

$$\begin{aligned} u_x(x, 0) &= -\frac{2k_R \bar{f}(k_R)}{F'(k_R)} (2k_R^2 - k_2^2 - 2\sqrt{k_R^2 - k_1^2} \sqrt{k_R^2 - k_2^2}) \times \\ &\times \exp(ik_R x) + \\ &+ \frac{4k_2^2}{\pi} \int_{k_1}^k \frac{\xi \bar{f}(\xi) \sqrt{\xi^2 - k_1^2} \sqrt{k_2^2 - \xi^2} (2\xi^2 - k_2^2) \exp(i\xi x) d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^4 + 16\xi^4 (\xi^2 - k_1^2) (k_2^2 - \xi^2)}, \\ u_z(x, 0) &= 2i \frac{\bar{f}(k_R) k_2^2 \sqrt{k_R^2 - k_1^2}}{F'(k_R)} \exp(ik_R x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{2k_2^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{f}(\eta) \sqrt{\eta^2 + k_1^2} \exp(-\eta x) d\eta}{(2\eta^2 + k_2^2)^2 - 4\eta^2 \sqrt{\eta^2 + k_1^2} \sqrt{\eta^2 + k_2^2}} - \\ & - \frac{2ik_2^2}{\pi} \int_0^{k_1} \frac{\bar{f}(\xi) \sqrt{k_1^2 - \xi^2} \exp(i\xi x) d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^2 - 4\xi^2 \sqrt{k_1^2 - \xi^2} \sqrt{k_2^2 - \xi^2}} - \\ & - \frac{8ik_2^2}{\pi} \int_{k_1}^{k_2} \frac{\bar{f}(\xi) \xi^2 (\xi^2 - k_1^2) \sqrt{k_2^2 - \xi^2} \exp(i\xi x) d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^4 + 16\xi^4 (\xi^2 - k_1^2) (k_2^2 - \xi^2)}. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Формулы (3.7) неприменимы в случае $|x| \leq a$, поскольку при замыкании контура в верхней полуплоскости условия леммы Жордана не выполняются. Для получения формул смещений в этом случае необходимо представить функцию $\bar{f}(\xi)$ в виде

$$\bar{f}(\xi) = f_1(\xi) \exp(i\xi a) + f_1^*(\xi) \exp(-i\xi a). \quad (3.8)$$

Такое представление легко получается при последовательном интегрировании по частям исходного соотношения (2.2). После этого замыкание контура для первого слагаемого следует проводить в верхней полуплоскости ξ , а для второго — в нижней. Не останавливаясь в деталях на выкладках, аналогичных приведенным выше, приведем только выражение для $\text{Im } u_z(x, 0)$:

$$\begin{aligned} \text{Im } u_z(x, 0) &= \frac{k_2^2}{\pi} \left\{ 2\pi \frac{\bar{f}(k_R)}{F'(k_R)} \sqrt{k_R^2 - k_1^2} \cos(k_R x) - \right. \\ &- 2 \int_0^{k_1} \bar{f}(\xi) \frac{\sqrt{k_1^2 - \xi^2} \cos(\xi x) d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^2 + 4\xi^2 \sqrt{k_1^2 - \xi^2} \sqrt{k_2^2 - \xi^2}} - \\ &\left. - 8 \int_{k_1}^{k_2} \bar{f}(\xi) \frac{\xi^2 (\xi^2 - k_1^2) \sqrt{k_2^2 - \xi^2} \cos(\xi x) d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^4 + 16\xi^4 (\xi^2 - k_1^2) (k_2^2 - \xi^2)} \right\} \quad (|x| \leq a). \quad (3.9) \end{aligned}$$

Эта формула используется далее (см § 5 данной главы) для вычисления работы внешних сил.

§ 4. ЗАДАЧА ЛЭМБА. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ СМЕЩЕНИЙ В ДАЛЬНЕМ ПОЛЕ

Описанный выше способ трактовки интегралов в выражениях для смещений (2.10) позволяет, в принципе, вычислить их во всем полупространстве. Однако прямое вычисление интегралов при больших значениях $R = \sqrt{x^2 + z^2}$ может быть затруднено наличием быстро осциллирующих функций в подынтегральных выражениях. При таких значениях $R \gg a$ целесообразно получить асимптотические формулы, удобные для анализа дальнего поля.

Основой для получения таких асимптотических выражений является общая теория асимптотического вычисления контурных интегралов в комплексной плоскости методом наискорейшего спуска [141]. Эта теория развита для интегралов типа

$$I(R) = \int_L \Phi(\zeta) \exp[Rq(\zeta)] d\zeta, \quad (4.1)$$

где $\Phi(\zeta)$ и $q(\zeta)$ — аналитические функции комплексной переменной ζ вдоль пути интегрирования L , уходящего концами в бесконечность; R — большой положительный параметр.

Асимптотическое представление интеграла (4.1) существенно зависит от взаимного расположения особых точек функций $\Phi(\zeta)$ и $q'(\zeta)$, нулей производной $q'(\zeta)$ и контура L . Из большого числа возможных различных ситуаций при анализе выражений (3.1) необходимо различать два случая.

1. Контур L охватывает точку ветвления ζ_b функции $\Phi(\zeta)$, которая также является точкой ветвления функции $q(\zeta)$. Тогда для интеграла (4.1) имеем следующую оценку [141]:

$$I(R) \approx \pm \sqrt{\frac{2\pi}{R|q''(\zeta_c)|}} \Phi(\zeta_c) \times \exp\left\{Rq(\zeta_c) + i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign}[\operatorname{Im} q''(\zeta_c)]\right\}. \quad (4.2)$$

Здесь ζ_c — седловая точка функции $q(\zeta)$, т. е. корень уравнения $q'(\zeta) = 0$.

2. Контур L охватывает точку ветвления ζ_b функции $\Phi(\zeta)$, в окрестности которой функция $q(\zeta)$ регулярна. В этом случае справедлива асимптотическая оценка

$$I(R) \approx \pm \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{R^3|q'(\zeta_b)|^3}} [(\zeta - \zeta_b)^{1/2} \Phi'(\zeta)]|_{\zeta=\zeta_b} \times \exp\left\{Rq(\zeta_b) - i\frac{3}{2} \arg[-q'(\zeta_b)]\right\}. \quad (4.3)$$

Знаки в правых частях обеих асимптотических формул определяются в соответствии с принятым правилом знаков для направления обхода контура L . Указанные на рис. 31 направления обхода петель считаются отрицательными, и поэтому далее при использовании формул (4.2) и (4.3) выбирается отрицательный знак.

В соответствии с представлением (3.1) каждый из интегралов, входящих в выражения (2.10), состоит из трех слагаемых — кроме значения вычета в точке рэлеевского корня k_R еще есть интегралы по двум петлям L_1 и L_2 , обходящим разрезы соответственно из точек ветвления $\zeta = k_1$ и $\zeta = k_2$. При использовании соотношений (4.2) и (4.3) для асимптотической оценки интегралов по петлям необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство, имеющее место применительно к конкретным выражениям (2.10).

Рассмотрим, например, первый интеграл в выражении для u_x ,

содержащий в подынтегральной функции множитель $\exp(i\zeta x - \gamma_1 z)$. При вычислении этого интеграла по петле L_1 , т. е. по петле вокруг точки ветвления, общей для экспоненциального множителя и функции $F(\zeta)$, нужно пользоваться формулой (4.2). При этом получаем, что с ростом величины R рассматриваемая составляющая убывает как $R^{1/2}$. Для вычисления этого интеграла вокруг точки ветвления $\zeta = k_2$ следует исходить из формулы (4.3), которая указывает на то, что соответствующая величина убывает с ростом R как $R^{3/2}$. Таким образом, с точки зрения скорости убывания с ростом величины R интегралы по петлям L_1 и L_2 для первого слагаемого в выражении для u_x различаются на порядок. Поэтому в дальнейших выкладках, ограничиваясь лишь главным членом асимптотики, интеграл по петле L_2 можно не учитывать. Ясно, что подобные рассуждения в полной мере применимы и к остальным интегралам в (2.10). При этом, например, при вычислении второго слагаемого в выражении для u_x в (2.10) можно не учитывать вклад по петле L_1 .

Отметим также, что в соответствии с равенствами (3.1) каждый интеграл в (2.1) дает определенный вклад в рэлеевскую волну. Для всех случаев, кроме $z = 0$ ($\theta = 90^\circ$), соответствующие слагаемые обладают экспоненциально убывающими по R множителями. В связи с этим для внутренних точек полупространства на большом расстоянии от области приложения нагрузки их можно не учитывать. Выражения для смещений точек границы приведены далее.

После этих замечаний становится понятной структура асимптотических выражений для компонент вектора смещений, которые принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} u_x \approx & \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \cos \theta \left[i \frac{k_1^{1/2} \bar{f}(k_1 \sin \theta)}{F(k_1 \sin \theta)} (2 \sin^2 \theta - k^2) \sin \theta \times \right. \\ & \times \exp\left(ik_1 R - i\frac{\pi}{4}\right) - k_2^2 \frac{\bar{f}(k_2 \sin \theta)}{F(k_2 \sin \theta)} \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \sin 2\theta \times \\ & \left. \times \exp\left(ik_2 R - i\frac{\pi}{4}\right) \right], \\ u_z \approx & \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \cos \theta \left[i \frac{k_1^{1/2} \bar{f}(k_1 \sin \theta)}{F(k_1 \sin \theta)} (2 \sin^2 \theta - k^2) \cos \theta \times \right. \\ & \times \exp\left(ik_1 R - i\frac{\pi}{4}\right) + 2k_2^2 \frac{\bar{f}(k_2 \sin \theta)}{F(k_2 \sin \theta)} \sin^2 \theta \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \times \\ & \left. \times \exp\left(ik_2 R - i\frac{\pi}{4}\right) \right], \quad \left(k^2 = \frac{k_2^2}{k_1^2}\right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Если учесть временную зависимость всех величин, определяемую множителем $\exp(-i\omega t)$, то соотношения (4.4) указывают, что каждый компонент вектора смещений представляет собой, по сути, суперпозицию продольных и поперечных бегущих волн с соответствующими волновыми числами k_1 и k_2 . Структура волнового поля

становится более ясной, если от представления вектора смещений в декартовых координатах перейти к его представлению в полярных координатах, которые определяются соотношениями

$$\begin{aligned} u_R &= u_x \cos \theta + u_z \sin \theta, \\ u_\theta &= u_x \sin \theta - u_z \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Образовывая из асимптотических выражений (4.4) комбинации (4.5), получаем

$$\begin{aligned} u_R &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi R}} k_1^{1/2} \frac{\bar{f}(k_1 \sin \theta)}{F(k_1 \sin \theta)} (k^2 - 2 \sin^2 \theta) \cos \theta \exp \left(i k_1 R - i \frac{3\pi}{4} \right), \\ u_\theta &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi R}} k_2^{1/2} \frac{\bar{f}(k_2 \sin \theta)}{F(k_2 \sin \theta)} \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \sin 2\theta \exp \left(i k_2 R - i \frac{5\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из формул (4.6) видно, что на больших расстояниях от места приложения нагрузки продольные волны вызывают преимущественно радиальные смещения, а поперечные волны — окружные. Такое разделение по кинематике послужит базой для обоснованного разделения потоков энергии в волновом движении по двум типам волн, несмотря на то что принцип суперпозиции энергии для волн, бегущих в одном направлении, не применим. Отметим также, что при вычислении величины $\left(\sin^2 \theta - \frac{1}{k^2} \right)^{1/2}$ необходимо пользоваться правилами, которые введены для вычисления значений γ_2 на верхнем листе римановой поверхности.

В частном случае воздействий типа сосредоточенной вертикальной или горизонтальной силы, двойной силы, центра сжатия изысканный вывод выражений для смещений в дальнем поле приведен в работе [53]. В основу вывода положен анализ процесса отражения волн от свободной границы полупространства.

Выражения (4.6) не пригодны для вычисления компонентов смещений для дальнего поля в точках граничной поверхности ($x \gg a$). Здесь необходимо прежде всего учесть вклад рэлеевской волны. Кроме того, для оценки асимптотических значений интегралов в (3.1), вследствие того что при $z = 0$ все показатели экспонент являются регулярными функциями в окрестности точек ветвления функции $F(\xi)$, следует использовать соотношения (4.3). Окончательно для вычислений смещений точек границы полупространства получаем следующие асимптотические выражения:

$$\begin{aligned} u_x(x, 0) &= -2\bar{f}(k_R) k_R \frac{2k_R^2 - k_2^2 - 2\sqrt{k_R^2 - k_1^2} \sqrt{k_R^2 - k_2^2}}{F'(k_R)} \exp(ik_R x) + \\ &+ 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{f}(k_1) \sqrt{k_2^2 - k_1^2} k_1^2 k_2^2}{(2k_1^2 - k_2^2)^3 (k_1 x)^{3/2}} \exp \left(i k_1 x + i \frac{3\pi}{4} \right) - \\ &- 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{f}(k_2) \sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{k_2 (k_2 x)^{3/2}} \exp \left(i k_2 x + i \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-5/2}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} u_z(x, 0) &= 2k_2^2 i \frac{\bar{f}(k_R) \sqrt{k_R^2 - k_1^2}}{F'(k_R)} \exp(ik_R x) + \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{f}(k_1) k_1^2 k_2^2}{(k_1 x)^{3/2} (2k_1^2 - k_2^2)^3} \exp \left(i k_1 x + i \frac{3\pi}{4} \right) + \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{f}(k_2)}{(k_2 x)^{3/2}} \exp \left(i k_2 x + i \frac{3\pi}{4} \right) + O(x^{-5/2}). \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, основной вклад в возмущение плоской границы полупространства на достаточно большом расстоянии от места приложения нагрузки вносят рэлеевские волны, которые в рассматриваемом случае плоской задачи не убывают по амплитуде. Движения, соответствующие продольным и сдвиговым волнам, убывают с ростом x как $x^{3/2}$.

В заключение отметим следующее. Основой найденных выражений являются общие асимптотические формулы (4.2) и (4.3). Получение таких формул базируется на использовании стандартной техники метода наискорейшего спуска [141]. Однако вид функции $\Phi(\xi)$ в (4.1), имеющей в данном случае две точки ветвления и полюс, значительно усложняет конкретные выкладки, связанные с построением пути наискорейшего спуска на верхнем листе четырехлистной римановой поверхности. Примером таких трудных ситуаций может быть случай, возникающий в связи с возможностью совпадения седловой точки $\xi_s = k_2 \sin \theta$ с точкой ветвления $\xi_b = k_1$ при некотором угле θ . Подробное обоснование справедливости асимптотических оценок интегралов в том виде, как это представлено выше, содержится в работе [233].

Важным вопросом, возникающим по отношению к приведенным выражениям для смещений (4.6), является вопрос о возможности проведения вычислений с их использованием. Суть вопроса в том, какие значения R можно считать большими. Необходимый для ответа на этот вопрос анализ можно провести лишь в рамках более полных, чем (4.2) и (4.3), асимптотических выражений, учитывающих, например, возможность близкого расположения седловых точек и точек ветвления. Не останавливаясь на подробностях такого анализа, укажем на главный вывод — формулы (4.6), по существу, предполагают не только малость по сравнению с единицей отношения длины волны к величине R , но и выполнение неравенств

$$k_1 R (1 - \sin \theta) \gg 1, \quad k_2 R (1 - \sin \theta) \gg 1. \quad (4.8)$$

Эти неравенства в определенной мере показывают, что степень «близости» седловых точек и точек ветвления также имеет относительный характер.

§ 5. ЗАДАЧА ЛЭМБА. НАПРАВЛЕННОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Из формул (4.6) видно, что направленность излучения и энергетическая эффективность возбуждения волн в полупространстве в значительной мере зависят от распределения нагрузки по его поверхности. После выхода работы Лэмба [207] наибольшее внимание при конкретных вычислениях уделялось случаю равномерного распределения нормальных напряжений или предельному случаю сосредоточенной силы. Подробный исторический обзор проблемы и описание работ, содержащих решения большого числа конкретных задач, сделан в статье [53] и обзоре [230]. Здесь мы приведем лишь данные о некоторых характеристиках волновых полей в полупространстве, основываясь на работах [53, 214, 233, 286].

Выведенные в предыдущем параграфе формулы для смещений в дальнем поле, т. е. на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны и размером области нагружения (неравенства (4.8)), являются исходными при исследовании направленности создаваемого внешней нагрузкой волнового поля. Здесь мы остановимся на случае равномерного нагружения, т. е. когда $f(x) = f_0 = \text{const}$ в (2.1). Преобразование Фурье при этом дает следующее выражение:

$$\bar{f}(\xi) = 2f_0a \frac{\sin \xi a}{\xi a}. \quad (5.1)$$

В предельном случае сосредоточенной силы при $a \rightarrow 0$, $4Gf_0a \rightarrow Q$ имеем

$$\bar{f}(\xi) = \frac{Q}{2G}. \quad (5.2)$$

Для случая сосредоточенного воздействия (5.2) характеристики направленности, т. е. зависящие от θ множители в (4.6), имеют вид

$$u_R^{(0)} = \frac{(k^2 - 2 \sin^2 \theta) \cos \theta}{F(k_1 \sin \theta)}, \quad u_\theta^{(0)} = \frac{\sqrt{|k^2 \sin^2 \theta - 1|} \sin 2\theta}{|F(k_2 \sin \theta)|}. \quad (5.3)$$

В выражении (5.3) для характеристики направленности окружных смещений, связанных с волной сдвига, содержатся модули некоторых величин. Сами эти величины в зависимости от угла θ могут быть как вещественными, так и комплексными. В выражении для $u_R^{(0)}$, напротив, все величины вещественны для любых θ . Такое чисто формальное различие интересно и с точки зрения физики. Оно свидетельствует о различии в поведении смещений в продольных и сдвиговых волнах. Вещественность всех величин в $u_R^{(0)}$ означает, что на поверхности $R = \text{const}$ при распространении гармонической волны от источника максимальное радиальное смещение достигается в один и тот же для всех точек момент времени. Напротив, в сдвиговой волне максимальное значение окружного смещения $u_\theta^{(0)}$ достигается в разных точках поверхности в разное время.

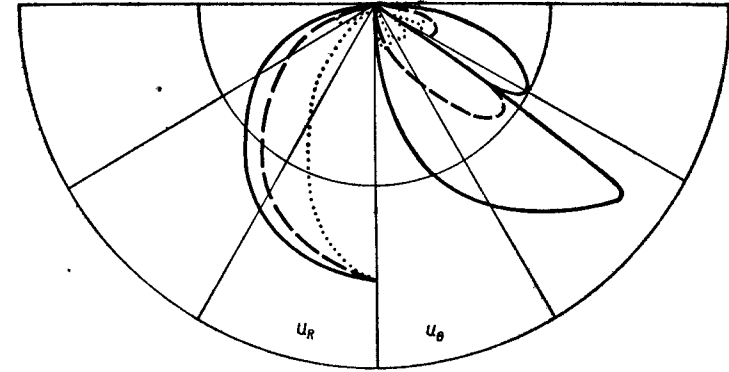


Рис. 32.

В случае равномерно распределенной по некоторой площадке нагрузки характеристики направленности изменяются в соответствии с формулами (4.9). При этом их удобно представить в виде

$$u_R = \frac{\sin(k_1 a \sin \theta)}{k_1 a \sin \theta} u_R^{(0)}, \quad u_\theta = \frac{\sin(k_2 a \sin \theta)}{k_2 a \sin \theta} u_\theta^{(0)}. \quad (5.4)$$

Такая запись является, по сути, выражением часто используемой в акустике [148] теоремы умножения диаграмм направленности.

Большой объем вычислений характеристик направленности представлен в работе [233], где рассмотрены случаи как нормальной, так и касательной сосредоточенной нагрузки (плоская задача).

При непосредственной подстановке асимптотических выражений (4.6) в соотношение закона Гука получаем, что при больших значениях R радиальное напряжение σ_R пропорционально величине u_R , а касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ пропорционально u_θ . Поэтому полярные диаграммы для смещений являются одновременно полярными диаграммами для напряжений.

На рис. 32 сплошными линиями показано угловое распределение величин $u_R^{(0)}$ (левый квадрант) и $u_\theta^{(0)}$ (правый квадрант) для материала со значением $\nu = 0,25$ ($k^2 = 3$). Для величины $u_R^{(0)}$ характерно довольно плавное изменение с увеличением угла, которое хорошо аппроксимируется функцией $\cos \theta$. Характер углового распределения величины $u_\theta^{(0)}$ определяется наличием выражения $\sqrt{|\sin^2 \theta - \frac{1}{k^2}|}$ в числителе (5.2). Подкоренное выражение здесь обращается в нуль для угла θ_0 , при котором $\sin \theta_0 = \frac{1}{k}$. Интересно, что этот угол совпадает с критическим углом в случае падения SV-волны на границу полупространства (§ 1 главы 2). В связи с этим на диаграмме для $u_\theta^{(0)}$ имеется провал при $\theta_0 \approx 35^\circ$.

Наличие площадки нагружения приводит к изменению диаграммы направленности по сравнению со случаем сосредоточенной силы.

Для сравнительно малых площадок нагружения ($k_1 a < 2$) наблюдается, естественно, уменьшение направленности. Случай $k_1 a = 1,5$ показан на рис. 32 штриховыми линиями. Для больших по сравнению с длиной волны площадок ($k_1 a > 2$) диаграммы направленности становятся «изрезанными» в связи с наличием знакопеременных множителей в (5.3). На рис. 32 один из таких случаев ($k_1 a = 4$) показан пунктирными линиями.

Приведенные результаты основаны на использовании формул (4.6), которые не пригодны для вычисления смещений в точках граничной поверхности даже при больших значениях x . В этом случае ($z = 0, \theta = 90^\circ$) выражения для смещений в дальнем поле задаются формулами (4.7). Из них видно, что на большом расстоянии от места приложения нагрузки основной вклад в деформирование границы полупространства дает поверхностная волна Рэлея. Для $x \gg a$ смещения границы описываются соотношениями

$$u_x(x, 0) \approx -2\bar{f}(k_R) k_R \frac{2k_R^2 - k_2^2 - 2\sqrt{k_R^2 - k_1^2} \sqrt{k_R^2 - k_2^2}}{F'(k_R)} \exp(ik_R x),$$

$$u_z(x, 0) \approx 2i\bar{f}(k_R) k_2^2 \frac{\sqrt{k_R^2 - k_1^2}}{F'(k_R)} \exp(ik_R x).$$

Вывод о доминирующем значении поверхностных волн, естественно, основывается на предположении о том, что $\bar{f}(k_R) \neq 0$. Отметим, что как выражения для смещений на поверхности (4.7), так и формулы (4.6) для смещений во внутренних точках полупространства свидетельствуют о возможности усилить или ослабить тот или иной тип движения за счет выбора распределения нагрузки по поверхности. В частности, при равномерной нагрузке по участку шириной $2a$ имеем $\bar{f}(\xi) = 2f_0 \frac{\sin \xi a}{\xi}$, и, следовательно, легко указать такую ширину нагружения, когда рэлеевская волна не возбуждается. Для этого должно выполняться равенство $\sin k_R a = 0$. Возможность управлять возбуждением поверхностных волн за счет выбора характера нагружения имеет широкое практическое применение в акустоэлектронике [20, 55] и геофизике [232, 286].

В практических приложениях более важной является не кинематика движения, а его энергетика. При этом можно интересоваться как оценкой эффективности возбуждения волнового поля в целом, т. е. отношением средней за период излучаемой мощности к мгновенной мощности источника, создающего заданное периодическое во времени распределение напряжений на границе, так и эффективностью возбуждения того или иного типа движения в упругом теле, т. е. поверхностных, сдвиговых или продольных волн. По первому критерию сосредоточенная сила является совершенно неэффективным источником энергии, поскольку существует конечное значение средней за период мощности и бесконечное — мгновенной мощности.

При вычислении средней за период мощности $\bar{W}$, излучаемой при нагружении поверхности, можно непосредственно проинтегрировать составляющую $\bar{P}_z$ среднего значения потока мощности через поверхность $z = 0$. В рассматриваемом случае нагружения нормальными силами $2Gf(x)$ из общей формулы (5.8) главы I получаем

$$\bar{P}_z = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ -G\omega f(x) \operatorname{Im} u_z(x, 0), & |x| \leq a, \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\bar{W} = \int_{-a}^a \bar{P}_z dx = -G\omega \int_{-a}^a f(x) \operatorname{Im} u_z(x, 0) dx.$$

В частном случае, когда $f(x) = f_0$, из выражения (3.9) следует

$$\operatorname{Im} u_z(x, 0) = \frac{k_2^2}{\pi} \left\{ 2\pi \frac{(2f_0 a)}{F'(k_R)} \sqrt{k_R^2 - k_1^2} \frac{\sin k_R a}{k_R a} \cos k_R x - \right. \\ \left. - 2 \int_0^{k_1} \frac{\sin(\xi a)}{\xi a} (2f_0 a) \frac{\sqrt{k_1^2 - \xi^2} \cos(\xi x) d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^2 + 4\xi^2 \sqrt{k_1^2 - \xi^2} \sqrt{k_2^2 - \xi^2}} - \right. \\ \left. - 8 \int_{k_1}^{k_2} \frac{\sin(\xi a)}{\xi a} (2f_0 a) \frac{\xi^2 (\xi^2 - k_1^2) \sqrt{k_2^2 - \xi^2} \cos(\xi x) d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^4 + 16\xi^4 (\xi^2 - k_1^2) (k_2^2 - \xi^2)} \right\} \quad (5.7)$$

и

$$\bar{W} = \frac{\omega}{4G} \frac{k_2^2}{\pi} (4Gf_0 a)^2 \left\{ -2\pi \frac{\sqrt{k_R^2 - k_1^2}}{F'(k_R)} \left[\frac{\sin(k_R a)}{k_R a} \right]^2 + \right. \\ \left. + 2 \int_0^{k_1} \left[\frac{\sin(\xi a)}{\xi a} \right]^2 \frac{\sqrt{k_1^2 - \xi^2} d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^2 + 4\xi^2 \sqrt{k_1^2 - \xi^2} \sqrt{k_2^2 - \xi^2}} + \right. \\ \left. + 8 \int_{k_1}^{k_2} \left[\frac{\sin(\xi a)}{\xi a} \right]^2 \frac{\xi^2 (\xi^2 - k_1^2) \sqrt{k_2^2 - \xi^2} d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^4 + 16\xi^4 (\xi^2 - k_1^2) (k_2^2 - \xi^2)} \right\}. \quad (5.8)$$

В предельном случае, когда $4Gf_0 a \rightarrow Q$ и $a \rightarrow 0$, получаем среднюю мощность, с которой нормальная к поверхности сосредоточенная сила $Q \exp(-i\omega t)$ производит работу по возбуждению волн в полупространстве:

$$\bar{W} = \frac{Q^2 \omega k_2^2}{4G\pi} \left\{ -\frac{2\pi \sqrt{k_R^2 - k_1^2}}{F'(k_R)} + \int_0^{k_1} \frac{2\sqrt{k_1^2 - \xi^2} d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^2 + 4\xi^2 \sqrt{k_1^2 - \xi^2} \sqrt{k_2^2 - \xi^2}} + \right. \\ \left. + \int_{k_1}^{k_2} \frac{8\xi^2 (\xi^2 - k_1^2) \sqrt{k_2^2 - \xi^2} d\xi}{(2\xi^2 - k_2^2)^4 + 16\xi^4 (\xi^2 - k_1^2) (k_2^2 - \xi^2)} \right\}. \quad (5.9)$$

Это выражение совпадает с приведенным в работе Лэмба [207].

Вычисление средней мощности произведено в соответствии с формулой (5.8). Поскольку эта мощность определяется только мнимой частью в выражении нормального смещения (совпадающая по фазе с нагрузкой часть скоростей точек ее приложения), то бесконечный интеграл в (3.7) не вносит никакого вклада в эти величины. В случае сосредоточенной силы именно данный интеграл обеспечивает обращение в бесконечность смещения (скорости) в точке приложения силы. Это обуславливает обращение в бесконечность мгновенной мощности, развиваемой сосредоточенной силой при возбуждении полупространства, в то время как средняя за период мощность остается ограниченной.

Характерной особенностью приведенных выражений для мощности источника является отделение в явном виде мощности, затрачиваемой на создание поверхностных волн. Это является естественным следствием выделения в явном виде смещений, соответствующих рэлеевской волне. Разделить, исходя из выражений (5.8), мощность $\bar{W}_1$, затрачиваемую на создание продольных и сдвиговых волн, не удастся. Это, однако, можно сделать, вычисляя величину $\bar{W}_1$ иным путем — как поток мощности через цилиндрическую поверхность большого радиуса. При этом для вычислений естественно использовать асимптотические выражения (4.6) для амплитуд смещений.

Усредненная за период мощность $\bar{W}_1$, проходящая через полцилиндрическую поверхность произвольного радиуса R , определяется по формуле

$$\bar{W}_1 = 2 \int_0^{\pi/2} \bar{P}_r R d\theta, \quad (5.10)$$

где

$$\bar{P}_r = -\frac{i\omega}{4} (\sigma_R u_R^* - \sigma_R^* u_R + \tau_{R\theta} u_\theta^* - \tau_{R\theta}^* u_\theta). \quad (5.11)$$

Если в соответствии с законом Гука и исходя из перемещений (4.6) вычислить напряжения σ_R и $\tau_{R\theta}$, то, оставляя главные члены асимптотики, получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_R &= Gk^2 \sqrt{\frac{2}{\pi R}} k_1^{3/2} \frac{\bar{f}(k_1 \sin \theta) \cos \theta}{F(k_1 \sin \theta)} (k^2 - 2 \sin^2 \theta) \times \\ &\quad \times \exp \left(ik_1 R - i \frac{\pi}{4} \right), \\ \tau_{R\theta} &= G \sqrt{\frac{2}{\pi R}} k_2^{3/2} \frac{\bar{f}(k_2 \sin \theta)}{F(k_2 \sin \theta)} \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \sin 2\theta \times \\ &\quad \times \exp \left(ik_2 R - i \frac{3\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Отметим, что, как и для смещений (4.6), здесь имеет место разделение напряжений по типам волн. При больших значениях R продольная волна вызывает только радиальные напряжения, а попе-

речная — только касательные. Это свойство напряжений совместно с аналогичным свойством смещений дает возможность разделить мощность $\bar{W}_1$ на две составляющие: $\bar{W}_1 = \bar{W}^{(P)} + \bar{W}^{(S)}$, соответствующие продольным и сдвиговым волнам.

При получении конкретных расчетных формул следует учесть, что функция $F(k_1 \sin \theta)$ вещественна для всех θ и имеет вид

$$F(k_1 \sin \theta) = k_1^4 [(2 \sin^2 \theta - k^2)^2 + 4 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{k^2 - \sin^2 \theta}]. \quad (5.13)$$

В противоположность этому функция $F(k_2 \sin \theta)$ может быть как вещественной, так и комплексной на рассматриваемом интервале изменения θ . Для ее вычисления нужно пользоваться следующими формулами:

$$\begin{aligned} F(k_2 \sin \theta) &= k_2^4 \left[(2 \sin^2 \theta - 1)^2 + 4 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{\frac{1}{k^2} - \sin^2 \theta} \right], \\ 0 \leq \theta \leq \theta_0, \quad \sin \theta_0 &= \frac{1}{k}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} F(k_2 \sin \theta) &= k_2^4 \left[(2 \sin^2 \theta - 1)^2 + 4i \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{1}{k^2}} \right], \\ \theta_0 \leq \theta \leq 90^\circ. \end{aligned}$$

Приведенные расчетные выражения для функции Рэлея дают возможность в рассматриваемом случае равномерной нагрузки представить составляющие потока мощности продольных и сдвиговых волн в виде

$$\begin{aligned} \bar{W}^{(P)} &= \\ &= \frac{\omega k^2}{2G\pi} (4Gf_0 a)^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(k_1 a \sin \theta) \cos^2 \theta (k^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 d\theta}{(k_1 a \sin \theta)^3 [(2 \sin^2 \theta - k^2)^2 + 4 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{k^2 - \sin^2 \theta}]^2}, \\ \bar{W}^{(S)} &= \frac{\omega}{2G\pi} (4Gf_0 a)^2 \times \\ &\times \left\{ \int_0^{\theta_0} \frac{\sin^2(k_2 a \sin \theta) \sin^2 2\theta \left(\frac{1}{k^2} - \sin^2 \theta \right) d\theta}{(k_2 a \sin \theta)^2 \left[(2 \sin^2 \theta - 1)^2 + 4 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{\frac{1}{k^2} - \sin^2 \theta} \right]^2} + \right. \\ &\left. + \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\sin^2(k_2 a \sin \theta) \sin^2 2\theta \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{k^2} \right) d\theta}{(k_2 a \sin \theta)^2 \left[(2 \sin^2 \theta - 1)^4 + 16 \sin^4 \theta \cos^2 \theta \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{k^2} \right) \right]} \right\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Расчеты по формулам (5.8) и (5.15) позволяют разделить общую подводимую от внешнего источника мощность по типам распространяющихся волн в зависимости от размеров площадки нагружения. Для предельного случая сосредоточенного воздействия $a \rightarrow 0$ при $\nu = 0,25$, $k^2 = 3$ находим, что рэлеевская волна уносит 49% энергии,

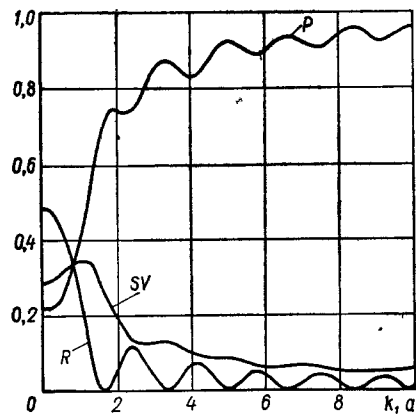


Рис. 33.

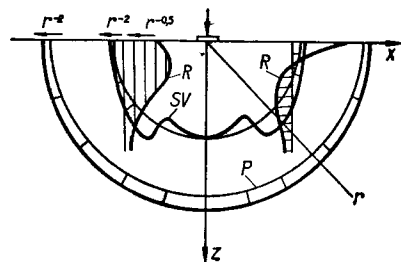


Рис. 34.

для случая $\nu = 0,25$. Здесь рэлеевская волна уносит 67% общей подводимой энергии, сдвиговая волна — 27% и продольная — 7%.

Как отмечено в работе [232], в ряде геофизических экспериментов полезной является только мощность, переносимая продольными волнами. Поэтому, а также в связи с общим вопросом о возможности распределить энергию между отдельными типами волн за счет конфигурации источника укажем на результаты расчетов, выполненных в работе [232]. Рассматривалась система трех одинаковых круговых излучателей с малыми по сравнению с длиной волны радиусами, расположенных симметрично на окружности радиуса

b . В случае, когда $k_1 b = \frac{\sqrt{3}}{6}$, распределение энергии между типами волн следующее: рэлеевская волна уносит 65%, сдвиговая — 27% и продольная — 8% общей энергии. Оптимальным с точки зрения достижения наименьшей интенсивности поверхностных волн для данной системы является такое расположение излучателей, когда $k_1 b = 1,1743$. При этом в рэлеевской волне уносится всего 26%, в сдвиговой — 43% и в продольной — 31% общей энергии.

Проведенные вычисления позволяют выполнить интересное сра-

порядочная — 22%, сдвиговая — 29%. Изменение относительного распределения энергии по типам волн с ростом ширины площадки нагружения представлено на рис. 33. Отметим, что при изменении размеров площадки изменяется не только относительная интенсивность того или иного типа движения, но и вся подводимая от источника мощность.

Интересные данные о распределении энергии между типами волн в осесимметричном и в более общем неосесимметричном случаях содержатся в работах [232, 286]. Наглядное изображение кинематики движения частиц полупространства под действием сосредоточенной силы (осесимметричный случай) приведено в работе [286], откуда заимствован рис. 34, где показаны относительные амплитуды смещений и их пространственное распределение для продольных, сдвиговых и рэлеевских волн. Расчеты выполнены

внесение мощности источников типа сосредоточенной силы в случае полубесконечного и бесконечного пространства. Такие оценки показывают роль граничных поверхностей и влияние характера нагрузки на эффективность возбуждения того или иного типа движения.

Используя фундаментальные результаты решения пространственной задачи [74, 104], находим, что средняя за период мощность $\bar{W}_0$, излучаемая сосредоточенной силой $Q \exp(-i\omega t)$ в бесконечную упругую среду, определяется по формуле

$$\bar{W}_0 = \frac{Q^2}{24\pi\omega} (k_1^3 + 2k_2^3). \quad (5.16)$$

Для плоского случая сила интенсивности Q на единицу длины излучает в слой единичной толщины среднюю мощность

$$\bar{W}_l = \frac{Q^2}{16\rho\omega} (k_1^2 + k_2^2). \quad (5.17)$$

При этом в упругой среде возбуждаются как продольные, так и сдвиговые волны. Обозначая $\bar{W}^{(P)}$ и $\bar{W}^{(S)}$ средние потоки мощности в каждом из этих типов движения, для характеристики относительной интенсивности их возбуждения получаем равенства

$$\frac{\bar{W}_0^{(P)}}{\bar{W}_0} = \frac{1}{1 + 2k^3}, \quad \frac{\bar{W}_0^{(S)}}{\bar{W}_0} = \frac{2k^3}{1 + 2k^3}, \quad (5.18)$$

$$\frac{\bar{W}_l^{(P)}}{\bar{W}_l} = \frac{1}{1 + k^2}, \quad \frac{\bar{W}_l^{(S)}}{\bar{W}_l} = \frac{k^2}{1 + k^2}.$$

В материале с величиной $\nu = 0,25$ при генерации колебаний сосредоточенной силой основная часть энергии (91%) уносится в бесконечность сферической волной сдвига. В двумерном случае (цилиндрические волны) возрастает интенсивность продольной волны, она уносит уже 25% общей энергии, подводимой от источника.

Интересно также сравнить полные мощности, развиваемые источником с постоянной амплитудой силы в бесконечном и полубесконечном пространствах. Проводя вычисления по формуле (5.9) для полупространства с величиной $\nu = 0,25$, получаем

$$\bar{W} = 2,346 \frac{\omega Q^2}{4\pi G}, \quad \bar{W}^{(R)} = 1,139 \frac{\omega Q^2}{4\pi G}, \quad (5.19)$$

$$\bar{W}_1 = 1,207 \frac{\omega Q^2}{4\pi G}.$$

В свою очередь для пространства из (5.17) находим

$$\bar{W}_l = 1,047 \frac{\omega Q^2}{4\pi G}. \quad (5.20)$$

Видно, что при фиксированной амплитуде силы мощность, передаваемая источником полупространству, более чем в два раза выше. Если учесть приведенные выше данные о распределении энергии

ВОЛНЫ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ И ЦИЛИНДРЕ

между отдельными типами движения, то будет ясно, что практически весь прирост мощности связан с генерацией рэлеевских волн.

В осесимметричном случае справедливы аналогичные количественные соотношения [53]

$$\begin{aligned}\bar{W} &= 0,932 \frac{\omega Q^2}{4\pi G} k_2, \quad \bar{W}^{(R)} = 0,649 \frac{\omega Q^2}{4\pi G} k_2, \\ \bar{W}_1 &= 0,283 \frac{\omega Q^2}{4\pi G} k_2, \quad \bar{W}_0 = 0,366 \frac{\omega Q^2}{4\pi G} k_2.\end{aligned}\quad (5.21)$$

Здесь энергия, затрачиваемая на возбуждение продольных и сдвиговых волн, также изменяется мало. И в этом случае основной прирост потребляемой мощности источника обусловлен рэлеевской волной.

Перейдем к изучению закономерностей распространения волн в таких упругих телах, для которых существенную роль в формировании поля играет не только взаимодействие волн со свободной границей, но и взаимовлияние границ. В качестве объектов, которые в связи с этим будут рассмотрены, используются бесконечный упругий сплошной круговой цилиндр и слой. Для таких областей довольно просто получить наборы частных решений уравнений движения, комбинируя которые можно строго выполнить граничные условия на цилиндрических и плоских поверхностях соответственно.

Рассматриваемые ниже упругие тела являются простейшими представителями геометрических структур, которые объединяются понятием механического волновода. Распространение волн в слое и цилиндре было предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований, ведущихся уже более столетия. Возможность выразить характеристики волнового поля в цилиндре через хорошо исследованные специальные функции впервые отмечалась в работах Похгаммера [252] и Кри [168]. Для упругого слоя (двумерная задача) аналогичные результаты получены Рэлеем [255] и Лэмбом [205]. Первые численные результаты, относящиеся к некоторым характеристикам нормальных волн в слое, содержатся в работе Лэмба [208].

Последующие публикации в этой области относятся уже к 40-м годам двадцатого века. Обзор работ этого периода содержится в книгах [54, 68]. Общее исследование характеристического уравнения в случае слоя в широком диапазоне изменения механических свойств материалов выполнены Гоголадзе [29]. В результате многочисленных исследований, проведенных в 50—60-е годы, проблема изучения свойств волновых полей в изотропном слое и цилиндре практически полностью решена. Уровень достигнутого понимания вопроса и указания на многочисленные публикации содержатся в обзорных работах [1, 19, 28, 96, 236, 257].

Отсутствие в течение длительного времени интереса к исследованию процесса распространения волн в слое и цилиндре в рамках трехмерной теории упругости в определенной мере было связано с тем, что эффекты, для описания которых было бы недостаточно

приближенных теорий пластин и стержней, не проявлялись в практически используемых элементах конструкций. За последние десятилетия, однако, ситуация существенно изменилась. Появление материалов с малым затуханием ультразвуковых волн и разработка способов эффективного возбуждения волнового поля создали условия для чрезвычайно широкого применения явления волноводного распространения не только в линиях задержки, но и в ряде новых радиотехнических устройств. В связи с этим сформировалась и бурно развивается новая отрасль науки и техники, получившая название акустоэлектроника. Конечно, возникающие в этой области вопросы не могут быть полностью решены на основе исследования свойств нормальных волн в изотропных цилиндрах и пластинах. Однако знание этих свойств является основой для анализа и систематизации данных, относящихся к практически используемым системам [101, 108, 176, 277]. Изучение свойств волноводных мод важно также в связи с разработкой методики использования акустической эмиссии для оценки уровня напряженности элементов конструкций [213].

Рассматривая волновые процессы в волноводе, аналогично тому, как это делалось в предыдущих главах для полупространства, можно выделить задачи двух типов. В задачах первого типа мы не интересуемся источником волнового движения и ищем лишь возможные состояния волновода, согласованные с определенными условиями на его поверхности. По сути, речь здесь идет о поиске некоторых резонансных ситуаций — таких частных решений уравнений движения для гармонических процессов, которые обеспечивают нулевые граничные условия относительно некоторого числа статических и кинематических факторов. Эти частные решения называются нормальными модами или нормальными волнами в волноводе.

Второй тип задач связан с изучением вынужденных волновых движений в волноводе. В связи с наличием бесконечного набора возможных состояний (нормальных мод) в волноводе возникающие здесь задачи отличаются от аналогичных задач для полупространства большей сложностью. Ряд таких задач рассмотрен в главе 7 данной книги.

При математической формулировке задачи о возбуждении и распространении волн в идеально упругом волноводе появляются определенные затруднения с постановкой условий на бесконечности, которые должны играть ту же роль, что и условие излучения в случае пространства. Ведь уже для полупространства необходимо задавать не только бегущую на бесконечность цилиндрическую волну, но и условие на приповерхностные возмущения — волну Рэлея. Сформулированные при этом требования исключали из общего представления решения стоячую волну Рэлея. Условие аналогичного типа должно ставиться и в случае нормальных волн, с учетом дополнительных трудностей — геометрической дисперсии мод в волноводе. Постановка таких условий в упругих волноводах затруд-

няется в связи с тем, что в ряде случаев эти моды имеют противоположные знаки фазовой и групповой скоростей. Поэтому для выяснения смысла указанных условий целесообразно изучить вначале характеристики тех элементарных состояний волновода (нормальных мод), суперпозицией которых представляется волновое поле в общем случае. Затем на основании этих свойств определить систему условий, задающих направленность волнового процесса в упругом волноводе.

Теоретические результаты исследования свойств нормальных мод в упругих волноводах показали наличие ряда интересных особенностей, которые не имеют аналога для мод в акустических и электромагнитных волноводах. Это обстоятельство стимулировало проведение довольно большого объема экспериментальных работ, целью которых было подтверждение «реальности» характерных черт нормальных мод. Мы не будем анализировать здесь постановку экспериментов. Отметим лишь, что в целом они подтвердили выводы, полученные в рамках модели идеально упругого тела для свойств нормальных мод. Указание на конкретные подходы, описание техники эксперимента и обзор результатов можно найти, например, в работах [20, 114, 160, 288].

§ 1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ SH-ВОЛН В СЛОЕ

В главе 2 указано на существенные различия в отражении от свободной поверхности SH-волн и упругих волн других типов (P и SV). Отражение SH-волн происходит без возбуждения иных типов движения, что обуславливает относительную простоту структуры волнового поля в слое для этого случая.

Говоря о волноводе, в данном случае о плоском волновом поле в слое, мы предполагаем, что оно удовлетворяет некоторому условию периодичности или равноправности точек слоя. Смысл этого условия в том, что если на произвольной плоскости $z = z_0$ слоя (рис. 35) выделить некоторые точки A_1 и A_2 , то состояние, которое наблюдается в точке A_1 в момент времени t_1 , должно наблюдаться в точке A_2 в момент времени t_2 . Из этого следует, что волновое поле в каждой точке волновода с плоскими границами может быть лишь суперпозицией двух плоских волн, направление распространения которых составляет определенный, зависящий от частоты угол θ с осью волновода Ox .

В данном случае в соответствии с формулами (4.6) главы 2 представление единственной составляющей u_y вектора смещений через плоские волны имеет вид

$$\begin{aligned} u_y^{(1)} &= U_1 \exp [ik_S (x \cos \theta + z \sin \theta)], \\ u_y^{(2)} &= U_2 \exp [ik_S (x \cos \theta - z \sin \theta)], \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $k_S = \omega/c_S$.

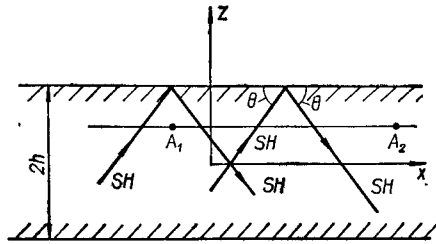


Рис. 35.

Для полной определенности волнового поля в слое необходимо определить зависимость угла θ от частоты и связать между собой значения амплитуд U_1 и U_2 . При решении задачи рассмотрение удобно провести отдельно для симметричного и антисимметричного относительно плоскости $z = 0$ волновых полей.

Суперпозиция этих случаев позволяет представить любое поле при однотипных граничных условиях на поверхностях $z = \pm h$.

Рассмотрим случай симметричного волнового поля, т. е. когда суммарное смещение $u_y = u_y^{(1)} + u_y^{(2)}$ является четной функцией z . При этом на плоскости $z = 0$ должны обращаться в нуль касательные напряжения τ_{zy} . Отсюда следует, что $U_1 = U_2$. Для определения угла θ обратимся к рис. 35. В каждой точке границы $z = \pm h$ вследствие закона отражения такого типа волн от свободной границы (коэффициент отражения равен единице)

$$u_y^{(1)} = u_y^{(2)} (z = h) \quad (1.2)$$

и, следовательно,

$$\exp(iksh \sin \theta) = \exp(-iksh \sin \theta). \quad (1.3)$$

Отсюда находим, по существу, резонансное условие для угла θ :

$$2ksh \sin \theta = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.4)$$

Аналогично в антисимметричном случае из условия $u_y = 0$ при $z = 0$ находим, что $U_1 = -U_2$, а из условия отражения на поверхности $z = h$ получаем следующие резонансные соотношения для угла θ :

$$2ksh \sin \theta = (2n + 1)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.5)$$

Равенства (1.4) и (1.5) являются дисперсионными соотношениями соответственно для симметричных и антисимметричных волн в слое. Каждому значению n соответствует своя нормальная волна, характеристики которой полностью определяются дисперсионным соотношением. Такой подход к выводу дисперсионных соотношений для жидкостных волноводов использован в работе [14].

При рассмотрении волнового распространения обычно вводят постоянную распространения $\xi = k_s \cos \theta$. С использованием этой величины, тригонометрического тождества $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ и равенств (1.4) и (1.5) дисперсионные соотношения представляются в виде

$$\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + \xi^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2}, \quad (1.6)$$

$$\left[\frac{(2n+1)\pi}{2h}\right]^2 + \xi^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2}.$$

Первое равенство относится к симметричному случаю, второе — к антисимметричному.

В терминах введенных обозначений выражение для смещений в слое для двух типов симметрии можно представить в виде

$$u_y = 2U_0 \cos \frac{n\pi}{h} z \exp(i\xi x),$$

$$u_y = 2U_0 i \sin \frac{(2n+1)\pi}{2h} z \exp(i\xi x). \quad (1.7)$$

Каждое из этих выражений представляет собой нормальную волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Ox с длиной $\lambda = 2\pi/\xi$, фазовой скоростью $c = \omega/\xi$ и с изменением амплитуды по толщине по синусоидальному закону. Для первых двух (не считая нулевого) симметричных и первой антисимметричной нормальных волн характер движения частиц слоя показан на рис. 36.

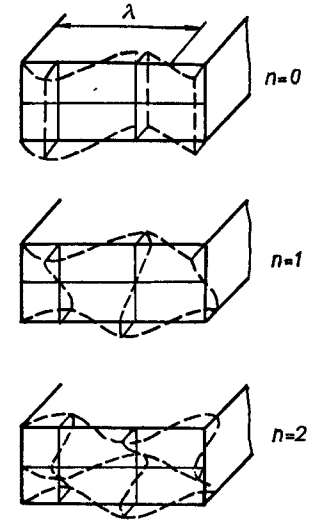


Рис. 36.

Полученные представления для нормальных волн (1.7) являются инвариантными по отношению к замене величины ξ на $-\xi$. Это означает, что для каждой нормальной волны, бегущей в положительном направлении оси Ox , есть «двойник» — нормальная волна, бегущая в отрицательном направлении. Суперпозиция таких двух волн, взятых с одинаковой амплитудой, дает стоячую волну, которую можно рассматривать как собственную форму колебаний слоя.

Рассмотрим дисперсионное соотношение для симметричных волн в форме (1.4) при некотором фиксированном n , т. е. для определенной нормальной волны. Видно, что при возрастании частоты величины $\sin \theta$, а следовательно, и угол θ уменьшаются, и для очень высоких частот нормальная волна представляет собой суперпозицию волн (1.1), распространяющихся вдоль оси Ox .

При уменьшении частоты угол падения и отражения плоских волн θ возрастает и достигает значения 90° , когда $k_s = \frac{n\pi}{h}$ ($\omega_n^* = \frac{c_s n\pi}{h}$). При этой частоте ω_n^* волны в (1.1) распространяются перпендикулярно оси Ox и отсутствует какое-либо изменение поля вдоль этой оси. Следовательно, и суперпозиция таких волн не образует бегущую волну. Частота ω_n^* , на которой нормальная волна соответствующего номера n перестает быть распространяющейся, называется частотой запирания. Для частот $\omega < \omega_n^*$ из первого уравнения в (1.6) видно, что ξ становится чисто мнимым. Таким

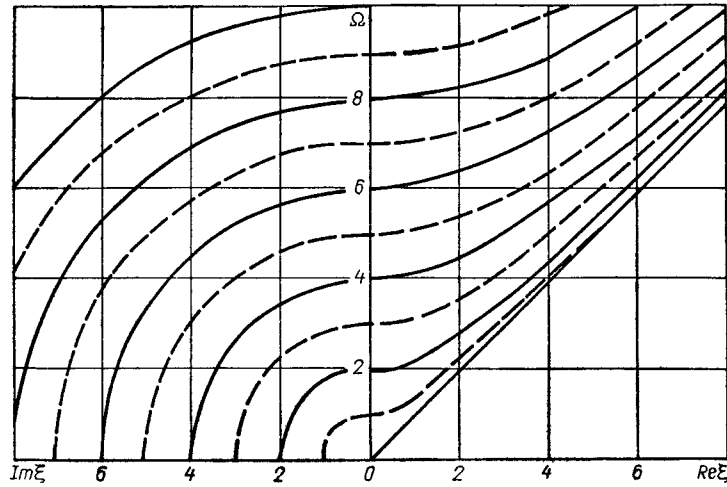


Рис. 37.

образом, приходим к решению граничной задачи для слоя, которое экспоненциально изменяется вдоль оси Ox и называется неоднородной волной. Решения такого вида важны при изучении волновых полей в полуограниченном волноводе.

В теории волноводов для большей наглядности дисперсионные соотношения представляют графически в виде зависимости безразмерной частоты $\Omega = \frac{2\omega h}{\pi c_S}$ от безразмерной постоянной распространения $\xi = 2\xi h/\pi$.

В этих координатах соотношения (1.6) представлены на рис. 37. Симметричным модам отвечают сплошные линии, антисимметричным — штриховые.

Для характеристики всех кривых в области вещественных значений ξ важно отметить, что с ростом частоты Ω фазовая $c_p = \omega/\xi$ и групповая $c_g = d\omega/d\xi$ скорости каждой нормальной волны стремятся к величине c_S .

Из представленных на рис. 37 данных следует, что для каждого значения частоты Ω дисперсионные уравнения (1.6) обладают некоторым конечным числом вещественных корней и бесконечным числом мнимых корней. Первые корни соответствуют распространяющимся модам, переносящим энергию. Средний по времени поток энергии через поперечное сечение волновода в этих модах положителен. В то же время для нераспространяющихся мод, соответствующих чисто мнимым корням, средний поток энергии равен нулю.

Важной особенностью распространяющихся мод в рассматриваемом случае SH-волн является то, что знаки групповой и фазовой скоростей в каждой моде совпадают во всей области частот. Это существенно упрощает постановку и удовлетворение условий излучения в волноводе при распространении SH-волн. Данные условия сводятся, по сути, к выбору знака фазовой скорости в соответствии

с расположением источников. Так, если все источники движения сосредоточены в области $|x| < a$ (см. рис. 35), то волновое поле в области $x > a$ должно содержать бегущие волны только с положительными фазовыми скоростями. В области $x < -a$ фазовые скорости бегущих волн должны быть отрицательными.

Набор решений, соответствующий всем вещественным и мнимым корням для данной частоты, позволяет, в частности, достаточно просто рассмотреть задачу о гармоническом возбуждении торца полубесконечного волновода $x \geq 0$ с учетом условий излучения, а также задачу об установившихся колебаниях бесконечного слоя при нагружении конечного участка его границы. Как видно из формул (1.7), вопрос о фактическом удовлетворении граничных условий на срезах $x = \text{const}$ сводится к определению коэффициентов ряда Фурье по набору нормальных волн, соответствующему типу симметрии задачи. Эти задачи обсуждаются в главе 7.

§ 2. ВОЛНЫ РЭЛЕЯ — ЛЭМБА. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Как и для полупространства, в случае слоя со свободными границами Р- и SV-волны не могут существовать независимо. В связи с этим картина волнового движения в слое для такого типа движений является более сложной. Однако при выводе дисперсионных уравнений можно с успехом использовать прием, указанный для SH-волн.

Рассматриваемое волновое поле представляет собой суперпозицию падающих и отраженных плоских Р- и SV-волн, а именно

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad a_y = a_{y1} + a_{y2}, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \Phi_1 \exp[ik_P(x \cos \theta + z \sin \theta)]; \\ \varphi_2 &= \Phi_2 \exp[ik_P(x \cos \theta - z \sin \theta)]; \\ a_{y1} &= A_1 \exp[ik_S(x \cos \gamma + z \sin \gamma)]; \\ a_{y2} &= A_2 \exp[ik_S(x \cos \gamma - z \sin \gamma)]; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$k_P = \frac{\omega}{c_P}; \quad k_S = \frac{\omega}{c_S}.$$

Поскольку совокупность движений, описываемых этими потенциалами, должна представлять нормальную волну, бегущую в положительном направлении оси Ox , между волновыми числами k_P и k_S и углами θ и γ необходимо существование соотношения

$$k_P \cos \theta = k_S \cos \gamma = \xi. \quad (2.3)$$

Из этого соотношения следует, что при отражении от границы $z = h$ плоской волны с потенциалом φ_1 возникают продольная волна по направлению волны φ_2 и сдвиговая волна по направлению волны a_{y2} . Аналогично при отражении волны a_{y1} отраженные волны

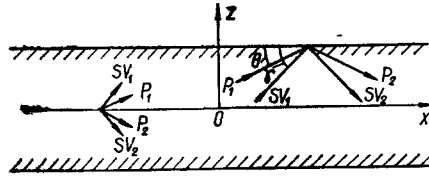


Рис. 38.

также совпадают по направлению с волнами Φ_2 и a_{y2} . Схематически такая ситуация показана на рис. 38. Дальнейшая конкретизация выражений (2.2) связана с определением зависимости одного из углов γ или θ от частоты и с установлением связи между амплитудами потенциалов на

основании условий симметрии волнового поля по координате z . Для симметричного волнового поля, очевидно, $u_z(x, 0) = 0$, для антисимметричного случая на срединной плоскости $z = 0$ обращается в нуль напряжение σ_z . После вычисления соответствующих (2.1) и (2.2) смещений и напряжений из указанных условий вытекает, что в симметричном случае

$$\Phi_1 = \Phi_2, A_1 = -A_2, \quad (2.4)$$

а в антисимметричном

$$\Phi_1 = -\Phi_2, A_1 = A_2. \quad (2.5)$$

Вместе с тем, анализируя приведенную на рис. 38 картину отражения от свободной границы слоя $z = h$ с использованием коэффициентов отражения (1.9) и (1.13) главы 2, получаем следующую систему уравнений:

$$\Phi_2 \exp(-ik_{ph} \sin \theta) = \Gamma_{pp} \Phi_1 \exp(ik_{ph} \sin \theta) + \Gamma_{ps} A_1 \exp(ik_{sh} \sin \gamma), \quad (2.6)$$

$$A_2 \exp(-ik_{sh} \sin \gamma) = \Gamma_{sp} \Phi_1 \exp(ik_{ph} \sin \theta) + \Gamma_{ss} A_1 \exp(ik_{sh} \sin \gamma).$$

Используя, например, соотношение (2.4), приходим к однородной системе уравнений для Φ_1 и A_1 :

$$\Phi_1 \{ \exp(-ik_{ph} \sin \theta) - \Gamma_{pp} \exp(ik_{ph} \sin \theta) \} - A_1 \Gamma_{ps} \exp(ik_{sh} \sin \gamma) = 0 \quad (2.7)$$

$$\Phi_1 \Gamma_{sp} \exp(ik_{ph} \sin \theta) + A_1 \{ \Gamma_{ss} \exp(ik_{sh} \sin \gamma) + \exp(-ik_{sh} \sin \gamma) \} = 0.$$

Условие существования нетривиального решения этой системы определяет искомое соотношение между частотой и углом θ (или γ). С учетом равенств

$$\Gamma_{pp} = \Gamma_{ss}, \Gamma_{pp}^2 - \Gamma_{ps} \Gamma_{sp} = 1 \quad (2.8)$$

это условие приобретает вид

$$\frac{\sin [h(k_p \sin \theta + k_s \sin \gamma)]}{\sin [h(k_p \sin \theta - k_s \sin \gamma)]} = -\Gamma_{pp}. \quad (2.9)$$

Для антисимметричного случая справедливо равенство

$$\frac{\sin [h(k_p \sin \theta + k_s \sin \gamma)]}{\sin [h(k_p \sin \theta - k_s \sin \gamma)]} = \Gamma_{pp}. \quad (2.10)$$

Раскладывая числитель и знаменатель в левых частях этих равенств и деля числитель и знаменатель на произведение $\cos(k_{ph} \sin \theta) \times \cos(k_{sh} \sin \gamma)$, получаем

$$\frac{\operatorname{tg}(k_{sh} \sin \gamma)}{\operatorname{tg}(k_{ph} \sin \theta)} = -\frac{1 + \Gamma_{pp}}{1 - \Gamma_{pp}} \quad (2.11)$$

для симметричного случая и

$$\frac{\operatorname{tg}(k_{sh} \sin \gamma)}{\operatorname{tg}(k_{ph} \sin \theta)} = -\frac{1 - \Gamma_{pp}}{1 + \Gamma_{pp}} \quad (2.12)$$

для антисимметричного случая.

Используя выражения (1.9) главы 2 для величины Γ_{pp} , соотношения (2.11) и (2.12) соответственно можно представить в форме, полученной Рэлеем и Лэмбом, а именно

$$\frac{\operatorname{tg} \{ [(k_{sh})^2 - (\xi h)^2]^{1/2} \}}{\operatorname{tg} \{ [(k_{ph})^2 - (\xi h)^2]^{1/2} \}} = -\frac{4(\xi h)^2 [(k_{ph})^2 - (\xi h)^2]^{1/2} [(k_{sh})^2 - (\xi h)^2]^{1/2}}{[(k_{sh})^2 - 2(\xi h)^2]^2}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\operatorname{tg} \{ [(k_{sh})^2 - (\xi h)^2]^{1/2} \}}{\operatorname{tg} \{ [(k_{ph})^2 - (\xi h)^2]^{1/2} \}} = -\frac{[(k_{sh})^2 - 2(\xi h)^2]^2}{4(\xi h)^2 [(k_{ph})^2 - (\xi h)^2]^{1/2} [(k_{sh})^2 - (\xi h)^2]^{1/2}},$$

Последующие выкладки, связанные с изучением свойств дисперсионных уравнений, а также характеристик нормальных мод, удобнее проводить с использованием безразмерных величин для постоянной распространения и частоты. Эти безразмерные величины $\bar{\xi}$ и Ω задаются равенствами

$$\bar{\xi} = \frac{2}{\pi} \xi h, \quad \Omega = \frac{2}{\pi} \frac{\omega h}{c_s}. \quad (2.14)$$

Для аргумента тригонометрических функций при этом удобно ввести следующие обозначения:

$$\alpha = \left(\frac{\Omega^2}{k^2} - \bar{\xi}^2 \right)^{1/2}, \quad \beta = (\Omega^2 - \bar{\xi}^2)^{1/2}, \quad k^2 = 2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu}. \quad (2.15)$$

В данных обозначениях уравнения (2.13) приобретают вид

$$(2\bar{\xi}^2 - \Omega^2)^2 \cos \frac{\alpha\pi}{2} \sin \frac{\beta\pi}{2} + 4\alpha\beta\bar{\xi}^2 \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2} = 0, \quad (2.16)$$

$$(2\bar{\xi}^2 - \Omega^2)^2 \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2} + 4\alpha\beta\bar{\xi}^2 \cos \frac{\alpha\pi}{2} \sin \frac{\beta\pi}{2} = 0.$$

Для вычисления значений функций в (2.16) следует указать правила определения неоднозначных функций α и β . Непосредственной проверкой можно установить, что при последовательной перемене знака в какой-либо из этих функций равенства (2.16) не нарушаются.

Выражения для потенциалов (2.2) с учетом равенств (2.4) и (2.5) используются для записи смещений в нормальных волнах.

Нормированные выражения смещений можно представить в следующем виде:

$$u_x = i\bar{\xi} \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} \cos \frac{\pi\alpha z}{2h} - \frac{\bar{\xi}^2 - \beta^2}{2\bar{\xi}^2} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \cos \frac{\pi\beta z}{2h} \right) \exp(i\bar{\xi}x),$$

$$u_z = - \left(\alpha \cos \frac{\beta\pi}{2} \sin \frac{\pi\alpha z}{2h} + \frac{\bar{\xi}^2 - \beta^2}{2\beta} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \sin \frac{\pi\beta z}{2h} \right) \exp(i\bar{\xi}x) \quad (2.17)$$

для симметричного типа движений и

$$u_x = i\bar{\xi} \left(\sin \frac{\beta\pi}{2} \sin \frac{\pi\alpha z}{2h} - \frac{\bar{\xi}^2 - \beta^2}{2\bar{\xi}^2} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sin \frac{\pi\beta z}{2h} \right) \exp(i\bar{\xi}x),$$

$$u_z = \left(\alpha \sin \frac{\beta\pi}{2} \cos \frac{\pi\alpha z}{2h} + \frac{\bar{\xi}^2 - \beta^2}{2\beta} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos \frac{\pi\beta z}{2h} \right) \exp(i\bar{\xi}x) \quad (2.18)$$

для антисимметричного.

Выражения (2.17) и (2.18), характеризующие смещения в нормальных модах волновода, достаточно сложны. В отличие от SH-волн в слое распределение по толщине смещений для каждой моды Рэлея — Лэмба зависит от частоты или постоянной распространения. Поэтому сколько-нибудь полный анализ этих соотношений можно провести лишь после изучения решения дисперсионных уравнений (2.16).

§ 3. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ РЭЛЕЯ — ЛЭМБА. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ И МНИМЫЕ КОРНИ

Как уже отмечалось, первые числовые результаты при анализе уравнений (2.13) были получены Лэмбом [208], который вычислил вещественные корни для области низких частот. В предельном случае коротких длин волн он отметил стремление фазовой скорости первой нормальной волны для продольных (симметричных относительно плоскости $z = 0$) и изгибных (антисимметричных) колебаний к скорости волны Рэлея для полупространства.

Первые работы по исследованию корней трансцендентных уравнений (2.13) в высокочастотной области выполнены Холденом [190] для продольных мод и вещественных волновых чисел. Он предложил эффективный метод исследования свойств корней дисперсионных уравнений. Аналогичный метод был независимо развит и широко использован в ряде работ Миндлина и Оноэ. В работе [236] приведено краткое изложение сути метода и дан обзор результатов других исследователей.

Сложную зависимость, характеризующую свойства нормальных волн (мод) в слое, обычно представляют графически в декартовой системе координат с абсциссой $\bar{\xi}$ и ординатой Ω .

Набор корней дисперсионного уравнения на такой плоскости образует систему кривых, которые называются ветвями частотного спектра. Каждый корень соответствует определенной точке на оп-

ределенной ветви. И наоборот, каждая точка ветви определяет моду волнового поля в слое. Моды, соответствующие одной и той же ветви, обладают определенными общими характеристическими чертами. Моды, принадлежащие разным ветвям, имеют значительные различия в этих характеристиках.

Уравнения (2.16) инвариантны по отношению к замене величины $\bar{\xi}$ на $-\bar{\xi}$. В связи с этим во втором квадранте плоскости $(\bar{\xi}, \Omega)$ строятся участки ветвей, соответствующие чисто мнимым $\bar{\xi} = i\eta$ значениям постоянной распространения. Несмотря на то что с мнимыми и комплексными корнями дисперсионных уравнений (2.16) распространяющиеся моды бесконечного волновода не связаны, они играют важную роль при решении краевых задач для полубесконечных волноводов и при изучении вынужденных движений бесконечных волноводов. Конкретное определение мнимых и комплексных корней выполнено в работах [155, 217, 236].

Трансцендентные уравнения (2.16) и другие подобные уравнения, во никающие в родственных задачах о волноводном распространении, представляются не очень сложными для проведения вычислений с помощью современных ЭВМ. При этом рассматриваемая плоскость $(\bar{\xi}, \Omega)$ может быть покрыта системой точек — корней дисперсионных уравнений, вычисленных практически с любой точностью. Однако такой процесс может быть связан с большими затратами времени, и, кроме того, представленная в такой форме информация мало полезна, поскольку она не систематизирована. В связи с этим большое значение для систематизации расчетных данных и уменьшения объема вычислений имеют методы качественного анализа дисперсионных соотношений, развитые в работах [109, 236, 249]. Структура спектра и поведение соответствующих мод в значительной мере проявляются также асимптотическим анализом, развитым в работах [25, 103].

Спектральные кривые целесообразно построить отдельно для симметричного и антисимметричного случаев. Основные элементы техники качественного анализа, развитого в указанных выше работах, мы проиллюстрируем на примере продольных мод в слое. Соответствующее уравнение из (2.16) целесообразно представить в следующем виде:

$$F(\bar{\xi}, \Omega) = (2\bar{\xi}^2 - \Omega^2)^2 \cos \frac{\alpha\pi}{2} \sin \frac{\beta\pi}{2} + 4\alpha\beta\bar{\xi}^2 \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2} = 0. \quad (3.1)$$

Первый квадрант плоскости, на которой изображаются дисперсионные кривые в соответствии с характером функций в уравнениях (2.16), целесообразно разделить на три сектора прямыми $\alpha = 0$ ($\Omega = k\bar{\xi}$) и $\beta = 0$ ($\Omega = \bar{\xi}$). В секторе, где $\Omega < \bar{\xi}$, величины α и β мнимые. В секторе $\bar{\xi} < \Omega < k\bar{\xi}$ величина α мнимая, а β вещественная. В секторе $\Omega > k\bar{\xi}$ обе величины α и β являются вещественными. В соответствии с формулами (2.17) и (2.18) разным в этих областях будет и характер распределения смещений по толщине слоя.

Основой для анализа уравнения (3.1) является выделение точек плоскости, в которых одновременно обращается в нуль первое и второе слагаемые. Первое слагаемое обращается в нуль при выполнении одного из равенств

$$2\bar{\xi}^2 = \Omega^2, \quad \cos \frac{\alpha\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{\beta\pi}{2} = 0, \quad (3.2)$$

а второе — при

$$\bar{\xi} = 0, \quad \beta = 0, \quad \sin \frac{\alpha\pi}{2} = 0, \quad \cos \frac{\beta\pi}{2} = 0. \quad (3.3)$$

Каждое из этих равенств определяет на плоскости $(\bar{\xi}, \Omega)$ некоторую кривую или семейство кривых. При этом корнями уравнения (3.1) будут точки пересечения кривых, определяемых соотношениями (3.2), с кривыми, определяемыми соотношениями (3.3). Причем мы всегда будем считать число Ω вещественным и положительным.

Рассмотрим первое уравнение в (3.2). С учетом указанного ограничения на число Ω это уравнение определяет прямую OL $\Omega = \sqrt{2}\bar{\xi}$ в первом квадранте (рис. 39). Из первых двух соотношений (3.3) следует, что начало координат $\Omega = 0, \bar{\xi} = 0$ является корнем уравнения (3.1).

Уравнение $\sin \frac{\alpha\pi}{2} = 0$ на рассматриваемой плоскости определяет следующую систему линий: прямую OD с уравнением $\Omega = k\bar{\xi}$ (см. рис. 39), систему гипербол

$$-\frac{1}{k^2}\Omega^2 - \bar{\xi}^2 = (2n)^2 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

в первом квадранте и систему эллипсов

$$\frac{1}{k^2}\Omega^2 + \bar{\eta}^2 = (2n)^2 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

в области мнимых постоянных распространения $\bar{\xi} = i\bar{\eta}$ (второй квадрант). Прямая OL не имеет общих точек с системой кривых, образованных корнями уравнения $\sin \frac{\alpha\pi}{2} = 0$.

Рассмотрим уравнение $\cos \frac{\beta\pi}{2} = 0$. В первом квадранте корни этого уравнения образуют систему гипербол

$$\Omega^2 - \bar{\xi}^2 = (2m - 1)^2 \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (3.6)$$

а во втором квадранте — систему окружностей

$$\Omega^2 + \bar{\eta}^2 = (2m - 1)^2 \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (3.7)$$

Пересечение гипербол с прямой OL определяет некоторую последовательность корней исходного уравнения (3.1), а именно

$$\bar{\xi} = 2m - 1, \quad \Omega = (2m - 1)\sqrt{2}. \quad (3.8)$$

Отметим, что эти корни не зависят от коэффициента Пуассона ν .

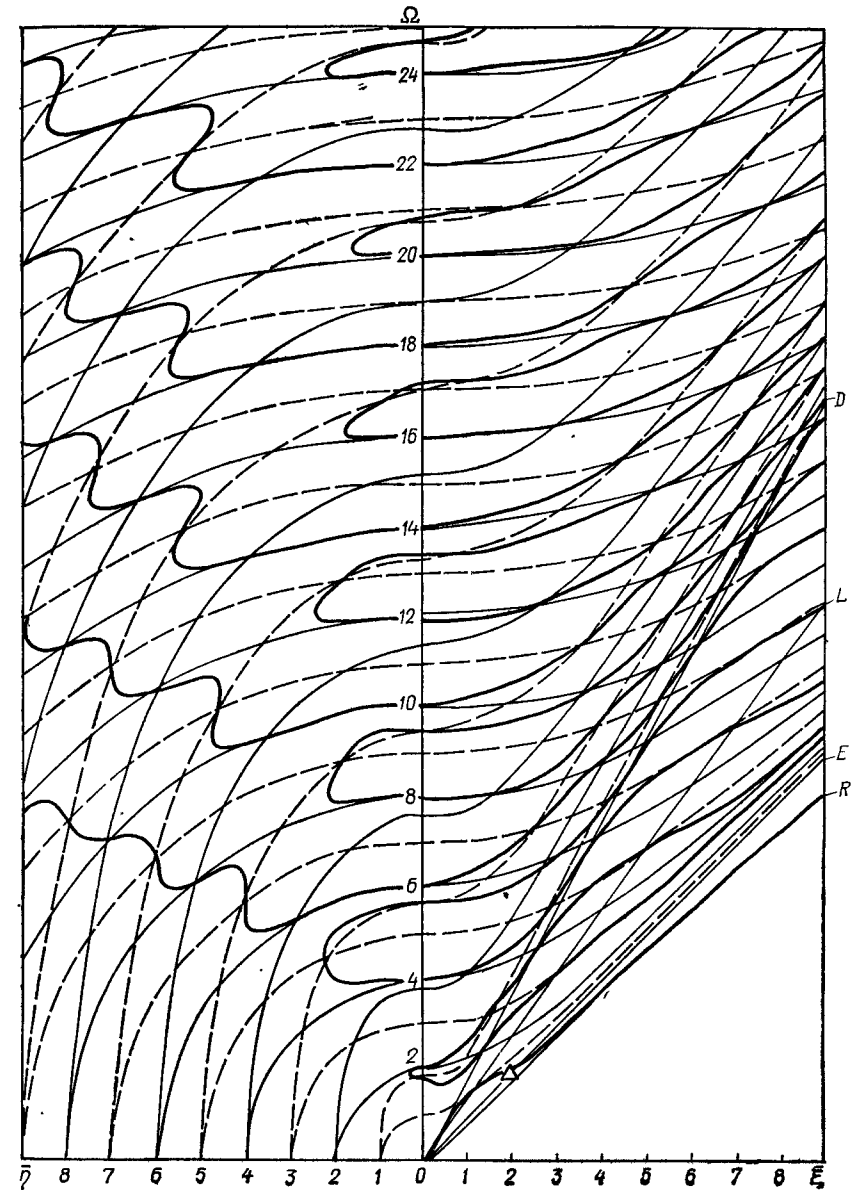


Рис. 39.

Рассмотрим второе уравнение системы (3.2). В первом квадранте оно определяет семейство гипербол

$$\frac{1}{k^2} \Omega^2 - \bar{\xi}^2 = (2p - 1)^2 \quad (p = 1, 2, \dots), \quad (3.9)$$

а во втором квадранте — семейство эллипсов

$$\frac{1}{k^2} \Omega^2 + \bar{\eta}^2 = (2p - 1)^2 \quad (p = 1, 2, \dots). \quad (3.10)$$

Если теперь обратиться к соотношениям (3.3), то из первого из них ($\bar{\xi} = 0$) следует, что корнями дисперсионного уравнения (3.1) являются точки

$$\bar{\xi} = 0, \quad \Omega = (2p - 1)k. \quad (3.11)$$

Такие частоты, как уже отмечалось в § 1 данной главы, называются частотами запираия.

Очевидно, что пересечение кривых (3.9) и (3.10) с прямой $\beta = 0$ или с системой кривых (3.4) и (3.5) не существуют.

Системы кривых (3.6), (3.7) и (3.9), (3.10) имеют ряд точек пересечения $\bar{\xi}_{mp}$ ($\bar{\eta}_{mp}$), Ω_{mp} , определяемых уравнениями

$$\cos \frac{\alpha\pi}{2} = 0, \quad \cos \frac{\beta\pi}{2} = 0. \quad (3.12)$$

Третье уравнение в (3.2) определяет систему гипербол

$$\Omega^2 - \bar{\xi}^2 = (2q)^2 \quad (q = 1, 2, \dots) \quad (3.13)$$

и прямую OE $\Omega = \bar{\xi}$ в первом квадранте. Во втором квадранте имеем систему окружностей

$$\Omega^2 + \bar{\eta}^2 = (2q)^2 \quad (q = 1, 2, \dots). \quad (3.14)$$

Точки пересечения оси абсцисс $\bar{\xi} = 0$ с системой кривых (3.13), (3.14) являются корнями уравнения (3.4). Таким образом, точки

$$\bar{\xi} = 0, \quad \Omega = 2q \quad (3.15)$$

представляют собой частоты запираия некоторых ветвей дисперсионного уравнения.

Уравнение $\beta = 0$ в (3.3) формально приводит к тому, что все точки прямой $\Omega = \bar{\xi}$ являются корнями уравнения (3.1). Однако из выражения (2.17) видно, что как при его выводе, так и при выводе самих дисперсионных уравнений, по сути, предполагалось, что $\beta \neq 0$. В связи с этим к изучению такового соотношения между $\bar{\xi}$ и Ω , когда $\beta = 0$, следует подойти особо. Рассмотрим характер смещений для таких корней. Поскольку выражения (2.17) не могут использоваться непосредственно, то следует вернуться к исходной системе (2.7), в которой теперь $\sin \gamma = 0$, а следовательно, $\Gamma_{ss} = -1$, $\Gamma_{sp} = 0$. Второе уравнение в (2.7) дает $\Phi_1 = 0$. При этом из соотношений (2.2) и (2.4) следует, что мы имеем тривиальное решение с равными нулю

смещениями во всех точках волновода. Однако это не означает, что на прямой $\Omega = \bar{\xi}$ нет точек дисперсионных кривых. Полагая, что $\beta = 0$ является корнем уравнения (3.1) кратности выше единицы, можно убедиться в существовании таких точек и найти их координаты. Заменяя в (3.1) величину $\sin \frac{\beta\pi}{2}$ на $\frac{\beta\pi}{2}$, сокращая выражение на β и полагая затем $\beta = 0$, получаем уравнение

$$\operatorname{th} x = \frac{k^2 x}{4(k^2 - 1)}, \quad x = \Omega \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}. \quad (3.16)$$

Это уравнение имеет единственный корень. На прямой OE рис. 39 он указан треугольником

Последний набор точек — корней дисперсионного уравнения (3.1) — определяет совокупность точек пересечения кривых (3.13), (3.17) с кривыми (3.4), (3.5). Эти точки имеют координаты $\bar{\xi}_{qn}$ ($\bar{\eta}_{qn}$) и Ω_{qn} , одновременно удовлетворяющие уравнениям

$$\sin \frac{\alpha\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{\beta\pi}{2} = 0. \quad (3.17)$$

Система кривых, описываемых уравнениями (3.4) — (3.7), (3.9), (3.10) и (3.13), (3.14), образует в двух квадрантах ($\bar{\xi}, \Omega$) и ($\bar{\eta}, \Omega$) некоторую сетку, разбивающую всю плоскость на криволинейные четырехугольники. Эту сетку иногда называют «решеткой Миндлина» [280].

Решениями дисперсионного уравнения являются две из четырех вершин каждого четырехугольника. Одна из них является точкой пересечения кривых $\sin \frac{\alpha\pi}{2} = 0$ и $\sin \frac{\beta\pi}{2} = 0$, которым на рис. 39 соответствуют тонкие сплошные линии сетки. Вторая есть результат пересечения кривых семейств $\cos \frac{\alpha\pi}{2} = 0$ и $\cos \frac{\beta\pi}{2} = 0$ (на рис. 39 — штриховые линии). Кроме того, решениями являются система точек (3.8) и набор частот запираия (3.11) и (3.15).

Важным моментом в общем ходе построения дисперсионных ветвей является естественное предположение об их непрерывности. Для фактического построения ветвей важно следующее обстоятельство. Каждая дисперсионная ветвь может войти внутрь криволинейного четырехугольника только через вершину типа (3.12), а выйти только через вершину типа (3.17) и наоборот. Для обоснованного описания хода дисперсионной ветви в окрестности известных решений дисперсионного уравнения — вершины сетки необходимо в этих точках вычислить углы наклона касательной $d\Omega/d\bar{\xi}$ или $d\Omega/d\bar{\eta}$ и кривизны $d^2\Omega/d\bar{\xi}^2$ или $d^2\Omega/d\bar{\eta}^2$.

Характер вычислений для действительных значений $\bar{\xi}$ и их использование при построении спектра рассмотрим применительно к найденным точкам (3.11) и (3.15) на оси $\bar{\xi} = 0$, т. е. для частот запираия.

Разлагая неявную функцию $F(\xi, \Omega)$ в ряд Тэйлора в окрестности точки $(0, \Omega_0)$, где Ω_0 принимает одно из значений частот запираения Ω_p (3.11) или Ω_q (3.15), с точностью до членов второго порядка находим

$$\left. \frac{d\Omega}{d\xi} \right|_{0, \Omega_0} F'_\Omega(0, \Omega_0) + F'_\xi(0, \Omega_0) = 0, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\Omega}{d\xi^2} \right|_{0, \Omega_0} F'_\Omega(0, \Omega_0) + \left(\left. \frac{d\Omega}{d\xi} \right|_{0, \Omega_0} \right)^2 F''_{\Omega\Omega}(0, \Omega_0) + \\ + 2 \left. \frac{d\Omega}{d\xi} \right|_{0, \Omega_0} F''_{\xi\Omega}(0, \Omega_0) + F''_{\xi\xi}(0, \Omega_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

При этом считаем, что уравнение (3.1) определяет непрерывный участок дисперсионной ветви, проходящей через точку $(0, \Omega_0)$, и все производные вычисляются именно для этой ветви. Для обозначения соответствующих частных производных используются символы F'_ξ , $F''_{\xi\xi}$ и т. д.

Соотношение (3.18) при $F'_\Omega(0, \Omega_0) \neq 0$ служит для нахождения первой производной $d\Omega/d\xi$, а (3.19) — для определения второй производной $d^2\Omega/d\xi^2$ в точке $(0, \Omega_0)$ определенной ветви.

Входящие в эти соотношения частные производные функции $F(\xi, \Omega_0)$ задаются выражениями

$$\begin{aligned} F'_\xi(0, \Omega_0) &= F'_{\xi\Omega}(0, \Omega_0) = 0; \\ F'_\Omega(0, \Omega_0) &= \begin{cases} -\frac{\Omega_p^4 \pi}{2k} \sin \frac{\pi \Omega_p}{2k} \sin \frac{\pi \Omega_p}{2}, & \Omega_0 = \Omega_p, \\ \frac{\Omega_q^4 \pi}{2} \cos \frac{\pi \Omega_q}{2k} \cos \frac{\pi \Omega_q}{2}, & \Omega_0 = \Omega_q; \end{cases} \\ F''_{\xi\xi}(0, \Omega_0) &= \begin{cases} \Omega_p^2 \sin \frac{\pi \Omega_p}{2k} \left[\frac{\pi \Omega_p k}{2} \sin \frac{\pi \Omega_p}{2} + \frac{8}{k} \cos \frac{\pi \Omega_p}{2} \right], & \Omega_0 = \Omega_p, \\ \Omega_q^2 \cos \frac{\pi \Omega_q}{2k} \left[\frac{8}{k} \sin \frac{\pi \Omega_q}{2k} - \frac{\pi \Omega_q}{2} \cos \frac{\pi \Omega_q}{2k} \right], & \Omega_0 = \Omega_q; \end{cases} \\ F''_{\Omega\Omega}(0, \Omega_0) &= \begin{cases} -\frac{\pi \Omega_p^3}{k} \sin \frac{\pi \Omega_p}{2k} \left[4 \sin \frac{\pi \Omega_p}{2} + \frac{\pi \Omega_p}{2} \cos \frac{\pi \Omega_p}{2} \right], & \Omega_0 = \Omega_p, \\ \pi \Omega_q^3 \cos \frac{\pi \Omega_q}{2k} \left[4 \cos \frac{\pi \Omega_q}{2k} - \frac{\pi \Omega_q}{2k} \sin \frac{\pi \Omega_q}{2k} \right], & \Omega_0 = \Omega_q. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из формул (3.18) — (3.20) находим

$$\left. \frac{d\Omega}{d\xi} \right|_{0, \Omega_0} = 0 \text{ при } F'_\Omega(0, \Omega_0) \neq 0; \quad (3.21)$$

$$\left. \frac{d^2\Omega}{d\xi^2} \right|_{0, \Omega_0} = \begin{cases} \frac{k^2}{\Omega_p} \left[1 + \frac{16}{\pi k^2 \Omega_p} \operatorname{ctg} \frac{\pi \Omega_p}{2} \right], & \Omega_0 = \Omega_p, \\ \frac{1}{\Omega_q} \left[1 - \frac{16}{k \pi \Omega_q} \operatorname{tg} \frac{\pi \Omega_q}{2k} \right], & \Omega_0 = \Omega_q. \end{cases} \quad (3.22)$$

Аналогичные выкладки можно провести и для чисто мнимых значений $\xi = i\eta$ вблизи точки $(0, \Omega_0)$. Получаем

$$\left. \frac{d\Omega}{d\eta} \right|_{0, \Omega_0} = 0 \text{ при } F'_\Omega(0, \Omega_0) \neq 0, \quad (3.23)$$

$$\left. \frac{d^2\Omega}{d\eta^2} \right|_{0, \Omega_0} = - \left. \frac{d^2\Omega}{d\xi^2} \right|_{0, \Omega_0}. \quad (3.24)$$

Одной из наиболее замечательных особенностей дисперсионных соотношений (3.1) является та, которая следует из анализа выражений (3.22) для кривизны ветвей в окрестности частот запираения. Можно установить, что для определенных частот кривизна ветвей становится отрицательной. Это означает, что в окрестности таких точек дисперсионная ветвь опускается ниже частоты запираения. Такая ситуация характерна, например, для второй ветви (см. рис. 39). Это, конечно, не единственный возможный случай, и соответствующие значения частот могут быть получены из формул (3.22) путем вычислений. Так, для коэффициента Пуассона $\nu = 0,31$ из первых 150 ветвей только вторая и тридцать девятая обладают указанным свойством. В определенной степени возможность данной ситуации связана с величиной ν . Однако для второй ветви спектра она имеет место при любых значениях ν . В таких случаях минимальное значение частоты, при котором еще существует распространяющаяся мода, будем называть частотным минимумом и применительно ко второй ветви обозначать Ω^* . Эта величина зависит от коэффициента ν . На рис. 40 такая зависимость показана кривой 1. Существенно зависит от величины ν частота запираения $\Omega = k$. Наоборот, частота запираения $\Omega = 2$ от коэффициента ν не зависит. Это приводит к тому, что при $\nu < 1/3$ частоты запираения $\Omega = k$ и $\Omega = 2$ соответствуют второй и третьей ветвям соответственно, а при $\nu > 1/3$ частоты запираения как бы меняются местами. Несмотря на это участок с отрицательной кривизной по-прежнему связан со второй ветвью. Графически зависимость частот запираения второй и третьей ветвей от величины ν представлена на рис. 40 кривыми 2 и 3 соответственно.

В исключительном случае, когда $F'_\Omega(0, \Omega_0) = F'_{\xi\Omega}(0, \Omega_0) = 0$, т. е. когда в окрестности точки $(0, \Omega_0)$ уравнение $F(\xi, \Omega) = 0$ не определяет частоту Ω как однозначную функцию от ξ , величина $d\Omega/d\xi$ находится из соотношения (3.19):

$$\left. \frac{d\Omega}{d\xi} \right|_{0, \Omega_0} = \pm \frac{4}{\pi \Omega_0}. \quad (3.25)$$

В терминах групповой скорости здесь имеем такую ситуацию, когда эта скорость уже не равна нулю, несмотря на то что соответствующие обеим ветвям моды становятся нераспространяющимися ($\xi = 0$). В § 5 данной главы мы проанализируем эту кажущуюся парадоксальной ситуацию более подробно.

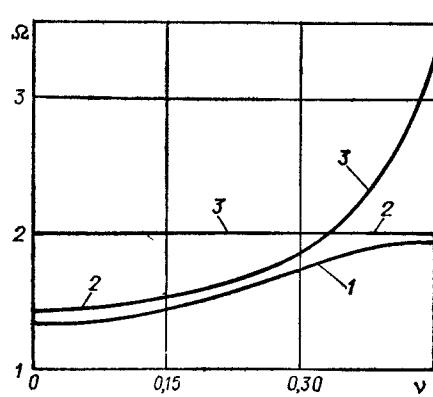


Рис. 40.

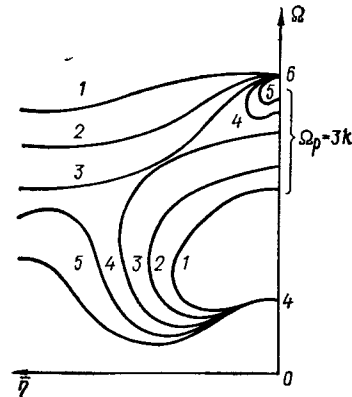


Рис. 41.

Как видно из рис. 39, частотный интервал для соседних величин Ω_p и Ω_q является основой для петли в области чисто мнимой постоянной распространения. В ряде случаев, однако, возможно совпадение значений Ω_p и Ω_q на оси частот. Одним из примеров такой ситуации является случай $\nu = 1/3$ ($k = 2$). При этом $\Omega_p = \Omega_q = 2$ ($p = 1, q = 1$) и совпадение происходит для всех нечетных значений q . В связи со сказанным необходимо рассмотреть поведение петель в каждой части ξ при изменении величины ν . Формальная подстановка в (3.23) значения $\nu = 1/3$ приводит к отрицательному значению величины $[d\Omega/d\eta]_{0,\Omega_0}^2$. Это можно истолковать как указание на то, что соответствующие петли исчезают. Однако интересно проследить процесс такого предельного перехода при $\nu \rightarrow 1/3$ ($k \rightarrow 2$). Если в таком предельном переходе петля, связанная со второй и третьей ветвями, только уменьшается в размерах, то петля, связанная с четвертой ($\Omega_q = 4$) и пятой ($\Omega_p = 3k$) ветвями, ведет себя иначе. На рис. 41 схематически показано последовательное изменение структуры этой мнимой петли при возрастании величины ν в процессе стремления ее к значению $1/3$ (кривые 1—5 соответственно пронумерованы в порядке роста величины ν). Видно, что в процессе изменения ν происходит довольно существенная перестройка спектра. Если вначале уходящая ветвь в мнимой области $\xi = i\eta$ начинается в точке $\Omega_q = 6$, то с приближением величины ν к $1/3$ уходящая ветвь начинается уже в точке $\Omega_q = 4$.

Детальное изучение наклона и кривизны в узлах сетки дает возможность изобразить качественное поведение вещественных и чисто мнимых участков дисперсионных ветвей. На рис. 39 показан спектр продольных мод для коэффициента $\nu = 0,31$ [236]. Анализ антисимметричного деформирования слоя (изгибные моды), описываемого дисперсионным уравнением

$$F_1(\xi, \Omega) = (2\xi^2 - \Omega^2)^2 \sin \frac{\pi\alpha}{2} \cos \frac{\pi\beta}{2} + 4\alpha\beta\xi^2 \cos \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\beta}{2} = 0, \quad (3.26)$$

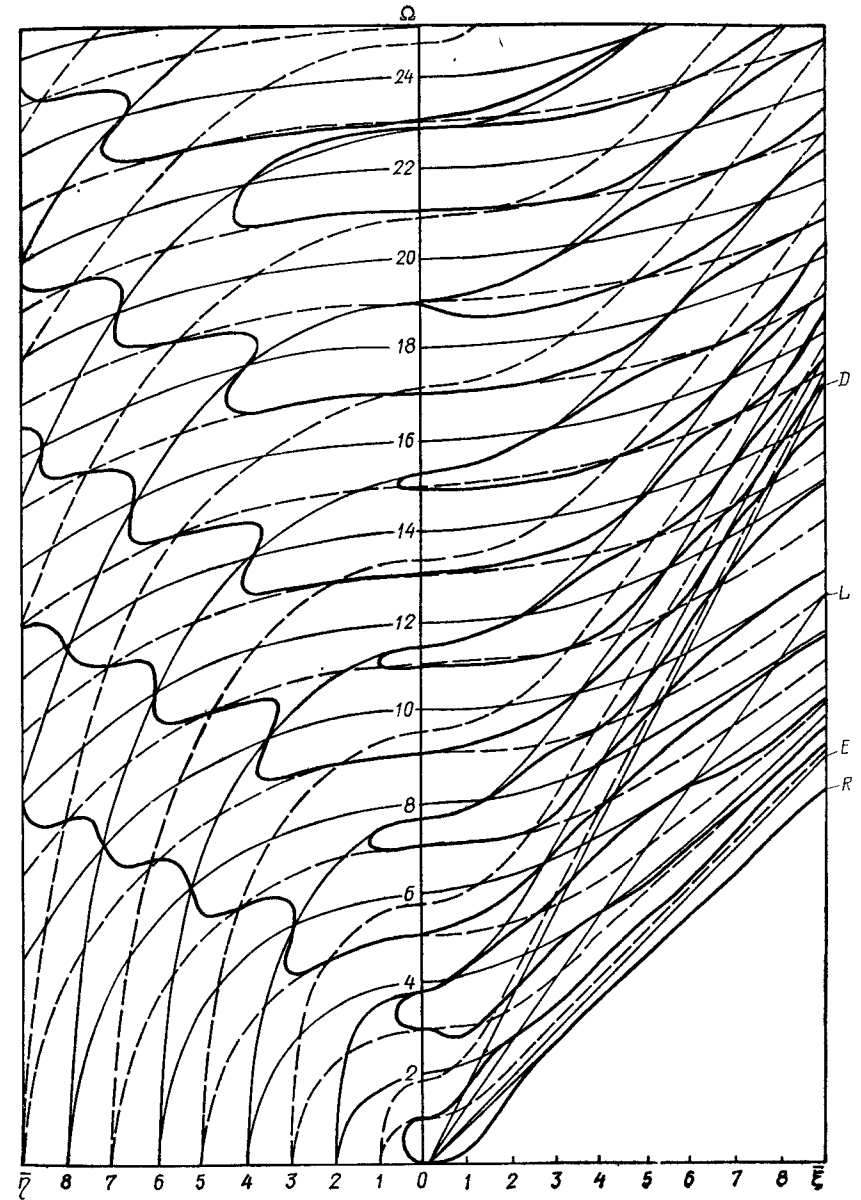


Рис. 42.

производится аналогично. Структура вещественных и чисто мнимых участков спектра для этого случая представлена на рис. 42 для $\nu = 0,31$ [236].

Знание особенностей поведения этих участков очень важно для построения, хотя бы качественного, комплексных частей дисперсионных ветвей.

§ 4. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ РЭЛЕЯ — ЛЭМБА. КОМПЛЕКСНЫЕ КОРНИ

Сам факт наличия комплексных корней у дисперсионного уравнения (3.1) свидетельствует о существенном различии в свойствах упругого слоя как волновода для Р- и SV-волн по сравнению с SH-волнами. Как видно из рис. 37 и 39, существует и иное, более важное различие в структуре спектра для указанных типов волн. Если для SH-волн для каждого значения Ω имеется конечное число действительных и бесконечное число чисто мнимых корней дисперсионного уравнения, то в случае SV- и Р-волн это условие не выполняется. Наряду с конечным числом вещественных корней здесь конечно и число чисто мнимых корней. В связи с этим более четко выраженной становится важная роль комплексных корней дисперсионного уравнения для построения полных наборов частных решений, дающих возможность удовлетворить граничным условиям на торцах волновода. Исходя из указаний ряда авторов [96, 288], можно утверждать, что впервые это было отмечено Кэртисом и развито в работе [153].

При использовании решений, соответствующих комплексным корням, возникают вопросы, заслуживающие особого внимания. Вектор смещений в слое схематично представим в виде

$$u(x, z, t) = U(\bar{\xi}, z) \exp[i(\xi x - \omega t)]. \quad (4.1)$$

Входящая в это выражение постоянная распространения $\bar{\xi}$ может быть вещественной, чисто мнимой или комплексной.

В случае вещественных $\bar{\xi}$ выражение (4.1) представляет бегущую волну, переносящую энергию по слою, причем средний по времени поток энергии в такой волне не зависит от координаты x , что является естественным для среды без потерь. Дисперсионное уравнение (3.1) допускает использование двух значений $\bar{\xi}$, различающихся знаками. Выбор одного из них можно связать с выбором направления переноса энергии.

Соответствующее паре чисто мнимых корней $\bar{\xi} = \pm i\bar{\eta}$ выражение (4.1) представляет собой неоднородные волны, не переносящие энергию вдоль слоя. Разным знакам величины $\bar{\xi}$ соответствуют волны, экспоненциально убывающие влево или вправо от некоторого фиксированного сечения $x = \text{const}$. Эти волны по своим свойствам аналогичны неоднородным SH-волнам, соответствующим чисто мнимым корням дисперсионного уравнения (1.6).

Дисперсионное уравнение (3.1) имеет также бесконечное число комплексных корней, появляющихся четверками по одному в каждом квадранте комплексной плоскости $\bar{\xi} = \pm \bar{\xi} \pm i\bar{\eta}$. Каждому значению $\bar{\xi}$ из такой четверки после подстановки его в (4.1) соответствует затухающая или возрастающая по амплитуде бегущая волна. Если при рассмотрении, например, полуграниченного слоя $x \geq 0$ из четырех корней оставить лишь те, которые определяют решение с убывающей амплитудой, то и тогда рассматриваемое отдельно для каждого из корней $\bar{\xi} = \pm \bar{\xi} + i\bar{\eta}$ выражение (4.1) не имеет физического смысла. Оно представляет бегущую волну с экспоненциально убывающей амплитудой. Такая волна переносит энергию по слою, хотя средний поток энергии экспоненциально убывает с ростом x . Это возможно лишь при наличии поглощения в среде, что противоречит исходной постановке задачи.

Для преодоления указанного противоречия между свойствами среды и структурой частотного решения уравнений необходимо так сгруппировать две бегущие навстречу друг другу волны

$$\begin{aligned} u_1 &= U(\bar{\xi} + i\bar{\eta}, z) \exp[-\eta x + i(\xi x - \omega t)], \\ u_2 &= U(-\bar{\xi} + i\bar{\eta}, z) \exp[-\eta x - i(\xi x + \omega t)], \end{aligned} \quad (4.2)$$

чтобы получить стоячую волну с экспоненциально убывающей амплитудой. Такое решение уже не противоречит физическому смыслу задачи, поскольку стоячая волна энергию не переносит. Именно эти объединенные решения и используются при удовлетворении граничных условий на торцах полубесконечного слоя.

Первым этапом в определении комплексных ветвей дисперсионного уравнения (3.1) является поиск точек их пересечения с плоскостью $\Omega = 0$. Если непосредственно подставить в (3.1) величину $\Omega = 0$, то получим тождественный нуль. Однако это не означает, что любое комплексное значение $\bar{\xi}$ является корнем дисперсионного уравнения при $\Omega = 0$. Ситуация здесь точно такая же, как и в рассмотренном выше случае для $\beta = 0$. При этом поиск доставляющих нетривиальное решение корней уравнения (3.1) при $\Omega = 0$ сводится к поиску двукратных корней этого уравнения. В связи с этим необходимо рассмотреть уравнение

$$F_{\Omega}(\bar{\xi}, 0) = 0. \quad (4.3)$$

Такая запись уравнения отражает тот очевидный факт, что функция $F(\bar{\xi}, \Omega)$ является, по существу, функцией от Ω^2 . Учитывая, что при $\Omega = 0$ $\alpha = \beta = i\bar{\xi}$, из уравнения (4.3) получаем

$$\text{sh } \pi \bar{\xi} + \pi \bar{\xi} = 0. \quad (4.4)$$

Это уравнение совпадает с уравнением для определения собственных чисел однородных решений в статических задачах для слоя [80, 137]. Характерной особенностью данного уравнения является независимость его корней от коэффициента Пуассона ν .

Таблица 5

n	Корни уравнения (4.4)	
	ξ_n	η_n
1	0,716	1,341
2	0,988	3,409
3	1,129	5,433
4	1,241	7,448
5	1,303	9,457

Первые пять корней уравнения (4.4) $\xi_n = \xi_n + i\eta_n$ приведены в табл. 5.

Для нахождения последующих корней можно использовать асимптотические формулы

$$\xi_n \approx \frac{1}{\pi} \ln(4n\pi - \pi), \quad (4.5)$$

$$\eta_n \approx 2n - \frac{1}{2}.$$

Для определения углов наклона φ комплексных ветвей в точках пересечения с плоскостью $\Omega = 0$ имеем соотношение

$$\operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{d\xi}{d\Omega} \Big|_{\Omega=0} \right)^{-1}. \quad (4.6)$$

Из дисперсионного уравнения получаем, что для каждой ветви выполнено соотношение

$$F'_\Omega + \frac{d\xi}{d\Omega} F'_\xi = 0. \quad (4.7)$$

С учетом того, что $F'_\Omega(\xi, 0) = 0$ и $F'_\xi(\xi, 0) \neq 0$, находим

$$\frac{d\xi}{d\Omega} \Big|_{\Omega=0} = 0. \quad (4.8)$$

Следовательно, комплексные участки пересекают плоскость $\Omega = 0$ под прямым углом.

Следующую систему характерных точек комплексных участков ветвей получаем, рассматривая пересечение их с плоскостью вещественных и чисто мнимых корней ξ , т. е. пересечение с плоскостями $\eta = 0$ и $\xi = 0$.

Для нахождения точек пересечения с плоскостью $\eta = 0$ разложим функцию $F(\xi, \Omega)$ в ряд Тэйлора по малым $i\eta$, а именно

$$F(\xi, \Omega) = F(\xi, \Omega) + i\eta F'_\eta(\xi, \Omega) + \dots = 0. \quad (4.9)$$

Приравняв порознь вещественную и мнимую части этого уравнения нулю, получаем

$$F(\xi, \Omega) = 0, \quad \eta F'_\eta(\xi, \Omega) = 0. \quad (4.10)$$

Из данных равенств при $\eta = 0$ находим обычное уравнение $F(\xi, \Omega) = 0$, определяющее систему вещественных участков дисперсионных ветвей. Точки, в которых комплексные участки ветвей могут пересекать плоскость $\eta = 0$, определяются системой уравнений

$$F(\xi, \Omega) = 0, \quad F'_\xi(\xi, \Omega) = 0. \quad (4.11)$$

Из первого уравнения этой системы видно, что все такие точки должны принадлежать вещественным участкам ветвей. Согласно

второму уравнению выходы комплексных участков на плоскость $\eta = 0$ возможны лишь в точках, где

$$\frac{d\Omega}{d\xi} = 0, \quad [F'_\Omega(\xi, \Omega) \neq 0]. \quad (4.12)$$

Этим условиям соответствуют примечательные точки на тех вещественных участках ветвей, где кривизна при $\xi = 0$ становится отрицательной. Как уже отмечалось, такие точки на вещественной плоскости сравнительно редки. Следовательно, большая часть комплексных участков, начинающихся на плоскости $\Omega = 0$, должна входить на плоскость $\xi = 0$.

Аналогичное рассмотрение для этого случая приводит к системе уравнений

$$F(\eta, \Omega) = 0, \quad \frac{d\Omega}{d\eta} = 0, \quad [F'_\Omega(\eta, \Omega) \neq 0], \quad (4.13)$$

определяющих точки пересечения комплексных участков ветвей с плоскостью $\xi = 0$. Как и в предыдущем случае, комплексные участки могут пересекать плоскость лишь в точках, принадлежащих чисто мнимым участкам ветвей. Кроме того, эти точки должны быть точками относительного минимума или максимума зависимости $\Omega = \Omega(\eta)$. Такие точки хорошо видны на рис. 39 и 42. Комплексные участки ветвей также пересекают вещественную и мнимую плоскости под прямым углом.

Описанные свойства комплексных участков обычно называют «теоремой Оноэ» [236], хотя, по существу, они отражают общие свойства аналитической функции действительного и одного комплексного переменных [199, 248].

Объединение всех вещественных, чисто мнимых и комплексных участков — корней уравнения (3.1) в дисперсионные ветви происходит по следующему принципу. Каждая ветвь должна непрерывно проходить от нулевой до бесконечной частоты при некоторых дополнительных предположениях о способе соединения точек пересечения комплексных участков с плоскостями $\xi = 0$ и $\eta = 0$. Суть этих предположений видна на примере построения комплексных участков ветвей, начинающихся на плоскости $\Omega = 0$ в точках, определяемых уравнением (4.4). Эти точки можно естественно упорядочить по величине модуля. Тогда соответствующие им точки входа комплексных участков в плоскостях $\xi = 0$ и $\eta = 0$ будут точками относительного минимума, упорядоченными по возрастанию Ω . Такой же принцип используется при построении других комплексных участков ветвей. На его основе в работе [109] приведена схема строения дисперсионных ветвей для случая распространения продольных волн в цилиндре. Эта схема воспроизведена далее на рис. 53. Отметим, что большой объем количественных данных о корнях дисперсионного уравнения [4, 254, 288] согласуется с предложенным качественным построением спектра.

Каждый комплексный участок дисперсионной ветви вследствие структуры уравнения (3.1) имеет зеркальное отражение относительно плоскостей $\xi = 0$ и $\eta = 0$. Существует также симметрия дисперсионных кривых при замене ξ на $-\xi$ и η на $-\eta$. Следовательно, в каждую точку на плоскостях $\xi = 0$ и $\eta = 0$, удовлетворяющую уравнениям (4.12) и (4.13), входят по два комплексных участка. Таким образом, такие точки являются, по сути, точками пересечения дисперсионных ветвей. В связи с этим возникает важный вопрос о продолжении ветвей через указанные точки. Поставленный вопрос можно решить на основе анализа кинематических и энергетических характеристик соответствующих мод. Одна из наиболее интересных с этой точки зрения частей спектра для слоя приведена далее на рис. 46, где показаны разные дисперсионные кривые. Очень четко видно, как продолжают ветви после пересечения в точках относительного минимума на вещественной плоскости.

§ 5. ВОЛНЫ РЭЛЕЯ — ЛЭМБА. ФАЗОВЫЕ И ГРУППОВЫЕ СКОРОСТИ

Для анализа вынужденных движений в бесконечном слое, а также для исследования процессов возбуждения через торец полубесконечного волновода одинаково важны все типы волновых движений, соответствующие разным участкам дисперсионных ветвей — комплексным, мнимым и действительным. Для изучения же процесса переноса энергии, а также структуры волнового поля вдали от источника возбуждения основное значение имеют распространяющиеся моды, соответствующие вещественным участкам дисперсионных ветвей. Именно эти вещественные участки подробно рассматриваются в данном параграфе.

Наиболее доступной для изучения характеристик распространяющихся мод после построения спектров (см. рис. 39 и 42) является фазовая скорость c_p . В каждой точке ветви она определяется как

$$c_p = \frac{\omega}{\xi} = c_2 \frac{\Omega}{\xi}. \quad (5.1)$$

Групповая скорость c_g распространяющихся мод согласно кинематическому определению задается равенством

$$c_g = \frac{d\omega}{d\xi} = c_2 \frac{d\Omega}{d\xi} \quad (5.2)$$

и представляет собой тангенс угла наклона касательной к действительному участку ветви в данной точке.

Часто при изучении волноводного распространения фазовую скорость для каждой ветви представляют в виде зависимости $c_p = c_p(\xi)$. Тогда для вычисления групповой скорости имеем формулу

$$c_g = c_p + \xi \frac{dc_p}{d\xi}. \quad (5.3)$$

Как для симметричного, так и для антисимметричного случая в особом положении оказывается первая ветвь, проходящая через начало координат $\xi = 0, \Omega = 0$. Соответствующие моды оказываются распространяющимися при любой частоте. Для анализа скоростей этих мод при малых частотах в окрестности начала координат можно существенно упростить дисперсионные уравнения (3.1) и (3.26) за счет малости величин $\xi, \Omega, \alpha, \beta$. При этом соответственно для симметричного и антисимметричного случаев с точностью до величин ξ^3 и ξ^4 получаем

$$\Omega = 2\xi \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}, \quad \Omega = \pi \xi^2 \sqrt{\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \frac{1}{3}}. \quad (5.4)$$

В таком виде дисперсионные соотношения совпадают с соотношениями, описывающими поведение продольных и изгибных волн в тонких пластинах на основе приближенных теорий [68]. Они дают хорошую аппроксимацию нижнего участка первой вещественной ветви частотного спектра в диапазонах $0 \leq \Omega \leq 0,5$ и $0 \leq \Omega \leq 0,1$ соответственно.

Если соотношения (5.4) представить в обозначениях фазовой скорости, то получим

$$c_p^+ = 2c_2 \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}} + O(\xi^2), \quad c_p^- = \pi c_2 \xi \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)} + O(\xi^3). \quad (5.5)$$

Здесь и далее индексами + и — у величин c_p и c_g будем обозначать симметричный и антисимметричный случаи деформирования слоя.

При $\xi = 0$ находим

$$c_p^+(0) = 2c_2 \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}, \quad c_p^-(0) = 0. \quad (5.6)$$

Для всех остальных вещественных участков дисперсионных ветвей характерно наличие частот запертия. Это означает, что для всех соответствующих волн при стремлении ξ к нулю фазовые скорости стремятся к бесконечности.

При изучении поведения действительных ветвей при больших частотах следует отметить, что на любой ветви при стремлении Ω к бесконечности одновременно стремятся к бесконечности постоянная распространения ξ . Иными словами, с увеличением Ω для каждой ветви уменьшается длина распространяющейся волны $\lambda = \frac{4h}{\xi}$.

Для оценки предельных значений фазовых скоростей в этом случае обратимся вновь к рис. 39 и 42. При рассмотрении рис. 39 отмечалось, что лишь одна низшая ветвь может попасть в зону $\Omega < \xi$, в которой обе величины α и β являются чисто мнимыми. При $\xi \rightarrow \infty$ вдоль ветви имеем $|\alpha| \rightarrow \infty$ и $|\beta| \rightarrow \infty$ и в пределе из (3.1)

получаем алгебраическое уравнение

$$(2\bar{\xi}^2 - \Omega^2)^2 - 4|\alpha||\beta|\bar{\xi}^2 = 0, \quad (5.7)$$

где

$$|\alpha| = \sqrt{\bar{\xi}^2 - \frac{\Omega^2}{k^2}}; \quad |\beta| = \sqrt{\bar{\xi}^2 - \Omega^2}. \quad (5.8)$$

После деления уравнения (5.7) на $\bar{\xi}^4$ получаем

$$\left(2 - \frac{c_p}{c_2}\right)^2 - 4\sqrt{1 - \frac{c_p^2}{c_2^2}}\sqrt{1 - \frac{c_p^2}{c_1^2}} = 0. \quad (5.9)$$

В такой форме это уравнение совпадает с уравнением (3.5) главы 2 для скорости волны Рэлея. Аналогичный результат получается из (3.26) для первой ветви в антисимметричном случае.

Таким образом, для обоих случаев симметрии фазовая скорость первой распространяющейся моды имеет в коротковолновом пределе значение скорости волн Рэлея. Для симметричных движений величина c_p^+ все время остается больше c_R , а для антисимметричных — меньше. На рис. 39 и 42 соответствующая этим ветвям асимптота обозначена прямой OR .

При анализе поведения остальных ветвей следует учесть, что каждая из них при достаточно больших значениях $\bar{\xi}$ попадает и остается в секторе $OE - OD$ (см. рис. 39, 42). В этом секторе α — мнимое, а β — вещественное. В связи с этим уравнение (3.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{c_p}{c_2}\right)^2 \sin \left[\bar{\xi} \sqrt{\frac{c_p^2}{c_2^2} - 1} \right] - 4\sqrt{1 - \frac{c_p^2}{c_1^2}}\sqrt{\frac{c_p^2}{c_2^2} - 1} \times \\ \times \cos \left[\bar{\xi} \sqrt{\frac{c_p^2}{c_2^2} - 1} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Единственным решением этого уравнения, согласующимся со смыслом задачи ($c_p \rightarrow \text{const}$ при $\bar{\xi} \rightarrow \infty$), является решение $c_p = c_2$. Скорость приближения к предельному значению и оценку величин c_p^+ и c_p^- для n -й моды ($n = 1, 2, \dots$) можно получить по формулам [20]

$$c_p^+ = c_2 \left(1 + 2 \frac{n^2}{\bar{\xi}^2} \right), \quad c_p^- = c_2 \left[1 + \frac{(2n-1)^2}{2\bar{\xi}^2} \right]. \quad (5.11)$$

Для промежуточных значений $\bar{\xi}$ характер зависимости фазовых скоростей первых двух продольных и изгибных мод от $\bar{\xi}$ при $\nu = 0,25$ представлен на рис. 43, а, б (соответственно кривые 1 и 2).

Ветви с более высокими номерами имеют террасоподобные участки в зависимости c_p от $\bar{\xi}$ вблизи c_1 , что довольно хорошо видно в структуре спектра (см. рис. 39 и 42) вблизи линии OD .

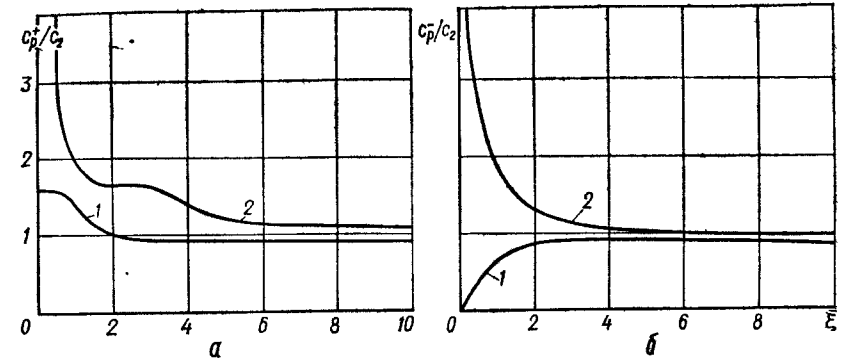


Рис. 43.

С точки зрения энергетического анализа процесса распространения возмущений в слое более важной по сравнению с фазовой является групповая скорость. Применительно к рассматриваемому случаю упругого слоя и гармонического процесса энергетическое определение групповой скорости (скорости переноса энергии) дается как отношение среднего за период потока мощности (проекции $\bar{W}_x$ на ось Ox вектора Умова) через поперечное сечение слоя единичной ширины к средней по объему на длине волны плотности энергии $\bar{E}$. Для гармонического процесса эти величины определяются равенствами

$$\begin{aligned} \bar{W}_x &= -\frac{i\omega}{4} \int_{-h}^h (\sigma_x u_x^* - \sigma_x^* u_x + \tau_{xz} u_z^* - \tau_{xz}^* u_z) dz, \\ \bar{E} &= \rho \omega^2 \int_{-h}^h (u_x u_x^* + u_z u_z^*) dz. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Тогда скорость переноса энергии (групповая скорость)

$$c_g = \frac{\bar{W}_x}{\bar{E}}. \quad (5.13)$$

Такое определение групповой скорости очень важно с точки зрения раскрытия ее физического смысла. В частности, здесь существенно то, что речь идет о переносе энергии через все сечения волновода.

При практических вычислениях групповой скорости можно не использовать формулы (5.12) и (5.13), а, основываясь на общих выводах работ [163, 278, 279], исходить непосредственно из дисперсионных уравнений

$$c_g = c_2 \frac{d\Omega}{d\bar{\xi}} = -c_2 \frac{F'_{\bar{\xi}}}{F'_{\Omega}}. \quad (5.14)$$

Исходя из соотношений (2.15) для смещений, путем достаточно громоздких выкладок можно убедиться в совпадении выражений (5.13) и (5.14) для групповой скорости.

Так же как для фазовых скоростей, используя (5.14), можно вычислить значения групповых скоростей для крайних значений больших и малых ξ . Из соотношений (5.5) следует, что значение групповой скорости низшей ветви для малых частот определяется равенствами

$$\begin{aligned} c_g^+ &= 2c_2 \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}} + O(\xi^2), \\ c_g^- &= 2\pi c_2 \bar{\xi} \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)} + O(\xi^2). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Отсюда, в частности, следует, что в низкочастотном пределе симметричные волны в слое являются бездисперсионными. Групповая и фазовая скорости равны между собой и равны так называемому значению пластиночной скорости. Что касается антисимметричных (изгибных) волн в слое, то для них всегда имеет место дисперсия, причем в области малых частот групповая скорость вдвое превосходит фазовую.

Для остальных ветвей в обоих случаях симметрии групповая скорость на частотах запираания равна нулю. В исключительном случае совпадения частот запираания двух соседних мод величина $d\Omega/d\bar{\xi}$ по формуле (3.25) однозначно не определена. Здесь групповую скорость нужно вычислять по основной формуле (5.13). Для стоячей волны ($\xi = 0$) поток мощности $\bar{W}_x$ равен нулю. Поэтому и в данном случае групповая скорость (скорость переноса энергии) равна нулю.

Исходя из асимптотического выражения $c_p^+ = c_p^- = c_R$ для дисперсионного уравнения для первой ветви и используя (5.3), находим, что при $\bar{\xi} \rightarrow \infty$

$$c_g^+ = c_g^- = c_R. \quad (5.16)$$

Аналогичный результат равенства предельных значений при $\bar{\xi} \rightarrow \infty$ фазовых и групповых скоростей

$$c_g^+ = c_g^- = c_2 \quad (5.17)$$

легко получить для остальных ветвей. При этом удобно использовать формулы (5.3) и (5.9). В высокочастотном пределе все нормальные волны в слое становятся бездисперсионными.

Для промежуточных значений $\bar{\xi}$ поведение групповых скоростей более сложно, чем фазовых. Подробное исследование поведения величины c_g в зависимости от Ω для $\nu = 0,25$ выполнено в работе [280]. Некоторые данные из этой работы приведены на рис. 44, где показаны зависимости групповых скоростей c_g^+ (рис. 44, а) и c_g^- (рис. 44, б) от величины Ω для первых двух ветвей (соответственно кривые 1 и 2). Видна сильная зависимость этих скоростей от Ω , а также четко выраженные относительные максимумы и минимумы. С ростом номера ветви количество таких относительных экстремумов

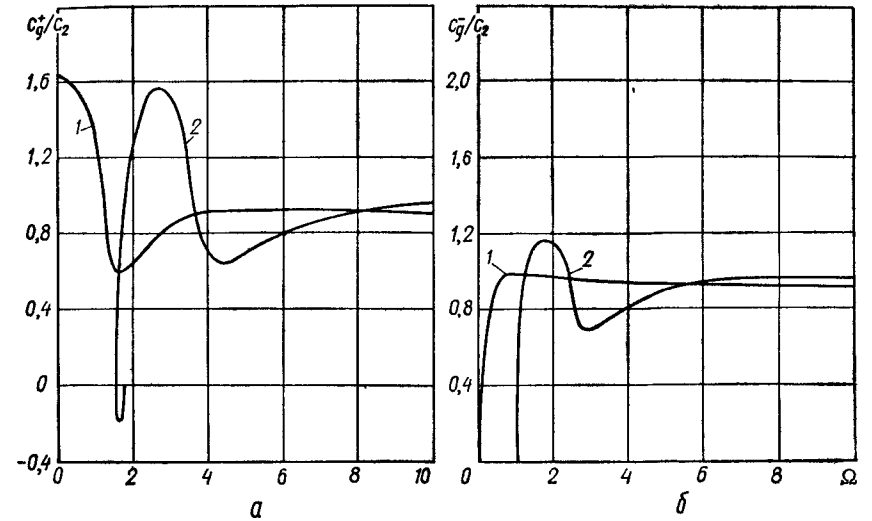


Рис. 44.

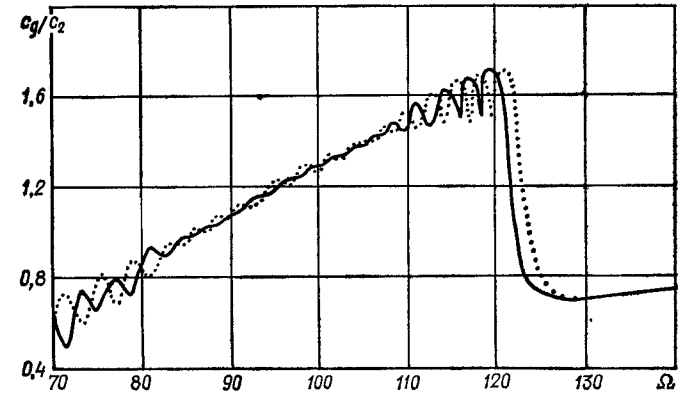


Рис. 45.

увеличивается. Это видно из рис. 45, где приведена групповая скорость 50-й моды для продольных (сплошная линия) и изгибных (пунктирная линия) типов движения. Отметим, что максимальное значение c_g равно скорости продольных волн c_1 .

Вычисление скорости c_g согласно формуле (5.2) приводит к возникновению отрицательных участков на графике ее зависимости от Ω . Связанное с этим явление, получившее название «обратной» волны и выражающееся в различии знаков величин c_p и c_g , обсуждается в § 7 данной главы.

§ 6. ВОЛНЫ РЭЛЕЯ — ЛЭМБА.

КИНЕМАТИКА РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ МОД

После решения дисперсионного уравнения появляется возможность вычислить распределение смещений и напряжений для каждой моды при любой частоте. Мы остановимся здесь лишь на анализе свойств распространяющихся мод, формирующих поле на большом расстоянии от источника.

Уже отмечалось, что в отличие от случая SH-волн, где распределение по толщине всех факторов не зависит от частоты, в общем случае при движении по определенной дисперсионной ветви кинематика продольных и изгибных нормальных мод существенно меняется. Однако о свойствах мод можно составить довольно полное представление, если рассмотреть их на некоторых определенных частотах.

Наиболее просто получить характеристики мод на частотах запиравания. В этом случае как продольные, так и изгибные движения в слое описываются вектором смещения, компоненты которого зависят лишь от толщинной координаты. Из выражений (2.17) для симметричного случая на частотах запиравания предельным переходом при $\bar{\xi} \rightarrow 0$ имеем следующие типы движений:

$$\begin{aligned} u_x \equiv 0, u_z = A \sin \left[\frac{\pi z(2p-1)}{2h} \right], \Omega_p = (2p-1)k, \\ u_x = B \cos \frac{q\pi}{h} z, u_z \equiv 0, \Omega_q = 2q. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Аналогичные выражения для антисимметричного случая получают из (2.18):

$$\begin{aligned} u_x \equiv 0, u_z = A_1 \cos \frac{p\pi z}{h}, \Omega_p = 2pk, \\ u_x = B_1 \sin \frac{(2q-1)\pi z}{2h}, u_z \equiv 0, \Omega_q = 2q-1. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Если эти выражения соотнести с выражениями для потенциалов (2.1), из которых в общем случае формируется вектор смещений, то увидим, что для первого типа движений в (6.1) и (6.2) $\varphi \neq 0$, $a_y = 0$, в то время как для второго $\varphi = 0$, $a_y \neq 0$.

Первый тип движений в (6.1) характеризуется только наличием толщинных смещений. Частоты $\Omega_p = (2p-1)k$ являются частотами толщинного резонанса слоя. Второй тип движений связан с наличием только продольных смещений, а соответствующие частоты $\Omega_q = 2q$ являются частотами толщинно-сдвигового резонанса слоя. Аналогично классифицируются типы движений (6.2) для изгибных колебаний.

Явный вид выражений для смещений можно получить во всех узлах сетки, использованной на рис. 39 и 42 для построения дисперсионных кривых, поскольку в этих точках известны точные значения частоты и постоянной распространения.

Приведем для примера выражения для тех значений $\bar{\xi}$, при которых дисперсионные ветви продольных мод пересекают линию $0D$, т. е. для точек, определяемых координатами

$$\bar{\xi} = \frac{2n}{\sqrt{k^2 - 1}}, \Omega = k\bar{\xi} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (6.3)$$

При этом фазовая скорость всех мод равна c_1 . Из формулы (2.17) получаем

$$\begin{aligned} u_x = i\bar{\xi} \left[(-1)^n + \frac{k^2 - 2}{2} \cos \frac{n\pi z}{h} \right] \exp(i\bar{\xi}x), \\ u_z = \frac{\bar{\xi}^2(k^2 - 2)}{4n} \sin \frac{n\pi z}{h} \exp(i\bar{\xi}x). \end{aligned} \quad (6.4)$$

В этих точках симметричные волны Рэлея — Лэмба имеют форму, подобную волнам Гудьера — Бишопа [181]. Они образованы комбинацией продольной волны с независимым от z потенциалом φ и поперечной волны с синусоидальным изменением по толщине потенциала a_y .

Естественно, что при движении вдоль ветви вектор смещений имеет отличными от нуля обе компоненты. Для описания особенностей движения в каждой моде на различных частотах в общем случае была предложена величина C , названная характеристикой нормальной моды [96, 229], равная отношению амплитуд в общем выражении (2.2) потенциалов, т. е.

$$C = \left| \frac{\Phi_1}{A_1} \right|^2. \quad (6.5)$$

Вычисления, проведенные в работе [229], показывают, что величина C существенно меняется при движении по дисперсионной ветви, и нельзя говорить о преимущественном типе движения для той или иной моды во всем диапазоне частот.

Типы движений (6.1) на частотах запиравания имеют характеристику C соответственно равной нулю или бесконечности. При изменении частоты каждая (кроме первой) ветвь пересекает линию $\Omega = \bar{\xi}\sqrt{2}$. В точках пересечения имеем следующие выражения для смещений:

$$u_x = -iB \sin \frac{\pi \bar{\xi} z}{2h} \exp(i\bar{\xi}x), u_z = B \cos \frac{\pi \bar{\xi} z}{2h} \exp(i\bar{\xi}x), \quad (6.6)$$

$$\bar{\xi} = 2m, \Omega = 2m\sqrt{2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

в антисимметричном случае и

$$u_x = iA \cos \frac{\pi \bar{\xi} z}{2h} \exp(i\bar{\xi}x), u_z = A \sin \frac{\pi \bar{\xi} z}{2h} \exp(i\bar{\xi}x), \quad (6.7)$$

$$\bar{\xi} = 2m - 1, \Omega = (2m - 1)\sqrt{2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

в симметричном случае. Этот тип движений известен как моды Ламе. Они характеризуются нулевыми значениями объемного расширения и касательных напряжений τ_{xz} во всем объеме волновода. Выражения (6.6) и (6.7) получаем из (2.2) при $\Phi_1 \equiv 0$, т. е. в этом

случае характеристика C равна нулю уже для всех ветвей, независимо от ее значения на частотах запирания.

Важно отметить, что в этом случае угол падения γ плоских сдвиговых волн, суперпозицией которых определяется волновое поле, равен 45° . Как отмечалось в главе 2, это единственный отличный от нормального падения случай, когда отражение волн от границы происходит без возбуждения волн иного типа. Ниже показано, что такие моды, связанные с существованием только SV-волн, очень важны и при изучении установившихся колебаний конечных тел.

Для предельного случая $\bar{\xi} \rightarrow \infty$ и $\Omega \rightarrow \infty$ все ветви, за исключением низших продольной и изгибной, приближаются к асимптоте $\Omega = \bar{\xi}$, оставаясь выше ее. В этом случае анализ выражений для смещений показывает, что движение во всех модах является преимущественно сдвиговым с компонентами

$$\begin{aligned} u_z &\sim \sin \frac{\pi(n-1)z}{h} \exp(i\bar{\xi}x), \quad n \geq 2, \\ u_x &\sim \cos \frac{\pi(2n-3)z}{2h} \exp(i\bar{\xi}x), \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (6.8)$$

соответственно для симметричных и антисимметричных движений. Продольная составляющая вектора смещений u_x сильно локализована вблизи границ слоя. При этом движение связано, по существу, с чистой SV-волной. Если по формуле (2.3) вычислить углы падения γ и θ

$$\cos \gamma = \frac{\bar{\xi}}{\Omega} \rightarrow 1, \quad \cos \theta = k \frac{\bar{\xi}}{\Omega} > 1, \quad (6.9)$$

то увидим, что при отражении распространяющейся SV-волны вблизи границы возбуждается неоднородная Р-волна.

Для низших ветвей в обоих случаях симметрии, в связи с тем, что они лежат ниже прямой $\Omega = \bar{\xi}$ при $\bar{\xi} \rightarrow \infty$, SV- и Р-волны становятся неоднородными. Движение локализуется вблизи поверхностей слоя в виде чисто рэлеевских волн.

Достаточно большое число данных для кинематических характеристик на промежуточных частотах приведено в работах [20, 272]. Дополнительные данные для определенного частотного диапазона рассматриваются в следующем параграфе.

§ 7. ВОЛНЫ РЭЛЕЯ—ЛЭМБА. ЯВЛЕНИЕ «ОБРАТНОЙ» ВОЛНЫ

Как отмечалось в § 5 данной главы, представленные на рис. 43 данные относятся к распространяющимся модам, соответствующим участкам дисперсионных кривых при $\bar{\xi} > 0$. В таком случае фазовая скорость волны положительна, т. е. совпадает с положительным направлением оси Ox . В связи с этим естественно предположить, что и энергию такие волны переносят в положительном направлении оси Ox . Хотя, в принципе, возможность противопо-

ложного направления фазовой и групповой скоростей известна давно [206], наличие такого явления при распространении волн в идеально упругом изотропном теле представляется довольно необычным. Именно при рассмотрении групповой скорости в упругом слое это явление было впервые установлено в работе [280]. На рис. 44, а для групповой скорости второй моды данное свойство характеризуется наличием участка кривой в области $c_g < 0$.

Возможность такого явления достаточно ясно можно предсказать из анализа самого спектра, представленного на рис. 39, и изучения знака кривизны ветвей в окрестности частот запирания. Однако первое четкое упоминание о нем содержится лишь в указанной выше работе. Обнаруженное явление было названо «обратной» волной и стало предметом многочисленных обсуждений.

Появление в спектре нормальных мод волновода волны с такими свойствами не является указанием на ограниченные возможности модели идеально упругого тела. Конечно, это означает не то, что энергия течет к источнику, а только то, что групповая и фазовая скорости имеют разные знаки. Для каждой точки дисперсионной кривой на плоскости $(\bar{\xi}, \Omega)$ существует «двойник» на плоскости $(-\bar{\xi}, \Omega)$. Если выдвинуть требование выделить и рассмотреть лишь те нормальные волны, которые переносят энергию вправо, то такой отбор произвести довольно просто. При этом, конечно, остается определенная необычность в поведении нормальной волны на некотором участке изменения частоты. В таком частотном интервале волна, перенося энергию, например, вправо, имеет систему возвышенностей и впадин, движущихся влево. Иными словами, при некоторых оптимальных условиях возбуждения и приема волн в слое можно наблюдать довольно медленный волновой пакет (c_g мало), в котором гребни и впадины (области сжатия — разрежения) волн движутся с достаточно высокой скоростью (c_p велико) в противоположном направлении (к источнику). Однако ситуация, когда фазовая и групповая скорости имеют разные знаки, не так уж необычна. В работах Мандельштама [86, 88] содержится несколько вполне реальных примеров, которые делают эту ситуацию в одинаковой мере наглядной и понятной.

При рассмотрении явления обратной волны важно отметить следующее. Рассматривая вторую ветвь для симметричного случая (рис. 46), видим, что точка, разделяющая эту ветвь на участки с одинаковыми и противоположными знаками групповой и фазовой скоростей, является точкой входа на вещественную плоскость $\bar{\xi}$ двух комплексных участков. Эти участки берут начало в наименьшем по модулю комплексном корне дисперсионного уравнения при $\Omega = 0$. Такие точки мы отмечали как точки пересечения ветвей различных семейств, а описанное выше явление обратной волны свидетельствует об актуальности вопроса о правильном продолжении ветвей после таких пересечений. Данный вопрос тщательно рассмотрен в работах [103, 236], что дало возможность построить четкую и детальную картину спектра с учетом требования одно-

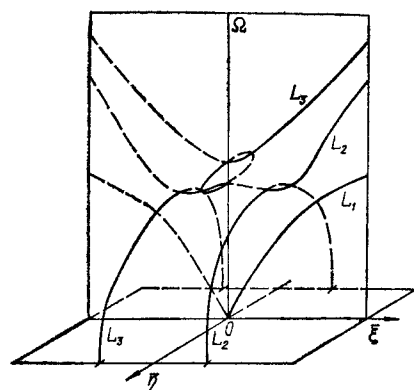


Рис. 46.

ветствии с указанным способом разделения, выбор ветвей важен при анализе неустановившихся движений в волноводе [248] и при рассмотрении вынужденных движений в нем [7, 8].

Результат, полученный при теоретическом анализе свойств дисперсионных соотношений и связанный с наличием нормальных волн с противоположными знаками групповой и фазовой скоростей, оказался довольно необычным в теории волноводного распространения, содержание и основные понятия которой формировались на базе изучения относительно простых ситуаций в акустике и электродинамике. В связи с этим проведены эксперименты [16, 228], целью которых была проверка возможности возбуждения такого типа волн. Эксперименты проводились для цилиндров и призм из различных материалов, возбуждаемых с торца пьезоэлектрическими преобразователями. Подводимый сигнал представлял собой узкополосный гауссов импульс с различными несущими частотами. Вследствие дисперсии первоначальный импульс искажался и на выходе наблюдались импульсы, соответствующие нормальным распространяющимся модам, возможным при данной частоте. По времени задержки приходящих импульсов вычислялась групповая скорость соответствующих мод. О степени согласования теоретических и экспериментальных данных можно судить по рис. 47, взятому из работы [228]. На нем приведены вычисленные (сплошные линии) и замеренные (точки) данные о групповой скорости для пластины из плавного кварца $20,32 \times 1,77 \times 0,0381$ см. При расчетах принималось $c_2 = 3,8 \times 10^3$ м/с, $\nu = 0,17$. Степень согласования теоретических и экспериментальных данных очень высокая. Кроме того, приведенные в работе [228] осциллограммы наглядно свидетельствуют о возможности эффективного возбуждения «обратных» волн. Приведенные экспериментальные данные достаточно интересны также с точки зрения оценки возможности модели бесконечного упругого слоя при анализе волновых процессов в конечных телах.

Согласно энергетическому определению групповой скорости

значного выделения ветви. Если исходить из требования убывания (возрастания) смещений с ростом x в модах для комплексных корней и постоянства знака групповой скорости, то для двух низших ветвей симметричного случая трехмерная картина спектра представлена Миндлиным [236]. Эта картина воспроизведена на рис. 46, где сплошными линиями отмечены первая (L_1), вторая (L_2) и третья (L_3) ветви нормальных мод, которые имеют положительные групповые скорости. Правильный, в соот-

(5.12) ее знак совпадает со знаком средней за период осевой составляющей вектора потока мощности $\bar{W}_x$. В связи с этим определенный интерес представляет рассмотрение локальной и суммарной по сечению величины потока мощности как характеристики нормальной моды. Особенно любопытно провести такое рассмотрение в области обратной волны для второй (точнее, третьей) ветви продольных мод (рис. 48). Мы проанализировали эту область для $\nu = 0,17$ ($k = 1,587$, $\Omega^* = 1,514$) и значения частоты $\Omega_0 = 1,528$. При этом значение $\xi_3 = 0,441$ соответствует ниспадающему участку ветви, а $\xi_2 = 0,741$ — восходящему. На рис. 49 представлено распределение по толщине безразмерных смещений (отнесенные к $u_{\max}$) и безразмерных напряжений (отнесенные к $\sigma_{\max}$) и плотности потока мощности $\bar{P}_x$ для $\xi_3 = 0,441$ («обратная» волна). Аналогично на рис. 50 для $\xi_2 = 0,741$ приведены те же характеристики, но для прямой волны.

Наибольшее различие между этими двумя типами движений проявляется, естественно, при сопоставлении распределения по толщине слоя средней за период плотности потока мощности. Если для $\xi = \xi_2$ суммарный поток по толщине, очевидно, положителен, то для $\xi = \xi_3$ он отрицателен. Это, разумеется, согласуется со значением групповой скорости на соответствующих участках дисперсионных кривых. Важным, однако, здесь является то, что в обоих случаях в сечении слоя существуют точки с противоположным направлением потока энергии. Дальнейшие вычисления показывают, что такая ситуация характерна для различных ν участков всех мод, кроме низшей, однако везде суммарный поток $\bar{W}_x$ по сечению положителен. На рис. 51 показана часть дисперсионного спектра для $\nu = 0,35$. Такое значение коэффициента Пуассона использовалось в работе [228] при сопоставлении теоретических и экспериментальных данных для алюминиевых полос. Полу жирными линиями на рис. 51 выделены участки ветвей, для которых имеются локальные отрицательные значения $\bar{P}_x$.

Проведенный анализ процесса переноса энергии в бесконечном слое указывает на существование трудностей при попытке формулировать для упругих областей такого вида условия излучения [8,

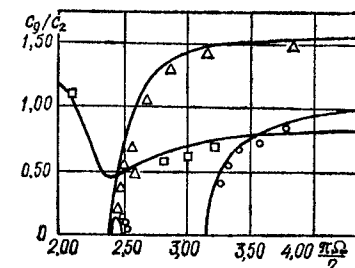


Рис. 47.

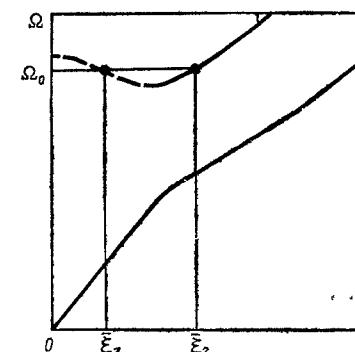


Рис. 48.

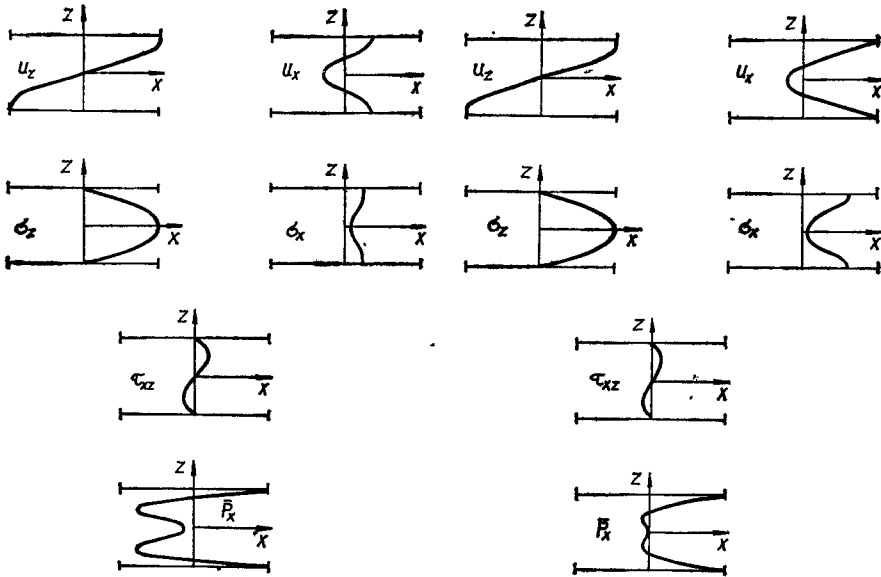


Рис. 49.

Рис. 50.

17]. По-видимому, эти условия не могут быть сформулированы в виде некоторых общих ограничений на выражения для вектора смещений, как в случае бесконечного пространства [74]. Здесь для каждого значения частоты необходимо установить количество распространяющихся мод в слое и отобрать моды, обеспечивающие перенос энергии от источника. Такое требование нельзя выполнить, анализируя лишь фазовые скорости нормальных волн.

§ 8. ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Построение дисперсионных соотношений для распространяющихся волн в цилиндре, естественно, нельзя выполнить на основе данных об отражении волн от плоской границы полупространства. Для вывода этих соотношений способом, аналогичным предложенному в § 1 и 2 данной главы, необходимо детальное решение довольно сложной задачи об отражении плоских волн от цилиндрической границы. Поэтому при рассмотрении волновых движений в цилиндре проще исходить из набора частных решений уравнений Ламе в цилиндрических координатах. Такие наборы впервые были построены в работах Похгаммера [252] и Кри [168].

Далее, начиная с 40-х годов нашего века было выполнено много исследований, посвященных изучению волновых движений в цилиндре. Количество работ в этой области, пожалуй, значительно превосходит число публикаций для рассмотренной выше задачи о слое. Основные этапы истории вопроса отражены в обзорах [96,

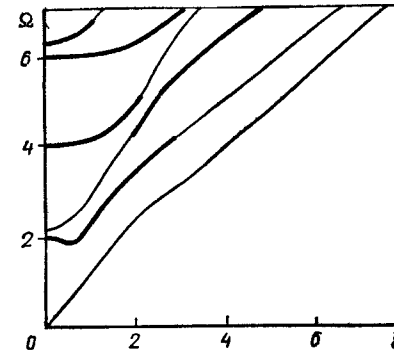


Рис. 51.

224, 231]. Интерес к такому объекту, как цилиндр, стимулировался практическим значением геометрии волновода, с одной стороны, и возможностью в рамках одного набора решений изучить ряд вопросов о влиянии кривизны, толщины стенок (полый цилиндр), типа симметрии движений на характеристики волнового поля — с другой.

При построении представлений для компонентов вектора перемещений в цилиндре $0 \leq r_1 \leq a$, $|z_1| < \infty$ исходим из уравнений (1.22) гл. 1 для скалярного $\Phi(r, \theta, z, t)$ и векторного $\mathbf{a}(r, \theta, z, t)$ потенциалов. Геометрия объекта и естественное предположение о характере волнового движения вдоль оси Oz позволяют в значительной мере предугадать форму искомых скалярной и векторной функций. Они должны представлять бегущие вдоль оси Oz волны

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, z, t) &= \Phi(r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} \exp[i(\bar{\gamma}z - \omega t)], \\ a_r(r, \theta, z, t) &= A_r(r) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} \exp[i(\bar{\gamma}z - \omega t)], \\ a_\theta(r, \theta, z, t) &= A_\theta(r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} \exp[i(\bar{\gamma}z - \omega t)], \\ a_z(r, \theta, z, t) &= A_z(r) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} \exp[i(\bar{\gamma}z - \omega t)]. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Здесь введены и далее использованы безразмерные координаты $r = r_1/a$, $z = z_1/a$; n — целое число; $\bar{\gamma}$ — безразмерная постоянная распространения.

Входящие в (8.1) неизвестные функции радиальной координаты выбираются из условия удовлетворения уравнений (1.22) гл. 1. При этом получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\Phi &= 0, \\ \frac{d^2A_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_z}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)A_z &= 0, \\ \frac{d^2A_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_r}{dr} + \frac{1}{r^2}(-n^2A_r + 2nA_\theta - A_r) + \beta^2A_r &= 0, \\ \frac{d^2A_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_\theta}{dr} + \frac{1}{r^2}(-n^2A_\theta + 2nA_r - A_\theta) + \beta^2A_\theta &= 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Здесь обозначено

$$\alpha^2 = \frac{\Omega^2}{k^2} - \bar{\gamma}^2, \quad \beta^2 = \Omega^2 - \bar{\gamma}^2, \quad \Omega = \frac{\omega a}{c_2}, \quad k^2 = 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu}. \quad (8.3)$$

Первые два уравнения в (8.2), очевидно, имеют следующие решения для случая сплошного цилиндра:

$$\Phi(r) = F J_n(\alpha r), \quad A_z(r) = A_3 J_n(\beta r), \quad (8.4)$$

выраженные через функции Бесселя первого рода n -го порядка.

Для построения решений двух остальных уравнений в (8.2) целесообразно рассмотреть их сумму и разность. При этом получаем два уравнения

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \beta^2 - \frac{(n+1)^2}{r^2} \right] (A_r - A_\theta) &= 0, \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \beta^2 - \frac{(n-1)^2}{r^2} \right] (A_r + A_\theta) &= 0. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Эти уравнения также решаются через функции Бесселя и соответствующие представления для A_r и A_θ приобретают вид

$$\begin{aligned} A_r(r) &= A_1 J_{n-1}(\beta r) + A_2 J_{n+1}(\beta r), \\ A_\theta(r) &= A_1 J_{n-1}(\beta r) - A_2 J_{n+1}(\beta r). \end{aligned} \quad (8.6)$$

После отыскания функций радиальной координаты представления (8.1) будут содержать четыре произвольные постоянные, т. е. обладать определенной избыточностью. Вопрос о способах исключения лишней постоянной в решениях, полученных через векторный и скалярный потенциалы, обсуждался подробно в главе 1. Пользуясь возможностью поступить в значительной мере произвольно при выборе значений одной из постоянных, полагаем далее $A_1 = 0$, т. е. $A_r = -A_\theta$. Это удобно с точки зрения последующего удовлетворения граничных условий на цилиндрической поверхности. Отметим также, что избыточность представления (8.1) можно было бы с самого начала устранить путем наложения связи на искомые функции A_r и A_θ и тем самым развязать последние уравнения в (8.2).

Таким образом, компоненты вектора смещений в цилиндре представляются в виде

$$\begin{aligned} u_r &= \left[F \frac{dJ_n(\alpha r)}{dr} + A_2 i \bar{\gamma} J_{n+1}(\beta r) + A_3 \frac{n}{r} J_n(\beta r) \right] \times \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} \exp[i(\bar{\gamma} z - \omega t)], \\ u_\theta &= \left[-F \frac{n}{r} J_n(\alpha r) + A_2 i \bar{\gamma} J_{n+1}(\beta r) - A_3 \frac{dJ_n(\beta r)}{dr} \right] \times \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} \exp[i(\bar{\gamma} z - \omega t)], \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} u_z &= \left\{ F i \bar{\gamma} J_n(\alpha r) - A_2 \left[\frac{dJ_{n+1}(\beta r)}{dr} + \frac{n+1}{r} J_{n+1}(\beta r) \right] \right\} \times \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} \exp[i(\bar{\gamma} z - \omega t)]. \end{aligned}$$

Выражения (8.7) содержат три произвольные постоянные A_2 , A_3 , F и удовлетворяют уравнениям движения при произвольных значениях частоты ω и постоянной распространения $\bar{\gamma}$. При рассмотрении вынужденных гармонических движений частота определяется источником сил или перемещений, а $\bar{\gamma}$ является параметром при представлении всех величин интегралами Фурье. Рассмотрение волновых движений при однородных условиях на цилиндрической поверхности приводит к однородной линейной системе уравнений для постоянных A_2 , A_3 и F . Условие существования ее нетривиального решения определяет дисперсионное соотношение, связывающее допустимые значения $\bar{\gamma}$ и ω .

В случае свободной от напряжений цилиндрической поверхности $r = 1$, т. е. при равенстве нулю на ней нормальных σ_r и касательных τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$ напряжений, дисперсионное уравнение имеет вид

$$\|a_{ij}\| = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (8.8)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= (n^2 - 1 - \Omega^2/2 + \bar{\gamma}^2) J_n(\alpha); \\ a_{12} &= (n^2 - 1 - \beta^2) J_n(\beta); \\ a_{13} &= 2(n^2 - 1) [\beta J_{n-1}(\beta) - n J_n(\beta)] - \beta^2 J_n(\beta); \\ a_{21} &= \alpha J_{n-1}(\alpha) - (n+1) J_n(\alpha); \\ a_{22} &= \beta J_{n-1}(\beta) - (n+1) J_n(\beta); \\ a_{23} &= (2n^2 + 2n - \bar{\gamma}^2) J_n(\beta) - 2\beta J_{n-1}(\beta); \\ a_{31} &= \alpha J_{n-1}(\alpha) - n J_n(\alpha); \\ a_{32} &= (1 - \Omega^2/2\bar{\gamma}^2) [\beta J_{n-1}(\beta) - n J_n(\beta)]; \\ a_{33} &= n^2 J_n(\beta). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Уравнение (8.8) для каждого значения $n = 0, 1, 2, \dots$, т. е. для движения с определенным типом симметрии, определяет связь безразмерной частоты Ω с безразмерной постоянной распространения $\bar{\gamma}$ при коэффициенте Пуассона ν в качестве параметра.

Аргументами функций Бесселя в выражениях (8.9) являются многозначные функции $\alpha = \left(\frac{\Omega^2}{k^2} - \bar{\gamma}^2 \right)^{1/2}$ и $\beta = (\Omega^2 - \bar{\gamma}^2)^{1/2}$. Из анализа дисперсионного уравнения (8.8) следует, что при любом выборе ветвей однозначности этих функций само уравнение не меняется. При вычислениях следует также использовать соотношение

$$J_n(\pm ix) = (\pm i)^n I_n(x), \quad (8.10)$$

где $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя.

Формальная подстановка $\beta = 0$ в выражениях (8.9) показывает, что дисперсионное уравнение (8.8) тождественно удовлетворяется. Однако, как и в случае слоя (см. § 3 данной главы), этому корню дисперсионного уравнения соответствуют нулевые значения всех компонентов вектора смещений.

§ 9. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРЕ

Представления компонентов вектора смещений для осесимметричных волновых движений получаем, полагая в выражениях (8.9) $n = 0$. При этом возможны два различных вида движений:

$$\begin{aligned} u_r &= [-F\alpha J_1(\alpha r) + A_2 i \bar{\gamma} J_1(\beta r)] \exp[i(\bar{\gamma} z - \omega t)], \\ u_z &= [F i \bar{\gamma} J_0(\alpha r) - A_2 \beta J_0(\beta r)] \exp[i(\bar{\gamma} z - \omega t)], \end{aligned} \quad (9.1)$$

$$u_\theta = 0$$

и

$$\begin{aligned} u_\theta &= C J_1(\beta r) \exp[i(\bar{\gamma} z - \omega t)], \\ u_r &= u_z = 0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Первый из них связан с распространением продольных волн, а второй — крутильных волн в цилиндре. Соответствующие дисперсионные уравнения для этих случаев принимают вид

$$(\Omega^2 - 2\bar{\gamma}^2)^2 J_0(\alpha) J_1(\beta) + 4\bar{\gamma}^2 \alpha \beta J_0(\beta) J_1(\alpha) - 2\Omega^2 \alpha J_1(\alpha) J_1(\beta) = 0, \quad (9.3)$$

$$\beta J_0(\beta) - 2J_1(\beta) = 0. \quad (9.4)$$

Крутильные нормальные волны (9.2) в цилиндре по свойствам очень близки к SH-волнам в слое. Дисперсионное уравнение (9.4) относительно β имеет бесконечное число вещественных корней, включая корень $\beta = 0$. В последнем случае $\Omega = \bar{\gamma}$ и, следовательно, соответствующая нормальная волна не обладает дисперсией — фазовая и групповая скорости для нее равны c_2 . Смещения частиц цилиндра для данной моды имеют вид

$$u_\theta = B_0 r \exp[i(\bar{\gamma} z - \omega t)]. \quad (9.5)$$

Для всех остальных корней β_p ($p = 1, 2, \dots$) уравнения (9.4) соответствующие моды обладают дисперсией. При этом частота и постоянная распространения связаны соотношением

$$\Omega^2 = \beta_p^2 + \bar{\gamma}^2, \quad (9.6)$$

имеющим тот же вид, что и уравнение (1.6) для SH-волн. Уравнение (9.6) описывает явление дисперсии, характерной для большого числа волновых процессов различной природы, и подробно обсуждалось как типичное в работе [277]. Как и в изученном выше случае, каждому значению частоты соответствует конечное число вещественных значений $\bar{\gamma}$ (бегущие волны) и бесконечное число чисто мнимых

$\bar{\gamma}$ (неоднородные волны). Набор полученных при этом решений позволяет легко выполнить произвольные граничные условия для единственного отличного от нуля компонента напряжений $\tau_{z\theta}$ на торце полубесконечного волновода. При этом мы приходим к разложению произвольной функции радиуса в ряд по системе функций $J_1(\lambda_j r)$, где λ_j — корни уравнения $J_1'(\lambda) = 0$. Справедливость таких разложений обосновывается, например, в работе [34]. Неоднородные волны с комплексными значениями $\bar{\gamma}$ в случае крутильных движений отсутствуют. Это утверждение можно доказать с помощью формальных выкладок, однако интересно отметить, что с физической точки зрения полнота системы функций, соответствующих вещественным и чисто мнимым постоянным распространения, является достаточным основанием для высказывания такого утверждения. С этой точки зрения утверждение авторов работы [224] о существовании комплексных корней уравнения (9.4) является необоснованным.

Поведение продольных осесимметричных волн описывается дисперсионным уравнением (9.3). Вектор смещений для них в соответствии с (9.1) имеет вид

$$\begin{aligned} u_r &= B \frac{\alpha}{\bar{\gamma}} [(2\bar{\gamma}^2 - \Omega^2) J_1(\beta) J_1(\alpha r) - 2\bar{\gamma}^2 J_1(\alpha) J_1(\beta r)] \times \\ &\quad \times \exp[i(\bar{\gamma} z - \omega t)], \\ u_z &= B [(2\bar{\gamma}^2 - \Omega^2) J_1(\beta) J_0(\alpha r) + 2\alpha \beta J_1(\alpha) J_0(\beta r)] \times \\ &\quad \times \exp[i(\bar{\gamma} z - \omega t)]. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Если в уравнении (9.3) устремить величину $\bar{\gamma}$ к нулю, считая Ω конечным, то получим равенство

$$J_1(\Omega) \left[\Omega J_0\left(\frac{\Omega}{k}\right) - \frac{2}{k} J_1\left(\frac{\Omega}{k}\right) \right] = 0. \quad (9.8)$$

Это уравнение определяет два независимых семейства частот запираения для дисперсионных ветвей. Первая ветвь имеет нулевую частоту запираения $\Omega = 0$. Как и для слоя, частоты первого семейства, определяемые уравнением

$$J_1(\Omega) = 0, \quad (9.9)$$

не зависят от коэффициента Пуассона ν . Соответствующие выражения для смещений на частотах запираения получаем из (9.7), учитывая (9.9) и полагая $\bar{\gamma} = 0$:

$$u_r = 0, \quad u_z = A J_0(\Omega r). \quad (9.10)$$

Движение частиц цилиндра в этом случае является продольно-сдвиговым, поскольку величина u_z при Ω , соответствующем (9.9), всегда имеет противозазные участки.

Второе уравнение из (9.8)

$$\Omega J_0\left(\frac{\Omega}{k}\right) - \frac{2}{k} J_1\left(\frac{\Omega}{k}\right) = 0 \quad (9.11)$$

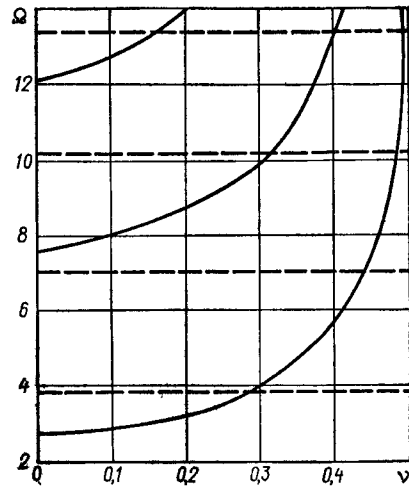


Рис. 52.

ности частот запирания второго семейства (сплошные линии) от величины ν . Штриховыми линиями отмечены значения частот запирания первого семейства. Видно, что, как и в случае слоя, структура спектра чувствительна к изменению ν . Здесь также меняются местами частоты запирания радиальных и продольно-сдвиговых мод.

При изучении системы вещественных и чисто мнимых корней уравнения (9.3) оказывается возможным построить такую же сетку, как и в случае уравнения Рэлея — Лэмба (3.1).

Семейство кривых

$$\Omega^2 = \bar{\gamma}^2 + \varphi_m^2, \quad \Omega^2 = k^2 (\bar{\gamma}^2 + \varphi_n^2) \quad (9.13)$$

образует одну систему границ решетки, если φ_m и φ_n — ненулевые корни уравнения

$$J_1(\varphi) = 0. \quad (9.14)$$

Вторая система границ решетки образуется семействами кривых

$$\Omega^2 = \bar{\gamma}^2 + \psi_m^2, \quad \Omega^2 = k^2 (\bar{\gamma}^2 + \sigma_n^2), \quad (9.15)$$

где ψ_m — ненулевые корни уравнения

$$\psi J_0(\psi) = J_1(\psi), \quad (9.16)$$

а σ_n — ненулевые корни уравнения

$$\sigma J_0(\sigma) = \frac{2\sigma^2 J_1(\sigma)}{\bar{\gamma}^2 (k^2 - 2) + k^2 \sigma^2}. \quad (9.17)$$

Уравнения границ решетки в этом случае более сложные (в частности, уравнение (9.17) само содержит величину $\bar{\gamma}$), чем соответствующие уравнения для слоя. Однако качественных трудностей в интерпретации и использовании решетки здесь не возникает. При этом картина спектра подобна представленной на рис. 39 для про-

дольных мод в слое. Для полного определения дисперсионных ветвей во всем диапазоне частот $0 \leq \Omega \leq \infty$ необходимо учесть комплексные корни. Их поведение также аналогично поведению комплексных корней в случае слоя. В частности, комплексные участки ветвей выходят на вещественную и мнимую плоскости $\bar{\gamma}$ в точках относительного экстремума. Подробности качественного исследования спектра для осесимметричных нормальных мод содержатся в работе [109]. Структуру спектра при $\nu = 0,31$ достаточно полно отражает рис. 53, взятый из этой работы. Все величины на рис. 53 отнесены к значению $\delta = 3,8317$ — наименьшему ненулевому корню уравнения $J_1(\delta) = 0$.

$$u_r = B J_1\left(\frac{\Omega}{k} r\right), \quad u_z = 0. \quad (9.12)$$

Движение в этих модах на частотах запирания является чисто радиальным.

С увеличением постоянной распространения $\bar{\gamma}$ характер движения частиц в обоих семействах мод изменяется. В каждом из них теперь будут как сдвиговые, так и радиальные смещения.

На рис. 52 представлены рассчитанные в работе [277] зависи-

мости частот запирания второго семейства (сплошные линии) от величины ν . Штриховыми линиями отмечены значения частот запирания первого семейства. Видно, что, как и в случае слоя, структура спектра чувствительна к изменению ν . Здесь также меняются местами частоты запирания радиальных и продольно-сдвиговых мод.

При изучении системы вещественных и чисто мнимых корней уравнения (9.3) оказывается возможным построить такую же сетку, как и в случае уравнения Рэлея — Лэмба (3.1).

Семейство кривых

$$\Omega^2 = \bar{\gamma}^2 + \varphi_m^2, \quad \Omega^2 = k^2 (\bar{\gamma}^2 + \varphi_n^2) \quad (9.13)$$

образует одну систему границ решетки, если φ_m и φ_n — ненулевые корни уравнения

$$J_1(\varphi) = 0. \quad (9.14)$$

Вторая система границ решетки образуется семействами кривых

$$\Omega^2 = \bar{\gamma}^2 + \psi_m^2, \quad \Omega^2 = k^2 (\bar{\gamma}^2 + \sigma_n^2), \quad (9.15)$$

где ψ_m — ненулевые корни уравнения

$$\psi J_0(\psi) = J_1(\psi), \quad (9.16)$$

а σ_n — ненулевые корни уравнения

$$\sigma J_0(\sigma) = \frac{2\sigma^2 J_1(\sigma)}{\bar{\gamma}^2 (k^2 - 2) + k^2 \sigma^2}. \quad (9.17)$$

Уравнения границ решетки в этом случае более сложные (в частности, уравнение (9.17) само содержит величину $\bar{\gamma}$), чем соответствующие уравнения для слоя. Однако качественных трудностей в интерпретации и использовании решетки здесь не возникает. При этом картина спектра подобна представленной на рис. 39 для про-

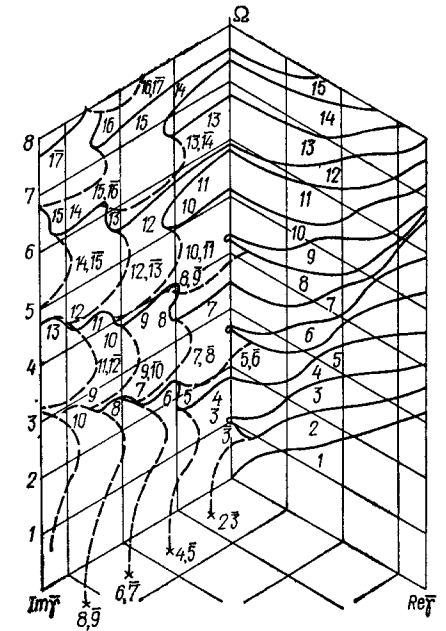


Рис. 53.

дольных мод в слое. Для полного определения дисперсионных ветвей во всем диапазоне частот $0 \leq \Omega \leq \infty$ необходимо учесть комплексные корни. Их поведение также аналогично поведению комплексных корней в случае слоя. В частности, комплексные участки ветвей выходят на вещественную и мнимую плоскости $\bar{\gamma}$ в точках относительного экстремума. Подробности качественного исследования спектра для осесимметричных нормальных мод содержатся в работе [109]. Структуру спектра при $\nu = 0,31$ достаточно полно отражает рис. 53, взятый из этой работы. Все величины на рис. 53 отнесены к значению $\delta = 3,8317$ — наименьшему ненулевому корню уравнения $J_1(\delta) = 0$.

На рис. 53 нормальные волны, соответствующие различным действительным, мнимым и комплексным участкам одной и той же ветви, обозначены числами. Штриховые линии представляют комплексные участки ветвей. Черта над номером означает, что данной нормальной волне соответствует отражение показанной ветви относительно плоскости $\bar{\gamma} = 0$. Отмеченные чертой участки на вещественной плоскости $\bar{\gamma}$ соответствуют обратным волнам, подробно описанным выше. Как видно из рис. 53, это явление наблюдается в цилиндре чаще, чем в слое.

Координаты точек пересечения комплексных участков ветвей с плоскостью $\Omega = 0$ определяются из уравнения

$$\bar{\gamma}^2 (k^2 - 1) [I_0^2(\bar{\gamma}) - I_1^2(\bar{\gamma})] - k^2 I_1^2(\bar{\gamma}) = 0. \quad (9.18)$$

Оно хорошо изучено при решении статических задач для кругового цилиндра [80].

При рассмотрении дисперсионного уравнения неоднократно подчеркивалась аналогия в поведении волн в цилиндре и слое. Эта аналогия прослеживается также в асимптотическом поведении фазовых c_p и групповых c_g скоростей нормальных мод. Предельное значение c_p и c_g при низкой частоте первой нормальной моды $c_0 = \sqrt{E/\rho}$. Оно совпадает со скоростью продольных волн в стержне, определяемой по элементарной теории.

В высокочастотной области групповая и фазовая скорости этой моды приближаются снизу к скорости рэлеевских волн c_R . Все

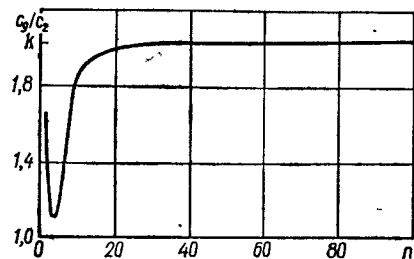


Рис. 54.

Анализ поведения групповых скоростей нескольких первых распространяющихся мод в цилиндре послужил в свое время основанием для того, чтобы говорить о парадоксе в теории распространения упругих волн [68]. Поскольку ни в одной из этих мод энергия не могла переноситься со скоростью продольных волн в упругом теле, то был сделан вывод о том, что никакая часть энергии, подводимой к цилиндру, не может переноситься со скоростью c_1 . Этот парадокс исчез после анализа величины c_g для высших мод. Оказалось, что все моды с высокими номерами при определенных значениях ν имеют величину $c_g = c_1$.

Изменение групповой скорости мод с высокими номерами при изменении частоты для цилиндра подобно показанному на рис. 45 случаю слоя. Значение максимальной величины c_g для различных мод в цилиндре при $\nu = 0,342$ рассчитано в работе [193] и представлено на рис. 54.

Выше описан характер движения в каждой моде на частоте запираия. Определенный интерес представляет изменение характера движения в моде при изменении частоты. На рис. 55 представлено распределение по радиусу нормированных перемещений в первой моде на разных частотах, $\nu = 0,3317$ [288]. Здесь четко прослеживается трансформация движения от поршневого, на низких частотах, до движения, характерного для поверхностной волны Рэлея на высоких частотах.

Поведение смещений в третьей моде при $\nu = 0,3317$ с изменением частоты представлено на рис. 56 [288]. На частоте запираия в ней наблюдаются только радиальные смещения. Видно, что с увеличением Ω увеличивается число перемен знака в распределении u_z . Тенденция к увеличению осцилляций с ростом частоты в других модах также сохраняется, однако это не всегда связано с увеличением числа перемен знака. Из общих выражений для смещений (9.7) можно, например, установить характер их поведения для больших Ω вблизи областей, где $c_p \cong c_1$. При этом α близко к нулю, а β остается достаточно большим. Тогда каждая компонента смещений представляет собой суперпозицию двух функций Бесселя с большим и малым аргументами. Например, для $\nu = 1/3$ осевое смещение может иметь

остальные ветви имеют бесконечную фазовую и нулевую групповую скорости на частотах запираия, а в высокочастотной области эти скорости стремятся сверху к c_2 . Поведение величин c_p и c_g для промежуточных значений частоты качественно подобно показанным на рис. 43, а и 44, а. Более полные данные по этому вопросу можно найти, например, в работах [193, 267].

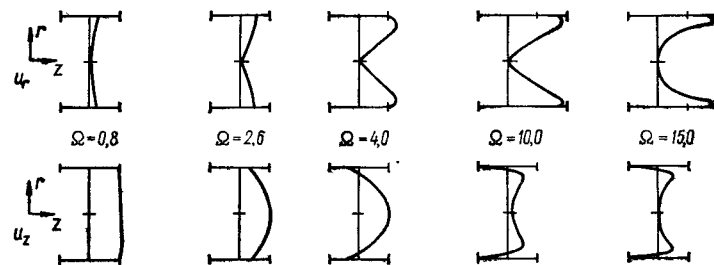


Рис. 55.

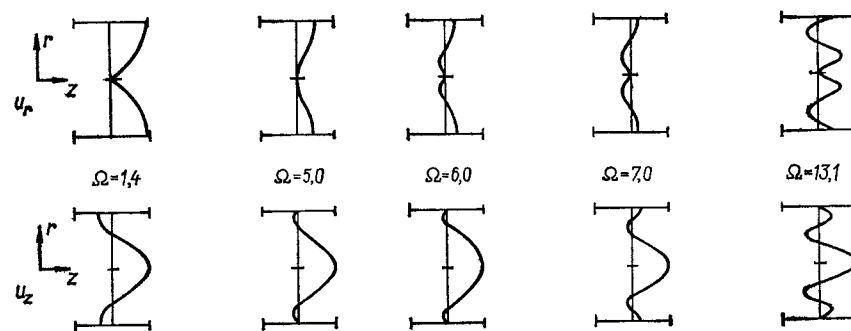


Рис. 56.

вид

$$\begin{aligned} u_z &= B [J_0(216r) - 3J_0(2,4r)], \quad \Omega = 283,3, \\ u_z &= B [J_0(217,5r) - 0,05J_0(6,5r)], \quad \Omega = 285,4. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Первое из этих выражений относится к 68-й ветви, а второе — к 70-й. В первом выражении для u_z отсутствуют переменны знака, а во втором таких перемен очень много — порядка 70. Отметим, что сильная зависимость функций, описывающих волновое поле в упругом волноводе, от частоты является его специфической особенностью по сравнению с волноводами для акустических и электромагнитных волн.

§ 10. НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ

Для случая $n \geq 1$ выражения (8.7) с верхними значениями тригонометрических множителей представляют компоненты вектора смещений в неосесимметричных модах. Дисперсионные свойства каждого семейства мод (n фиксировано) определяются уравнением (8.8). Это уравнение при $n \geq 1$ гораздо сложнее уравнений (9.3) и (9.4) для осесимметричного случая. Эта сложность связана как с действительным качественным усложнением волновой картины,

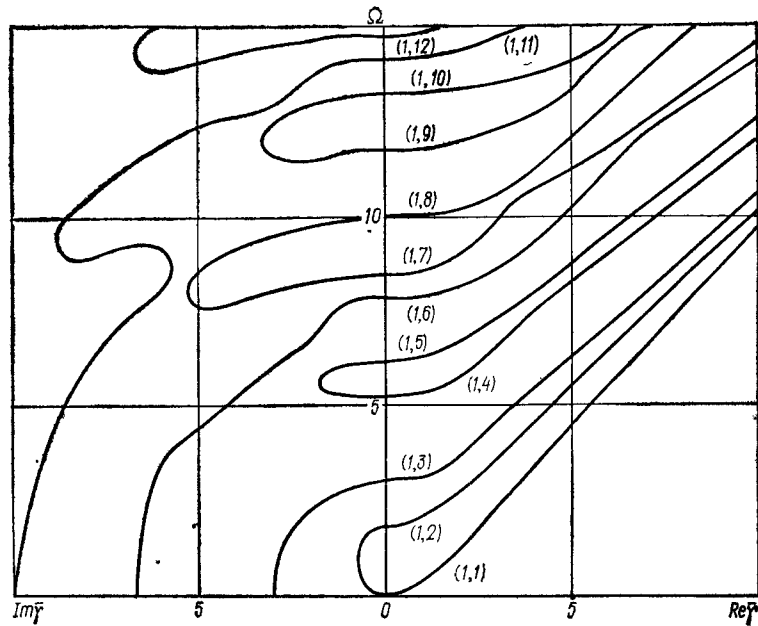


Рис. 57.

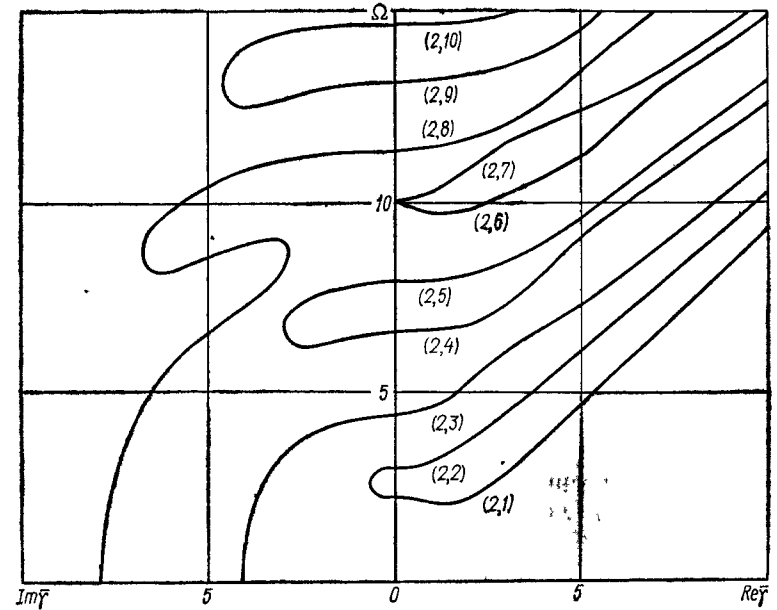


Рис. 58.

так и с чисто количественными факторами, не отражающимися существенно на поведении нормальных мод.

Если в дисперсионном уравнении (8.8) перейти к пределу при $\bar{\gamma} \rightarrow 0$, то приходим к следующим двум независимым уравнениям:

$$\Omega J_{n-1}(\Omega) - n J_n(\Omega) = 0, \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned} & \{2(n^2 - 1) [\Omega J_{n-1}(\Omega) - n J_n(\Omega)] - \Omega^2 J_n(\Omega)\} \times \\ & \times \left[\frac{\Omega}{k} J_{n-1}\left(\frac{\Omega}{k}\right) - (n+1) J_n\left(\frac{\Omega}{k}\right) \right] - J_n\left(\frac{\Omega}{k}\right) \left(n^2 - 1 - \frac{\Omega^2}{2} \right) \times \\ & \times [(2n^2 + 2n - \Omega^2) J_n(\Omega) - 2\Omega J_{n-1}(\Omega)] = 0. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Для каждого данного n эти уравнения определяют два независимых семейства частот запираания. Частоты запираания, определяемые уравнением (10.1), не зависят от v . Характер движения на этих частотах аналогичен тому, который определен как продольно-сдвиговой в осесимметричном случае.

Значения частот запираания, определяемые из уравнения (10.2), зависят от величины v , а соответствующие движения характеризуются отсутствием продольных смещений. Обширные числовые данные по решению уравнений (10.1) и (10.2) содержатся в работе [288].

Наинизшие неосесимметричные моды ($n = 1$) иногда называют изгибными. Этим названием подчеркивается их аналогия с анти-

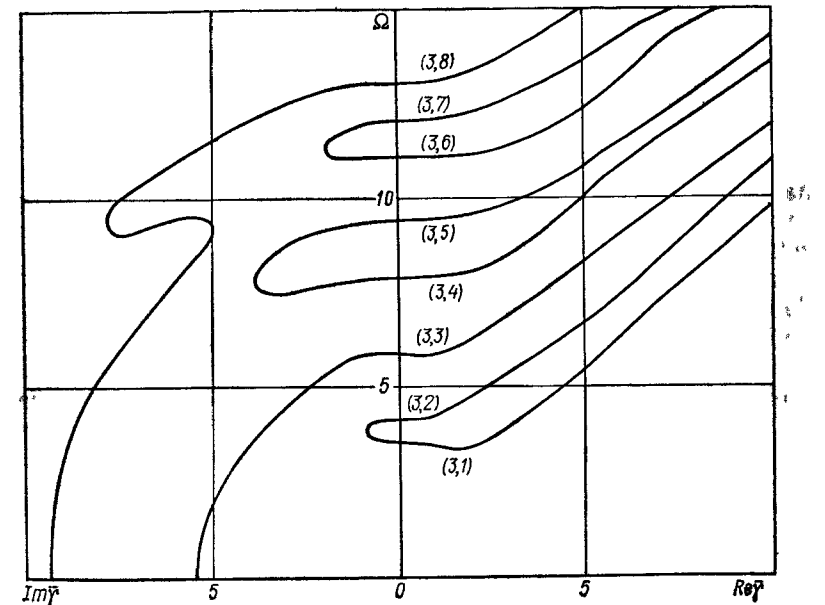


Рис. 59.

УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТЕЛ

симметричными волнами в слое. Тем не менее сколько-нибудь полную аналогию здесь можно провести лишь для низших ветвей дисперсионного спектра. Кинематические характеристики движения в высших модах для цилиндра при $n = 1$ существенно отличаются от характеристик высших антисимметричных мод в слое.

Сложные дисперсионные соотношения для $n = 1$ исследованы в работах [247, 249] с помощью техники нанесения на плоскость (γ, Ω) ограничительной сетки. Практическая реализация такого подхода довольно сложна, и, хотя, в принципе, его использование возможно и при $n > 1$, имеющиеся данные о спектре в этих случаях базируются на прямом счете [288].

На рис. 57 воспроизведены вещественные и мнимые участки дисперсионных ветвей, вычисленные [288] для случая $n = 1$ и $\nu = 0,3317$. В процессе сравнения этих данных с соответствующими данными об изгибных волнах в слое (см. рис. 42) обнаруживаются как общие, так и существенно различные черты в поведении мод.

Одно из интересных различий между слоем и цилиндром состоит в том, что для цилиндра некоторые из ветвей в мнимой плоскости идут к нулевому значению частоты. Интересно также, что в рассмотренном диапазоне Ω для цилиндра не наблюдается «обратной» волны, связанной с неосесимметричным деформированием, описываемым в окружающем направлении функциями $\cos \theta$ и $\sin \theta$.

Низшая ветвь на рис. 57, проходящая через начало координат, как и в случае слоя, имеет $c_p(0) = c_g(0) = 0$. Аналогия со слоем сохраняется также в поведении величин c_p и c_g всех ветвей в высокочастотном пределе. Для низшей ветви эти скорости стремятся к скорости рэлеевских волн c_R , в то время как для всех остальных ветвей общее предельное значение скоростей равно c_2 .

Для номеров $n \geq 2$ в поведении дисперсионных ветвей обнаруживается достаточно большая степень сходства. Большой объем вычислений по построению полного спектра (вещественных, мнимых и комплексных участков ветвей) для $n = 2, 3, 4$ проведен в работе [288]. На рис. 58 и 59 изображены мнимые и вещественные корни дисперсионных ветвей для случаев $n = 2$ и $n = 3$ соответственно. Наиболее характерной чертой в представленных спектрах является ненулевая частота записи нижней ветви, а также наличие на ней частотного минимума, связанного с явлением «обратной» волны. В высокочастотной области групповая и фазовая скорости низшей ветви стремятся к c_R , а всех остальных ветвей — к c_2 . Данные о кинематике волновых движений при $n \geq 1$ можно найти в обзоре [277] и указанной там литературе.

В предыдущих главах рассматривались волновые процессы в бесконечных упругих телах, причем основное внимание уделялось особенностям распространения волн. При этом были изучены характерные резонансные явления, связанные с наличием границ. К ним относится распространение поверхностных волн Рэлея и Стоунли и нормальных мод в слое и цилиндре. Для всех рассмотренных ситуаций характерно то, что для них граница играет направляющую для потока энергии роль. При этом, конечно, происходят элементарные процессы отражения от границы, но они не связаны с изменением направления общего потока энергии.

Структура волнового поля существенно усложняется, если происходит такое отражение, при котором изменяется направление общего потока энергии. С такими явлениями мы сталкиваемся при рассмотрении волновых процессов в ограниченных упругих телах, граничную поверхность которых даже в простейших случаях уже нельзя отождествить с координатной поверхностью какого-либо одного семейства. Простейшим примером такого вида областей является прямоугольная призма $|x_1| \leq a$, $|y_1| < \infty$, $|z_1| \leq h$.

В акустике и электродинамике переход от задач распространения волн к задачам об установившихся колебаниях, как правило, не составляет труда, если известен полный набор нормальных мод для соответствующей бесконечной области. Знание таких мод позволяет просто построить полный набор нормальных колебаний конечного тела, т. е. найти его собственные частоты и формы. Физической основой относительной простоты возникающих здесь математических задач является простота процесса отражения соответствующего типа волн от дополнительной границы.

Однако отражение упругих волн от границы представляет собой довольно сложный процесс. Как следствие этого задача об отыскании нормальных колебаний ограниченных упругих тел становится очень сложной. Именно поэтому до настоящего времени нет ни одного полного решения такой задачи.

В данной главе рассматривается простейшая задача указанного класса — задача о колебаниях прямоугольной призмы (плоская деформация) или тонкой прямоугольной пластины (плоское напряженное состояние). В процессе изложения будем говорить о прямо-

угольнике во всех случаях, когда речь идет о соотношениях, общих для этих двух типов деформации. Исходным для построения решений является знание явного вида и свойств нормальных мод бесконечного слоя, изученных в предыдущей главе.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНИКА. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматриваются установившиеся волновые движения в упругом теле в виде бесконечной в направлении оси Oy_1 прямоугольной призмы (рис. 60). При их изучении в одинаковой мере интересно как рассмотрение собственных частот и форм, так и анализ вынужденных колебаний при определенных типах нагрузки. Хотя наличие решения задачи в одной из указанных постановок дает возможность легко получить решение в другой постановке, задача о вынужденных колебаниях представляется несколько более общей. При ее решении величины собственных частот определяются как значения, при которых не существует конечного решения задачи о вынужденных движениях. Характеристики форм колебаний определяются при анализе волнового поля на частоте, близкой к соответствующей собственной. При этом, поскольку собственные частоты находятся приближенно, сравнение степени динамичности на разных частотах дает оценку степени близости частот к резонансным. Поэтому здесь и далее мы будем рассматривать задачи о вынужденных колебаниях конечных упругих тел.

Применительно к рассматриваемому телу речь идет о решении двухмерных уравнений движения (1.4) гл. 1 при следующих силовых граничных условиях:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_x = f_{\pm}(z_1), \quad \frac{1}{2G} \tau_{xz} = \psi_{\pm}(z_1), \quad x_1 = \pm a, \\ \frac{1}{2G} \sigma_z = g_{\pm}(x_1), \quad \frac{1}{2G} \tau_{zx} = \chi_{\pm}(x_1), \quad z_1 = \pm h. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В рамках развиваемых ниже аналитических методов возможно также рассмотрение задач о кинематическом возбуждении колебаний. В частности, разрешимы такие задачи, когда вместо силовых условий на границах $x_1 = \pm a$ заданы кинематические

$$\frac{u_x}{h} = f_{\pm}(z_1), \quad \frac{u_z}{h} = \psi_{\pm}(z_1), \quad x_1 = \pm a \quad (1.2)$$

или «смешанные»

$$\frac{u_x}{h} = f_{\pm}(z_1), \quad \frac{1}{2G} \tau_{xz} = \psi_{\pm}(z_1), \quad x_1 = \pm a \quad (1.3)$$

Как показано ниже, последняя граничная задача существенно проще двух предыдущих. Задачи со смешанными условиями на частях одноименных сторон связаны с преодолением дополнительных трудностей и здесь не рассматриваются.

В последующих выкладках общий для всех характеристик волновых полей множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается.

В настоящее время сформировались два аналитических подхода к построению точных решений указанных задач — метод однородных решений и метод суперпозиции. Оба этих метода существенно опираются на использование свойств нормальных мод в бесконечном слое.

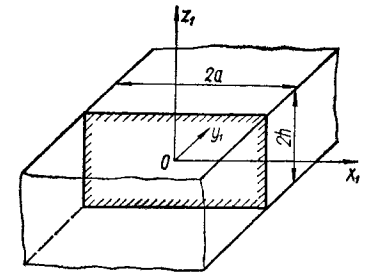


Рис. 60.

В методе однородных решений более полно используется информация о волновых движениях в нормальных модах. В рамках этого метода общее решение задачи (1.1) при нулевых значениях функций $g_{\pm}(x_1)$ и $\chi_{\pm}(x_1)$ строится в виде бесконечной суммы волн в слое $|z_1| \leq h$ с вещественными, мнимыми и комплексными постоянными распространения. При этом, естественно, принимаются во внимание волны, распространяющиеся в обоих направлениях. Нераспространяющиеся волны выбираются так, чтобы соответствующие характеристики напряженно-деформированного состояния убывали от поверхностей $x_1 = \pm a$. В таком решении содержится бесконечный набор произвольных комплексных коэффициентов, подбором которых можно выполнить граничные условия на поверхностях $x_1 = \pm a$. Предположение о равенстве нулю функций $g_{\pm}(x_1)$ и $\chi_{\pm}(x_1)$, конечно, не является существенным ограничением.

Практическая реализация такого подхода усложнена необходимостью искать разложение функций $f_{\pm}(z_1)$ и $\psi_{\pm}(z_1)$ по неортogonalной системе частных решений. Если обратиться к истории вопроса, то в связи с этой задачей можно проследить довольно типичную ситуацию во взаимоотношении математики и физики. Рассуждения в рамках физических аналогий (струна, мембрана, стержень) служили достаточно убедительным основанием для надежд на разрешимость задачи о таком представлении. Однако математического обоснования ее разрешимости до последнего времени не существовало. Возникающие здесь математические вопросы послужили стимулом к развитию некоторых новых по сравнению с классической проблемой Штурма — Лиувилля направлений в теории краевых задач и дифференциальных уравнений. Их характерные аспекты отражены, например, в обзоре Воровича [25]. Все же отметим, что, несмотря на большое число исследований, ряд практически важных вопросов данной проблемы остается не выясненным. В частности, еще не решен вопрос об оценке поведения коэффициентов разложения в зависимости от дифференциальных свойств разлагаемых функций.

Несмотря на определенную математическую незавершенность метода однородных решений, с его помощью получено решение ряда интересных динамических задач для полубесконечных областей

[219, 234, 281, 287, 288]. Более громоздкие задачи для конечных областей рассматривались в работах [3, 83, 91, 203, 244]. В ряде работ Миндлина и его сотрудников, относящихся к круглому цилиндру [179, 225, 237] и прямоугольной пластине [227, 238], для решения конкретных задач развита и использована приближенная теория. По своему существу она является некоторой модификацией метода однородных решений для учета трех первых ветвей дисперсионного уравнения (см. далее рис. 61 и 62).

Вид общего решения задачи в рамках метода однородных решений легко получить, используя выражения для смещений (2.17) и (2.18) главы 4. Далее, ограничиваясь случаем продольных (симметричных) движений, для сокращения записи введем обозначения

$$f(\bar{\xi}, z_1) = \cos \frac{\pi\beta}{2} \cos \frac{\pi\alpha z_1}{2h} - \frac{\bar{\xi}^2 - \beta^2}{2\bar{\xi}^2} \cos \frac{\pi\alpha}{2} \cos \frac{\pi\beta z_1}{2h},$$

$$\psi(\bar{\xi}, z_1) = -\left(\alpha \cos \frac{\pi\beta}{2} \sin \frac{\pi\alpha z_1}{2h} + \frac{\bar{\xi}^2 - \beta^2}{2\beta} \cos \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\beta z_1}{2h}\right), \quad (1.4)$$

$$\alpha^2 = \frac{\Omega^2}{k^2} - \bar{\xi}^2, \quad \beta^2 = \Omega^2 - \bar{\xi}^2, \quad \bar{\xi} = \frac{2}{\pi} \xi h, \quad \Omega = \frac{2\omega h}{\pi c_2}, \quad k = \frac{c_1}{c_2}.$$

Тогда выражения для смещений

$$u_x = \bar{\xi} f(\bar{\xi}, z_1) \exp(i\bar{\xi} x_1), \quad u_z = \psi(\bar{\xi}, z_1) \exp(i\bar{\xi} x_1) \quad (1.5)$$

удовлетворяют уравнениям движения при произвольных значениях $\bar{\xi}$. Для того чтобы соответствующие (1.5) выражения для напряжений удовлетворяли граничным условиям на поверхностях $z_1 = \pm h$, величина $\bar{\xi}$ для каждого данного значения частоты должна определяться из дисперсионного уравнения (2.16) главы 4. Как установлено в главе 4, это уравнение имеет конечное число вещественных корней $\pm \xi_1, \pm \xi_2, \dots, \pm \xi_N$, конечное число чисто мнимых корней $\pm i\eta_1, \pm i\eta_2, \dots, \pm i\eta_M$ и бесконечное число комплексных корней $\pm \xi_1 \pm i\eta_1, \pm \xi_2 \pm i\eta_2, \dots$. Общее решение уравнений движения составляется путем суммирования частных решений (1.5), умноженных на произвольную комплексную постоянную, по всему указанному бесконечному набору корней.

Для n -й пары вещественных корней $\pm \xi_n$, вводя соответственно произвольные постоянные A_+ и A_- , получаем выражения для смещений:

$$u_x = \bar{\xi}_n f(\bar{\xi}_n, z_1) [iA_+ \exp(i\bar{\xi}_n x_1) - iA_- \exp(-i\bar{\xi}_n x_1)],$$

$$u_z = \psi(\bar{\xi}_n, z_1) [A_+ \exp(i\bar{\xi}_n x_1) + A_- \exp(-i\bar{\xi}_n x_1)]. \quad (1.6)$$

Здесь учтена четность функций f и ψ по $\bar{\xi}$. Чтобы эти выражения были вещественными, постоянные A_+ и A_- связываются соотношениями $A_- = A_+^*$. Следовательно, имеем следующее решение:

$$u_x^{(n)} = 2 \bar{\xi}_n f(\bar{\xi}_n, z_1) \operatorname{Re} [iA_+ \exp(i\bar{\xi}_n x_1)],$$

$$u_z^{(n)} = 2 \psi(\bar{\xi}_n, z_1) \operatorname{Re} [A_+ \exp(i\bar{\xi}_n x_1)]. \quad (1.7)$$

Эти выражения представляют собой стоячую по x_1 волну и содержат две вещественные произвольные постоянные ($A_+ = a_n + ib_n$).

Аналогично для m -й пары чисто мнимых корней $\pm i\eta_m$ получаем следующие выражения для смещений:

$$u_x^{(m)} = \bar{\eta}_m f(i\bar{\eta}_m, z_1) \{a_m \exp[-\eta_m(a - x_1)] - b_m \exp[-\eta_m(a + x_1)]\},$$

$$u_z^{(m)} = \psi(i\bar{\eta}_m, z_1) \{a_m \exp[-\eta_m(a - x_1)] + b_m \exp[-\eta_m(a + x_1)]\}. \quad (1.8)$$

Здесь также имеем две вещественные произвольные постоянные a_m и b_m . Уже сама форма решения указывает на то, какая из них является определяющей при удовлетворении граничных условий соответственно на сторонах $x_1 = \pm a$.

Комплексные корни входят в решение четверками. Одна пара корней из r -го набора ($\xi_r + i\eta_r, -\xi_r + i\eta_r$) доставляет решение, убывающее в положительном направлении оси x_1 . Решения, соответствующие второй паре, убывают в отрицательном направлении данной оси. Именно это свойство дает основание для такого группирования корней. Учитывая общее свойство пар $\xi_r = -\xi_r^*$, рассмотрим смещения, соответствующие первой паре:

$$u_x = \{i\bar{\xi}_r f(\bar{\xi}_r, z_1) A_r \exp(i\bar{\xi}_r x_1) - i\bar{\xi}_r^* f(-\bar{\xi}_r^*, z_1) \times$$

$$\times B_r \exp(-i\bar{\xi}_r^* x_1)\} \exp[-\eta_r(x_1 + a)],$$

$$u_z = [\psi(\bar{\xi}_r, z_1) A_r \exp(i\bar{\xi}_r x_1) + \psi(-\bar{\xi}_r^*, z_1) B_r \exp(-i\bar{\xi}_r^* x_1)] \times$$

$$\times \exp[-\eta_r(x_1 + a)]. \quad (1.9)$$

Из соотношений (1.4) легко найти

$$f(-\bar{\xi}_r^*, z_1) = f^*(\bar{\xi}_r, z_1), \quad \psi(-\bar{\xi}_r^*, z_1) = \psi^*(\bar{\xi}_r, z_1).$$

Тогда из требования вещественности выражений (1.9) получаем, что $B_r = A_r^*$ и, следовательно,

$$u_x^{(r,1)} = 2 \operatorname{Re} [i\bar{\xi}_r f(\bar{\xi}_r, z_1) A_r \exp(i\bar{\xi}_r x_1)] \exp[-\eta_r(x_1 + a)],$$

$$u_z^{(r,1)} = 2 \operatorname{Re} [\psi(\bar{\xi}_r, z_1) A_r \exp(i\bar{\xi}_r x_1)] \exp[-\eta_r(x_1 + a)]. \quad (1.10)$$

Эти выражения представляют собой убывающую по амплитуде стоячую волну, что соответствует общим требованиям для комплексных корней (глава 4, § 4).

Аналогично для второй пары корней

$$u_x^{(r,2)} = 2 \operatorname{Re} [i\bar{\xi}_r f(\bar{\xi}_r, z_1) C_r \exp(i\bar{\xi}_r x_1)] \exp[-\eta_r(a - x_1)],$$

$$u_z^{(r,2)} = 2 \operatorname{Re} [\psi(\bar{\xi}_r, z_1) C_r \exp(i\bar{\xi}_r x_1)] \exp[-\eta_r(a - x_1)]. \quad (1.11)$$

Каждое из выражений (1.10) и (1.11) содержит по две вещественные произвольные постоянные ($A_r = a_r + ib_r$, $C_r = c_r + id_r$).

Общее представление вектора смещений в рамках метода однородных решений имеет вид

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{n=1}^N u_x^{(n)} + \sum_{m=1}^M u_x^{(m)} + \sum_{r=1}^{\infty} [u_x^{(r,1)} + u_x^{(r,2)}], \\ u_z &= \sum_{n=1}^N u_z^{(n)} + \sum_{m=1}^M u_z^{(m)} + \sum_{r=1}^{\infty} [u_z^{(r,1)} + u_z^{(r,2)}]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Элементарные составляющие в этих формулах задаются соотношениями (1.7), (1.8), (1.10) и (1.11).

Слагаемые $u^{(n)}$ и $u^{(m)}$ для удовлетворения двух граничных условий в смещениях или напряжениях на стороне, например, $x_1 = a$ имеют одну произвольную постоянную. Слагаемые же $u^{(r)}$ содержат две произвольные постоянные. Эту «неравноправность» различных слагаемых легко понять, если учесть, что каждое решение вида (1.10) или (1.11), в отличие от решений (1.7) и (1.8), соответствует двум разным ветвям дисперсионного спектра. Данное обстоятельство особенно наглядно проявляется, если обратиться к рис. 46. При $\Omega < \Omega^*$ решение (1.10) для $r = 1$ соответствует корням $\xi_1 = -\xi_1^* = \pm \xi_1 + i\eta_1$, принадлежащим ветвям L_2 и L_3 соответственно.

Для фактического определения произвольных постоянных в (1.12) используются различные подходы. В ряде работ [203, 234, 288] применяется способ коллокации при выполнении граничных условий. В работах [244, 281, 282] применяется вариационный подход или способ разложения однородных решений в ряды по полным ортогональным системам [3, 91]. Во всех подходах получающиеся системы алгебраических уравнений требуют довольно громоздких вычислений их коэффициентов. Исключением при этом является краевая задача (1.3). При ее решении произвольные постоянные в (1.12) определяются явно с помощью соотношений обобщенной ортогональности [56, 140].

Второй аналитический подход к построению точных решений граничных задач (1.1) — (1.3), называемый далее методом суперпозиции, основывается на несколько ином способе использования частотных решений уравнений движения. Идейную основу метода можно найти в работе Ламе [209]. Первое применение такого подхода в задачах об установившихся колебаниях прямоугольных пластин описано в работе [184]. В последующем метод суперпозиции использовался в работах [22, 31, 198]. Возможности метода значительно расширились в связи с исследованием свойств бесконечных систем, возникающих при его применении [38, 48].

Подход к построению общего решения краевых задач в рамках этого метода изложим на примере симметричной относительно плоскостей $x_1 = 0$ и $z_1 = 0$ задачи для прямоугольника. В этом случае для потенциалов (2.2) и (2.4) главы 4 следует, что частными решениями уравнений движения являются следующие выражения

для смещений:

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &= -\Phi \xi \cos \frac{\pi \alpha z_1}{2h} \sin \xi x_1, \quad u_z^{(1)} = -\Phi \frac{\pi \alpha}{2h} \sin \frac{\pi \alpha z_1}{2h} \cos \xi x_1, \\ u_x^{(2)} &= -A \frac{\pi \beta}{2h} \cos \frac{\pi \beta z_1}{2h} \sin \xi x_1, \quad u_z^{(2)} = A \xi \sin \frac{\pi \beta z_1}{2h} \cos \xi x_1. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Выражения (1.13), содержащие произвольные постоянные Φ и A , порознь удовлетворяют уравнениям движения при любом ξ . Идея метода однородных решений состояла в отыскании при данной частоте таких значений ξ , при которых удовлетворялись бы однородные граничные условия на сторонах $z_1 = \pm h$. Произвольные постоянные Φ и A затем определялись из условий на сторонах $x_1 = \pm a$.

В методе суперпозиции произвол в решении (1.13) используется иначе. Здесь решение формируется так, чтобы «ответственными» за удовлетворение любых граничных условий на сторонах $z = \pm h$ были постоянные Φ и A . При этом в качестве ξ целесообразно выбрать такую последовательность чисел ξ_n , чтобы системы функций $\sin \xi_n x_1$ и $\cos \xi_n x_1$ были полными и ортогональными на отрезке $|x_1| \leq a$. Из этого требования в качестве возможных следуют значения

$$\xi_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \xi_n = \frac{(2n+1)\pi}{2a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

Возможны и иные способы определения величины ξ , однако они не дают каких-либо преимуществ при удовлетворении граничных условий [38].

Таким образом, указанный выбор величины ξ доставляет следующую бесконечную совокупность частных решений уравнений движения:

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\varphi_n \xi_n \cos \frac{\pi \alpha z_1}{2h} + a_n \frac{\pi \beta_n}{2h} \cos \frac{\pi \beta z_1}{2h} \right) \sin \xi_n x_1, \\ u_z^{(1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\varphi_n \frac{\pi \alpha_n}{2h} \sin \frac{\pi \alpha z_1}{2h} + a_n \xi_n \sin \frac{\pi \beta z_1}{2h} \right) \cos \xi_n x_1. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Эта совокупность позволяет удовлетворить произвольным условиям в смещениях или напряжениях на сторонах $z_1 = \pm h$ прямоугольника путем выбора постоянных φ_n и a_n . Однако после этого уже теряется произвол для удовлетворения граничным условиям на сторонах $x_1 = \pm a$. Поэтому решение (1.15) необходимо дополнить решением, доставляющим нужный функциональный произвол для выполнения этих условий.

Обладающий требуемыми свойствами набор решений получается из (1.13) на основании следующих соображений. Поскольку необходимо удовлетворить граничные условия на сторонах $x_1 = \pm a$, то искомое решение должно содержать полные и ортогональные системы функций на отрезке $|z_1| \leq h$. Для этого в первой группе частных решений (1.13) выберем такую последовательность значений

ξ_m , чтобы выполнялось равенство

$$\alpha_m = \delta_m, \quad \delta_m = 2m \text{ или } \delta_m = 2m + 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

Во второй группе частных решений (1.13) набор значений ξ_m должен быть иным. При этом должно выполняться соотношение

$$\beta_m = \delta_m. \quad (1.17)$$

Тогда совокупность частных решений

$$u_x^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\varphi_m \frac{p_1}{h} \operatorname{sh} \frac{p_1 x_1}{h} - a_m \frac{\pi \delta_m}{2h} \operatorname{sh} \frac{p_2 x_1}{h} \right) \cos \frac{\pi \delta_m z_1}{2h}, \quad (1.18)$$

$$u_z^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\varphi_m \frac{\pi \delta_m}{2h} \operatorname{ch} \frac{p_1 x_1}{h} + a_m \frac{p_2}{h} \operatorname{ch} \frac{p_2 x_1}{h} \right) \sin \frac{\pi \delta_m z_1}{2h},$$

где

$$p_1^2 = \frac{\pi^2 \delta_m^2}{4} - \Omega_1^2, \quad p_2^2 = \frac{\pi^2 \delta_m^2}{4} - \Omega_2^2; \quad \Omega_1 = \frac{\pi \Omega}{2k}; \quad \Omega_2 = \frac{\pi \Omega}{2}, \quad (1.19)$$

позволяет удовлетворить произвольные граничные условия на сторонах $x_1 = \pm a$ за счет выбора значений φ_m и a_m . В сумме решения (1.15) и (1.18) представляют общее решение граничных задач (1.1), (1.2) и (1.3). На их использовании и построено дальнейшее изложение.

§ 2. МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОБЩИХ РЕШЕНИЙ

Построенные выше выражения (1.15) и (1.18) удовлетворяют требованию полноты на сторонах прямоугольника. Однако это требование не определяет однозначно структуру выражений для смещений. Для дальнейшей конкретизации решения необходимо принять во внимание иные обстоятельства.

Наиболее естественным представляется такой выбор ξ_n и δ_m , который обеспечивает наибольшую простоту удовлетворения граничных условий. Вопрос о выборе формы общего решения в рамках излагаемого подхода для задач статики обсуждался в книге [38]. Полученные там выводы справедливы и для динамических задач.

В случае симметричного относительно обеих осей напряженного состояния прямоугольника общее решение для компонентов смещений целесообразно принять в виде, соответствующем $\xi_n = \frac{n\pi}{a}$ и $\delta_m = 2m$. Кроме того, в дальнейшем изложении удобно ввести безразмерные координаты $x = \frac{x_1}{h}$, $z = \frac{z_1}{h}$, безразмерные (отнесенные к h) смещения, а также принять следующие обозначения:

$$\eta_m = \frac{\pi \delta_m}{2} = m\pi, \quad \xi_n = \xi_n h = \frac{n\pi}{L}, \quad L = \frac{a}{h}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$q_l^2 = \xi_n^2 - \Omega_l^2, \quad p_l^2 = \eta_m^2 - \Omega_l^2, \quad l = 1, 2, \quad (2.1)$$

$$A_m = \varphi_m \frac{p_1}{h^2}, \quad B_m = a_m \frac{\eta_m}{h^2}, \quad C_n = \varphi_n \frac{q_1}{h^2}, \quad D_n = a_n \frac{\xi_n}{h^2}.$$

С их использованием выражения для компонентов смещений приобретают вид

$$u_x = A_0 \sin \Omega_1 x + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \operatorname{sh} p_1 x + B_m \operatorname{sh} p_2 x) \cos \eta_m z -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \frac{\xi_n}{q_1} \operatorname{ch} q_1 z + D_n \frac{q_2}{\xi_n} \operatorname{ch} q_2 z \right) \sin \xi_n x, \quad (2.2)$$

$$u_z = C_0 \sin \Omega_1 z - \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \frac{\eta_m}{p_1} \operatorname{ch} p_1 x + B_m \frac{p_2}{\eta_m} \operatorname{ch} p_2 x \right) \sin \eta_m z +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \operatorname{sh} q_1 z + D_n \operatorname{sh} q_2 z) \cos \xi_n x.$$

Соответствующие этим смещениям компоненты тензора напряжений можно записать в виде

$$\frac{1}{2G} \sigma_x = A_0 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \cos \Omega_1 x + C_0 \frac{\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \cos \Omega_1 z +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \frac{\eta_m^2 + p_2^2}{2p_1} \operatorname{ch} p_1 x + B_m p_2 \operatorname{ch} p_2 x \right) \cos \eta_m z -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \frac{\xi_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu}}{q_1} \operatorname{ch} q_1 z + D_n q_2 \operatorname{ch} q_2 z \right) \cos \xi_n x, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_z = A_0 \frac{\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \cos \Omega_1 x + C_0 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \cos \Omega_1 z -$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \frac{\eta_m^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu}}{p_1} \operatorname{ch} p_1 x + B_m p_2 \operatorname{ch} p_2 x \right) \cos \eta_m z +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \frac{\xi_n^2 + q_2^2}{2q_1} \operatorname{ch} q_1 z + D_n q_2 \operatorname{ch} q_2 z \right) \cos \xi_n x,$$

$$\frac{1}{2G} \tau_{xz} = - \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \eta_m \operatorname{sh} p_1 x + B_m \frac{\eta_m^2 + p_2^2}{2\eta_m} \operatorname{sh} p_2 x \right) \sin \eta_m z -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \xi_n \operatorname{sh} q_1 z + D_n \frac{\xi_n^2 + q_2^2}{2\xi_n} \operatorname{sh} q_2 z \right) \sin \xi_n x.$$

Как отмечалось, выражения (2.2) и (2.3) позволяют выполнить любые граничные условия вида (1.1), (1.2) или (1.3). С целью некоторого уменьшения громоздкости выкладок проведем их в предположении, что в задаче (1.1) отличными от нуля являются лишь

нормальные напряжения. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_x &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m f_m \cos \eta_m z, \quad \frac{1}{2G} \tau_{xz} = 0, \quad x = \pm L, \\ \frac{1}{2G} \sigma_z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n \cos \xi_n x, \quad \frac{1}{2G} \tau_{zx} = 0, \quad z = \pm 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если в граничные условия (2.4) подставить выражения для напряжений, то получим следующую систему функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} &A_0 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \cos \Omega_1 L + C_0 \frac{\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \cos \Omega_1 z + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \frac{\eta_m^2 + p_2^2}{2p_1} \operatorname{ch} p_1 L + B_m p_2 \operatorname{ch} p_2 L \right) \cos \eta_m z - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \frac{\xi_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu}}{q_1} \operatorname{ch} q_1 z + D_n q_2 \operatorname{ch} q_2 z \right) (-1)^n = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m f_m \cos \eta_m z, \\ &A_m \eta_m \operatorname{sh} p_1 L + B_m \frac{\eta_m^2 + p_2^2}{2\eta_m} \operatorname{sh} p_2 L = 0, \\ &A_0 \frac{\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \cos \Omega_1 x + C_0 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \cos \Omega_1 - \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \frac{\eta_m^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu}}{p_1} \operatorname{ch} p_1 x + B_m p_2 \operatorname{ch} p_2 x \right) (-1)^m + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \frac{\xi_n^2 + q_2^2}{2q_1} \operatorname{ch} q_1 + D_n q_2 \operatorname{ch} q_2 \right) \cos \xi_n x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n \cos \xi_n x, \\ &C_n \xi_n \operatorname{sh} q_1 + D_n \frac{\xi_n^2 + q_2^2}{2\xi_n} \operatorname{sh} q_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из ее структуры следует, что значения всех произвольных постоянных связаны между собой.

Из второго и четвертого уравнений этой системы видно, что отсутствие касательных нагрузок в граничных условиях упрощает связь между искомыми величинами. Вместе с тем это не вносит принципиальных ограничений в излагаемый метод.

Если в рассматриваемой задаче вместо условий для σ_x на сторонах $x = \pm L$ считать заданным нормальное к поверхности

смещение

$$u_x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m f_m \cos \eta_m z, \quad x = \pm L, \quad (2.6)$$

то вместо первого функционального уравнения в (2.5) получаем

$$A_0 \sin \Omega_1 L = f_0, \quad A_m \operatorname{sh} p_1 L + B_m \operatorname{sh} p_2 L = f_m. \quad (2.7)$$

В таком случае из (2.7) и второго уравнения в (2.5) постоянные A_m и B_m определяются независимо от значений C_n и D_n . После определения величин A_m и B_m коэффициенты C_n и D_n находятся из двух последних уравнений (2.5) довольно просто. К так же просто разрешимой задаче мы приходим и при задании на сторонах $x = \pm L$ нормальных напряжений σ_x и касательных смещений u_z . Однако при этом необходимо исходить из решений (1.15), принимая $\xi_n = \frac{(2+1)\pi}{2a}$.

Математическая простота двух указанных граничных задач с перекрестными (σ_x , u_z или τ_{xz} , u_x) условиями на однотипных сторонах является следствием простоты процесса отражения нормальных волн в слое от такой границы. При этих условиях в процессе отражения любой распространяющейся моды от торца ни других распространяющихся, ни неоднородных волн не возникает.

В случае первой граничной задачи (2.4) произвольные постоянные необходимо определять из системы (2.5). Условия для касательных напряжений позволяют исключить две последовательности произвольных коэффициентов. Можно, например, выразить A_m и C_n через B_m и D_n . Однако для тех значений частоты, при которых $\operatorname{sh} p_1 L = 0$ или $\operatorname{sh} q_1 = 0$, это сделать нельзя. При этом, как легко заключить из (2.5), коэффициент B_m или D_n равен нулю, а коэффициент A_m или C_n остается произвольным. Таким образом, после удовлетворения граничных условий по касательным напряжениям всегда имеем две последовательности произвольных коэффициентов, необходимых для выполнения остальных граничных условий. Данный вывод остается в силе и при $\operatorname{sh} p_2 L = 0$ или $\operatorname{sh} p_2 = 0$.

В общем случае выразим A_m и C_n через B_m и D_n , исключая указанные выше значения частоты, которые не связаны с какими-либо физическими особенностями в поведении упругого тела, а требуют лишь некоторого изменения формы записи:

$$A_m = -B_m \frac{\eta_m^2 + p_2^2}{2\eta_m^2} \frac{\operatorname{sh} p_2 L}{\operatorname{sh} p_1 L}, \quad C_n = -D_n \frac{\xi_n^2 + q_2^2}{2\xi_n^2} \frac{\operatorname{sh} q_2}{\operatorname{sh} q_1}. \quad (2.8)$$

Для упрощения системы функциональных уравнений, образованных первым и третьим уравнениями в (2.5), используем ряд Фурье

$$\operatorname{ch} ry = \frac{\operatorname{sh} ry_0}{ry_0} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2r(-1)^l \operatorname{sh} ry_0}{y_0 \left[r^2 + \left(\frac{l\pi}{y_0} \right)^2 \right]} \cos \frac{l\pi y}{y_0} \quad (2.9)$$

и получающийся из него заменой r на ir ряд для $\cos ry$. С учетом (2.8) из системы функциональных уравнений получаем следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} x_0 \frac{1-v}{1-2v} \cos \Omega_1 L + z_0 \frac{v}{1-2v} \frac{\sin \Omega_1}{\Omega_1} - \frac{v \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\zeta_n^2 q_1^2} &= g_0, \\ x_0 \frac{v}{1-2v} \frac{\sin \Omega_1 L}{\Omega_1} + z_0 \frac{1-v}{1-2v} \cos \Omega_1 - \frac{v \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2v)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z_m}{\eta_m^2 p_1^2} &= f_0, \\ z_m \Delta_m(p) + \frac{\Omega_1^2}{1-2v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\zeta_n^2 + p_1^2} \left(\frac{2\eta_m^2}{\zeta_n^2 + p_2^2} - \frac{v \Omega_2^2}{\zeta_n^2} \right) - \\ &- z_0 \frac{2v \Omega_1 L \sin \Omega_1}{p_1^2 (1-2v)} = f_m, \\ x_n \Delta_n(q) + \frac{\Omega_1^2}{1-2v} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z_m}{\eta_m^2 + q_1^2} \left(\frac{2\zeta_n^2}{\eta_m^2 + q_2^2} - \frac{v \Omega_2^2}{\eta_m^2} \right) - \\ &- x_0 \frac{2v \Omega_1 \sin \Omega_1 L}{q_1^2 (1-2v)} = g_n. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Неизвестные x_n и z_m в этой системе связаны с коэффициентами рядов в (2.2), (2.3) соотношениями

$$\begin{aligned} x_0 &= A_0 \Omega_1, \quad x_n = (-1)^n D_n \operatorname{sh} q_2, \\ z_0 &= C_0 \Omega_1, \quad z_m = (-1)^m B_m \frac{\operatorname{sh} p_2 L}{L}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Кроме того, в (2.10) приняты следующие сокращения:

$$\begin{aligned} \Delta_n(q) &= q_2 \operatorname{cth} q_2 - \frac{(\zeta_n^2 + q_2^2)^2}{4\zeta_n^2 q_1} \operatorname{cth} q_1, \\ \Delta_m(p) &= L \left[p_2 \operatorname{cth} p_2 L - \frac{(\eta_m^2 + p_2^2)^2}{4\eta_m^2 p_1} \operatorname{cth} p_1 L \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Можно показать, что равенство нулю выражений $\Delta_n(q)$ и $\Delta_m(p)$ приводит к уравнениям Рэлея — Лэмба (2.13) главы 4 для бесконечного слоя толщиной 2 и $2L$ соответственно.

После определения неизвестных x_n и z_m в системе (2.10) все характеристики напряженно-деформированного состояния вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{x_0}{\Omega_1} \sin \Omega_1 x + L \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m z_m \left(\frac{\operatorname{sh} p_2 x}{\operatorname{sh} p_2 L} - \frac{\eta_m^2 + p_2^2}{2\eta_m^2} \frac{\operatorname{sh} p_1 x}{\operatorname{sh} p_1 L} \right) \times \\ &\times \cos \eta_m z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \left(\frac{\zeta_n + q_2^2}{2\zeta_n q_1} \frac{\operatorname{ch} q_1 z}{\operatorname{sh} q_1} - \frac{q_2}{\zeta_n} \frac{\operatorname{ch} q_2 z}{\operatorname{sh} q_2} \right) \sin \zeta_n x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{z_0}{\Omega_1} \sin \Omega_1 z + L \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m z_m \left(\frac{\eta_m^2 + p_2^2}{2\eta_m p_1} \frac{\operatorname{ch} p_1 x}{\operatorname{sh} p_1 L} - \frac{p_2}{\eta_m} \frac{\operatorname{ch} p_2 x}{\operatorname{sh} p_2 L} \right) \times \\ &\times \sin \eta_m z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \left(\frac{\operatorname{sh} q_2 z}{\operatorname{sh} q_2} - \frac{\zeta_n^2 + q_2^2}{2\zeta_n^2} \frac{\operatorname{sh} q_1 z}{\operatorname{sh} q_1} \right) \cos \zeta_n x, \\ \frac{1}{2G} \sigma_x &= x_0 \frac{1-v}{1-2v} \cos \Omega_1 x + z_0 \frac{v}{1-2v} \cos \Omega_1 z + \\ &+ L \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m z_m \left[p_2 \frac{\operatorname{ch} p_2 x}{\operatorname{sh} p_2 L} - \frac{(\eta_m^2 + p_2^2)^2}{4\eta_m^2 p_1} \frac{\operatorname{ch} p_1 x}{\operatorname{sh} p_1 L} \right] \cos \eta_m z + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \left[\frac{(\zeta_n^2 + q_2^2) \left(\zeta_n^2 + \frac{v \Omega_1^2}{1-2v} \right)}{2\zeta_n^2 q_1} \frac{\operatorname{ch} q_1 z}{\operatorname{sh} q_1} - q_2 \frac{\operatorname{ch} q_2 z}{\operatorname{sh} q_2} \right] \cos \zeta_n x, \\ \frac{1}{2G} \sigma_z &= x_0 \frac{v}{1-2v} \cos \Omega_1 x + z_0 \frac{1-v}{1-2v} \cos \Omega_1 z + \\ &+ L \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m z_m \left[\frac{(\eta_m^2 + p_2^2) \left(\eta_m^2 + \frac{v \Omega_1^2}{1-2v} \right)}{2\eta_m^2 p_1} \frac{\operatorname{ch} p_1 x}{\operatorname{sh} p_1 L} - p_2 \frac{\operatorname{ch} p_2 x}{\operatorname{sh} p_2 L} \right] \times \\ &\times \cos \eta_m z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \left[q_2 \frac{\operatorname{ch} q_2 z}{\operatorname{sh} q_2} - \frac{(\zeta_n^2 + q_2^2)^2}{4\zeta_n^2 q_1} \frac{\operatorname{ch} q_1 z}{\operatorname{sh} q_1} \right] \cos \zeta_n x, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \tau_{xz} &= L \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m z_m \frac{\eta_m^2 + p_2^2}{2\eta_m} \left(\frac{\operatorname{sh} p_1 x}{\operatorname{sh} p_1 L} - \frac{\operatorname{sh} p_2 x}{\operatorname{sh} p_2 L} \right) \sin \eta_m z + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \frac{\zeta_n^2 + q_2^2}{2\zeta_n} \left(\frac{\operatorname{sh} q_1 z}{\operatorname{sh} q_1} - \frac{\operatorname{sh} q_2 z}{\operatorname{sh} q_2} \right) \sin \zeta_n x. \end{aligned}$$

Аналогичные решения можно построить и для других типов симметрии относительно координатных плоскостей. Кроме рассмотренного еще можно выделить три типа симметрии. Из них мы остановимся несколько подробнее на случае изгибного деформирования прямоугольника, т. е. на случае, в котором картина деформирования симметрична относительно плоскости $x = 0$ и антисимметрична относительно плоскости $z = 0$.

Конкретно рассматривается следующая граничная задача:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_x &= f_0 z, \quad \frac{1}{2G} \tau_{xz} = 0, \quad x = \pm L, \\ \frac{1}{2G} \sigma_z &= 0, \quad \frac{1}{2G} \tau_{zx} = 0, \quad z = \pm 1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Процесс построения общего решения этой задачи аналогичен описанному выше. Так же как и в симметричном случае, удовлетворение граничных условий приводит к бесконечным системам линейных уравнений независимо от выбора значений ζ_n и η_m . С точки зрения построения эффективного алгоритма решения бесконечной системы в данном случае необходимо положить

$$\zeta_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \eta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2} \quad (2.15)$$

При переходе от функциональных уравнений к алгебраическим используются следующие ряды Фурье:

$$\begin{aligned} z &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{\eta_m^2} \sin \eta_m z, \\ \sin az &= 2a \cos a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{\eta_m^2 - a^2} \sin \eta_m z, \\ \operatorname{sh} az &= 2a \operatorname{ch} a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{\eta_m^2 + a^2} \sin \eta_m z. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Выполняя намеченные преобразования, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} D_0(1-\nu)\Omega_1 \sin \Omega_1 + \frac{\nu\Omega_1^2\Omega_2^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z_m}{\eta_m^2 p_1^2} &= 0, \\ x_n \Delta_n(q) + \frac{\Omega_1^2}{1-2\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z_m}{\eta_m^2 + q_1^2} \left(\frac{2\zeta_n^2}{\eta_m^2 + q_2^2} - \frac{\nu\Omega_2^2}{\eta_m^2} \right) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \\ z_m \Delta_m(p) + \frac{\Omega_1^2}{1-2\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\zeta_n^2 + p_1^2} \left(\frac{2\eta_m^2}{\zeta_n^2 + p_2^2} - \frac{\nu\Omega_2^2}{\zeta_n^2} \right) + \\ + D_0 \frac{2\nu\Omega_1^2}{(1-\nu)p_1^2} \cos \Omega_1 &= -\frac{2f_0}{\eta_m^2}, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

относительно неизвестных x_n и z_m . Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_n(q) &= q_2 \operatorname{th} q_2 - \frac{(\zeta_n^2 + q_2^2)^2}{4\zeta_n^2 q_1} \operatorname{th} q_1, \\ \Delta_m(p) &= L \left[p_2 \operatorname{cth} p_2 L - \frac{(\eta_m^2 + p_2^2)^2}{4\eta_m^2 p_1} \operatorname{cth} p_1 L \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Через неизвестные коэффициенты x_n и z_m смещения в прямоугольнике выражаются соотношениями

$$u_x = L \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m z_m \left(\frac{\eta_m^2 + p_2^2}{2\eta_m^2} \frac{\operatorname{sh} p_1 x}{\operatorname{sh} p_1 L} - \frac{\operatorname{sh} p_2 x}{\operatorname{sh} p_2 L} \right) \sin \eta_m z -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \left(\frac{\zeta_n^2 + q_2^2}{2\zeta_n^2 q_1} \frac{\operatorname{sh} q_1 z}{\operatorname{ch} q_1} - \frac{q_2}{\zeta_n} \frac{\operatorname{sh} q_2 z}{\operatorname{ch} q_2} \right) \sin \zeta_n x, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} u_z &= D_0 \cos \Omega_1 z + L \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m z_m \left(\frac{\eta_m^2 + p_2^2}{2\eta_m^2 p_1} \frac{\operatorname{ch} p_1 x}{\operatorname{sh} p_1 L} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{p_2}{\eta_m} \frac{\operatorname{ch} p_2 x}{\operatorname{sh} p_2 L} \right) \cos \eta_m z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \left(\frac{\zeta_n^2 + q_2^2}{2\zeta_n^2} \frac{\operatorname{ch} q_1 z}{\operatorname{ch} q_1} - \frac{\operatorname{ch} q_2 z}{\operatorname{ch} q_2} \right) \cos \zeta_n x. \end{aligned}$$

Таким образом, в обеих рассматриваемых задачах при получении количественных оценок для характеристик напряженно-деформированного состояния главным является вопрос об эффективном решении бесконечных систем. Анализ свойств неизвестных в этих системах позволяет построить такие алгоритмы.

§ 3. АЛГОРИТМ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОБРАБОТКИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

Традиционный подход к решению бесконечных систем, возникающих при рассмотрении граничных задач методом суперпозиции, состоит в исследовании их регулярности [64]. При этом устанавливается, что решение в принятой форме существует и задается алгоритм отыскания нескольких первых неизвестных. Исследование бесконечной системы (2.10) в таком плане содержится в книге [38]. Однако в связи с тем, что неизвестные в (2.10) являются, по существу, коэффициентами рядов Фурье искомым величин смещений, с точки зрения практических вычислений одинаково важно как знание конечного числа первых коэффициентов, так и характер их поведения с ростом номера. Анализ асимптотических свойств неизвестных в системе (2.10) также выполнен в работе [38]. Не останавливаясь на деталях, приведем самый важный результат такого анализа. Он заключается в том, что на частоте, не совпадающей с собственной, ограниченное решение системы (2.10) существует и его асимптотические свойства определяются равенствами

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = a_0. \quad (3.1)$$

Здесь a_0 — некоторая постоянная, зависящая от частоты и вида внешней нагрузки.

При выводе соотношения (3.1) предполагалось, что для коэффициентов разложения в ряды Фурье граничных функций (2.4) для больших номеров справедливы оценки $f_m = O\left(\frac{1}{\eta_m^2}\right)$, $g_n = O\left(\frac{1}{\zeta_n^2}\right)$.

С одной стороны, это несколько ограничивает вид внешней нагрузки, исключая из рассмотрения действия локальных сил, а с другой — дает определенные общие указания на способ выбора полных систем функций в представлении общего решения (2.2). Указанные системы

необходимо выбирать так, чтобы при асимптотическом анализе бесконечной системы коэффициентами в рядах Фурье гладких функций (2.4) можно было бы пренебречь. Такое требование не позволяет заранее угадать способ выбора полных систем, однако правильный их выбор во всех рассмотренных здесь и ниже задачах даст возможность установить закон типа (3.1) и до конца провести подробный анализ динамической напряженности в телах конечных размеров.

Значение соотношения (3.1) с точки зрения оценки скорости сходимости рядов для напряжений и повышения эффективности их вычислений на основе метода Крылова [72] очевидно. Однако при использовании этих возможностей предполагается знание величины a_0 . В связи со сказанным становится важным указание конкретных способов ее определения.

Один из способов приближенного нахождения значения a_0 заключается в следующем. Основываясь на соотношении (3.1), при переходе от бесконечной системы (2.10) к конечной, содержащей N неизвестных x_n и M неизвестных z_m , можно полагать

$$x_n = x_N \quad (n \geq N), \quad z_m = z_M \quad (m \geq M). \quad (3.2)$$

При этом получаем конечную систему линейных уравнений с $N + M + 2$ неизвестными. Она отличается от системы, основанной на использовании способа простой редукции, лишь коэффициентами при последних использованных в рассмотрении неизвестных. Такое незначительное количественное различие, однако, связано с принципиальным качественным различием этих подходов. Решение конечной системы с использованием (3.2) доставляет данные о поведении всех неизвестных в исходной системе (2.10). Кроме того, определитель такой конечной системы является более точным частотным определителем, чем получаемый при простой редукции бесконечной системы.

После решения таким образом сформированной конечной системы величину a_0 можно определять как среднее значение величин x_N и z_M , т. е.

$$a_0 = \frac{x_N + z_M}{2}. \quad (3.3)$$

При этом степень близости величин x_N и z_M служит определенным критерием точности нахождения значения a_0 . Естественно, что при недостаточной близости значений x_N и z_M число вовлекаемых в конечную систему неизвестных необходимо увеличить.

Еще один способ определения постоянной a_0 базируется на двух основных моментах. Прежде всего следует учитывать, что при решении бесконечных систем путем замены их конечными первые неизвестные определяются с большей точностью, чем последние. Это обстоятельство сохраняется и при использовании соотношения (3.2). В связи со сказанным целесообразно построить алгоритм определения a_0 по значениям первых неизвестных в отличие от правила (3.3).

На необходимость поиска такого способа указано в работе Кояловича [70] при решении статических задач. Анализ выражений для напряжений на граничных поверхностях показывает, что такой алгоритм действительно можно построить.

Рассмотрим, например, выражение для σ_x на границе $x = L$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_x = & x_0 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cos \Omega_1 L + z_0 \frac{\nu}{1-2\nu} \cos \Omega_1 z + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m z_m \Delta_m(p) \cos \eta_m z + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left[\frac{(\zeta_n^2 + q_2^2) \left(\zeta_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right)}{2\zeta_n^2 q_1} \frac{\operatorname{ch} q_1 z}{\operatorname{sh} q_1} - q_2 \frac{\operatorname{ch} q_2 z}{\operatorname{sh} q_2} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Исследуем каждый из входящих в (3.4) бесконечных рядов. Первый ряд

$$S_1(z) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m z_m \Delta_m(p) \cos \eta_m z \quad (3.5)$$

представляет собой обычный ряд Фурье. Исходя из соотношения (3.1), можно установить, что асимптотическое поведение его коэффициентов с ростом m задается формулой

$$(-1)^m z_m \Delta_m(p) \approx -a_0 (-1)^m L \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\eta_m}. \quad (3.6)$$

Это указывает на медленную сходимость ряда (3.5) и, более того, на то, что при $z = 1$ данный ряд вообще расходится. Известный метод Крылова [72] улучшения сходимости тригонометрического ряда дает следующее соотношение:

$$\begin{aligned} S_1(z) = & \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left[z_m \Delta_m(p) + a_0 L \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\eta_m} \right] \cos \eta_m z + \\ & + a_0 L \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\pi} \ln \left(2 \cos \frac{\pi z}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь использована известная сумма [33]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\eta_m} \cos \eta_m z = -\frac{1}{\pi} \ln \left(2 \cos \frac{\pi z}{2} \right). \quad (3.8)$$

Теперь бесконечный ряд в (3.7) сходится. Расходимость же ряда (3.5) при $z = 1$, очевидно, связана с тем, что он представляет функцию с логарифмической особенностью в конце интервала.

Второй ряд в (3.4) также расходится при $z = 1$. Для выделения особенности представляемой им функции можно использовать

подход, аналогичный приведенному выше. Для достаточно больших n и $z \neq 0$

$$\frac{\operatorname{ch} q_1 z}{\operatorname{sh} q_1} \approx e^{-q_1(1-z)} \approx e^{-\zeta_n(1-z)} \left[1 + \frac{\Omega_1^2(1-z)}{2\zeta_n^2} + \frac{\Omega_1^4(1-z)^2}{8\zeta_n^4} + \dots \right], \quad (3.9)$$

$$\frac{\operatorname{ch} q_2 z}{\operatorname{sh} q_2} \approx e^{-q_2(1-z)} \approx e^{-\zeta_n(1-z)} \left[1 + \frac{\Omega_2^2(1-z)}{2\zeta_n^2} + \frac{\Omega_2^4(1-z)^2}{8\zeta_n^4} + \dots \right].$$

Тогда поведение общего члена второго ряда в (3.4) для больших n и $z \neq 0$ описывается выражением

$$x_n \left[\frac{(\zeta_n^2 + q_2^2) \left(\zeta_n^2 + \frac{v\Omega_1^2}{1-2v} \right)}{2\zeta_n^2 q_1} \frac{\operatorname{ch} q_1 z}{\operatorname{sh} q_1} - q_2 \frac{\operatorname{ch} q_2 z}{\operatorname{sh} q_2} \right] \approx \\ \approx a_0 \zeta_n e^{-\zeta_n(1-z)} \left[\frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\zeta_n^2} - \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\zeta_n} (1-z) - \frac{\Omega_2^4 - \Omega_1^4}{4\zeta_n^2} (1-z)^2 \right]. \quad (3.10)$$

При получении всех асимптотических оценок (3.6), (3.9), (3.10) использовались соотношения

$$p_l \approx \eta_m - \frac{\Omega_l^2}{2\eta_m}, \quad q_l \approx \zeta_n - \frac{\Omega_l^2}{2\zeta_n}, \quad l = 1, 2, \quad (3.11)$$

справедливые для больших m и n .

Учитывая, что

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1-z)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n} e^{-\zeta_n(1-z)} = 0, \quad (3.12)$$

для оценки значения второго ряда в (3.4) вблизи точки $z = 1$ получаем равенство

$$S_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ x_n \left[\frac{(\zeta_n^2 + q_2^2) \left(\zeta_n^2 + \frac{v\Omega_1^2}{1-2v} \right)}{2\zeta_n^2 q_1} \frac{\operatorname{ch} q_1 z}{\operatorname{sh} q_1} - q_2 \frac{\operatorname{ch} q_2 z}{\operatorname{sh} q_2} \right] - \right. \\ \left. - a_0 \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2} e^{-\zeta_n(1-z)} \left(\frac{1}{\zeta_n} - 1 + z \right) \right\} + \\ + a_0 \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2} \left[\frac{L}{\pi} \ln \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi(1-z)}{L}}} - \frac{(1-z)e^{-\frac{\pi(1-z)}{L}}}{1 - e^{-\frac{\pi(1-z)}{L}}} \right]. \quad (3.13)$$

Здесь использованы формулы [33]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n} e^{-\zeta_n a} = \frac{L}{\pi} \ln \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi a}{L}}}, \quad (3.14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\zeta_n a} = \frac{e^{-\frac{\pi a}{L}}}{1 - e^{-\frac{\pi a}{L}}}.$$

Видно, что ряд $S_2(z)$ также представляет функцию с логарифмической особенностью в точке $z = 1$. В совокупности формулы (3.4), (3.7) и (3.13) позволяют провести эффективное вычисление напряжений σ_x в точках границы $x = L$ при $z < 1$. Аналогичные выкладки можно проделать и для вычисления напряжения σ_z на этой же границе.

То обстоятельство, что предельные значения неизвестных x_n и z_m совпадают по абсолютной величине, свидетельствует о том, что логарифмические особенности в отдельных слагаемых (3.4) при $z \rightarrow 1$ погашаются. Действительно,

$$\lim_{z \rightarrow 1} \ln \frac{2 \cos \frac{\pi z}{2}}{1 - e^{-\frac{\pi(1-z)}{L}}} = \ln L, \quad (3.15)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \frac{e^{-\frac{\pi(1-z)}{L}}}{1 - e^{-\frac{\pi(1-z)}{L}}} = \frac{L}{\pi}.$$

При этом для вычисления напряжений в угловой точке получаем следующие соотношения:

$$\frac{1}{2G} \sigma_x(L, 1) = x_0 \frac{1-v}{1-2v} \cos \Omega_1 L + z_0 \frac{v}{1-2v} \cos \Omega_1 + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left[z_m \Delta_m(p) + a_0 L \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\eta_m} \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ x_n \left[\frac{(\zeta_n^2 + q_2^2) \left(\zeta_n^2 + \frac{v\Omega_1^2}{1-2v} \right)}{2\zeta_n^2 q_1} \operatorname{cth} q_1 - q_2 \operatorname{cth} q_2 \right] - \right. \\ \left. - a_0 \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\zeta_n} \right\} + a_0 \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\pi} L \ln L - a_0 \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\pi}, \\ \frac{1}{2G} \sigma_z(L, 1) = x_0 \frac{v}{1-2v} \cos \Omega_1 L + z_0 \frac{1-v}{1-2v} \cos \Omega_1 + \quad (3.16)$$

$$+ L \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ z_m \left[\frac{(\eta_m^2 + p_2^2) \left(\eta_m^2 + \frac{v\Omega_1^2}{1-2v} \right)}{2\eta_m^2 p_1} \operatorname{cth} p_1 L - p_2 \operatorname{cth} p_2 L \right] + \right. \\ \left. + a_0 \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\eta_m} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[x_n \Delta_n(q) - a_0 \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\xi_n} \right] + \\ + a_0 \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\pi} L \ln L + a_0 \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\pi}.$$

При анализе этих выражений следует обратить внимание на подчеркнутые слагаемые. Прежде всего отметим, что их появление связано со вторым предельным переходом в (3.15). Это свидетельствует о том, что такой вклад, связанный с неравномерной сходимостью рядов для напряжений на границе области, не может быть учтен при использовании способа простой редукции для системы (2.10). Следовательно, использование этого способа связано с неустранимой путем повышения порядка конечной системы погрешностью в оценке значений напряжений в угловой точке.

Наличие в (3.16) подчеркнутых членов позволяет указать эффективный способ определения самой величины a_0 . Рассматривая разность нормальных напряжений в угловой точке, из (3.16) получаем

$$\frac{1}{2G} (\sigma_x - \sigma_z) \Big|_{x=L} = x_0 \cos \Omega_1 L - z_0 \cos \Omega_1 - a_0 \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{\pi} L + \\ + L \sum_{m=1}^{\infty} z_m \left[2p_2 \operatorname{cth} p_2 L - \frac{(\eta_m^2 + p_1^2)(\eta_m^2 + p_2^2)}{2\eta_m^2 p_1} \operatorname{cth} p_1 L \right] - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left[2q_2 \operatorname{cth} q_2 - \frac{(\xi_n^2 + q_1^2)(\xi_n^2 + q_2^2)}{2\xi_n^2 q_1} \operatorname{cth} q_1 \right]. \quad (3.17)$$

Исходя из соотношений (3.1) и на основании оценок

$$2p_2 \operatorname{cth} p_2 L - \frac{(\eta_m^2 + p_1^2)(\eta_m^2 + p_2^2)}{2\eta_m^2 p_1} \operatorname{cth} p_1 L = O\left(\frac{1}{\eta_m^4}\right), \\ 2q_2 \operatorname{cth} q_2 - \frac{(\xi_n^2 + q_1^2)(\xi_n^2 + q_2^2)}{2\xi_n^2 q_1} \operatorname{cth} q_1 = O\left(\frac{1}{\xi_n^4}\right), \quad (3.18)$$

закключаем, что ряды в (3.17) быстро сходятся. Поскольку разность нормальных напряжений в угловой точке задается граничными условиями (2.4), то для определения a_0 можно использовать соотношение

$$a_0 = \frac{\pi}{L(\Omega_2^2 - \Omega_1^2)} \left\{ x_0 \cos \Omega_1 L - z_0 \cos \Omega_1 - f(1) + g(L) + \right.$$

$$\left. + L \sum_{m=1}^M z_m \left[2p_2 \operatorname{cth} p_2 L - \frac{(\eta_m^2 + p_1^2)(\eta_m^2 + p_2^2)}{2\eta_m^2 p_1} \operatorname{cth} p_1 L \right] - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^N x_n \left[2q_2 \operatorname{cth} q_2 - \frac{(\xi_n^2 + q_1^2)(\xi_n^2 + q_2^2)}{2\xi_n^2 q_1} \operatorname{cth} q_1 \right] \right\}. \quad (3.19)$$

При этом конечная система из $M + N + 2$ уравнений формируется на основе соотношений (3.2).

Возможен и несколько отличный способ перехода к конечной системе. Можно положить

$$x_n = a_0 \quad (n > N), \quad z_m = -a_0 \quad (m > M), \quad (3.20)$$

а в качестве недостающего уравнения использовать равенство (3.19). Конкретные вычисления показали, что оба способа приводят к практически одинаковым числовым значениям для неизвестных.

Важнейшим практическим вопросом с точки зрения анализа эффективности изложенного способа решения бесконечных систем является оценка скорости стремления неизвестных к своим предельным значениям. Для таких оценок можно использовать данные конкретных расчетов. Кроме того, большой интерес представляет случай, когда бесконечную систему можно решить точно.

Как отмечалось при анализе дисперсионных соотношений для слоя можно указать ряд собственных частот для определенных размеров прямоугольника — моды Ламе. Эти моды связаны с рассмотренным ранее случаем чистой SV-волны в слое, когда смещения частиц описываются выражениями (6.4) главы 4. Поскольку в данных модах касательные напряжения тождественно равны нулю во всем объеме, то оказывается возможным удовлетворять условия для нормальных напряжений на свободных торцах. Наложение бегущих навстречу друг другу волн (6.4) главы 4 образует систему стоячих волн в прямоугольнике. Вектор смещений имеет компоненты

$$u_x = C \sin \frac{(2p-1)\pi x}{2} \cos \frac{(2p-1)\pi z}{2}, \\ u_z = -C \cos \frac{(2p-1)\pi x}{2} \sin \frac{(2p-1)\pi z}{2}. \quad (3.21)$$

Такие моды существуют на частотах

$$\Omega = (2p-1)\sqrt{2}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

и для прямоугольников с размерами

$$L(p, q) = \frac{2q-1}{2p-1}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

Построенное выше общее решение задачи должно описывать также движение в модах Ламе. В связи с этим бесконечный определитель системы (2.10) обращается в нуль при частотах (3.22) и соответствующих размерах области (3.23).

Согласование выражений (3.21) на границах $x = L$ и $z = 1$ с общими выражениями для смещений (2.13) свидетельствует о том, что возможное решение однородной системы следует искать в виде

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{a_0 \Omega_1 L}{2 \sin \Omega_1 L}, \quad x_n = a_0 \frac{2\zeta_n^2}{\zeta_n^2 + q_2^2}, \\ z_0 &= -\frac{a_0 \Omega_1}{2 \sin \Omega_1}, \quad z_m = -a_0 \frac{2\eta_m^2}{\eta_m^2 + p_2^2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

При сворачивании бесконечных рядов в системе (2.10) с учетом предполагаемого вида искомых неизвестных используем равенства

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_n^2}{(\zeta_n^2 + p_1^2)(\zeta_n^2 + p_2^2)(2\zeta_n^2 - \Omega_2^2)} &= \left[\frac{p_2^2 R_1(p_2)}{2p_2^2 + \Omega_2^2} - \frac{p_1^2 R_1(p_1)}{2p_1^2 + \Omega_2^2} \right] \times \\ &\times \frac{1}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} + \frac{\Omega_2^2}{(2p_1^2 + \Omega_2^2)(2p_2^2 + \Omega_2^2)} R_1\left(i \frac{\Omega_2}{\sqrt{2}}\right), \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta_m^2}{(\eta_m^2 + q_1^2)(\eta_m^2 + q_2^2)(2\eta_m^2 - \Omega_2^2)} &= \left[\frac{q_2^2 R_2(q_2)}{2q_2^2 + \Omega_2^2} - \frac{q_1^2 R_2(q_1)}{2q_1^2 + \Omega_2^2} \right] \times \\ &\times \frac{1}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} + \frac{\Omega_2^2}{(2p_1^2 + \Omega_2^2)(2p_2^2 + \Omega_2^2)} R_2\left(i \frac{\Omega_2}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(p) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n^2 + p^2} = \frac{L}{2p} \operatorname{cth} pL - \frac{1}{2p^3}; \\ R_2(q) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\eta_m^2 + q^2} = \frac{\operatorname{cth} q}{2q} - \frac{1}{2q^3}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

С учетом этих соотношений находим, что однородная система (2.10) удовлетворяется тождественно выражениями (3.24) при одновременном выполнении двух равенств:

$$\cos \frac{\Omega_2 L}{\sqrt{2}} = 0, \quad \cos \frac{\Omega_2}{\sqrt{2}} = 0. \quad (3.27)$$

Очевидно, что эти равенства выполнены при условиях (3.22) и (3.23).

Полученные точные решения (3.24) важны прежде всего с точки зрения оценки возможной скорости стремления искомых величин в (2.10) к своим предельным значениям. Конечно, из анализа (3.24) нельзя сделать заключение о поведении неизвестных с ростом номера для любой частоты. Однако следующая из них оценка

$$x_n = a_0 + O\left(\frac{1}{\zeta_n^2}\right), \quad z_m = -a_0 + O\left(\frac{1}{\eta_m^2}\right) \quad (3.28)$$

Таблица 6

m, n	$z_m^{(1)}$	$z_m^{(2)}$	$x_n^{(1)}$	$x_n^{(2)}$
0	-12,860	-12,850	-2,765	-2,764
1	-1,802	-1,800	0,830	0,830
2	-0,784	-0,780	-5,329	-5,325
$M-1, N-1$	-1,011	-0,989	1,046	1,040
M, N	-1 014	-0,990	1,038	1,032

в определенной мере характеризует специфику поведения неизвестных в (2.10) и находится в хорошем соответствии с числовыми данными для других значений частоты.

Такие оценки скорости стремления неизвестных к асимптотическим значениям важны при решении вопроса о выборе значений M и N , т. е. порядка конечной системы при аппроксимации бесконечной системы (2.10). В каждом конкретном случае значения величин M и N существенно зависят от частоты, на что, в частности, указывают и соотношения (3.24). Обобщая результаты большого объема проведенных вычислений, для выбора этих величин можно рекомендовать соотношение

$$\frac{\Omega_2^2}{\zeta_N^2} \approx \frac{\Omega_2^2}{\eta_M^2} \approx 0,1, \quad (3.29)$$

которое, по существу, связывает значения геометрии области, верхнего диапазона частот и порядок конечной системы.

Остановимся на оценке эффективности двух подходов к определению величины a_0 при выбранном количестве неизвестных M и N . В табл. 6 приведены значения неизвестных из системы (2.10) для случая возбуждения колебаний равномерной нормальной нагрузкой $\frac{1}{2G} \sigma_x = f_0$ на торцах $x = \pm L$ при следующих данных: $\nu = 0,248$, $L = 3$, $M = 7$, $N = 18$, $\Omega = 1,705$. Такое значение частоты близко к четвертой собственной частоте. Далее все данные нормированы к f_0 .

Индексом (1) в табл. 6 отмечены значения неизвестных, полученные на основе равенств (3.2) (при этом $a_0^{(1)} = 1,0262$), индексом (2) — значения неизвестных, полученные с использованием второго подхода к определению a_0 , т. е. на основе формул (3.19) и (3.20) (при этом $a_0^{(2)} = 0,9857$).

Данные табл. 6 свидетельствуют о том, что найденные двумя различными подходами значения первых неизвестных ($n \leq N$, $m \leq M$) и их предельные значения ($\pm a_0$) незначительно отличаются друг от друга. Относительная разность в определении величины a_0 составляет величину около 5%. Значения неизвестных x_n и z_m отличаются еще меньше. Это означает, что величины смещений

Таблица 7

z	$\frac{1}{2G} \sigma_x^{(1)}$	$\frac{1}{2G} \sigma_x^{(2)}$
0,0	1,0022	1,0002
0,2	1,0021	1,0002
0,4	1,0021	1,0002
0,6	1,0022	1,0002
0,8	1,0024	1,0009
1,0	0,9388	1,0007

Таблица 8

z	$\frac{1}{2G} \sigma_x^{(1)}$	$\frac{1}{2G} \sigma_x^{(2)}$	$\frac{1}{2G} \sigma_x^{(3)}$
0,00	0,977	0,989	0,993
0,40	0,978	0,990	0,994
0,60	0,981	0,990	0,995
0,80	0,986	0,992	0,996
0,90	1,021	1,013	1,008
0,95	1,172	1,072	1,036
1,00	1,768	1,226	1,097

и напряжений внутри прямоугольника также не будут сильно различаться между собой. О точности выполнения граничных условий можно судить по данным табл. 7. Здесь $\frac{1}{2G} \sigma_x^{(1)}$ соответствует первому способу определения величины a_0 , а $\frac{1}{2G} \sigma_x^{(2)}$ — второму. Различие в значениях напряжений в угловой точке свидетельствует в пользу второго способа определения a_0 , более полно учитывающего характер напряжений вблизи угла.

Конечно, степень точности при выполнении граничных условий зависит также от степени близости частоты к собственной. В табл. 8 показано распределение напряжений $\frac{1}{2G} \sigma_x$ на границе $x = L$ для тех же исходных данных, но при $\Omega = 1,430$. Это значение частоты всего на 0,1% ниже третьей собственной. Величина a_0 определялась по указанным выше двум способам, — соответственно первый и второй столбцы для величин σ_x .

Из данных табл. 8 следует, что наиболее трудно добиться выполнения граничных условий в угловой точке. При этом второй подход к определению величины a_0 дает значительные преимущества. Степень точности удовлетворения граничных условий даже при столь близкой к собственной частоте возбуждения можно повысить увеличением числа уравнений в конечной системе либо простым увеличением числа членов в рядах для напряжений. Во втором случае дополнительные неизвестные определяются согласно формуле (3.20). В столбце для величины $\frac{1}{2G} \sigma_x^{(3)}$ в табл. 8 приведены данные для $M = 15$, $N = 45$.

Главной целью при решении задач для тел конечных размеров (рассматриваемый здесь прямоугольник — конкретный вид таких тел) является определение собственных частот и форм колебаний. Наличие эффективного алгоритма решения задачи о вынужденных колебаниях позволяет подойти к этому вопросу следующим образом. При заданной нагрузке рассматриваем задачу о вынужденных колебаниях для различных значений частоты. В процессе изменения частоты о подходе ее к собственной можно судить по увеличению

Таблица 9

z	$\Omega = 2,557$		$\Omega = 2,585$	
	$x = 0$	$x = L$	$x = 0$	$x = L$
0,0	—19,315	1,004	21,537	0,995
0,2	—21,587	1,002	24,526	0,997
0,4	—27,319	0,999	32,056	1,001
0,6	—33,614	0,994	40,296	1,008
0,8	—36,616	0,988	44,247	1,014
1,0	—32,291	0,946	38,772	1,057

динамической напряженности внутри области. Переход через собственную частоту обнаруживается по изменению фазы всех характеристик. Таким образом обычно фиксируется широкий интервал, содержащий собственную частоту. Последующее дробление этого интервала позволяет найти с высокой точностью как саму собственную частоту, так и характеристики соответствующей формы колебаний. Отметим, что при приближении к собственной частоте ухудшается точность выполнения граничных условий при фиксированном порядке конечной системы. Это свойство является ограничительным в процессе деления частотного интервала и в некотором смысле ограничивает степень точности определения собственной частоты при выбранном порядке конечной системы.

Определенное представление о возможной картине перехода через собственную частоту дают данные табл. 9, где приведено распределение нормальных напряжений $\frac{1}{2G} \sigma_x$ в сечениях $x = 0$ и $x = L$ прямоугольника при $\nu = 0,248$, $L = 2$, $M = 10$, $N = 24$ в окрестности шестой собственной частоты.

При отработке такой методики и проверке достоверности результатов большую помощь может оказать знание точных значений собственных частот и форм колебаний мод Ламе.

Очевидно, описанным подходом задача решается локально. Для каждого фиксированного значения L и свойств материала можно найти набор собственных частот в довольно широком частотном диапазоне. Однако больший интерес представляет общая задача исследования спектральных свойств и форм колебаний упругого прямоугольника с изменением его геометрии. При решении такой задачи изложенная методика позволяет нанести на плоскость (L, Ω) некоторую систему точек. Вопрос о соединении этих точек в спектральные кривые $\Omega = f(L)$ определенной моды оказывается довольно сложным из-за специфики резонансных свойств упругих тел конечных размеров в высокочастотной области. Здесь наблюдается большое число относительно близких собственных частот, что служит основой для сомнений в возможности достичь нужной степени разрешения результатов при использовании численных подходов [211].

§ 4. АНАЛИЗ СПЕКТРА И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНИКА В ОБЛАСТИ НИЗКИХ ЧАСТОТ

При исследовании свойств колебательных систем в виде прямоугольника представляется естественным произвести некоторую классификацию рассматриваемых частотных диапазонов. Часто при такой классификации в основу кладется сравнение длины волны с характерными линейными размерами объекта. Однако после исследования свойств нормальных мод в слое представляется целесообразным положить в основу такой классификации свойства дисперсионных ветвей. На рис. 61 (кривые 1—3) и 62 (кривые 1—4) при $\nu = 0,248$ показано несколько первых дисперсионных ветвей соответственно продольных и изгибных мод в бесконечном слое. Согласно характеру ветвей низкочастотную область определим как область частот, для которых в слое $|z| < 1$ имеется только одна распространяющаяся мода. Иначе говоря, областью низких частот будем называть интервал $0 < \Omega < \Omega^*$ для симметричного и $0 < \Omega < 1$ для антисимметричного случаев.

На рис. 63 и 64 соответственно представлены спектры собственных частот прямоугольников для продольных и изгибных колебаний в выделенной низкочастотной области¹. Алгоритм вычислений подробно описан в § 3 данной главы. Некоторые дополнительные детали вычислений приведены в работе [44].

Более простой и естественной представляется структура спектра изгибных колебаний. Самым важным его свойством является отсутствие каких-либо качественных отличий от полученного на основе элементарных балочных моделей. Спектральные линии неплохо качественно согласуются с представлениями об обратно пропорциональной зависимости между собственной частотой и длиной прямоугольника.

Существуют разнообразные приближенные подходы к изучению колебаний прямоугольных тел. В их основе лежат различные гипотезы физического или математического плана. В данной работе мы не будем подробно рассматривать вопросы оценки возможностей и пределов применимости простейших и уточненных приближенных теорий. Обзор исследований в этой области и основные результаты можно найти, например, в работах [35, 182]. Мы здесь остановимся на следующем вопросе, глубже вскрывающем особенности динамического поведения тел конечных размеров.

В некотором смысле приближенную теорию можно построить, оставляя в представлении вектора смещений лишь те члены, которые соответствуют единственной распространяющейся моде в (1.12). Для удовлетворения граничных условий на торце $x = L$ в таком решении содержится лишь одна постоянная. Если использовать ее для удовлетворения граничных условий по нормальным напряжениям, оставляя касательные напряжения произвольными то со-

¹ Здесь и на последующих рисунках цифры на кривых соответствуют порядковому номеру собственной частоты.

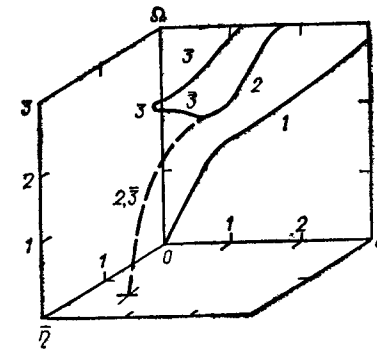


Рис. 61.

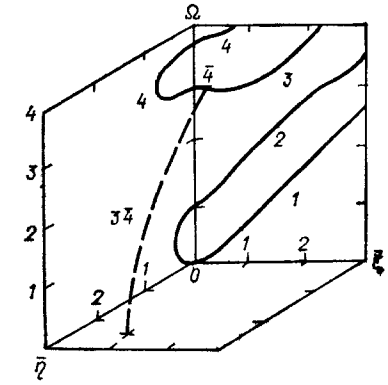


Рис. 62.

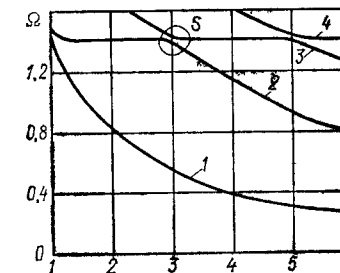


Рис. 63.

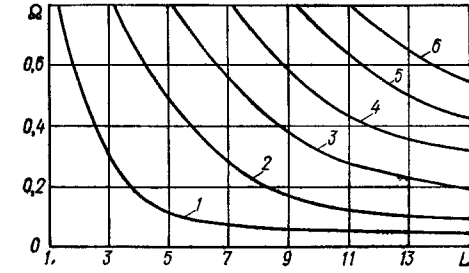


Рис. 64.

отношение для определения собственных частот примет вид

$$\cos \frac{\pi \bar{\xi}_1 L}{2} = 0, \quad (4.1)$$

где $\bar{\xi}_1$ — единственный вещественный корень дисперсионного уравнения (3.26) главы 4 для изгибных мод в слое. Определяемые из уравнения (4.1) собственные частоты практически совпадают с точными значениями. Такое решение, очевидно, предсказывает и простую структуру собственных форм колебаний.

На рис. 65 представлено найденное по точному решению для прямоугольника с величиной $L = 13$ распределение нормированных смещений $u_z(x, 0)$ для первой ($\Omega = 0,088$), второй ($\Omega = 0,170$) и шестой ($\Omega = 0,640$) собственных форм — кривые 1, 2, 6 соответственно¹. Важно отметить, что кинематические и динамические характеристики собственных форм не меняются при движении вдоль каждой спектральной кривой в этой области частот.

Соотношение (4.1) следует из подхода, в котором граничные условия по касательным напряжениям не удовлетворяются. Имея

¹ Здесь и далее при изображении кинематических и силовых характеристик форм используются нормированные (отнесенные к максимальным) величины. На рисунках это указывается чертой над соответствующей величиной.

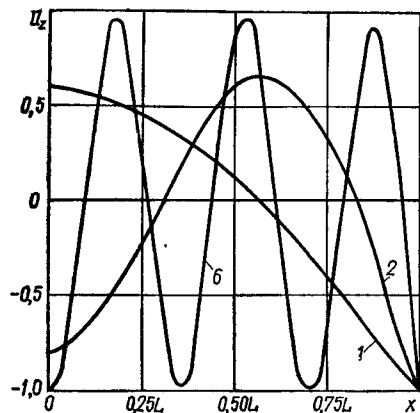


Рис. 65.

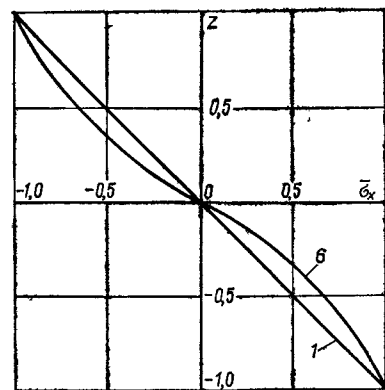


Рис. 66.

точное решение, можно оценить относительный уровень касательных напряжений для каждой собственной формы колебаний в рассматриваемом диапазоне частот. Так, для $L = 13$ на второй собственной форме $\tau_{\max}/\sigma_{\max} \approx 0,1$. Отметим также, что малыми при этом являются и нормальные напряжения σ_z , поскольку $\sigma_{z\max}/\sigma_{x\max} \approx 0,1$. Такая характеристика формы колебаний, как распределение по толщине в срединной плоскости $x = 0$ нормального напряжения σ_x , при этом, однако, обнаруживает некоторое отклонение от линейного закона. На рис. 66 эта характеристика представлена для первой и шестой форм колебаний при $L = 13$ (соответственно кривые 1 и 6).

Представленный на рис. 63 спектр собственных частот для продольных колебаний прямоугольника имеет гораздо более сложную структуру. Здесь уже нет даже качественного соответствия с предполагаемой обратно пропорциональной зависимостью между собственной частотой и длиной прямоугольника. В окрестности частоты $\Omega = \Omega_e = 1,430$ в спектре существуют почти горизонтальные участки — плато. Они указывают на необычное явление — при существенном изменении длины прямоугольника одна из собственных частот не меняется.

Что касается области частот $\Omega < \Omega_e$, то здесь можно полностью повторить сказанное выше для случая изгибных колебаний. Уравнение (4.1), где ξ_1 определяется из соотношения (3.1) главы 4, очень точно определяет собственные частоты прямоугольника. Более того, из этого уравнения хорошо определяются значения частот при $\Omega > \Omega_e$, однако частота $\Omega = \Omega_e$, соответствующая горизонтальному участку — плато, при этом пропускается.

На рис. 67 показано распределение по длине продольных нормированных смещений $u_x(x, 0)$ для прямоугольника $L = 6$ для первой ($\Omega = 0,264$), второй ($\Omega = 0,800$) и третьей ($\Omega = 1,265$) собственных форм колебаний (соответственно кривые 1—3). Несмотря на то что в распределении смещений довольно четко выделяется гармо-

ническая зависимость от длины, в силовых характеристиках большую роль играют напряжения на площадках, параллельных длинным сторонам. Для третьей собственной частоты (на рис. 67 кривая 3) $\sigma_{z\max}/\sigma_{x\max} \approx 0,6$.

Формы колебаний, соответствующие горизонтальным участкам в спектре собственных частот, существенно отличаются от приведенных на рис. 67. Последние являются типичными представителями форм на ниспадающих, гиперболических участках зависимости Ω от L при $\Omega < \Omega_e$.

В заключение отметим следующее. Если низкочастотную область колебаний определить как диапазон частот, для которого наблюдается хотя бы качественное согласование между точным и приближенным спектрами, то из приведенных результатов получим, что в случае изгиба такой областью действительно является область $0 < \Omega < 1$. Для случая продольных колебаний такой является лишь область $0 < \Omega < \Omega_e$.

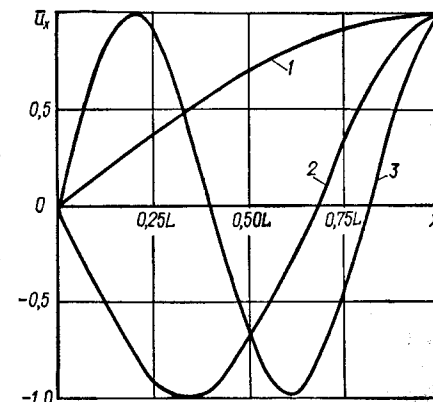


Рис. 67.

§ 5. КРАЕВОЙ РЕЗОНАНС В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Перейдем к анализу тех форм колебаний прямоугольника, которые соответствуют плато в спектре на рис. 63. При этом мы еще остаемся в области частот, где имеется только одна распространяющаяся мода. Такие особенности в спектре собственных частот упругого тела впервые обнаружил экспериментально Шоу [264]. Эксперименты проводились на пьезокерамических круглых дисках. Измерение перемещений в соответствующих формах колебаний показало наличие сильной локализации области интенсивных движений вблизи края диска. В связи с этим явление возбуждения таких форм получило название краевого резонанса.

Аналогичные экспериментальные работы были выполнены и для прямоугольных пластин. Ряд работ относится к существенно анизотропным материалам [145, 244]. Очень удобными для постановки экспериментов в этой области являются пьезокерамические материалы [39, 245]. В случае поляризации по толщине в рамках модели плоского напряженного состояния анизотропия таких материалов не проявляется.

Так как в эксперименте трудно получить все данные об особенностях такого интересного явления, как краевой резонанс, то это стимулировало построение теоретических решений и проведение расчетов в рамках модели изотропного тела. Было показано, что

такая модель описывает данное явление и получены обширные данные о характеристиках формы колебаний. При этом использовались различные приближенные подходы к решению краевых задач. В работе [212] использован метод конечных разностей и построен подробный спектр, некоторые характеристики форм колебаний в области частот, включающей Ω_c , и полученные результаты сравнивались с данными эксперимента на пластинке из титаната бария. Вариационный подход к исследованию изотропных и анизотропных пластин предложен и использован для получения количественных данных в работах [172, 191]. Конечноэлементный подход к задачам колебаний упругих тел конечных размеров, и в частности к анализу краевого резонанса, развит в работах [196, 197].

С точки зрения теоретического осмысливания явления краевого резонанса как одной из специфических особенностей колебаний упругих тел конечных размеров важную роль сыграли работы [179, 244]. В них показана связь между явлением краевого резонанса и особенностями процесса отражения волн от свободного торца упругого волновода. Оказалось, что в случае упругого волновода нет простого решения тривиальной задачи акустики об отражении распространяющейся моды от идеального торца волновода. В связи с наличием преобразования типов волн при отражении от свободной поверхности в упругом волноводе сумма падающей и отраженной распространяющихся мод не удовлетворяет нулевым граничным условиям по нормальным и касательным напряжениям одновременно. Обеспечить выполнение граничных условий можно только с привлечением нераспространяющихся мод. Авторы работ [179, 244] были первыми, кто использовал нераспространяющиеся моды для улучшения точности выполнения граничных условий и описания процесса отражения.

Способы учета нераспространяющихся мод в работах [179, 244] разные. Это привело к некоторому различию в значениях частоты краевого резонанса. И все же эти работы наглядно показали ту большую роль, которую играют нераспространяющиеся моды при образовании форм колебаний и спектра собственных частот конечных упругих тел. При этом для представления волнового поля и уточненного удовлетворения граничным условиям использовалась только одна нераспространяющаяся мода.

В связи с явной обусловленностью краевого резонанса наличием нераспространяющихся мод определенный интерес представляет аналогия данного случая с рассмотренным выше подходом, приводящим к частотному уравнению (4.1). Это уравнение получается, если для описания волнового поля использовать только распространяющуюся моду. Рассматривая краевую резонанс, можно пытаться оставить в представлении волнового поля только одну, низшую, нераспространяющуюся моду. Такой подход осуществлен в работе [243], и при этом отмечено удовлетворительное согласование теоретической частоты Ω_c с экспериментальным ее значением. Это, с одной стороны, наиболее ярко показывает связь краевой моды

с нераспространяющимися волнами в слое, а с другой, что в формировании краевой моды должны участвовать все нераспространяющиеся моды, соответствующие комплексным корням дисперсионного уравнения. Подробнее этот вопрос обсуждается в главе 7.

Изложенная методика решения задачи об установившихся колебаниях прямоугольника позволяет дать полный анализ как структуры спектра в рассматриваемом диапазоне частот, так и форм колебаний. Конкретные расчеты, результаты которых для спектра собственных частот представлены на рис. 63, выполнены для материала с коэффициентом $\nu = 0,248$ (плоская деформация), что соответствует значению $\nu = 0,329$ для плоского напряженного состояния. Для тонкой пластинки из такого материала ($\nu = 0,329$) в работе [245] приведены обширные экспериментальные данные. Частоты, лежащие в центральных участках плато (см. рис. 63), заключены в интервале $1,4300 < \Omega_c < 1,4333$ независимо от геометрических размеров прямоугольника при $L > 2$. Для $L < 2$ при движении вдоль плато частоты изменяются в большем диапазоне. Если ориентироваться на данные при $L > 2$, то, принимая для частоты краевого резонанса значение $\Omega_c = 1,4311$, находим, что эта величина всего на 0,5% отличается от определенной экспериментально.

Отметим, что частота краевого резонанса существенно зависит от коэффициента Пуассона, повышаясь с его увеличением. В связи с этим такую зависимость предлагалось использовать в качестве основы для экспериментального определения величины ν [226].

Спектр собственных частот на рис. 63 имеет характерные зоны, одна из которых выделена кривой S. В общем случае колебательных систем со многими степенями свободы наличие таких зон указывает на связь между различными нормальными колебаниями [89]. Это обстоятельство необходимо иметь в виду, приступая к анализу форм колебаний. Формы колебаний, соответствующие определенному типу движений, проявляются только для частот, достаточно удаленных от зон взаимодействия.

Существенные различия между типами движений, соответствующими точкам плато и ниспадающим участкам кривых ниже и выше Ω_c , наглядно видны на рис. 68. Здесь представлено распределение вдоль поверхности $z = 1$ нормального к ней компонента вектора смещений $u_z(x, 1)$ для третьей ($\Omega = 1,2650$), четвертой ($\Omega = 1,4333$) и пятой ($\Omega = 1,5158$) собственных форм прямоугольника с величиной $L = 6$ (кривые 3—5 соответственно). Как видно из рис. 63, для такой геометрии четвертая собственная частота является центром плато. В соответствующей ей форме зона относительно больших смещений и напряжений сосредоточена вблизи торцов прямоугольника. Это подтверждается, в частности, данными рис. 69, где показано распределение вдоль оси $z = 0$ нормального напряжения σ_z . При удалении от торца $x = L$ величина напряжений резко падает.

В свете указанной ранее связи между краевой модой и нераспространяющимися модами в слое важным является вопрос о зависи-

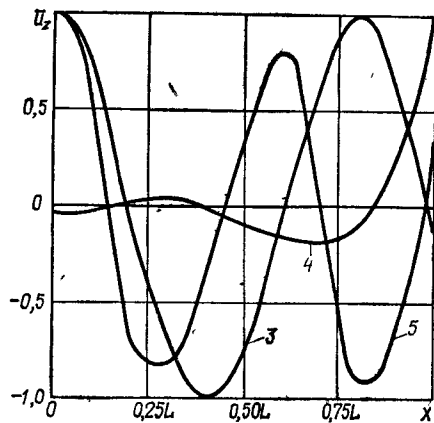


Рис. 68.

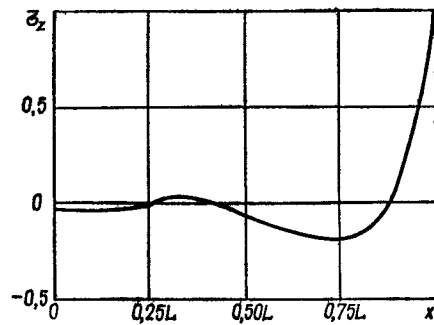


Рис. 69.

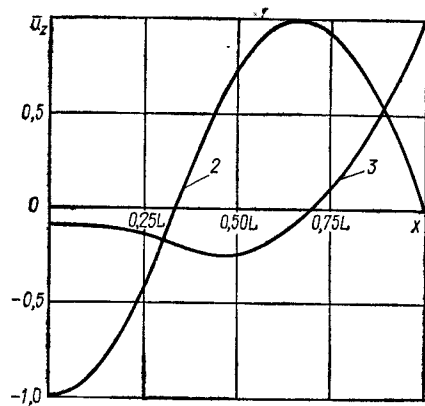


Рис. 70.

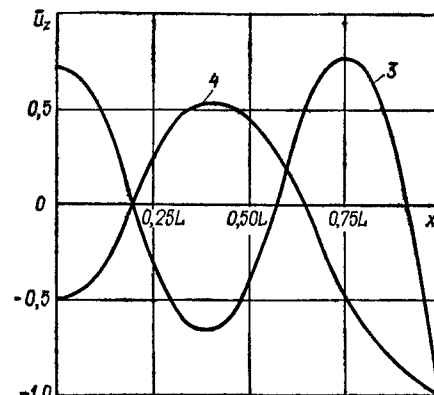


Рис. 71.

ности характеристик краевого резонанса от геометрических размеров прямоугольника. Разумеется, соответствующее сравнение необходимо проводить для частот, отвечающих центрам плато. При этом оказывается, что распределения $u_z(x, 1)$ для краевой моды при $L = 4, 6, 8, \dots$ оказываются практически неразличимыми.

Отметим, что краевая мода в прямоугольнике обнаруживает весьма слабую связь с продольными модами колебаний. Характеристики формы колебаний при движении вдоль любого плато остаются практически неизменными. Это подтверждается данными рис. 70, на котором представлено распределение $u_z(x, 1)$ для $L = 3$ при $\Omega = 1,4142$ — мода Ламе (кривая 2) и $\Omega = 1,4333$ — краевая мода (кривая 3). Такое значение геометрии практически соответствует краю плато, однако и здесь краевая мода обладает своей характерной формой.

Дополнительные расчеты, проведенные для $\nu = 0,31$, показыва-

ли, что в этом случае частота краевого резонанса заключена в интервале $1,4805 < \Omega_e < 1,4840$. Это хорошо согласуется с данными работы [281], где методом однородных решений с использованием одной распространяющейся и 10 пар нераспространяющихся мод найдено значение $\Omega_e = 1,4830$. Однако для $L = 4,545$ указанный выше интервал не содержит собственной частоты. Вместо этого две собственные частоты заключены в интервалах $(1,4728—1,4764)$ и $(1,4910—1,4946)$. На рис. 71 показано распределение $u_z(x, 1)$ для частот $\Omega = 1,4728$ (кривая 3) и $\Omega = 1,4910$ (кривая 4). Нетрудно видеть, что ни одну из этих собственных форм колебаний нельзя принять за краевую моду.

Интересной особенностью, связанной с наличием краевой моды в прямоугольнике, является уменьшение на единицу числа узлов в распределении $u_z(x, 1)$ при движении вдоль каждой спектральной кривой. Этот вопрос, а также вопрос о поведении собственных форм в зоне взаимодействия краевой и продольной мод, выделенной на рис. 63 кривой S, более подробно рассмотрен далее в главе 6 при изучении краевого резонанса в диске. Здесь мы остановимся на анализе распределения средней за период энергии по площади прямоугольника для разных форм колебаний [47]. При этом особенности краевой моды получают еще энергетическое выражение.

Конкретные вычисления проведены для двух типов возбуждающих колебания нагрузок на торцах прямоугольника:

$$\frac{1}{2G} \sigma_x = f_0, \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_x = f_0 \cos \pi x.$$

Безразмерная величина, пропорциональная средней за период накопленной в теле энергии, вычисляется по формуле

$$\bar{E} = \int_0^L \int_0^1 (u_x^2 + u_z^2) dx dz. \quad (5.2)$$

В табл. 10 и 11 приведены значения величины $\bar{E}$ на разных частотах для первого и второго случаев нагружения соответственно. Вычисления выполнены для $L = 6$, $\nu = 0,248$. Пять первых резонансных частот для такого тела заключены в интервалах $(0,2585—0,2695)$, $(0,7975—0,8085)$, $(1,2485—1,2595)$, $(1,4305—1,4316)$, $(1,5015—1,5125)$. Краевому резонансу соответствует четвертая частота. Половина области $0 \leq x \leq L$ разбивается на участки шириной $0,1L$, и для каждого из них вычисляется значение $\bar{E}$. Таким образом, данные табл. 10 и 11 характеризуют распределение в процентах от полной средней по времени величины $\bar{E}$, накопленной в полосках шириной $0,1a$ и высотой $2h$. В последнем столбце табл. 10 и 11 помещено суммарное значение величины $\bar{E}$. Данные, относящиеся ко второй собственной частоте, здесь не приведены, поскольку они, по существу, такие же, как для первой собственной частоты.

Таблица 10

Ω	x/L										$\bar{E}$
	0,0— 0,1	0,1— 0,2	0,2— 0,3	0,3— 0,4	0,4— 0,5	0,5— 0,6	0,6— 0,7	0,7— 0,8	0,8— 0,9	0,9— 1,0	
0,264	10,3	10,3	10,2	10,2	10,1	9,9	9,8	9,8	9,7	9,7	69
1,254	12,3	8,1	8,1	11,6	11,7	8,6	8,2	11,3	11,7	8,4	22
1,430	2,0	1,7	1,4	0,9	0,4	1,6	6,0	10,8	13,2	62,0	248
1,516	14,5	3,3	14,9	11,2	4,8	12,7	6,8	7,8	16,6	7,4	1022

Таблица 11

Ω	x/L										$\bar{E}$
	0,0— 0,1	0,1— 0,2	0,2— 0,3	0,3— 0,4	0,4— 0,5	0,5— 0,6	0,6— 0,7	0,7— 0,8	0,8— 0,9	0,9— 1,0	
0,264	1,0	2,3	3,0	2,5	1,2	0,6	1,2	3,2	17,0	68,0	0,01
1,254	10,5	7,0	7,0	10,0	9,6	6,6	7,2	11,0	17,2	13,9	0,9
1,430	2,1	1,7	1,4	0,7	0,2	1,5	5,5	10,5	13,6	62,8	395
1,516	14,4	3,3	14,8	11,0	4,8	13,0	7,0	7,7	16,8	7,2	1246

Остановимся вначале на данных табл. 10. Для первой собственной формы имеем практически равномерное распределение энергии по объему тела. Для третьей формы наблюдается некоторая неравномерность в распределении, однако она не регулярна и не очень ярко выражена. В определенной мере это связано с тем, что разбиение на полосы не согласовано с особенностями конкретной формы колебаний. Такая же закономерность наблюдается и для пятой собственной формы. В целом можно сказать, что для третьей и пятой собственных форм энергия в определенном смысле поровну распределена между отдельными частями тела. Иное положение наблюдается для четвертой собственной частоты, соответствующей краевому резонансу. Здесь из всего количества запасенной энергии более 60% ее сосредоточено в узкой полосе шириной $0,6h$ у обоих торцов прямоугольника.

Как уже отмечалось, в последнем столбце табл. 10 и 11 помещено абсолютное значение величины $\bar{E}$, вычисленное по формуле (5.2) для двух типов нагрузки (5.1). Для каждой частоты и типа нагрузки имеем свое значение $\bar{E}$, отличное от других. Это отличие связано с двумя обстоятельствами. Прежде всего степень возбуждения тела при вынужденных колебаниях зависит от близости частоты возбуждения к собственной. И хотя вычисления проведены для средних значений частот в установленных интервалах, определить степень их близости к собственным не представляется возможным. Кроме того, величина накопленной энергии существенно зависит от степени соответствия характера нагрузки и возбуждаемой формы колебаний.

Если первый из указанных факторов не сильно сказывается на характере распределения энергии по объему пластинки, то влияние второго фактора более существенно. При наличии значительного несоответствия между видом нагрузки и кинематическими характеристиками возбуждаемой моды вообще невозможно сколько-нибудь заметно возбудить колебания объекта. Об этом убедительно свидетельствует первая строка в табл. 11, где приведены данные о распределении энергии для первой собственной частоты при возбуждении колебаний самоуравновешенной по торцу нагрузкой $\frac{1}{2G} \sigma_x = f_0 \cos \pi z$. Имеем ничтожно малую величину общей накопленной энергии, которая к тому же распределена подобно статическому случаю деформирования. Для возбуждаемых с достаточной степенью динамичности краевой моды ($\Omega = 1,430$) и пятой моды ($\Omega = 1,516$) данные о распределении энергии в табл. 10 и 11 практически совпадают.

Следующий из табл. 10 и 11 основной вывод о том, что краевая мода характеризуется сильной локализацией энергии вблизи торцов прямоугольника, подтверждается также расчетами для других типов нагрузки, в частности для нагрузки $\frac{1}{2G} \sigma_x = f_0 \cos 2\pi z$.

Особенность деформирования прямоугольника при несоответствии нагрузки и формы колебаний, отраженная в табл. 11, указывает на один из недостатков предлагаемого подхода к изучению собственных частот и форм колебаний. Представленный пример свидетельствует о необходимости иметь определенное соответствие между заданной нагрузкой и искомой формой колебаний. С ситуацией невозбуждаемости мы встретились при попытке возбудить моды Ламе равномерной нормальной нагрузкой по сторонам прямоугольника. К счастью, требование соответствия между нагрузкой и формой не слишком жесткое, и в подавляющем большинстве расчетных случаев все исследуемые формы удается хорошо возбудить одним-двумя типами внешней нагрузки.

Затронутая проблема приобретает практическую важность при проведении экспериментальных исследований на поляризованных по толщине пьезокерамических пластинках. Несоответствие характера возбуждающего электрического поля некоторой форме колебаний приводит к очень малому значению эффективного коэффициента электромеханической связи. Однако знание механических характеристик форм колебаний, в частности распределения по площади суммы главных напряжений, позволяет соответствующим образом разрезать и переключить электроды и существенно повысить коэффициент электромеханической связи. Подробности такого подхода и соответствующие экспериментальные данные приведены в работе [39].

§ 6. АНАЛИЗ СПЕКТРА И ФОРМ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНИКА В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ЧАСТОТ

Выше указывалось, что ширина низкочастотной области для антисимметричных (изгибных) и симметричных колебаний прямоугольника, оцениваемая степенью регулярности зависимости Ω от L , оказалась различной. Первые нерегулярности в поведении спектральных кривых для изгибно колеблющегося прямоугольника начинают проявляться лишь в окрестности частоты $\Omega = 1$, т. е. частоты запираания второй моды (см. рис. 62). Это свидетельствует о том, что в области частот $\Omega < 1$ нераспространяющиеся

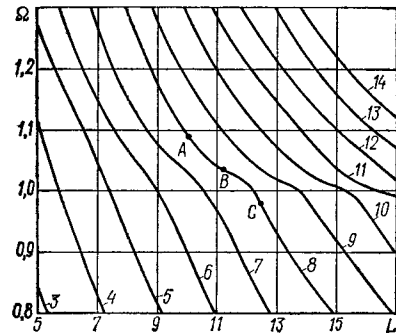


Рис. 72.

изгибные моды, соответствующие комплексным корням дисперсионного уравнения, не образуют резонансных форм. В связи с этим следует обратить внимание на существенное различие в дисперсионных кривых симметричных и антисимметричных мод — наличие чисто мнимого корня в указанном диапазоне частот (см. рис. 62).

Характер изменений в структуре спектра в области частот $\Omega = 1$ частично виден на рис. 72. При подходе к данной частоте спектральные кривые с высшими номерами обнаруживают изменение поведения, что указывает на начало образования системы плато.

Формирование плато в спектре собственных частот прямоугольника порождает в нем участки, отражающие взаимодействие между различными типами движения. Такие участки в спектре подробно рассматривались для случая симметричных мод. Соответствующие этим участкам спектра ($\Omega \approx 1$) собственные формы колебаний являются суперпозицией чисто изгибных движений в первой распространяющейся моде и толщинно-сдвиговых движений во второй. Количественно вклад различных типов движений в форму колебаний в соответствующих участках спектра значительно зависит от геометрии, т. е. от величины L . В связи с тем что в рассмотренном диапазоне изменения L плато еще не полностью сформировались, нет оснований надеяться на выделение мод колебаний с преимущественным толщинно-сдвиговым движением.

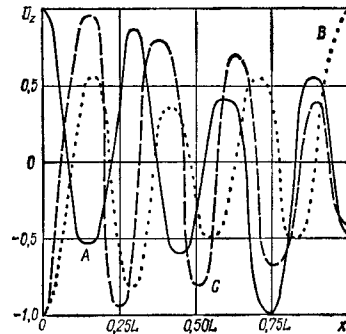


Рис. 73.

Что касается изгибных движений, соответствующих первой распространяющейся моде в слое, то именно она является доминирующей в формах колебаний на частотах, меньших и несколько больших частоты $\Omega = 1$. При переходе через частоту $\Omega = 1$ вдоль определенной спектральной кривой наблюдаются такие же изменения в характере форм колебаний, как и в симметричном случае при переходе через частоту краевого резонанса. Эти изменения показаны на рис. 73, где изображены формы колебаний в трех характерных точках A , B и C восьмой спектральной кривой (см. рис. 72). Здесь приведены нормированные величины нормальных составляющих вектора смещений поверхности. Сплошная кривая описывает форму колебаний в точке A , штриховая и пунктирная — в точках C и B . Видно, что при переходе через частоту $\Omega = 1$ в форме колебаний теряется один узел. Это дает основание считать, что часть восьмой спектральной кривой в области $\Omega > 1$ описывает связь между геометрией и собственной частотой для седьмой изгибной моды.

В целом, анализируя спектр собственных частот изгибных колебаний прямоугольника в рассмотренном диапазоне частот, следует отметить его гораздо более простую структуру по сравнению со спектром планарных колебаний. Важным здесь является также то, что структура спектра изгибных колебаний однозначно расшифровывается на основе данных о поведении распространяющихся мод в бесконечном слое. С этой точки зрения антисимметричный и симметричный случаи существенно различаются. Если все же попытаться связать эти различия с характером дисперсии указанных типов движения в слое, то прежде всего следует обратить внимание на движения с противоположными знаками групповой и фазовой скоростей. Рассматривая в симметричном случае диапазон частот $\Omega^* < \Omega < k$, мы исследовали и эффекты, связанные с указанными особенностями волнового движения. При изгибных колебаниях такого типа волновые движения также наблюдаются (см. рис. 62), однако они проявляются в области относительно больших частот ($\Omega \approx 3$). Возможно, что явления типа краевого резонанса и сгущения собственных частот в спектре для случая изгибных колебаний будут наблюдаться именно в этом районе.

УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

В предыдущей главе рассматривалось упругое тело, условно названное прямоугольником. Это могла быть бесконечная призма или прямоугольная пластина. В обоих случаях при анализе волновых движений делались определенные упрощающие предположения о характере деформирования. В этой главе объектом исследования является круговой цилиндр конечной длины. Такой объект более близок к реальным элементам колебательных систем и исследование особенностей его деформирования является более важной практической задачей.

Что касается существа методики построения общего решения задачи о вынужденных колебаниях цилиндра конечной длины, то здесь нет новых принципиальных отличий по сравнению со случаем прямоугольника. Некоторые дополнительные трудности возникают при построении решения для общего трехмерного случая деформирования. Для него в § 8 данной главы приведено полное построение общего решения.

Исследование общих решений, получаемых в рамках суперпозиции частных решений предложенного вида, в случае смешанных условий на границе цилиндра связано с существенным развитием методики определения коэффициентов бесконечных рядов. Сущность предлагаемого подхода, а также особенности деформирования цилиндров при смешанных граничных условиях рассматриваются далее в § 7.

Практичность такого объекта как цилиндр конечной длины и его широкое использование в качестве возбудителей и приемников колебаний, резонаторов, элементов механических фильтров и линий задержки [101, 242, 263] обуславливают значительно больший интерес к нему по сравнению с прямоугольником.

Как уже отмечалось при анализе волновых движений в цилиндрическом волноводе, наборы частных решений уравнений движения в цилиндрических координатах впервые были приведены в работах Похгаммера [252] и Кри [168]. В работе [168] такие решения использовались для изучения колебаний конечных цилиндров со специальными смешанными условиями на торцах $\sigma_z = u_r = 0$. При этом оказалось возможным выполнить граничные условия путем наложения на падающую волну отраженной волны такого же типа.

Задача оказалась очень простой как с физической, так и с математической точки зрения. В общем случае, когда изучение колебаний сводится к решению основных граничных задач, возникают значительные математические трудности. Последующее изложение показывает, что им сопутствует также существенное усложнение физической картины деформирования цилиндра.

Наличие эффективного решения граничных задач о вынужденных колебаниях цилиндра конечной длины при различных граничных условиях позволяет, в частности, глубоко изучить такое интересное явление, как толщинный резонанс в тонком диске. Этому посвящена значительная часть данной главы (§ 4—6).

Большой интерес представляет оценка роли граничных условий в формировании спектра и форм колебаний диска. С такой точки зрения ведется рассмотрение смешанной задачи.

Во всех этих задачах наибольший интерес представляет высокочастотная область, когда проявляются существенные особенности деформирования упругих тел конечных размеров. Именно этой области частот уделено основное внимание при проведении конкретных расчетов. Изложение в данной главе ведется на основе работ [42, 43, 46].

§ 1. ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ И ПОСТРОЕНИЕ ОБЩИХ РЕШЕНИЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

Целью настоящей главы является изучение свойств колебательной системы в виде идеально упругого цилиндра конечной длины. Под этим подразумевается отыскание спектра собственных частот и соответствующих форм колебаний. Такая физическая задача имеет строгую математическую формулировку. В связи с этим в процессе ее рассмотрения выделяются два важных этапа — разработка методов решения соответствующих граничных задач и систематизация и обобщение данных конкретных расчетов. Эти два момента в той или иной мере рассматриваются во всех публикациях, посвященных исследованию колебаний цилиндра.

Для низкочастотной области, где соответствующая длина волны существенно больше толщины (тонкая пластина) или радиуса (длинный цилиндр), полное исследование колебаний можно выполнить с использованием прикладных теорий пластин и стержней. В области высоких частот, которая является нашим основным объектом исследования, необходимо учитывать пространственный характер движения частиц цилиндра.

Сложность общей пространственной постановки задачи о высокочастотных колебаниях цилиндров и пластин стимулировала большое число работ по развитию приближенных теорий, дающих результаты в более широком частотном диапазоне, чем классические теории пластин и стержней. Первая попытка построения такой теории принадлежит Рэлею, предложившему учесть инерцию поперечных движений [123, т. 1]. В случае изгибных колебаний балок

учет инерции поворота и сдвига предложен Тимошенко [126] и развит на случай пластин в работе Уфлянда [138].

В определенной мере новый этап в построении приближенной теории пластин связан с появлением работ Миндлина [235, 238]. Основная идея Миндлина заключалась в том, чтобы при выводе уточненных уравнений движения пластин, предназначенных для применения в высокочастотной области, добиваться наилучшей аппроксимации низших дисперсионных ветвей точной трехмерной теории соотношениями приближенных теорий. Такой подход дал возможность получить широко используемые прикладные теории планарных и изгибных колебаний пластин, а также продольных колебаний длинных цилиндров [237]. На их основе проведен анализ некоторых особенностей динамического поведения пластин и стержней в высокочастотной области. Подробный обзор полученных при этом результатов содержится в работах [224, 236, 248].

Сложилось самостоятельное научное направление, связанное с разработкой корректных в том или ином смысле прикладных теорий пластин и оболочек, со своей проблематикой и большим количеством интересных результатов. Обзор соответствующих исследований содержится в работе [35]. Анализ соответствующих результатов в механике деформируемого твердого тела выходит за рамки настоящей книги.

Кроме исследований поведения круглых пластин и цилиндрических стержней на основе уточненных теорий значительное внимание уделялось разработке подходов к решению пространственных задач. В работах [154, 155] строятся приближенные решения задачи на основе метода однородных решений. Удовлетворение граничным условиям на цилиндрической поверхности проводится способом коллокации в нескольких отдельных точках. Такой же подход к использованию однородных решений применен в работах [203, 204]. Другие работы, связанные с развитием метода однородных решений, упомянуты в предыдущей главе при описании сути этого метода. Дополнительно здесь отметим лишь работу [146].

Естественно, что при решении соответствующих граничных задач широко использовались также вариационные подходы [76, 191], методы конечных разностей [222] и конечных элементов [196].

Несмотря на то что колебания конечных цилиндров изучались во многих теоретических работах, сравнительно мало сделано для получения ясного представления о том, что происходит в случаях, отличных от наиболее простых, т. е. в высокочастотной области. Основное внимание исследователей было направлено на преодоление методических трудностей, возникающих при рассмотрении столь сложных граничных задач, и на выяснение возможностей различных подходов. Особенности спектра и форм колебаний систематически не изучались. О наличии специфических особенностей динамического деформирования круглых цилиндров и пластин достаточно наглядно свидетельствуют многочисленные экспериментальные данные. Из экспериментальных работ, посвященных особенностям

толщинного и радиального резонансов в дисках и цилиндрах, отметим первые — [32, 264]. Обширные экспериментальные данные о спектре собственных частот и некоторых кинематических характеристиках форм колебаний тонких дисков содержатся в работах [260, 261].

Перечисленные эксперименты выполнены с использованием пьезокерамических дисков. Возможность легко возбуждать колебания в таких дисках позволила авторам работ [133, 194, 195] экспериментально получить спектр собственных частот дисков в довольно широком диапазоне изменения геометрических характеристик. Тщательные экспериментальные исследования спектра собственных частот длинных металлических цилиндров описаны в статьях [166, 241]. Экспериментальные данные указанных работ будут использованы нами при обсуждении результатов аналитических решений граничных задач.

Основой для анализа спектра собственных частот и форм колебаний дисков и цилиндров являются, как и в случае прямоугольника, решения ряда основных граничных задач о вынужденных колебаниях. При этом широко используется возможность раздельного рассмотрения движений с различными типами симметрии относительно срединной плоскости, а также возможность упрощения выкладок за счет вида внешних возбуждающих нагрузок.

Конкретно будут использованы следующие четыре граничные задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_r &= f(z_1), & \frac{1}{2G} \tau_{rz} &= 0, & r_1 &= a, \\ \frac{1}{2G} \sigma_z &= g(r_1), & \frac{1}{2G} \tau_{zr} &= 0, & z_1 &= \pm H, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$f(-z_1) \equiv f(z_1);$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_r &= f(z_1), & \frac{1}{2G} \tau_{rz} &= 0, & r_1 &= a, \\ \frac{1}{2G} \sigma_z &= \pm g(r_1), & \frac{1}{2G} \tau_{zr} &= 0, & z_1 &= \pm H, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$f(-z_1) \equiv -f(z_1);$$

$$\begin{aligned} u_r &= u_z = 0, & r_1 &= a, \\ \frac{1}{2G} \sigma_z &= g(r_1), & \frac{1}{2G} \tau_{zr} &= 0, & z_1 &= \pm H; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} u_r &= u_z = 0, & r_1 &= a, \\ \frac{1}{2G} \sigma_z &= \pm g(r_1), & \frac{1}{2G} \tau_{zr} &= 0, & z_1 &= \pm H. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Геометрические характеристики цилиндра и выбор системы координат показаны на рис. 74. Входящие в формулировку граничных условий функции считаются достаточно гладкими.

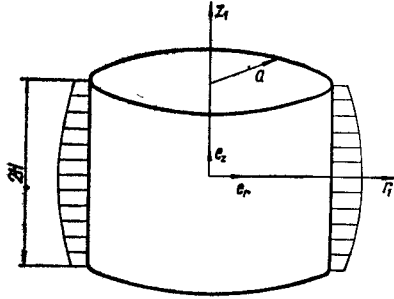


Рис. 74.

Основой для построения полных наборов частных решений в каждой из указанных граничных задач являются решения вида (9.1) главы 4. Способ использования произвола, содержащегося в этих решениях, при конструировании полных и ортогональных систем функций такой же, как и в подробно рассмотренном выше случае прямоугольника. Детали выкладок приведены в работе [37].

При записи общих решений граничных задач (1.1) — (1.4) удобно ввести в рассмотрение безразмерные (отнесенные к радиусу a) компоненты вектора смещений в безразмерные координаты $r = \frac{r_1}{a}$, $z = \frac{z_1}{a}$, $h = \frac{H}{a}$.

Конкретный выбор полных систем функций на торцах и боковой поверхности цилиндра основывается на учете характера граничной задачи с целью последующего упрощения в исследовании бесконечных систем (см. § 3 главы 5). С учетом этих соображений общие решения граничных задач (1.1) — (1.4) представляются в следующем виде:

для симметричной относительно плоскости $z = 0$ задачи (1.1)

$$\begin{aligned} u_r &= A_0 J_1(\Omega_1 r) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n I_1(q_1 r) + B_n I_1(q_2 r)] \cos \eta_n z - \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \left(C_j \frac{\lambda_j}{\rho_1} \operatorname{ch} p_1 z + D_j \frac{p_2}{\lambda_j} \operatorname{ch} p_2 z \right) J_1(\lambda_j r), \\ u_z &= C_0 \sin \Omega_1 z - \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \frac{\eta_n}{q_1} I_0(q_1 r) + B_n \frac{q_2}{\eta_n} I_0(q_2 r) \right] \sin \eta_n z + \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} (C_j \operatorname{sh} p_1 z + D_j \operatorname{sh} p_2 z) J_0(\lambda_j r), \\ \eta_n &= \frac{n\pi}{h}, \quad J_1(\lambda_j) = 0, \quad \lambda_j \neq 0; \end{aligned} \quad (1.5)$$

для антисимметричной (изгибающей) задачи (1.2)

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \frac{q_1}{\eta_n} I_1(q_1 r) + B_n \frac{\eta_n}{q_2} I_1(q_2 r) \right] \sin \eta_n z - \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \left(C_j \frac{\lambda_j}{\rho_1} \operatorname{sh} p_1 z + D_j \frac{p_2}{\lambda_j} \operatorname{sh} p_2 z \right) J_1(\lambda_j r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_z &= C_0 \cos \Omega_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n I_0(q_1 r) + B_n I_0(q_2 r)] \cos \eta_n z + \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} (C_j \operatorname{ch} p_1 z + D_j \operatorname{ch} p_2 z) J_0(\lambda_j r), \\ \eta_n &= \frac{(2n-1)\pi}{2h}, \quad J_1(\lambda_j) = 0, \quad \lambda_j \neq 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для случая симметричной смешанной задачи (1.3) компоненты вектора смещений имеют вид

$$\begin{aligned} u_r &= A_0 J_1(\Omega_1 r) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n I_1(q_1 r) + B_n I_1(q_2 r)] \cos \eta_n z - \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \left(C_j \frac{\lambda_j}{\rho_1} \operatorname{ch} p_1 z + D_j \frac{p_2}{\lambda_j} \operatorname{ch} p_2 z \right) J_1(\lambda_j r), \\ u_z &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \frac{\eta_n}{q_1} I_0(q_1 r) + B_n \frac{q_2}{\eta_n} I_0(q_2 r) \right] \sin \eta_n z + \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} (C_j \operatorname{sh} p_1 z + D_j \operatorname{sh} p_2 z) J_0(\lambda_j r), \\ \eta_n &= \frac{n\pi}{h}, \quad J_0(\lambda_j) = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

И, наконец, чисто изгибная деформация цилиндра для смешанных граничных условий (1.4) описывается следующими выражениями:

$$\begin{aligned} u_r &= -B_0 \frac{z}{h} J_1(\Omega_1 r) - C_0 \frac{\Omega_2 r}{2\Omega_1^2} \sin \Omega_2 z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \frac{q_1}{\eta_n} I_1(q_1 r) + \right. \\ &+ \left. B_n \frac{\eta_n}{q_2} I_1(q_2 r) \right] \sin \eta_n z - \sum_{j=1}^{\infty} \left(C_j \frac{\lambda_j}{\rho_1} \operatorname{sh} p_1 z + D_j \frac{p_2}{\lambda_j} \operatorname{sh} p_2 z \right) J_1(\lambda_j r), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} u_z &= A_0 J_0(\Omega_2 r) + \frac{B_0}{\Omega_1^2} [J_0(\Omega_1 r) - J_0(\Omega_2 r)] + \frac{C_0}{\Omega_1^2} (\cos \Omega_1 z - \cos \Omega_2 z) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [A_n I_0(q_1 r) + B_n I_0(q_2 r)] \cos \eta_n z + \sum_{j=1}^{\infty} (C_j \operatorname{ch} p_1 z + D_j \operatorname{ch} p_2 z) \times \\ &\times J_0(\lambda_j r), \\ \eta_n &= \frac{n\pi}{h}, \quad J_1(\lambda_j) = 0, \quad \lambda_j \neq 0. \end{aligned}$$

Во всех этих выражениях $A_0, B_0, C_0, A_n, B_n, C_j, D_j$ — произвольные постоянные, а

$$\rho_l^2 = \lambda_l^2 - \Omega_l^2, \quad q_l^2 = \eta_n^2 - \Omega_l^2, \quad \Omega_l = \frac{\omega a}{c_l}, \quad l = 1, 2. \quad (1.9)$$

Соотношения (1.5) — (1.8) позволяют рассматривать граничные задачи типа (1.1) — (1.4) и в наиболее общем случае, когда все четыре функции, входящие в граничные условия, задаются отличными от нуля. Однако в тех случаях, когда интерес представляют спектр собственных частот и формы колебаний, постановка таких более общих граничных условий нецелесообразна.

Структура выражений (1.5) и (1.6), предназначенных для удовлетворения граничных условий (1.1) и (1.2) в напряжениях, довольно ясна и совпадает с подробно обсужденной структурой решения для прямоугольника. Эти решения обладают необходимой степенью полноты, а определение произвольных постоянных в них связано с решением бесконечных систем. Как и в случае прямоугольника, для их решения пригоден описанный в § 3 главы 5 алгоритм, если соблюдается условие парности касательных напряжений в угловых точках [38].

Структура выражений (1.7) и (1.8), предназначенных для удовлетворения смешанных граничных условий, более сложна за счет некоторых дополнительных решений, стоящих за знаками сумм. При выборе этих решений учитываются два обстоятельства. С одной стороны, наборы частных решений должны быть полны с точки зрения удовлетворения граничных условий как по смещениям, так и по напряжениям на соответствующих поверхностях. С другой — появление некоторых слагаемых обуславливается возможностью построить и в этом случае эффективный алгоритм решения бесконечных систем для определения произвольных коэффициентов рядов. Более полное обсуждение выражений (1.7) и (1.8) проводится в § 7 данной главы.

§ 2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Последовательность выкладок, связанных с подчинением общих решений (1.5) и (1.6) соответственно граничным условиям (1.1) и (1.2), достаточно ясна и аналогична подробно обсужденной выше для прямоугольника. Как для симметричной, так и для антисимметричной задачи граничные условия для касательных напряжений позволяют установить простые связи между искомыми величинами. Так, для задачи (1.2) однородные условия для касательных напряжений удовлетворяются, если принять

$$\begin{aligned} A_n &= -B_n \frac{\eta_n^2 + q_2^2}{2q_1 q_2} \frac{I_1(q_2)}{I_1(q_1)}, \\ C_l &= -D_l \frac{\lambda_l^2 + p_2^2}{2\lambda_l^2} \frac{\operatorname{ch} p_2 h}{\operatorname{ch} p_1 h}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Трудности, связанные с обращением в нуль знаменателей в соотношениях (2.1), преодолеваются так же, как в случае прямоугольника (см. § 2 главы 5).

Условия для нормальных напряжений приводятся к системе двух функциональных уравнений. Обычный путь — разложение по полным и ортогональным системам функций — приводит эти уравнения к бесконечным алгебраическим системам. Для получения коэффициентов систем кроме соотношений (2.9), (2.16) главы 5 необходимо использовать разложение

$$I_0(pr) = \frac{2I_1(p)}{p} + 2pI_1(p) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j r)}{(\lambda_j^2 + p^2)J_0(\lambda_j)}, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (2.2)$$

При этом получаем следующую бесконечную систему для антисимметричного случая:

$$\begin{aligned} y_0 \sin \Omega_1 h + 2 \frac{v\Omega_1^4}{1-2v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\eta_n^2 q_1^2} &= g_0, \\ x_n P_n(q) + \frac{\Omega_1^2}{1-2v} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^2 + q_1^2} \left(\frac{2\eta_n^2}{\lambda_j^2 + q_2^2} - \frac{v\Omega_2^2}{\lambda_j^2} \right) - \\ - y_0 \frac{2v\Omega_1}{h(1-2v)} \frac{\cos \Omega_1 h}{q_1^2} &= f_n, \quad n = 1, 2, \dots \\ y_j \Delta_j(p) + \frac{\Omega_1^2}{1-2v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\eta_n^2 + p_1^2} \left(\frac{2\lambda_j^2}{\eta_n^2 + p_2^2} - \frac{v\Omega_2^2}{\eta_n^2} \right) &= g_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} y_0 &= A_0 \Omega_1, \quad y_l = \frac{D_l}{h} J_0(\lambda_l) \operatorname{ch} p_2 h, \quad x_n = (-1)^{n+1} B_n \frac{\eta_n}{q_2} I_1(q_2), \\ P_n(q) &= q_2 \frac{I_0(q_2)}{I_1(q_2)} - \frac{(\eta_n^2 + q_2^2)^2}{4\eta_n^2 q_1} \frac{I_0(q_1)}{I_1(q_1)} - \frac{\Omega_2^2}{2\eta_n^2}, \\ \Delta_l(p) &= h \left[p_2 \operatorname{th} p_2 h - \frac{(\lambda_l^2 + p_2^2)^2}{4\lambda_l^2 p_1} \operatorname{th} p_1 h \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n \sin \eta_n z; \quad g(r) = g_0 + \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j)}.$$

Для симметричного относительно плоскости $z = 0$ случая деформирования цилиндра бесконечная система приобретает вид

$$\begin{aligned} x_0 \left[\frac{1-v}{1-2v} J_0(\Omega_1) - \frac{J_1(\Omega_1)}{\Omega_1} \right] + y_0 \frac{v \sin \Omega_1 h}{(1-2v) h \Omega_1} - \\ - \frac{v\Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2v)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^2 p_1^2} = f_0, \\ x_0 \frac{2v J_1(\Omega_1)}{(1-2v) \Omega_1} + y_0 \frac{1-v}{1-2v} \cos \Omega_1 h - \frac{v\Omega_1^2 \Omega_2^2}{1-2v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\eta_n^2 q_1^2} = g_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_n P_n(q) + \frac{\Omega_1^2}{1-2\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^2 + q_1^2} \left(\frac{2\eta_n^2}{\lambda^2 + q_2^2} - \frac{\nu\Omega_2^2}{\lambda_j^2} \right) - \\
& - y_0 \frac{2\nu\Omega_1 \sin \Omega_1 h}{(1-2\nu) h q_1^2} = f_n, \quad n = 1, 2, \dots \\
& y_j \Delta_j(p) + \frac{\Omega_1^2}{1-2\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\eta_n^2 + p_1^2} \left(\frac{2\lambda_j^2}{\eta_n^2 + p_2^2} - \frac{\nu\Omega_2^2}{\eta_n^2} \right) - \\
& - x_0 \frac{2\nu\Omega_1 J_1(\Omega_1)}{(1-2\nu) p_1^2} = g_j, \quad j = 1, 2, \dots
\end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned}
x_0 &= A_0 \Omega_1, \quad x_n = (-1)^n B_n I_1(q_2), \\
y_0 &= C_0 \Omega_1, \quad y_j = D_j \frac{\operatorname{sh} p_2 h}{h} J_0(\lambda_j), \\
P_n(q) &= q_2 \frac{I_0(q_2)}{I_1(q_2)} - \frac{(\eta_n^2 + q_2^2)^2}{4\eta_n^2 q_1} \frac{I_0(q_1)}{I_1(q_1)} - \frac{\Omega_2^2}{2\eta_n^2}, \\
\Delta_j(p) &= h \left[p_2 \operatorname{cth} p_2 h - \frac{(\lambda_j^2 + p_2^2)^2}{4\lambda_j^2 p_1} \operatorname{cth} p_1 h \right],
\end{aligned}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n \cos \eta_n z, \quad g(r) = g_0 + \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j)}. \quad (2.6)$$

Системы уравнений (2.3) и (2.5) по форме аналогичны системам (2.10) и (2.17) главы 5 для прямоугольника. Более важно то, что из исследования поведения неизвестных в них следует [38, 49], что и в случае цилиндра асимптотические свойства искомых величин описываются равенствами

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = - \lim_{j \rightarrow \infty} y_j = a_0, \quad a_0 = \text{const.} \quad (2.7)$$

Равенство (2.7) справедливо для обоих типов симметрии деформированного состояния.

Алгоритм использования этого равенства при решении бесконечных систем подробно изложен в § 3 главы 5. Для вычисления напряжений на граничных поверхностях цилиндра здесь также необходимо использовать известные приемы улучшения сходимости рядов. При этом используются значения следующих сумм [33]:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\bar{\lambda}_j(h-z)} &= \frac{e^{-\frac{5}{4}\pi(h-z)}}{1 - e^{-\pi(h-z)}}, \\
\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\lambda}_j(h-z)}}{\bar{\lambda}_j} &= \frac{1}{\pi} \ln \operatorname{cth} \frac{\pi(h-z)}{8} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e^{\frac{\pi(h-z)}{4}} - \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi(h-z)}{4}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}_j} \cos \left(\bar{\lambda}_j r - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi(1-r)}{4} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi(1-r)}{8} \right], \\
\bar{\lambda}_j &= \pi \left(j + \frac{1}{4} \right), \\
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \eta_n z}{\eta_n} &= \frac{h}{\pi} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{z}{h} \right), \quad \eta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2h}, \\
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \eta_n z}{\eta_n} &= -\frac{h}{\pi} \ln \left(2 \cos \frac{\pi z}{2h} \right), \quad \eta_n = \frac{n\pi}{h}.
\end{aligned} \quad (2.8)$$

Исходя из равенства

$$\lim_{z \rightarrow h} \sum_{j=1}^{\infty} (h-z) e^{-\bar{\lambda}_j(h-z)} = \frac{1}{\pi}, \quad (2.9)$$

можно заключить, что метод простой редукции в случае цилиндра также приводит к неустранимой путем повышения порядка конечной системы погрешности при вычислении нормальных напряжений σ_r и σ_z в угловых точках. Интересно, что ряд типа (2.9) не входит в выражение для окружных напряжений σ_θ и, следовательно, сделанное замечание о сходимости к этому незадаваемому в граничных условиях компоненту тензора напряжений не относится. Что касается порядка конечной системы, формируемой с использованием (2.7) для бесконечных систем (2.3) и (2.5) и соотношения между количеством неизвестных x_n и y_j , то здесь справедливы рекомендации, данные для прямоугольника.

При вычислениях в области высоких частот для четкого выделения форм колебаний, соответствующих близко расположенным собственным частотам, необходимо использовать различные виды функций $f(z)$ и $g(r)$. Общее правило — приложенная нагрузка должна хорошо согласовываться с возбуждаемой формой колебаний — в каждом конкретном случае довольно легко реализуется, а следование этому правилу необходимо для четкого выделения форм колебаний.

§ 3. КРАЕВОЙ РЕЗОНАНС В КОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ

Как специфическое, свойственное только упругим телам явление краевого резонанса описано в § 5 главы 5 применительно к прямоугольнику. Поскольку тонкая круглая пластина и длинный цилиндр часто используются в качестве элементов колебательных систем, то применительно к ним явление краевого резонанса должно быть исследовано по крайней мере в количественном аспекте. Кроме того, следует иметь в виду, что при рассмотрении краевого резонанса в цилиндре можно проследить за влиянием кривизны поверхности. Определенное внимание в этом параграфе уделяется также

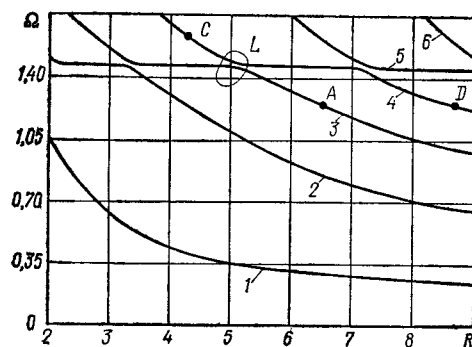


Рис. 75.

изучению влияния коэффициента Пуассона на структуру спектра в области частоты краевого резонанса. Как уже отмечалось, первое экспериментальное наблюдение краевого резонанса в тонких пьезокерамических дисках описано в работе [264]. В 1957 г. аналогичная по свойствам мода была описана в работе [241] в связи с экспериментальным исследованием поведения длинных стальных цилиндров. Автор этой работы наблюдал резонансные колебания на формах, характеризующихся относительно большими значениями радиальных перемещений вблизи угловых окружностей. Собственные частоты таких форм практически не зависели от длины цилиндра.

В последующем появилось значительное число экспериментальных и теоретических работ, посвященных изучению краевого резонанса в сплошном и полом цилиндрах конечной длины. Кроме отмеченных в § 5 главы 5 работ, относящихся к исследованию краевого резонанса в тонких дисках, укажем еще работу [273]. В ней на основе асимптотического анализа частотного уравнения, полученного с использованием теории Миндлина, приводится трансцендентное уравнение для определения зависимости частоты краевого резонанса Ω_e от радиуса диска. Характерно, что из полученных результатов следует возможность существования краевой моды лишь при определенных фиксированных значениях радиуса. Такой же подход использован автором и при изучении краевой моды в полом цилиндра [274, 275]. Далее будет показана связь краевой моды с нераспространяющимися волнами в слое и возможность ее существования при произвольном значении $R = \frac{a}{H}$. Теоретическому и экспериментальному анализу краевого резонанса в длинном сплошном цилиндре посвящены работы [192, 218, 221, 259], в которых рассмотрен широкий диапазон изменения геометрических параметров цилиндра.

В работе [226] указывается на возможность использования явления краевого резонанса для точного определения коэффициента Пуассона материала при известной скорости сдвиговых волн. Недостатки предлагаемой методики будут видны при анализе спектра собственных частот цилиндра для разных ν . Второй способ практического использования краевого резонанса авторы работы [226] видят в возможности быстрого образования усталостных трещин в зоне торцов цилиндра.

Структура спектра собственных частот диска в области $\Omega <$

$\Omega^* \left(\Omega = \frac{2\omega H}{\pi c_2}, R = \frac{a}{H} \right)$ для $\nu = 0,31$ представлена на рис. 75 (кривые 1—6). Очевидна полная аналогия со спектром для прямоугольника (см. рис. 63). Практически горизонтальные плато соответствуют краевому резонансу. Приведенные вычисления [43] в диапазоне $3 \leq R \leq 10$ показывают, что центры этих плато лежат в интервале $1,47 < \Omega < 1,48$. По экспериментальным данным [264], для частоты краевого резонанса имеем значение $\Omega_e = 1,47$. Попытка уточнить в расчете значение Ω_e привела к тому, что была обнаружена зависимость этой величины от относительного радиуса диска. При этом получены следующие границы для частоты краевого резонанса в центрах плато:

$$R = 4,25, 1,471 < \Omega_e < 1,472; \quad R = 6,30, 1,472 < \Omega_e < 1,473;$$

$$R = 8,30, 1,474 < \Omega_e < 1,475; \quad R = 10,45, 1,476 < \Omega_e < 1,477;$$

$$R = 12,60, 1,478 < \Omega_e < 1,479; \quad R = 21,00, 1,480 < \Omega_e < 1,481.$$

Здесь видна явная тенденция к увеличению частоты краевого резонанса с ростом R . В связи с этим следует указать, что частота краевого резонанса для бесконечной прямоугольной призмы, находящейся в условиях плоской деформации и с отношением сторон, равным R , заключена в интервале $1,483 < \Omega_e < 1,484$. Отметим, что тенденция к повышению частоты краевого резонанса при увеличении относительного радиуса диска наблюдалась экспериментально [195] на дисках из существенно анизотропного материала.

Перейдем к анализу форм колебаний в окрестности частоты краевого резонанса. На рис. 76 показано распределение по торцу $z = h$ осевого смещения u_z в диске с величиной $R = 6,25$ при $\Omega = 1,47$. Имеем типичную картину, характерную для краевой моды.

Особый интерес в спектре собственных частот диска представляют зоны, одна из которых выделена на рис. 75 кривой L . Вследствие связи между разными типами волновых движений в диске здесь наблюдается повышенная чувствительность мод колебаний к изменению геометрии. Поскольку эти зоны лежат в области частот $\Omega < \Omega^*$, то в данном случае речь идет о связи между первой распространяющейся модой в слое и системой нераспространяющихся мод.

При перемещении от центра плато к его краям характер движения в соответствующих формах колебаний меняется. Области относительно интенсивных движений уже не локализируются вблизи края диска. Так, для диска с $R = 5$ (край плато) третья и четвертая

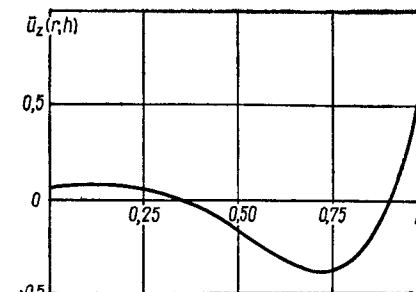


Рис. 76.

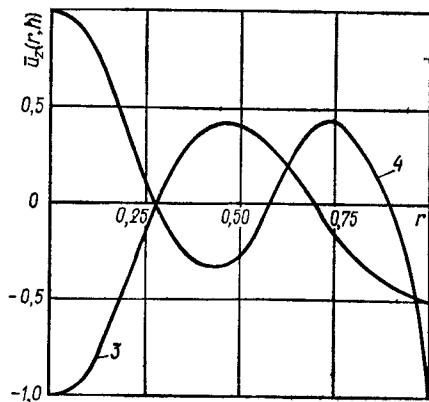


Рис. 77.

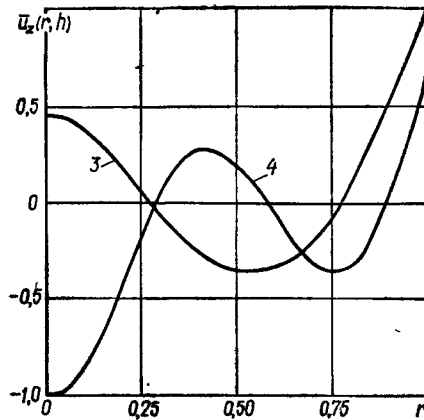


Рис. 78.

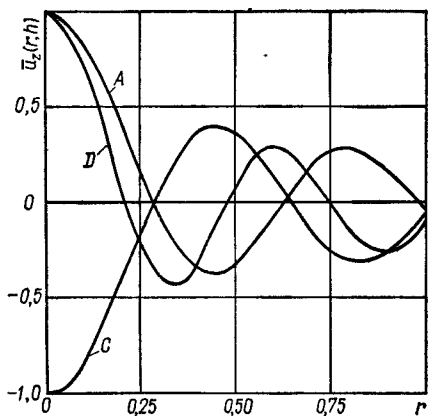


Рис. 79.

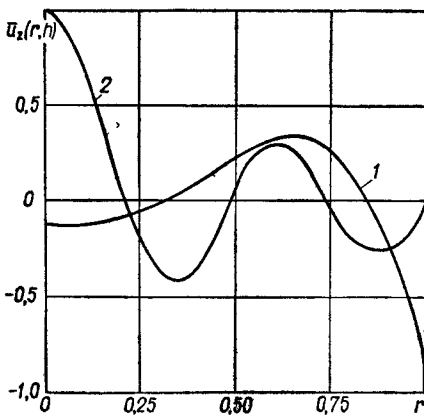


Рис. 80.

собственные частоты заключены в интервалах $1,465 < \Omega^{(3)} < 1,467$; $1,483 < \Omega^{(4)} < 1,485$. На рис. 77 показано распределение осевого смещения u_z по торцу $z = h$ на частотах $\Omega = 1,465$ (кривая 3) и $\Omega = 1,483$ (кривая 4). Видно, что ни одна из этих двух форм колебаний не обладает специфическими особенностями краевой моды. На рис. 78 представлены аналогичные кривые в случае $R = 4,76$ для частот $\Omega = 1,475$ (кривая 3) и $\Omega = 1,509$ (кривая 4). Третья и четвертая собственные частоты такого диска заключены в интервалах $1,473 < \Omega^{(3)} < 1,475$; $1,509 < \Omega^{(4)} < 1,511$. Из этих данных следует, что диск обладает ярко выраженной краевой формой колебаний лишь в тех случаях, когда собственная частота лежит вдали от краев плато.

Обычно при рассмотрении спектров собственных частот каждую спектральную кривую связывают с определенной формой колеба-

ний. Такой подход является естественным в области частот $\Omega < \Omega_e$, однако на область частот $\Omega > \Omega_e$ его распространять не следует. Дело в том, что при движении вдоль определенной спектральной кривой после прохождения частоты краевого резонанса мы, по сути, следим за изменением собственной частоты разных мод. Подтверждением этого является, в частности, потеря узла в собственной форме после частоты $\Omega = \Omega_e$ при движении вдоль одной кривой. Такая ситуация отражена на рис. 79, где представлено распределение u_z в модах колебаний для точек спектра C и D (см. рис. 75). Отметим, что формы колебаний в точках A и C практически совпадают. Именно это свойство указывает на то, что, говоря, например, о четвертой собственной форме планарных колебаний диска в области частот $\Omega > \Omega_e$, следует иметь в виду спектральную кривую, состоящую из двух не соединяющихся участков, отмеченных на рис. 75 точками C и A .

Как и в случае прямоугольника, в диске существуют специфические формы колебаний, связанные с распространением сдвиговых SV-волн. Эти моды колебаний называют модами Лэмба [208], хотя о них говорилось еще в работе Кри [168].

Выражения для смещений

$$u_r = -BJ_1(\beta r) \cos \beta z, \quad u_z = BJ_0(\beta r) \sin \beta z \quad (3.1)$$

являются решениями уравнений Ламе и удовлетворяют нулевым граничным условиям на всей поверхности диска, если справедливо равенство

$$\beta J_0(\beta) = J_1(\beta), \quad \Omega_L = (2l - 1) \sqrt{2}, \quad R = \frac{2\beta}{\pi(2l - 1)}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Следовательно, частоты $\Omega_L = (2l - 1) \sqrt{2}$ являются собственными для дисков с определенными значениями R (l, m), где m — номер корня трансцендентного уравнения для β . Наличие этих мод колебаний, как и в случае прямоугольника, можно использовать для оценки точности алгоритмов расчета собственных частот и форм колебаний. Важно и то, что значение собственных частот мод Кри — Лэмба не зависит от коэффициента Пуассона ν , и это можно использовать следующим образом.

Вычисление частот краевого резонанса для материалов с разными коэффициентами ν показывают сильную зависимость значений Ω_e и расстояния между отдельными плато в спектре от величины коэффициента Пуассона. При этом значение Ω_e для разных ν может быть как больше, так и меньше $\Omega = \sqrt{2}$, т. е. больше или меньше первой частоты мод Кри — Лэмба. Учитывая, что последняя не зависит от ν , можно ожидать, что при некотором значении ν^* частота Ω_e совпадает с частотой $\Omega = \sqrt{2}$ и плато двух соседних мод должны соприкоснуться. Вследствие зависимости Ω_e от R при изменении ν можно добиться лишь слияния двух соседних плато. Например,

расчеты показывают, что для диска с величиной $R(1,3) = 5,434$ частота краевого резонанса при $\nu = 0,234$ заключена в интервале $1,4130 < \Omega_e < 1,4135$, а при $\nu = 0,236$ — в интервале $1,4148 < \Omega_e < 1,4153$. Отсюда вытекает, что при некотором промежуточном значении ν^* частота $\Omega = \sqrt{2}$ является кратной и ей соответствуют две различные моды колебаний — краевая мода и мода Кри — Лэмба.

Важной особенностью форм колебаний в этом случае является то, что краевая мода полностью сохраняет свои свойства, несмотря на то что собственная частота является краем плато. На рис. 80 для диска с величинами $R = 5,434$, $\nu = 0,235$ и $\Omega = 1,414$ показано (кривая 1) распределение осевых смещений u_z по торцу цилиндра при возбуждении колебаний равномерной по всей поверхности нагрузкой. Моде Кри — Лэмба такой нагрузкой не возбуждается. Кривая 2 на рис. 80 характеризует распределение осевых смещений в моде Кри — Лэмба.

Говоря о краевом резонансе, мы постоянно имеем в виду тип движения, симметричного относительно срединной плоскости диска (планарные движения). Используемый для расчетов метод в одинаковой мере пригоден и для исследования антисимметричных (изгибных) движений [40, 41, 49]. Наиболее интересным выводом из анализа расчетных данных в этой области частот, где имеем только одну распространяющуюся моду, является вывод об отсутствии краевого резонанса, связанного с изгибной деформацией пластины. Обращая внимание на это различие в структуре спектра конечного тела для двух типов симметрии движения, естественно обратить внимание и на различие в характере дисперсионных кривых для симметричных и антисимметричных волн в бесконечном слое. Существенное различие между указанными случаями проявляется в том, что во втором из них в рассматриваемом диапазоне частот существует чисто мнимый корень дисперсионного уравнения. Это замечание следует рассматривать не как объяснение принципиального различия в динамическом поведении диска при растяжении и изгибе, а лишь как указание на возможные причины такого различия.

Описанное выше явление краевого резонанса для тонкого диска так же четко проявляется и при анализе форм колебаний длинных цилиндров. При этом краевая мода характеризуется сильно выраженной локализацией области интенсивных движений вблизи торцов. В спектре собственных частот цилиндра (зависимости Ω_2 от h) таким модам соответствуют плато, подобные указанным на рис. 75. Важно отметить, что в этом случае краевой резонанс в одинаковой мере проявляется как для симметричных, так и для антисимметричных относительно плоскости $z = 0$ движений. Это естественно, поскольку оба типа деформации связаны с волновыми движениями, описываемыми одним дисперсионным уравнением Похгаммера — Кри (9.3) главы 4.

Важной особенностью краевой моды для длинного цилиндра является также то, что ее собственная частота $\Omega_2^{(e)}$, вычисленная для

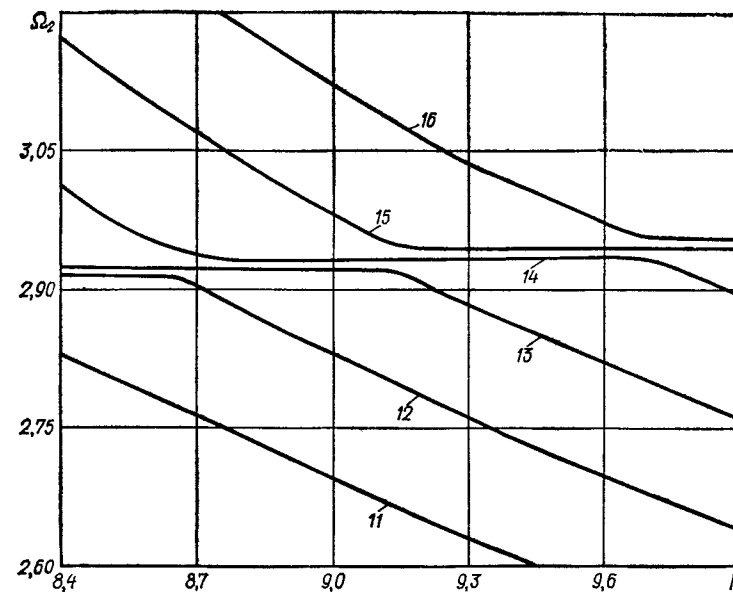


Рис. 81.

центров плато, не зависит от длины цилиндра $2H$ и не чувствительна к типу симметрии. В связи с этим спектр собственных частот длинного цилиндра имеет вид, показанный на рис. 81, где кривые 11—16 пронумерованы в порядке возрастания соответствующей собственной частоты в низкочастотной области. Кривым с нечетными номерами соответствуют симметричные относительно плоскости $z = 0$ формы колебаний.

Интересная особенность спектра собственных частот длинного цилиндра состоит в том, что центры каждого плато краевой моды симметричного типа движений соответствуют значениям h , лежащим на краю плато для антисимметричных движений. Именно это дает возможность качественно проанализировать данные обширного и тщательно выполненного эксперимента на длинных цилиндрах из различных материалов [166].

При анализе экспериментальных данных для диапазона частот, включающего частоту резонанса $\Omega_2^{(e)}$, в зависимости от геометрии цилиндра, можно встретить следующие две типичные ситуации. Если геометрия цилиндра такая, что соответствующее значение h (например, $h \approx 8,9$) находится вдали от края плато, то в спектре частот будут наблюдаться «дублеты», т. е. две очень близкие друг к другу частоты, соответствующие краевому резонансу. Если значение h соответствует краям плато (на рис. 81 $h \approx 9,2$), то в спектре собственных частот будут наблюдаться «триплеты».

Что касается форм колебаний, то в случае «дублетов» обе формы имеют характерные для краевого резонанса особенности. В случае

же «триплетов» лишь одна из форм колебаний, а именно соответствующая центру плато, является характерной для краевого резонанса. Две другие не обладают выраженной локализацией области интенсивных движений вблизи угловых точек цилиндра.

В такую схему почти полностью качественно вписываются экспериментальные данные работы [166, табл. 2—4] в диапазоне частот, существенно не превышающих частоту $\Omega_2^{(e)}$. Исключение составляет найденный в эксперименте «дублет» при $\Omega_2 = 2,556$, который нельзя предсказать в рамках модели идеально упругого тела строго круговой цилиндрической формы.

Для полноты иллюстрации возможностей как экспериментальной техники, так и предложенного теоретического способа определения собственных частот проведем количественное сравнение расчетных данных с данными табл. 2 работы [166]. Для стального стержня ($\nu = 0,29$) с параметрами $2H = 8,885$ см, $2a = 0,953$ см, $h = 9,323$ существует «триплет» со следующими значениями частоты: $\Omega_2^{(13)} = 2,880$ (2,881), $\Omega_2^{(14)} = 2,921$ (2,920), $\Omega_2^{(15)} = 2,935$ (2,931). Здесь в скобках приведены экспериментальные данные.

Отметим, что авторы работы [166] для объяснения полученных результатов использовали аппроксимацию волнового поля в конечном цилиндре первой распространяющейся модой бесконечного цилиндра. Такой подход позволяет довольно точно определить собственные частоты не только ниже, но и несколько выше (вплоть до появления второй распространяющейся моды в бесконечном цилиндре) частоты краевого резонанса, однако наличие плато в спектре предсказать нельзя.

Отметим, что проведенное в области частот до появления второй распространяющейся моды сопоставление расчетных и экспериментальных данных для других рассмотренных в работе [166] случаев обнаруживает столь же хорошее совпадение результатов. Вместе с тем сопоставление в области частот, где имеется уже несколько распространяющихся мод, требует прежде всего выполнения большой работы по отработке методики получения расчетных данных и их систематизации с учетом сложностей, связанных со сгущением спектра частот в окрестности частоты радиального или продольно-сдвигового резонанса бесконечного цилиндра, определяемых низшим из первых корней уравнений (9.9) и (9.11) главы 4.

Естественно, что аналогичные особенности в спектре будут проявляться и вблизи частоты чисто толщинного резонанса в тонком диске. Перейдем к исследованию структуры спектра и особенностей форм колебаний в этой области частот.

§ 4. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТОЛЩИННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИСКА

Изученное в предыдущем параграфе явление краевого резонанса как возбуждение особой, свойственной только упругому телу формы колебаний наблюдается в той области частот, где су-

ществует только одна распространяющаяся мода. Следующий этап в исследовании особенностей динамики поведения конечных упругих тел в высокочастотной области естественно связан с переходом в тот диапазон частот, где имеется уже не менее двух распространяющихся мод бесконечного слоя или цилиндра.

В этом параграфе речь идет об исследовании особенностей деформирования тонкого диска в области частот $\Omega_e \leq \Omega \leq \Omega_i$, где частота $\Omega_i = \sqrt{2 \frac{1-\nu}{1-2\nu}}$ определяется как первая частота последовательности толщинных резонансов, указанных в § 6 главы 4. Величина Ω_i зависит от ν , и при $\nu > \frac{1}{3}$ она становится больше частоты толщинно-сдвигового резонанса $\Omega_s = 2$. Перемена местами частот Ω_i и Ω_s приводит, по мнению авторов работ [194, 195], к существенному изменению в структуре спектра собственных частот диска. Этот интересный вопрос требует дополнительных исследований. Здесь мы ограничимся рассмотрением случая $\nu < \frac{1}{3}$.

Характерным признаком кинематики толщинной моды в бесконечном слое является наличие лишь нормальных к срединной поверхности составляющих u_z вектора перемещений частиц среды. Такая кинематика частиц представлялась [264] очень важной для работы механических резонаторов.

Механические резонаторы в виде тонких круглых дисков часто используются при возбуждении осесимметричных колебаний в окрестности основной частоты толщинного резонанса. Уже первые опыты применения таких резонаторов показали необоснованность надежд на то, что в случае малой относительной толщины главная толщинная форма колебаний будет иметь близкое к поршневому движение плоских поверхностей диска [75, 264]. Кроме усложнения форм колебаний, значительные трудности встретились при объяснении структуры спектра собственных частот. Как отмечается в работе [121, с. 164], «... хотя при конструировании пьезоэлектрических резонаторов возникает много сложностей, ни одна из них не оказывается столь трудно преодолимой, как определение многочисленных мод колебаний в кристаллических пластинах. Первые опыты практического применения высокочастотных резонаторов с колебаниями по толщине были почти безуспешными вследствие казавшегося бесконечным ряда нежелательных сигналов вблизи основной моды колебаний». Наличие цилиндрических граничных поверхностей, особенности волноводного распространения в упругом слое, специфика отражения упругих волн от свободной границы обуславливают появление большого числа резонансов, сосредоточенных вблизи основного толщинного. Отмеченные обстоятельства явились стимулом к проведению многочисленных исследований, целью которых было получение данных для лучшего понимания природы толщинного резонанса в диске.

С практической точки зрения изучение особенностей динамического поведения резонаторов имеет целью выработать рекомендации

по подавлению нежелательных колебаний в окрестности частоты толщинного резонанса и достичь максимальной эффективности возбуждения колебаний на этой частоте. Решение данной задачи, конечно, невозможно без знания спектра и форм колебаний. В определенной мере ситуация здесь усложняется тем, что практическая реализация устройств и подавляющее число экспериментальных работ связаны с использованием анизотропных материалов с достаточно сильной связью электрических и механических полей. Однако сравнение данных расчетов и экспериментов [157, 191, 196] свидетельствует о том, что по крайней мере для материалов типа пьезокерамики пренебрежение в теории анизотропией и связанностью не является тем допущением, которое делает несопоставимыми результаты теоретических и экспериментальных исследований структуры спектра собственных частот и особенностей форм колебаний.

Основная цель теоретических исследований заключается в том, чтобы на основе сравнительного анализа результатов расчета в широких диапазонах изменения геометрических и физических характеристик изотропного упругого диска понять явление толщинного резонанса в упругой пластине конечных размеров.

Первые прямые наблюдения рельефа плоских поверхностей осесимметрично колеблющегося диска [32, 142] в области высоких частот обнаружили необычные типы форм колебаний и необычную зависимость соответствующих им собственных частот от геометрии диска. Смысл этой необычности в следующем.

1. Наряду с формами колебаний, которые можно интерпретировать как суперпозицию движений, соответствующих только распространяющимся модам бесконечного упругого слоя, обнаружились формы колебаний, которые такой суперпозицией выразить нельзя.

2. Независимость собственных частот диска от радиуса наблюдается и для частот, существенно меньших, чем частота чисто толщинного резонанса.

Частично указанные особенности связаны с явлением краевого резонанса. Однако такие существенные особенности в спектре и формах колебаний наблюдаются также непосредственно в окрестности толщинного резонанса. Поэтому без систематизации данных о спектре и формах колебаний пластин во всем диапазоне частот, включая Ω_t , явление краевого резонанса сохраняет некоторые элементы неясности и исключительности.

Область частот вблизи частоты толщинного резонанса до сих пор остается мало изученной. Известно довольно большое число экспериментальных данных [194, 195, 261], для объяснения которых используется теория «второго порядка» [179]. Отметим, что результаты, полученные с использованием этой теории, не систематизированы и не проанализированы в сколько-нибудь полной мере, поэтому нельзя говорить хотя бы о качественном соответствии теоретических и экспериментальных данных. Наличие практически точного решения задачи об осесимметричных колебаниях цилиндра

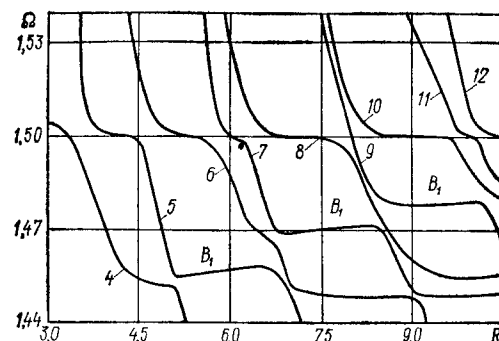


Рис. 82.

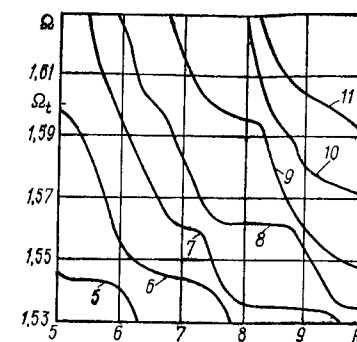


Рис. 83.

конечной длины позволяет провести подробный анализ динамического поведения диска вблизи толщинного резонанса.

Не останавливаясь на подробностях вычислений, порядок которых описан выше, перейдем к анализу и обобщению их результатов. На рис. 82 и 83 представлены частотные спектры круглых дисков для $3 \leq R \leq 10,5$ ($R = \frac{a}{H}$) в окрестности частоты толщинного резонанса. Рис. 82 (кривые 4—12) соответствует случаю $\nu = 0,10$ ($\Omega_t = 1,500$), а рис. 83 (кривые 5—11) — случаю $\nu = 0,18$ ($\Omega_t = 1,600$). Сравнение этих двух случаев раскрывает такие различия, на которые следует обратить внимание. Если для $\nu = 0,10$ существуют четко выраженные плато на частоте Ω_t , то для $\nu = 0,18$ в рассмотренном диапазоне R таких плато нет. Структура спектра для последнего случая в окрестности частоты Ω_t становится подобной структуре спектра для случая $\nu = 0,10$ лишь при $R > 15$.

Отмеченное различие раскрывает роль коэффициента Пуассона как одного из показателей связи толщинных и планарных колебаний. Если в случае $\nu = 0,10$ связь различных типов движений оказывается настолько слабой, что уже начиная с $R = 4$ появляются достаточно выраженные толщинные плато, то при $\nu = 0,18$ такие плато не появляются даже при $R \approx 10$.

Общим для обоих рассматриваемых случаев является наличие дополнительных плато на частотах, близких к Ω_t , но меньших этой частоты. Предполагают [194, 195], что границами полосы частот, в которой имеет место «террасоподобный» спектр, являются Ω^* и Ω_t . Однако наличие в спектре диска плато, связанного с краевой модой, свидетельствует о том, что это утверждение не является очевидным.

На рис. 82 и 83 видна тенденция к увеличению количества плато в указанном частотном диапазоне при увеличении R . Именно резонансы, соответствующие этим дополнительным плато, образуют систему «паразитных» резонансов в окрестности толщинного [121]. Один из возможных способов уменьшения количества таких резонансов связан с уменьшением величины R , однако минимальное

значение R , при котором четко выражены резонансы на частоте Ω_1 , возрастает с ростом ν .

Практически важным свойством толщинного резонанса является независимость собственной частоты от радиуса и простота ее определения по свойствам материала и толщине. Если ориентироваться только на первое свойство, то из рис. 82 и 83 видно, что существует целый ряд частот (их количество увеличивается с ростом R), которые обладают данным свойством. При этом нет никаких оснований для того, чтобы отдать предпочтение частотам, остающимся практически постоянными при изменении R . Рассмотрение экспериментальных данных [195, 264] обнаруживает существенное различие в эффективности возбуждения колебаний пьезокерамических дисков на основном толщинном и дополнительных плато при подводе электрической энергии через сплошные электроды. Однако знание форм колебаний часто позволяет так подобрать конфигурацию разрезных электродов, чтобы значительно повысить эффективный коэффициент электромеханической связи относительно слабых (при сплошных электродах) мод [39]. Вопрос об оптимальной конфигурации электродов тесно связан с анализом форм колебаний диска. Такой анализ приводится далее, а здесь мы обратимся к выделению и исследованию тех составляющих в движении частиц диска, взаимодействие между которыми обуславливает сложную структуру его частотного спектра.

§ 5. ТОЛЩИННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИСКА С НУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА

Из сравнения данных, показанных на рис. 82 и 83, следует, что связь между отдельными типами движений ослабевает с уменьшением ν . В связи с этим целесообразно рассмотреть предельный случай $\nu = 0$. При этом частично устраняется связь между радиальными и осевыми движениями частиц, но сохраняются все особенности в динамическом деформировании упругих тел, связанные с наличием двух типов волн. Важно, что в данном случае разделение составляющих общего движения можно провести аналитически при подчинении решения (1.5) граничным условиям (1.1).

Решение граничной задачи (1.1) можно составить из трех независимо определяемых частей:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= \frac{x_0}{\Omega_1} J_1(\Omega_1 r), \quad u_z^{(1)} \equiv 0, \\ u_r^{(2)} &\equiv 0, \quad u_z^{(2)} = \frac{y_0}{\Omega_1} \sin \Omega_1 z; \\ u_r^{(3)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \left[\frac{I_1(q_2 r)}{I_1(q_2)} - \frac{q_1^2}{\eta_n^2} \frac{I_1(q_1 r)}{I_1(q_1)} \right] \cos \eta_n z + \\ &+ h \sum_{j=1}^{\infty} y_j \left(p_1 \frac{\operatorname{ch} p_1 z}{\operatorname{sh} p_1 h} - p_2 \frac{\operatorname{ch} p_2 z}{\operatorname{sh} p_2 h} \right) \frac{J_1(\lambda_j r)}{\lambda_j J_0(\lambda_j)}; \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} u_z^{(q)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x_n}{\eta_n} \left[q_1 \frac{I_0(q_1 r)}{I_1(q_1)} - q_2 \frac{I_0(q_2 r)}{I_1(q_2)} \right] \sin \eta_n z + \\ &+ h \sum_{j=1}^{\infty} y_j \left(\frac{\operatorname{sh} p_2 z}{\operatorname{sh} p_2 h} - \frac{p_1^2}{\lambda_j^2} \frac{\operatorname{sh} p_1 z}{\operatorname{sh} p_1 h} \right) \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j)}. \end{aligned}$$

Независимость этих решений понимается в том смысле, что при произвольном значении частоты вынужденных усилий постоянные $x_0, y_0, x_n, y_j, (n, j = 1, 2, \dots)$ определяются из несвязанных между собой соотношений. Эти соотношения вытекают из общей системы (2.5) при $\nu = 0$:

$$\begin{aligned} x_0 \left[J_0(\Omega_1) - \frac{J_1(\Omega_1)}{\Omega_1} \right] &= f_0, \quad y_0 \cos \Omega_1 h = g_0, \\ x_n P_n(q) + 2\Omega_1^2 \eta_n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{(\lambda_j^2 + q_1^2)(\lambda_j^2 + q_2^2)} &= f_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (5.2) \\ y_j \Delta_j(p) + 2\Omega_1^2 \lambda_j^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(\eta_n^2 + p_1^2)(\eta_n^2 + p_2^2)} &= g_j \quad (j = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Разделение радиального и осевого движений в диске представляется естественным при $\nu = 0$, о чем свидетельствуют первые два решения уравнений движения в (5.1). Однако в общем случае произвольного по форме силового возбуждения проявляется связь между двумя указанными типами движений за счет способности упругого тела сопротивляться сдвигу. Формальным отражением этого свойства является связанность соотношений для определения постоянных x_n и y_j в (5.2).

В соответствии со структурой соотношений (5.2) на три независимые части распадается и спектр собственных частот диска. Равенство нулю коэффициента при y_0 в (5.2) определяет условие для определения частот основного толщинного резонанса и его обертонов:

$$\Omega_l^{(t)} = (2l - 1) \sqrt{2}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

Соответствующие типы движений будем далее называть T -модами. На рис. 84 эта часть спектра представлена только основной частотой $\Omega_t = \sqrt{2}$.

Из условия несуществования конечного решения для x_0 находим собственные частоты радиальных (планарных) колебаний диска

$$\Omega_m^{(r)} = \frac{2\beta_m \sqrt{2}}{\pi R}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

где β_m — m -й корень уравнения

$$\beta J_0(\beta) = J_1(\beta). \quad (5.5)$$

Соответствующие типы движений принято называть R -модами. Этой части спектра на рис. 84 соответствует система гиперболических

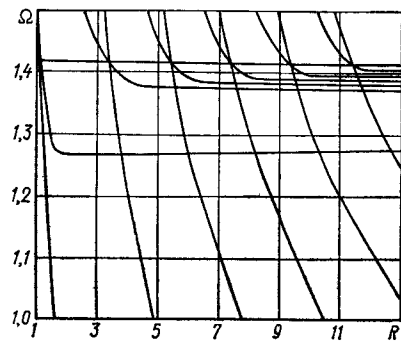


Рис. 84.

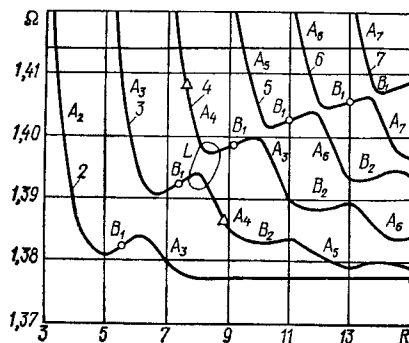


Рис. 85.

Гиперболы пересекаются с системой горизонтальных прямых, соответствующих толщинному резонансу, в точках с координатами

$$R(l, m) = \frac{2\beta_m}{(2l-1)\pi}, \quad \Omega^{(l)} = (2l-1)\sqrt{2}. \quad (5.6)$$

Третье семейство спектральных кривых получаем, анализируя поведение неизвестных в неоднородной бесконечной системе (5.2) при различных значениях частоты. Очень важным является то, что при $\Omega = \Omega^{(l)}$ и $R = R(l, m)$ определитель бесконечной системы обращается в нуль, и, следовательно, имеем случай трехкратного выражения собственной частоты $\Omega = \sqrt{2}$ для соответствующих значений R . Собственные формы дисков для этой частоты образуются линейной комбинацией следующих трех типов движений:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &\equiv 0, \quad u_z^{(1)} = A \sin \beta_m z; \\ u_r^{(2)} &= B J_1(\beta_m r), \quad u_z^{(2)} \equiv 0; \\ u_r^{(3)} &= -C J_1(\beta_m r) \cos \beta_m z, \quad u_z^{(3)} = C J_0(\beta_m r) \sin \beta_m z. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Количественные соотношения между этими типами движений определяются начальными условиями или характером вынуждающей нагрузки. Так, при возбуждении колебаний равномерным нормальным давлением третий тип колебаний (мода Кри — Лэмба) не возбуждается.

Наличие вырожденных мод в колебательных системах в общем случае значительно усложняет задачу экспериментального исследования таких мод [268]. Ниже подробно анализируется структура спектра в окрестности точек трехкратного вырождения в зависимости от степени связи между отдельными типами движений (разные значения ν).

Все ветви третьего семейства на рис. 84 получены при анализе бесконечной системы (5.2). Кинематика соответствующего типа движения характерна тем, что радиальные u_r и осевые u_z смещения оказываются связанными. Связь возникает за счет способности

упругого тела сопротивляться сдвигу, и, следовательно, именно ввиду возможности существования этого типа движений могут возникать такие особенности в модах колебаний, которые не имеют аналога в электродинамике и акустике.

То, что все ветви третьего семейства порождаются определителем системы (5.2), на первый взгляд может служить основой для ожидания большой степени подобия в соответствующих формах колебаний. Однако оценка величины собственных частот этих мод и сопоставление спектра с дисперсионными кривыми служат основанием для того, чтобы выделить первую ветвь указанного семейства. Это единственная ветвь, которая частично расположена в той области частот, где в бесконечном слое существует только одна распространяющаяся мода ($\Omega < \Omega^*$). Распространяющейся моде соответствуют резонансные частоты диска, определяемые на рис. 84 гиперболами (R -моды). Следовательно, первой ветви третьего семейства в области $\Omega < \Omega^*$ соответствуют резонансы на неоднородных волнах — краевой резонанс. Важно, что в рассматриваемом случае $\nu = 0$ имеем «чистое» проявление краевой моды без связи ее с движениями на распространяющейся моде. Это свидетельствует о возможности существования резонансов в бесконечных областях типа полуполосы для случая $\nu = 0$. Более подробный анализ данного вопроса и подтверждение такого предположения приведены в главе 7.

Для более подробного анализа остальных ветвей третьего семейства целесообразно обратиться к увеличенному изображению спектра в области частот $\Omega^* < \Omega < \Omega_L$. Соответствующая данным рис. 84 часть спектра представлена на рис. 85, где опущены гиперболы, соответствующие R -модам, и первая ветвь третьего семейства.

В поведении остальных ветвей третьего семейства (пронумерованных цифрами 2—7) обнаруживается ряд особенностей, на которые следует обратить внимание. Видно, что каждая из них образована последовательно чередующимися участками, соответствующими убыванию собственных частот с ростом R , и участками, характеризующимися возрастанием собственных частот с ростом R . Само по себе наличие вторых участков является в определенной степени примечательным, поскольку указывает на существование таких типов движения в высокочастотной области, которые трудно было предсказать на основе представлений о колебаниях упругих тел, выработанных в рамках теорий стержней и пластин.

Важной особенностью спектра, представленного на рис. 85, является существование зон, одна из которых выделена кривой L . В случае $\nu \neq 0$ наличие таких зон является естественным и отражает факт связи между различными типами движений [37]. Полагая $\nu = 0$, мы развязали некоторые типы движений, следствием чего является наличие вырожденных частот (пересечение кривых на рис. 84). Однако оказывается, что и в этом случае в третьей части общего решения (5.1), по сути, содержатся два связанных различных типа движений. Именно поэтому нельзя классифицировать эти кривые

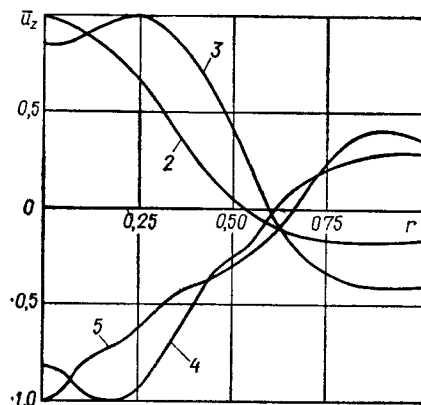


Рис. 86.

как отвечающие случаю $\nu = 0$ А-моды, по терминологии работы [195] Правильную классификацию можно получить лишь на основе анализа форм колебаний на отдельных участках каждой кривой третьего семейства.

Для решения поставленной выше задачи — понять особенности толщинного резонанса — также важно установить, взаимодействие каких типов движения определяет представленный на рис. 85 характер спектра. Из опыта расшифровки взаимодействия планарных колебаний с краевой модой следует, что для классификации типов движения необходимо проанализировать формы колебаний вдали от областей их сильного взаимодействия, т. е. областей типа выделенных кривой L . Для восходящих участков на рис. 85 точки спектра, соответствующие ожидаемым наиболее «чистым» формам колебаний, отмечены кружками, для нисходящих — треугольниками.

Остановимся на такой характеристике форм колебаний, как нормальное к плоским поверхностям диска смещение u_z . На рис. 86 показано распределение относительной величины нормального смещения u_z для четырех, отмеченных на рис. 85 кружочками, точек: 2 — $R = 5,45$, $\Omega = 1,3821$; 3 — $R = 7,5$, $\Omega = 1,3927$; 4 — $R = 9,3$, $\Omega = 1,3990$; 5 — $R = 11,0$, $\Omega = 1,4029$. При сравнении кривых рис. 86 следует иметь в виду, что выбор фазы является в определенной мере произвольным. В связи с этим здесь и далее для наглядности используется противофазное изображение для однотипных кривых. Построение этих кривых в рамках одного рисунка является следствием стремления классифицировать восходящие участки спектральных кривых на рис. 85 как соответствующие одному и тому же типу движения частиц диска. Чтобы оправдать это стремление и убедиться в том, что различия между кривыми на рис. 86 не столь существенны, следует прежде всего обратить внимание на степень различия между формами колебаний, отвечающими точкам нисходящих и восходящих участков спектральных

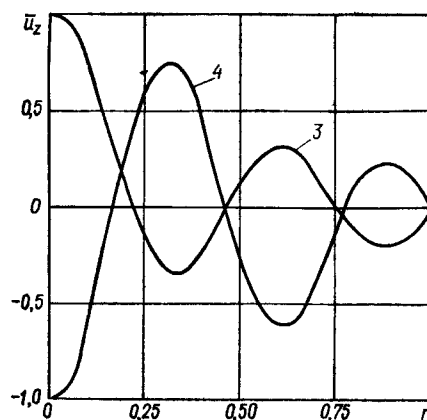


Рис. 87.

кривых третьего семейства. Для этого достаточно сравнить рельеф плоских поверхностей диска в формах колебаний, соответствующих точкам, отмеченным на рис. 85 кружочком (на рис. 86 кривая 4) и треугольником (на рис. 87 кривая 3) на четвертой ветви третьего семейства. Видна разница в характере форм колебаний, отвечающих различным точкам одной и той же спектральной кривой.

Дополнительным аргументом в пользу объединения восходящих участков в одну моду является также большая степень подобия в формах колебаний, отвечающих нисходящим участкам спектральных кривых. Типичная ситуация «перескока» формы колебаний с одной спектральной кривой на другую в окрестности областей взаимодействия различных типов движений представлена на рис. 87, где кривые 4 и 3 соответственно характеризуют рельеф поверхности диска для точек, отмеченных треугольником на четвертой и третьей спектральных линиях рис. 85.

Данные на рис. 86 относятся к первым (при возрастании R) восходящим участкам на спектральных кривых третьего семейства. Аналогичная картина подобия форм колебаний сохраняется и при рассмотрении последующих восходящих участков в изученном диапазоне R ($R \leq 25$). При этом для вторых участков в распределении u_z есть два узла, для третьих — три.

Отмеченное подобие форм на соответствующих восходящих участках спектральных кривых позволяет считать, что эти участки соответствуют новым, не анализировавшимся ранее формам движения в окрестности толщинного резонанса, которые будем называть В-модами. Подчеркнем, что с увеличением параметра R возрастает количество В-мод разного порядка, которые проявляются в диапазоне частот $\Omega^* < \Omega < \Omega_t$. При этом в качестве характеристики порядка В-моды можно принять число узловых окружностей в распределении смещения u_z .

Тип движения, связанный с нисходящими участками спектральных кривых, будем описывать, используя термин А-моды. Этим подчеркивается их связь с экспериментально наблюдаемыми А-модами [195], хотя в указанной работе и нет четкого описания их специфики и связи с формами колебаний на частотах ниже частоты толщинного резонанса Ω_t . Нумерацию А-мод целесообразно ввести в соответствии с нумерацией порядка возрастания номера с точки трехкратного вырождения собственных частот. Отметим также, что увеличение на единицу номера А-моды приводит к увеличению на

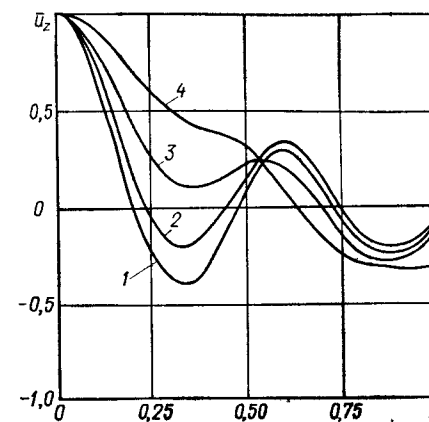


Рис. 88.

единицу числа узлов в распределении u_z . Предлагаемый способ объединения отдельных участков спектральных кривых третьего семейства в A - и B -моды соответствующего порядка использован для их обозначения на рис. 85.

Кроме описанных выше типов движений, соответствующих A - и B -модам, в окрестности частоты Ω_i для определенных геометрических размеров диска могут проявляться формы движений на переходных участках спектральных кривых. Представление об этих типах движений можно составить по данным рис. 88, где кривая 1 отражает распределение осевых смещений u_z для спектральной кривой 4 (см. рис. 85) при $R = 7,451$, $\Omega = \sqrt{2}$ (мода Лэмба (3.1)), а кривые 2—4 соответствуют последовательно возрастающим значениям R (8,0; 8,4; 9,3) для той же четвертой спектральной кривой и показывают трансформацию форм колебаний при переходе от A_4 к B_1 -моду.

Приведенные результаты для случая $\nu = 0$ являются основой для анализа усложненной дополнительными взаимодействиями между отдельными типами движений картины в случае $\nu \neq 0$.

§ 6. ТОЛЩИННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИСКА С НЕУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА

При анализе спектра собственных частот диска в случае $\nu \neq 0$ наибольший интерес представляют те зоны значений геометрии и частоты, для которых в случае $\nu = 0$ имеем дву- и трехкратное выражение собственных частот. Этим случаям на рис. 84 соответствуют точки пересечения кривых различных семейств.

Появление связи между различными типами движений приводит к исчезновению кратных частот и видоизменению структуры спектра. При этом мы имеем типичную для связанных колебательных систем [110] картину «расталкивания» спектральных кривых, такую, как в зоне, выделенной на рис. 75 контуром L .

Взаимодействие краевой моды (кривая E на рис. 84) с системой кривых, соответствующих планарным колебаниям (R -модам), рассматривалось выше. При изучении спектральных кривых для колебательных систем со многими степенями свободы установлено, что расстояние между ними в зонах расталкивания пропорционально степени связанности между парциальными системами. Один из интересных результатов, полученных в § 3 данной главы, заключается в том, что в случае взаимодействия планарных движений с краевой модой прямая пропорциональная зависимость между величиной коэффициента Пуассона, как возможной характеристикой величины связанности двух указанных типов движений, и расстоянием между спектральными кривыми не прослеживается. Более того, при определенном значении $\nu \neq 0$ снова возникают кратные частоты (пересечение спектральных кривых), соответствующие планарным и краевой модам.

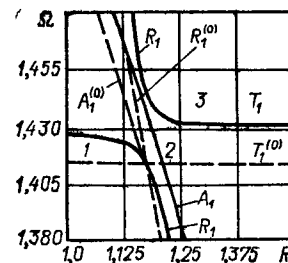


Рис. 89.

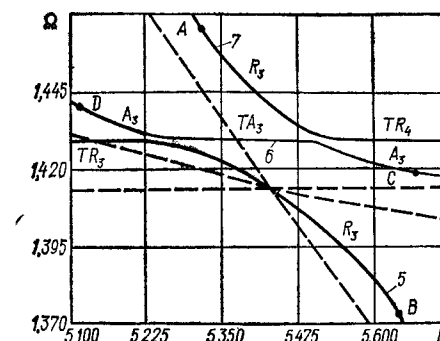


Рис. 90.

Представляется очевидным, что все зоны вблизи точек двукратного выражения спектра при $\nu = 0$ однообразно трансформируются в зоны расталкивания при $\nu \neq 0$. Это обстоятельство служит основой для понимания структуры спектра диска в случае $\nu \neq 0$ (см., например, рис. 82 и 83) в области частот $\Omega < \Omega_i$. Структуру спектра на частоте Ω_i можно понять после рассмотрения распада при $\nu \neq 0$ узлов трехкратного вырождения собственных частот.

В точках трехкратного вырождения спектра процесс расталкивания разнородных мод с увеличением ν имеет более сложный характер. Этот процесс происходит по-разному для первой точки трехкратного вырождения, через которую проходит ветвь, соответствующая краевой моде, и остальных точек [94].

Изменение структуры спектра вблизи указанной первой точки можно проследить по данным рис. 89. Здесь штриховыми линиями с соответствующими типами колебаний индексами $R_1^{(0)}$, $T_1^{(0)}$, $A_1^{(0)}$ показана часть спектра в случае $\nu = 0$. Сплошные линии характеризуют участок спектра собственных частот диска для $\nu = 0,02$. Участки спектральных кривых с одинаковым типом движения отмечены одинаковыми буквами R , T , A . При обозначении учтено «наследование» соответствующими формами колебаний основных свойств форм для $\nu = 0$. Характерным для рассматриваемой ситуации является то, что спектральная линия A_1 в данном случае не испытывает деформации при прохождении через частоту $\Omega_i = \sqrt{2 \frac{1-\nu}{1-2\nu}}$. Это свидетельствует об отсутствии связи между соответствующим ей типом движения и движениями в R - и T -модах.

На рис. 90 показан участок спектра, характеризующий изменение его структуры с изменением ν в остальных точках трехкратного вырождения. Случай $\nu = 0$ показан штриховыми линиями, а сплошными линиями изображен спектр при $\nu = 0,02$. Данные рис. 90 относятся к третьей точке вырождения, в связи с чем все моды отмечены индексом 3. Здесь принят такой же способ обозначения различных мод, как и на рис. 85.

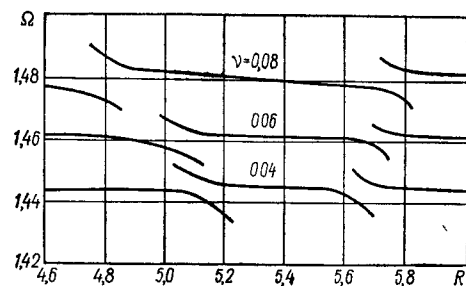


Рис. 91.

проходит линия, в определенной мере наследующая свойство соответствующей кривой третьего семейства в случае $\nu = 0$ (кривая 6).

Если для первой точки (см. рис. 89) при переходе к случаю $\nu \neq 0$ спектральная кривая A_1 не обнаруживает заметного изменения при переходе через частоту Ω_i , то в рассматриваемом типичном случае третьего узла кривая A_3 претерпевает существенную деформацию. Соответствующий этой кривой тип движения уже обнаруживает связь с чисто толщинными и радиальными движениями в диске. При этом важной частью деформированной спектральной кривой A_3 является практически горизонтальный участок TA_3 на частоте Ω_i .

Степень расталкивания кривых в окрестности точек трехкратного вырождения существенно зависит от величины коэффициента Пуассона. Количественно его влияние можно оценить по рис. 91, где показано изменение структуры спектра в окрестности частоты Ω_i с ростом ν . Здесь четко прослеживается тенденция к увеличению длины горизонтального участка кривой третьего семейства.

Для завершения исследования структуры спектра при $\nu \neq 0$ в окрестности частоты Ω_i необходимо осуществить классификацию участков спектральных кривых по однотипным формам колебаний. Именно исследование генезиса наблюдаемых здесь форм колебаний с точки зрения их связи с чистыми типами движений при $\nu = 0$ и завершает в определенной мере исследование особенностей толщинного резонанса диска.

При анализе форм колебаний, соответствующих спектральным кривым разных семейств в окрестности частоты Ω_i , уже недостаточно следить только за рельефом плоских поверхностей диска. Это связано со следующими данными, относящимися к типичному участку спектра, показанному на рис. 90.

На рис. 92 (кривая A) представлено распределение нормированного осевого смещения u_z на поверхности диска для $\nu = 0,02$, $R = 5,3$, $\Omega = 1,4690$ (см. рис. 90, точка A). В соответствии с данной выше трактовкой картины расталкивания кривых в окрестности трехкратного вырожденной частоты следует ожидать, что такое же распределение u_z будет наблюдаться и в точке B (см. рис. 90) ($R = 5,65$, $\Omega = 1,3715$). Действительно, такое положение наблю-

При этом возможна следующая трактовка картины. В результате взаимодействия планарных движений с толщинными происходит расталкивание соответствующих кривых (на рис. 90 кривые 5 и 7), как и в случае двукратного вырождения. Однако в отличие от последнего случая в образовавшейся зоне между указанными кривыми

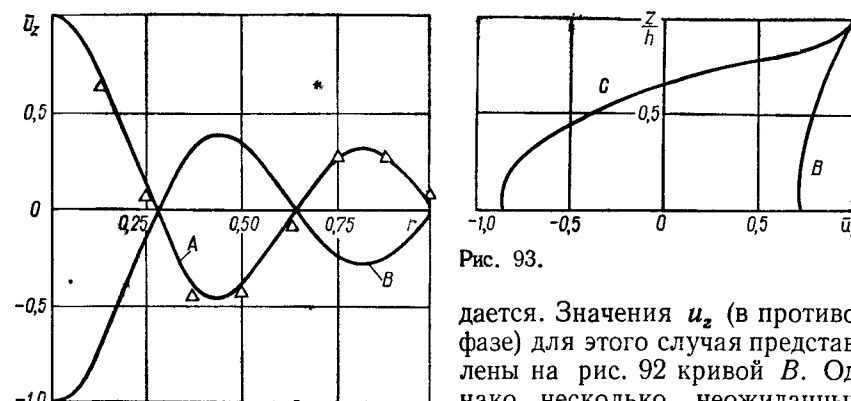


Рис. 92.

Рис. 93.

дается. Значения u_z (в противофазе) для этого случая представлены на рис. 92 кривой B. Однако несколько неожиданным является то, что для точки C ($R = 5,65$, $\Omega = 1,4190$) на рис. 90 характерно такое же распределение u_z . На рис. 92 соответствующие значения u_z показаны треугольниками. Для всех трех случаев распределение u_z , очевидно, практически тождественно. Более того, такое же распределение u_z характерно для точки D (см. рис. 90).

Значительное различие между формами колебаний, соответствующими, например, точкам B и C, обнаруживается при анализе распределения по толщине диска факторов, характеризующих напряженно-деформированное состояние. Наиболее ярко различие проявляется здесь в распределении по толщине радиальных смещений u_r и напряжений σ_r , σ_θ . На рис. 93 показано распределение по толщине нормированной величины u_r в сечении $r = 0,5$. Слабая изменчивость по толщине величины u_r для точки B свидетельствует о близости ниспадающего участка кривой 5 на рис. 90 к соответствующей гиперболе (R_3 -мода) в случае $\nu = 0$. Изменение u_r в точке C явно указывает на преобладание в форме колебаний толщинно-сдвиговых движений, что позволяет считать ниспадающий участок кривой 6 на рис. 90 наследующим свойства A_3 -моды.

Таким образом, можно предложить обоснованную классификацию мод колебаний и в случае $\nu = 0$. Она и показана на рис. 90 при названии участков различных ветвей.

Данные о структуре спектра, представленные на рис. 90, указывают на то, как в случае $\nu \neq 0$ образуется некоторая совокупность почти горизонтальных участков спектральных кривых вблизи частоты толщинного резонанса Ω_i . Эта совокупность плато, по существу, и составляет спектральную кривую, которая соответствует толщинному резонансу диска в случае $\nu \neq 0$. Отмеченная почти горизонтальность отдельных участков является первой особенностью толщинного резонанса диска — его частота все же зависит от радиуса, и при определенных значениях R эта зависимость довольно сильная. Второй его особенностью является наличие таких областей изменения R , в которых, строго говоря, толщинный резонанс не наблюда-

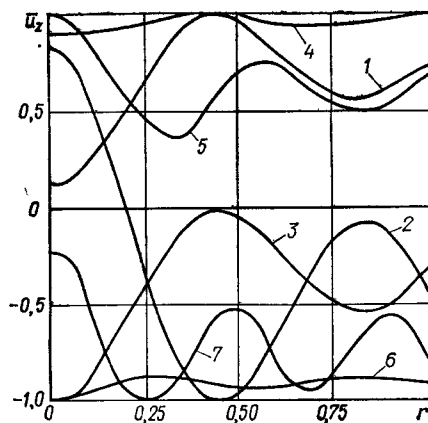


Рис. 94.

плато, связанных с R - и A -модами (далее называемые TR - и TA -плато соответственно, рис. 90), так и различия в формах колебаний для однотипных плато, соответствующих разным значениям ν . Кроме того, интересно проследить за изменением формы колебаний в пределах одного плато.

На рис. 94 представлены данные о величине u_z для всех характерных с этой точки зрения случаев, полученных при $\nu = 0,02$. Уже такой незначительной связи между различными типами движений достаточно для того, чтобы существенно усложнились формы колебаний по сравнению со случаем $\nu = 0$. Кривая 1 на рис. 94 характеризует распределение u_z в точке $R = 5,40$, $\Omega = 1,4290$ (см. рис. 90), соответствующей центру TA_3 -плато. Такой рельеф поверхности существенно отличается как от наблюдаемого в точке C на этой же кривой (рис. 90), так и от чисто поршневого движения, которое можно было бы ожидать на толщинном резонансе. Смещаясь по плато к его краю, при незначительном изменении собственной частоты наблюдаем существенное изменение формы колебаний. Если в центре плато в u_z отсутствовали противофазные участки, то на краю его они появились. Распределение u_z по радиусу для $R = 5,51$, $\Omega = 1,4375$ представлено на рис. 94 кривой 2. Почти такой же сильной изменчивостью по радиусу характеризуется u_z в форме колебаний, соответствующей краю TR_4 -плато (кривая 3, $R = 5,51$, $\Omega = 1,4300$). Четко выраженная неравномерность в распределении u_z по радиусу диска прослеживается во всех зонах вблизи краев TA - и TR -плато. Особенно ярко это свойство форм колебаний проявляется при сравнении их с формами, характерными для центров TR -плато.

На рис. 94 соответствующие рельефы плоских поверхностей представлены кривой 4 ($R = 6,50$, $\Omega = 1,4290$ — центр TR_4 -плато) и кривой 6 ($R = 8,50$, $\Omega = 1,4290$ — центр TR_6 -плато). Здесь мы имеем практически поршневое движение.

Вообще о формах колебаний для TA - и TR -плато различных

ется. Эти значения R соответствуют зонам между отдельными плато (зоны расталкивания между кривыми), и, как видно из рис. 91, их положение зависит от величины ν .

Более глубокое представление об особенностях толщинного резонанса можно получить, анализируя формы колебаний, соответствующие различным плато. Здесь, естественно, наибольший интерес представляет рельеф плоских поверхностей диска. Объектом исследования должно быть как различие между формами колебаний соседних

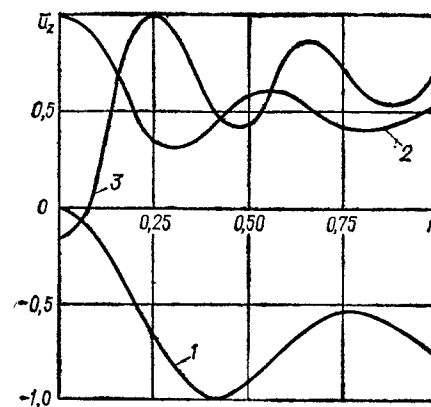


Рис. 95.

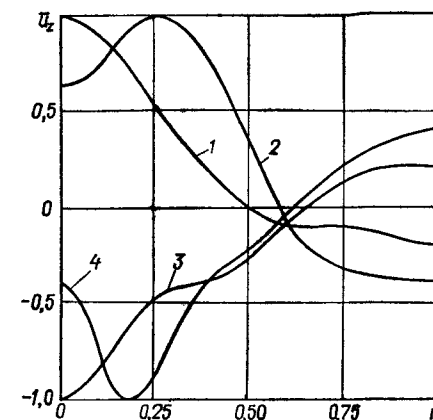


Рис. 96.

порядков можно сказать следующее. Для точек спектра TR -плато, удаленных от его краев, характерно практически поршневое движение плоских поверхностей дисков. Напротив, формы колебаний для точек спектра, принадлежащих TA -плато, обладают значительной изменчивостью в распределении u_z по радиусу, причем степень изменчивости растет с ростом номера плато. Эта тенденция хорошо видна на рис. 94 при сравнении кривых 5 ($R = 7,40$, $\Omega = 1,4290$ — центр TA_4 -плато) и 7 ($R = 9,40$, $\Omega = 1,4290$ — центр TA_6 -плато). Отметим совпадение частоты, соответствующей центрам всех плато с частотой чисто толщинного резонанса Ω_f .

Располагая хотя бы при малых значениях ν систематизированными данными о формах колебаний на частоте толщинного резонанса, можно попытаться провести их качественное сопоставление с экспериментальными данными [260, 261, 264] о рельефе плоских поверхностей колеблющегося диска. Приведенные в указанных работах многочисленные данные о рельефе поверхностей пьезокерамических дисков характеризуются сильной изменчивостью u_z по радиусу и качественно хорошо согласуются с кривыми типа 1, 5, 7 на рис. 94. Экспериментальные данные получены в широком диапазоне изменения радиусов дисков, однако в них не обнаружено ни одного резонанса с почти поршневым движением плоской границы диска, подобным кривым 4 и 6 на рис. 94. В рамках введенной терминологии это свидетельствует о том, что в экспериментах не наблюдались резонансы, связанные с TR -плато. Это примечательное свойство объясняется следующим образом.

Из рис. 91 видно, что с увеличением ν длина каждого участка TA -плато увеличивается за счет сокращения длины соседних участков TR -плато. Уже при $\nu = 0,10$ длина TR -плато уменьшается настолько, что само понятие плато теряет смысл. Это видно на рис. 82, описывающем спектр собственных частот для диска с величиной $\nu = 0,10$. Здесь довольно четко прослеживаются TA -плато

на частоте $\Omega_1 = 1,500$. На рис. 95 представлены распределения по радиусу u_z для трех собственных форм, частоты которых соответствуют центрам TA -плато. Кривая 1 соответствует значению $R = 5,3$, а кривые 2 и 3 — значениям $R = 7,2$ и $R = 9,1$. Видно, что эти кривые сохраняют все отмеченные при рассмотрении случая $\nu = 0,02$ (см. рис. 94) особенности форм на TA -плато.

После анализа форм колебаний, возбуждающихся на частотах толщинного резонанса, следующий важный вопрос связан с изучением B -мод, обнаруженных при рассмотрении случая $\nu = 0$. По аналогии с относящимся к этому случаю рис. 85 на рис. 82 выделены участки спектральных кривых, которые можно объединить как относящиеся к B_1 -моду. Обоснование такого объединения указанных участков спектральных кривых следует из анализа форм колебаний на частотах, принадлежащих центрам этих плато.

Распределение по радиусу нормированного смещения u_z для середин четырех B_1 -плато представлено на рис. 96, где кривым 1—4 соответствуют следующие значения геометрических и частотных параметров: $R = 6,0; 7,7; 9,4; 11,2$; $\Omega = 1,4571; 1,4705; 1,4788; 1,4843$. Между приведенными характеристиками форм колебаний, очевидно, существуют определенные различия. Однако практически полное тождество соответствующих форм колебаний в этом случае и в случае $\nu = 0$ (см. рис. 86) является решающим для объединения указанных плато в одну B_1 -моду.

Таким образом, анализ спектральных кривых и форм колебаний диска на основе классификации типов движений, введенных при рассмотрении случая $\nu = 0$, позволил четко систематизировать осесимметричные моды диска на частоте толщинного резонанса и выделить особый вид движения — B -моды. Этим не исчерпывается полностью вопрос о систематизации всех спектральных кривых в высокочастотной области. В частности, остался неисследованным вопрос о взаимодействии R - и A -мод как выше, так и ниже частоты толщинного резонанса.

Полученные данные об особенностях форм колебаний диска в окрестности частоты толщинного резонанса могут стать основой для выбора формы электродов на плоских поверхностях пьезоэлектрического резонатора с целью повышения эффективности электромеханического преобразования. При этом, однако, возникают не только чисто вычислительные трудности, но и трудности, связанные с выбором материалов и технической реализации соответствующих устройств [133, 262].

§ 7. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРА С ЗАЩЕМЛЕННОЙ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Изучение динамических свойств цилиндра в этом случае связано с анализом решения краевых задач (1.3) и (1.4), которым соответствуют выражения для компонентов вектора перемещений (1.7) и (1.8).

Прежде чем перейти к подчинению общих решений (1.7) и (1.8) граничным условиям, остановимся кратко на выяснении роли слагаемых, стоящих вне знаков сумм. Что касается симметричного случая, описываемого соотношения (1.7), то здесь смысл слагаемого с величиной A_0 совершенно ясен. Это слагаемое необходимо для полноты системы функций $\cos \eta_n z$, $\eta_n = \frac{n\pi}{h}$, $n = 1, 2, \dots$ на интервале $-h \leq z \leq h$. При выборе в качестве λ_j корней уравнения $J_0(\lambda) = 0$ системы функций $J_0(\lambda_j r)$ и $J_1(\lambda_j r)$ являются полными в круге $0 \leq r \leq 1$ [34]. Поэтому никаких дополнительных слагаемых здесь больше не требуется.

Решение для антисимметричного случая имеет более сложную структуру. Если в (1.8) положить $\eta_n = \frac{n\pi}{h}$, то по аналогии с вышесказанным выше становится понятной роль слагаемого с величиной A_0 . В качестве λ_j в этом решении выбраны ненулевые корни уравнения $J_1(\lambda) = 0$. В связи с этим для полноты системы функций $J_0(\lambda_j r)$, необходимой при выполнении граничного условия по σ_z , в решение включено слагаемое с C_0 . Появление этого слагаемого в u_z и σ_z сопряжено с наличием слагаемого с величиной C_0 в выражении для u_r . Собственно, слагаемыми с величинами A_0 и C_0 в (1.8) с точки зрения полноты общего решения граничной задачи (1.4) даже при неоднородных условиях можно было бы ограничиться. Однако при построении алгебраических систем для определения произвольных постоянных в (1.8) необходимо функцию $\sin \Omega_2 z$ разложить по $\sin \eta_n z$. В таком разложении коэффициенты убывают как $\frac{1}{\eta_n}$, что приводит к медленному убыванию соответствующих слагаемых в бесконечных системах и не позволяет просто установить асимптотическое поведение искомых величин. В связи с этим в общее представление смещений (1.8) введено слагаемое с величиной B_0 . Смысл такой операции в том, чтобы увеличить гладкость стоящих вне знаков сумм слагаемых в u_r и тем самым повысить скорость убывания соответствующих коэффициентов ряда Фурье. Учитывая, что все слагаемые в бесконечных рядах (1.8) обращаются в нуль для $r = 1$, $z = h$, из указанных требований вытекает следующая связь между B_0 и C_0 :

$$B_0 J_1(\Omega_1) + C_0 \frac{\Omega_2}{2\Omega_1^2} \sin \Omega_2 h = 0. \quad (7.1)$$

Характер выкладок, связанных с удовлетворением граничных условий с помощью выражений (1.8), идентичен в обоих случаях симметрии. Поэтому ниже описывается решение задачи только для симметричного случая. Антисимметричный (изгибный) случай достаточно подробно рассмотрен в работе [69].

Из граничных условий для касательных напряжений и осевых смещений в (1.3) получаем следующие связи между значениями

коэффициентов в (1.8):

$$\begin{aligned} A_n &= -B_n \frac{q_1 q_2}{\eta_n^2} \frac{I_0(q_2)}{I_0(q_1)}, \\ C_j &= -D_j \frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2\lambda_j^2} \frac{\operatorname{sh} p_2 h}{\operatorname{sh} p_1 h}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Два оставшихся условия в (1.3) порождают систему функциональных уравнений. Используя разложения (2.9) главы 5, формулу

$$I_0(qr) = 2I_0(q) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + q^2} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_1(\lambda_j)}, \quad (7.3)$$

где $J_0(\lambda_j) = 0$, и соотношения (7.2), приводим эти функциональные уравнения к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x_0 \frac{J_1(\Omega_1)}{\Omega_1} - \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{p_1^2} &= 0, \\ x_n T_n(q) + 2(\Omega_2^2 - \Omega_1^2) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^2 + q_1^2} \left(\frac{\eta_n^2}{\lambda_j^2 + q_2^2} - \nu \right) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \\ y_j \Delta_j(p) - 2(\Omega_2^2 - \Omega_1^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\eta_n^2 + p_1^2} \left(\frac{\eta_n^2}{\eta_n^2 + p_2^2} - \nu \right) + \frac{2\nu J_0(\Omega_1)}{(1-2\nu)p_1^2} &= \\ &= \frac{g_j}{\lambda_j}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.4)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} x_n &= (-1)^n B_n \frac{q_2}{\eta_n^2} I_0(q_2), \quad y_j = D_j \frac{\operatorname{sh} p_2 h}{\lambda_j h} J_1(\lambda_j), \\ x_0 &= A_0 \Omega_1, \quad T_n(q) = \frac{\eta_n^2}{q_2} \frac{I_1(q_2)}{I_0(q_2)} - q_1 \frac{I_1(q_1)}{I_0(q_1)}, \\ \Delta_j(p) &= h \left[p_2 \operatorname{cth} p_2 h - \frac{(\lambda_j^2 + p_2^2)^2}{4\lambda_j^2 p_1} \operatorname{cth} p_1 h \right]. \end{aligned} \quad (7.5)$$

При исследовании свойств неизвестных в бесконечных системах, порождаемых первой основной граничной задачей, мы исходили из общей теории бесконечных систем Кояловича [70]. Для систем типа (7.4) развить аналогичную теорию затруднительно, и при получении данных об асимптотических свойствах неизвестных следует исходить из физических особенностей рассматриваемой задачи. Как указывалось в главе 1, при оценке локальных особенностей в напряженном состоянии для смешанных задач можно исходить из результатов для статических задач. В нашем случае можно считать

известным характер особенности вблизи точки $r = 1, z = h$ для компонент тензора напряжений. Он описан в § 4 главы 1. В данном случае в окрестности угловой точки можно записать

$$\sigma_r(1, z) \approx A(h - z^2)^{-\alpha}, \quad \sigma_r(r, h) \approx B(1 - r^2)^{-\alpha}, \quad (7.6)$$

где $0 < \alpha < 0,5$ — корень уравнения (4.5) главы 1.

Следующий шаг по пути к установлению асимптотических свойств неизвестных в системе (7.4) связан с предположением о том, что особенностью вида (7.6) обладают порознь составляющие общего решения, представленные в (1.8) рядами по j и n .

С учетом введенных обозначений эти составляющие для напряжения σ_r приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_r^I(1, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \left[\frac{\Omega_1^2}{2} + q_1 \frac{I_1(q_1)}{I_0(q_1)} - \frac{\eta_n^2}{q_2} \frac{I_1(q_2)}{I_0(q_2)} \right] \cos \eta_n z, \\ \frac{1}{2G} \sigma_r^{II}(r, h) &= h \sum_{j=1}^{\infty} y_j \left[\frac{(\lambda_j^2 + p_2^2) \left(\lambda_j^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right)}{2\lambda_j p_1} \operatorname{cth} p_1 h - \right. \\ &\quad \left. - \lambda_j p_2 \operatorname{cth} p_2 h \right] \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_1(\lambda_j)} + \frac{h}{r} \sum_{j=1}^{\infty} y_j \left[p_2 \operatorname{cth} p_2 h - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2p_1} \operatorname{cth} p_2 h \right] \frac{J_1(\lambda_j r)}{J_1(\lambda_j)}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

То обстоятельство, что вторая составляющая выбрана при $z = h$, а не при $r = 1$, связано с неравномерной сходимостью соответствующих рядов по функциям $J_0(\lambda_j r)$. При выборе в качестве λ_j корней уравнения $J_0(\lambda) = 0$ соответствующие слагаемые в выражении для $\sigma_r^{II}(1, z)$ исчезают и установить асимптотический характер поведения коэффициентов таким образом не удастся.

Первое из приведенных в (7.7) выражений является рядом Фурье функции, обладающей особенностью вида (7.6). Учитывая, что для больших n выражение в квадратных скобках в (7.7) стремится к $\frac{\Omega_1^2}{2}$, находим [13], что с ростом номера коэффициенты x_n имеют асимптотическое представление

$$x_n = \frac{a_0}{\eta_n^{1-\alpha}}. \quad (7.8)$$

Для оценки поведения коэффициентов y_j во вторых рядах (7.7) для больших λ_j необходимо использовать сумму ряда [33]

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{1-\alpha}} \frac{J_{1-\alpha}(\lambda_j)}{J_1(\lambda_j) \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_1(\lambda_j)} = \frac{(1-r^2)^{-\alpha}}{2^{1-\alpha} \Gamma(1-\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2}}. \quad (7.9)$$

Учитывая, что для больших λ_j асимптотическое значение выражений в квадратных скобках (7.7) в первом и втором рядах для $\sigma_r^{II}(r, h)$ в (7.7) равны единице и $\frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2}$ соответственно, получаем, что особенности вида (7.6) соответствует

$$y_l = \frac{b_0}{\lambda_j^{1-\alpha}}. \quad (7.10)$$

При этом ряд по $J_1(\lambda_j r)$ в $\sigma_r^{II}(r, h)$ не содержит особенности в точке $r = 1$.

Асимптотические равенства (7.8) и (7.10), по существу, являются лишь предположением о свойствах неизвестных в бесконечной системе (7.4). Это замечание подчеркивает, однако, лишь одну сторону в проведенных рассуждениях. Если еще раз вернуться к факту существования особенности определенного типа в напряженном состоянии цилиндра, то соотношения (7.8) и (7.10) можно истолковать и по-иному. Эти соотношения нужно рассматривать как указание на то, с какими свойствами следует искать решение, если окажется, что система (7.4) допускает не единственное решение. В связи с этими замечаниями дальнейшая работа по исследованию системы (7.4) состоит в проверке возможности существования решения с асимптотическими свойствами (7.8) и (7.10) и, если такое решение существует, в указании алгоритма, позволяющего его найти.

Для проверки возможности существования у системы (7.4) решения со свойствами (7.8) и (7.10) рассмотрим вначале второе уравнение в (7.4) при больших значениях n . При этом считаем частоту колебаний произвольной, но фиксированной. Это позволяет всегда выбрать такой номер N , начиная с которого можно полагать $q_l^2 \approx \eta_n^2$, $l = 1, 2$, $n > N$. Для получения асимптотического выражения для $T_n(q)$, однако, вследствие его структуры необходимо считать $q_l \approx \eta_n - \frac{\Omega_l^2}{2\eta_n}$, $l = 1, 2$, и рассматривать члены разложения более высокого порядка. В итоге получаем

$$T_n(q) \approx (3 - 4\nu) \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\eta_n}. \quad (7.11)$$

Для оценки порядка убывания по n бесконечной суммы по j во втором уравнении (7.4) с учетом (7.10) выполняем преобразование

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_0}{\lambda_j^{1-\alpha} (\lambda_j^2 + \eta_n^2)} \left(\frac{\eta_n^2}{\lambda_j^2 + \eta_n^2} - \nu \right) \approx \frac{b_0}{\pi \eta_n^{2-\alpha}} \times \\ \times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta \left(\frac{j}{\zeta} \right)^{1-\alpha} \left[1 + \left(\frac{j}{\zeta} \right)^2 \right]} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{j}{\zeta} \right)^2} - \nu \right], \quad \zeta = \frac{\eta_n}{\pi}. \quad (7.12)$$

Используя известное соотношение [113]

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta} f\left(\frac{j}{\zeta}\right) = \int_0^{\infty} f(x) dx \quad (7.13)$$

и значение интегралов [33]

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi\alpha}{2}}, \\ \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi(2-\alpha)}{4 \sin \frac{\pi\alpha}{2}}, \quad (7.14)$$

вместо второго уравнения в (7.4) получаем асимптотическое равенство

$$\frac{a_0}{\eta_n^{2-\alpha}} (3 - 4\nu) + \frac{b_0}{\eta_n^{2-\alpha}} \frac{2-\alpha-2\nu}{\sin \frac{\pi\alpha}{2}} = 0. \quad (7.15)$$

Аналогичные выкладки применительно к третьему уравнению в (7.4) приводят к асимптотическому равенству

$$\frac{b_0}{\lambda_j^{2-\alpha}} - \frac{a_0}{\lambda_j^{2-\alpha}} \frac{\alpha-2\nu}{\sin \frac{\pi\alpha}{2}} = 0. \quad (7.16)$$

Здесь учтено, что для больших j

$$\Delta_l(p) \approx h \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\lambda_j}. \quad (7.17)$$

При получении этих соотношений видим, какую важную роль играют свободные члены, определяемые внешней нагрузкой, и член с x_0 , определяемый способом выбора полной системы частных решений в (1.8) для того, чтобы асимптотическая система (7.15) и (7.16) оказалась однородной.

Решение системы (7.4) с асимптотическими свойствами (7.8) и (7.10) существует, если определитель однородной системы (7.15) и (7.16) обращается в нуль. Соответствующее равенство приводит к уравнению (4.5) главы 1. Именно это позволяет заключить, что система (7.4) обладает решением с асимптотическими свойствами (7.8) и (7.10).

Способ построения алгоритма решения системы (7.4), в котором учитывались бы соотношения (7.8) и (7.10) и доставлялось решение с нужными свойствами, в значительной мере близок к использованному при рассмотрении первой основной граничной задачи. Знание асимптотических свойств неизвестных позволяет при замене бесконечной системы (7.4) конечной с $N + M + 1$ неизвестными

принять

$$x_n = \frac{a_0}{\eta_n^{1-\alpha}} \quad (n > N), \quad y_j = \frac{b_0}{\lambda_j^{1-\alpha}} \quad (j > M), \quad (7.18)$$

$$a_0 = x_N \eta_N^{1-\alpha}, \quad b_0 = y_M \lambda_M^{1-\alpha}.$$

Полученная таким образом конечная система отличается от той, которая порождается простой редукцией, лишь коэффициентами при последних оставленных неизвестных. В отличие от случая первой основной граничной задачи входящие в эти коэффициенты бесконечные ряды не удается вычислить в замкнутом виде, что несколько усложняет практические вычисления. Говоря о практической реализации алгоритма, следует также указать на одну важную возможность для промежуточного контроля вычислений. Решая конечную систему, полученную в соответствии с (7.18), находим приближенные значения a_0 и b_0 . После их подстановки в (7.16) по степени близости двух слагаемых можно судить о степени точности найденного решения бесконечной системы.

Заканчивая описание алгоритма решения систем, возникающих при рассмотрении смешанных граничных задач, отметим важность усилий, направленных на правильный учет локальных особенностей исследуемых полей, так как на их основании удастся развить подходы, позволяющие выделить из совокупности возможных решений бесконечных систем то, которое соответствует физически осмысленному решению с конечной энергией. Очень наглядные примеры, иллюстрирующие необходимость учета условий на ребре, приведены в книге [97]. В связи с этим можно также указать на работу [159]. В ней показано, что без выделения локальных особенностей поля можно, увеличивая количество аппроксимирующих функций, получить ухудшение точности выполнения граничных условий.

После решения конечной системы, соответствующей системе (7.4), получаем значения всех коэффициентов бесконечных рядов для смещений и напряжений в цилиндре. Это позволяет использовать обычные способы улучшения сходимости, подробно описанные выше при рассмотрении первой основной граничной задачи. Для практического их применения необходимо использовать значение суммы ряда (7.9), а также соотношения [33]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\eta_n \pi h}{2}} \frac{J_{1/2-\alpha}(\eta_n h)}{\eta_n^{1-\alpha} \sin \frac{\pi \alpha}{2}} \cos \eta_n z =$$

$$= \frac{(h^2 - z^2)^{-\alpha} h^{1+\alpha}}{2^{1-\alpha} \Gamma(1-\alpha) \sin \frac{\pi \alpha}{2}} - \frac{h^{1-\alpha} \sqrt{\pi}}{2^{2-\alpha} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \alpha\right) \sin \frac{\pi \alpha}{2}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\eta_n \pi h}{2}} \frac{J_{3/2-\alpha}(\eta_n h)}{\eta_n^{1-\alpha} \cos \frac{\pi \alpha}{2}} \sin \eta_n z = \frac{z (h^2 - z^2)^{-\alpha} h^{\alpha}}{2^{1-\alpha} \Gamma(1-\alpha) \cos \frac{\pi \alpha}{2}}. \quad (7.19)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Роль этих рядов в процессе улучшения сходимости становится понятной, если принять во внимание следующие равенства:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(-1)^n \sqrt{\frac{\eta_n \pi h}{2}} \frac{J_{1/2-\alpha}(\eta_n h)}{\sin \frac{\pi \alpha}{2}} \right] = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(-1)^n \sqrt{\frac{\eta_n \pi h}{2}} \frac{J_{3/2-\alpha}(\eta_n h)}{\cos \frac{\pi \alpha}{2}} \right] = -1. \quad (7.20)$$

Конкретные расчеты были проведены для диска из материала с величиной $\nu = 0,3$ ($\alpha = 0,28883$) при возбуждении колебаний равномерно распределенными по поверхности $z = \pm h$ нормальными нагрузками, $g(r) \equiv g_0$. В диапазоне $3 \leq R \leq 10$, $0 < \Omega < \Omega^*$ ($\Omega^* = 1,76$) в структуре спектра собственных частот примечательных особенностей не обнаружено. Наиболее интересным обстоятельством, выясненным при рассмотрении смешанной задачи, является то, что резонансы на нераспространяющихся модах в данном диапазоне частот не возбуждаются. Ни при анализе структуры спектра, ни при рассмотрении форм колебаний не удается обнаружить явление, которое можно было бы считать аналогом краевого резонанса для диска со свободными краями. Что касается области частот $\Omega^* < \Omega < \Omega_t$, то и в ней также наблюдается сгущение спектра собственных частот диска. Систематизация результатов в указанном частотном диапазоне представляет весьма сложную задачу. В отличие от случая свободного диска рассмотрение задачи для $\nu = 0$ не дает здесь результатов, которые можно было бы использовать как базу для такой систематизации.

§ 8. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ В НЕОСЕСИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

В общем случае неосесимметричной деформации цилиндра (см. рис. 74) все характеристики напряженно-деформированного состояния являются функциями трех координат r , θ , z . При изучении спектра собственных частот и форм колебаний задача естественно распадается на последовательность задач с определенным типом изменяемости в окружном направлении, описываемым угловыми функциями $\cos l\theta$ или $\sin l\theta$, $l = 1, 2, \dots$

Как уже отмечалось, при изучении частотного спектра и собственных форм на основе решения задачи о вынужденных колебаниях нет необходимости рассматривать общий случай нагружения на поверхности цилиндра. В связи с этим далее считаем, что касательные напряжения τ_{zr} и $\tau_{z\theta}$ на торцах $z = \pm h$ цилиндра отсутствуют. Это позволяет существенно упростить форму общего решения задачи. Используемый в работе метод суперпозиции, естественно, применим и для построения решения, позволяющего удовлетворить трем неоднородным условиям на торцах. При этом не

требуется каких-либо новых частных решений уравнений движения по сравнению с представленными в главе 4. Однако следует иметь в виду, что при удовлетворении граничным условиям по касательным напряжениям нужно не рассматривать их покомпонентно, а выполнять условия для двух линейных комбинаций $\tau_{zr} + \tau_{z\theta}$ и $\tau_{zr} - \tau_{z\theta}$. Эта рекомендация является следствием общих подходов к построению решений граничных задач теории упругости [135].

Конкретно рассматривается следующая граничная задача для случая симметричной относительно срединной плоскости $z = 0$ деформации:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_r = f(z) \cos l\theta, \quad \frac{1}{2G} \tau_{rz} = \frac{1}{2G} \tau_{r\theta} = 0, \quad r = 1, \\ \frac{1}{2G} \sigma_z = g(r) \cos l\theta, \quad \frac{1}{2G} \tau_{zr} = \frac{1}{2G} \tau_{z\theta} = 0, \quad z = \pm h, \quad (8.1) \\ f(-z) \equiv f(z). \end{aligned}$$

В рамках используемого метода представление компонентов вектора смещений в данной задаче включает две составляющие. Первая из них должна обеспечить возможность удовлетворения граничным условиям на боковой поверхности $r = 1$. Выражения для компонент вектора смещений этой составляющей имеют вид

$$\begin{aligned} u_r^I = \cos l\theta \left\{ A_0 \frac{dJ_l(\Omega_1 r)}{dr} + H_0 \frac{l}{r} J_l(\Omega_2 r) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \frac{dl(q_1 r)}{dr} - G_n \frac{dl(q_2 r)}{dr} + H_n \frac{l}{r} I_l(q_2 r) \right] \cos \eta_n z \right\}, \\ u_\theta^I = -\sin l\theta \left\{ A_0 \frac{l}{r} J_l(\Omega_1 r) + H_0 \frac{dJ_l(\Omega_2 r)}{dr} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \frac{l}{r} I_l(q_1 r) - G_n \frac{l}{r} I_l(q_2 r) + H_n \frac{dl(q_2 r)}{dr} \right] \cos \eta_n z \right\}, \\ u_z^I = \cos l\theta \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n \eta_n I_l(q_1 r) + G_n \frac{q_2^2}{\eta_n} I_l(q_2 r) \right] \sin \eta_n z \right\}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Здесь $\eta_n = \frac{n\pi}{h}$; q_1 и q_2 определены формулы (1.9); $I_l(x)$ и $J_l(x)$ — обычные обозначения для функций Бесселя l -го порядка.

Выражения (8.2) содержат три последовательности произвольных постоянных A_n , G_n и H_n . Используя их значения, можно выполнить произвольные неоднородные граничные условия на цилиндрической поверхности. Принятое в (8.1) допущение о равенстве нулю касательных напряжений при $r = 1$ не приводит к каким-либо упрощениям при построении первой составляющей общего решения.

В противоположность этому при построении второй составля-

щей равенство нулю касательных напряжений на торцах цилиндра оказывается существенным. При этом, конечно, следует иметь в виду, что указанный выбор $\eta_n = \frac{n\pi}{h}$ для первой составляющей обеспечивает равенство нулю величин τ_{zr}^I и $\tau_{z\theta}^I$ при $z = h$. Указанные свойства позволяют представить вторую составляющую общего решения в виде

$$\begin{aligned} u_r^{II} = \cos l\theta \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\lambda_j^2} \left[-\frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2p_1} \frac{\operatorname{ch} p_1 z}{\operatorname{sh} p_1 h} + p_2 \frac{\operatorname{ch} p_2 z}{\operatorname{sh} p_2 h} \right] \frac{dJ_l(\lambda_j r)}{dr} \right\}, \\ u_\theta^{II} = -\sin l\theta \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\lambda_j^2} \left[-\frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2p_1} \frac{\operatorname{ch} p_1 z}{\operatorname{sh} p_1 h} + \right. \right. \\ \left. \left. + p_2 \frac{\operatorname{ch} p_2 z}{\operatorname{sh} p_2 h} \right] \frac{l}{r} J_l(\lambda_j r) \right\}, \\ u_z^{II} = \cos l\theta \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} B_j \left[-\frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2\lambda_j^2} \frac{\operatorname{sh} p_1 z}{\operatorname{sh} p_1 h} + \frac{\operatorname{sh} p_2 z}{\operatorname{sh} p_2 h} \right] J_l(\lambda_j r) \right\}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Здесь λ_j — корни уравнения $J_l'(\lambda) = 0$; p_1 и p_2 определяются равенствами (1.9). Выбором значений последовательности произвольных постоянных B_j можно удовлетворить произвольные условия по σ_z на торцах $z = \pm h$. При этом используется свойство полноты и ортогональности системы функций $J_l(\lambda_j r)$ при указанном выборе λ_j . Значения первых корней λ_j для различных номеров l содержатся в работе [188]. Для вычисления величин λ_j при больших номерах j используется формула [230, т.2]

$$\lambda_j = \beta - \frac{m+3}{8\beta} - \frac{4(7m^2+82m-9)}{3(8\beta)^3}, \quad (8.4)$$

$$\text{где } \beta = \frac{\pi}{4} (4j + 2l + 1), \quad m = 4l^2.$$

Преобразование системы функциональных уравнений, получаемых при подстановке (8.2) и (8.3) в граничные условия (8.1), в алгебраические основывается на разложениях

$$\begin{aligned} J_l(\Omega r) = 2\Omega J_l'(\Omega) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 J_l(\lambda_j r)}{(\lambda_j^2 - \Omega^2)(\lambda_j^2 - \Omega^2) J_l(\lambda_j)}, \\ I_l(qr) = 2q I_l'(q) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2 J_l(\lambda_j r)}{(\lambda_j^2 - \Omega^2)(\lambda_j^2 + q^2) J_l(\lambda_j)} \end{aligned} \quad (8.5)$$

и приведенных ранее представлений рядами Фурье тригонометрических и гиперболических функций.

Однородные условия для касательных напряжений τ_{rz} при $r = 1$ определяют следующую связь между искомыми величинами:

$$A_n = G_n \frac{\eta_n^2 + q_2^2}{2\eta_n^2} \frac{q_2 I_l(q_2)}{q_1 I_l'(q_1)} - H_n \frac{l I_l(q_2)}{2q_1 I_l'(q_1)}. \quad (8.6)$$

Здесь и далее штрих указывает на производную по полному аргументу.

С учетом связи (8.5) бесконечная система для определения остальных коэффициентов рядов (8.2) и (8.3) представляется в виде

$$\begin{aligned} & A_0 \left[\Omega_1^2 J_l(\Omega_1) - \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} J_l(\Omega_1) \right] + H_0 [\Omega_2^2 J_l(\Omega_2) - J_l(\Omega_2)] - \\ & - \frac{\nu \Omega_1^2 (\Omega_2^2 - 2l^2)}{2(1-2\nu)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^2 \rho_j^2} = f_0, \\ & -x_n P_n(q) + z_n I C_n(q) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \left[2\eta_n^2 \left(\frac{1}{\lambda_j^2 + q_2^2} - \frac{1}{\lambda_j^2 + q_1^2} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(1 - \frac{l^2}{\lambda_j^2} \right) - \frac{\nu \Omega_1^2 (\Omega_2^2 - 2l^2)}{(1-2\nu) \lambda_j^2 (\lambda_j^2 + q_1^2)} \right] = f_n, \quad n = 1, 2, \dots, \\ & A_0 I [J_l(\Omega_1) - \Omega_1 J_l'(\Omega_1)] - \frac{1}{2} H_0 [\Omega_2^2 J_l'(\Omega_2) - \Omega_2 J_l'(\Omega_2) + l^2 J_l(\Omega_2)] + \\ & + l \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^2 \rho_j^2} = 0, \\ & x_n I T_n(q) - z_n Q_n(q) + 2l \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^2} \left[2\eta_n^2 \left(\frac{1}{\lambda_j^2 + q_2^2} - \frac{1}{\lambda_j^2 + q_1^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2\nu \Omega_1^2}{(1-2\nu) (\lambda_j^2 + q_1^2)} \right] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \\ & y_j \frac{\lambda_j^2 - l^2}{\lambda_j^2} \Delta_l(p) - A_0 \frac{2\Omega_1^3 \nu J_l'(\Omega_1)}{(1-2\nu) \rho_1^2} - \frac{\Omega_1^2}{1-2\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\eta_n^2 + \rho_1^2} \times \\ & \times \left(\frac{2\lambda_j^2}{\eta_n^2 + \rho_2^2} - \frac{\nu \Omega_2^2}{\eta_n^2} \right) + l \sum_{n=1}^{\infty} z_n \frac{\eta_n^2 + \frac{1-2\nu}{\lambda_j^2}}{\eta_n^2 + \rho_1^2} = \frac{\lambda_j^2 - l^2}{\lambda_j^2} g_l, \\ & j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8.7)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} P_n(q) &= L(q_2) - \frac{\eta_n^2 + q_2^2}{2\eta_n^2} \left[L(q_1) - \frac{\nu \Omega_1^2}{(1-2\nu) I(q_1)} \right]; \\ C_n(q) &= I(q_2) - \frac{1}{2} L(q_1) + \frac{\nu \Omega_1^2}{2(1-2\nu) I(q_1)} - 1; \\ T_n(q) &= \frac{\eta_n^2 + q_2^2}{\eta_n^2 I(q_1)} - \frac{2}{I(q_2)} + \frac{\Omega_2^2}{\eta_n^2}; \end{aligned}$$

$$Q_n(q) = \frac{l^2}{I(q_1)} + I(q_2) [L(q_2) - 1];$$

$$I(q) = q \frac{I_l'(q)}{I_l(q)}; \quad L(q) = q \frac{L_l'(q)}{L_l(q)};$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n \cos \eta_n z; \quad g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{J_l(\lambda_j r)}{J_l(\lambda_j)}. \quad (8.8)$$

Неизвестные x_n , z_n и y_j в этой системе связаны с коэффициентами рядов в (8.2) и (8.3) равенствами

$$\begin{aligned} x_n &= (-1)^n G_n q_2 I_l'(q_2), \quad z_n = (-1)^n H_n I_l(q_2), \\ y_j &= B_j \frac{J_l(\lambda_j)}{h}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

При записи системы (8.7) отдельно выделены первое и третье уравнения, связанные с удовлетворением граничным условиям для несамоуравновешенных по высоте цилиндра напряжений σ_r и $\tau_{r\theta}$ соответственно.

Главным вопросом, с которого начиналось исследование всех бесконечных систем в этой работе, является вопрос об асимптотических оценках для неизвестных. Именно наличие таких оценок позволяет полностью перенести разработанные применительно к более простым задачам алгоритмы определения собственных форм и частот на случай неосесимметричной деформации.

Структура системы (8.7) не позволяет использовать для анализа асимптотического поведения неизвестных результаты теории бесконечных систем Кояловича, как это было возможно в осесимметричном случае (см. § 2 данной главы). В связи с этим при анализе системы (8.7) будем исходить из предположений, базирующихся на физических соображениях родственности задач об осесимметричном и неосесимметричном деформированиях цилиндра.

Представляется естественным, что при любом конечном l характер локальных особенностей напряженного состояния в окрестности угловой окружности одинаков для осесимметричного и неосесимметричного случаев. Исходя из этого можно предполагать, что, например, выражение для нормальных напряжений σ_z^{II} при подходе к угловой окружности по поверхности $r = 1$ должно иметь логарифмическую особенность, как это было установлено в осесимметричном случае (см. § 2 данной главы). С учетом принятых обозначений этот компонент тензора напряжений представляется рядом

$$\frac{1}{2G} \sigma_z^{II}(1, z) = h \sum_{j=1}^{\infty} y_j \left[p_2 \frac{\operatorname{ch} p_2 z}{\operatorname{sh} p_2 h} - \frac{(\lambda_j^2 + \rho_2^2)^2}{4\lambda_j^2 \rho_1} \frac{\operatorname{ch} p_1 z}{\operatorname{sh} p_1 h} \right]. \quad (8.10)$$

При больших значениях номеров j и z , близких к h , выражение в квадратных скобках может быть аппроксимировано следующим

образом:

$$p_2 \frac{\operatorname{ch} p_2 z}{\operatorname{sh} p_2 h} - \frac{(\lambda_j^2 + p_2^2)^2}{4\lambda_j^2 p_1} \frac{\operatorname{ch} p_1 z}{\operatorname{sh} p_1 h} \approx \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2} e^{-j\pi(h-z)} \left(h - z + \frac{1}{j\pi} \right). \quad (8.11)$$

Здесь учтено, что согласно (8.4) $\lambda_j \approx j\pi$ и $p_\alpha \approx j\pi - \frac{\Omega_\alpha^2}{2j\pi}$, $\alpha = 1, 2$.

Используя выражения для сумм бесконечных рядов (3.14) главы 5, можно заключить, что выражение (8.10) будет обладать логарифмической особенностью при подходе к точке $r = 1$, $z = h$, если

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y_j = a_0, \quad a_0 = \text{const.} \quad (8.12)$$

Это соотношение является исходным предположением для установления асимптотических свойств неизвестных x_n и z_n с использованием второго и четвертого уравнений в (8.7).

Для больших номеров n в этих уравнениях справедливы равенства

$$P_n(q) \approx \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\eta_n}, \quad C_n(q) \approx \frac{\eta_n}{2}, \quad (8.13)$$

$$T_n(q) \approx \frac{\Omega_1^2}{\eta_n^2}, \quad Q_n(q) \approx \eta_n^2.$$

Здесь принято, что $q_\alpha \approx \eta_n - \frac{\Omega_\alpha^2}{2\eta_n}$, $\alpha = 1, 2$.

Рассмотрим сумму по j во втором уравнении системы (8.7). Полагая в ней $y_j = a_0$ и используя значения сумм

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2 + q^2} = \frac{q^2 + l^2}{q^2} \frac{I_l(q)}{2qI'_l(q)} - \frac{l}{2q^2}, \quad (8.14)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2 (\lambda_j^2 + q^2)} = \frac{l+2}{4l(l+1)q^2} - \frac{q^2 + l^2}{q^4} \frac{I_l(q)}{2qI'_l(q)} + \frac{l}{2q^4},$$

находим

$$\sum_{j=1}^{\infty} y_j \left[2\eta_n^2 \left(\frac{1}{\lambda_j^2 + q_1^2} - \frac{1}{\lambda_j^2 + q_2^2} \right) \left(1 - \frac{p}{\lambda_j^2} \right) - \frac{\nu \Omega_1^2 (\Omega_2^2 - 2p^2)}{(1-2\nu) \lambda_j^2 (\lambda_j^2 + q_1^2)} \right] \approx \approx a_0 \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\eta_n}. \quad (8.15)$$

Очень важным следствием этого соотношения является уменьшение на порядок скорости убывания по η_n суммы ряда по сравнению со скоростью убывания его членов. Именно это свойство позволяет

использовать (8.15) как асимптотически точную оценку для суммы по j во втором уравнении системы (8.7).

Если аналогичным образом поступить с суммой по j в четвертом уравнении системы (8.7), то получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^2} \left[2\eta_n^2 \left(\frac{1}{\lambda_j^2 + q_1^2} - \frac{1}{\lambda_j^2 + q_2^2} \right) + \frac{2\nu \Omega_1^2}{(1-2\nu) (\lambda_j^2 + q_1^2)} \right] \approx \approx -a_0 \frac{l+2}{4l(l+1)} \frac{\Omega_2^2}{\eta_n^2}. \quad (8.16)$$

В отличие от предыдущего равенства здесь скорость убывания по η_n суммы ряда равна скорости убывания членов ряда. В связи с этим при асимптотической оценке суммы по j в четвертом уравнении (8.7), исходя из равенства (8.12), можно использовать лишь качественное равенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^2} \left[2\eta_n^2 \left(\frac{1}{\lambda_j^2 + q_1^2} - \frac{1}{\lambda_j^2 + q_2^2} \right) + \frac{2\nu \Omega_1^2}{(1-2\nu) (\lambda_j^2 + q_1^2)} \right] = O\left(\frac{1}{\eta_n^2}\right). \quad (8.17)$$

Используя соотношения (8.13), (8.15) и (8.17), получаем следующую систему для определения главных членов асимптотических разложений неизвестных величин x_n и z_n :

$$-x_n \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\eta_n} + z_n l \frac{\eta_n}{2} = -a_0 \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\eta_n}, \quad (8.18)$$

$$x_n l \frac{\Omega_1^2}{\eta_n^2} - z_n \eta_n^2 = O\left(\frac{1}{\eta_n^2}\right).$$

При этом предполагается, что внешние нагрузки являются достаточно гладкими и соответствующие им слагаемые в системе (8.7) убывают быстрее, чем $\frac{1}{\eta_n}$. Из системы (8.18) находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n^4 z_n = \text{const.} \quad (8.19)$$

Равенства (8.12) и (8.19) являются предположениями о характере асимптотического поведения неизвестных в системе (8.7). Для проверки справедливости этого предположения необходимо использовать пятое уравнение в (8.7). Используя значения сумм (3.26) главы 5 и равенства (8.19), получаем асимптотические оценки для больших λ_j рядов по n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\eta_n^2 + p_1^2} \left(\frac{2\lambda_j^2}{\eta_n^2 + p_2^2} - \frac{\nu \Omega_2^2}{\eta_n^2} \right) \approx a_0 \frac{h}{2\lambda_j}, \quad (8.20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \frac{\eta_n^2 + \frac{1}{1-2\nu}}{\eta_n^2 + p_1^2} = O\left(\frac{1}{\lambda_j^2}\right).$$

ВЫНУЖДЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ВОЛНОВОДАХ

Учитывая, что сумма первого ряда для больших λ_l убывает медленнее, чем его члены, а также оценку

$$\Delta_l(p) \approx h \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\lambda_l}, \quad (8.21)$$

можно заключить, что система (8.7) имеет решение с асимптотическими свойствами неизвестных (8.12) и (8.19). Эти равенства являются основой эффективного алгоритма перехода от бесконечной системы (8.7) к конечной.

Не имея возможности остановиться на конкретных результатах расчетов, отметим следующее. Во-первых, в спектре собственных частот длинного цилиндра (зависимости Ω_2 от h) для $l \geq 2$ при $h \geq 2$ существует горизонтальная прямая $\Omega_2 = \Omega_*$, лежащая ниже Ω^* — частотного минимума (см. рис. 58 и 59). Собственные частоты в области $\Omega < \Omega^*$, не связанные с распространяющейся модой, наблюдались и в осесимметричном случае, где горизонтальная линия спектра, соответствующая краевой моде, состояла при $v \neq 0$ из ряда участков — плато. Эти разрывы были связаны с наличием взаимодействия совокупности нераспространяющихся мод, образующей краевую моду, с низшей продольной распространяющейся модой. В случае $l \geq 2$ распространяющиеся моды при $\Omega < \Omega^*$ отсутствуют (см. рис. 58 и 59), и для неосесимметричного деформирования имеем «чистое» проявление краевой моды. То, что краевая мода в длинном цилиндре является низшей из возможных, отмечалось в экспериментальной работе [221]. Эта работа, по существу, остается единственной, достаточно полно описывающей спектральные свойства неосесимметричных мод колебаний цилиндра.

Отметим также отсутствие при $l \geq 1$ точных решений типа мод Лэмба в осесимметричном случае. Об этом говорится в работе [249], в которой для $l = 1$ найдены простые выражения для вектора смещений, оставляющие боковую поверхность свободной от напряжений. Как и в случае мод Лэмба, соответствующее найденным выражениям смещений объемное расширение обращается в нуль во всем объеме цилиндра. Однако при этом не удается выбором h одновременно выполнить все три нулевых граничных условия на торцах.

Знание набора нормальных мод в волноводе является важным фактом при решении вопросов практического их использования. Однако не менее важным является вопрос о способах и эффективности возбуждения того или иного типа волнового движения. Здесь картина оказывается значительно сложнее, чем в рассмотренной в главе 3 задаче о вынужденных колебаниях полупространства. Это усложнение физической картины приводит к постановке ряда сложных краевых задач, не все из которых имеют к настоящему времени достаточно полное решение. Наиболее простые задачи, возникающие при моделировании реальных ситуаций, относятся к бесконечному и полубесконечному волноводу. Для бесконечного волновода задача о возбуждении волн связана с заданием на некоторой части границы системы внешних воздействий — кинематические или силовые граничные условия. Вне этой области границы волновода считаются свободными. Задачи другого типа возникают при моделировании процесса возбуждения волн путем задания внешних усилий или смещений на торце полубесконечного волновода. Они оказываются намного сложнее для теоретического анализа.

Различия физического плана между этими двумя типами задач в достаточно полной мере удается проследить лишь для случая SH-волн. Только здесь удается получить решение в замкнутом виде и проанализировать особенности резонансных ситуаций, возникающих при задании на поверхности волновода внешней нагрузки.

При анализе распространения волн Рэлея — Лэмба основное внимание уделено двум вопросам. Подробно рассмотрены энергетические характеристики процесса распространения волн и влияния вида нагрузки и частоты на относительную эффективность возбуждения той или иной распространяющейся моды. Такой анализ проведен для обоих типов волноводов.

Сравнительный анализ результатов для SH-волн и волн Рэлея — Лэмба в полубесконечном волноводе показал существенное отличие в их поведении с точки зрения возможности существования резонансов. Рассмотренные резонансные ситуации в определенной мере дополняют данные об особенностях краевого резонанса, полученные выше. Кроме того, анализ некоторых предельных случаев позволил

более наглядно отразить характерную лишь для упругих волноводов роль связи между распространяющимися и нераспространяющимися модами.

§ 1. ВОЗБУЖДЕНИЕ SH-ВОЛН В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрение задачи о вынужденных движениях в волноводе является естественным дальнейшим шагом при исследовании роли границы в формировании волнового поля. Анализ решения такой задачи позволяет раскрыть новые характерные черты упругих волноводов, дополняющие данные исследования дисперсионных соотношений в главе 4.

В настоящем параграфе рассматриваются следующие две граничные задачи о возбуждении SH-волн в бесконечном и полубесконечном плоских волноводах.

В первой задаче необходимо найти плоское, не зависящее от y волновое поле в слое $|x| < \infty, |y| < \infty, |z| \leq h$, возникающее при действии на его поверхностях касательных усилий

$$\frac{1}{G} \tau_{zy} = \begin{cases} \pm f(x), & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad z = \pm h. \quad (1.1)$$

Множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опускается. Для простоты здесь рассматриваются симметричные относительно плоскости $z = 0$ слоя движения. Антисимметричный случай изучается аналогично.

Граничные условия (1.1) можно выполнить, считая отличным от нуля лишь один компонент вектора смещений — $u_y(x, z)$. Для его определения из уравнения движения получаем уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + k_2^2 u_y = 0, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}. \quad (1.2)$$

При этом граничные условия преобразуются к виду

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = \begin{cases} \pm f(x), & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad z = \pm h. \quad (1.3)$$

Граничная задача (1.2), (1.3) эквивалентна задаче акустики о возбуждении волнового поля в волноводе с жесткими стенками при задании на части поверхности колебательной скорости [24, 36]

Решение граничной задачи (1.2), (1.3) можно получить двумя путями. Первый способ состоит в раздельном представлении решения уравнения (1.2) в областях слоя $x \leq -a, |x| \leq a, x \geq a$ в виде рядов с неопределенными коэффициентами по полной системе функций на интервале $|z| \leq h$. При этом обеспечивают выполнение всех граничных условий на сторонах $z = \pm h$. Коэффициенты рядов находятся при согласовании различных решений по смещениям и напряжениям в сечениях $x = \pm a$. Такой подход часто используют

в электродинамике [97] и акустике [148] при решении волноводных задач для канонических областей.

Второй подход к решению граничной задачи (1.2), (1.3) заключается в использовании преобразования Фурье по координате x . С учетом симметрии поля по координате z и выполнения граничных условий (1.3) получаем следующее выражение для компоненты смещений:

$$u_y(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(\xi) \cos \beta z}{\beta \sin \beta h} \times \exp(i\xi x) d\xi. \quad (1.4)$$

Здесь

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-a}^a f(x) \exp(-i\xi x) dx, \quad \beta = \begin{cases} \sqrt{k_2^2 - \xi^2}, & |\xi| \leq k_2, \\ i\sqrt{\xi^2 - k_2^2}, & |\xi| > k_2. \end{cases} \quad (1.5)$$

Представление (1.4) является формальным решением задачи по тем же критериям, которые подробно обсуждались в задаче Лэмба (глава 3). Здесь прежде всего следует обратить внимание на то, что рассматриваемое на комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ подынтегральное выражение не имеет точек ветвления, а только полюса, определяемые равенствами

$$\beta = 0, \quad \beta = \frac{m\pi}{h}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.6)$$

На комплексной плоскости (рис. 97) указано расположение полюсов:

$$\zeta_m = \begin{cases} \pm \sqrt{k_2^2 - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}, & m = 0, 1, \dots, N, \\ \pm i \sqrt{\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 - k_2^2}, & m = N+1, N+2, \dots \end{cases} \quad (1.7)$$

Здесь для каждого фиксированного значения частоты ω (k_2) имеется конечное число симметрично расположенных на вещественной оси полюсов и бесконечное число полюсов на мнимой оси.

Расшифровка формального решения (1.4) основывается на замене интеграла по вещественной оси контурным интегралом в комплексной плоскости ζ . Выбор контура при этом определяется условием излучения. В данном случае при его использовании не возникает затруднений, поскольку групповая и фазовая скорости всех распространяющихся мод для любой частоты имеют одинаковый знак.

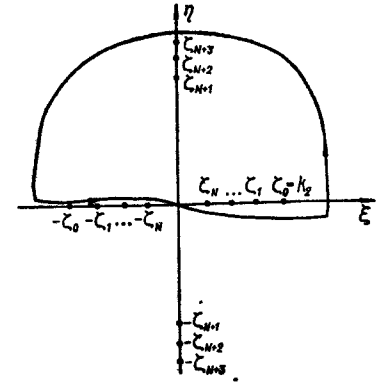


Рис. 97.

Рассмотрим, например, поле смещений в области $x > a$. Исходя из требований, чтобы в каждом сечении $x = c$, $c > a$ волновое поле представляло систему уходящих на бесконечность распространяющихся волн и набор экспоненциально убывающих с ростом x неоднородных волн, контур интегрирования в плоскости ζ следует выбрать так, как указано на рис. 97. Используя теорию вычетов, получаем

$$u_y(x, z) = i \left[\frac{\bar{f}(k_2)}{2k_2 h} \exp(ik_2 x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{f}(\zeta_m) \cos \frac{m\pi z}{h}}{h\zeta_m} \exp(i\zeta_m x) \right]. \quad (1.8)$$

При суммировании в этой формуле полюса ζ_m в (1.7) следует выбирать лишь со знаком плюс. Здесь также учтено, что полюс $\zeta = k_2$ является двукратным.

Выражение (1.8) представляет поле в волноводе по системе нормальных волн. В случае SH-волн каждая нормальная мода характеризуется не зависящим от частоты распределением смещений по толщине — $\cos \frac{m\pi z}{h}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Наиболее важным и интересным свойством волновода, проявляющимся при изучении вынужденных движений, является существование некоторых резонансных ситуаций. Они наблюдаются в тех случаях, когда одна из величин ζ_m для некоторого $m = l$ обращается в нуль, т. е. когда $k_2 = \frac{l\pi}{h}$ — частота внешней нагрузки становится равной частоте записания l -й нормальной моды. Как видно из (1.8), конечное решение задачи при этом не существует. Исключение может представлять случай, когда одновременно с равенством $\zeta_l = 0$ выполняется условие $\bar{f}(0) = 0$. Физический смысл последнего равенства ясен из (1.5), поскольку

$$\bar{f}(0) = \int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (1.9)$$

Из этой формулы следует, что внешняя нагрузка должна быть самоуравновешенной. Отметим также, что из (1.5) с учетом (1.9) легко получить, что $\bar{f}(\zeta_m) \sim \zeta_m$ при $\zeta_m \rightarrow 0$.

Из описанного свойства наглядно видна важная роль характера распределения по поверхности внешней нагрузки при формировании волнового поля в волноводе. Возможность устранить резонансную бесконечность путем изменения внешней нагрузки является типичной для всех случаев вынужденных колебаний систем с распределенными параметрами. Однако в данном случае эта связь между характером нагрузки и соответствующей резонансной формой является более сложной. Подробный анализ этой задачи для конкретных видов нагрузки можно найти в работах [24, 36].

Второй класс граничных задач описывает возбуждение SH-волн нагрузкой, приложенной на торце полубесконечного волновода

$x \geq 0$, $|y| < \infty$, $|z| \leq h$. Плоскости $z = \pm h$ свободны от нагрузок, т. е.

$$\frac{1}{G} \tau_{zy} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0. \quad (1.10)$$

На торце волновода $x = 0$ могут быть заданы силовые

$$\frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \cos \frac{m\pi z}{h} \quad (1.11)$$

или кинематические условия

$$u_y = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m \cos \frac{m\pi z}{h}. \quad (1.12)$$

Для определенности изучается также симметричное по z волновое поле.

Решение сформулированных задач естественно искать в виде набора нормальных волн. При этом можно непосредственно, на основе выражения (1.8) записать представление для искомого компонента вектора смещений

$$u_y(x, z) = A_0 \exp(ik_2 x) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \frac{m\pi z}{h} \exp(i\zeta_m x), \quad (1.13)$$

где ζ_m — выражения из (1.7), взятые со знаком плюс. Представление (1.13), очевидно, удовлетворяет почленно уравнению (1.2) и нулевым граничным условиям (1.10). Условия (1.11) или (1.12) должны быть выполнены путем выбора значений произвольных коэффициентов A_m , $m = 0, 1, 2, \dots$

В случае силового нагружения торца (1.11) эти коэффициенты определяются так:

$$A_0 = -i \frac{f_0}{k_2}, \quad A_m = -i \frac{f_m}{\zeta_m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

При кинетическом возбуждении (1.12) находим

$$A_m = \psi_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.15)$$

Если эти выражения для коэффициентов подставить в формулу (1.13), то становится очевидным существенное различие между двумя указанными случаями. Для силового возбуждения торца, так же как и при силовом возбуждении плоских поверхностей бесконечного слоя, возможны резонансные явления. Если во внешнюю нагрузку входит составляющая гармоника некоторого номера l , т. е. $f_l \neq 0$, то при совпадении частоты внешней силы с частотой записания l -й моды ($\zeta_l = 0$) смещения и скорости частиц в волноводе становятся бесконечно большими. При этом не имеет значения, самоуравновешена или нет нагрузка на торце. В случае кинематического возбуждения торца резонансных явлений в указанном смысле не возникает.

Резонансные ситуации в бесконечных волноводах раскрывают еще одну интересную особенность таких структур. Ниже мы встретимся с явлениями такого типа в связи с изучением распространения волн более общего вида.

§ 2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН РЭЛЕЯ — ЛЭМБА В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Если к поверхностям упругого слоя $z = \pm h$ прикладываются нормальные (q_z) или касательные (q_x) нагрузки, то даже при их постоянстве вдоль оси Oy возбуждаемое в волноводе поле является более сложным, чем в рассмотренном выше случае SH-волн. Еще сложнее оказывается картина динамического деформирования полубесконечного слоя $x \geq 0, |y| < \infty, |z| \leq h$ нормальными (q_z) и касательными (q_x) нагрузками на торце $x = 0$. Практически интересны также случаи возбуждения волноводов некоторой системой объемных сил. Мы не будем рассматривать такой тип нагрузки. Отметим, что некоторые результаты общетеоретического анализа свойств волновых полей в этом случае содержатся в работах [23, 71].

Рассмотрим вначале первую из описанных задач. Поскольку решения для нормального и касательного нагружения существенно не различаются, то остановимся на анализе следующей граничной задачи:

$$\frac{1}{2G} \sigma_z = \begin{cases} f(x), & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad \frac{1}{2G} \tau_{zx} = 0, \quad z = \pm h, \quad (2.1)$$

т. е. случая возбуждения симметричных относительно плоскости $z = 0$ волн Рэлея — Лэмба. В определенной мере это моделирует практические случаи возбуждения волновода, когда акустический контакт между излучателем и слоем (пластиной) осуществляется через тонкий слой жидкости [20]. Далее для определенности будем считать $f(x)$ четной функцией, т. е. $f(-x) = f(x)$. Случай $f(x) = f_0 = \text{const}$ рассматривался в работе [217], где содержатся некоторые данные о характере движения поверхности слоя вне нагруженной площадки.

Выражения для скалярного $\Phi(x, z)$ и одной компоненты $u_y(x, z)$ векторного потенциалов, представленные через интегралы Фурье имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(\xi) \cos \frac{\pi \alpha z}{2h} \exp(i\xi x) d\xi, \\ u_y(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\xi) \sin \frac{\pi \beta z}{2h} \exp(i\xi x) d\xi, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где использованы обозначения § 2 главы 4. Исходя из формул (2.2), можно найти выражения для всех характеристик напряженного состояния. При удовлетворении граничным условиям (2.1) опреде-

ляются произвольные функции $\Phi_0(\xi)$ и $A_0(\xi)$. Окончательные выражения для компонентов вектора смещений приобретают вид

$$\begin{aligned} u_x(x, z) &= \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi) \frac{\xi}{F(\xi)} \left[(2\xi^2 - \Omega^2) \sin \frac{\pi \beta}{2} \cos \frac{\pi \alpha z}{2h} + \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha \beta \sin \frac{\pi \alpha}{2} \cos \frac{\pi \beta z}{2h} \right] \exp(i\xi x) d\xi, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} u_z(x, z) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi) \frac{\alpha}{F(\xi)} \left[(2\xi^2 - \Omega^2) \sin \frac{\pi \beta}{2} \sin \frac{\pi \alpha z}{2h} - \right. \\ &\quad \left. - 2\xi^2 \sin \frac{\pi \alpha}{2} \sin \frac{\pi \beta z}{2h} \right] \exp(i\xi x) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{2}{\pi} \xi h; \quad \Omega = \frac{2\omega h}{\pi c_2}; \quad \alpha^2 = \frac{\Omega^2}{k^2} - \xi^2; \quad \beta^2 = \Omega^2 - \xi^2; \\ F(\xi) &= (2\xi^2 - \Omega^2)^2 \cos \frac{\pi \alpha}{2} \sin \frac{\pi \beta}{2} + 4\xi^2 \alpha \beta \sin \frac{\pi \alpha}{2} \cos \frac{\pi \beta}{2}; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-a}^a f(x) \exp(-i\xi x) dx.$$

Выражения (2.3) являются формальным решением задачи, а для получения фактического решения следует указать способ вычисления несобственных интегралов. Функции, входящие в интегралы (2.3), имеют особенности на вещественной оси в точках, где $F(\xi) = 0$. Это равенство является дисперсионным уравнением Рэлея — Лэмба и подробно исследовалось в главе 4. Легко проверить, что подынтегральные функции в выражениях (2.3) являются четными по α и β и, следовательно, не имеют точек ветвления.

Для получения на основе (2.3) расчетных формул рассматриваем эти выражения в комплексной плоскости $\xi = \xi + i\eta$ и используем теорию вычетов. Для образования замкнутого контура к вещественной оси следует добавить полуокружность большого радиуса. Окончательный выбор замкнутого контура определяется положением сечения, в котором анализируется поле, и требованиями условий излучения. Если для определенности рассматривать сечение $x = c, c > a$, то замыкающую полуокружность всегда следует выбирать в верхней полуплоскости (рис. 98). Тем самым в представление характеристик поля в данном сечении включаются только те неоднородные волны, которые экспоненциально убывают с ростом x . Способ обхода полюсов на вещественной оси определяется условиями излучения. В данном случае эти условия требуют, чтобы соответствующий каждой бегущей волне поток энергии в рассматриваемом сечении $x = c$ был направлен в положительном направлении оси Ox . В широком диапазоне изменения частоты это требо-

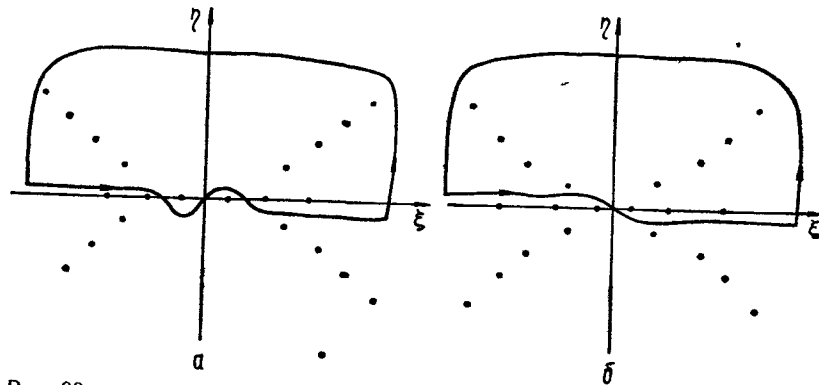


Рис. 98.

вание по существу сводится к требованию положительности фазовой скорости бегущей волны, т. е. к выполнению условия $\bar{\xi} > 0$. Выбор контура при этом указан на рис. 98, б, соответствующем некоторой частоте в интервале $2 < \Omega < 4$. Здесь дисперсионное уравнение $F(\bar{\xi}) = 0$ имеет три вещественных корня (см. рис. 61). В одном из исключительных случаев $\Omega^* < \Omega < k$ наименьшему по модулю вещественному корню соответствует волна с противоположными направлениями групповой и фазовой скоростей. Поэтому замкнутый контур следует выбирать так, как показано на рис. 98, а.

После выбора замкнутого контура из выражений (2.3) следуют представления для компонент вектора смещений при $x > a$:

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^N A(\xi_n) u(\bar{\xi}_n, z) \exp(i\xi_n x) + \sum_{m=N+1}^{N+M} A(i\eta_m) u(i\eta_m, z) \exp(-\eta_m x) + \sum_{p=N+M+1}^{\infty} [A(\zeta_p) u(\bar{\zeta}_p, z) \exp(i\zeta_p x) + A(-\zeta_p^*) u(-\bar{\zeta}_p^*, z) \times \exp(-i\zeta_p^* x)], \quad (2.5)$$

где

$$u(x, z) = u_x e_x + u_z e_z; \quad A(\xi) = 2\pi i \frac{\bar{F}(\xi)}{hF'(\xi)}; \\ u_x(\bar{\xi}, z) = \frac{ih}{\pi} \bar{\xi} \left[(2\bar{\xi}^2 - \Omega^2) \sin \frac{\pi\beta}{2} \cos \frac{\pi\alpha z}{2h} + 2\alpha\beta \sin \frac{\pi\alpha}{2} \cos \frac{\pi\beta z}{2h} \right]; \\ u_z(\bar{\xi}, z) = \frac{h}{\pi} \alpha \left[(2\bar{\xi}^2 - \Omega^2) \sin \frac{\pi\beta}{2} \sin \frac{\pi\alpha z}{2h} - 2\bar{\xi}^2 \sin \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\beta z}{2h} \right]; \quad (2.6)$$

$$F'(\bar{\xi}) = \frac{dF(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}} = \bar{\xi} \left\{ -\frac{\pi}{2\beta} \cos \frac{\pi\alpha}{2} \cos \frac{\pi\beta}{2} [(2\bar{\xi}^2 - \Omega^2)^2 + 4\bar{\xi}^2 \beta^2] + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2\alpha} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\beta}{2} [(2\bar{\xi}^2 - \Omega^2)^2 + 4\bar{\xi}^2 \alpha^2] + \right. \\ \left. + 8(2\bar{\xi}^2 - \Omega^2) \cos \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\beta}{2} + 4 \sin \frac{\pi\alpha}{2} \cos \frac{\pi\beta}{2} \times \right. \\ \left. \times \left[2\alpha\beta - \bar{\xi}^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \right] \right\}.$$

Выражениям (2.5) для смещений можно поставить в соответствие выражения для напряжений. Их структура остается такой же, как и (2.5), а зависящие от z множители имеют вид

$$\sigma_x(\bar{\xi}, z) = -G \left[(2\bar{\xi}^2 - \Omega^2) \left(\bar{\xi}^2 + \frac{v\Omega^2}{k^2(1-2v)} \right) \sin \frac{\pi\beta}{2} \cos \frac{\pi\alpha z}{2h} + \right. \\ \left. + 2\bar{\xi}^2 \alpha\beta \sin \frac{\pi\alpha}{2} \cos \frac{\pi\beta z}{2h} \right], \\ \tau_{xz}(\bar{\xi}, z) = -G i \alpha \bar{\xi} (2\bar{\xi}^2 - \Omega^2) \left[\sin \frac{\pi\beta}{2} \sin \frac{\pi\alpha z}{2h} - \right. \\ \left. - \sin \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\beta z}{2h} \right]; \\ \sigma_z(\bar{\xi}, z) = \frac{G}{2} \left[(2\bar{\xi}^2 - \Omega^2)^2 \sin \frac{\pi\beta}{2} \cos \frac{\pi\alpha z}{2h} + \right. \\ \left. + 4\bar{\xi}^2 \alpha\beta \sin \frac{\pi\alpha}{2} \cos \frac{\pi\beta z}{2h} \right]. \quad (2.7)$$

Формулы (2.5) и (2.7) показывают, что все характеристики волнового поля являются результатом сложения бесконечного числа волн. В такой суперпозиции принимает участие конечное число $(N+M)$ нормальных волн, соответствующих вещественным $\bar{\xi} = \xi_n$ и чисто мнимым $\bar{\xi} = i\eta_m$ корням дисперсионного уравнения, и бесконечное число пар волн, соответствующих комплексным корням $\bar{\xi}_p$ и $-\bar{\xi}_p^*$.

Выражения для некоторых характеристик волнового поля в области $|x| \leq a$ приведены в следующем параграфе при рассмотрении энергетических соотношений.

Рассмотрение второй задачи о возбуждении полубесконечного волновода нагрузкой на торце также проведем для случая симметричного относительно плоскости $z=0$ типа движений.

При силовом возбуждении система граничных условий имеет вид

$$\frac{1}{2G} \sigma_x = f(z), \quad \frac{1}{2G} \tau_{xz} = g(z), \quad x=0, \\ \frac{1}{2G} \sigma_z = \frac{1}{2G} \tau_{zx} = 0, \quad z = \pm h, \\ f(-z) = f(z), \quad g(-z) = -g(z). \quad (2.8)$$

Как и ранее, множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опущен.

Возможно также кинематическое возбуждение волновода, когда на торце заданы смещения. Однако в настоящее время решения задач такого типа отсутствуют.

При построении решения задачи (2.8) также целесообразно использовать один из двух подходов, описанных в главе 5 при изучении колебаний тел конечных размеров. При первом подходе, основанном на методе суперпозиции, исходят из требования полноты систем функций для выполнения неоднородных граничных условий как на торце, так и на боковых поверхностях. При этом можно непосредственно использовать представления (2.2) главы 5. Заменяя в них ряд интегралом Фурье, получаем следующие выражения для компонентов вектора смещений:

$$\begin{aligned} u_x(x, z) &= A_0 \exp(ik_1 x) - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \exp(-p_1 x) + B_n \exp(-p_2 x)] \cos \alpha_n z - \\ &- \int_0^{\infty} \left[C(\tau) \frac{\tau}{q_1} \operatorname{ch} q_1 z + D(\tau) \frac{q_2}{\tau} \operatorname{ch} q_2 z \right] \sin \tau x d\tau, \\ u_z(x, z) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \frac{\alpha_n}{p_1} \exp(-p_1 x) + B_n \frac{p_2}{\alpha_n} \exp(-p_2 x) \right] \times \\ &\times \sin \alpha_n z + \int_0^{\infty} [C(\tau) \operatorname{sh} q_1 z + D(\tau) \operatorname{sh} q_2 z] \cos \tau x d\tau. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь $\alpha_n = \frac{n\pi}{h}$; $k_l = \frac{\omega}{c_l}$; $p_l^2 = \alpha_n^2 - k_l^2$; $q_l^2 = \tau^2 - k_l^2$; $l = 1, 2$. При вычислении p_1 и p_2 следует выбирать те значения корней, которые обеспечивают слагаемым в (2.9) вид уходящих на бесконечность или экспоненциально убывающих с ростом x волн.

В представлении компонент вектора смещений в рамках метода однородных решений непосредственно используются выражения (2.5). Если ввести бесконечную последовательность комплексных произвольных постоянных A_n , то искомое решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(x, z) &= \sum_{n=1}^N A_n u(\bar{\xi}_n, z) \exp(i\bar{\xi}_n x) + \\ &+ \sum_{m=N+1}^{N+M} A_m u(i\bar{\eta}_m z) \exp(-\eta_m x) + \sum_{p=N+M+1}^{\infty} [A_p u(\bar{\xi}_p, z) \exp(i\bar{\xi}_p x) + \\ &+ A_p^* u(\bar{\xi}_p, z) \exp(i\bar{\xi}_p x)^*]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Входящие сюда функции координаты z определяются равенствами (2.6).

Конструкция выражений (2.10) отражает тот факт, что поле в полубесконечном волноводе составляется из однородных и неод-

нородных волн, каждая из которых удовлетворяет нулевым граничным условиям на поверхностях $z = \pm h$. Это приводит к тому, что выражение (2.10) изменяется с изменением частоты Ω . Именно частотой определяется количество распространяющихся (N) и чисто экспоненциально убывающих неоднородных (M) волн. Напротив, решение в виде (2.9) как бы сохраняет форму при произвольном значении Ω . В процессе изменения Ω происходит переход от действительных к чисто мнимым значениям p_l , однако соответствующие слагаемые не представляют нормальных распространяющихся волн в слое со свободными границами. Это и обуславливает целый ряд трудностей, возникающих при использовании решения (2.9).

Общие представления вектора смещений (2.9) и (2.10) при удовлетворении граничных условий (2.8) приводят к бесконечным системам. При использовании решения (2.9) такая система имеет вид

$$\begin{aligned} A_0 i k_1 \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\nu k_1^2 k_2^2}{2(1-2\nu)h\pi} \int_0^{\infty} \frac{x(\tau)}{\tau^2 q_1^2} d\tau &= f_0; \\ y_n \Delta_n(p) + \frac{k_1^2}{(1-2\nu)\pi} \int_0^{\infty} \frac{x(\tau)}{\tau^2 + p_1^2} \left[\frac{2\alpha_n^2}{\tau^2 + p_2^2} - \frac{\nu k_2^2}{\tau^2} \right] d\tau &= f_n; \quad (2.11) \\ x(\tau) \Delta(q) + \frac{k_1^2}{(1-2\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{\alpha_n^2 + q_1^2} \left[\frac{2\tau^2}{\alpha_n^2 + q_2^2} - \frac{\nu k_2^2}{\alpha_n^2} \right] &= \\ &= A_0 \frac{\nu k_1 \pi}{1-2\nu} \left[i\delta(\tau - k_1) + \frac{2k_1}{\pi q_1^2} \right], \end{aligned}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция и, кроме того, принято

$$\begin{aligned} \Delta_n(p) &= p_2 - \frac{(\alpha_n^2 + p_2^2)^2}{4\alpha_n^2 p_1}; \quad \Delta(q) = q_2 \operatorname{cth} q_2 h - \frac{(\tau^2 + q_2^2)^2}{4\tau^2 q_1} \operatorname{cth} q_1 h; \\ A_n &= -B_n \frac{\alpha_n^2 + p_2^2}{2\alpha_n}; \quad C(\tau) = -D(\tau) \frac{\tau^2 + q_2^2}{2\tau^2} \frac{\operatorname{sh} q_2 h}{\operatorname{sh} q_1 h}; \\ y_n &= (-1)^n B_n; \quad x(\tau) = \pi D(\tau) \operatorname{sh} q_2 h; \\ f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n \cos \alpha_n z; \quad g(z) \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Вид системы (2.11) наглядно показывает специфичность ситуации, с которой мы постоянно встречаемся при рассмотрении волноводных задач. Получаемые с помощью интегральных преобразований решения носят формальный характер. Формальный характер выражений (2.9) заключается в том, что коэффициенты системы (2.11) имеют особенности. Это не позволяет указать алгоритмы ее численного решения в общем случае. Однако в некоторых частных случаях, как будет показано в § 5 данной главы, использование этой системы может оказаться полезным.

Применение решения (2.10) приводит к более простой ситуации. После вычисления напряжений и их подстановки в граничные условия получаем два функциональных уравнения на отрезке $|z| \leq h$ для определения комплексных коэффициентов A_γ . В общем случае эта система может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma} A_{\gamma} \sigma_x(\xi_{\gamma}, z) &= 2f(z) G; \\ \sum_{\gamma} A_{\gamma} \tau_{xz}(\xi_{\gamma}, z) &= 2g(z) G. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Выражения для $\sigma_x(\xi_{\gamma}, z)$ и $\tau_{xz}(\xi_{\gamma}, z)$ определяются формулами (2.7). Возможные способы преобразования системы (2.13) в бесконечную систему алгебраических уравнений указаны в § 1 главы 5. Здесь рассматривается лишь способ, использованный в работах [281, 282] для получения обширных количественных данных.

В указанных работах используется вариационная формулировка исходной граничной задачи

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^h \int_0^{\infty} \left\{ \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_x \right] \delta u_x + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z \right] \delta u_z \right\} dx dz + \int_{-h}^h \{ [2Gf(z) - \sigma_x] \delta u_x + \\ & + [2Gg(z) - \tau_{xz}] \delta u_z \} |_{x=0} dz - 2 \int_0^{\infty} (\sigma_z \delta u_z + \tau_{xz} \delta u_x) |_{z=h} dx = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Если в качестве базисных функций использовать однородные решения, то после их подстановки в (2.14) получаем вариационную формулировку граничных условий на торце $x = 0$. Собирая коэффициенты при вариациях δA_{β} , приходим к следующей бесконечной системе уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma} A_{\gamma} \int_{-h}^h [\sigma_x(\xi_{\gamma}, z) u_x(\xi_{\beta}, z) + \tau_{xz}(\xi_{\gamma}, z) u_z(\xi_{\beta}, z)] dz = \\ = 2G \int_{-h}^h [f(z) u_x(\xi_{\beta}, z) + g(z) u_z(\xi_{\beta}, z)] dz, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$\beta, \gamma = 1, 2, \dots$

Отметим, что вариационное уравнение (2.14) записано для действительных смещений и напряжений. Его обобщение на общий случай комплексных корней содержится в работе [287].

В работах [281, 282] система (2.15) решалась методом редукции. В области частот $0 < \Omega < \Omega^*$ в решении сохранялись распространяющаяся мода и десять пар нераспространяющихся ($p = 1, 2, \dots$

..., 10). При переходе в область более высоких частот соответственно увеличивалось число распространяющихся мод, однако общее число неизвестных в системе оставалось постоянным. При этом погрешность удовлетворения граничным условиям на торце для рассмотренных нагрузок не превышала 4%.

Более сложный общий случай возбуждения трехмерного волнового поля в слое нагрузкой, изменяющейся вдоль оси Oy , рассмотрен в статье [287]. Эта работа не содержит обширных количественных данных, однако на одном примере в ней показано, что при определении постоянных A_{γ} из системы (2.15) и из системы, получающейся при алгебраизации соотношений (2.13) по методу наименьших квадратов, получаются близкие результаты.

§ 3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОЛЕЙ В ВОЛНОВОДЕ. РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Как и для задачи Лэмба, при изучении вынужденных колебаний слоя интересным является вопрос об эффективности возбуждения той или иной распространяющейся моды в зависимости от частоты, способа приложения и вида внешней нагрузки. Здесь мы остановимся только на случае возбуждения волн Рэлея — Лэмба.

Рассмотрим общее выражение среднего за период потока мощности $\bar{W}$ через поперечное сечение $x = \text{const}$ единичной ширины. Согласно выражению (5.8) главы 1 эта величина определяется формулой

$$\bar{W} = -\frac{i\omega}{4} \int_{-h}^h (\sigma_x u_x^* - \sigma_x^* u_x + \tau_{xz} u_z^* - \tau_{xz}^* u_z) dz. \quad (3.1)$$

Вначале конкретизируем эту формулу применительно к случаю бесконечного волновода, рассматривая сечение $x = c$, $c > a$. Прямая подстановка в (3.1) выражений для смещений и напряжений приводит к довольно громоздкому соотношению. Однако, используя свойства нормальных волн в волноводе, его можно существенно упростить.

Обратимся к составляющим смещений и напряжений, отвечающим комплексным корням. Если учесть четность функции $\bar{f}(\xi)$ и выражения для $u_x(\xi, z)$, $u_z(\xi, z)$, $F'(\xi)$ в (2.6), то легко убедиться, что все члены ряда по p (обозначенные для краткости $u_x^{(p)}(x, z)$ и $u_z^{(p)}(x, z)$) в (2.5) являются вещественными функциями от x и z . Следовательно, вещественными являются соответствующие составляющие $\sigma_x^{(p)}(x, z)$ и $\tau_{xz}^{(p)}(x, z)$ в выражениях для напряжений. Отсюда следует, что для любых пар $(\xi_p, -\xi_p^*)$ и $(\xi_q, -\xi_q^*)$ (в том числе и для $p = q$) комплексных корней справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(p)}(x, z) u_x^{(q)*}(x, z) - \sigma_x^{(p)*}(x, z) u_x^{(q)}(x, z) &\equiv 0, \\ \tau_{xz}^{(p)}(x, z) u_z^{(q)*}(x, z) - \tau_{xz}^{(p)*}(x, z) u_z^{(q)}(x, z) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Анализ соответствующих выражений показывает, что аналогичным свойством вещественности обладают составляющие смещений и напряжений, соответствующие чисто мнимым корням $\bar{\xi} = i\bar{\eta}_m$. Отсюда заключаем, что соотношения (3.2) справедливы не только для комплексных корней, но также для любой комбинации решений, отвечающих чисто мнимым и комплексным корням. Это свидетельствует о том, что средние по времени потоки энергии, соответствующие нормальным волнам с комплексными и чисто мнимыми постоянными распространения, равны нулю в каждой точке поперечного сечения волновода $x = c$.

Дальнейшее упрощение выражения для потока мощности связано с анализом вклада в (3.1) смешанных произведений частных решений, отвечающих вещественным и чисто мнимым, вещественным и комплексным, а также различным вещественным корням дисперсионного уравнения. При этом за основу берется справедливое для любой пары $\bar{\xi}_r$ и $\bar{\xi}_s$ ($r \neq s$) корней соотношение обобщенной ортогональности. В принятых обозначениях это соотношение имеет вид

$$\int_{-h}^h [\sigma_x(\bar{\xi}_r, z) u_x(\bar{\xi}_s, z) - \tau_{xz}(\bar{\xi}_r, z) u_z(\bar{\xi}_s, z)] dz = 0. \quad (3.3)$$

Различные подходы к выводу соотношения (3.2) и его роль при анализе особенностей распространения волн в волноводе обсуждаются в работах [11, 56, 140, 177].

Рассмотрим составляющую в общем потоке $\bar{W}$, соответствующую вещественному корню $\bar{\xi}_r = \bar{\xi}$ и произвольному корню $\bar{\xi}_s$. После подстановки соответствующих выражений в (3.1) находим, что средний поток мощности пропорционален разности следующих интегралов:

$$I_1 = \int_{-h}^h [\sigma_x(\bar{\xi}_r, z) u_x^*(\bar{\xi}_s, z) + \tau_{xz}(\bar{\xi}_r, z) u_z^*(\bar{\xi}_s, z)] dz, \quad (3.4)$$

$$I_2 = \int_{-h}^h [\sigma_x^*(\bar{\xi}_r, z) u_x(\bar{\xi}_s, z) + \tau_{xz}^*(\bar{\xi}_r, z) u_z(\bar{\xi}_s, z)] dz.$$

Из выражений (2.6) и (2.7) имеем следующую группу равенств:

$$\begin{aligned} \sigma_x^*(\bar{\xi}_r, z) &\equiv \sigma_x(\bar{\xi}_r, z), \quad \tau_{xz}^*(\bar{\xi}_r, z) \equiv -\tau_{xz}(\bar{\xi}_r, z), \\ u_x^*(\bar{\xi}_r, z) &\equiv -u_x(\bar{\xi}_r, z), \quad u_z^*(\bar{\xi}_r, z) \equiv u_z(\bar{\xi}_r, z), \\ u_x^*(i\bar{\eta}_s, z) &\equiv -u_x(-i\bar{\eta}_s, z), \quad u_z^*(i\bar{\eta}_s, z) \equiv u_z(-i\bar{\eta}_s, z), \\ u_x^*(\bar{\xi}_s, z) &\equiv -u_x(\bar{\xi}_s, z), \quad u_z^*(\bar{\xi}_s, z) \equiv u_z(\bar{\xi}_s, z). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из этих соотношений следует, что интегралы I_1 и I_2 в (3.4) во всех случаях сводятся к выражениям вида (3.3) и, таким образом, равны нулю. Этим заканчивается доказательство важного и не очевидного положения об аддитивности среднего потока мощности

в волноводе. Суть этого положения в том, что отличный от нуля средний за период поток мощности через сечение $x = \text{const}$ связан только с распространяющимися модами и равен сумме мощностей, переносимых отдельными распространяющимися волнами, т. е.

$$\bar{W} = \sum_{n=1}^N \bar{W}_n. \quad (3.6)$$

Составляющие потока мощности $\bar{W}_n$ при этом определяются по формуле

$$\bar{W}_n = \frac{i\omega}{2} |A(\xi_n)|^2 \int_{-h}^h [\sigma_x(\bar{\xi}_n, z) u_x(\bar{\xi}_n, z) - \tau_{xz}(\bar{\xi}_n, z) u_z(\bar{\xi}_n, z)] dz. \quad (3.7)$$

После довольно громоздких выкладок, с учетом соотношений (2.6), (2.7) это выражение можно представить в виде

$$\bar{W}_n = G\omega |A(\xi_n)|^2 \frac{h^2 \Omega^2}{2\pi^2} F'(\bar{\xi}_n) \left(\alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\beta}{2} \right) \Big|_{\bar{\xi}=\bar{\xi}_n}. \quad (3.8)$$

Очевидно, эта формула в одинаковой мере справедлива как для бесконечного, так и для полубесконечного волновода. Однако если в первом случае явное выражение для $A(\xi_n)$ известно — формула (2.6), то во втором коэффициенты A_n необходимо определить из бесконечной системы (2.15).

Поток мощности, подводимый к бесконечному слою, можно вычислить и путем рассмотрения работы внешней нагрузки. Согласно формуле (5.8) главы 1 средний за период поток мощности $\bar{W}$ через нагруженную нормальными силами площадку $z = h$, $|x| \leq a$ определяется соотношением

$$\bar{W} = -G\omega \int_{-a}^a f(x) \text{Im} u_z(x, h) dx. \quad (3.9)$$

Из общего выражения (2.3) находим

$$u_z(x, h) = \frac{\Omega^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\beta}{2}}{F(\bar{\xi})} \bar{f}(\bar{\xi}) \exp(i\bar{\xi}x) d\bar{\xi}. \quad (3.10)$$

Согласно (3.9) для вычисления $\bar{W}$ необходимо знать величину $\text{Im} u_z(x, h)$ при $|x| \leq a$. Это обстоятельство не позволяет непосредственно использовать переход к контурному интегрированию, без уточнения структуры функции $\bar{f}(\bar{\xi})$. Учитывая предположение о четности функции $f(x)$ в (2.1) и вытекающую отсюда вещественность $\bar{f}(\bar{\xi})$, в общем случае можно записать

$$\bar{f}(\bar{\xi}) = \psi(\bar{\xi}) \exp(i\bar{\xi}a) + \psi^*(\bar{\xi}) \exp(-i\bar{\xi}a). \quad (3.11)$$

Подстановка этого выражения в (3.10) приводит к представлению $u_z(x, h)$ в виде суммы двух несобственных интегралов.

Полученное таким образом выражение для $u_z(x, h)$, как уже неоднократно отмечалось, является формальным. Способ его расшифровки должен основываться на физических соображениях. Здесь, как и в задаче Лэмба (см. главу 3), важнейшим является вопрос об однозначности решения. Что касается зоны вне области нагружения, то здесь выбор однозначного, физически обоснованного решения осуществляется с помощью условий излучения. Именно они позволяют правильно провести контур в плоскости $\xi = \xi + i\eta$ при переходе к контурным интегралам.

Для вычисления характеристик поля в области $|x| \leq a$ также следует указать правило образования контуров при вычислении интеграла в (3.10). Однако условия излучения не позволяют этого сделать, поскольку в любом сечении $x = \text{const}$ в этой области должны наблюдаться волны, бегущие в обоих направлениях.

Рассмотрим отдельно два интеграла, образующие выражение (3.10):

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\xi)}{F(\xi)} \alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\beta}{2} \exp \left[i \frac{\pi\xi}{2h} (x+a) \right] d\xi, \quad (3.12)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^*(\xi)}{F(\xi)} \alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\beta}{2} \exp \left[i \frac{\pi\xi}{2h} (x-a) \right] d\xi.$$

В такой записи очень легко решить вопрос о выборе замыкания контура для каждого из них. Ясно, что для I_1 контур необходимо замкнуть в верхней полуплоскости ($\text{Im } \xi > 0$), а для I_2 — в нижней ($\text{Im } \xi < 0$). Для окончательного выбора контуров необходимо «разделить» полюса на вещественной оси. С этой целью рассмотрим величины I_1 и I_2 на границе области нагружения. При $x = a$ I_2 не дает бегущих волн, и все бегущие волны в этом сечении связаны с I_1 . Поэтому в интеграле I_1 должны содержаться все бегущие волны, уносящие энергию в положительном направлении оси Ox . Аналогично интеграл I_2 при $x = -a$ должен содержать все волны, уносящие энергию в отрицательном направлении оси Ox . Эти требования однозначно определяют положение контуров для интегралов I_1 и I_2 относительно полюсов на вещественной оси. В частности, когда все распространяющиеся моды имеют одинаковый знак групповой и фазовой скоростей, то контур для I_1 должен охватывать все положительные полюса, а контур для I_2 — отрицательные.

После перехода к контурным интегралам в (3.12) и вычисления их по теории вычетов находим следующее представление для $\text{Im } u_z(x, h)$:

$$\text{Im } u_z(x, h) = 2\Omega^2 \sum_{n=1}^N \frac{\bar{f}(\xi_n)}{F'(\xi_n)} \left(\alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\beta}{2} \right) \Big|_{\xi=\xi_n} \cos \xi_n x. \quad (3.13)$$

При выводе этого равенства использованы соотношения

$$\psi^*(-\xi) = \psi(\xi), \quad F'(-\xi) = -F'(\xi), \quad \text{Im} [i\psi(\xi) \exp(i\xi a)] = \frac{\bar{f}(\xi)}{2}. \quad (3.14)$$

Полюса, соответствующие чисто мнимым и комплексным нулям функции $F(\xi)$, не дают вклада в выражение для $\text{Im } u_z(x, h)$. Если учесть (3.9), то это значит, что средняя за период работа внешних сил при возбуждении неоднородных волн равна нулю.

В связи с изложенным способом вычисления $\text{Im } u_z(x, h)$ следует обратить внимание на следующее. Хотя из определения функции $\bar{f}(\xi)$ очевидно, что она не имеет особенностей на вещественной оси, функция $\psi(\xi)$ в (3.11) может иметь такие особенности. Формально это приводит к появлению в интегралах (3.12) некоторых дополнительных полюсов на вещественной оси. Однако в общем случае можно показать, что соответствующие вычеты не дают вклада в мнимую часть величины $u_z(x, h)$.

Подставляя (3.13) в выражение для потока мощности через нагруженную площадку на стороне $z = h$ слоя, находим

$$\bar{W} = -2G\omega\Omega^2 \sum_{n=1}^N \frac{[\bar{f}(\xi_n)]^2}{[F'(\xi_n)]^2} \left(\alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\beta}{2} \right) \Big|_{\xi=\xi_n}. \quad (3.15)$$

Обращаясь к формулам (3.6), (3.8) и учитывая, что $|A(\xi_n)| = \frac{2\pi}{h} \frac{\bar{f}(\xi_n)}{|F'(\xi_n)|}$, получаем, что выражения для (3.8) и (3.15) отличаются лишь знаком. Равенство абсолютных величин является естественным следствием отсутствия потерь в упругом волноводе. Различие в знаках связано с несовпадением направлений координатных осей с направлением потока мощности в двух случаях.

Из анализа выражения для потока мощности (3.15) можно заключить, что и в случае волн Рэлея — Лэмба в волноводе возможны резонансные явления на тех частотах, где $F'(\xi_n) = 0$. Из всей совокупности таких частот прежде всего выделим частоты запираия, для которых $\xi_n = 0$. Здесь резонансные явления наблюдаются для несамоуравновешенных внешних нагрузок, т. е. когда $\bar{f}(0) \neq 0$. Если нагрузка самоуравновешена ($\bar{f}(0) = 0$), то, как и в случае SH-волн, такие резонансы не проявляются. При этом соответствующая нормальная волна не уносит энергию.

Вторая группа частот, для которых $F'(\xi_n) = 0$, представляет критические частоты типа Ω^* на второй вещественной ветви (см. рис. 61). Структура волнового поля в этих точках до конца не ясна и требует дополнительного исследования.

Результаты решения задачи о возбуждении торца полубесконечного волновода для случая SH-волн естественно приводят к

постановке задач о резонансах в таком волноводе и при возбуждении волн Рэлея — Лэмба. Этот сложный и интересный вопрос рассматривается далее в § 5.

§ 4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОЛЕЙ В ВОЛНОВОДЕ. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Формулы (3.6), (3.7) и (3.15) позволяют провести количественный анализ распределения энергии между распространяющимися модами Рэлея — Лэмба в полубесконечном и бесконечном волноводах.

В работе [282] подробно рассмотрена задача о возбуждении полубесконечного волновода равномерно распределенной нагрузкой. Некоторые данные о действии трех видов самоуравновешенной нагрузки приведены в [183]. Вычисления в широком диапазоне частот позволили получить интересную картину распределения подводимой энергии по распространяющимся модам. Результаты расчетов [282] при $\nu = 0,25$ и $0 < \Omega < 4,2$ представлены на рис. 99, где дано процентное распределение энергии по модам. Здесь сплошная линия характеризует энергетику первой моды, штриховая — второй, пунктирная — третьей.

Характерно, что на большинстве частот изученного диапазона почти вся подводимая энергия уносится только одной модой. Однако эта доминирующая мода не является одной и той же на всех частотах. На низких частотах ($0 < \Omega < \Omega^* = 1,635$) распространяется лишь одна мода, уносящая всю энергию. На частотах $\Omega^* < \Omega < k = 1,732$ (см. рис. 61) существуют три распространяющиеся моды. В этом диапазоне энергетически наиболее выражена вторая мода. Важным здесь является то, что третья мода, имеющая противоположные знаки групповой и фазовой скоростей («обратная» волна), возбуждается достаточно сильно, унося более 30% энергии. В определенной мере это обстоятельство объясняет успех экспериментов [228] по обнаружению «обратной» волны. В диапазоне $k < \Omega < 2$ возможны только две распространяющиеся моды, причем вторая сохраняет доминирующее значение. При $\Omega = 2$ снова появляется третья распространяющаяся мода, которая постепенно становится энергетически самой сильной.

Примечательным в энергетическом поведении первой моды является счень резкий спад относительной величины переносимой ею энергии сразу после появления других распространяющихся мод. Ни одна из последующих мод не обнаруживает таких свойств. Каждая из них постепенно набирает силу и также постепенно уступает место последующей моде. Наглядное представление описанных свойств полубесконечного волновода дано в работе [282] с использованием картины дисперсионного спектра. На рис. 100 выделены частотные диапазоны, в которых соответствующая мода является доминирующей.

В работе [282] для объяснения описанного энергетического

поведения исследуется зависимость от Ω распределения $\sigma_x(z)$ для различных распространяющихся мод. При этом прослеживается довольно четкая связь между характером распределения этой величины в доминирующей моде и характером внешней нагрузки. Доминирующей каждый раз является мода, у которой распределение $\sigma_x(z)$ является в определенном смысле наиболее близким к равномерному (отсутствуют перемены знака). Исключение из этого правила составляет лишь первая мода, по существу, скачком теряющая доминирующий характер после появления второй и третьей распространяющихся мод.

Говоря об особенностях возбуждения первой моды, следует обратить внимание также на то, что именно эта мода при больших Ω локализуется вблизи поверхности, становясь похожей на волну Рэлея в полупространстве. Поэтому описанные выше количественные результаты свидетельствуют о том, что возбудить такой тип волнового движения равномерной нагрузкой с торца практически невозможно.

Из представленных результатов видно, что резонансные явления на частотах запирания при силовом возбуждении торца для волн Рэлея — Лэмба не наблюдаются. В определенной мере это объясняется наличием связи между отдельными распространяющимися модами. Формально математическим следствием такой связи является неортогональность однородных решений.

Интересной иллюстрацией сложного процесса отражения волн от свободного торца волновода являются результаты работы [281]. В ней рассмотрен процесс отражения входящей из бесконечности первой распространяющейся моды от свободного торца $x = 0$. Математически такая задача полностью эквивалентна предыдущей задаче о возбуждении волновода нагрузкой на торце. Однако в физическом плане она представляется более сложной, поскольку в этом случае характер нагрузки на торце меняется с частотой.

Как видно из выражений (2.7), $\sigma_x(\xi, z)$ является четной функцией от ξ , а $\tau_{xz}(\xi, z)$ — нечетной. Поэтому суперпозицией падающей волны и одной распространяющейся отраженной волны того же типа нельзя удовлетворить нулевым граничным условиям на торце одновременно по σ_x и τ_{xz} . Именно поэтому возникает необходимость в использовании всех мод для удовлетворения граничным условиям и, следовательно, решения бесконечной системы типа (2.13).

Наиболее интересной характеристикой процесса отражения здесь также является распределение энергии между отдельными модами.

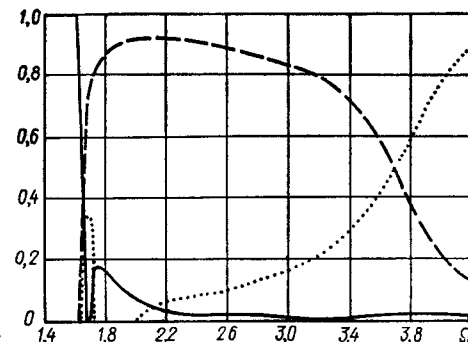


Рис. 99.

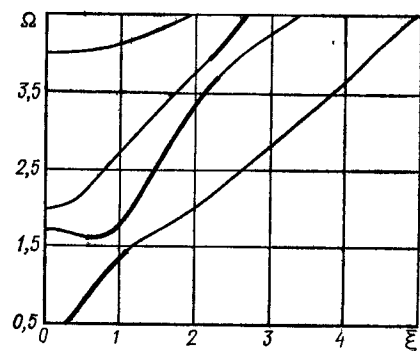


Рис. 100.

падающей и отраженной волн. Возбуждение нераспространяющихся мод может быть при этом столь эффективным, что соответствующие им амплитуды напряжений (смещений) более чем в 30 раз превосходят амплитуду падающей волны.

После появления других распространяющихся мод в интервале $\Omega^* < \Omega < k$ доля первой моды постепенно уменьшается, а третьей («обратная» волна) — увеличивается. Вблизи частоты $\Omega = k$ третья волна уносит более 60% подводимой энергии. На самой частоте $\Omega = k$ главенствующую роль играет вторая распространяющаяся мода. В интервале $k < \Omega < 2$ существуют только две распространяющиеся моды, причем доминирующей является первая. После частоты $\Omega = 2$ роль первой моды довольно быстро падает и доминирующей становится третья мода.

При сравнении данных рис. 99 и 101 обнаруживается некоторая общая закономерность — энергетический вес отдельных распространяющихся мод в обоих случаях существенно зависит от частоты. Однако говорить о частотных диапазонах, в которых та или иная мода имеет доминирующее значение вне зависимости от вида внешней нагрузки, по-видимому, нельзя. Связь между характером нагрузки и наиболее интенсивно возбуждаемой модой в общем случае является чрезвычайно сложной. В формировании амплитуды уходящих волн участвует вся совокупность неоднородных, экспоненциально убывающих от торца волн.

Рассмотренная задача об отражении первой нормальной моды от свободного торца волновода является интересной вследствие наличия тесной ее связи с проблемой отражения волны Рэлея от места резкого изменения геометрии поверхности (угла). Именно первая распространяющаяся мода на высоких частотах переходит в волну Рэлея. Однако в рассмотренном частотном диапазоне (см. рис. 101) первую моду еще нельзя отождествлять с волной Рэлея. Расчеты при более высоких частотах позволили бы дать полный количественный энергетический анализ процесса отражения поверхностной волны от прямого угла, и в частности оценить потери на возбуждение объемных волн.

Вычисления в работе [281] выполнены при $\nu = 0,25$ в частотном диапазоне $1,6 \leq \Omega \leq 2,2$. Используя тот же способ изображения мод, что и на рис. 99, результаты расчетов в этом случае можно представить так, как указано на рис. 101.

На частотах $\Omega < \Omega^*$ вся энергия уносится от торца первой распространяющейся модой. Однако это, конечно, не значит, то волновое движение вблизи торца является простой суммой

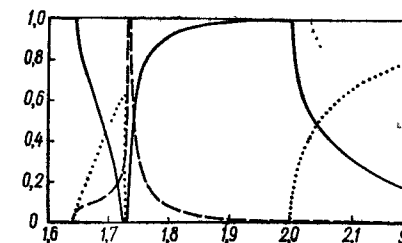


Рис. 101.

Анализ волнового поля в полубесконечном волноводе при возбуждении с торца позволяет рассмотреть некоторые аспекты проблемы формулировки динамического принципа Сен-Венана. Специфику задачи и возможную формулировку принципа для неустановившихся процессов подробно рассмотрели авторы работы [107]. В случае установившихся волновых движений уже на основе анализа дисперсионных соотношений можно утверждать, что при динамическом нагружении эффект Сен-Венана не существует. Это обусловлено наличием распространяющихся мод при любой частоте для слоя со свободными от напряжений боковыми поверхностями. Роль граничных условий в таких задачах очень важна. В частности, в случае заземленных боковых поверхностей волновод заперт вплоть до определенной частоты. Отличия от нуля и низшая частота запертия для неосесимметричной деформации цилиндра при $n \geq 2$ (см. рис. 58 и 59). В этих случаях любое внешнее возбуждение с частотой меньше частоты запертия приведет лишь к экспоненциально убывающим (неоднородным) волнам. На первый взгляд, здесь можно говорить о справедливости принципа Сен-Венана в той его формулировке, которая подчеркивает факт убывания напряжений с удалением от места приложения самоуравновешенной нагрузки [82]. Однако в этих случаях существует принципиальное различие — убывание напряжений происходит для любой нагрузки, самоуравновешенной или нет.

Если рассматривать принцип Сен-Венана как некоторое выражение специфики краевых задач статической теории упругости, а именно их эллиптичности, оставляя в стороне вопрос о том, на каком расстоянии и с какой точностью одна система сил эквивалентна другой, то в случае полубесконечного слоя и цилиндра можно сформулировать его динамический аналог. Из проведенного исследования видно, что две системы гармонических во времени сил, приложенных к торцу волновода и производящих одинаковую работу за период, неразличимы на достаточно большом расстоянии от торца. При этом частота воздействия должна быть меньше той, при которой в системе возможно существование двух и более распространяющихся мод. В последнем случае такой принцип уже не справедлив, поскольку распределение энергии между модами зависит от деталей распределения нагрузки на торце. Поскольку эти моды распространяются независимо и без изменений, то распределение напряжений всюду внутри волновода будет зависеть от характера внешней нагрузки.

При формулировке динамического анализа принципа Сен-Венана интересным является вопрос об оценке расстояния от торца,

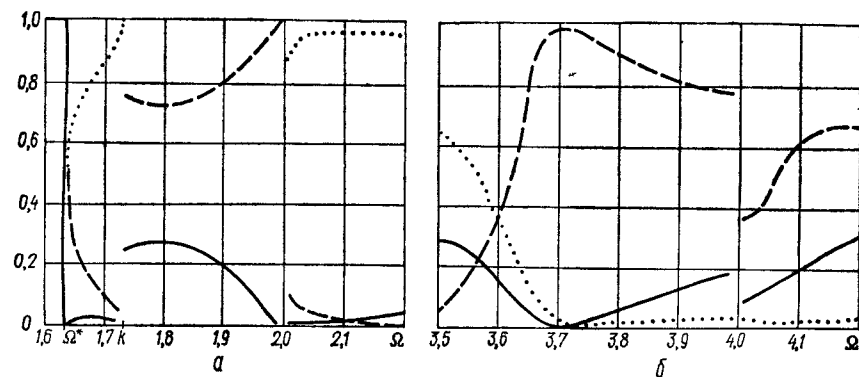


Рис. 102.

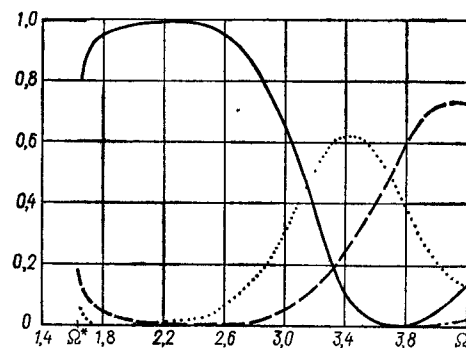


Рис. 103.

дальше которого распределение смещений и напряжений в волноводе совпадает, по сути, с их распределением в распространяющейся моде. Решение этого вопроса в значительной мере усложняется в связи с наличием явления краевого резонанса. При этом для одной и той же нагрузки амплитуды нераспространяющихся мод с изменением частоты могут возрастать в сотни раз [281]. Специфике такого

явления в полубесконечных телах посвящен следующий параграф.

Кроме рассмотренного случая возбуждения волн Рэлея — Лэмба нагрузкой на торце полубесконечного волновода определенным интерес представляет возбуждение бесконечного волновода нагрузкой на участке поверхности. В связи с отмеченным выше различием здесь целесообразно рассмотреть воздействие несамобалансированной и самоуравновешенной нагрузок. Вычисления проведены для таких видов функции $f(x)$ в (2.1):

$$f(x) = f_0 = \text{const}, \quad (4.1)$$

$$f(x) = f_0 \cos \frac{\pi x}{a}$$

при $\nu = 0,25$ и $a = h$.

На рис. 102 представлено распределение энергии между распространяющимися модами в слое для случая равномерного нагружения. Обозначение мод такое же, как на рис. 99 и 101. Рассмотренный диапазон частот $1,6 \leq \Omega \leq 4,2$ разбит на две части: $1,6 \leq \Omega \leq 2,2$ (рис. 102, а) и $3,3 \leq \Omega \leq 4,2$ (рис. 102, б). В промежуточном интервале энергия переносится практически первой и третьей

модами с монотонно (почти линейно) изменяющимся процентным распределением.

Характерным для рис. 102, а, б является наличие зон резкого изменения силы отдельных мод в зависимости от частоты. Как и в случае возбуждения с торца, зона $\Omega^* \leq \Omega \leq 2$ является зоной сильной нерегулярности поведения мод. Однако процентное содержание энергии в одноименных модах здесь и для торцевого возбуждения волновода (см. рис. 99) существенно различное. В частности, для возбуждения в этом диапазоне «обратной» волны рассматриваемый случай нагружения боковых поверхностей представляется гораздо более эффективным.

Существенно отличным является также поведение распространяющихся мод в окрестности частот записания. В связи с наличием резонансов ($F'(\xi_n) = 0$) в окрестности этих частот происходит резкое изменение характера движения, что отражается в скачкообразном изменении величины энергии, переносимой той или иной модой. Такая же особенность обнаруживается и в окрестности частоты $\Omega = \Omega^*$, где также $F'(\xi)|_{\Omega=\Omega^*} = 0$.

Решающую роль резонансных явлений в формировании энергетической картины, представленной на рис. 102, подчеркивают данные расчетов для второго случая нагружения в (4.1). Как указывалось выше, самоуравновешенность внешней нагрузки является достаточной для устранения особенностей в выражении для потока мощности. В связи с этим все кривые на рис. 103, характеризующие зависимость от частоты вклада отдельных мод в общий поток мощности, являются очень плавными. Сравнение данных рис. 99 и 102, с одной стороны, и рис. 103 — с другой, свидетельствует о том, что характер волнового движения в слое на больших расстояниях от места приложения нагрузки существенно зависит от способа ее распределения по поверхности. В том частотном диапазоне, где существует только одна распространяющаяся мода, используя понятие энергетической эквивалентности нагрузки, также можно говорить о существовании некоторого динамического аналога принципа Сен-Венана.

Кроме резонансных явлений, которые на наблюдались при возбуждении волновода с торца, существует еще одно важное различие между двумя рассматриваемыми случаями нагружения. Данные расчетов [281, 282] для полубесконечного волновода можно обобщить в виде утверждения о том, что при фиксированном способе нагружения существует только один частотный диапазон, в котором данная мода является энергетически доминирующей. В то же время расчеты для случая равномерного нагружения слоя по участку боковых поверхностей показывают, что одна и та же мода может быть доминирующей в различных частотных диапазонах. Так, кроме естественного интервала $0 < \Omega < \Omega^*$ первая распространяющаяся мода оказывается доминирующей в интервалах $4,5 \leq \Omega \leq 4,9$ и $6,4 \leq \Omega \leq 6,7$.

§ 5. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ВОЛНОВОДЕ. КРАЕВОЙ РЕЗОНАНС

Некоторые из проанализированных выше результатов в определенной мере позволяют говорить об аналогии между волновыми полями в случаях SH-волн и волн Рэлея — Лэмба. Однако имеющиеся данные о возбуждении полубесконечного волновода свидетельствуют и о принципиальном различии между ними. При генерации волн Рэлея — Лэмба на частотах запирапия не наблюдается резонансных ситуаций. Резонансные явления, возникающие в этом случае, имеют отличную от резонансов на SH-волнах природу и связываются с нераспространяющимися модами.

Как отмечалось при рассмотрении задачи для конечного прямоугольника, нераспространяющиеся моды с комплексными постоянными распространения играют решающую роль в существовании явления краевого резонанса. Естественно, что рассмотрение полубесконечного волновода при различных условиях возбуждения должно доставить дополнительную важную информацию об этом явлении. Именно это привело к появлению ряда работ, в которых явление краевого резонанса изучалось в полубесконечных телах. Кроме работ [281, 282] плоский случай полубесконечного волновода подробно рассмотрен в работе [158] в связи с решением задачи об отражении первой распространяющейся моды от свободного торца. В работе [158] приведено упрощенное соотношение для определения частоты краевого резонанса. При этом используется лишь одна нераспространяющаяся мода, соответствующая наименьшему по модулю комплексному корню уравнения Рэлея — Лэмба. Данные, полученные из такого соотношения, находятся в хорошем согласии с результатами работы [281], полученными с учетом большего числа нераспространяющихся мод.

Аналогичная проблема для свободного торца цилиндра подробно рассмотрена теоретически и экспериментально в работе [288]. В ней изучена зависимость определяемой расчетным путем частоты краевого резонанса от количества используемых при аппроксимации поля нераспространяющихся мод. Явление краевого резонанса исследовалось также в связи с излучением энергии через торец цилиндра в акустическую среду. Случай излучения в полубесконечный акустический волновод рассмотрен в работе [234]. Излучение в акустическое полупространство анализируется в работе [219]. В этих работах оценено влияние присоединенных масс жидкости на частоту краевого резонанса и показано принципиальное различие в эффективности излучения вблизи этой частоты. Излучение в волновод на частоте краевого резонанса ничтожно мало, в то время как излучение в полупространство является достаточно эффективным.

Явление краевого резонанса в полубесконечных телах изучалось также с использованием приближенной теории «второго порядка». Случай полуполосы рассмотрен в работе [179], а полуцилиндра —

в [223]. Достаточно высокая эффективность этой теории в описании краевого резонанса позволила решить с ее помощью интересную задачу о динамической концентрации напряжений при дифракции плоской волны на круговом отверстии в слое [220]. Установлено существенное увеличение коэффициента концентрации напряжений на частоте краевого резонанса.

Многочисленные работы по краевому резонансу в полубесконечных телах типа полуполосы и полуцилиндра показали, что частота, на которой происходит эффективное возбуждение колебаний вблизи торца, действительно совпадает с частотой краевого резонанса в конечных пластинах и цилиндрах. Однако говорить о резонансе в полубесконечном теле можно лишь условно, поскольку здесь не наблюдается тенденции к неограниченному росту амплитуд при стремлении частоты к величине Ω_c [281]. Вследствие связанности через посредство граничных условий на торце неоднородных волн с распространяющейся модой в систему привносится радиационное демпфирование, и амплитуда колебаний остается конечной.

В связи с этим замечанием представляет интерес рассмотрение некоторых количественных проявлений краевого резонанса в полубесконечном теле. При исследовании отражения от свободного торца приходящей из бесконечности первой нормальной моды в области $\Omega < \Omega^*$ суммарный вектор смещений представляется в виде

$$u(x, z) = A_0 u(\xi_1, z) \exp(-i\xi_1 x) + A_1 u(\xi_1, z) \exp(i\xi_1 x) + \sum_{p=2}^{\infty} [A_p u(\xi_p, z) \exp(i\xi_p x) + A_p^* u^*(\xi_p, z) \exp(i\xi_p^* x)]. \quad (5.1)$$

Выполнение нулевых граничных условий на торце с помощью вариационного принципа [281] приводит к бесконечной системе, которая решается способом редукции. Вопрос о достоверности результатов, получаемых с использованием такого способа при последовательном увеличении порядка конечной системы, исследовался в работах [281, 282] и особенно подробно в работе [288]. Из полученных в [281] результатов наибольший интерес представляют данные, которые описывают поведение коэффициентов A_1 и A_2 в (5.1). Из закона сохранения энергии, очевидно, следует, что $|A_1| = A_0$ (A_0 — считаем вещественным и положительным). При анализе резонансных ситуаций, однако, большое значение имеют фазовые характеристики. В связи с этим положим

$$A_1 = -A_0 \exp(ip\psi). \quad (5.2)$$

Зависимость сдвига фаз ψ от частоты Ω характеризуется данными о поведении величин $\operatorname{Re} \frac{A_1}{A_0}$ (рис. 104, сплошная кривая) и $\operatorname{Im} \frac{A_1}{A_0}$ (штриховая кривая) ($v = 0,31$). В рассмотренном диапазоне частот происходит изменение фазы от 180° до -180° . Для сравнительно низких частот ($\Omega < 1,40$) фазовые соотношения для падающей и отраженной распространяющихся волн такие, как и можно было

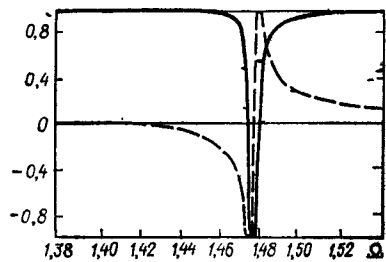


Рис. 104.

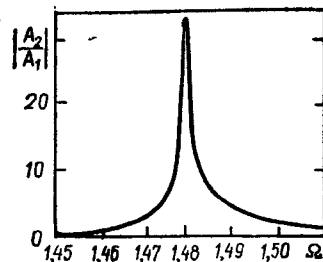


Рис. 105.

ожидать в рамках стержневой модели. В области частот $\Omega \approx 1,48$ наблюдается резкое изменение фазы, характерное для всех резонансных явлений. Частоту, на которой $\psi = 0$, $\text{Im } A_1 = 0$, $A_1 = -A_0$, естественно считать резонансной. Это наблюдается на частоте $\Omega_e = 1,483$.

После прохождения резонанса с увеличением Ω сдвиг фаз ψ стремится к -180° .

Для показа необычности процесса отражения падающей нормальной волны от свободного торца существенной является зависимость от Ω величины $\left| \frac{A_2}{A_1} \right|$. Эта зависимость характеризует степень возбуждения первой нераспространяющейся моды в процессе отражения (рис. 105) [281]. Видно резкое увеличение амплитуды первой нераспространяющейся моды в окрестности частоты $\Omega_e = 1,483$.

Что касается остальных нераспространяющихся мод в (5.1), то вопрос об их поведении в достаточной мере еще не исследован. Имеющиеся в работе [158] данные свидетельствуют о том, что и для величины $\left| \frac{A_2}{A_1} \right|$ характерна зависимость типа показанной на рис. 105. Однако количественное усиление второй нераспространяющейся моды выражено значительно слабее.

Явление краевого резонанса наблюдается также при возбуждении волновода нагрузкой на торце. Как уже отмечалось, связь между распространяющейся и нераспространяющейся модами приводит к тому, что все факторы напряженно-деформированного состояния остаются конечными на любой частоте. В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть [45] волновод из материала с величиной $\nu = 0$. В этом случае первая распространяющаяся мода оказывается несвязанной с нераспространяющимися. Поэтому с помощью выбора нагрузки на торце можно устранить радиационное демпфирование и получить действительный резонанс в полубесконечном волноводе.

Для анализа возбуждения волновода с величиной $\nu = 0$ нагрузкой на торце в области частот $0 < \Omega < \Omega^* = 1,374$ удобно пользоваться решением в форме (2.9). В этом случае система (2.11) пре-

образуется к виду

$$\begin{aligned} ik_1 A_0 &= f_0, \\ y_n \Delta_n(p) + \frac{2k_1^2 \alpha_n^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau^2 + p_1^2)(\tau^2 + p_2^2)} &= f_n, \\ x(\tau) \Delta(q) + 2k_1^2 \tau^2 \sum_{n=1}^\infty \frac{y_n}{(\alpha_n^2 + q_1^2)(\alpha_n^2 + q_2^2)} &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

В отличие от общего случая здесь постоянная A_0 определяется независимо и только через несамоуравновешенную часть внешней нагрузки f_0 . Остальные неизвестные определяются из связанной системы с вещественными коэффициентами.

В случае $\nu = 0$ решение уравнений Ламе

$$u_x = A_0 \exp(ik_1 x), \quad u_z = 0 \quad (5.4)$$

описывает распространяющуюся моду при любой частоте. Таким образом, структура систем (5.4) указывает и на существенные физические различия случаев $\nu = 0$ и $\nu \neq 0$, по крайней мере в диапазоне частот, где существует только одна распространяющаяся мода. В этом диапазоне частот величины p_1 и p_2 в (2.9) вещественны для всех n . Если при $\nu \neq 0$ любая (самоуравновешенная или несамоуравновешенная) нагрузка на торце возбуждает распространяющуюся моду, то при $\nu = 0$ это не происходит. Для самоуравновешенной нагрузки полуполоса оказывается запертой вплоть до частоты, при которой появляется вторая распространяющаяся мода ($\Omega = \Omega^*$). Поэтому следует ожидать, что в случае полуполосы определитель системы, образованный вторым и третьим уравнениями в (3.1), может обратиться в нуль на некоторой частоте $\Omega = \Omega_e$ и, следовательно, будет иметь место резонанс в бесконечном упругом теле. Это предположение проверяется непосредственным анализом динамических характеристик полуполосы для различных значений частоты. Вычислительный процесс основывается на асимптотических свойствах неизвестных в (5.3):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau) = a_0 = \text{const}. \quad (5.5)$$

В результате найдено, что при изменении частоты от $\Omega = 1,26$ до $\Omega = 1,27$ происходят изменение знака определителя и изменение на 180° фазы всех характеристик напряженного состояния. Именно по таким признакам фиксируется наличие резонанса при изучении вынужденных колебаний конечных упругих тел.

Для характеристики найденного краевого резонанса в полубесконечной полосе важно проанализировать соответствующую форму колебаний. На рис. 106 при $\Omega = 1,26$ показана форма окрестности торца полуполосы в равновесном состоянии (штриховые прямые) и в момент максимального отклонения от положения равновесия (сплошная линия). Чтобы иметь представление о векторе переме-

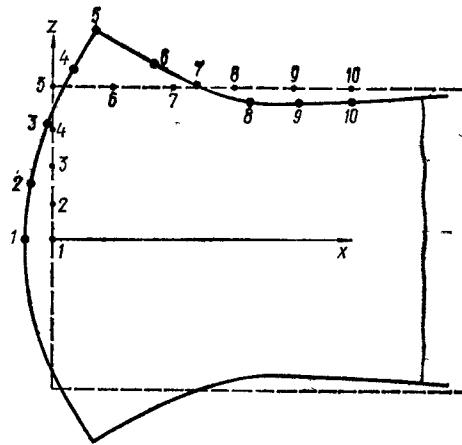


Рис. 106.

чению u_z компонент вектора смещений точек полуполосы в сечении $z = 0,75 h$. Сплошные линии характеризуют форму краевого резонанса, а штриховые — смещения в первой нераспространяющейся моде.

Оценить данные рис. 107 можно двояко. Существует определенная степень близости указанных кривых, что можно истолковать как указание на доминирующий вклад в форму колебаний первой нераспространяющейся волны. Это особенно хорошо видно на фоне характера движений во второй нераспространяющейся моде (пунктирные кривые). Следует обратить внимание и на различия, само существование которых свидетельствует о том, что в образовании формы краевого резонанса участвуют все нераспространяющиеся моды.

Аналогичная ситуация разделения распространяющейся и нераспространяющейся мод наблюдается и в полубесконечном цилиндре при осесимметричных колебаниях для $\nu = 0$ [93]. При этом также наблюдается неограниченный рост характеристик напряженно-деформированного состояния при возбуждении торца самоуравновешенной нагрузкой при подходе к частоте краевого резонанса $\Omega_2^{(e)} = 2,365$.

Рассмотренные случаи краевого резонанса в полубесконечных волноводах при $\nu = 0$ дают возможность предположить, что аналогичное интересное явление будет наблюдаться и в тех случаях, когда наименьшая критическая частота волновода не равна нулю при любых ν . Такими случаями являются неосесимметричные движения в упругом цилиндре при $l \geq 2$ (см. рис. 58). Здесь имеем ненулевую частоту Ω_2^* , ниже которой волновод заперт. Как уже отмечалось в § 8 главы 6, в конечном длинном цилиндре при $l \geq 2$ существует резонансная частота $\Omega_2 = \Omega_2^{(e)} < \Omega_2^*$. Это предопределяет возможность существования резонанса, связанного с нераспространяю-

щихся модами, и для полубесконечного цилиндра в указанном диапазоне $\Omega_2 < \Omega_2^*$.

Общее решение уравнений Ламе для установившихся неосесимметричных колебаний полубесконечного цилиндра $0 \leq r \leq 1, z \geq 0$ при гармонической зависимости $\exp(-i\omega t)$ искомым величинам строится так же, как и для конечного цилиндра (см. § 8 главы 6). Отметим только, что первую часть общего решения (8.2) главы 6 для конечного цилиндра нельзя автоматически переносить на данный случай формальной заменой суммирования по дискретному параметру n на интегрирование по непрерывному параметру τ . Это связано с тем, что при такой записи решение будет иметь особенность при $\tau = \Omega_2$. Характер возникающих здесь трудностей такой же, как и описанный в § 8 главы 4. Небольшое видоизменение первой части общего решения (8.2) главы 6 приводит к следующим окончательным выражениям для смещений:

$$\begin{aligned}
 u_r = & \cos l\theta \left(\int_0^\infty \left\{ x(\tau) \left[\frac{\tau^2 + q_2^2}{2\tau^2 q_1 l'_1(q_1)} \frac{dl_1(q_1 r)}{dr} - \frac{1}{q_2 l'_1(q_2)} \frac{dl_1(q_2 r)}{dr} \right] + \right. \right. \\
 & + z(\tau) l \left[\frac{1}{2q_1 l'_1(q_1)} \frac{dl_1(q_1 r)}{dr} - \frac{\tau^2}{q_2^2} \frac{1}{q_2 l'_1(q_2)} \frac{dl_1(q_2 r)}{dr} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\tau^2}{q_2^2} \frac{1}{r} \frac{l_1(q_2 r)}{l_1(q_2)} \right] \right\} \cos \tau z d\tau + \pi \sum_{j=1}^\infty \frac{y_j}{J_1(\lambda_j) \lambda_j^2} \times \\
 & \times \left(p_2 e^{-p_2 z} - \frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2p_1} e^{-p_1 z} \right) \frac{dJ_1(\lambda_j r)}{dr} \Bigg), \\
 u_\theta = & -\sin l\theta \left(\int_0^\infty \left\{ x(\tau) \frac{l}{r} \left[\frac{\tau^2 + q_2^2}{2\tau^2} \frac{l_1(q_1 r)}{q_1 l'_1(q_1)} - \frac{l_1(q_2 r)}{q_2 l'_1(q_2)} \right] + \right. \right. \\
 & + z(\tau) \left[\frac{p}{2r} \frac{l_1(q_1 r)}{q_1 l'_1(q_1)} - \frac{p}{r} \frac{\tau^2}{q_2^2} \frac{l_1(q_2 r)}{q_2 l'_1(q_2)} + \frac{\tau^2}{q_2^2 l_1(q_2)} \frac{dl_1(q_2 r)}{dr} \right] \Bigg\} \times \\
 & \times \cos \tau z d\tau + \frac{\pi l}{r} \sum_{j=1}^\infty \frac{y_j}{\lambda_j^2 J_1(\lambda_j)} \left(p_2 e^{-p_2 z} - \frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2p_1} e^{-p_1 z} \right) J_1(\lambda_j r) \Bigg), \\
 u_z = & \cos l\theta \left(\int_0^\infty \left\{ \frac{x(\tau)}{\tau} \left[q_2 \frac{l_1(q_2 r)}{l'_1(q_2)} - \frac{\tau^2 + q_2^2}{2q_1 l'_1(q_1)} l_1(q_1 r) \right] + \right. \right.
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

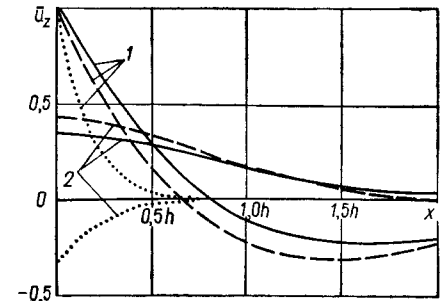


Рис. 107.

$$+ z(\tau) l \tau \left[\frac{I_l(q_2 r)}{q_2 I'_l(q_2)} - \frac{I_l(q_1 r)}{2q_1 I'_l(q_1)} \right] \sin \tau z d\tau + \\ + \pi \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{J_l(\lambda_j)} \left(\frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2\lambda_j^2} e^{-p_1 z} - e^{-p_2 z} \right) J_l(\lambda_j r).$$

Здесь использованы все обозначения § 8 главы 6. Отметим, что теперь при $\tau \rightarrow \Omega_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) никаких особенностей в подынтегральных выражениях не возникает. Это легко устанавливается предельными переходами при $q_\alpha \rightarrow 0$.

Построенное решение (5.6) тождественно удовлетворяет нулевым граничным условиям для касательных напряжений τ_{zr} и $\tau_{z\theta}$. Это объясняет наличие только одной (вместо трех) последовательности произвольных постоянных y_j в рядах Дини по полным системам функций $J_l(\lambda_j r)$ и $\frac{dJ_l(\lambda_j r)}{dr}$ двух плотностей $x(\tau)$ и $z(\tau)$ в интегралах Фурье.

Выполняя с помощью (5.6) граничные условия

$$\frac{1}{2G} \sigma_z = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{J_l(\lambda_j r)}{J_l(\lambda_j)} \cos l\theta, \quad \frac{1}{2G} \tau_{zr} = \frac{1}{2G} \tau_{z\theta} = 0, \quad z = 0, \\ \frac{1}{2G} \sigma_r = \frac{1}{2G} \tau_{r\theta} = \frac{1}{2G} \tau_{rz} = 0, \quad r = 1, \quad (5.7)$$

приходим к бесконечной системе линейных интегро-алгебраических уравнений относительно $x(\tau)$, $z(\tau)$ и y_j :

$$-x(\tau) P(q) + z(\tau) l C(q) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \left[\left(\frac{2\tau^2}{\lambda_j^2 + q_2^2} - \frac{2\tau^2}{\lambda_j^2 + q_1^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{l^2}{\lambda_j^2} \right) - \frac{\Omega_1^2 (\Omega_2^2 - 2l^2) v}{\lambda_j^2 (\lambda_j^2 + q_1^2) (1 - 2v)} \right] = 0, \\ x(\tau) l T(q) + z(\tau) Q(q) + l \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^2} \left[\frac{2\tau^2}{\lambda_j^2 + q_1^2} - \frac{2\tau^2}{\lambda_j^2 + q_2^2} + \right. \\ \left. + \frac{2v\Omega_1^2}{(\lambda_j^2 + q_1^2) (1 - 2v)} \right] = 0, \quad (5.8) \\ y_j \Delta_l(p) \left(1 - \frac{l^2}{\lambda_j^2} \right) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ x(\tau) \left[\frac{2\lambda_j^2}{\tau^2 + p_1^2} - \frac{2\lambda_j^2}{\tau^2 + p_2^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{v\Omega_1^2 \Omega_2^2}{\tau^2 (\tau^2 + p_1^2) (1 - 2v)} \right] + l z(\tau) \left(\frac{2\tau^2}{\tau^2 + p_2^2} - \frac{\tau^2 + \frac{v\Omega_1^2}{1 - 2v}}{\tau^2 + p_1^2} \right) \right\} d\tau = \\ = \frac{g_j}{\pi} \left(1 - \frac{l^2}{\lambda_j^2} \right),$$

где

$$P(q) = \frac{q_2^2 + l^2}{l(q_2)} - \frac{(\tau^2 + q_2^2)(\tau^2 + q_2^2 + 2l^2)}{4\tau^2 l(q_1)} - \frac{\Omega_2^2}{2\tau^2}; \\ C(q) = \frac{\tau^2 + q_2^2 + 2l^2}{4l(q_1)} - \frac{1}{2} - \frac{\tau^2}{q_2^2} \left[\frac{q_2^2 + l^2}{l(q_2)} - l(q_2) \right]; \\ T(q) = \frac{\tau^2 + q_2^2}{2\tau^2 l(q_1)} - \frac{1}{l(q_2)} + \frac{\Omega_2^2}{2\tau^2}; \\ Q(q) = \frac{l^2}{2l(q_1)} + \frac{\tau^2}{q_2^2} \left[l(q_2) - \frac{l^2}{l(q_2)} \right] - \frac{\tau^2 + l^2}{2}; \\ \Delta_l(p) = p_2 - \frac{(\lambda_j^2 + p_2^2)^2}{4\lambda_j^2 p_1}; \quad l(q) = \frac{q l'(q)}{l_l(q)}.$$

Выкладки, аналогичные проделанным в § 8 главы 6, показывают, что для неизвестных в бесконечной системе (5.8) справедливы соотношения

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau) = \lim_{l \rightarrow \infty} y_l = a_0 = \text{const}, \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} z(\tau) \tau^4 = \text{const}. \quad (5.9)$$

Соотношения (5.9) существенно используются как при редукции бесконечной системы (5.8), так и при вычислении напряжений на границе. Для перехода к конечной системе полагаем

$$x(\tau) = a_0, \quad z(\tau) = 0, \quad \tau > T, \quad y_j = a_0, \quad j > J. \quad (5.10)$$

Постоянная a_0 , как и ранее, определяется через разность нормальных напряжений σ_r и σ_z , заданных при $r = 1$, $z = 0$, т. е.

$$a_0 (\Omega_2^2 - \Omega_1^2) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ g_j + y_j \left[\frac{(\lambda_j^2 + p_2^2)(\lambda_j^2 + p_1^2 + l^2)}{2\lambda_j^2 p_1} - p_2 \left(2 - \frac{l^2}{\lambda_j^2} \right) \right] \right\} + \\ + \int_0^{\infty} \left\{ x(\tau) \left[\frac{(\tau^2 + q_1^2 + l^2)(\tau^2 + q_2^2)}{2\tau^2 l(q_1)} - \frac{2q_2^2 + l^2}{l(q_2)} + \frac{\Omega_2^2}{2\tau^2} \right] + \right. \\ \left. + z(\tau) l \left[\frac{\tau^2 + q_1^2 + l^2}{2l(q_1)} + \frac{\tau^2}{q_2^2} \left[l(q_2) - \frac{2q_2^2 + l^2}{l(q_2)} \right] - \frac{1}{2} \right] \right\} d\tau. \quad (5.11)$$

При решении конечной системы для $l = 2$ принималось $J = 7$, $T = 30$, интегрирование производилось методом Гаусса по 48 узлам; $g_1 = 1$, $g_j = 0$, $j > 1$.

Из анализа результатов расчета следует, что для $v = 0,3317$ при изменении частоты от $\Omega_2 = 2,13$ до $\Omega_2 = 2,14$ происходит скачкообразное изменение фазы (знака) всех характеристик напряженно-деформированного состояния. Кроме того, при подходе, например,

снизу к частоте $\Omega_2 = 2,13$ все величины обнаруживают тенденцию к неограниченному возрастанию. Поскольку $\Omega_2^* = 2,31$ (см. рис. 58), то найденный резонанс связан только с нераспространяющимися модами. Как и в осесимметричном случае, соответствующая собственная форма характеризуется локализацией зоны больших амплитуд смещений вблизи торца цилиндра. Однако здесь вследствие отсутствия связи с распространяющимися модами существует принципиальная возможность бесконечного роста амплитуды смещений (напряжений) при вынужденных колебаниях для любых значений ν .

Описанные выше резонансные явления в бесконечных телах представляют, пожалуй, наиболее яркую характеристику специфики волновых процессов в упругих средах. Проблема поиска резонансов на нераспространяющихся модах и анализ условий их существования являются одной из наиболее интересных проблем стационарной динамики упругого тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айнола Л. А., Нива У. К. Волновые процессы деформаций упругих плит и оболочек.— Изв. АН ЭССР, 1965, 14, № 1, с. 3—63.
2. Аксентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра.— Прикл. математика и механика, 1967, 31, вып. 1, с. 178—186.
3. Аксентян О. К., Селезнева Т. Н. Определение частот собственных колебаний круглых плит.— Прикл. математика и механика, 1976, 40, вып. 1, с. 112—119.
4. Александрова О. В., Махсма В. К., Шленев М. А. О корнях уравнения Рэлея — Лэмба.— Ростов н/Д: Рост. инж.-строит. ин-т, 1974. — 25 с.
5. Амензаде Ю. А. Теория упругости. — М.: Высш. школа, 1974. — 287 с.
6. Андерсон О. Определение и некоторые применения изотропных упругих постоянных поликристаллических систем, полученных из данных для монокристаллов.— Физ. акустика: Принципы и методы. Пер. с англ., 1968, 3Б, с. 62—121.
7. Бабешко В. А. К теории динамических контактных задач.— Докл. АН СССР, 1971, 201, № 3, с. 556—558.
8. Бабешко В. А. Об условиях излучения для упругого слоя.— Докл. АН СССР, 1973, 213, № 3, с. 547—549.
9. Бабич В. М., Молотков И. А. Математические методы в теории упругих волн.— Механика деформируемого твердого тела / ВИНТИ, 1977, 10, с. 5—62.
10. Баренблатт Г. И. О некоторых вопросах механики хрупкого разрушения.— Инж. журн. Механика твердого тела, 1968, № 6, с. 153—164.
11. Бобровницкий Ю. Н. Соотношение ортогональности для волн Лэмба.— Акуст. журн., 1972, 18, вып. 4, с. 513—515.
12. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.— М.: Наука, 1970. — 855 с.
13. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье.— М.: Физматгиз, 1962. — 360 с.
14. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.— М.: Изд-во АН СССР, 1957. — 502 с.
15. Буллен К. Е. Введение в теоретическую сейсмологию. — М.: Мир, 1966. — 460 с.
16. Бурлий П. В., Кучеров И. Я. Обратные упругие волны в пластинах.— Письма в ЖЭТФ, 1977, 26, № 9, с. 644—647.
17. Бырдин В. М. Условия излучения для некоторых краевых задач с уравнениями Гельмгольца.— Докл. АН СССР, 1978, 238, № 2, с. 293—295.
18. Викторов И. А. Типы звуковых поверхностных волн в твердых телах.— Акуст. журн., 1979, 25, вып. 1, с. 1—17.
19. Викторов И. А. Ультразвуковые волны Лэмба.— Акуст. журн., 1965, 11, вып. 1, с. 1—18.
20. Викторов И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике.— М.: Наука, 1966. — 168 с.
21. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн.— М.: Наука, 1979. — 384 с.

22. Власов А. Г. Метод переопределенных рядов в некоторых краевых задачах математической физики. 1.— *Вопр. динам. теории распространения сейсм. волн*, 1959, 3, с. 403—463.
23. Воек А. Е., Тютюкин В. В. Возбуждение нормальных волн в плоском упругом волноводе силами, заданными в его поперечном сечении.— *Тр. Акуст. ин-та*, 1969, вып. 9, с. 5—26.
24. Воек И. В., Гринченко В. Т. Свойства волновых полей в волноводе с колеблющимися стенками.— В кн.: *Акустические методы и средства исследования океана*. Владивосток : Дальневост. политехн. ин-т, 1974, с. 158—161.
25. Воронич И. И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек.— В кн.: *Материалы I Всесоюз. школы по теории и числ. методам расчета пластин и оболочек*. Тбилиси, 1975, с. 51—150.
26. Воронич И. И. О поведении решений основных краевых задач плоской теории упругости в окрестности особых точек границы.— В кн.: *III Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике* (Москва, янв. 1968) : Аннот. докл. М. : Наука, 1968, с. 80.
27. Вуд Р. Физическая оптика.— М. ; Л. : ОНТИ, 1936.— 895 с.
28. Генкин М. Д., Бобровницкий Ю. И. Колебания упругой полосы.— В кн.: *Методы виброизоляции машин и присоединенных конструкций*. М. : Наука, 1975, с. 12—42.
29. Гоголадзе В. Г. Дисперсия волн Рэлея в слое.— *Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР*, 1947, 119, с. 27—38.
30. Гоголадзе В. Г. Отражение и преломление упругих волн. *Общ. теория границ. волн Рэлея*.— *Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР*, 1947, 125, с. 1—43.
31. Головин О. А., Прокопов В. К. О стационарных колебаниях упругого цилиндра конечной длины.— *Прикл. механика*, 1974, 10, № 7, с. 28—35.
32. Голямина И. П. К вопросу о колебаниях по толщине поляризованных пластин титаната бария.— *Акуст. журн.*, 1955, 1, вып. 1, с. 40—47.
33. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М. : Физматгиз, 1962.— 1100 с.
34. Грей Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложение к физике и механике.— М. : Изд-во иностр. лит., 1953.— 371 с.
35. Григориук Э. Н., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек.— М. : ВИНТИ, 1973.— 272 с.
36. Григорьян Ф. Е. Исследование плоского волновода с выводом неразделяющихся решений уравнений Гельмгольца.— *Акуст. журн.*, 1974, 20, вып. 2, с. 214—221.
37. Гринченко В. Т. Об особенностях динамического деформирования протяженных цилиндров и пластин в области высоких частот.— *Прикл. механика*, 1977, 13, № 10, с. 43—49.
38. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров.— Киев : *Наук. думка*, 1978.— 264 с.
39. Гринченко В. Т., Карлаш В. Л., Мелешко В. В., Улитко А. Ф. Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин.— *Прикл. механика*, 1976, 12, № 5, с. 71—78.
40. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. О собственных частотах осесимметрично колеблющейся толстой плиты.— *Прикл. механика*, 1974, 10, № 11, с. 81—87.
41. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Оценка пределов применимости приближенных теорий колебаний пластин на основе анализа точных решений.— *Динамика и прочность машин*, 1978, вып. 28, с. 81—89.
42. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Анализ мод колебаний круглого диска в окрестности толщинного резонанса.— *Прикл. механика*, 1979, 15, № 6, с. 3—19.
43. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Высокочастотные осесимметричные колебания круглых дисков.— *Прикл. механика*, 1976, 12, № 12, с. 60—68.
44. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. О краевом резонансе при планарных колебаниях прямоугольных пластин.— *Прикл. механика*, 1975, 11, № 10, с. 52—58.
45. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. О резонансе в полубесконечной упругой полосе.— *Прикл. механика*, 1980, 16, № 2, с. 58—63.
46. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины.— *Акуст. журн.*, 1978, 24, вып. 6, с. 861—866.
47. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Особенности распределения энергии в тонкой прямоугольной пластине при краевом резонансе.— *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1976, № 7, с. 612—616.
48. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Динамическая задача теории упругости для прямоугольной призмы.— *Прикл. механика*, 1971, 8, № 9, с. 50—57.
49. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Анализ динамической напряженности и частотных характеристик круглой плиты в рамках трехмерной теории упругости.— В кн.: *Теория оболочек и пластин*. М. : Наука, 1973, с. 436—442.
50. Гузь А. Н., Головачев В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах.— Киев : *Наук. думка*, 1972.— 254 с.
51. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн.— Киев : *Наук. думка*, 1978.— 307 с.
52. Гуляев Ю. В. Поверхностные электрорезонансные волны в твердых телах.— *Письма в ЖЭТФ*, 1969, 9, № 1, с. 63—65.
53. Гутин Л. Я. К теории установившихся колебаний упругого полупространства.— *Журн. техн. физики*, 1951, 21, № 8, с. 892—906.
54. Дейвис Р. М. Волны напряжений в твердых телах.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 104 с.
55. Дрансфельд К., Зальцманн Е. Возбуждение, обнаружение и затухание высокочастотных упругих поверхностных волн.— *Физ. акустика : Принципы и методы*. Пер. с англ., 1974, 7, с. 250—310.
56. Зильбергейт А. С., Нуллер Б. М. Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости.— *Докл. АН СССР*, 1974, 234, № 2, с. 333—335.
57. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики.— М. : Изд-во иностр. лит., 1950.— 456 с.
58. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред.— М. : Изд-во иностр. лит., 1954.— 486 с.
59. Ильющин А. А. Механика сплошной среды.— 2-е изд., испр. и доп.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978.— 287 с.
60. Исакович М. А. Общая акустика.— М. : Наука, 1973.— 496 с.
61. Ишлинский А. Ю. Сопоставление двух моделей развития трещин в твердом теле.— *Инж. журн. Механика твердого тела*, 1968, № 6, с. 168—177.
62. Кайно Г., Шоу Дж. Акустические поверхностные волны.— *Успехи физ. наук*, 1974, 113, № 1, с. 157—179.
63. Каландия А. И. Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов.— *Прикл. математика и механика*, 1969, 33, вып. 1, с. 132—135.
64. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.— 3-е изд.— М. ; Л. : Гостехиздат, 1949.— 695 с.
65. Каринский С. С. Устройства обработки сигналов на ультразвуковых поверхностных волнах.— М. : Сов. радио, 1975.— 176 с.
66. Кипнис Н. Ш. Механика и оптика.— В кн.: *Механика и цивилизация, XVII—XIX века*. М. : Наука, 1979, с. 143—186.
67. Кирсанов В. С. Эфир и генезис классической теории поля.— В кн.: *Механика и цивилизация, XVII—XIX века*. М. : Наука, 1979, с. 219—260.
68. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах.— М. : Изд-во иностр. лит., 1955.— 192 с.
69. Комиссарова Г. Л. Анализ колебаний круглой жестко заземленной плиты.— *Прикл. механика*, 1978, 14, № 7, с. 82—87.
70. Коялович Б. М. Исследование о бесконечных системах линейных уравнений.— *Изв. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова*, 1930, 3, с. 41—167.
71. Краснушкин П. Е. Вынужденные колебания бесконечной упругой полосы.— *Докл. АН СССР*, 1979, 244, № 2, с. 325—329.
72. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах.— 5-е изд.— М. ; Л. : Гостехиздат, 1954.— 368 с.

73. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. — М. : Физматгиз, 1959. — 327 с.
74. Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. — М. : Наука, 1976. — 664 с.
75. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практические применения. — М. : Изд-во иностр. лит., 1949. — 719 с.
76. Лазуткин В. Н., Михайлов А. И. Колебания пьезокерамических цилиндров конечных размеров с поляризацией по высоте. — Акуст. журн., 1976, 22, вып. 3, с. 393—399.
77. Левин М. Л. Как свет побеждает тьму : (У. Р. Гамильтон и понятие групповой скорости). — Успехи физ. наук., 1978, 125, вып. 3, с. 565—567.
78. Логан. Обзор некоторых ранних работ по теории рассеяния плоских волн на сфере. — Тр. Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 1965, 53, № 8, с. 895—908.
79. Лорентц Г. А. Теории и модели эфира. — М. ; Л. : ОНТИ, 1939. — 68 с.
80. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. — М. : Гостехиздат, 1955. — 491 с.
81. Лурье А. И. Теория упругости. — М. : Наука, 1970. — 939 с.
82. Ляв А. Математическая теория упругости. — М. ; Л. : ОНТИ, 1935. — 674 с.
83. Мадорский В. В., Устинов Ю. А. Построение системы однородных решений и анализ корней дисперсионного уравнения антисимметричных колебаний пьезоэлектрической плиты. — Прикл. механика и техн. физика, 1976, № 6, с. 138—146.
84. Малюжинец Г. Д. Замечание по поводу принципа излучения. — Журн. техн. физики, 1951, 21, № 8, с. 940—942.
85. Малюжинец Г. Д. Математическая формулировка задачи о вынужденных гармонических колебаниях в произвольной области. — Докл. АН СССР, 1951, 78, № 3, с. 439—442.
86. Мандельштам Л. И. Групповая скорость в кристаллической решетке. — Полн. собр. тр. : В 5-ти т. М. : Изд-во АН СССР, 1947, т. 2, с. 334—338.
87. Мандельштам Л. И. Излучение источника света, находящегося очень близко от границы раздела двух прозрачных сред. — Полн. собр. тр. : В 5-ти т. М. : Изд-во АН СССР, 1948, т. 1, с. 261—272.
88. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. — М. : Наука, 1972. — 437 с.
89. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. — М. : Наука, 1972. — 470 с.
90. Мандельштам Л. И. О распространении волн вдоль поверхности и направляющем действии проводников. — Полн. собр. тр. : В 5-ти т. М. : Изд-во АН СССР, 1950, т. 3, с. 366—396.
91. Махсма В. К., Шленев М. А. Вынужденные колебания толстой круглой плиты. — В кн.: Толстые плиты и оболочки. Ростов н/Д : Рост. инж.-строит. ин-т, 1974, с. 75.
92. Мелешко В. В. О возможностях теории «второго порядка» при изучении высокочастотного спектра упругих дисков. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 7, с. 621—625.
93. Мелешко В. В. О краевом резонансе при осесимметричных колебаниях полубесконечного упругого цилиндра. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 11, с. 920—923.
94. Мелешко В. В. О некоторых особенностях высокочастотного спектра круглых дисков. — Докл. АН УССР Сер. А, 1978, № 4, с. 323—326.
95. Мелешко В. В. Осесимметричные колебания цилиндра конечной длины. — Динамика и прочность машин, 1979, вып. 29, с. 82—86.
96. Микер Т., Мейтцлер А. Волновое распространение в протяженных цилиндрах и пластинах. — Физ. акустика : Принципы и методы. Пер. с англ., 1966, 1А, с. 140—203.
97. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. — М. : Мир, 1974. — 327 с.
98. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики : В 2-х т. — М. : Изд-во иностр. лит., 1960. — Т. 2. 886 с.
99. Мухелишвили Н. Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — 5-е изд., испр. и доп. — М. : Наука, 1966. — 707 с.
100. Мэзон У. Ультразвуковые линии задержки с многократными отражениями. — Физ. акустика : Принципы и методы. Пер. с англ., 1966, 1А, с. 566—585.
101. Мэй Д. Волноводные ультразвуковые линии задержки. — Физ. акустика : Принципы и методы. Пер. с англ., 1966, 1А, с. 489—565.
102. Нелинейные волны / Пер. с англ. под ред. А. В. Гапонова, Л. А. Островского. — М. : Мир, 1977. — 319 с.
103. Нигул У. К. О корнях уравнения Лэмба для деформации плиты, антисимметричной относительно срединной поверхности. — Изв. АН ЭССР, 1963, № 3, с. 284—293.
104. Новацкий В. Теория упругости. — М. : Мир, 1975. — 872 с.
105. Новожиллов В. В. Основы нелинейной теории упругости. — М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. — 211 с.
106. Новожиллов В. В. Теория упругости. — Л. : Судпромгиз, 1958. — 370 с.
107. Новожиллов В. В., Слепян Л. И. О принципе Сен-Венана в динамике стержней — Прикл. математика и механика, 1965, 29, вып. 2, с. 261—281.
108. Олинер. Волноводы для поверхностных акустических волн. — Тр. Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 1976, 64, № 5, с. 51—65.
109. Оное, Макнивен, Миндлин. Дисперсия осесимметричных волн в упругих стержнях. — Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика, 1962, 62, № 4, с. 139—145.
110. Пирс Дж. Почти все о волнах. — М. : Мир, 1976. — 176 с.
111. Поверхностные акустические волны : Устройства и применения. — Тр. Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 1976, 64, № 5.
112. Полевой В. Г., Рытов С. М. О четырехмерной групповой скорости. — Успехи физ. наук, 1978, 125, вып. 3, с. 549—565.
113. Поля Г., Сега Г. Задачи и теоремы из анализа. — 3-е изд. — М. : Наука, 1978. — Т. 1. 392 с.
114. Речицкий В. Н. Приборы и устройства на акустических поверхностных волнах. — Зарубеж. радиоэлектроника, 1975, № 8, с. 88—101.
115. Свешников А. Г. Принцип излучения. — Докл. АН СССР, 1950, 73, № 5, с. 917—920.
116. Седов Л. И. Механика сплошной среды : В 2-х т. — М. : Наука, 1970. — Т. 2. 568 с.
117. Седов Л. И. О статье Г. И. Баренблатта «О некоторых вопросах механики крупного разрушения». — Инж. журн. Механика твердого тела, 1968, № 6, с. 164—168.
118. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи. — Киев : Наук. думка, 1976. — 284 с.
119. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. — М. : Физматгиз, 1961. — 219 с.
120. Собственные колебания Земли / Пер. с англ. под ред. В. Н. Жаркова. — М. : Мир, 1964. — 315 с.
121. Спенсер У. Исследование резонансных колебаний и нарушений структуры в монокристаллах методом рентгеновской дифракционной топографии. — Физ. акустика : Принципы и методы. Пер. с англ. 1973, 5, с. 134—191.
122. Стратт Д. В. (Лорд Рэлей). Волновая теория света. — М. : Гостехтеориздат, 1940. — 208 с.
123. Стратт Д. В. (Лорд Рэлей). Теория звука : В 2-х т. — М. : Гостехиздат, 1955. — 2 т.
124. Таблицы физических величин / Под ред. И. К. Кикоина. — М. : Атомиздат, 1976. — 1006 с.
125. Тамм И. Е. Основы теории электричества. — 9-е изд. — М. : Наука, 1976. — 616 с.
126. Тимошенко С. П. К учету сдвига в дифференциальном уравнении поперечных колебаний призматических стержней. — В кн.: Тимошенко С. П.

- Статические и динамические проблемы теории упругости. Киев : Наук. думка, 1975, с. 56—57.
127. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости.— 2-е изд.— М. : Наука, 1979.— 560 с.
 128. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О принципе излучения.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1948, 18, № 2, с. 243—247.
 129. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнение математической физики.— 3-е изд., испр. и доп.— М. : Наука, 1966.— 724 с.
 130. Грантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике.— М. : Гостехиздат, 1956.— 204 с.
 131. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М. : Мир, 1975.— 592 с.
 132. Уайт. Поверхностные упругие волны. — Тр. Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 1970, 58, № 8, с. 68—110.
 133. Уеда И., Нишида П., Оучи Х., Хаякава Ш. Пьезокерамика для высокочастотных применений. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1977, 41, № 4, с. 707—714.
 134. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М. : Мир, 1977. — 622 с.
 135. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. — Киев : Наук. думка, 1979. — 261 с.
 136. Умов Н. А. Уравнения движения энергии в телах.— Избр. соч. М. ; Л. : Гостехиздат, 1950, с. 151—200.
 137. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.— 2-е изд., испр. и доп.— Л. : Наука, 1967.— 402 с.
 138. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин.— Прикл. математика и механика, 1948, 12, вып. 3 с. 287—300.
 139. Фарнелл Дж. Свойства упругих поверхностных волн.— Физ. акустика : Принципы и методы. Пер. с англ., 1973, 6, с. 137—202.
 140. Федорюк М. В. Соотношения типа ортогональности в твердых волноводах.— Акуст. журн., 1974, 20, вып. 2, с. 310—314.
 141. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн : В 2-х т.— М. : Мир, 1978. — Т. 1. 547 с.
 142. Финагин Б. А. Исследование спектра и формы колебаний поверхности пьезопластинок.— Журн. техн. физики, 1960, 30, № 9, с. 1115—1123.
 143. Хвольсон О. Д. Курс физики.— 2-е изд.— Берлин : Гос. изд-во РСФСР, 1923.— Т. 5. 984 с.
 144. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. — М. : Мир, 1964.— 428 с.
 145. Черных Г. Г., Богуш М. Е., Федорков А. П. Спектральные и температурно-частотные характеристики прямоугольных пьезоэлементов X-среза кварца.— Докл. АН СССР, 1974, 219, № 6, с. 1355—1357.
 146. Чернышев К. В., Шегай В. В. Собственные колебания твердых цилиндров конечной длины.— Акуст. журн., 1977, 23, вып. 4, с. 627—631.
 147. Чобанян К. С., Геворкян С. Х. Поведение поля напряжений около угловой точки линии раздела в задаче плоской деформации составного упругого тела.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1971, 24, № 5, с. 16—24.
 148. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. — Л. : Судостроение, 1972.— 348 с.
 149. Шустер А. Введение в теоретическую оптику.— М. ; Л. : ОНТИ, 1935. — 376 с.
 150. Эйхенвальд А. А. О движении энергии при полном внутреннем отражении света.— Избр. работы. М. : Гостехиздат, 1956, с. 121—146.
 151. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids.— Amsterdam : North-Holland Publ. Co., 1973.— 425 p.
 152. Achenbach J. D., Epstein H. I. Dynamic interaction of a layer and a half-space.— Proc. Amer. Soc. Civil Eng. J. Eng. Mech., 1967, 93, N 5, p. 27—42.
 153. Adem J. On the axially-symmetric steady wave propagation in elastic circular rods.— Quart. Appl. Math., 1954, 12, N 3, p. 261—275.
 154. Aggarwal R. R. Axially symmetric vibration of a finite isotropic disk. 3.— J. Acoust. Soc. Amer., 1953, 25, N 3, p. 533—536.
 155. Aggarwal R. R., Shaw E. A. G. Axially symmetric vibrations of a finite isotropic disk. 4.— J. Acoust. Soc. Amer., 1954, 26, N 3, p. 341—342.
 156. Ash E. A., De la Rue R. M., Humphries R. Microsound surface waveguides.— IEEE Trans. Microwave Theory and Techn., 1969, 17, N 11, p. 882.
 157. Auld B. A. Acoustic fields and waves in solids.— New York : Wiley, 1973.— 2 vol.
 158. Auld B. A., Tsao E. D. A variational analysis of edge resonance in a semiinfinite plate.— IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics, 1977, 24, N 5, p. 317.
 159. Bedford A., Sorensen A. L. Variational solution for the reflection and transmission of waves at a material interface between waveguides.— J. Acoust. Soc. Amer., 1977, 62, N 2, p. 370—374.
 160. Bell J. F. The experimental foundations of solid mechanics.— In: Handbuch der Physik. Berlin etc. : Springer, 1973, vol. 6a/1, p. 1—813.
 161. Bell J. F., Kalmarcz P. J. The end resonance of strips and plates.— Phys. Lett. A. 1977, 61, N 2, p. 91—93.
 162. Benthem J. P. On an inversion theorem for conical regions in elasticity theory.— J. Elast., 1979, 9, N 2, p. 159—169.
 163. Biot M. A. General theorems on the equivalence of group velocity and energy transport.— Phys. Rev., 1957, 105, N 4, p. 1129—1137.
 164. Bleustein J. L. A new surface wave in piezoelectrical material.— Appl. Phys. Lett., 1968, 13, N 12, p. 412—413.
 165. Bogy D. B., Sternberg E. The effect of couple-stresses on the corner singularity due to an asymmetric shear loading.— Int. J. Solids and Struct., 1968, 4, N 2, p. 159—174.
 166. Booker R. E., Sagar E. H. Velocity dispersion of the lowest-order longitudinal mode in finite rods of circular cross section.— J. Acoust. Soc. Amer., 1971, 49, N 5, p. 1491—1498.
 167. Brillouin L. Wave propagation and group velocity.— New York : Acad. press, 1960.— 154 p.
 168. Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar.— Quart. J. Pure and Appl. Math., 1886, 21, N 83/84, p. 287—298.
 169. Currie P. K., Hayes M. A., O'Leary P. M. Viscoelastic Rayleigh waves.— Quart. Appl. Math., 1977, 35, N 1, p. 35—53.
 170. Currie P. K., O'Leary P. M. Viscoelastic Rayleigh waves. 2.— Quart. Appl. Math., 1978, 35, N 4, p. 445—454.
 171. Doyle J. M. Radiation conditions in elasticity.— Z. angew. Math. und Phys., 1965, 16, N 4, p. 527—531.
 172. EerNisse E. P. Coupled-mode approach to elastic vibration analysis.— J. Acoust. Soc. Amer., 1966, 40, N 5, p. 1045—1050.
 173. England A. H. On stress singularities in linear elasticity.— Int. J. Eng. Sci., 1971, 9, N 6, p. 571—585.
 174. Eringen C., Suhubi E. S. Elastodynamics.— New York : Acad. press, 1975.— Vol. 2, 660 p.
 175. Ewing W. M., Jardetzky W. S., Press F. Elastic waves in layered media.— New York etc. : Mc Graw-Hill book, 1957.— 380 p.
 176. Farnell G. W., Adler E. L. Elastic wave propagation in thin layers.— Phys. acoustics : Principles and methods, 1972, 9, p. 35—127.
 177. Fraser W. B. Orthogonality relation for the Rayleigh — Lamb modes of vibration of a plate.— J. Acoust. Soc. Amer., 1976, 59, N 1, p. 215.
 178. Fromme J. A., Leissa A. W. Free vibration of the rectangular parallelepiped.— J. Acoust. Soc. Amer., 1970, 48, N 1, p. 290—298.
 179. Gazis D. C., Mindlin R. D. Extensional vibrations and waves in a circular disk and a semiinfinite plate.— J. Appl. Mech., 1960, 27, N 3, p. 541—547.
 180. Glazebrook R. T. Report on optical theories.— Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci., 1885, 55, p. 157—261.
 181. Goodier J. N., Bishop R. E. D. On critical reflections of elastic waves at free surfaces.— J. Appl. Phys., 1952, 23, N 1, p. 124—126.

182. *Graff K. F.* Wave motion in elastic solids.— Oxford : Clarendon press, 1975.— 666 p.
183. *Grandin H. T., Little R. W.* Dynamic Saint-Venant region in a semiinfinite elastic strip.— *J. Elast.*, 1974, 4, N 2, p. 131—146.
184. *Green A. E.* Double Fourier series and boundary value problem.— *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 1944, 40, N 2, p. 222—228.
185. *Green G.* On the laws of the reflexion and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media.— *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, 1839, 7, N 1, p. 1—24.
186. *Gurtin M. E.* The linear theory of elasticity.— In: *Handbuch der Physik*. Berlin etc. : Springer, 1972, vol. 6a/2, p. 1—295.
187. *Hammond V. J., Carter R.* Visualization of mode conversion of an ultrasonic beam in fused silica.— *Nature*, 1958, 182, N 4638, p. 790.
188. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*/Ed. M. Abramowitz, I. A. Stegun.— Washington : U. S. gov. print. off., 1965.— 1046 p.
189. *Hayes M. A., Rivlin R. S.* A note on the secular equation for Rayleigh waves.— *Z. angew. Math. und Phys.*, 1962, 13, N 1, p. 80—83.
190. *Holden A.* Longitudinal modes of elastic waves in isotropic cylinders and bars.— *Bell Syst. Tech. J.* 1951, 30, N 4, p. 956—969.
191. *Holland R., EerNisse E. P.* Design of piezoelectric devices.— Cambridge : MIT, 1969.— 258 p.
192. *Hutchinson J. R.* Axially vibrations of a free finite length rod.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1972, 51, N 1, p. 233—240.
193. *Hutchinson J. R., Persival C. M.* Higher modes of longitudinal wave propagation in thin rod.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1968, 44, N 5, p. 1204—1210.
194. *Ikegami S., Nagata T., Nakayima Y.* Frequency spectra of extensional vibration in $\text{Pb}(\text{ZrTi})\text{O}_3$ disks with Poisson's ratio larger than 1/3.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1976, 60, N 1, p. 113—116.
195. *Ikegami S., Ueda I., Kobayashi S.* Frequency spectra of resonant vibrations in disk plates of PbTiO_3 piezoelectric ceramics.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1974, 55, N 2, p. 339—344.
196. *Kagawa Y., Yamabuchi T.* Finite-element approach for a piezoelectric circular rod.— *IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics*, 1976, 23, N 6, p. 379—385.
197. *Kagawa Y., Yamabuchi T.* Finite-element simulation of two-dimensional electromechanical resonators.— *IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics*, 1974, 21, N 4, p. 275—283.
198. *Kalisky S.* Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciśnień sprężystych.— Warszawa : PAN, 1957.— 306 s.
199. *Kaul R. K., Mindlin R. D.* Vibrations of an infinite, monoclinic crystal plate at high frequencies and long wavelengths.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1962, 34, N 12, p. 1895—1901.
200. *Knops R. J., Payne L. E.* Uniqueness theorems in linear elasticity.— *Springer Tracts Natur. Phil.*, 1971, 19, p. 1—130.
201. *Knott C. G.* Reflexion and refraction of elastic waves with seismological applications.— *Phil. Mag.*, 1899, 48, N 290, p. 64—97.
202. *Kraut E. A.* Applications of elastic waves to electronic devices, nondestructive evaluation and seismology.— In: *Ultrason. Symp. Proc.*, Annapolis, Md, 1976. New York, 1976, p. 1—7.
203. *Kumar R.* Axially symmetric vibrations of finite, isotropic cylinder.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1965, 38, N 5, p. 851—854.
204. *Kumar R., Ahuj J. S.* Axially symmetric vibrations of a finite isotropic disc.— *Acustica*, 1967/1968, 19, N 6, p. 354—357.
205. *Lamb H.* On flexure of an elastic plate.— *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1889/1890, 21, N 360, p. 70—90.
206. *Lamb H.* On group velocity.— *Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2*, 1904, 1, N 849, p. 473—479.
207. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid.— *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, 1904, 203, p. 1—42.
208. *Lamb H.* On waves in an elastic plate.— *Proc. Roy. Soc. Lond. A*. 1917, 93, N 648, p. 114—128.
209. *Lamé G.* Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides.— Paris : Bachelier, 1852.— 335 p.
210. *Lee D. A., Corbly D. M.* Use of interface waves for nondestructive inspection.— *IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics*, 1977, 24, N 3, p. 206—212.
211. *Leissa A. W.* On a curve veering aberration.— *Z. angew. Math. und Phys.*, 1974, 25, N 1, p. 99—111.
212. *Lloyd P., Redwood M.* Finite-difference method for the investigation of the vibrations of solids and the evaluation of the equivalent-circuit characteristics of piezoelectric resonators.— 1, 2.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1966, 39, N 2, p. 346—361.
213. *Lord A. E.* Acoustic emission.— *Phys. acoustic : Principles and methods*, 1975, 11, p. 253—310.
214. *Lord A. E.* Geometric diffraction loss in longitudinal and shear wave attenuation measurements in an isotropic half-space.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1966, 39, N 4, p. 650—662.
215. *Lotsch H. K. V.* Reflection and refraction of a beam of light at a plane interface.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1968, 58, N 4, p. 551—561.
216. *Love A. E. H.* Some problems of geodynamics.— Cambridge : Univ. press, 1926.— 180 p.
217. *Lyon R. N.* Response of an elastic plate to localized driving forces.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1955, 27, N 2, p. 259—265.
218. *Massey L., Stephens R. W. B.* Longitudinal mode resonances of short cylinders.— *Acustica*, 1971, 24, N 6, p. 330—335.
219. *Maxwell G. G., Hixson E. L.* Acoustic radiation from a long solid rod into a semiinfinite liquid medium.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1973, 53, N 1, p. 88—95.
220. *McCoy J. J.* Effects of non-propagating plate waves on dynamical stress concentrations.— *Int. J. Solids and Struct.*, 1968, 4, N 3, p. 355—370.
221. *McMahon G. W.* Experimental study of the vibrations of solid, isotropic, elastic cylinders.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1964, 36, N 1, p. 87—94.
222. *McMahon G. W.* Finite-difference analysis of the vibrations of solid cylinders.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1970, 48, N 1, p. 307—312.
223. *McNiven H. D.* Extensional waves in a semiinfinite elastic rod.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1961, 33, N 1, p. 23—27.
224. *McNiven H. D., McCoy J. J.* Vibrations and wave propagation in rods.— In: *R. D. Mindlin and applied mechanics*. New York : Pergamon press, 1974, p. 197—225.
225. *McNiven H. D., Perry D. C.* Axially symmetric waves in finite elastic rods.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1962, 34, N 4, p. 433—437.
226. *McNiven H. D., Shah A. H.* The influence of the end mode on the resonant frequencies of finite, hollow, elastic rods.— *J. Sound Vibr.*, 1967, 6, N 1, p. 8—19.
227. *Medick M. A., Pao Y. H.* Extensional vibrations of thin rectangular plates.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1965, 37, N 1, p. 59—65.
228. *Meitzler A. H.* Backward-wave transmission of stress pulses in elastic cylinders and plates.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1965, 38, N 5, p. 835—842.
229. *Meitzler A. H.* Selective attenuation of elastic wave motions in strips of polycrystalline metals.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1962, 34, N 4, p. 444—453.
230. *Miklowitz J.* Elastic wave propagation.— In: *Applied mechanics surveys*. Washington : Spartan books, 1966, p. 809—839.
231. *Miklowitz J.* Recent developments in elastic wave propagation.— *Appl. Mech. Rev.*, 1960, 13, N 12, p. 865—878.
232. *Miller G. F., Pursey H.* On the partition of energy between elastic wave in a semiinfinite solid.— *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 1955, 233, N 1191, p. 55—69.
233. *Miller G. F., Pursey H.* The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semiinfinite isotropic solid.— *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 1954, 223, N 1154, p. 521—541.
234. *Miller G. K.* Axisymmetric stress wave propagation across the common end

- face between two semiinfinite cylinders, solid to fluid.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1968, 44, N 4, p. 1040—1051.
235. Mindlin R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates.— *J. Appl. Mech.*, 1951, 18, N 1, p. 31—38.
 236. Mindlin R. D. Waves and vibrations in isotropic elastic plates.— In: *Structural mechanics*. New York: Pergamon press, 1960, p. 199—232.
 237. Mindlin R. D., McNiven H. D. Axially symmetric waves in elastic rods.— *J. Appl. Mech.*, 1960, 27, N 1, p. 145—151.
 238. Mindlin R. D., Medick M. A. Extensional vibrations of elastic plates.— *J. Appl. Mech.*, 1959, 26, N 4, p. 541—569.
 239. Murty G. S. Wave propagation at an unbonded interface between two elastic half-spaces.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1975, 58, N 5, p. 1094—1095.
 240. Oliver J. A summary of observed seismic surface wave dispersion.— *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 1962, 52, N 1, p. 81—90.
 241. Oliver J. Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band, short-duration pulse technique.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1957, 29, N 2, p. 189—194.
 242. Onoe M. Crystal, ceramic and mechanical filters in Japan.— *Proc. IEEE*, 1979, 67, N 1, p. 75—102.
 243. Onoe M. Frequency of edge mode of isotropic thin rectangular plate, circular disk and rod.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1961, 33, N 11, p. 1627.
 244. Onoe M. The contour vibrations of thin rectangular plates.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1958, 30, N 11, p. 1159—1164.
 245. Onoe M., Pao Y. H. Edge mode of thin rectangular plate of barium titanate.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1961, 33, N 11, p. 1628.
 246. Owen T. E. Surface wave phenomena in ultrasonics.— *Progr. Appl. Mater. Res.*, 1964, 6, p. 69—87.
 247. Pao Y. H. The dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinder.— *J. Appl. Mech.*, 1962, 29, N 1, p. 61—64.
 248. Pao Y. H., Kaul R. K. Waves and vibrations in isotropic and anisotropic plates.— In: R. D. Mindlin and applied mechanics. New York: Pergamon press, 1974, p. 149—195.
 249. Pao Y. H., Mindlin R. D. Dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinder.— *J. Appl. Mech.*, 1960, 27, N 3, p. 513—520.
 250. Pao Y. H., Mow C. C. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations.— New York: Crane Russak, 1973.— 685 p.
 251. Pao Y. H., Varatharajulu V. Huygens' principle, radiation conditions, and integral formulas for the scattering of elastic waves.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1976, 59, N 6, p. 1361—1371.
 252. Pochhammer L. Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten Schwingungen in einem unbergawzten isotropen Kreiscylinder.— *J. reine und angew. Math.*, 1876, 81, N 4, S. 324—336.
 253. Pollard H. F. Sound waves in solids.— London: Pion, 1977.— 366 p.
 254. Potter D., Leedham C. Normalised numerical solutions for Rayleigh's frequency equation.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1967, 41, N 1, p. 148—153.
 255. Rayleigh J. On the free vibration of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter.— *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1888/1889, 20, N 357, p. 225—234.
 256. Rayleigh J. W. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid.— *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1885/1886, 17, N 253, p. 4—11.
 257. Redwood M. Mechanical waveguides: The propagation of acoustic and ultrasonic waves in fluids and solids with boundaries.— London; New York: Pergamon press, 1960.— 300 p.
 258. Reissner E. Note on the theorem of the symmetry of the stress tensor.— *J. Math. Phys.*, 1944, 23, N 2, p. 111—114.
 259. Rumerman M., Raynor S. Natural frequencies of finite circular cylinders in axially symmetric longitudinal vibration.— *J. Sound Vibr.* 1971, 15, N 4, p. 529—543.
 260. Schmidt G., Grohmann R., Lössner V. Dickenschwingungen kreisförmiger Scheiben aus Bariumtitanatkeramik.— *Acustica*, 1963, 13, N 3, S. 131—139.
 261. Schmidt G., Kutschabsky L. Schwingungsformen zylindrischer Scheiben aus Bariumtitanatkeramik.— *Acustica*, 1960, 10, N 1, S. 30—34.
 262. Schnabel P. Dispersion of thickness vibrations of piezoceramic disk resonators.— *IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics*, 1978, 25, N 1, p. 16—24.
 263. Schuessler H. Filters and resonators. 4. Ceramic filters and resonators.— *IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics*, 1974, 21, N 4, p. 257—268.
 264. Shaw E. A. G. On the resonant vibrations of thick barium titanate disks.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1956, 20, N 1, p. 38—50.
 265. Sholte J. G. The range of existence of Rayleigh and Stoneley waves.— *Roy. Astron. Soc. Lond. Monthly Notices Geophys. Suppl.*, 1947, 5, N 3, p. 120—126.
 266. Sittig E. K., Coquin G. A. Visualization of plane-strain vibration modes of a cylinder capable of producing sound radiation.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1970, 48, N 5, p. 1150—1159.
 267. Smith S. H. Numerical solutions of the dispersion relation for axial stress waves in isotropic elastic cylinders.— *IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics*, 1971, 18, N 3, p. 123—127.
 268. Soedel W., Dhar M. Difficulties in finding modes experimentally when several contribute to a resonance.— *J. Sound. Vibr.*, 1978, 58, N 1, p. 27—38.
 269. Sternberg E. On the integration of the equations of motion in the classical theory of elasticity.— *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1960, 6, N 1, p. 34—50.
 270. Stokes G. Dynamical theory of diffraction.— *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, 1849, 9, N 1, p. 1—62.
 271. Stoneley R. The elastic waves at the interface of separation of two solids.— *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 1924, 106, N 732, p. 416—429.
 272. Tamm K., Weis O. Untersuchungen über periodische Wellen, exponentielle und komplexe Nachfelder im begrenzten Festkörper.— *Acustica*, 1959, 9, N 1, S. 275—288.
 273. Tasi J. An asymptotic analysis of the end mode in a circular disk.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1971, 50, N 5, p. 1384—1386.
 274. Tasi J. Reflection of extensional waves at the end of thin cylindrical shell.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1968, 44, N 1, p. 291—292.
 275. Tasi J., Roy B. N. Axisymmetric vibrations of finite heterogeneous cylindrical shells.— *J. Sound Vibr.*, 1971, 17, N 1, p. 83—94.
 276. Theocaris P. S., Gdoutos E. E., Thireos C. G. Stress singularities in a biwedge under various boundary conditions.— *Acta mech.*, 1978, 20, N 1/4, p. 55—73.
 277. Thurston R. N. Elastic waves in rods and clad rods.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1978, 64, N 1, p. 1—37.
 278. Tolstoy I. Dispersion and simple harmonic point sources in wave ducts.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1955, 27, N 5, p. 897—907.
 279. Tolstoy I. Resonant frequencies and high modes in layered waveguides.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1956, 28, N 6, p. 1182—1192.
 280. Tolstoy I., Usdin E. Wave propagation in elastic plates: low and high mode dispersion.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1957, 29, N 1, p. 37—42.
 281. Torvic P. J. Reflection of wave trains in semiinfinite plates.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1967, 41, N 2, p. 346—353.
 282. Torvic P. J., McClatchey J. J. Response of an elastic plate to a cyclic longitudinal force.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1968, 44, N 1, p. 59—64.
 283. Überall H. Surface waves in acoustics.— *Phys. acoustics: Principles and methods*, 1973, 10, p. 1—60.
 284. Whittaker E. T. A history of the theories of aether and electricity.— New York: Nelson, 1951.— Vol. 1. 434 p.
 285. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension.— *J. Appl. Mech.*, 1952, 19, N 4, p. 526—528.
 286. Woods R. D. Screening of surface waves in soils.— *Proc. Amer. Soc. Civil Eng. J. Soil Mech. Found. Div.*, 1968, 94, N 5, p. 951—979.
 287. Wu C. H., Plankett R. On the solutions of plates, strips, rods subjected to arbitrary dynamic edge load.— *SIAM J. Appl. Math.*, 1967, 15, N 1, p. 107—119.
 288. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1972, 51, N 1, p. 265—283.

ВИКТОР ТИМОФЕЕВИЧ ГРИНЧЕНКО
ВЯЧЕСЛАВ ВЛАДИМИРОВИЧ МЕЛЕШКО

**ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ
В УПРУГИХ ТЕЛАХ**

*Утверждено к печати ученым советом
Института механики АН УССР*

Редактор Н. С. Кулаковская
Редактор-библиограф Л. П. Шевченко
Оформление художника Г. В. Мишуренко
Художественный редактор И. П. Антонюк
Технический редактор И. А. Ратнер
Корректоры Л. П. Осьмушникова,
Е. А. Михалец

Информ. бланк № 3948.

Сдано в набор 03.07.80. Подп. в печ. 20.02.81. БФ 01528.
Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 1. Лит. гарн. Выс. печ.
Усл. печ. л. 17,75. Уч.-изд. л. 18,89. Тираж 1600 экз. Заказ
№ 1841. Цена 3 руб. 10 коп.

Издательство «Наукова думка», 252601, Киев, ГСП, Репи-
на, 3.

Изготовлено Нестеровской городской типографией Львов-
ского облполиграфиздата (г. Нестеров, ул. Горького, 8) с
матриц головного предприятия республиканского производ-
ственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата
УССР (252057, г. Киев-57, Довженко, 3). Зак. 1782