

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
Институт гидромеханики

В. Т. ГРИНЧЕНКО, И. В. ВОВК

**ВОЛНОВЫЕ
ЗАДАЧИ**
рассеяния звука
на упругих
оболочках

Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках / Гринченко В. Т., Вовк И. В. — Киев : Наук. думка, 1986 — 240 с.

В монографии изложены результаты исследования закономерностей формирования полей рассеяния при взаимодействии звуковых волн в жидкости с конечными и бесконечными решетками из упругих оболочек. Изложены методы решения краевых задач и задач сопряжения, возникающих при количественном описании звуковых полей в рамках модели идеальной сжимаемой жидкости. Указаны новые подходы к учету локальных особенностей в звуковых полях в окрестности точек резкой смены геометрии поверхности рассеивателя. Проведена систематизация данных расчетов, позволившая раскрыть связи между свойствами рассеяния звуковых полей и типами колебательных движений в стенках рассеивателей.

Для специалистов в области теоретической и прикладной акустики; может быть полезна аспирантам и студентам вузов.

Ил. 128. Табл. 5. Список лит.: с. 231—238. (216 назв.)

Ответственный редактор *А. Ф. Улитко*

Рецензенты *И. Т. Селезов, В. Г. Карнаухов*

Современная акустика представляет собой раздел прикладной физики, в котором для большого числа прикладных задач относительно легко могут быть сформулированы адекватные математические модели. Тем не менее во многих практически важных случаях решения принимаются не на основе анализа данных расчетов, проведенных применительно к соответствующей математической модели, а на основе общего понимания закономерностей формирования звуковых полей и результатов экспериментов. Причин такого положения много. Так, многие расчетные схемы довольно сложны и проведение расчетов по ним затруднено. Часто даже при наличии большого числа данных по отдельным расчетным вариантам их систематизация недостаточна для того, чтобы определить взаимосвязь отдельных факторов. Эти два обстоятельства и являются причиной того, что в настоящее время в акустике значительное внимание уделяется как разработке методов решения граничных задач для соответствующих уравнений, так и систематизации, обобщению результатов расчета для понимания особенностей формирования звуковых полей в различных типичных ситуациях.

В связи с тем, что в качестве модели акустической среды используется модель идеальной сжимаемой жидкости, то в качестве основы, на которой строится рассмотрение всех задач в книге, принимается вся совокупность классических результатов, относящихся к построению частных решений уравнения Гельмгольца в различных координатных системах, а также к построению решения отдельных задач для канонических областей, ограниченных координатными поверхностями одного семейства. Использование этих классических результатов открывает широкие возможности для увеличения количества тех задач акустики, которые допускают построение аналитического решения. В определенной мере реализация этих возможностей связана с применением метода частных областей, широко используемого в различных областях математической физики.

В монографии излагается существо метода частных областей. Авторы обращают внимание на то, что в рамках метода частных областей естественно рассматривать такие области существования звукового поля, границы которых имеют угловые точки. В идеальной сжимаемой жидкости в окрестности таких точек в поле скоростей возникают локальные особенности. Причем можно считать, что характер таких особенностей известен заранее, до решения задачи в целом.

Для построения полных наборов частных решений уравнения Гельмгольца в частных областях используются свойства функций штурм-лиувиллевского типа. Сходимость разложений по функциям такого типа непосредственно зависит от локальных особенностей в разлагаемых функциях. Поскольку такими разложениями приходится пользоваться при удовлетворении условий сопряжения на поверхностях, включающих угловые точки, то отсюда следует основная трудность в использовании метода частных областей — медленная сходимость рядов. В настоящее время существует несколько подходов к использованию данных о локальных особенностях поля для повышения эффективности расчетных алгоритмов. В монографии рассмотрен один из них и дана оценка его возможностей.

Большое внимание уделено решению конкретных задач. На выбор задач определенное влияние оказал тот факт, что в настоящее время наиболее полно изучены системы частных решений уравнения Гельмгольца в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. При анализе полученных решений определенное

**ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА
ИСПОЛЬЗУЕМОГО МЕТОДА
И КРУГА РАССМАТРИВАЕМЫХ ЗАДАЧ**

внимание уделялось также поиску возможностей упрощения строгой постановки задачи с учетом малости некоторых характерных параметров и обоснованию пределов применимости таких упрощенных постановок.

Важное место в общем объеме занимают вопросы изучения акустических свойств решеток из упругих элементов. Использование изгибных форм колебаний в таких элементах (причем именно тех форм колебаний, которые связаны с изменением объема элемента) позволило создать эффективные резонансные отражающие системы, состоящие из малых по сравнению с длиной волны рассеивателей. Применительно к таким системам проведен большой объем исследований для выяснения роли характерных параметров при формировании отраженного и прошедшего поля. Результаты исследований, а также данные о возможности расширения полосы частот эффективной звукоизоляции с помощью решеток из упругих элементов могут быть полезными при решении практических задач.

В процессе построения решений граничных задач здесь используется единый метод — метод частичных областей. Теоретические вопросы, связанные с обоснованием метода, доказательством разрешимости возникающих при его использовании бесконечных систем, получили довольно глубокую проработку в исследованиях по рассеиванию электромагнитных волн. Эти результаты в полной мере систематизированы в работе [180]. В нашем изложении основное внимание уделено сравнительному анализу большого числа конкретных расчетных ситуаций. Описание самого метода дано в такой мере, чтобы показать его почти неограниченные возможности при построении представлений общих решений в частичных областях различной формы. Кроме того, указан один из путей использования сведений о локальных особенностях в звуковых полях при разработке алгоритмов количественного анализа.

Авторы признательны ответственному редактору А. Ф. Улитко за полезные советы во время работы над книгой, рецензентам И. Т. Селезову и В. Г. Карнаухову за ценные критические замечания, а также всем сотрудникам за помощь при подготовке рукописи.

1. Характеристики звукового поля. Основные уравнения

Все задачи, рассматриваемые в книге, формулируются на основе модели идеальной сжимаемой жидкости для среды, в которой распространяется звук. Изменение состояния такой среды при распространении возмущений полностью характеризуется следующими величинами: скоростью частиц $v(r, t)$, давлением $p(r, t)$ и акустическим сжатием $s(r, t) = [\rho(r, t) - \rho_0]/\rho_0$. Здесь ρ и ρ_0 — соответственно плотность возмущенной и невозмущенной среды. Величина ρ_0 является одной из фундаментальных физических характеристик среды. Второй такой характеристикой является адиабатический модуль объемного сжатия κ , связывающий изменение давления и плотности частиц среды:

$$p = \kappa s. \quad (1.1)$$

В невозмущенном состоянии среда считается однородной, т. е. ρ_0 и κ — постоянные величины.

Помимо физически линейного уравнения состояния (1.1) в дальнейшем будем использовать и геометрически линейные соотношения механики сплошной среды. Тем самым предполагаются выполненными ограничения относительно малости акустических возмущений. В связи с возможностью накопления действия нелинейных эффектов вопрос о пределах применимости линейной модели является довольно сложным. Пожалуй, наиболее систематическое его рассмотрение содержится в работах [81, 126, 160].

Предположение о физической и геометрической линейности процесса деформирования среды при распространении звука позволяет существенно упростить систему уравнений гидродинамики и свести задачу определения движения в среде к определению одной скалярной функции положения точки r и времени t . Такой величиной обычно выбирается либо потенциал скорости $\Phi(r, t)$, либо давление $p(r, t)$. Обе эти функции удовлетворяют волновому уравнению

$$\Delta \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

где скорость звука определяется по свойствам среды равенством

$$c^2 = \kappa/\rho_0. \quad (1.3)$$

Функции $\Phi(r, t)$ и $p(r, t)$ связаны между собой простым соотношением

$$p(r, t) = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Знание потенциала $\Phi(r, t)$ позволяет определить вектор скорости движения частиц среды, связанного с распространением звука,

$$v = -\text{grad } \Phi. \quad (1.5)$$

Входящие в уравнения (1.2) и (1.5) дифференциальные операторы для произвольной ортогональной системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 с масштабными множителями Ламе H_1, H_2, H_3 имеют следующий вид [122]:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Phi &= \text{div grad } \Phi, \\ (\text{grad } \Phi)_{\xi_i} &= \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, 3); \\ \text{div } u &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (H_2 H_3 u_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (H_3 H_1 u_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (H_1 H_2 u_3) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Входящие в эти выражения параметры для используемых в последующем изложении декартовой, цилиндрической и сферической систем координат имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= x, \xi_2 = y, \xi_3 = z, H_1 = H_2 = H_3 = 1; \\ \xi_1 &= z, \xi_2 = r, \xi_3 = \varphi, H_1 = 1, H_2 = 1, H_3 = r; \\ \xi_1 &= r, \xi_2 = \theta, \xi_3 = \varphi, H_1 = 1, H_2 = r, H_3 = r \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Приведенная выше система соотношений отражает общие закономерности распространения малых возмущений в идеальной сжимаемой жидкости независимо от того, как возникли эти возмущения, какие препятствия встречает звук при распространении и какую область пространства занимает среда. В связи с этим указанные соотношения являются лишь математической моделью акустической среды, а не математической моделью некоторой конкретной акустической ситуации. Конкретизация ситуации достигается обычно путем априорного задания формы границы области существования звукового поля, физических свойств границы и характера ее движения, распределения источников звука в объеме и начального состояния среды [136, 141, 155].

В ряде случаев различие в акустических свойствах рассматриваемой среды и ограничивающих ее тел столь велико, что оказывается возможным использовать классические модели поверхностей — идеально мягкую, жесткую или импедансную границы. На мягкой границе должно обращаться в ноль давление в звуковом поле:

$$p(r, t)|_s = 0 \quad (1.8)$$

Причем в силу линейности задачи изменение положения границы в процессе взаимодействия ее со звуковой волной можно не учитывать. Жесткая неподвижная или движущаяся граница определяет в идеальной жидкости в каждой своей точке значение лишь нормальной к поверхности составляющей скорости:

$$-\text{grad } \Phi \cdot \vec{n}|_s = v(s, t). \quad (1.9)$$

Для описания акустических свойств различных сред или тел, ограничивающих область существования звуковой волны, очень удобным оказывается понятие импеданса. Величина импеданса Z , равная отношению силы (давления) к некоторой характерной скорости, в ряде случаев позволяет полностью описать акустические свойства препятствия. Поскольку это отношение не зависит от свойств окружающей акустической среды, то на поверхности такого препятствия легко формулируются соответствующие граничные условия. По существу, указанные возможности постановки граничных условий через импеданс в полной мере реализуются лишь для препятствия в виде полупространства при падении на него плоских волн. В большинстве задач акустики правильное определение импеданса требует решения сложных граничных задач, а формулировка граничных условий через импеданс в связи с этим носит формальный характер. Те предположения, которые зачастую делаются при определении импеданса, и составляют существо приближенного подхода к решению соответствующих задач [82]. Однако возможности такого подхода велики и будут достаточно широко использоваться в последующем изложении.

Трудности в определении импеданса препятствия возникают каждый раз, когда под воздействием звуковой волны в самом препятствии генерируется волновое поле, существенно влияющее на характер взаимодействия между звуковой волной и препятствием. Это внутреннее волновое поле, как правило, сильно зависит от формы препятствия, вида падающей звуковой волны, частотного диапазона воздействия и других факторов. Именно поэтому такое взаимодействие звука с препятствием не удастся достоверно описать с использованием понятия импеданса. В этом случае необходимо решать задачу об определении волновых полей в полной, кусочно-однородной области, заменяя граничные условия условиями сопряжения. В общем случае поведение волнового поля в препятствии может и не описываться моделью идеальной сжимаемой жидкости. В частности, препятствие может быть твердым упругим телом, твердым электроупругим телом и т. д. В каждом конкретном случае количество условий сопряжения волновых полей будет различным. Однако они всегда должны включать в себя условия равенства давления в звуковой волне и взятой со знаком минус нормальной составляющей вектора напряжений на границе

$$p(r, t)|_s = -\sigma_n|_s, \quad (1.10)$$

а также равенство нормальных к поверхности раздела скоростей точек акустической среды и препятствия

$$-\text{grad } \Phi(r, t)|_s \cdot \vec{n} = \vec{u}(r, t) \cdot \vec{n}. \quad (1.11)$$

Остальные граничные условия для препятствия, постановка которых необходима для однозначного определения волнового поля в нем, формулируются так, как будто взаимодействие с акустической средой отсутствует.

В последующем изложении при построении аналитических выражений для характеристик звуковых полей часто будем условно

разбивать всю область существования поля на ряд подобластей. Это позволит упростить задачу выбора формы решений. Однако затем необходимо произвести стыковку выражений на границе раздела подобластей. При этом на них должно быть обеспечено равенство нормальных к поверхности раздела составляющих скоростей частиц среды и значений давления.

2. Гармонические волны. Основные свойства модели

При рассмотрении задач акустики зачастую изложение ведется в рамках существенного предположения о временной зависимости характеристик поля. Большое внимание уделяется анализу таких ситуаций, в которых все характеристики звукового поля предполагаются зависящими от времени по гармоническому закону типа $e^{i\omega t}$, $e^{-i\omega t}$, $\cos \omega t$, где ω — круговая частота. При этом достигается существенное упрощение математической формулировки задачи — отпадает необходимость рассматривать начальные условия. Знание начального состояния акустической среды позволяет после решения стационарной задачи определить нестационарное звуковое поле. Во многих случаях для этого следует преодолеть существенные трудности. Однако в большинстве практических задач в этом нет необходимости. Предметом поиска являются такие характеристики звукового поля или излучающей системы, которые определены и имеют смысл лишь для гармонических по времени полей.

Все последующее изложение ведется в предположении о том, что временная зависимость искомых характеристик звукового поля определяется множителем $e^{-i\omega t}$. При использовании комплексной временной функции наиболее просто формулируются условия на бесконечности. С учетом принятой временной зависимости основное уравнение для потенциала скоростей частиц акустической среды (1.2) превращается в уравнение Гельмгольца

$$\Delta \Phi(r) + k^2 \Phi = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.12)$$

Соотношение (1.4) в этом случае приводит к чисто линейной связи между давлением и потенциалом скорости:

$$p = -i\omega\rho_0\Phi. \quad (1.13)$$

Таким образом, становится безразлично, относительно какой функции — давления или потенциала — формулируется исходная задача. Обе они удовлетворяют уравнению Гельмгольца.

Введенное в соотношение (1.12) волновое число связано с важнейшей характеристикой гармонического волнового движения — длиной волны соотношением $k = 2\pi/\lambda$, и в задаче возникает некоторый характерный параметр, имеющий размерность длины. Это обстоятельство является существенным для характеристики поставленной задачи. Дело в том, что как исходная нестационарная задача, так и задача о гармонических волновых движениях принадлежат к корректно сформулированным граничным задачам математической физики.

Это значит, что в общем случае некоторые малые изменения в исходной постановке должны приводить к некоторым малым изменениям в результатах. Такая общая характеристика понятия корректности постановки задачи фактически бессодержательна, поскольку в ней не указан масштаб, с помощью которого оценивается степень отклонения в исходных значениях определяющих величин. Определение таких величин в соответствии с физической сущностью задачи является важным для понимания существа рассматриваемых задач, а в ряде случаев позволяет и существенно упростить их постановку (подтверждающие это положение примеры будут даны в третьей главе).

Таким образом, переход к гармоническим волнам позволяет четко определить естественный линейный параметр задачи — длину волны. Именно по отношению к этому параметру будем говорить о малых или больших отклонениях в линейных размерах излучающих или рассеивающих объектов. Причем в ряде случаев малое изменение первоначально заданной формы тела позволяет приспособить его для описания в той или иной координатной системе и тем самым существенно упростить математическую формулировку задачи.

Математическая формулировка гармонических задач излучения и рассеивания звука включает в себя уравнение (1.12) и совокупность граничных и других условий, позволяющих конкретизировать решение, сделать его единственным. Выше указывались некоторые трудности, связанные с формулировкой граничных условий. В значительной мере характер и сущность этих трудностей можно понять, если сформулировать существо той задачи, которая решается при постановке граничных условий.

В качестве модели акустической среды принимаем модель идеальной сжимаемой жидкости. В процессе распространения звука в такой среде происходит взаимодействие звуковых волн с различными объектами другой физической природы, со свойствами, которые не могут моделироваться свойствами идеальной сжимаемой жидкости. Процесс взаимодействия звуковых волн с такими объектами довольно сложен. Несмотря на это, пытаемся зачастую формулировать граничные условия, т. е. по сути описываем сложный процесс взаимодействия звука с самыми различными телами в терминах функций Φ или p , т. е. на языке тех понятий, которыми часто невозможно описать явления в препятствиях со сложными свойствами.

При математической формулировке волновых акустических задач используются характерные идеализации. Важнейшей идеализацией является предположение об отсутствии потерь в среде. Именно вследствие принятия такого предположения для однозначной разрешимости граничных задач акустики в бесконечных областях они должны быть дополнены условиями излучения [83, 171]. В том случае, когда область, занятая излучающим или рассеивающим телом, конечна, формулировка условий излучения довольно проста. Эти условия, по существу, выражают тот факт, что все составляющие излученного или рассеянного поля на большом удалении представляют собой сферическую волну, уносящую энергию на бесконечность.

При наличии в области границ, уходящих на бесконечность, формулировка условий излучения более сложная. Однако возникающие при этом в задачах акустики вопросы к настоящему времени довольно тщательно изучены [113, 114].

3. Условия на ребре

Используемые в акустике представления о границах областей также представляют собой существенную идеализацию. Говоря о границе, по сути, отвлекаемся от каких-либо ее физических свойств и воспринимаем ее в рамках евклидовой геометрии. Как следствие этого в задачах излучения и рассеяния звука

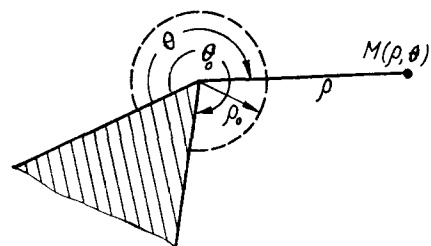


Рис 1

часто граничные условия формулируются на поверхностях, включающих в себя угловые точки или линии. Обтекание таких участков границы идеальной жидкостью характеризуется наличием в поле скоростей локальных особенностей, т. е. при приближении по жидкости к такой угловой точке скорость частиц жидкости стремится к бесконечности. Учет этого очень важен

для правильной постановки граничных задач акустики [113, 125, 171].

Существо вопроса, связанного с формулировкой условий на ребре, легко понять из следующих рассуждений. Рассмотрим в укрупненном изображении окрестность вершины клина (рис. 1), имеющего бесконечную протяженность в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка. Положение произвольной точки в окрестности клина определим координатами ρ и θ . Стороны клина $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ будем предполагать идеальными — акустически мягкими или жесткими. В области вне клина существует звуковое поле с частотой ω . Необходимо определить структуру звукового поля в окрестности вершины.

Ход рассуждений, обеспечивающих решение указанной задачи, довольно прост. Будем рассматривать вершину как некоторый источник звука. Выделим в окрестности вершины некоторую область с радиусом ρ_0 , значительно меньшим длины волны $\rho_0 \ll \lambda$. Известно, что в этой малой окрестности малого источника звука жидкость может рассматриваться как несжимаемая [89, 163, 171]. т. е. движение жидкости внутри области $\rho < \rho_0$ можно изучать на основе анализа решений уравнений Лапласа для потенциала скоростей с соответствующей системой граничных условий

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Phi(\rho, \theta) &= 0, \\ \Phi(0, \rho) &= \Phi(\theta_0, \rho) = 0; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi(0, \rho)}{\partial \theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi(\theta_0, \rho)}{\partial \theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Первая группа граничных условий относится к акустически мягкой поверхности, а вторая — к акустически жесткой. В рамках последующих рассуждений можно аналогично рассмотреть и ситуацию, при которой одна грань клина акустически мягкая, а другая акустически жесткая.

Для того чтобы полностью описать характер движения в выделенной области $\rho < \rho_0$, решение уравнения Лапласа для Φ должно удовлетворять некоторому дополнительному условию. Физическая сущность его достаточно проста — представление для Φ должно содержать достаточно произвола для того, чтобы можно было осуществить сопряжение звуковых полей в областях $\rho < \rho_0$ и $\rho > \rho_0$ при произвольном звуковом поле в области $\rho > \rho_0$. Такое решение довольно просто построить.

Легко проверить, что в полярных координатах ρ, θ уравнение Лапласа имеет частные решения вида

$$\Phi_v(\rho, \theta) = \rho^{\pm v} \frac{\cos v\theta}{\sin v\theta} \quad (1.15)$$

где v — произвольное вещественное число.

Поскольку рассматриваемая область содержит точку $\rho = 0$, естественно ограничиться в последующем изложении только решениями с положительными степенями v . Рассмотрим более подробно такое решение

$$\Phi_v(\rho, \theta) = \rho^v [A \cos v\theta + B \sin v\theta]. \quad (1.16)$$

Воспользуемся имеющимся в нем произволом (v, A, B) для того, чтобы удовлетворить граничные условия на сторонах клина. Для определенности рассмотрим случай мягких границ. Из условия на грани $\theta = 0$ следует $A \equiv 0$, а условие на грани $\theta = \theta_0$ приводит к возможным значениям $v_n = n\pi/\theta_0$ ($n = 1, 2, \dots$). Постоянная B в каждом таком частном решении остается произвольной.

Проведенные выкладки позволяют получить окончательное решение исходной задачи — найти некоторое полное представление для поля в области $\rho < \rho_0$. Поскольку система функций $\sin n\pi/\theta_0 \theta$ ($n = 1, 2, \dots$) является полной в интервале $0 \leq \theta \leq \theta_0$, то искомое решение уравнения Лапласа можно представить в форме бесконечного ряда

$$\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \rho^{v_n} \sin v_n \theta, \quad v_n = \frac{n\pi}{\theta_0}. \quad (1.17)$$

На границе области $\rho = \rho_0$ этот ряд является полным рядом Фурье и, следовательно, выбором значений постоянных B_n можно выполнить условия сопряжения с областью $\rho > \rho_0$.

Считаем, что представление (1.17) для потенциала колебательных скоростей является полным. Это значит, что для описания движения жидкости внутри области $\rho \leq \rho_0$ к нему не нужно добавлять никаких дополнительных решений. Однако это одновременно означает, что из представления (1.17) нельзя исключить ни одного слагаемого, так как

после такого исключения исчезает возможность выполнить произвольные условия на границе $\rho = \rho_0$. Именно поэтому заключаем, что выводы о структуре звукового поля, полученные на основе представления (1.17), являются соответствующими принятым моделям среды и границы. Каким бы методом ни решалась задача об изучении звукового поля в области с угловой точкой, полученное представление должно давать такой же характер звукового поля в окрестности ребра, как и представление (1.17).

Рассмотрим исходя из уравнения (1.17) выражения для колебательных скоростей частиц среды:

$$\begin{aligned} v_\theta &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n v_n \rho^{v_n-1} \cos v_n \theta; \\ v_\rho &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n v_n \rho^{v_n-1} \sin v_n \theta. \end{aligned} \quad (1.18)$$

До тех пор пока $\theta_0 \leq \pi$, в выражениях (1.18) при подходе к вершине клина все слагаемые остаются конечными. Если же θ_0 становится больше π , первые слагаемые в этих выражениях содержат множитель ρ в отрицательных степенях, т. е. при подходе к вершине клина колебательная скорость будет стремиться к бесконечности. Наибольшая скорость стремления будет наблюдаться в случае $\theta_0 = 2\pi$, т. е. в окрестности границы полуплоскости. В этом случае при подходе к ребру скорость растет пропорционально $\rho^{-1/2}$. В случае $\theta_0 = \frac{3}{2}\pi$, характерном для многих рассмотренных здесь задач, рост скорости определяется множителем $\rho^{-1/2}$.

Аналогичное выражению (1.17) представление для потенциала скоростей может быть получено и в случае жестких границ клина. Оно имеет следующий вид:

$$\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^{v_n} \cos v_n \theta, \quad v_n = \frac{n\pi}{\theta_0}. \quad (1.19)$$

Как видим, характер особенностей в поле скоростей в данном случае такой же, как и в случае акустически мягких границ клина.

Полученные результаты позволяют сформулировать условия на ребре в задачах излучения и рассеивания звука. Суть их заключается в том, что в рамках модели идеальной сжимаемой жидкости звуковое поле в окрестности острых ребер с углами раскрытия, меньшими π , должно иметь локальные особенности в поле скоростей. Угол раствора клина определяет скорость стремления составляющих скорости к бесконечности и угловое распределение их в окрестности вершины. Эти особенности могут определяться независимо от решения граничной задачи для области с углами в целом и, вообще говоря, могут считаться известными заранее. Подчеркнем здесь то обстоятельство, что задание условий на ребре — это не только задание характера особенности, но и задание углового распределения поля вблизи вершины клина. Априорное знание углового распределения характеристик поля оказывается существенным при построении эффективных

алгоритмов решения граничных задач для областей с угловыми точками [67, 68, 72]. Это утверждение будет многократно подтверждено при последующем изложении материала.

4. Метод частичных областей при решении граничных задач излучения и рассеяния звука

Как отмечалось выше, анализ многих акустических ситуаций возможно осуществить в рамках модели, приводящей к решению граничных задач для уравнения Гельмгольца. Такие граничные задачи довольно полно изучены [122]. Для самого уравнения Гельмгольца построены многочисленные частные решения в различных системах координат. Для таких случаев, когда форма излучающего или рассеивающего тела такова, что его граница совпадает с одной из координатных поверхностей, накоплен огромный материал по решению граничных задач. Пожалуй, в наиболее законченном виде такой материал систематизирован и обобщен в работе [183].

Во всех рассмотренных в работе [183] задачах реализован единый подход, который используется для многих задач математической физики. Сущность его заключается в следующем. Для каждой области существования звукового (электромагнитного) поля на основе выбора соответствующих частных решений уравнения Гельмгольца строится такая их совокупность, которую мы называем общим решением граничной задачи. Это не совсем традиционное для математической физики понятие означает, что каждый раз мы строим некоторую совокупность частных решений уравнения Гельмгольца, которая содержит достаточно произвола для того, чтобы удовлетворить произвольное граничное условие для скорости или давления на поверхности, ограничивающей область существования поля. Само доказательство такой возможности обычно основано на использовании свойств функций штурм-лиувиллевого типа [152]. В частности, одно из важнейших их свойств — свойство ортогональности позволяет в последующем свести задачу определения произвольных постоянных и функций в общем представлении характеристик поля к решению простых систем линейных алгебраических уравнений. Задача несколько усложняется, если на граничной поверхности, совпадающей с координатной поверхностью, заданы смешанные граничные условия. В этом случае на одной части границы задана нормальная составляющая скорости, а на другой — давление. Такие граничные условия приводят к довольно сложным системам интегральных или алгебраических уравнений, для решения которых не предложены к настоящему времени методы, эффективные для произвольной длины волны.

Круг задач, которые могут быть до конца рассмотрены в рамках подхода, столь концептивно описанного выше, довольно ограничен. Практически в работе [183] он очерчен полностью. Однако накопленные в процессе его реализации знания о свойствах решений уравнения Гельмгольца, огромный фактический материал, относящийся к совокупности частных решений, позволяют значительно расширить

круг волновых задач излучения и рассеяния звука, которые могут получить эффективное решение в рамках аналитических подходов. Причем здесь существуют три важнейших направления обобщения классических результатов, полученных при изучении граничных задач для уравнения Гельмгольца.

Первое направление обобщения результатов решения волновых задач для одиночных излучателей (рассеивателей) связано с классическими работами математиков [19, 102] по перестройке выражений для волновых функций из одной координатной системы в другую. В последующем эти результаты послужили основой для большого числа конкретных работ [85, 210]. Это направление в акустике довольно эффективно развивается и в настоящее время.

Второе направление, в рамках которого существенно расширяется круг задач, где могут быть использованы классические результаты, примыкает к так называемым методам возмущения формы границы. Общая идея таких методов довольно проста — использовать решения для канонических областей для представления поля в неканонических областях, т. е. в областях, граничная поверхность которых не вписывается в какую-либо координатную систему, в которой делятся переменные в уравнении Гельмгольца. Здесь возникают довольно сложные вопросы отработки техники, позволяющей определять произвольные постоянные и функции в общем решении, по граничным условиям на неканонических поверхностях. Кроме того, вопрос о построении соответствующих наборов частных решений не так уж прост. Однако обоснование и практическое использование такого подхода продвинуто достаточно далеко [211]. В современной акустической литературе этот метод известен как метод Т-матриц.

Помимо указанных двух направлений имеется еще одна возможность расширить круг задач акустики, допускающих аналитическое представление решения. При этом области существования звукового поля могут быть довольно сложными и многообразными. Поскольку именно этот подход будет использован в последующем изложении, более подробно остановимся на его описании. Причем для большей конкретности проведем изложение применительно к определенному виду частных решений двухмерного уравнения Гельмгольца.

Хорошо известно [65, 122], что уравнение Гельмгольца в полярных координатах на плоскости (r, θ) имеет частные решения вида

$$\Phi(r, \theta) = \begin{cases} A(\alpha) J_\alpha(\sqrt{k^2 - \alpha^2} r) \\ B(\alpha) N_\alpha(\sqrt{k^2 - \alpha^2} r) \end{cases} \begin{cases} \cos \alpha \theta \\ \sin \alpha \theta \end{cases}. \quad (1.20)$$

Смысл этой записи в том, что произведение произвольной функции Бесселя на один из тригонометрических множителей является решением уравнения. Это решение определяется с точностью до некоторой постоянной величины $A(\alpha)$ или $B(\alpha)$.

Самой важной особенностью частных решений (1.20) является то, что в них содержится произвольный, не связанный с уравнением параметр α . Определяя значения этого параметра, можно приспособить частные решения (1.20) к построению представлений звукового поля

в различных областях. При использовании выражений (1.20) следует также иметь в виду содержащуюся в них некоторую неопределенность. Для исключения этой неопределенности укажем, что при $\alpha > k$ в указанных выражениях следует заменить $J_\alpha(\sqrt{k^2 - \alpha^2} r)$ на $I_\alpha(\sqrt{\alpha^2 - k^2} r)$ и $N_\alpha(\sqrt{k^2 - \alpha^2} r)$ на $K_\alpha(\sqrt{\alpha^2 - k^2} r)$, где $I_\alpha(x)$ и $K_\alpha(x)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента [65].

Укажем несколько характерных случаев использования частных решений вида (1.20) для построения общих решений граничных задач для уравнения Гельмгольца. Пожалуй, наиболее простым здесь является случай, когда необходимо найти общее представление звукового поля в некотором кольце $r_1 \leq r \leq r_2$. В этом случае из условия периодичности поля по координате θ следует, что частные решения (1.20) будут соответствовать существованию задачи, если в качестве α использовать последовательность целых чисел $\alpha_n = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). При этом общее решение для поля в кольце будет иметь вид

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(\sqrt{k^2 - n^2} r) + B_n N_n(\sqrt{k^2 - n^2} r)] \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases}. \quad (1.21)$$

За счет выбора значений постоянных A_n и B_n можно удовлетворить произвольные граничные условия для давлений или нормальных составляющих скоростей на поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$. Сама процедура определения постоянных A_n и B_n довольно проста и сводится, по существу, к определению коэффициентов Фурье для заданной функции. Рассматриваемая задача не имеет решения лишь для дискретного множества значений частоты — для собственных частот кольца. Если поверхность $r = r_2$ удалять на бесконечность, решение (1.21) преобразуется в решение для внешности цилиндра ($r > r_1$). При этом условия излучения приводят к тому, что $B_n = iA_n$ и выражение для потенциала поля приобретает вид

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\sqrt{k^2 - n^2} r) \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases}. \quad (1.22)$$

Если $r_1 \rightarrow 0$, в решении (1.21) следует положить $B_n = 0$.

Частные решения (1.20) можно использовать для построения общего решения задачи в области $r_1 \leq r \leq r_2$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$, представляющей собой криволинейный прямоугольник. Причем будем считать, что неоднородные граничные значения скорости или давления заданы на всех четырех сторонах прямоугольника (рис. 2).

В рассматриваемой задаче условия формулируются уже на границах, принадлежащих различным координатным поверхностям

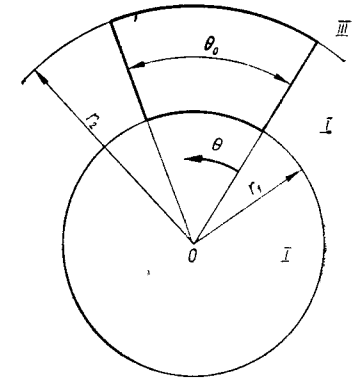


Рис. 2

$\theta = \text{const}$ и $r = \text{const}$. В связи с этим уже невозможно получить полное решение задачи для одного типа значений параметра α . Однако задача все еще остается довольно простой и ее решение легко строится в явном виде.

Общее представление для потенциала скоростей звукового поля должно позволить выполнить произвольные граничные условия на поверхностях $r = r_1$, $r = r_2$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$ и $\theta = 0$, $\theta = \theta_0$, $r_1 \leq r \leq r_2$. Задачу построения такого представления будем решать по частям.

Рассмотрим вначале граничные условия на поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$. Решение предыдущей задачи для полного кольца показывает, что в этом случае частные решения (1.20) следует конкретизировать так, чтобы получить полную и ортогональную систему функций в отрезке $0 \leq \theta \leq \theta_0$. Такое требование позволяет определить область допустимых значений α . Этому требованию, очевидно, удовлетворяют $\alpha_n^{(1)} = \frac{n\pi}{\theta_0}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $\alpha_n^{(2)} = \frac{(2n+1)\pi}{2\theta_0}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). И в том и в другом случае наличие в представлении общего решения для потенциала слагаемого

$$\Phi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_{\alpha_n}(\sqrt{k^2 - \alpha_n^2} r) + B_n N_{\alpha_n}(\sqrt{k^2 - \alpha_n^2} r)] \begin{cases} \cos \alpha_n \theta \\ \sin \alpha_n \theta \end{cases} \quad (1.23)$$

гарантирует возможность выполнения граничных условий для давления или скорости при $r = r_1$ и $r = r_2$ за счет выбора значений постоянных A_n и B_n .

Представление (1.23) определено неоднозначно. Здесь можно использовать как различные значения тригонометрического множителя, так и различные значения α_n . Дополнительная конкретизация представления (1.23) связана с устранением указанного произвола в соответствии с существом рассматриваемой задачи. Характер связанных с этим рассуждений покажем для случая, когда на поверхностях $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ заданы значения нормальной к поверхности составляющей колебательной скорости $v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$. В этом случае попытаемся выбрать содержащийся в представлении (1.23) произвол относительно значений α_n и тригонометрического множителя так, чтобы наличие в общем решении составляющей Φ_1 не сказывалось на процедуре удовлетворения граничных условий на поверхностях $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$. Это значит, что соответствующие представлению (1.23) значения скорости v_θ при указанных значениях угла должны обращаться в нуль.

Рассмотрим вначале поверхность $\theta = 0$. Ясно, что производная $\partial \Phi_1 / \partial \theta$ будет тождественно обращаться в нуль на этой поверхности, если в качестве тригонометрического множителя в выражении (1.23) использовать $\cos \alpha_n \theta$. Для того чтобы обращаться в нуль производная от Φ_1 по θ и на поверхности $\theta = \theta_0$, в качестве α_n следует взять $\alpha_n = n\pi/\theta_0$. Тем самым произвол относительно формы решения (1.23)

устранен полностью. Учитывая свойство этого решения — удовлетворение однородных условий по скоростям на поверхностях $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$, его часто называют однородным решением для рассматриваемой области. Построение решения для случая задания на поверхностях $\theta = \text{const}$ условия для давления полностью аналогично. При этом в качестве тригонометрического множителя в представлении (1.23) следует взять $\sin \alpha_n \theta$. Указанные выше допустимые значения $\alpha_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\theta_0}$ необходимо использовать в том случае, когда отсчет координаты θ ведется от плоскости симметрии для рассматриваемой области.

При построении второй составляющей общего решения, позволяющей удовлетворить неоднородные граничные условия по скоростям на поверхностях $\theta = \text{const}$, приходим к еще недостаточно хорошо изученной спектральной задаче Штурма — Лиувилля. Поэтому наши построения будут носить несколько более формальный характер, что тем не менее позволяет полностью иллюстрировать существо метода.

Для того чтобы построить решение Φ_{11} , аналогичное по свойствам решению (1.23), необходимо так распорядиться значениями параметра α , чтобы соответствующие Φ_{11} скорости v_r обращались на поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$ в нуль. Учитывая выражение (1.23), можем в общем случае частное решение уравнения Гельмгольца представить в виде

$$\Phi^*(r, \theta) = [A^{(1)}(\alpha) J_\alpha(\sqrt{k^2 - \alpha^2} r) + B^{(1)}(\alpha) N_\alpha(\sqrt{k^2 - \alpha^2} r)] \cos \alpha \theta + [A^{(2)}(\alpha) J_\alpha(\sqrt{k^2 - \alpha^2} r) + B^{(2)}(\alpha) N_\alpha(\sqrt{k^2 - \alpha^2} r)] \sin \alpha \theta \quad (1.24)$$

Этим, по сути, отражен тот простой факт, что постоянные множители для частных решений с разными тригонометрическими множителями могут быть разные. Исходя из однородных условий на поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$ и полагая, что эти однородные условия должны выполняться порознь для слагаемых с $\cos \alpha \theta$ и $\sin \alpha \theta$, приходим к следующей однородной системе уравнений:

$$\begin{aligned} A^{(m)}(\alpha) J'_\alpha(\sqrt{k^2 - \alpha^2} r_1) + B^{(m)}(\alpha) N'_\alpha(\sqrt{k^2 - \alpha^2} r_1) &= 0, \\ A^{(m)}(\alpha) J'_\alpha(\sqrt{k^2 - \alpha^2} r_2) + B^{(m)}(\alpha) N'_\alpha(\sqrt{k^2 - \alpha^2} r_2) &= 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

$(m = 1, 2)$

Здесь штрих указывает на дифференцирование по r .

Условие равенства нулю определителя этой системы и дает трансцендентное уравнение для определения набора значений параметра α :

$$J'_\alpha(\gamma \alpha r_1) N'_\alpha(\gamma \alpha r_2) - J'_\alpha(\gamma \alpha r_2) N'_\alpha(\gamma \alpha r_1) = 0. \quad (1.26)$$

$\gamma \alpha = \sqrt{k^2 - \alpha^2}.$

Трансцендентное уравнение (1.26) в представленном виде не изучалось. Другая форма аналогичного по существу уравнения получается после замены в исходном уравнении Гельмгольца координаты

r на $\xi = ikr$. При этом ряд частных случаев граничных задач для клина исследовался достаточно подробно. Соответствующие трансцендентные уравнения, аналогичные по существу уравнению (1.26) для случая $r = 1$, исследовались в работах [152, 164]. Интересно отметить, что спектр задачи для части клина с вершиной оказывается непрерывным и вместо ряда соответствующее представление для Φ_{II} должно выражаться через интеграл. Отметим также, что вопрос о корнях функций Бесселя, рассматриваемых как функции их порядков, отражен в работе [65]. В частном случае полного клина ($0 \leq r < \infty$) произвольные граничные условия на его границах $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ могут быть выполнены с помощью преобразования Конторвича — Лебедева [77].

Далее предположим, что трансцендентное уравнение (1.26) определяет бесконечный набор корней α_l ($l = 1, 2, \dots$). Используя одно из уравнений в системе (1.25), можем связать значения произвольных постоянных $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$. Для этого можно, например, использовать первое соотношение в системе (1.25). Тогда на основе выражения (1.24) можем записать общее представление для второй составляющей потенциала скорости в рассматриваемой задаче:

$$\Phi_{II}(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} [D_l^{(1)} \sin \alpha_l \theta + D_l^{(2)} \cos \alpha_l \theta] Q_l(\alpha_l r),$$

$$Q_l(\alpha_l r) = J_{\alpha_l}(\gamma_{\alpha}^{(l)} r) N'_{\alpha_l}(\gamma_{\alpha}^{(l)} r_1) - N_{\alpha_l}(\gamma_{\alpha}^{(l)} r) J'_{\alpha_l}(\gamma_{\alpha}^{(l)} r_1). \quad (1.27)$$

Таким образом, общее решение граничной задачи для уравнения Гельмгольца в области, показанной на рис. 2, построено. Оно представляется в виде суммы

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_I(r, \theta) + \Phi_{II}(r, \theta) \quad (r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \theta \leq \theta_0). \quad (1.28)$$

Важно, что произвольные постоянные, содержащиеся в выражениях для Φ_I и Φ_{II} , определяются по граничным условиям независимо. При этом использование ортогональности соответствующих функций сводит этот процесс к решению конечных систем линейных алгебраических уравнений. Ортогональность системы функций $Q_l(\alpha_l r)$ на интервале $r_1 \leq r \leq r_2$ может быть показана непосредственно с использованием уравнения для функций Бесселя и соответствующих граничных условий. Это обстоятельство интересно также с физической точки зрения. Сама возможность такого раздельного определения произвола указывает на то, что собственные формы колебаний в выделенном объеме формируются без взаимодействия радиальных и окружных волновых движений.

Главная идея, на основе которой формировался весь изложенный выше процесс построения представления для потенциала скорости, сводилась к тому, чтобы путем использования известных частных решений для уравнения Гельмгольца построить такие их наборы, которые заведомо позволили бы выполнить все заданные условия на границе. Определенная конкретизация изложения достигнута за счет

привязки выкладок к конкретной области, представленной на рис. 2. Обобщение таких выкладок на большое число других граничных задач очевидно. Здесь лишь отметим, что такое обобщение может быть распространено и на случай довольно сложных областей, в частности таких, у которых граничная поверхность уже не является частями координатных поверхностей в одной системе координат. Можно легко представить себе структуру решения для плоской области, образованной частями координатных поверхностей в цилиндрической и декартовой системе. Однако отдельные составляющие такого решения уже не будут однородными и задача фактического удовлетворения граничных условий становится довольно сложной.

Дальнейшее обобщение изложенного выше подхода связано с рассмотрением внешних граничных задач, т. е. задач в бесконечных областях. В качестве такой задачи рассмотрим задачу об излучении звука во внешность области, выделенной на рис. 2. Для того чтобы избежать некоторой формальности, связанной с использованием системы функций $Q_l(\alpha_l r)$, будем считать, что поверхности $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ при $r_1 \leq r \leq r_2$ являются акустически жесткими. Звуковое поле создается в результате колебаний поверхностей $r = r_1$ и $r = r_2$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$, на которых задано распределение колебательной скорости

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial r} = f_1(\theta), \quad r = r_1; \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = f_2(\theta), \quad r = r_2. \quad (1.29)$$

Для построения общего решения граничной задачи (1.29) для внешности области, показанной на рис. 2, разобьем всю область существования поля на части. При этом такие частичные области следует выбрать так, чтобы в каждой из них можно было построить решение уравнения Гельмгольца, позволяющее выполнить граничные условия на какой-то части полной поверхности и условия сопряжения на границах соседних частичных областей. Следует иметь в виду, что таким образом поставленная задача имеет несколько решений, которые здесь для данной задачи рассматривать не будем. В параграфе 9 второй главы при рассмотрении задачи об излучении звука конечным цилиндром конкретно указано несколько возможных вариантов разделения всей области существования поля на частичные области.

Каждый раз при наличии возможности выбирать варианты разделения области на части следует руководствоваться простым правилом — для практического использования следует взять тот вариант, который связан с наиболее простыми выкладками при фактическом удовлетворении граничных условий. В рассматриваемом сейчас случае таким наиболее простым вариантом является выделение трех частичных областей. Область I определяется как область $r \leq r_1$; в области II $r_1 \leq r \leq r_2$, $\theta_0 \leq \theta \leq 2\pi$ и в области III $r \geq r_2$.

В области I представление для потенциала скоростей имеет довольно простой вид

$$\Phi_I = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta] J_n(\sqrt{k^2 - n^2} r). \quad (1.30)$$

С помощью постоянных A_n и B_n можно удовлетворить произвольные граничные условия на поверхности $r = r_1$.

В области II решение представляется в виде

$$\Phi_{II}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [D_m J_{\alpha_m}(\sqrt{k^2 - \alpha_m^2} r) + F_m N_{\alpha_m}(\sqrt{k^2 - \alpha_m^2} r)] \times \cos \alpha_m (\theta - \theta_0). \quad (1.31)$$

Здесь $\alpha_m = \frac{m\pi}{2\pi - \theta_0}$. Такое значение α_m обеспечивает тождественное удовлетворение граничных условий на жестких стенках $\theta = \theta_0$ и $\theta = 2\pi$. Произвол в виде постоянных D_m и F_m позволяет выполнить условия сопряжения на границах с областями I и II.

Во внешней области III выражение для потенциала скоростей частиц также строится довольно просто и имеет с учетом условий излучения следующий вид:

$$\Phi_{III}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [C_l \cos l\theta + P_l \sin l\theta] H_l^{(1)}(\sqrt{k^2 - l^2} r). \quad (1.32)$$

Здесь C_l и P_l — произвольные постоянные.

Для иллюстрации возможности излагаемого подхода и его особенностей необходимо указать способ определения произвольных величин в выражениях, образующих представление потенциала в отдельных областях. В отличие от рассмотренной выше внутренней задачи общее решение для Φ в данном случае имеет вид

$$\Phi(r, \theta) = \begin{cases} \Phi_I, & r < r_1, 0 \leq \theta \leq 2\pi; \\ \Phi_{II}, & r_1 \leq r \leq r_2, \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi; \\ \Phi_{III}, & r \geq r_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (1.33)$$

При этом удовлетворены лишь условия излучения и условия на жестких поверхностях $\theta = \theta_0$ и $\theta = 2\pi$.

Запишем в общем виде условия, которым дополнительно должны удовлетворять выражения, входящие в решение (1.33). На границе областей I и II имеем следующие два условия сопряжения:

$$-\frac{\partial \Phi_I(r_1, \theta)}{\partial r} = \begin{cases} f_1(\theta), & 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\ -\frac{\partial \Phi_{II}(r_1, \theta)}{\partial r}, & \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi; \end{cases} \quad (1.34)$$

$$\Phi_I(r_1, \theta) = \Phi_{II}(r_1, \theta), \quad \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Аналогично на границе раздела областей II и III имеем следующие функциональные уравнения:

$$-\frac{\partial \Phi_{III}(r_2, \theta)}{\partial r} = \begin{cases} f_2(\theta), & 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\ -\frac{\partial \Phi_{II}(r_2, \theta)}{\partial r}, & \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi; \end{cases} \quad (1.35)$$

$$\Phi_{III}(r_2, \theta) = \Phi_{II}(r_2, \theta), \quad \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Именно из системы уравнений (1.34) и (1.35) должны быть определены произвольные постоянные, входящие в выражения для потен-

циалов в отдельных областях. Преобразование указанных функциональных уравнений в алгебраические осуществляется с учетом свойств ортогональности и полноты систем тригонометрических функций, входящих в соответствующие ряды. Причем сама форма записи соотношений (1.34) и (1.35) подсказывает, какие системы функций должны быть использованы.

Рассмотрим, например, первое равенство выражения (1.34). Поскольку оно имеет место на интервале $0 \leq \theta \leq 2\pi$, то естественно, что при преобразовании его к алгебраическим равенствам используем ортогональность функций $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$. При этом получаем бесконечную последовательность алгебраических равенств для определения постоянных A_n и B_n . В силу того что системы функций $\cos \alpha_m (\theta - \theta_0)$ и $\cos n\theta, \sin n\theta$ не ортогональны, в каждое равенство для конкретного значения $n = N$ войдет бесконечный ряд неизвестных коэффициентов D_m и F_m . Второе же условие (1.34) в интервале $\theta_0 \leq \theta \leq 2\pi$ алгебраизуется на основе свойств ортогональности на этом интервале системы функций $\cos \alpha_m (\theta - \theta_0)$. При этом в каждое равенство для конкретного $m = M$ войдет бесконечный ряд значений неизвестных A_n и B_n .

Соотношения (1.35) идентичны равенствам (1.34) и, следовательно, все указанное в полной мере относится и к ним. На этом этапе, когда описывается существо используемого метода, явные выражения для коэффициентов переразложения выписывать не будем. Совершенно ясно, что использование метода частичных областей приводит к формированию бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Эффективность и возможности метода в значительной мере зависят от эффективности алгоритмов решения бесконечных систем. Построению таких эффективных алгоритмов в последующем изложении уделяется большое внимание. При этом используются сведения о структуре звукового поля в окрестности угловых точек.

Приведенное описание метода частичных областей достаточно для того, чтобы дать представление о больших его возможностях в смысле широты охвата типов излучающих (рассеивающих) областей, для которых возможно аналитическое представление потенциала звукового поля. Эти большие возможности в значительной мере предопределили широкое использование метода в задачах акустики и электродинамики. Для задач излучения и рассеивания электромагнитных волн существо метода и большое число конкретных результатов содержатся в работах [179, 180].

5. Звуковое поле в волноводе с колеблющимися стенками

В ряде случаев естественная физическая неоднородность в рассматриваемой задаче стимулирует разделение всей области существования звукового поля на подобласти. Несмотря на то что в некоторых из таких задач возможно прямое использование классических методов математической физики, в частности метода интегральных преобразований, выделение частичных областей оказывается удобным и позво-

ляет избежать некоторых трудностей в построении обратных преобразований. В качестве примера рассмотрим интересную и в физическом плане задачу об определении звукового поля в волноводе с колеблющимися на конечном участке стенками. Исследуемая ситуация изображена на рис. 3. Стенки волновода считаем жесткими. Колеблющиеся участки стенок имеют длину $2a$ и выделены на рисунке штриховкой. Для уменьшения громоздкости последующих выкладок предположим распределение скорости по нижней и верхней стенке волновода одинаковым и симметричным относительно оси Oy , т. е. считаем $v_z(x) = v_z(-x)$.

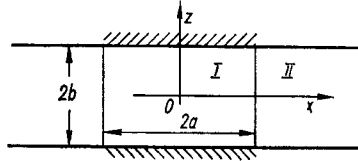


Рис. 3

В поставленной задаче необходимо найти звуковое поле в волноводе. При этом следует отметить, что эта граничная задача допускает множество решений. К полученному каким-либо способом решению, удовлетворяющему граничным условиям, всегда можно добавить бегущую нормальную волну для волновода с жесткими стенками, т. е.

$$\Phi^*(x, z) = A \cos \frac{n\pi}{b} z e^{\pm i \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} x}. \quad (1.36)$$

Здесь n может быть любым, лишь бы выполнялось неравенство $k > n\pi/b$.

Решение (1.36) определяет волну, переносящую энергию либо вправо, либо влево. Эта неопределенность находится в противоречии с требованиями условий на бесконечности и очевидной симметрии задачи. Поэтому решения вида (1.36) должны быть из общего представления поля исключены. Однако из двух бегущих волн типа (1.36) можно образовать стоячую волну в волноводе с потенциалом

$$\Phi^*(x, z) = A \cos \frac{n\pi}{b} z \cos \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} x. \quad (1.37)$$

Такое звуковое поле не связано с переносом энергии вдоль волновода, однако очевидным образом связано с некоторыми источниками звука на бесконечности и, естественно, должно быть удалено из общего представления для потенциала в рассматриваемой задаче. Именно с необходимостью устранить в общем представлении поля составляющие типа (1.36) и (1.37) и связаны определенные методические приемы при использовании в данной задаче интегрального преобразования Фурье [66]. В рамках метода частичных областей каких-либо трудностей при рассмотрении задачи не возникает.

В силу симметрии звукового поля в волноводе при построении решения достаточно рассмотреть две частичные области I и II (см. рис. 3). На границах области I при $z = \pm b$ имеет место следующее условие:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = v_0 \cos \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}. \quad (1.38)$$

Здесь v_0 — заданная постоянная величина.

Таким образом, последующее изложение ведется для одной из гармоник Фурье функции, задающей распределение скорости на стенке.

Внутри области I потенциал звукового поля должен содержать достаточно произвола для удовлетворения неоднородных граничных условий на плоскостях $z = \pm b$ и условий сопряжения на линиях $x = \pm a$. По сути задача эквивалентна рассмотренной в предыдущем параграфе для криволинейного прямоугольника. В связи с этим можно записать выражение для потенциала в области I:

$$\Phi_I = A \cos \alpha_n x \cos \gamma_n z + \sum_{m=0}^{\infty} D_m \cos \delta_m z \cos \xi_m x; \quad \gamma_n^2 = k^2 - \alpha_n^2, \quad \delta_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \xi_m^2 = k^2 - \delta_m^2. \quad (1.39)$$

Здесь A и D_m — произвольные постоянные.

В области II звуковое поле представляет собой совокупность распространяющихся и нераспространяющихся нормальных волн волновода с жесткими стенками. В связи с этим однозначно можем записать

$$\Phi_{II} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos \delta_m z e^{i \xi_m x}. \quad (1.40)$$

Здесь для случая $k < \delta_m$ следует принять $\xi_m = i \sqrt{\delta_m^2 - k^2}$.

Условие (1.38) приводит к следующему значению постоянной $A = v_0/\gamma_n \sin \gamma_n b$. Из условия сопряжения на линии $x = a$, выражающего требования равенства скоростей, вычисленных по выражениям (1.39) и (1.40), находим следующую связь между постоянными B_m и D_m :

$$D_m = -i B_m \frac{1}{\sin \xi_m a} e^{i \xi_m a}. \quad (1.41)$$

Условия сопряжения по давлению являются неоднородными, в соответствующее уравнение войдет слагаемое с A . Если использовать разложение

$$\cos \gamma_n z = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos \delta_m z; \quad a_0 = \frac{\sin \gamma_n b}{\gamma_n b}; \quad a_m = \frac{2(-1)^m}{b} \frac{\gamma_n \sin \gamma_n b}{\gamma_n^2 - \delta_m^2}, \quad (1.42)$$

то из второго условия сопряжения можно определить и постоянные B_m . После этого выражение для потенциалов скоростей в частичных областях представим в виде

$$\Phi_I = \frac{v_0}{\gamma_n \sin \gamma_n b} \cos \alpha_n x \cos \gamma_n z - \frac{V_0 (-1)^n}{b \gamma_n^2} e^{i k a} \cos k x - \frac{2v_0}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} e^{i \xi_m a}}{\gamma_n^2 - \gamma_m^2} \cos \delta_m z \cos \xi_m x;$$

$$\Phi_{11} = -i \frac{V_0 (-1)^n}{\gamma_n^2 b} \sin k a e^{i k x} - i \frac{2V_0}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} \sin \xi_m a}{\gamma_n^2 - \delta_m^2} \times \quad (1.43)$$

$$\times \cos \delta_m z e^{i \xi_m x}.$$

Получением этих выражений заканчивается построение решения рассматриваемой простой задачи. Поверхностный анализ коэффициентов рядов в выражении (1.43) показывает, что при определенных соотношениях исходных параметров некоторые из них могут стремиться к бесконечности. Поскольку физический смысл таких ситуаций неясен, то необходимо более подробно проанализировать решение рассматриваемой задачи.

Первый из возможных особых случаев возникает тогда, когда обращается в нуль величина γ_n , т. е. когда $\alpha_n = k$. Для получения решения задачи в этом случае необходимо рассмотреть предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, полагая $k = \alpha_n + \varepsilon$. После такого перехода найдем следующие выражения для потенциалов:

$$\Phi_1 = \frac{v_0}{2\alpha_n b} [x \sin \alpha_n x - \alpha_n z^2 \cos \alpha_n x - i a \cos \alpha_n x] + \quad (1.44)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2v_0 (-1)^{n+m} e^{i \xi_m a}}{b \delta_m^2} \cos \delta_m z \cos \xi_m x;$$

$$\Phi_{11} = -i \frac{v_0 a}{2\alpha_n b} e^{i \alpha_n x} + i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{b \delta_m^2} 2v_0 (-1)^{n+m} \sin \xi_m a \cos \delta_m z e^{i \xi_m x}.$$

Первое слагаемое в выражении для Φ_1 представляет собой так называемое решение с неразделяющимися переменными [34, 66].

Второй особый случай возникает тогда, когда $\gamma_n = \delta_m$. При этом обращается в нуль $\sin \gamma_n b$, а также один из знаменателей в бесконечных рядах в (1.43). Представление для потенциалов получается здесь также предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$, если положить $\gamma_n = \delta_m + \varepsilon$. В результате предельного перехода получаем следующие выражения для потенциалов:

$$\Phi_1 = \frac{v_0 (-1)^M}{\delta_M b} \left[-z \sin \delta_M z \cos \alpha_n x + \cos \delta_M z \sin \alpha_n x \frac{\delta_M}{\alpha_n} x - \right. \quad (1.45)$$

$$\left. - i a \frac{\delta_M}{\alpha_n} \cos \delta_M z \cos \alpha_n x \right] - \frac{v_0 (-1)^n}{\delta_M^2 b} e^{i k a} \cos k x -$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2v_0 (-1)^{n+m} e^{i \xi_m a}}{b (\delta_M^2 - \delta_m^2)} \cos \delta_m z \cos \xi_m x;$$

$$\Phi_{11} = -i \frac{v_0 (-1)^n \sin k a}{\delta_M^2 b} e^{i k x} - i \frac{2v_0 (-1)^M a}{2b \alpha_n} \cos \delta_M z e^{i \xi_M x} -$$

$$- i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2v_0 (-1)^{n+m} \sin \xi_m a}{b (\delta_M^2 - \delta_m^2)} \cos \delta_m z e^{i \xi_m x}.$$

Здесь штрих у сумм указывает, что из сумм исключены слагаемые, для которых $m = M$.

При получении предельных выражений (1.44) и (1.45) предполагалось, что $n \neq 0$, т. е. $\alpha_n \neq 0$. В этом случае колебания стенок волновода на отрезке $|x| \leq a$ происходят таким образом, что в каждый момент времени объем области I остается неизменным. Для изучения особенностей формирования волнового поля, когда колебания стенок вызывают изменения объема области I , достаточно рассмотреть случай $n = 0$. Представления для потенциалов скоростей в этом случае получаются просто из соотношений (1.43) при замене $\gamma_n = k$ и $\alpha_n = 0$. Полученные при этом выражения также будут иметь особенности в коэффициентах при $\gamma_n = k = \delta_M$. Однако в этом случае, как следует из выражений (1.45), конечного предельного значения для потенциалов не существует.

Возникшая ситуация с особыми случаями волнового движения в волноводе допускает довольно простую физическую интерпретацию. По исходным свойствам такой колебательной системы, как волновод с колеблющимися стенками, ясно, что в ней имеется бесконечная последовательность собственных частот. Соответствующие собственные формы колебаний отвечают некоторым толщинным движениям, когда в поле имеется только составляющая скорости v_z . При этом любое внешнее воздействие в виде такого распределения колебательной скорости, которое не вызывает изменения объема области под колеблющимися стенками, оказывается ортогональным собственной форме и резонансных явлений в колебательной системе не возникает. Если же во внешнем воздействии имеется составляющая, связанная с изменением объема, то при вынужденных колебаниях возникают обычные резонансные явления, обуславливающие обращения в бесконечность амплитуд колебаний на частотах $\omega_l = \frac{lc\pi}{b} (l = 1, 2, \dots)$.

6. Прохождение звука через плоскопараллельный слой

Задача о прохождении звука через плоскопараллельный слой является одной из самых простых и хорошо изученных задач [12, 177] волновой акустики. При этом речь идет о слое чисто акустическом, т. е. выполненном из материала, не сопротивляющегося сдвигу. В случае твердого упругого слоя задача несколько усложняется в связи с усложнением характера движения в нормальных волнах в слое. Результаты анализа решения для акустического слоя будут необходимы нам в дальнейшем для упрощения постановки некоторых задач и обсуждения их решений.

Простейшей задачей, в которой учитывается способность большинства реальных материалов сопротивляться сдвигу, является задача о прохождении звука через тонкую упругую пластинку. При этом обычно предполагается, что толщина пластинки намного меньше длины волны. В этом случае количественно процесс прохождения звука через пластинку достаточно хорошо описывается на основе использования гипотезы Кирхгоффа о характере напряженно-деформированного состояния. В практическом плане в такой постановке может быть

рассмотрена одна из наиболее интересных задач — задача о прохождении звука через подкрепленную ребрами пластинку [139, 173]. Интересным акустическим эффектом, который при этом может возникнуть, является эффект трансформации неизлучающих волновых движений в пластинке в излучающие.

Пусть на плоскопараллельный слой, в материале которого не возбуждаются волны сдвига и отсутствуют потери, падает под углом плоская звуковая волна с потенциалом Φ_0 (рис. 4). Верхнее и нижнее полупространство заполнены средой с волновым сопротивлением $\rho_1 c_1$, а слой характеризуется волновым сопротивлением ρc . Вся область существования звукового поля естественно делится на три части (область I, область II и область III). В каждой из них потенциал скоростей можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_I &= \Phi_0 + A e^{ik(x \sin \theta - z \cos \theta)}; \\ \Phi_{II} &= C e^{ik_1(x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1)} + D e^{ik_1(x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)}; \\ \Phi_{III} &= B e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

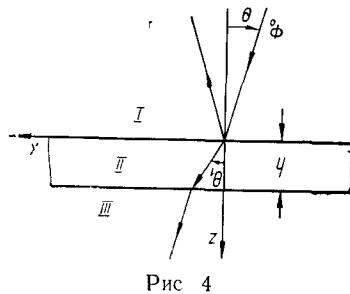


Рис. 4

Здесь $k = \omega/c$, $k_1 = \omega/c_1$, а определение углов θ и θ_1 ясно из рис. 4.

Выполняя условия сопряжения на границе раздела областей, включающие в себя требования равенства давлений и нормальных к поверхностям раздела составляющих скоростей частиц среды, получаем систему четырех уравнений для определения постоянных A , C , D и B . Для амплитудных характеристик отраженной и прошедшей волны находим следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{i(1-m^2)}{2m \operatorname{ctg} \alpha - i(1+m^2)}; \quad B = \frac{2me^{-i\beta}}{\sin \alpha [2m \operatorname{ctg} \alpha - i(1+m^2)]}; \\ \alpha &= k_1 h \cos \theta_1; \quad \beta = kh \cos \theta; \\ m &= \frac{\rho_1 c_1 \cos \theta}{\rho c \cos \theta_1}; \quad \cos \theta_1 = \left[1 - \frac{c_1^2}{c^2} \sin^2 \theta \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

При этом предполагаем, что падающая плоская волна имеет единичную амплитуду, а угол падения меньше критического.

Используя известное [144] соотношение между коэффициентом отражения по давлению и нормированным входным импедансом

$$\frac{z}{\rho c} = R' + iX' = \frac{1+A}{1-A}; \quad (1.48)$$

$$R' = \frac{m^2(1+\operatorname{tg}^2 \alpha)}{m^2+\operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad X' = \frac{m \operatorname{tg} \alpha(1-m^2)}{m^2+\operatorname{tg}^2 \alpha},$$

можем определить величину Z и проследить зависимости активной R' и реактивной X' составляющих от основных параметров задачи.

Частотные зависимости величин A и B хорошо изучены [177]. Они

имеют достаточно простое физическое содержание. Когда путь, проходимый в слое преломленной волной, кратен половине длины волны в материале слоя, слой становится полностью звукопрозрачным. Когда же этот путь кратен нечетному числу четвертей длины волны, звукопрозрачность слоя минимальна. Исходя из выражений (1.48) легко построить частотные зависимости R' и X' для промежуточных значений частоты. Отметим здесь лишь то характерное обстоятельство, что при $m < 1$, т. е. для относительно мягкого слоя, $R' \leq 1$, а при $m > 1$ всегда $R' \geq 1$.

Для обоснования некоторых постановок задач в последующем изложении рассмотрим более подробно поведение импеданса слоя с малой волновой толщиной, т. е. $\alpha < 1$. В случае материала слоя с большой акустической жесткостью ($m > 1$) при $m \gg \alpha$ из выражений (1.48) находим $R' \approx 1$, $X' \approx \frac{M\omega}{\rho c} \cos \theta$. Здесь $M = \rho_1 h$ — поверхностная масса слоя. Таким образом, на низких частотах входной импеданс достаточно жесткого слоя

$$Z = \rho c - i\omega M \cos \theta. \quad (1.49)$$

Активная часть сопротивления оказывается равной волновому сопротивлению окружающей акустической среды. Реактивная составляющая имеет характер массы.

В рассматриваемой ситуации деформационные свойства материала слоя оказываются несущественными с точки зрения прохождения звука через слой. Слой колеблется как единое целое так, что колебательные скорости на поверхности $z = 0$ и $z = h$ одинаковы. С учетом этого обстоятельства можно сформулировать более простые условия сопряжения звуковых полей в нижнем и верхнем полупространствах, приводя их к поверхности $z = 0$. Первое из них выражает равенство скоростей на двух плоскостях слоя, а второе отражает тот факт, что перепад давления на слое пропорционален массовой плотности слоя:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_I}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi_{III}}{\partial z}; \\ p_I &= p_{III} + i\omega M \frac{\partial \Phi_I}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

Граничными условиями типа (1.50) на различных препятствиях с толщиной, малой по сравнению с длиной волны, будем неоднократно пользоваться в дальнейшем. Здесь, пользуясь наличием точного решения рассматриваемой простой задачи, можно путем сравнения точного и приближенного решений составить некоторые представления о пределах применимости такого подхода. Если ориентироваться на вещественную и мнимую составляющие импеданса, то вплоть до $k_1 h = 0,4$ ошибка в их определении по формуле (1.49) невелика, она достигает 16 % для вещественной и 6 % для мнимой части.

Анализ, аналогичный приведенному выше, можно выполнить и для случая, когда материал слоя близок к акустически мягкому, т. е. $m < 1$. Исходя из выражений (1.48) при $\alpha < m < 1$ находим следующее при-

ближенное выражение для импеданса:

$$\frac{Z}{\rho c} = 1 + i \frac{\omega}{S} \rho c \gamma;$$

$$S = \frac{E_1}{h}, \quad E_1 = \rho_1 c_1^2, \quad \gamma = \frac{\cos^2 \theta_1}{\cos \theta}. \quad (1.51)$$

Как видно из выражения для Z , в этом случае рабочим свойством слоя, оказывающим влияние на звуковое поле, является его упругость. При этом без изменения через слой передается сила, а скорости его поверхностей будут различаться. Теперь упрощенные условия сопряжения между верхним и нижним полупространствами можно записать в следующем виде:

$$\Phi_I = \Phi_{III}, \quad z = 0;$$

$$-\frac{\partial \Phi_I}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi_{III}}{\partial z} - i\omega^2 \frac{\rho \gamma}{S} \Phi_I. \quad (1.52)$$

Анализ влияния слоя малой волновой толщины показывает, что он может быть заменен неким эквивалентным сосредоточенным препятствием. Этот физически довольно простой факт позволяет формулировать условия сопряжения между отдельными областями существования звукового поля, учитывая влияние слоя с помощью некоторых импедансных характеристик. Полученные в этом параграфе выводы будем неоднократно использовать далее при рассмотрении более сложных задач. При этом удастся развить подходы к решению таких задач, которые не всегда поддаются рассмотрению в более строгой постановке. Конечно, при этом следует иметь в виду, что граничные условия вида (1.50) и (1.52) приближенные и получены с использованием предположения о малости волновых размеров слоя. Если учесть, что вещественные и мнимые части импеданса слоя являются периодическими функциями, то можно утверждать, что в случае прохождения звука через слой соотношения (1.50) и (1.52) справедливы и для толстых слоев, если их волновая толщина близка к половине длины волны или кратна ей. Однако при этом следует иметь в виду, что использование условий типа (1.50) и (1.52) для описания взаимодействия звука с препятствиями конечных размеров может быть неверным. Физические причины такого обстоятельства становятся понятными при анализе задачи прохождения звука через замкнутый кольцевой слой, рассмотренной в параграфе 1 следующей главы.

7. Звуковое поле в волноводе переменного сечения

Следующая задача, которую рассмотрим в этой главе, является более сложной. Здесь мы уже в полной мере сможем показать конкретное применение метода частичных областей, описанного в параграфе 4. При этом особое внимание уделим описанию существа и возможностей такого алгоритма количественной интерпретации общих выражений, который учитывает известные заранее локальные особенности в поле скоростей вблизи угловых точек [80, 113].

Решается задача об определении звукового поля в плоском волноводе переменного сечения (рис. 5). Стенки волновода в областях $x \leq 0$ и $x \geq a$ являются жесткими. На участке $0 \leq x \leq a$ сечение волновода изменено за счет использования акустически мягких вставок. Применяемая методика позволяет в рамках единого подхода рассмотреть и случай жестких вставок, однако ситуация с мягкими вставками представляется практически более интересной. В определенной мере такая постановка связана с рассматриваемыми в последующих главах задачах об отражении звука от решеток из упругих элементов.

Звуковое поле в волноводе формируется падающей нормальной волной с потенциалом Φ_0 . Для определенности будем считать, что это есть низшая нормальная волна волновода с жесткими стенками:

$$\Phi_0(x, t) = A_0 e^{-i\omega t + ikx}. \quad (1.53)$$

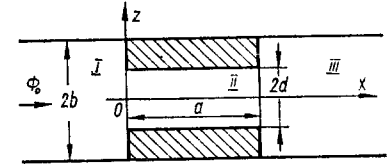


Рис. 5

В соответствии с существом метода частичных областей всю область существования звукового поля целесообразно разделить на три подобласти, указанные на рис. 5. В каждой из них можно построить достаточно общее решение уравнения Гельмгольца. Так, в области I звуковое поле определяется суммой падающей волны и совокупностью всех возможных однородных и неоднородных отраженных волн. В связи с этим потенциал звукового поля в этой области имеет следующий вид:

$$\Phi_I(x, z) = A_0 e^{ikx} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \beta_n z e^{-i\gamma_n x}; \quad (1.54)$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{b}, \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - \beta_n^2} \quad (k > \beta_n), \quad \gamma_n = i \sqrt{\beta_n^2 - k^2} \quad (k < \beta_n).$$

Здесь и далее будем опускать временной множитель $e^{-i\omega t}$.

Область II представляет собой замкнутый объем под мягкими вставками. Звуковое поле в нем создается за счет движений жидкости на входе ($x = 0$) и выходе ($x = a$). В связи с этим в общее решение уравнения Гельмгольца в этой области войдет совокупность нормальных волн волновода с мягкими стенками, бегущих навстречу друг другу:

$$\Phi_{II}(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \{C_m e^{-i\alpha_m(x-a)} + G_m e^{i\alpha_m x}\} \cos \delta_m z;$$

$$\delta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2d}, \quad \alpha_m = \sqrt{k^2 - \delta_m^2} \quad (k > \delta_m), \quad (1.55)$$

$$\alpha_m = i \sqrt{\delta_m^2 - k^2} \quad (k < \delta_m).$$

В таком выражении для потенциала скоростей уже учтены нулевые условия по давлению на стенках $z = \pm d$. Произвольные постоянные C_m и G_m должны обеспечить выполнение условий сопряжения на границах частичных областей $x = 0$ и $x = a$.

Звуковое поле в области *III* представляет собой совокупность бегущих вправо однородных и неоднородных волн, в которых движение жидкости локализовано вблизи сечения $x = a$. Потенциал скоростей такого поля имеет вид

$$\Phi_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{i\gamma_n x} \cos \beta_n z. \quad (1.56)$$

Значительная часть условий на границах областей, определяющих специфику рассматриваемой акустической ситуации, уже учтена в структуре выражений (1.54) — (1.56). Остались невыполненными условия сопряжения на границах частных областей и граничные условия на мягких поверхностях при $x = 0$ и $x = a$. Перечисленные условия приводят к следующей системе функциональных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi_I(x, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \Phi_{II}(x, z); \quad |z| \leq d, \quad x = 0; \\ \Phi_I(x, z) &= \begin{cases} 0, & d < |z| < b, \quad x = 0, \\ \Phi_{II}(x, z), & |z| < d, \quad x = 0; \end{cases} \\ \frac{\partial}{\partial x} \Phi_{III}(x, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \Phi_{II}(x, z), \quad |z| \leq d, \quad x = a; \\ \Phi_{III}(x, z) &= \begin{cases} 0, & d < |z| < b, \quad x = a, \\ \Phi_{II}(x, z), & |z| < d, \quad x = a. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

Как уже отмечалось при общем описании существа метода частных областей, алгебраизация функциональных уравнений (1.57) проводится на основе использования свойств полноты и ортогональности входящих в выражения для потенциалов скоростей тригонометрических функций. Первое условие в (1.57) преобразуется в систему алгебраических равенств путем умножения его на $\cos \delta_m z$ и интегрирования по интервалу $0 \leq z \leq d$. При этом получаем

$$\begin{aligned} \frac{A_0 k (-1)^{m+1}}{\delta_m} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \gamma_n \frac{(-1)^{m+1} \delta_m \cos \beta_n d}{\beta_n^2 - \delta_m^2} &= \\ = \frac{1}{2} d \alpha_m (G_m - C_m e^{i\alpha_m a}) \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Второе уравнение в системе (1.57) формулируется на полном интервале $0 \leq z \leq b$ и его алгебраизация осуществляется на основе использования полноты и ортогональности системы функций $\cos \beta_n z$. При этом получаем следующую последовательность равенств:

$$\begin{aligned} A_0 + B_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{\delta_m b} (C_m e^{i\alpha_m a} + G_m); \\ \frac{1}{2} b B_n &= \sum_{m=1}^{\infty} (C_m e^{i\alpha_m a} + G_m) \frac{(-1)^{m+1} \delta_m \cos \beta_n d}{\delta_m^2 - \beta_n^2} \quad (1.59) \\ (n &= 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Совершенно аналогично преобразуются остальные два функциональных уравнения в системе (1.57). В этом случае получаем следующую систему алгебраических соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} d (-\alpha_m C_m + \alpha_m G_m e^{i\alpha_m a}) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \gamma_n e^{i\gamma_n a} \frac{(-1)^{m+1} \delta_m \cos \beta_n d}{\delta_m^2 - \beta_n^2} \\ (m &= 1, 2, \dots); \\ D_0 e^{ika} &= \sum_{m=1}^{\infty} (C_m + G_m e^{i\alpha_m a}) \frac{(-1)^{m+1}}{\delta_m b}; \\ \frac{1}{2} b D_n e^{i\gamma_n a} &= \sum_{m=1}^{\infty} (C_m + G_m e^{i\alpha_m a}) \frac{(-1)^{m+1} \delta_m \cos \beta_n d}{\delta_m^2 - \beta_n^2} \\ (n &= 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

Соотношения (1.58) — (1.60) образуют бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов бесконечных рядов, представляющих потенциалы скоростей в различных частных областях. Традиционный подход к рассмотрению задач, приводящих к бесконечным системам, заключается в том, что при отыскании неизвестных используется метод простой редукции. Во второй главе для одного частного случая излучения звука цилиндром приводятся довольно громоздкие выкладки, позволяющие установить квазирегулярность бесконечных систем, возникающих при использовании метода частных областей. И хотя такой результат несомненно важен, поскольку позволяет убедиться в существовании ограниченного решения, вопрос о единственности решения остается открытым.

В рассматриваемой задаче и других подобных задачах, возникающих при изучении рассеянных звуковых полей, неединственность решения может быть обусловлена тем, что в процессе его получения использованы не все условия, необходимые для однозначного построения представлений характеристик звукового поля. В данном случае представления для потенциалов скоростей удовлетворяют уравнениям Гельмгольца, условиям излучения [153], но не подчинены условиям на ребре, удовлетворение которых как раз необходимо для построения единственного решения задачи [113, 171]. В работе [120] приведен конкретный пример задачи рассеивания звука, в которой удается явно показать возможность существования неединственного решения бесконечной системы, возникающей при удовлетворении граничных условий на поверхности с углами. В связи с этим необходимо развить такие подходы к решению бесконечных систем типа (1.58) — (1.60), которые бы давали некоторое достаточно точное решение системы и именно то решение, которое соответствует смыслу задачи и представляет соответствующие принятой модели локальные особенности в поле скоростей частиц среды.

Если учесть результаты рассмотрения структуры звукового поля у вершины мягкого клина, изложенные в параграфе 3, можно констатировать, что при приближении к вершине прямых углов в точках

$(0, \pm d)$, $(a, \pm d)$ колебательная скорость частиц среды будет стремиться к бесконечности как $\rho^{-1/2}$, где ρ — расстояние от точки в поле до вершины прямого угла. Однако, как следует из предыдущего рассмотрения, для полного описания локальной особенности у вершины необходимо учитывать не только амплитудную характеристику скорости, но и ее угловое распределение. Если это учесть, то применительно к рассматриваемой задаче поведение скорости по поверхности раздела между частичными областями описывается следующими равенствами:

$$v_x(0, z) = \begin{cases} \frac{1}{3} v_0 \rho^{-1/2} & (z \rightarrow d-0), \\ -\frac{2}{3} v_0 \rho^{-1/2} & (z \rightarrow d+0). \end{cases} \quad (1.61)$$

Видно, что при подходе к углу по полю амплитуда скорости в два раза меньше, чем при подходе к нему по мягкой грани угла.

Учитывая соотношения (1.61), колебательную скорость на поверхности $x = 0$, например, можем представить в виде

$$v_x(0, z) = \bar{v}_x(z) + \begin{cases} \frac{1}{3} v_0 (d^2 - z^2)^{-1/2}, & |z| < d, \\ -\frac{2}{3} v_0 (z^2 - d^2)^{-1/2}, & d < |z| < b. \end{cases} \quad (1.62)$$

Здесь $\bar{v}_x(z)$ — некоторая регулярная функция. Важно подчеркнуть, что в таком представлении величина v_0 заранее не определена. Такое же, как и в (1.62), представление можно дать и для скорости в сечении $x = a$ волновода.

После выделения в явном виде нерегулярной составляющей в колебательной скорости, причем именно с таким характером нерегулярности, который соответствует существованию рассматриваемой задачи, можно перейти к оценке асимптотических свойств неизвестных коэффициентов в рядах (1.54) — (1.56). Для этого рассмотрим, например, вытекающее из представлений (1.54) и (1.62) равенство

$$\begin{aligned} A_0 i k + \sum_{n=0}^{\infty} -i \gamma_n B_n \cos \beta_n z = \\ = \bar{v}_x(z) + \begin{cases} \frac{1}{3} v_0 (d^2 - z^2)^{-1/2}, & |z| < d, \\ -\frac{2}{3} v_0 (z^2 - d^2)^{-1/2}, & d < |z| \leq b. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.63)$$

В данном случае можем говорить о том, что вопрос об определении последовательности постоянных B_n является по существу вопросом об определении коэффициентов Фурье функции с известной интегрируемой особенностью на интервале разложения. Учитывая известную [11] связь между локальными особенностями разлагаемой функции и скоростью убывания ее коэффициентов Фурье, а также значения ин-

тегралов типа $\int_0^d (d^2 - z^2)^{-1/2} \cos \beta z dz$, приведенные в работе [63], можем выписать главный член асимптотического представления для коэффициентов

$$B_n = \frac{R_1}{n^{1/2}} \left\{ \varepsilon^{-1/2} \cos \left(n \pi \varepsilon - \frac{\pi}{3} \right) + \right. \\ \left. + 2(-1)^n (1 - \varepsilon)^{-1/2} \cos \left[n \pi (1 - \varepsilon) - \frac{\pi}{3} \right] \right\}. \quad (1.64)$$

Здесь R_1 — некоторая постоянная величина, связанная однозначно с величиной v_0 в равенстве (1.63).

Соответствующие регулярной части в функции скорости составляющие в коэффициентах Фурье имеют более быстрое убывание с ростом номера n .

Аналогичное рассмотрение может быть проведено дважды на интервале $0 \leq z \leq d$ для $x = 0$ и $x = a$, а также на интервале $0 \leq z \leq b$. При этом находим асимптотические оценки для всех неизвестных коэффициентов в рядах (1.54) — (1.56):

$$\left. \begin{aligned} C_m - G_m e^{i \alpha_m a} &= \frac{R_3}{(2n-1)^{1/2}} \cos \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right]; \\ C_m e^{i \alpha_m a} - G_m &= \frac{R_2}{(2n-1)^{1/2}} \cos \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right]; \\ D_n &= \frac{R_4}{n^{1/2}} e^{-\frac{n \pi a}{b}} \left\{ \varepsilon^{-1/2} \cos \left(n \pi \varepsilon - \frac{\pi}{3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2(-1)^n (1 - \varepsilon)^{-1/2} \cos \left[n \pi (1 - \varepsilon) - \frac{\pi}{3} \right] \right\}, \quad \varepsilon = \frac{d}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (1.65)$$

В выражениях (1.64) и (1.65) постоянные величины R_i являются неизвестными. Эти соотношения лишь устанавливают скорость убывания коэффициентов с ростом номера. Причем выведены эти соотношения как раз из того условия, что в представляемых потенциалами (1.54) — (1.56) звуковых полях должна существовать заданная локальная особенность. Отсюда можно заключить, что из всех возможных решений бесконечной системы, образованной равенствами (1.58) — (1.60), для анализа поля нужны те решения, у которых поведение с ростом номера определяется соотношениями (1.64) и (1.65).

Исходя из соотношений (1.64) и (1.65) можно сделать вывод, что ряды для колебательных скоростей частиц среды в рассматриваемом случае в окрестности поверхностей $x = 0$ и $x = a$ сходятся очень медленно (коэффициенты Фурье убывают, как $n^{-1/2}$).

Это указывает на то, что для получения количественных характеристик звукового поля в окрестности областей изменения сечения волновода необходимо суммировать большое число членов ряда, а это в свою очередь значит, что при использовании метода простой редукции при усечении бесконечной системы (1.58) — (1.60) необходимо удерживать большое число уравнений.

Обе указанные трудности — необходимость суммировать большое число членов ряда и необходимость решать алгебраические системы высокого порядка — устраняются, если использовать заранее известные свойства коэффициентов (1.64) и (1.65). Этот учет производится следующим образом.

Предположим, что для всех $n > N$ величины, например коэффициентов B_n , могут быть определены с высокой точностью по асимптотическому равенству (1.64). Однако прямое использование этой формулы для вычислений невозможно, поскольку в ней неизвестна величина R_1 . Если известно значение коэффициента B_N , то R_1 можно приближенно определить:

$$R_1 = B_N N^{1/3} \left\{ \varepsilon^{-1/3} \cos \left(N\pi\varepsilon - \frac{\pi}{3} \right) + 2(-1)^N (1 - \varepsilon)^{-1/3} \cos \left[N\pi(1 - \varepsilon) - \frac{\pi}{3} \right] \right\}^{-1}. \quad (1.66)$$

Равенством (1.66) по сути устанавливается возможность выразить значения всех неизвестных B_n с номерами $n > N$ через значение B_N . Это обстоятельство открывает возможность существенного улучшения метода редукции при решении бесконечной системы. Нужно не отбрасывать все неизвестные с номерами $n > N$, как это делается в рамках традиционного подхода, а выразить их значения через последний учитываемый в конечной системе коэффициент, принимая во внимание равенство (1.66). Ясно, что соотношения (1.65) дают возможность поступить таким образом со всеми неизвестными в системе (1.58) — (1.60). При этом получаем конечную систему уравнений, решение которой дает значения для всего бесконечного числа неизвестных. Помимо того, что таким образом из всей совокупности возможных решений бесконечной системы выделяем решение с нужными свойствами, наличие данных о бесконечном ряде значений неизвестных коэффициентов позволяет при суммировании рядов использовать существующие методы улучшения их сходимости [93].

Характер выкладок, связанных с улучшением сходимости рядов, рассмотрим на примере ряда равенства (1.63), представляющего колебательную скорость в сечении $x = 0$ волновода. В соответствии с установленными свойствами коэффициентов B_n можем записать

$$-\sum_{n=0}^{\infty} i\gamma_n B_n^* \cos \beta_n z = \begin{cases} \frac{1}{3} v_0^* (d^2 - z^2)^{-1/3}, & |z| \leq d, \\ -\frac{2}{3} v_0^* (z^2 - d^2)^{-1/3}, & d < |z| \leq b. \end{cases} \quad (1.67)$$

Здесь B_n^* — коэффициенты, определяемые по формуле (1.64) для всех номеров n при условии, что постоянная R_1 определяется по формуле (1.66); v_0^* в отличие от равенства (1.63) определяется явно через постоянную R_1 .

Теперь вычисление ряда в левой части равенства (1.63) можно про-

вести следующим образом:

$$v_x(x=0) = A_0 i k + \sum_{n=0}^{\infty} -i\gamma_n [B_n - B_n^*] \cos \beta_n z + \sum_{n=0}^{\infty} -i\gamma_n B_n^* \cos \beta_n z = \\ = A_0 i k - i \sum_{n=0}^N \gamma_n [B_n - B_n^*] \cos \beta_n z + \begin{cases} \frac{1}{3} v_0^* (d^2 - z^2)^{-1/3}, & |z| < d, \\ -\frac{2}{3} v_0^* (z^2 - d^2)^{-1/3}, & d < |z| < b \end{cases} \quad (1.68)$$

Отсюда видно, что суммирование бесконечного медленно сходящегося ряда в уравнении (1.63) свелось, по сути, к вычислению конечной суммы. Локальные особенности в звуковом поле выделены в явном виде.

Конечно, полученное на основе равенства (1.68) значение колебательной скорости является приближенным. Его приближенный характер определяется тем, что в нем используются приближенные значения величин B_n , B_n^* и v_0^* . Однако, как показывают конкретные расчеты, неизвестные в бесконечной системе (1.58) — (1.60) довольно быстро выходят на асимптотические значения и описанный алгоритм является эффективным средством для получения надежных количественных оценок характеристик звукового поля при использовании метода частичных областей.

Количественные оценки возможностей предлагаемого алгоритма для решения бесконечных систем, возникающих при применении метода частичных областей, можно получить на основе анализа решений конкретных задач. С этой целью рассматривалось звуковое поле в волноводе с $\varepsilon = d/b = 0,55$. Ширина волновода соотносилась к длине волны так, что $\lambda/b = 2/3$. Длина мягкой вставки была равна половине ширины волновода в узкой части ($a = d$, рис. 5). При переходе от бесконечной системы к конечной с использованием метода простой редукции и с учетом асимптотических свойств неизвестных в виде соотношений (1.64) и (1.66) рассматривалось два варианта $N = 3$ и $N = 7$ для всех четырех групп неизвестных.

Используемые при решении задачи представления для потенциалов звукового поля тождественно удовлетворяют уравнениям Гельмгольца и части граничных условий на поверхностях волновода. Ограничиваясь конечным числом неизвестных при переходе от бесконечной системы к конечной, мы, по сути, идем на приближенное удовлетворение условий сопряжения между частичными областями. В связи с этим полную оценку качества полученного решения можно получить на основе анализа степени выполнения условий сопряжения.

После решения четырех вариантов конечных систем ($N = 3$, $N = 7$) с учетом асимптотики неизвестных и по методу простой редукции были проведены вычисления давлений и колебательных скоростей в сечениях $x = 0$ и $x = a$ на основе выражения для Φ_I , Φ_{II} и Φ_{III} . Анализируем данные об относительной разности давлений в этих сече-

ниях, т. е. данные о функциях типа

$$f(z) = \frac{p_1 - p_{11}}{p_0}, \quad x = 0, \quad (1.69)$$

где p_0 — давление в падающей волне.

При этом можно заключить, что при использовании данных для $N = 7$ с учетом асимптотики неизвестных погрешность в удовлетворении условий сопряжения по давлению как в поле $|z| \leq d$, так и по мягким торцам $d \leq |z| \leq b$ не превышает 5 % величины p_0 . Если в рамках такого же подхода ограничиться меньшим числом неизвестных ($N = 3$) и рассматривать внутренние точки области, качество решения практически не меняется. Лишь

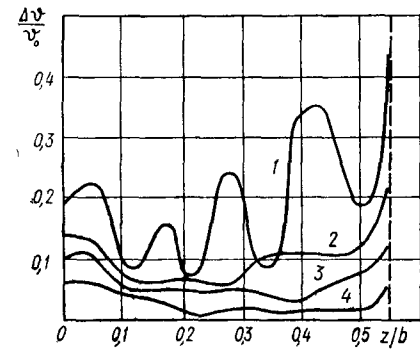


Рис. 6

в окрестности угла ($0,53 < z/b < 0,57$) погрешность в удовлетворении условий сопряжения достигает 10 % величины p_0 .

Оцениваемое по значениям функции (1.69) качество решения, получаемого по методу простой редукции, несколько хуже. В случае $N = 3$ даже во внутренних точках погрешность в удовлетворении условий сопряжения может превышать 20 %. Увеличение числа N до семи приводит к некоторому уменьшению погрешности (около 15 %).

В целом различие в оценках уровня давления по двум методам не очень велико, и намечается возможность в рамках метода простой редукции все же путем приемлемого увеличения порядка конечной системы получить удовлетворительный по точности результат. Такой вывод в определенной мере можно было бы предвидеть. Дело в том, что ряды для давления, как это следует из соотношений (1.64) и (1.65), сходятся сравнительно быстро. Их коэффициенты убывают, как $n^{-3/2}$. Ряды для колебательной скорости сходятся хуже — их общий член имеет порядок $n^{-1/2}$. Поэтому и различия в количественных данных для скоростей, получаемых в рамках двух описанных подходов, являются более существенными.

Данные об относительной разнице скоростей v_x , вычисленных по потенциалам Φ_1 и Φ_{11} в сечении $x = 0$, представлены на рис. 6. Здесь в качестве v_0 принята амплитуда колебательной скорости в падающей плоской волне Φ_0 . Кривые 1 и 2 получены в рамках метода простой редукции соответственно для $N = 3$ и $N = 7$. Аналогичные значения N соответствуют кривым 3 и 4, которые получены с использованием сведений об асимптотических значениях искомых коэффициентов. Штриховой линией отмечена безразмерная ширина узкой части волновода, показанной на рис. 5.

Различие между кривыми 1 и 3, полученными различными подходами для $N = 3$, очень существенно. Можно сказать, что использование заранее известных сведений о свойствах искомых величин позволя-

ет в рассматриваемой задаче в 2—3 раза уменьшить порядок конечной системы, необходимый для достижения физически оправданной точности решения задачи. Как показывает анализ решений других, более сложных, задач такой вывод носит довольно общий характер [69, 70].

При анализе данных рис. 6 интересно обратить внимание также на следующее обстоятельство. При получении кривых 1 и 3 использовано одно и то же число уравнений в конечной системе. Это значит, что использовано одно и то же приближение для описания внешнего воздействия — в разложении постоянной скорости в падающей волне в ряд по $\cos \delta_m z$ сохранено только три члена. И вместе с тем различие между кривыми 1 и 3 очень велико. Это свидетельствует о том, что структура звукового поля в месте изменения сечения волновода в основном формируется за счет дифракционных эффектов, которые довольно полно учитываются при использовании данных об асимптотических свойствах коэффициентов. Отмеченное обстоятельство является физическим основанием для того, чтобы ожидать высокой эффективности предлагаемого подхода к решению граничных задач с использованием метода частичных областей.

В заключение отметим следующее. Предыдущее рассмотрение было сосредоточено на анализе структуры ближнего поля в окрестности областей изменения сечения волновода. В таких областях существенную роль играют неоднородные волны, возбуждающиеся в волноводе. Если же рассматривать значения амплитуд распространяющихся волн в правой части волновода (Φ_{11}), то можно отметить, что метод простой редукции в состоянии обеспечить их определение с довольно высокой точностью. В рассматриваемой задаче даже в случае $N = 3$ бегущая волна в области III определяется практически точно. Это полезно иметь в виду, чтобы излишне не усложнять расчетную схему задачи, если определение интересующих величин можно получить более просто. Такой подход неоднократно используется в последующем изложении, а сравнение результатов простого и усложненного расчетов многократно подтверждает его эффективность.

1. Излучение звука цилиндром через замкнутый кольцевой слой

Задача об излучении звука цилиндром занимает в акустике особое место. Большое внимание к ней [133, 171] обусловлено прежде всего тем, что соответствующие краевые задачи допускают довольно простое решение при произвольном распределении колебательной скорости по излучающей поверхности. Анализ решения при этом позволяет получить интересные для практических приложений рекомендации.

Рассматриваемая ниже задача об излучении звука бесконечным цилиндром через замкнутый кольцевой слой довольно проста в методическом отношении и является, пожалуй, наиболее простым примером применения метода частичных областей. Эта задача рассматривалась уже в ряде работ. В работе [171] рассмотрена плоская задача излучения цилиндра через заполненную средой замкнутую цилиндрическую упругую оболочку, когда ее толщина существенно меньше длины волны в материале оболочки. В работах [3, 76, 142, 143] для определения возможности расширения полосы пьезокерамического преобразователя исследовалось излучение бесконечного цилиндрического преобразователя через один и два замкнутых цилиндрических слоя произвольной толщины. Несмотря на то что в указанных работах многие особенности прохождения звука через замкнутый цилиндрический слой выяснены, уделим внимание такой задаче, поскольку на ее примере можно глубже понять принципиальное различие между прохождением звука через плоский и криволинейный слой.

Пусть бесконечный по высоте цилиндр радиусом r_0 излучает звук в жидкую или газообразную среду с волновым сопротивлением ρc через замкнутый цилиндрический слой толщиной $r_1 - r_0$ (рис. 7). Предположим, что материал слоя не сопротивляется сдвигу и его акустические свойства характеризуются величинами ρ_1 и c_1 . В соответствии с основными положениями метода частичных областей, изложенными в предыдущей главе, разобьем всю область существования звукового поля на две частичные области: область I ($r_0 \leq r \leq r_1$) и область II ($r > r_1$). Тогда звуковое давление в указанных частичных областях представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} p_1 &= -i\omega\rho_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n J_n(k_1 r) + B_n N_n(k_1 r)] e^{in\varphi}, \\ p_2 &= -i\omega\rho \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$k_1 = \omega/c_1, \quad k = \omega/c, \quad n = 0; \pm 1, \pm 2, \dots$$

Неизвестные комплексные коэффициенты A_n , B_n и E_n определяются из следующей системы функциональных уравнений, отражающих условия сопряжения компонент звукового поля на поверхности раздела частичных областей $r = r_1$ и граничное условие на поверхности цилиндра $r = r_0$:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2, \quad r = r_1; \quad \frac{1}{i\rho_1 c_1} \frac{\partial p_1}{\partial (k_1 r)} = \\ &= v_0 f(\varphi), \quad r = r_0; \\ \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\partial p_1}{\partial (k_1 r)} &= \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p_2}{\partial (kr)}, \quad r = r_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где v_0 — приведенная амплитуда колебательной скорости на поверхности цилиндра; $f(\varphi)$ — функция распределения колебательной скорости.

Представим функцию $f(\varphi)$ в виде ряда Фурье

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\varphi}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (2.3)$$

С учетом выражения (2.3) соотношения (2.2) нетрудно преобразовать в систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных комплексных коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 A_n [J_n(k_1 r_1) + B_n N_n(k_1 r_1)] &= \rho E_n H_n^{(1)}(kr_1); \\ k_1 A_n [J'_n(k_1 r_1) + B_n N'_n(k_1 r_1)] &= k E_n H_n^{(1)'}(kr_1); \\ -k_1 A_n [J'_n(k_1 r_0) + B_n N'_n(k_1 r_0)] &= v_0 a_n. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

В системе (2.4) и ниже штрих при радиальных функциях обозначает производную по аргументу kr (или $k_1 r$) при соответствующем значении r .

В рассматриваемой задаче нас будут интересовать два параметра: безразмерный импеданс излучения цилиндра Z [144] и коэффициент, который можно назвать коэффициентом прохождения звука через цилиндрический слой,

$$k_{\text{пр}} = |p_1/p_0|, \quad (2.5)$$

где p_0 — звуковое давление, создаваемое цилиндром в отсутствие слоя на поверхности $r = r_1$; p_1 — давление на внешней поверхности слоя. Каждый из этих параметров в общем случае может быть определен для отдельных гармонических составляющих в уравнениях (2.1), т. е. для каждого конкретного значения n . Пожалуй, наибольший

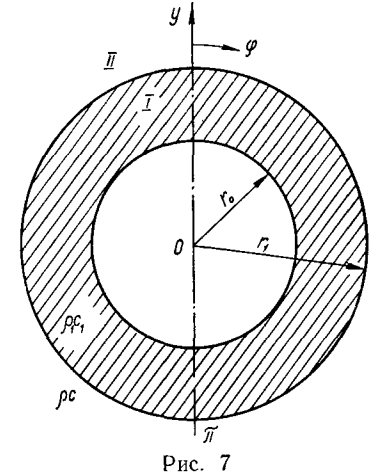


Рис. 7

интерес при этом представляют указанные характеристики для нулевой гармоники, т. е. для случая, когда $f(\varphi) = \text{const}$. На рис. 8 приведены частотные зависимости активной R (рис. 8, а) и реактивной X (рис. 8, б) составляющих Z для двух значений отношения волновых сопротивлений материала слоя и окружающей акустической среды $m = \rho_1 c_1 / \rho c$. Кривая 1 соответствует значению $m = 0,15$, а кривая 2 — $m = 0,3$. При этом в обоих расчетных случаях толщина слоя определяется из равенства $\frac{2r_0}{r_1 - r_0} = 2,8 \frac{c}{c_1}$.

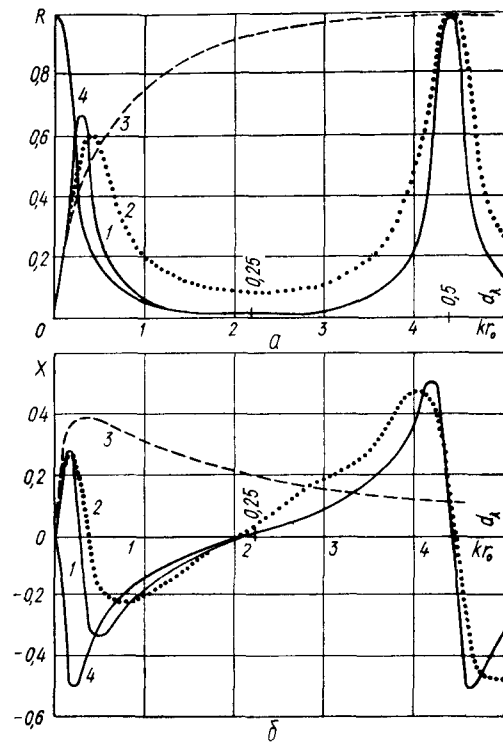


Рис 8

Здесь же для сравнения приведены значения указанных величин при отсутствии промежуточного слоя — кривые 3. Кривая 4 показывает изменение составляющих входного импеданса плоского слоя из материала кольца, нагруженного на заданную акустическую среду, при изменении частоты. Для облегчения анализа данных рис 8 на оси абсцисс указаны характерные значения волновой толщины слоя $d_\lambda = \frac{r_1 - r_0}{\lambda_1}$, где λ_1 — длина волны в материале слоя. Как следует из данных на рис. 8, при больших значениях kr_0 ($kr_0 > 2$) значения R и X для цилиндрического и плоского слоя практически совпадают. Совершенно иная картина наблюдается при $kr_0 < 2$, и прежде всего для цилиндрического слоя при $kr_0 \rightarrow 0$, $R \rightarrow 1$. Это является следствием того, что цилиндрический слой конечен, а плоский слой — бесконечен. Кроме того, в отличие от плоского слоя, где в области $d_\lambda < 0,25$ величина X имеет только упругий характер, в случае цилиндрического слоя величина X сначала имеет характер массы, потом следует резонанс ($X = 0$) и только после этого X принимает характер упругости. Следует также отметить, что на частоте этого резонанса наблюдается всплеск величины R .

Указанным закономерностям можно дать простую физическую интерпретацию. В случае плоского слоя характер X определяется только волновой толщиной слоя, поскольку импеданс бесконечной среды за слоем (при плоской падающей волне) имеет чисто активный характер и равен ρc . Для кольцевого слоя (при цилиндрической волне) харак-

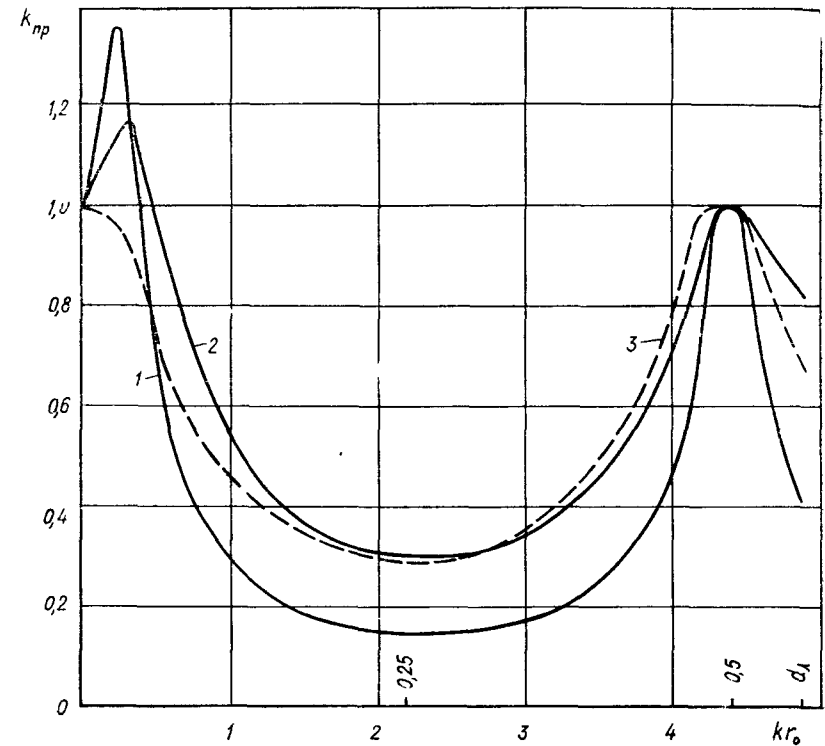


Рис 9

тер X определяется не только волновой толщиной слоя, но и импедансом среды за поверхностью $r = r_1$. Как известно, реактивная составляющая этого импеданса носит характер массы (кривая 3, рис. 8, б). Таким образом, становится очевидным, что резонанс в области $kr_0 \approx 0,4$ вызван взаимодействием упругости цилиндрического слоя и присоединенной массой среды, окружающей слой. Именно резонансные колебания слоя и приводят к резкому возрастанию на этих частотах активной составляющей импеданса излучения цилиндра.

Естественно, что указанное явление должно благоприятно сказаться на эффективности излучения цилиндром звуковой энергии. Данные рис 9 позволяют убедиться в этом. Здесь кривые 1 и 2 соответствуют данным, отвечающим двум указанным к рис. 8 значениям m . На частотах, соответствующих всплеску R , резко возрастает $k_{пр}$ и, как ни парадоксально, цилиндр со слоем (при одной и той же колебательной скорости на его поверхности) создает большее давление во внешней среде, чем цилиндр без слоя. Заметим, что с увеличением m указанная резонансная частота сдвигается в область более высоких частот, а амплитуда всплеска R и $k_{пр}$ падает.

Отмеченная выше особенность в поведении величины $k_{пр}$ совершенно отсутствует в случае плоского слоя. Здесь $k_{пр}$ всегда меньше или

равно единице. Поэтому давление, развиваемое плоским излучателем без слоя, всегда выше, чем излучателя со слоем (кривая 3).

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. При анализе особенностей поведения величины X не акцентировалось внимание на характере ее резонансов. Тем не менее совершенно ясно, что в случае плоского слоя (см. кривую 4 на рис. 8, б) первое значение $X = 0$ при $d_\lambda = 0$ соответствует антирезонансу, а значения $X = 0$ при $d_\lambda = 0,25$ и $d_\lambda = 0,5$ — резонансу и антирезонансу соответственно. Это непосредственно следует из анализа прохождения плоской волны через плоский слой при $m < 1$ [55, 89] и теоремы Фостера [145]. В случае кольцевого слоя картина несколько иная. Значение $X = 0$ при $d_\lambda = 0$ соответствует резонансу. После этого в районе $d_\lambda \approx 0,04$ наступает антирезонанс, а далее значения и последовательность резонансов и антирезонансов начинают совпадать с плоским слоем.

2. Излучение звука цилиндром через незамкнутый кольцевой слой

Теперь рассмотрим особенности излучения звука цилиндром, когда он окружен незамкнутым кольцевым слоем (рис. 10). Излучение звуковой энергии может происходить только через щель бесконечной высоты, образованную путем удаления части слоя, заключенную между двумя плоскостями $\varphi = \pm \varphi_0$. Решение задачи основано на работах [25, 36, 33, 46, 47, 99].

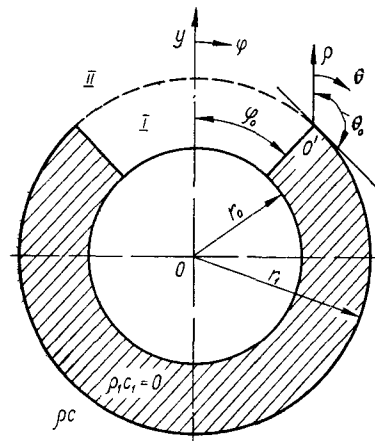


Рис. 10

Остановимся сначала на более простом случае, когда слой абсолютно непрозрачен, а его поверхности акустически мягкие (в последующих параграфах учтем также и конечную прозрачность слоя). Из принятого предположения о физических свойствах слоя следуют такие граничные условия:

$$\begin{aligned} p &= 0, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad |\varphi| = \varphi_0; \\ p &= 0, \quad r = r_1, \quad \varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пусть на открытой части поверхности цилиндрического излучателя задано некоторое распределение колебательной скорости $v_0 f(\varphi)$.

Чтобы излишне не усложнять задачу, считаем, что это распределение симметрично относительно оси Oy . Тогда

$$\frac{1}{irc} \frac{\partial p}{\partial (kr)} = v_0 f(\varphi); \quad r = r_0, \quad 0 \leq |\varphi| \leq \varphi_0. \quad (2.7)$$

При построении представлений для давления во всей области существования поля выделим две частичные области: $r_0 \leq r \leq r_1, |\varphi| \leq \varphi_0$ (область I) и $r \geq r_1, 0 \leq |\varphi| \leq \pi$ (область II). С учетом изложенного в предыдущей главе звуковое давление

в каждой из этих областей представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} p_1 &= -i\omega\rho \sum_{q=0}^{\infty} [A_q J_{v_q}(kr) + B_q N_{v_q}(kr)] \cos v_q \varphi; \\ p_2 &= -i\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} S_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Выражение для p_1 удовлетворяет уравнению Гельмгольца при произвольном значении v_q . Надлежащим выбором этой величины можно добиться частичного удовлетворения граничных условий в области. Так, полагая

$$v_q = \frac{(2q+1)\pi}{2\varphi_0}, \quad (2.9)$$

добиваемся удовлетворения условия (2.6) на торцах слоя $\varphi = \pm \varphi_0$. При таком выборе v_q решение для первой области содержит представленные в виде рядов Фурье с неопределенными коэффициентами две произвольные функции на поверхностях $r = r_0$ и $r = r_1, |\varphi| \leq \varphi_0$. Решение p_2 для внешней области $r > r_1$ удовлетворяет условию Зоммерфельда [171] и обладает достаточной степенью функционального произвола для удовлетворения граничных условий на поверхности $r = r_1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Эти свойства выражений p_1 и p_2 создают предпосылки к тому, чтобы надлежащим выбором содержащихся в них произвольных постоянных выполнить граничные условия (2.6) и (2.7).

Условие (2.7) позволяет установить связь между значениями коэффициентов A_q и B_q . Производя подстановку выражения для p_1 в (2.7), нетрудно установить, что

$$B_q = \frac{L_q - A_q J'_{v_q}(kr_0)}{N'_{v_q}(kr_0)}, \quad (2.10)$$

где

$$L_q = -\frac{2v_0}{k\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) \cos v_q \varphi d\varphi.$$

С учетом соотношения (2.10) выражение для p_1 в выражении (2.8) преобразуется к виду

$$p_1 = -i\omega\rho \sum_{q=0}^{\infty} \left[A_q \Delta_q(kr) + L_q \frac{N_{v_q}(kr)}{N'_{v_q}(kr_0)} \right] \cos v_q \varphi, \quad (2.11)$$

где

$$\Delta_q(kr) = J_{v_q}(kr) - J'_{v_q}(kr_0) N_{v_q}(kr) / N'_{v_q}(kr_0).$$

Для определения оставшихся неизвестных в выражениях (2.8) необходимо использовать функциональные уравнения, объединяющие условия непрерывности звукового поля на границе частичных

областей и граничное условие на поверхности $r = r_1$

$$p_2 = \begin{cases} p_1 & r = r_1, 0 \leq |\varphi| \leq \varphi_0; \\ 0 & r = r_1, \varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi; \end{cases} \quad (2.12)$$

$$v_2 = v_1, \quad r = r_1, \quad 0 \leq |\varphi| \leq \varphi_0.$$

Алгебраизация функциональных уравнений (2.12), основанная на свойствах полноты и ортогональности функций $\cos n\varphi$ и $\cos v_q\varphi$, на соответствующих интервалах приводят к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$S_n H_n^{(1)}(kr_1) - \frac{1}{\delta_n} \sum_{q=0}^{\infty} A_q \Delta_q(kr_1) a_{nq} =$$

$$= \frac{1}{\delta_n} \sum_{q=0}^{\infty} a_{nq} L_q N_{v_q}(kr_1) / N_{v_q}(kr_0); \quad (2.13)$$

$$A_q \Delta_q'(kr_1) - \frac{1}{\varphi_0} \sum_{n=0}^{\infty} S_n H_n^{(1)'}(kr_1) a_{nq} = -L_q N_{v_q}(kr_1) / N_{v_q}'(kr_0)$$

где

$$\delta_n = \begin{cases} 2\pi, & n = 0; \\ \pi, & n \neq 0; \end{cases}$$

$$a_{nq} = \begin{cases} \frac{2v_q (-1)^{q+1} \cos n\varphi_0}{n^2 - v_q^2}, & n \neq v_q; \\ \varphi_0, & n = v_q; \end{cases}$$

$\Delta_q'(kr_1)$ — производная $\Delta_q(kr)$ по kr при $r = r_1$.

Таким образом, приходим к необходимости отыскать значения содержащихся в уравнениях (2.8) произвольных постоянных из бесконечной системы (2.13). В связи с этим вопрос о существовании решения рассматриваемой граничной задачи сводится к доказательству существования такого решения системы (2.13), которое обеспечивает сходимость бесконечных рядов для составляющих поля во всей рассматриваемой области.

Обычный подход к исследованию разрешимости систем подобного типа состоит в доказательстве ее регулярности [93]. Приступая к исследованию системы (2.13), введем в нее новые неизвестные:

$$\tilde{S}_n = S_n H_n^{(1)'}(kr_1); \quad \tilde{A}_q = A_q \Delta_q(kr_1). \quad (2.14)$$

При этом исходная система (2.13) преобразуется к виду

$$\tilde{S}_n \frac{H_n^{(1)}(kr_1)}{H_n^{(1)'}(kr_1)} - \frac{1}{\delta_n} \sum_{q=0}^{\infty} \tilde{A}_q a_{nq} = \frac{1}{\delta_n} \sum_{q=0}^{\infty} L_q a_{nq} N_{v_q}(kr_1) / N_{v_q}'(kr_0); \quad (2.15)$$

$$\tilde{A}_q \frac{\Delta_q(kr_1)}{\Delta_q'(kr_1)} - \frac{1}{\varphi_0} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{S}_n a_{nq} = -L_q N_{v_q}(kr_1) / N_{v_q}'(kr_0).$$

Сложная функциональная зависимость коэффициентов системы (2.15) от номера затрудняет анализ ее регулярности. В связи с этим

сосредоточим внимание на доказательстве квазирегулярности этой системы. При этом допустимо упростить матричные элементы последней путем использования известных асимптотических представлений функций Бесселя, Неймана и Ханкеля, рассматриваемых как функции порядков n и v_q . На основе этих представлений [6, 181] получаем

$$\frac{H_n^{(1)}(kr_1)}{H_n^{(1)'}(kr_1)} = \frac{kr_1}{n}; \quad \frac{\Delta_q'(kr_1)}{\Delta_q(kr_1)} = \frac{v_q}{kr_1}; \quad \frac{N_{v_q}(kr_1)}{N_{v_q}'(kr_0)} = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{v_q+1}. \quad (2.16)$$

Используя соотношения (2.16), находим следующую бесконечную систему, эквивалентную исходной системе (2.15) в смысле свойств разрешимости:

$$\tilde{S}_n^{(1)} - \frac{2n \cos^2 n\varphi_0}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \tilde{A}_q^{(1)} \frac{1}{n^2 - v_q^2} =$$

$$= -\frac{2n \cos^2 n\varphi_0}{\pi kr_1} \sum_{q=0}^{\infty} L_q a_{nq} N_{v_q}(kr_1) / N_{v_q}(kr_0); \quad (2.17)$$

$$\tilde{A}_q^{(1)} - \frac{2v_q}{\varphi_0} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{S}_n^{(1)} \frac{1}{n^2 - v_q^2} = -L_q \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{v_q+1},$$

где $\tilde{A}_q^{(1)} = \tilde{A}_q \frac{(-1)^{q+1} v_q}{kr_1}$; $\tilde{S}_n^{(1)} = S_n \cos n\varphi_0$.

Поскольку коэффициенты $1/(n^2 - v_q^2)$ изменяют знак в каждой строке системы (2.17), дальнейший анализ последней затруднителен. Поэтому поступим следующим образом. Произведем подстановку значения $\tilde{A}_q^{(1)}$, полученного из второго уравнения системы (2.17), в первое и определим $\tilde{S}_n^{(1)}$:

$$\tilde{S}_n^{(1)} = \frac{4n \cos^2 n\varphi_0}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{S}_l^{(1)} a_{nl} + b_n, \quad (2.18)$$

где

$$a_{nl} = \frac{1}{\varphi_0} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{v_q}{(n^2 - v_q^2)(l^2 - v_q^2)}.$$

Непосредственная проверка выполнения условий квазирегулярности системы (2.18) в случае произвольного значения угла φ_0 затруднена. Поэтому ограничимся рассмотрением конкретного, но наиболее неблагоприятного случая, когда $\varphi_0 = \pi$. Тогда коэффициенты a_{nl} приобретают вид

$$a_{nl} = \frac{1}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{q + 1/2}{[(q + 1/2)^2 - n^2][(q + 1/2)^2 - l^2]}. \quad (2.19)$$

Общий член бесконечного ряда (2.19) может быть представлен следующим интегралом:

$$\frac{q + 1/2}{[(q + 1/2)^2 - n^2][(q + 1/2)^2 - j^2]} = \frac{1}{n^2 - j^2} \int_0^\infty [\operatorname{ch}(nt) - \operatorname{ch}(jt)] e^{-(q+1/2)t} dt. \quad (2.20)$$

При этом удастся свернуть бесконечный ряд в выражении для a_{nj} и представить коэффициенты бесконечной системы (2.18) в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_{nj} &= \frac{1}{\pi(n^2 - j^2)} \int_0^\infty [\operatorname{ch}(nt) - \operatorname{ch}(jt)] \sum_{q=0}^\infty e^{-(q+1/2)t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi(n^2 - j^2)} \int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{t}{2}} [\operatorname{ch}(nt) - \operatorname{ch}(jt)] dt. \end{aligned} \quad (2.21)$$

В соответствии с известными соотношениями [63] несобственный интеграл в этом выражении представляется через специальные функции:

$$a_{nj} = \frac{1}{\pi(n^2 - j^2)} [\psi(n + 1/2) - \psi(j + 1/2)], \quad (2.22)$$

где $\psi(n + 1/2)$ и $\psi(j + 1/2)$ — пси-функции.

Свойства пси-функций [1, 63] дают возможность установить важную особенность a_{nj} , а именно постоянство их знака. Это обстоятельство существенно упрощает вычисление суммы модулей коэффициентов в системе (2.18). Имея в виду исследование квазирегулярности, для a_{nj} можно использовать следующее асимптотическое выражение:

$$a_{nj} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\ln(n/j)}{n^2 - j^2} - \frac{B_2}{4n^2 j^2} \right], \quad (2.23)$$

дающее значение их с точностью до $1/n^4$ в сравнении с единицей. Здесь B_2 — число Бернулли.

При получении выражения (2.23) были использованы представления пси-функций в виде конечных рядов и соответствующие асимптотические выражения [63].

С учетом выражения (2.23) для исследования квазирегулярности системы (2.18) имеем следующую оценку:

$$F_n = \frac{4n}{\pi^2} \sum_{j=1}^\infty a_{nj} \leq \frac{4n}{\pi^2} \sum_{j=1}^\infty \left[\frac{\ln(n/j)}{n^2 - j^2} - \frac{B_2}{4n^2 j^2} \right] + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad (2.24)$$

где J — индекс функций Ханкеля в системе (2.13), начиная с которого допустима замена этих функций их асимптотическими представлениями.

При больших значениях n сумма ряда (2.24) может быть определена с помощью методов суммирования, развитых в работе [131].

Учитывая, что

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{\ln(n/j)}{n^2 - j^2} < \frac{1}{n} \int_0^\infty \frac{\ln(n/j)}{1 - (n/j)^2} d(n/j),$$

для больших значений j допускается оценка

$$F_n \leq 1 - \frac{1}{36n} = 1 - Q(n). \quad (2.25)$$

Таким образом, система (2.18) является квазирегулярной. Вопрос о существовании ограниченного решения сводится теперь к сопоставлению порядков убывания функции $Q(n)$ и свободных членов в выражении (2.18). Анализ поведения свободных членов в системе (2.18) показывает, что они убывают, как $1/n^2$, т. е. быстрее, чем функция Q в выражении (2.25). Это указывает на возможность использования метода редукции при отыскании приближенного решения системы (2.18) и, следовательно, системы (2.15).

Опираясь на факт существования ограниченного решения системы (2.15), можно показать, что бесконечные ряды в выражениях (2.8), а также соответствующие ряды для колебательной скорости сходятся во всех точках частных областей. Это указывает на то, что решение рассматриваемой граничной задачи в принятой форме существует. Тем не менее с точки зрения фактического отыскания решения и последующей количественной интерпретации общих формул для характеризующих поле физических величин факт регулярности бесконечной системы практически мало что дает. Более полную информацию о возможностях развиваемого подхода к решению граничных задач в сложных областях можно получить на основе анализа особенностей рассматриваемых физических полей. В связи с этим кратко проанализируем те этапы в решении задачи излучения цилиндра через незамкнутый слой, которые предшествовали получению бесконечной системы (2.15).

Для получения однозначного решения рассматриваемой задачи необходимо выполнить следующие условия: 1) граничные условия на поверхности цилиндра и слоя; 2) условия непрерывности составляющих поля на поверхностях раздела частных областей; 3) условия излучения на бесконечности, 4) вполне определенный тип особенностей колебательной скорости при подходе к угловым точкам (ребрам).

Удовлетворение граничных условий позволило однозначно определить v_q , а также указать связь между A_q и B_q . Требование удовлетворения условия излучения на бесконечности однозначно определило вид радиальных функций в выражении для p_2 . Среднеквадратическое удовлетворение условий непрерывности привело к бесконечной системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов бесконечных рядов в p_1 и p_2 .

Из приведенного анализа ясно, что четвертое условие нигде не было явно использовано.

При использованном выше способе представления звукового поля существование решений с различными типами особенностей коле-

бательной скорости в угловых точках может привести к существованию нескольких решений бесконечной системы (2.15). В этом случае алгоритм сведения бесконечной системы к конечной должен обеспечивать получение нужного решения, т. е. такого, которое отвечает физически оправданным особенностям поля скоростей в угловых точках.

Вопрос об определении особенности в поле скоростей частиц акустической среды в окрестности ребер подробно обсуждался в главе I. Там же подробно изложен алгоритм, позволяющий использовать данные об известных заранее особенностях при проведении вычислений. В данном случае в окрестности прямого угла, образованного поверхностью $r = r_1$ и плоскостью $\varphi = \varphi_0$, колебательная скорость имеет особенность типа $1/\rho^{1/3}$, где ρ — расстояние от вершины угла. В связи с этим распределение радиальной составляющей колебательной скорости по поверхности $r = r_1$ может быть представлено в виде

$$v_r(\varphi) = \begin{cases} \frac{-ks}{(\cos \varphi - \cos \varphi_0)^{1/3}} + v_1(\varphi), & 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ -\frac{ks}{(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)^{1/3}} + v_2(\varphi), & \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi, \end{cases} \quad (2.26)$$

где s — некоторая постоянная, а $v_1(\varphi)$ и $v_2(\varphi)$ — регулярные функции.

Рассматриваемые на полном интервале $0 \leq \varphi \leq \pi$ главные части в представлении скорости (2.26) могут быть даны рядом Фурье

$$v_r(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\varphi. \quad (2.27)$$

Главная, наиболее медленно убывающая часть коэффициентов a_n определяется в этом случае выражением

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \frac{ks \cos n\varphi}{(\cos \varphi - \cos \varphi_0)^{1/3}} d\varphi + \frac{2}{\pi} \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{ks \cos n\varphi}{(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)^{1/3}} d\varphi. \quad (2.28)$$

Используя интегральные представления для функций Лежандра первого и второго рода [60], нетрудно показать, что

$$\tilde{a}_n = ks \left[P_{n-1/2}^{-1/2}(\cos \varphi_0) + \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right)} Q_{n-1/2}^{1/2}(\cos \varphi_0) \right]. \quad (2.29)$$

Асимптотические представления функций Лежандра при больших значениях индексов [8, 60] позволяют получить следующие асимптотические оценки для коэффициентов ряда (2.27):

$$\tilde{a}_n = A \frac{\cos n\varphi_0}{n^{2/3}} \quad (n \gg 1). \quad (2.30)$$

Рассуждения, аналогичные подробно изложенным в первой главе, позволяют заметить, что соотношение (2.30) определяет характер поведения с ростом номера неизвестных величин $\tilde{S}_n$ в системе (2.15). Если воспользоваться лишь первой частью в выражении для $v_r(\varphi)$ в представлении (2.26) и разложить ее в ряд по полной системе функций $\cos v_q \varphi$ на интервале $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, то можно получить оценку асимптотического поведения неизвестных $\tilde{A}_q$ в системе (2.15):

$$\tilde{A}_q^{(0)} = B \frac{(-1)^{q+1}}{v_q^{5/3}} \quad (q \gg 1). \quad (2.31)$$

Соотношения (2.30) и (2.31) выражают предполагаемые асимптотические свойства неизвестных в системе (2.15) и получены на основе анализа необходимых для существования единственного решения краевой задачи условий на ребре. Для того чтобы подтвердить существование такого решения бесконечной системы (2.15), можно проверить согласованность асимптотических оценок (2.30) и (2.31), используя сами соотношения бесконечной системы.

Исходя из свойств неизвестных $\tilde{A}_q$, определим асимптотические свойства $\tilde{S}_n$. При больших индексах n из первого уравнения в системе (2.15) имеет место следующее представление:

$$\tilde{S}_n^{(0)} \frac{kr_1}{n} = \frac{1}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \tilde{A}_q a_{nq} + O(n^{-2}). \quad (2.32)$$

Произведем оценку суммы в последнем выражении:

$$J = \frac{1}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \tilde{A}_q a_{nq} = \frac{1}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \tilde{A}_q^{(0)} a_{nq} + \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{q=0}^{Q-1} \tilde{A}_q a_{nq} - \sum_{q=0}^{Q-1} \tilde{A}_q^{(0)} a_{nq} \right\} = \\ = \frac{1}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \tilde{A}_q^{(0)} a_{nq} + O(n^{-2}), \quad (2.33)$$

где Q — значение индекса q , начиная с которого правомерно замена функций Бесселя и Неймана их асимптотическими представлениями; $\tilde{A}_q^{(0)}$ — асимптотическое значение коэффициентов $\tilde{A}_q$ при $q \gg 1$.

С учетом выражения (2.31) получаем

$$J = B \cos n\varphi_0 \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{v_q^{5/3} (n^2 - v_q^2)}. \quad (2.34)$$

Оценку суммы в этом выражении нетрудно провести, используя метод суммирования бесконечных рядов [131]. Действительно,

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{v_q^{5/3} (n^2 - v_q^2)} \leq \frac{\varphi_0}{\pi n^{5/3}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{5/3} (1 - x^2)} = \frac{\varphi_0 \sqrt{3}}{2n^{5/3}}. \quad (2.35)$$

Таким образом, с точностью до $O(n^{-5/3})$ имеем

$$J = B \frac{\varphi_0 \sqrt{3}}{2} \frac{\cos n\varphi_0}{n^{5/3}}. \quad (2.36)$$

С учетом оценок (2.36) из (2.32) окончательно находим

$$\tilde{S}_n^{(0)} = B \frac{\varphi_0 V \bar{3}}{2kr_1} \frac{\cos n\varphi_0}{n^{3/2}}. \quad (2.37)$$

Использование второго соотношения в системе (2.15) путем проведения аналогичных выкладок позволяет установить полную согласованность выведенных из общих соображений оценок (2.30) и (2.31) и свойств коэффициентов системы (2.15).

Алгоритм отыскания решения системы (2.15) должен обеспечивать получение именно такого ее решения, асимптотические свойства которого определяются соотношениями (2.30) и (2.31). В связи с этим при переходе к конечной системе при удержании N и Q неизвестных полагаем

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n &= \tilde{S}_N \left(\frac{N}{n} \right)^{1/2} \frac{\cos n\varphi_0}{\cos N\varphi_0} \quad (n \geq N); \\ \tilde{A}_q &= \tilde{A}_Q \left(\frac{Q}{q} \right)^{1/2} (-1)^{q-Q}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Соотношения (2.38) позволяют привести систему (2.15) к виду

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n \frac{H_n^{(1)}(kr_1)}{H_n^{(1)}(kr_1)} - \frac{1}{\delta_n} \sum_{q=0}^{Q-1} \tilde{A}_q a_{nq} - \frac{\tilde{A}_Q}{\delta_n} \sum_{q=Q}^{\infty} \left(\frac{v_Q}{v_q} \right)^{1/2} a_{nq} &= \\ = \frac{1}{\delta_n} \sum_{q=0}^{\infty} L_q a_{nq} \frac{N_{v_q}(kr_1)}{N'_{v_q}(kr_1)}; \\ \tilde{A}_q \frac{\Delta'_q(kr_1)}{\Delta_q(kr_1)} - \frac{1}{\varphi_0} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{S}_n a_{nq} - \frac{\tilde{S}_N}{\varphi_0} \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{N}{n} \right)^{1/2} \frac{\cos n\varphi_0}{\cos N\varphi_0} a_{nq} &= \\ = L_q \frac{N'_{v_q}(kr_1)}{N_{v_q}(kr_0)}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Полученные выше данные о характере убывания коэффициентов бесконечных рядов, которыми представляются звуковые поля в частных областях, позволяют провести оценку скорости их сходимости. Так, при изучении характеристик дальнего поля, очевидно, следует исходить из следующего представления:

$$\begin{aligned} p_2 &\approx p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{S}_n \cos n\varphi; \\ p_0 &= \left(\frac{2}{\pi kr_1} \right)^{1/2} e^{i \left(kr - \frac{\pi}{4} \right)} (-i\omega\rho). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Учитывая выражение (2.30), для $\tilde{S}_n$ находим

$$\tilde{S}_n \approx \text{const} \frac{(kr_1)^n \cos n\varphi_0 e^{in \frac{\pi}{2}}}{n^{3/2} (n-1)!}. \quad (2.41)$$

Ряд Фурье (2.40) с коэффициентами $\tilde{S}_n$ для цилиндра со слоем с не слишком большими волновыми диаметрами очень быстро сходится. Это указывает на то, что для количественного описания дальнего поля достаточно знать значения нескольких первых коэффициентов $\tilde{S}_n$. Аналогичную оценку можно выполнить и для ближнего поля. В области I звуковое давление с учетом выражений (2.11) и (2.14) представляется следующим рядом:

$$p_1 = -i\omega\rho \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ A_q \frac{\Delta_q(kr)}{\Delta_q(kr_1)} + L_q \frac{N_{v_q}(kr)}{N'_{v_q}(kr_0)} \right\} \cos v_q \varphi. \quad (2.42)$$

Исходя из асимптотических свойств коэффициентов $\tilde{A}_q$ (2.31) видим, что сходимость ряда (2.42) при $r = r_0$ такая же, как и у ряда Фурье с коэффициентами

$$\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{q+1}}{v_q^{3/2}} \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{v_q} + \frac{(-1)^{q+1} kr_0}{v_q^2}. \quad (2.43)$$

Проведенный анализ сходимости бесконечных рядов показывает, что для получения количественных оценок практически важных характеристик звукового поля может оказаться достаточным знание нескольких первых коэффициентов в соответствующих рядах. Это обстоятельство указывает на то, что при определении этих характеристик в ряде случаев можно использовать для получения решения системы (2.15) метод простой редукции. Возможности такого упрощающего подхода уже обсуждались в первой главе при рассмотрении простейших смешанных задач. Здесь же приведем некоторые дополнительные количественные данные, подтверждающие возможность такого подхода. При этом следует иметь в виду, что использование метода редукции допустимо, если выполняются следующие условия:

1) при увеличении числа удерживаемых неизвестных в системе (2.15) решение ее будет стремиться к решению системы с нужными асимптотическими свойствами;

2) значения неизвестных с малыми номерами будут определяться достаточно точно при сравнительно небольшом количестве уравнений в системе, полученной редукцией системы (2.15). Проверка этих условий может быть осуществлена при сравнении результатов решения системы (2.15), полученной простой редукцией, и системы (2.39), построенной с учетом асимптотических свойств неизвестных.

В левом столбце табл. 1 приведены значения $\tilde{S}_n$, полученные методом простой редукции системы (2.15) при $N = 6$ и $Q = 6$. При этом предполагалось, что $kr_0 = 1,6$, $kr_1 = 2,89$; $\varphi_0 = \pi/2$; $f(\varphi) = 1$.

Данные табл. 1 позволяют дать положительный ответ на оба поставленных выше вопроса. Использование метода простой редукции для отыскания неизвестных в системе (2.15) в принципе действительно дает решение с соответствующими сущности задачи асимптотическими свойствами неизвестных. Кроме этого, для отыскания достоверных значений нескольких первых неизвестных достаточно

рассмотреть систему, содержащую примерно в два раза больше неизвестных, чем это необходимо для получения количественных оценок характеристик поля. Последнее утверждение подтверждается также результатами вычислений для различных геометрических и волновых параметров цилиндрического излучателя с незамкнутым слоем, результатами, приведенными в первой главе, а также данными работ [17, 69].

Т а б л и ц а 1

n	$\tilde{S}_n$	
	Метод простой редукции	Метод асимптотических свойств
0	$-1,397148 \cdot 10^{-1} + 4,193470 \cdot 10^{-2}$	$-1,379932 \cdot 10^{-1} + 4,343100 \cdot 10^{-2}$
1	$-3,615388 \cdot 10^{-2} + 2,376839 \cdot 10^{-1}$	$-3,345683 \cdot 10^{-2} - 2,346520 \cdot 10^{-1}$
2	$-1,379027 \cdot 10^{-1} - 3,035603 \cdot 10^{-2}$	$-1,410888 \cdot 10^{-1} - 2,456649 \cdot 10^{-2}$
3	$5,670435 \cdot 10^{-4} + 2,611376 \cdot 10^{-2}$	$5,770254 \cdot 10^{-4} + 2,671194 \cdot 10^{-2}$
4	$2,328268 \cdot 10^{-2} + 4,271593 \cdot 10^{-3}$	$2,000019 \cdot 10^{-2} + 4,205960 \cdot 10^{-3}$
5	$3,206226 \cdot 10^{-5} - 3,395070 \cdot 10^{-3}$	$-3,404527 \cdot 10^{-6} - 3,342761 \cdot 10^{-3}$
6	$-1,540533 \cdot 10^{-2} + 3,235455 \cdot 10^{-3}$	$-1,650261 \cdot 10^{-2} + 7,595264 \cdot 10^{-3}$
7	$-7,250446 \cdot 10^{-8} + 7,387453 \cdot 10^{-4}$	$-6,120918 \cdot 10^{-7} + 7,417587 \cdot 10^{-4}$
8	$1,115143 \cdot 10^{-2} - 6,101197 \cdot 10^{-3}$	$6,327824 \cdot 10^{-3} - 8,438423 \cdot 10^{-4}$
9	$-2,862725 \cdot 10^{-7} - 1,719243 \cdot 10^{-4}$	$-1,085472 \cdot 10^{-6} - 1,706887 \cdot 10^{-4}$
10	$-8,814035 \cdot 10^{-3} + 7,677106 \cdot 10^{-3}$	$-1,392445 \cdot 10^{-2} + 2,575785 \cdot 10^{-2}$
11	$1,021961 \cdot 10^{-7} + 4,224494 \cdot 10^{-5}$	$-5,933418 \cdot 10^{-8} + 4,245868 \cdot 10^{-5}$

Таким образом, проведенный анализ дает основание заключить, что дальнее поле и импеданс излучения с хорошим приближением могут быть определены по результатам решения бесконечной системы (2.15) методом простой редукции. Однако при изучении локальных характеристик поля, особенно на поверхности $r = r_1$, где ряды, определяющие давление и колебательную скорость, обладают наиболее медленной сходимостью, необходимо использовать систему (2.39), применяя известные методы улучшения сходимости рядов Фурье [93].

3. Направленные свойства и импеданс излучения цилиндра в незамкнутом кольцевом слое

Анализ, выполненный в предыдущем параграфе, позволяет приступить к исследованию количественных характеристик поля цилиндрического излучателя, заключенного в незамкнутый кольцевой слой.

Нас будет интересовать прежде всего дальнее поле излучателя, которое удобно характеризовать диаграммой направленности и коэффициентом концентрации. Нормированную диаграмму направленности $R(\varphi)$ легко получить из соотношения, определяющего внешнее поле излучателя (2.8), если воспользоваться асимптотическими

представлениями функций Ханкеля для больших значений аргумента:

$$R(\varphi) = \frac{\sum_{n=0}^N S_n e^{in\pi/2} \cos n\varphi}{\sum_{n=0}^N S_n e^{in\pi/2} \cos n\varphi_1}, \quad (2.44)$$

где N определяется порядком фактически решаемой конечной системы, φ_1 — направление, по отношению к которому производится нормировка (ниже везде принято $\varphi_1 = 0$).

Коэффициент концентрации, в строгом смысле, для плоской задачи определить нельзя. Тем не менее можно воспользоваться величиной

$$K = \pi \left[\int_0^\pi R^2(\varphi) d\varphi \right]^{-1}, \quad (2.45)$$

которая в работе [147] трактуется как коэффициент концентрации на единицу высоты цилиндрического излучателя и, по сути, характеризует направленное действие только в плоскости, нормальной его продольной оси.

Особенности дальнего и ближнего поля будем изучать на основе численного решения системы (2.15). Порядок усечения этой системы выбирался исходя из анализа сходимости рядов, проведенного в параграфе 2 настоящей главы. Для приведенных ниже данных количество неизвестных S_n составляло 12, а количество неизвестных A_q определялось из условия $v_q \approx 12$. Во всех расчетах принималось равномерное распределение колебательной скорости по поверхности цилиндра, т. е. $j(\varphi) = \text{const}$.

Характеризуя в целом угловое распределение звуковой энергии, излучаемой цилиндром в дальнем поле, следует отметить, что оно имеет ярко выраженную неравномерность. На рис. 11 представлена функция $R(\varphi)$ из выражения (2.44), вычисленная для следующих волновых размеров излучателя и слоя: $kr_0 = 4,52$, $kr_1 = 6,9$. Кривые 1, 2, 3 и 4 описывают эту функцию для $\varphi_0 = \pi/6$, $\varphi_0 = \pi/4$, $\varphi_0 = \pi/3$ и $\varphi_0 = \pi/2$ соответственно. Основная часть звуковой энергии излучается в переднее полупространство $|\varphi| \leq \varphi_0$. На тыльную же область приходится незначительная доля энергии. Таким образом, цилиндру с незамкнутым кольцевым слоем присуще свойство концентрировать звуковую энергию в направлении щели слоя.

Перейдем к более детальному анализу направленных свойств рассматриваемого излучателя. На рис. 12 и 13 приведены зависимости ширины основного лепестка диаграммы направленности $\varphi_{0,7}$, определенной по уровню 0,7 для максимального значения $R(\varphi)$, и коэффициента концентрации K от угла φ_0 . Во всех расчетных случаях волновой размер излучающего цилиндра одинаков: $kr_0 = 2,26$. Кривые 1, 2, 3 и 4 получены для различных волновых размеров кольцевого слоя kr_1 , равных 2,89; 4,14; 6,18 и 14,82 соответственно. Кривая 5 на рис. 13 получена по методу [75, 94, 138]. Из этих данных

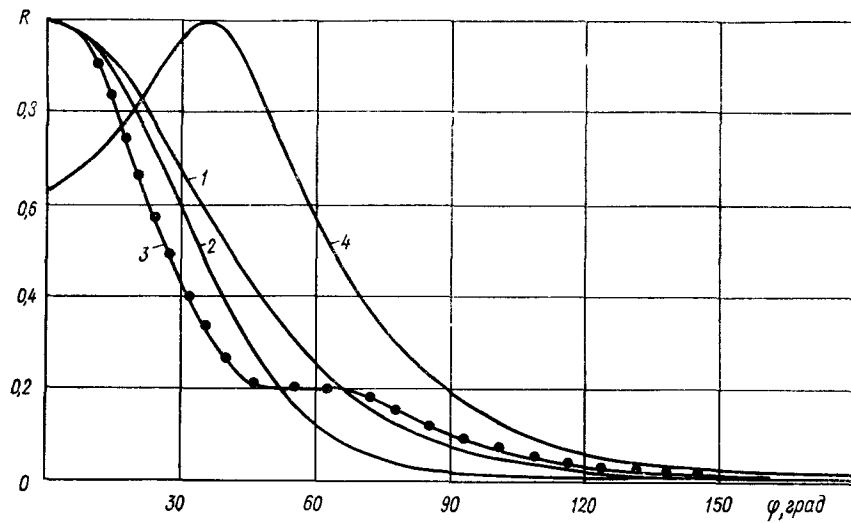


Рис 11

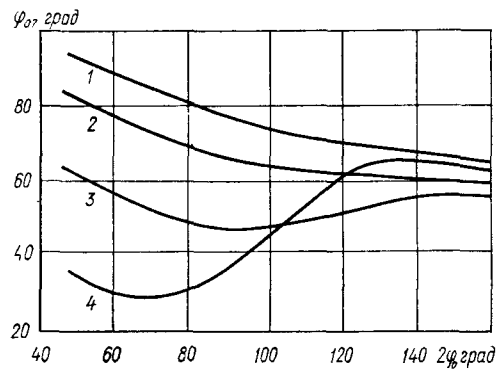


Рис. 12

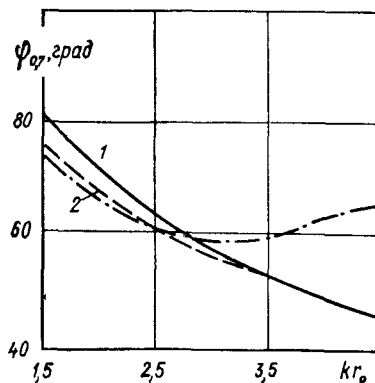


Рис. 14

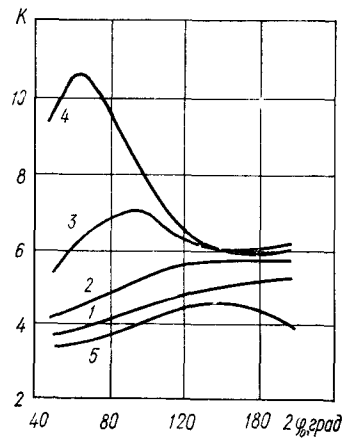


Рис 13

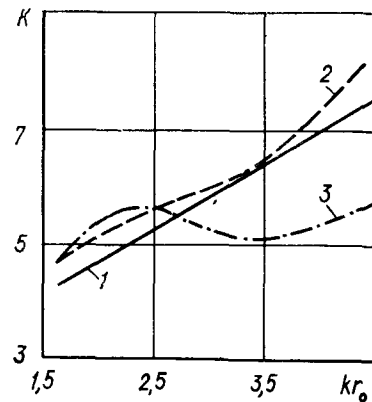


Рис 15

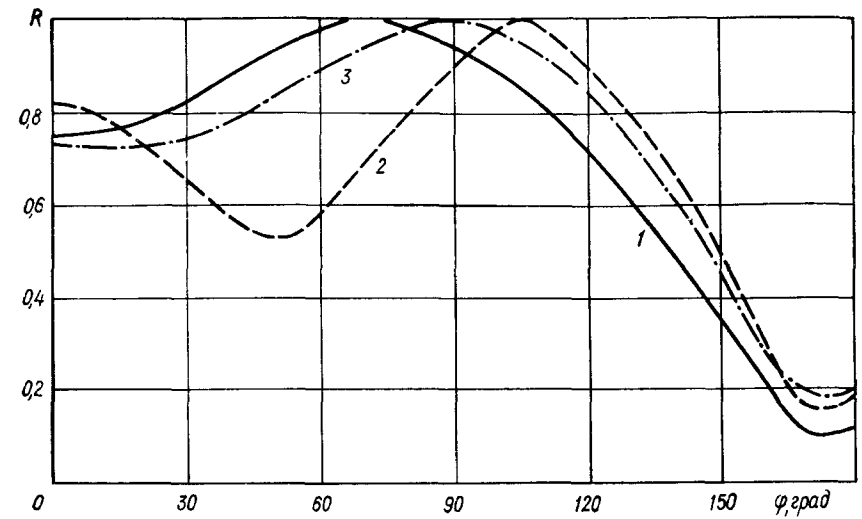


Рис 16

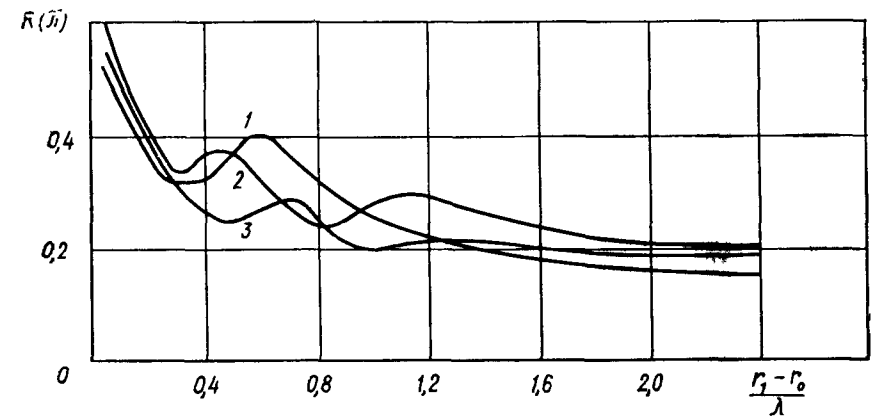


Рис. 17

следует, что при относительно большой волновой толщине слоя существует некоторый угол φ_0 , при котором ширина основного лепестка минимальна, а коэффициент концентрации максимален. Это обстоятельство вызвано следующими причинами. При достаточно малых углах φ_0 волновой размер апертуры излучателя (под апертурой будем понимать расстояние между точками $r = r_1$, $\varphi = \pm \varphi_0$) мал, что и обуславливает большое значение $\varphi_{0,7}$ и малое значение K . По мере роста φ_0 увеличивается волновой размер апертуры и направленность излучателя растет, что выражается в уменьшении $\varphi_{0,7}$ и увеличении K . Однако такой процесс идет до известного предела, пока фазовые искажения, обусловленные цилиндричностью фронта волны в апертуре, не достигают существенного значения. Именно это

обстоятельство и замедляет дальнейшее сужение основного лепестка, а при достаточно больших значениях φ_0 даже приводит к обратному процессу — основной лепесток снова начинает расширяться и в некоторых случаях раздваиваться (см. например, кривую 4 рис. 11).

Остановимся на диапазонных свойствах цилиндрического излучателя с незамкнутым кольцевым слоем — зависимости основных характеристик излучающей системы от частоты.

На рис. 14 и 15 приведено семейство кривых, характеризующих зависимость величин $\varphi_{0,7}$ и K от частоты при различных значениях угла φ_0 . В обоих случаях расчеты выполнены для одного отношения радиусов излучающего цилиндра и слоя $r_1/r_0 = 1,8$. Углы раскрытия излучающей поверхности φ_0 равны $\pi/4$, $\pi/3$ и $\pi/2$ (соответственно кривые 1, 2 и 3 на рис. 14 и 15). Из этих данных следует, что существуют углы φ_0 , при которых значения $\varphi_{0,7}$ и K практически не зависят от частоты. Таким образом, при определенных геометрических параметрах рассматриваемому из-

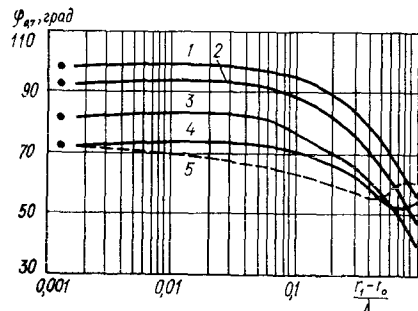


Рис. 18

лучателю присуще свойство сохранять форму диаграммы направленности в достаточно широкой полосе частот.

Интересно рассмотреть предельный случай, когда $\varphi_0 = \pi$ и кольцевой слой вырождается в ленту. В этом случае эффективное излучение звуковой энергии наблюдается при всех углах φ , за исключением углов, близких к π , где уровень поля резко снижается.

На рис. 16 представлены несколько типичных диаграмм направленности, а на рис. 17 — частотные зависимости тыльного уровня излучения от волнового размера ленты. Эти данные дают наглядное представление о форме диаграммы направленности для этого особого случая, а также о степени эффективности ленты в подавлении тыльного излучения цилиндра. Во всех расчетных случаях лента имеет достаточно большой постоянный волновой размер $kr_1 = 6,18$. При этом варьируют волновой размер излучающего цилиндра, принимая значения kr_0 равными 1,57; 2,26 и 3,14 (соответственно кривые 1, 2 и 3 на рис. 16 и 17).

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, проведем сопоставительный анализ данных, полученных выше, с данными работ [94, 138]. Эти работы также посвящены исследованиям направленных свойств цилиндрического излучателя, охваченного незамкнутым кольцевым слоем экрана, но в качестве математической модели при изучении свойств такого излучателя принимался цилиндр со смешанными граничными условиями, т. е. предполагалось, что толщина слоя равна нулю. Однако заведомо ясно, что увеличение волновой толщины слоя должно приводить к различиям между диаграммами направленности излучателя со слоем конечной толщины и нулевой толщины.

В связи с этим представляется важным установить границу применимости результатов расчета, полученных без учета конечной толщины слоя. Этот вопрос будем решать путем сравнения результатов расчета, полученных при решении смешанной задачи [94], с нашими результатами.

На рис. 18 приведены графики, характеризующие зависимость ширины основного лепестка диаграммы направленности от волновой толщины слоя при $kr_0 = 2,26$. В левой части в начале кривых точкой обозначено значение $\varphi_{0,7}$, рассчитанное по методу, описанному в работах [94, 95]. Степень раскрытия кольцевого слоя характеризуется значениями φ_0 , равными $\pi/8$, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$ (соответственно кривые 1, 2, 3, 4 и 5). Как следует из этих данных, при волновой толщине слоя меньше 0,002 значение, рассчитанное по методу, приведенному в работе [94], и по методу, учитывающему конечную толщину слоя, с графической точностью совпадают. В области $0,002 \leq \frac{r_1 - r_0}{\lambda} \leq 0,05$ для большинства углов φ_0 значение $\varphi_{0,7}$ изменяется сравнительно слабо, не более чем на 10 % по сравнению с ее значением при $\frac{r_1 - r_0}{\lambda} = 0,002$. Однако при $\frac{r_1 - r_0}{\lambda} > 0,05$ влияние толщины слоя на ширину основного лепестка начинает сказываться существенно.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: при оценке диаграммы направленности цилиндрического излучателя, охваченного незамкнутым кольцевым слоем, для большинства значений φ_0 можно получить хорошие результаты по методу, описанному в работе [94], если волновая толщина слоя не превышает 0,05. В противном случае необходимо использовать более точный подход, позволяющий учитывать конечную толщину слоя. Сделанный вывод в основном подтверждается данными расчетов для других волновых размеров излучателей. Однако в некоторых случаях, например при $kr_0 = 3,14$, $\varphi_0 = \pi/2$, наблюдается довольно резкая изменчивость ширины основного лепестка диаграммы направленности с ростом волновой толщины слоя. В этом случае значение волновой толщины слоя, начиная с которого необходимо использовать более строгую математическую модель, может достигать 0,002—0,003.

Дополнительные данные, позволяющие судить о степени влияния толщины слоя на дальнее поле излучателя, дает кривая 5, приведенная на рис. 13 и характеризующая коэффициент концентрации для случая нулевой толщины слоя (эта кривая рассчитана по методу, приведенному в работе [94]). Как видно, кривая, соответствующая нулевой толщине слоя, лежит ниже кривых, соответствующих конечной толщине слоя.

Перейдем теперь к анализу особенностей импеданса излучения цилиндра в незамкнутом кольцевом слое. Используя общее определение импеданса излучения и выражение для звукового поля в первой частичной области, импеданс излучения на единицу высоты цилиндра можно представить в следующей принятой в акустике форме:

$$Z = \rho c S_n [R + iX], \quad (2.46)$$

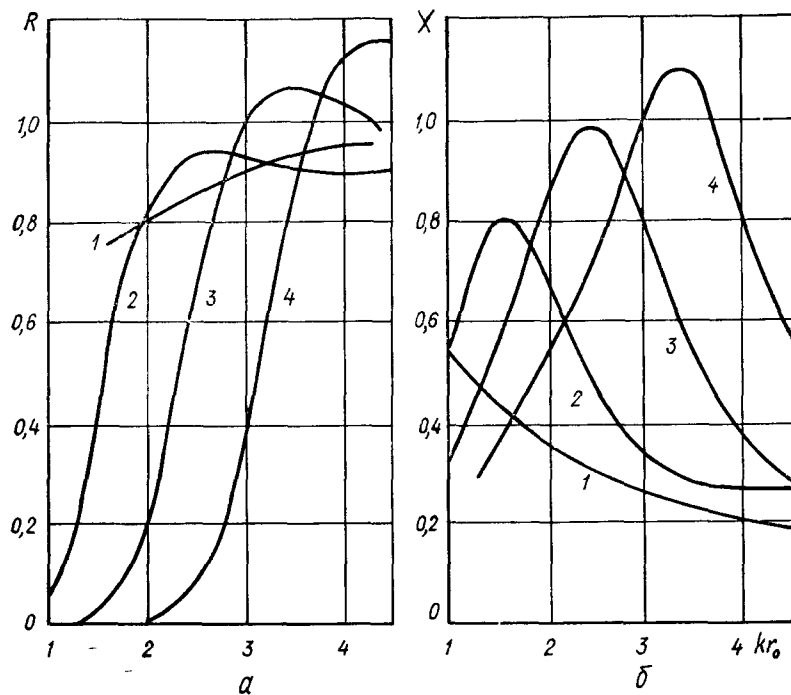


Рис. 19

где S_n — площадь излучающей поверхности источника на единицу высоты, $S_n = 2r_0\varphi_0$,

$$R = \frac{1}{\pi r_0} \sum_{q=0}^{\infty} \operatorname{Im}(A_q) \frac{L_q}{N'_{v_q}(kr_0)};$$

$$X = -\frac{1}{2r_0} \sum_{q=0}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} A_q + r_0 L_q N_{v_q}(kr_0) \right] \frac{L_q}{N'_{v_q}(kr_0)}.$$

На рис. 19 показаны частотные зависимости R (рис. 19, а) и X (рис. 19, б) для $r_1/r_0 = 2,5$. Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют углу раскрытия незамкнутого слоя φ_0 , равному $\pi/2$, $\pi/4$, $\pi/6$ и $\pi/8$. Анализируя поведение кривых с ростом волнового размера излучателя и волновой толщины, можно указать на следующие особенности: с уменьшением угла φ_0 составляющие импеданса достигают относительно больших значений при больших значениях kr_0 ; уровень R и X в области экстремальных участков кривых увеличивается с уменьшением угла φ_0 и ростом r_1/r_0 .

Вывод относительно влияния отношения r_1/r_0 сделан на основе сравнения данных, приведенных на рис. 19, с результатами расчета для $r_1/r_0 = 1,1$. В этом расчетном случае уменьшается крутизна кривых, представляющих изменение R с ростом kr_0 , уменьшается общий уровень реактивности излучающей системы.

Таким образом, цилиндр в незамкнутом кольцевом слое может эффективно излучать акустическую энергию, начиная только с некоторых частот, определяемых величиной угла φ_0 . Ниже этих частот его эффективность быстро уменьшается, причем скорость этого уменьшения определяется отношением r_1/r_0 . Заметим, что частотные зависимости R , представленные на рис. 19, а, весьма сходны с частотными зависимостями электрических фильтров высоких частот [10]. Пользуясь терминологией теории электрических фильтров, частоту, начиная с которой значение R резко увеличивается, можно трактовать как частоту «среза». Тогда излучатель в незамкнутом кольцевом слое можно рассматривать как своеобразный фильтр высоких частот, у которого частотой среза можно управлять, изменяя угол φ_0 .

В заключение необходимо отметить следующее. Приняв $r_1 \rightarrow \infty$, приходим к случаю, рассмотренному в работе [21], где исследуется импеданс излучения цилиндра, нагруженного на бесконечный жидкий клин с акустически мягкими гранями. Это эквивалентно ситуации, когда толщина незамкнутого кольцевого слоя бесконечна. Сравнивая результаты, приведенные в работе [21], с данными рис. 19, можно заключить, что значения R и X для обоих случаев с графической точностью совпадают. Это позволяет сделать важный практический вывод: при $r_1/r_0 \geq 2,5$ дифракционные эффекты, обусловленные конечной толщиной слоя, уже не оказывают существенного влияния на импеданс.

4. Излучение звука цилиндром через незамкнутый кольцевой слой конечной прозрачности

В параграфах 2 и 3 предполагалось, что незамкнутый кольцевой слой акустически мягкий. Теперь рассмотрим более сложный случай, когда материал слоя, близкий к реальному [53—58], характеризуется некоторым волновым сопротивлением $\rho_1 c_1$ (рис. 20). Так же как и в случае с акустически мягким слоем, будем полагать, что на поверхности цилиндра задана колебательная скорость

$$v = v_0 f(\varphi); \quad f(\varphi) = f(-\varphi), \quad (2.47)$$

а на торцах слоя выполняются условия

$$p = 0; \quad \varphi = \pm \varphi_0; \quad r_1 \leq r \leq r_2. \quad (2.48)$$

При построении выражений для звукового поля внутри слоя его торцы будем считать акустически жесткими:

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \varphi = \pm \varphi_0; \quad r_1 \leq r \leq r_2. \quad (2.49)$$

Заметим, что на торцах слоя правильнее было бы сформулировать условия сопряжения. При этом в выражение для давления в областях II и III необходимо было бы включить совокупность частных

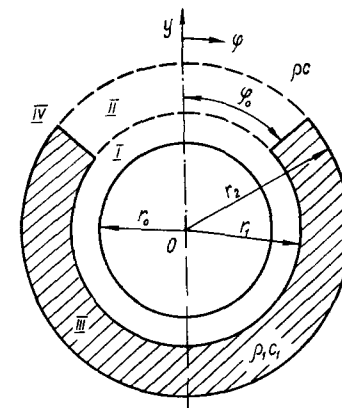


Рис. 20

решений, содержащих полную систему функций на поверхностях $\varphi = \pm \varphi_0$, $r_1 \leq r \leq r_2$. Предполагая провести далее вычисления для случаев относительно малых волновых размеров слоя и учитывая способ возбуждения звукового поля, а также рассматриваемый ниже диапазон изменения величины $m = \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}$, можно принять упрощенные условия (2.48) и (2.49). Помимо принятых предположений допустим также, что между цилиндром и слоем имеется зазор.

Для построения решения поставленной задачи придется увеличить количество частичных областей по сравнению с задачей, поставленной в параграфах 2, 3, и довести их до четырех: область I ($r_0 \leq r \leq r_1$, $|\varphi| \leq \pi$); область II ($r_1 \leq r \leq r_2$, $|\varphi| \leq \varphi_0$); область III ($r_1 \leq r \leq r_2$, $\varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi$); область IV ($r \geq r_2$, $|\varphi| \leq \pi$). Звуковое давление в этих частичных областях представим в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -i\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} [A_n J_n(kr) + B_n N_n(kr)] \cos n\varphi; \\ p_2 &= -i\omega\rho \sum_{q=0}^{\infty} [C_q J_{v_q}(kr) + D_q N_{v_q}(kr)] \cos v_q \varphi; \\ p_3 &= -i\omega\rho_1 \sum_{s=0}^{\infty} [E_s J_{v_s}(k_1 r) + F_s N_{v_s}(k_1 r)] \cos v_s (\pi - \varphi); \\ p_4 &= -i\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} L_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

Здесь все обозначения те же, что и в параграфе 2, а $v_s = \frac{s\pi}{\pi - \varphi_0}$ определяется из граничного условия (2.49).

Запишем систему функциональных уравнений, из которых следует определить неизвестные комплексные коэффициенты рядов (2.50). Помимо граничных условий (2.47) — (2.49) эти уравнения содержат условия сопряжения на границах граничных областей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{i\rho c} \frac{\partial p_1}{\partial (kr)} &= v_0 f(\varphi), \quad 0 \leq |\varphi| \leq \pi, \quad r = r_0; \\ p_1 &= \begin{cases} p_2, & |\varphi| \leq \varphi_0, \\ p_3, & \varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi, \end{cases} \quad r = r_1; \\ \frac{\partial p_1}{\partial (kr)} &= \frac{\partial p_2}{\partial (kr)}, \quad |\varphi| \leq \varphi_0, \quad r = r_1; \\ \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p_1}{\partial (kr)} &= \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\partial p_3}{\partial (k_1 r)}, \quad \varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi, \quad r = r_1; \\ p_4 &= \begin{cases} p_2, & |\varphi| \leq \varphi_0, \\ p_3, & \varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi, \end{cases} \quad r = r_2; \\ \frac{\partial p_2}{\partial (kr)} &= \frac{\partial p_4}{\partial (kr)}, \quad |\varphi| \leq \varphi_0, \quad r = r_2, \\ \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\partial p_3}{\partial (k_1 r)} &= \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p_4}{\partial (kr)}, \quad \varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi, \quad r = r_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Алгебраизация соотношений (2.51), выполненная тем же путем, что и в параграфе 2, позволяет получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода. Эта система по своей структуре не имеет принципиального отличия от системы (2.13), поэтому приводить ее не будем, а сразу перейдем к анализу количественных данных для частного случая $f(\varphi) = \text{const}$, $\varphi_0 = \pi/2$. Решение бесконечной системы проводилось методом редукции. Для определения порядка конечной системы использовались ранее сформулированные рекомендации, а также сравнения результатов, полученных при разном последовательно увеличивающемся количестве уравнений в конечной системе.

Прежде всего определим влияние прозрачности слоя на направленные свойства излучателя. На рис. 21 представлены диаграммы направленности при четвертьволновом слое и различных значениях m , характеризующих отношение волновых сопротивлений. Вычисления проведены при следующих значениях геометрических и волновых параметров: $2r_0/\lambda = 0,7$, $r_1/r_0 = 1,01$, $d_\lambda = \frac{r_2 - r_1}{\lambda_1} = 0,25$.

Здесь λ и λ_1 — длина волны звука соответственно в акустической среде и в материале слоя. Кривая 1 характеризует диаграмму направленности системы с акустическим мягким слоем. Кривые 2, 3, 4 и 5 соответствуют значениям m , равным $2,8 \cdot 10^{-4}$; $6,6 \cdot 10^{-2}$; $1,45 \cdot 10^{-1}$ и 0,3. Как следует из данных, увеличение прозрачности слоя прежде всего сказывается на повышении тыльного уровня излучения. Если при $m \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$ диаграмма направленности практически совпадает с диаграммой, рассчитанной для абсолютно мягкого слоя (ср. кривые 1 и 2), то уже при $m \approx 10^{-2}$ она заметно изменяется и тыльное излучение возрастает почти в два раза.

Приведенные данные относились к случаю, когда звукопрозрачность слоя близка к минимальной, поскольку $d_\lambda = \frac{r_2 - r_1}{\lambda_1} = 0,25$.

Теперь целесообразно определить, какую роль играет толщина слоя.

Ответ на этот вопрос дает рис. 22, на котором представлены зависимости тыльного уровня излучения $R(\pi)$ от волновой толщины слоя. Исходные значения геометрических параметров здесь такие же, как и при построении кривых на рис. 21. Кривая 1 соответствует случаю мягкого слоя, а кривые 2—5 — указанной выше последовательности отношений волновых сопротивлений m . Как видно, общий уровень $R(\pi)$ растет с увеличением m при любом значении волновой толщины слоя. При малых значениях d_λ величина $R(\pi)$ возрастает за счет снижения звукоизоляции слоя и повышения вклада дифрагированных на излучателе волн. В области $d_\lambda \approx 0,25 \div 0,35$ наблюдается минимум $R(\pi)$ — здесь звукоизоляция слоя максимальна. В дальнейшем величина $R(\pi)$ растет за счет снижения звукоизоляции слоя, в области $d_\lambda = 0,5$ достигает максимального значения, после чего снова падает. Таким образом, зависимость тыльного уровня излучения цилиндра от волновой толщины слоя качественно аналогична зависимостям коэффициента прохождения звука через замкнутый кольцевой и плоский слой (см. рис. 9).

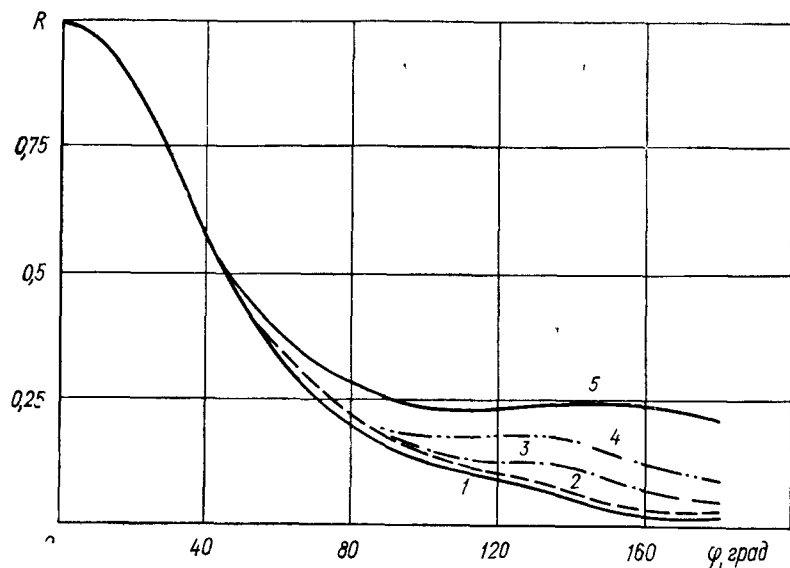


Рис 21

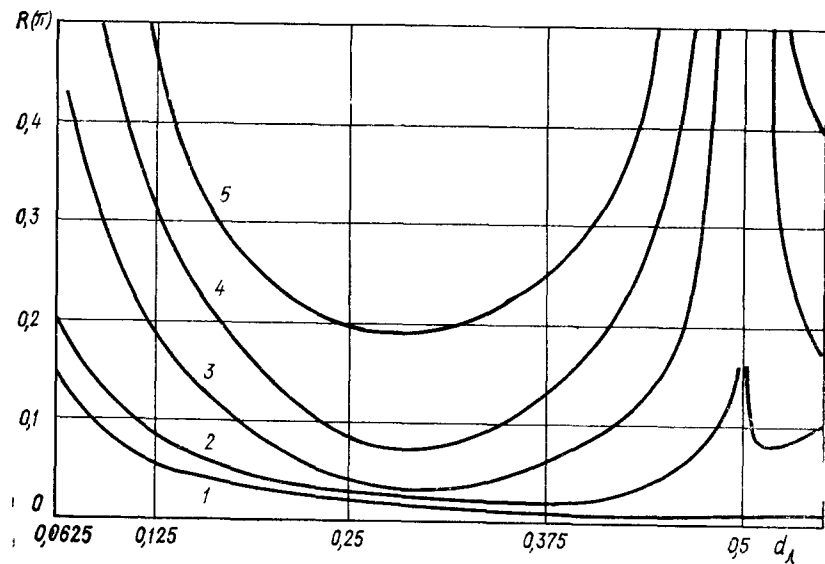


Рис 22

Приведенные выше данные ограничивались случаем, когда зазор между цилиндром и слоем был весьма мал и составлял 1 % радиуса цилиндра. Теперь исследуем влияние этого зазора на дальнее поле излучателя. Для этого обратимся к рис 23, на котором приведен ряд диаграмм направленности при зазорах различной ширины. Волновые размеры излучателя $2r_0/\lambda = 1$, волновая толщина слоя

$d_\lambda = 0,35$, а отношение волновых сопротивлений сред $m = 2,8 \times 10^{-4}$, т. е. слой можно считать практически акустически мягким. Зазор r_1/r_0 последовательно принимался равным 1,01; 1,2 и 1,5 (соответственно кривые 1, 2 и 3). Как видно, увеличение зазора приводит к искажениям формы диаграммы направленности главным образом в области углов $|\varphi| \leq \pi/2$. На уровень тыльного излучения

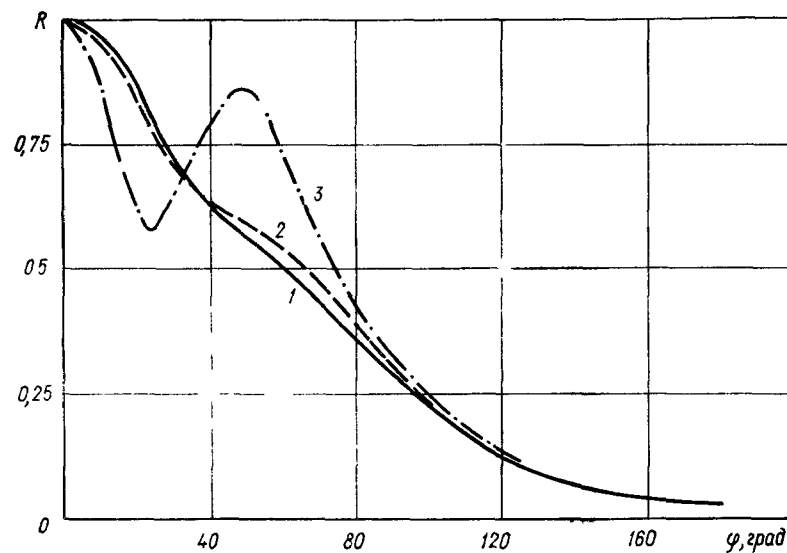


Рис 23

величина зазора практически не влияет. Эта особенность обусловлена тем, что при больших зазорах и незначительной прозрачности слоя более существенную роль начинает играть звуковая энергия, излучаемая поверхностью цилиндра под слоем, которая «вытекает» через щели $\varphi = \pm \varphi_0$, $r_0 \leq r \leq r_1$.

Практическая возможность реализации излучающих систем, описанных выше, может быть связана с использованием в качестве экранирующего цилиндра слоя гибкой оболочки, заполненной воздухом. Естественно, что в этом случае свойства системы будут зависеть от величины гидростатического давления, поскольку с его изменением будут меняться как геометрические размеры слоя, так и акустические свойства заполнителя. Предлагаемая расчетная схема позволяет оценить изменение звукоизоляции незамкнутого кольцевого слоя (и соответственно поля излучателя) при воздействии статического давления. На рис. 24 представлена зависимость, характеризующая эффективность подавления тыльного излучения цилиндра слоем воздуха при наличии статического давления P_0 ; здесь предполагается, что при начальном значении $P_0 = 10^5$ Па толщина слоя $d_\lambda = 0,25$, $\frac{2r_0}{\lambda} = 0,7$, $r_1/r_0 = 1,01$. Как и следовало ожидать, с ростом статического давления уровень тыльного излучения возрастает, поскольку

ку сжатие воздуха приводит к уменьшению толщины слоя и увеличению его волнового сопротивления.

Перейдем к исследованию импеданса излучения цилиндра. На рис. 25 представлены частотные зависимости безразмерных активной R (рис. 25, а) и реактивной X (рис. 25, б) составляющих импеданса излучения цилиндра с $2r_0/\lambda = 0,7$, $r_1/r_0 = 1,01$ при значениях m , равных $2,8 \cdot 10^{-4}$; $6,6 \cdot 10^{-2}$ и $1,45 \cdot 10^{-1}$ (соответственно кривые 1, 2 и 3). Для упрощения анализа этих данных на оси абсцисс нанесены также значения волновой

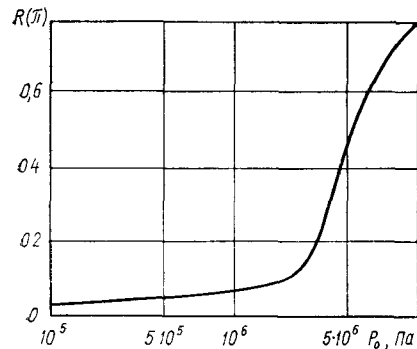


Рис. 24

толщины слоя. Характеризуя величину R , можно сказать, что ее общий уровень снижается с ростом m , особенно резко в районе $d_\lambda \approx 0,5$. Интересными особенностями отличается также частотная зависимость величины X . Как следует из рис. 25, б, при $d_\lambda = 0,25$ X с ростом $\rho_1 c_1 / \rho c$ уменьшается, а при $0,25 \leq d_\lambda \leq 0,5$, наоборот, увеличивается. В области, близкой к $d_\lambda = 0,5$, величина X достигает максимального значения, после чего ее значение резко уменьшается и

меняет свой знак, достигая минимума. В дальнейшем снова наблюдается рост X и смена знака. Объясним такое своеобразное поведение X .

Будем условно считать, что $X = X_1 + X_2$; здесь величина X_1 определена на открытой части поверхности цилиндра $|\varphi| \leq \varphi_0$, а X_2 — под слоем $\varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi$. Как было определено в параграфах 2 и 3, X_1 всегда имеет характер массы и описывается кривой, обозначенной на рис. 25 крестиками. Величина X_2 , равная в данном случае X (см. рис. 8, б), существенно зависит от волновой толщины слоя и принимает попеременно характер массы и упругости. Если теперь сложим алгебраически на каждой частоте ординаты кривой 1 на рис. 8, б с ординатами кривой, обозначенной на рис. 25, б крестиками, то в результате получим кривую 2 на рис. 25, б.

Таким образом, ход частотной зависимости реактивной составляющей импеданса излучения цилиндра с незамкнутым кольцевым слоем определяется резонансными явлениями, имеющими место в своеобразном механическом контуре, образованном механическими параметрами слоя, присоединенной массой окружающей среды на внешней поверхности слоя $r = r_2$, $\varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi$ и присоединенной массой среды на открытом участке поверхности цилиндра $r = r_0$, $|\varphi| \leq \varphi_0$. На основании изложенного выше анализа можно также объяснить причину резкого уменьшения величины R в области $d_\lambda \approx 0,5$. При этой толщине слоя имеет место антирезонанс (параллельный резонанс) указанного выше механического контура и среднее значение звукового давления у поверхности цилиндра становится минимальным. В результате наблюдается парадоксальное явление —

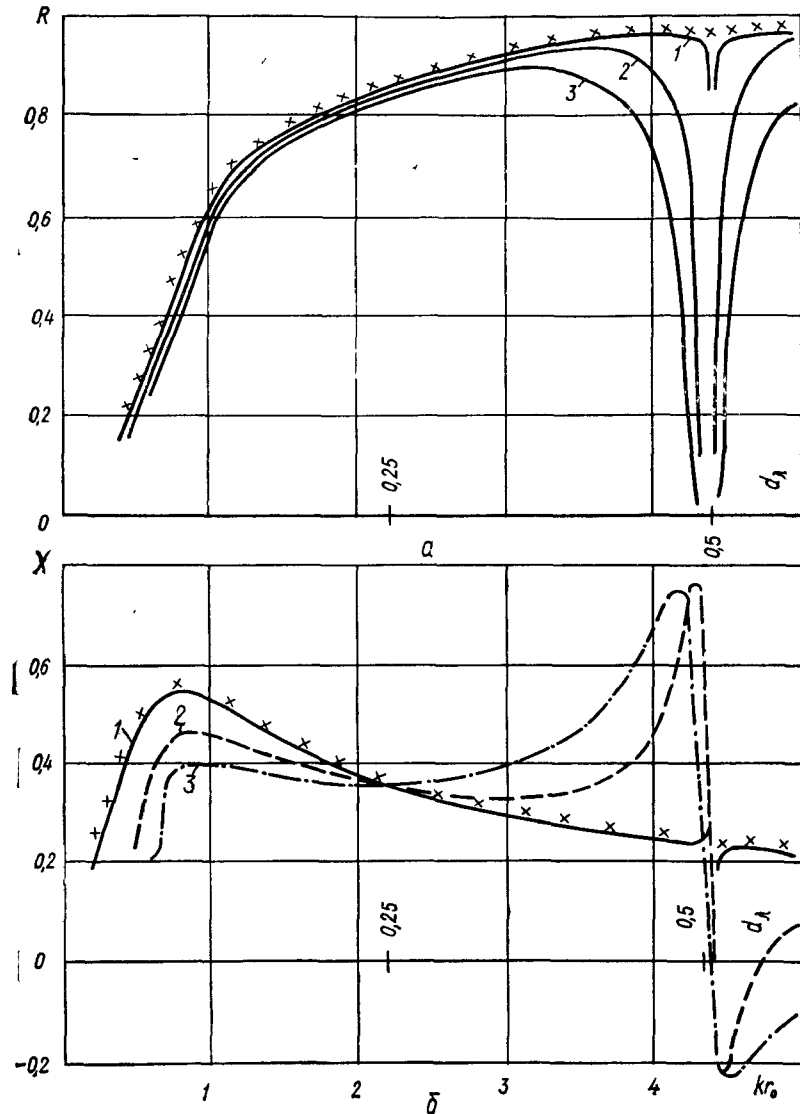


Рис. 25

при полной прозрачности слоя имеет место незначительная эффективность излучения цилиндром звуковой энергии.

Остановимся на вопросе, связанном с влиянием зазора между цилиндром и слоем на величины R и X . При относительно малых волновых размерах зазора, когда $r_1/r_0 \leq 1,1$, значения R и X мало отличаются от таковых для $r_1/r_0 = 1,01$ (рис. 25). Наиболее существенные изменения R и X происходят при больших значениях r_1/r_0 , когда волновая ширина зазора $(r_1 - r_0)/\lambda$ находится в области 0,25. При

этом R и $|X|$ могут принимать значения, существенно превышающие единицу, а величина X может менять знак. Указанные особенности поведения импеданса излучения цилиндра обусловлены наличием в зазоре стоячей волны (результат взаимодействия прямой волны, излучаемой цилиндром, и отраженной от слоя волны). Когда волновая ширина зазора достигает значения, близкого 0,25, на участке поверхности цилиндра под слоем наблюдается резкое повышение звукового давления и, следовательно, импеданса излучения. В этом случае импеданс излучения цилиндра практически полностью определяется волновыми процессами, происходящими в зазоре.

5. Звуковое поле конечного цилиндра, расположенного между цилиндрическими экранами

В предыдущих параграфах рассмотрен ряд излучающих систем с активным элементом в виде бесконечного цилиндра. Такая расчетная модель позволяет определить ряд практически интересных зависимостей между геометрическими характеристиками элементов излу-

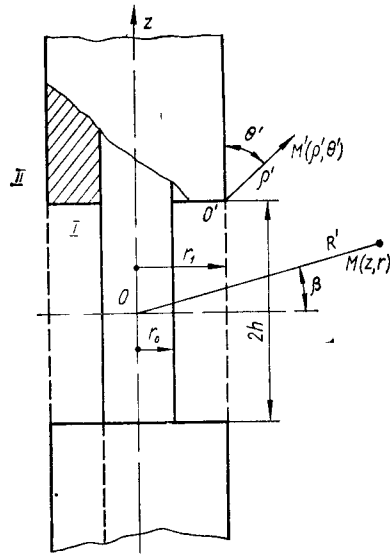


Рис 26

чателя и свойствами звукового поля. Конечно, оценки возможностей такой модели и ответы на ряд вопросов, которые она не может разрешить, можно получить при анализе звукового поля конечного цилиндра. Задача об излучении звука конечным цилиндром именно в связи со своей практической значимостью привлекала внимание большого числа исследователей [4, 90, 97]. В принципе строгое описание звукового поля вне цилиндра конечной длины может быть получено в рамках метода частичных областей. Однако при количественной интерпретации общих формул возникают некоторые трудности, которые будут обсуждены несколько позже. Здесь же рассмотрим излучающую систему в виде конечного цилиндра, но дополненного

по торцам полубесконечными цилиндрами. Такая задача может быть рассмотрена в рамках метода частичных областей без каких-либо трудностей.

Геометрия рассматриваемой излучающей системы представлена на рис. 26. Будем полагать, что на поверхности цилиндра $r = r_0$ при $|z| \leq h$ задано некоторое распределение колебательной скорости

$$v_r = v_0 f(z); \quad |z| \leq h, \quad r = r_0. \quad (2.52)$$

Звуковое поле будет изучаться для двух типов материалов экранов — акустически мягкого

и акустически жесткого

$$\begin{aligned} p &= 0, \quad |z| = h, \quad r_0 \leq r \leq r_1; \\ p &= 0; \quad |z| \geq h, \quad r = r_1 \end{aligned} \quad (2.53)$$

и акустически жесткого

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\rho c} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \quad |z| = h, \quad r_0 \leq r \leq r_1; \\ \frac{1}{i\rho c} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \quad |z| \geq h, \quad r = r_1. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Весь объем, занятый акустической средой, разбивается на две области: область I ($|z| \leq h, r_0 \leq r \leq r_1$) и область II ($|z| < \infty, r \geq r_1$). При проведении конкретных выкладок будем предполагать, что функция $f(z)$ в выражении (2.52) симметрична, т. е. $f(z) = f(-z)$. Для удобства в последующем изложении введем безразмерные координаты $\gamma = \frac{r}{r_1}, \zeta = \frac{z}{r_1}, \eta = \frac{h}{r_1}$. Общее решение уравнения Гельмгольца в указанных выше областях можно представить в виде ряда и интеграла Фурье:

$$\begin{aligned} p_1 &= -i\omega\rho \sum_{n=1}^{\infty} [A_n L_0(k_n r) + B_n M_0(k_n r)] \cos \alpha_n \zeta; \\ p_2 &= -i\omega\rho \int_0^{\infty} D(\tau) G_0(s\gamma) \cos \tau \zeta d\tau, \end{aligned} \quad (2.55)$$

где

$$k = \frac{2\pi r_1}{\lambda}; \quad k_n = |k^2 - \alpha_n^2|^{1/2}; \quad s = |k^2 - \tau^2|^{1/2},$$

$$\begin{aligned} G_0(\gamma s) &= \begin{cases} H_0^{(1)}(s\gamma), & k > \tau, \\ K_0(s\gamma), & k < \tau; \end{cases} \quad L_0(k_n r) = \begin{cases} J_0(k_n r), & k > \alpha_n, \\ I_0(k_n r), & k < \alpha_n; \end{cases} \\ M_0(k_n r) &= \begin{cases} N_0(k_n r), & k > \alpha_n, \\ K_0(k_n r), & k < \alpha_n, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.56)$$

с использованием общепринятого изображения функций Бесселя.

Рассмотрим вначале случай акустически мягких накладок. Граничные условия на торцах области I будут тождественно удовлетворены, если принять $\alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2\eta}$. Условия для колебательной скорости на поверхности $\gamma_0 = r_0/r_1$ позволяют установить связь между искомыми коэффициентами A_n и B_n . С учетом этой связи выражение для давления в первой области приобретает вид

$$p_1 = -i\omega\rho \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Delta(k_n \gamma) \cos \alpha_n \zeta - \sum_{n=1}^{\infty} v_0 r_1 f_n \frac{M_0(k_n \gamma)}{M_0(k_n \gamma_0)} \cos \alpha_n \zeta, \quad (2.57)$$

где

$$b_n = \frac{A_n}{M_0(k_n \gamma_0)}, \quad \Delta(k_n \gamma) = M_0(k_n \gamma_0) L_0(k_n \gamma) - L_0(k_n \gamma_0) M_0(k_n \gamma), \quad (2.58)$$

f_n — коэффициенты разложения функции $f(z)$ в выражениях (2.52) в ряд Фурье по системе $\cos \alpha_n \xi$, а штрих у знака функции указывает на дифференцирование по γ .

Для определения оставшихся неизвестных b_n и $D(\tau)$ используем два условия сопряжения на границе раздела частичных областей. При этом условие по скоростям дает функциональное уравнение на конечном интервале $|\xi| \leq \eta$. Его преобразование к алгебраическим соотношениям производится на основе использования ортогональности и полноты системы $\cos \alpha_n \xi$. Условия сопряжения по давлению вместе с граничными условиями на экранирующих цилиндрах составляют единое функциональное уравнение на бесконечном интервале $|\xi| < \infty$. Его обращение осуществляется с использованием свойств интеграла Фурье. При этом получаем следующую систему соотношений для определения неизвестных x_n и $d(\tau)$:

$$d(\tau) \frac{G_0(s)}{G'_0(s)} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n(\tau) - v_0 r_1 \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{M_0(k_n)}{M'_0(k_n \gamma_0)} a_n(\tau); \quad (2.59)$$

$$x_n \frac{\Delta'(k_n)}{\Delta(k_n)} = \frac{2}{\eta} \int_0^{\eta} d(\tau) a_n(\tau) d\tau + v_0 r_1 f_n \frac{M'_0(k_n)}{M'_0(k_n \gamma_0)},$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta'(k_n) &= M'_0(k_n \gamma_0) L'_0(k_n) - L'_0(k_n \gamma_0) M'_0(k_n); \\ a_n(\tau) &= \frac{(-1)^{n+1} \alpha_n \cos \tau \eta}{\alpha_n^2 - \tau^2}; \quad a_n(\alpha_n) = -\eta/2; \\ d(\tau) &= D(\tau) G'_0(s); \quad x_n = b_n \Delta(k_n). \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

В параграфе 2 описан общий метод решения бесконечных систем, основывающийся на использовании известных локальных свойств звуковых полей в окрестности угловых точек. Этот метод в полной мере может быть использован применительно к системе (2.59).

При исследовании рабочих характеристик рассматриваемой излучающей системы необходимо получить распределение колебательной скорости и звукового давления в раскрыве ($r = r_1$, $|z| \leq h$). В этом случае излучатель (конечный цилиндр радиуса r_0) связан с внешней областью через волновод, образованный параллельными торцовыми стенками экранирующих цилиндров.

Анализ асимптотических свойств неизвестных в системе (2.59) основывается на свойствах колебательной скорости в окрестности ребра $r = r_1$, $z = \pm h$. Для описания колебательной скорости в окрестности этой точки введем локальную систему координат γ' , θ' с центром в точке O' . На расстоянии, значительно меньшем длины волны от точки O' , звуковое поле в окрестности этой точки описывается следующим решением уравнения Лапласа:

$$p' = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n (\gamma')^{\frac{2}{3}n} \sin\left(\frac{2}{3} n \theta'\right). \quad (2.61)$$

Составляющие вектора скорости, отвечающие давлению (2.61), имеют вид:

$$v_{\gamma'} = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n i \rho \omega \frac{2}{3} n (\gamma')^{\left(\frac{2}{3}n-1\right)} \sin\left(\frac{2}{3} n \theta'\right); \quad (2.62)$$

$$v_{\theta'} = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n i \rho \omega \frac{2}{3} n (\gamma')^{\frac{2}{3}n-1} \cos\left(\frac{2}{3} n \theta'\right).$$

На поверхностях $\theta' = 0$ и $\theta' = \pi$ значение $v_{\theta'}$ должно в окрестности ребра совпадать (с точностью до знака) с радиальной составляющей скорости, определяемой из выражений (2.55). Учитывая характер первых слагаемых в выражениях (2.62) и симметрию поля скоростей, распределение колебательной скорости в раскрыве $\gamma = 1$, $|\xi| \leq h$ представим в виде

$$v_r(\gamma = 1) = A(\eta^2 - \xi^2)^{-1/2} + \Phi(\xi), \quad (2.63)$$

где $\Phi(\xi)$ — некоторая гладкая функция.

Представим слагаемое с особенностью в (2.63) бесконечным рядом по системе функций $\cos \alpha_n \xi$:

$$A(\eta^2 - \xi^2)^{-1/2} = A \frac{\sqrt{\pi}}{\eta} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\eta}{\alpha_n}\right)^{1/2} J_{1/2}(\alpha_n \eta) \cos \alpha_n \xi. \quad (2.64)$$

При вычислении коэффициентов этого ряда использовано значение интеграла [63]:

$$\int_0^{\eta} (\eta^2 - \xi^2)^{-1/2} \cos \alpha_n \xi d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2\eta}{\alpha_n}\right)^{1/2} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) J_{1/2}(\alpha_n \eta). \quad (2.65)$$

Исходя из выражения (2.57) с учетом проведенных замен, получаем следующее представление для радиальной составляющей колебательной скорости при $\gamma = 1$:

$$v_r(\gamma = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{\Delta'(k_n)}{\Delta(k_n)} \cos \alpha_n \xi - v_0 r_1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{M'_0(k_n)}{M'_0(k_n \gamma_0)} \cos \alpha_n \xi. \quad (2.66)$$

Поскольку второй ряд в формуле (2.66) представляет собой гладкую функцию, то для того, чтобы это выражение правильно отражало качественные особенности в распределении колебательной скорости при $\gamma = 1$, необходимо выполнение такого равенства:

$$x_n \frac{\Delta'(k_n)}{\Delta(k_n)} = A \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2\eta}{\alpha_n}\right)^{1/2} J_{1/2}(\alpha_n \eta) + O(\alpha_n^{-1/2}). \quad (2.67)$$

Поскольку для больших значений n имеем $\frac{\Delta'(k_n)}{\Delta(k_n)} = \alpha_n + O(1)$, то из этого равенства следует

$$x_n = A \frac{\sqrt{\pi}}{\eta \alpha_n} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2\eta}{\alpha_n}\right)^{1/2} J_{1/2}(\alpha_n \eta) + O(\alpha_n^{-1/2}). \quad (2.68)$$

Оценки асимптотического поведения (2.68) коэффициентов бесконечного ряда (2.57) получены на основе известных локальных свойств поля скоростей в окрестности ребра. Теперь, используя выражение (2.68), можем убедиться, что бесконечная система (2.59) действительно допускает решение с асимптотическими свойствами типа (2.68). При этом получаем и асимптотические оценки для $d(\tau)$.

Используя асимптотические представления для функций Бесселя, легко убедиться, что асимптотическое равенство (2.68) можно записать в двух эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} x_n &= A \frac{\sqrt{\pi}}{\eta \alpha_n} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2\eta}{\alpha_n}\right)^{1/6} J_{1/6}(\alpha_n \eta) + O(\alpha_n^{-5/3}); \\ x_n &= A \frac{\sqrt{\pi}}{2\eta^2} \sqrt{3} \Gamma(2/3) \left(\frac{2\eta}{\alpha_n}\right)^{7/6} J_{7/6}(\alpha_n \eta) + O(\alpha_n^{-5/3}). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Принимая во внимание второе из этих равенств, находим, что при больших значениях τ имеет место равенство

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n(\tau) = A \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}\eta} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2\eta}{\tau}\right)^{7/6} J_{7/6}(\tau\eta) + O(\tau^{-2}). \quad (2.70)$$

Учитывая, что при больших значениях τ $G_0(s)/G_0(s) = -\frac{1}{\tau} + O(\tau^{-2})$, находим следующее асимптотическое представление для неизвестной функции $d(\tau)$:

$$d(\tau) = -A \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}\eta} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \tau \left(\frac{2\eta}{\tau}\right)^{7/6} J_{7/6}(\tau\eta) + O(\tau^{-1}). \quad (2.71)$$

Использование асимптотических представлений для функций Бесселя дает возможность и в данном случае получить эквивалентное (2.71) в главной части асимптотическое равенство

$$d(\tau) = A \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2\eta}{\tau}\right)^{1/6} \{J_{1/6}(\tau\eta) - 2N_{1/6}(\tau\eta)\} + O(\tau^{-1}). \quad (2.72)$$

Рассмотрим интеграл, стоящий в правой части второго равенства системы (2.59). Учитывая, что

$$a_n(\tau) = \int_0^{\eta} \cos \alpha_n \xi \cos \tau \xi d\xi,$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{2}{\eta} \int_0^{\infty} d(\tau) a_n(\tau) d\tau &= \frac{2}{\eta} A \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(2/3) \int_0^{\eta} \cos \alpha_n \xi \times \\ &\times \int_0^{\infty} \left(\frac{2\eta}{\tau}\right)^{1/6} \{J_{1/6}(\tau\eta) - 2N_{1/6}(\tau\eta)\} \cos \tau \xi d\tau d\xi + O(\alpha_n^{-5/3}). \end{aligned}$$

С помощью значений следующих интегралов при $\nu = \frac{1}{6}$ [29]:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2\eta}{\tau}\right)^{\nu} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) J_{\nu}(\tau\eta) \cos \tau \xi d\tau &= \begin{cases} (\eta^2 - \xi^2)^{\nu-1/2}, & |\xi| < \eta, \\ 0, & |\xi| > \eta; \end{cases} \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2\eta}{\tau}\right)^{\nu} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) N_{-\nu}(\tau\eta) \cos \tau \xi d\tau &= \begin{cases} 0, & |\xi| < \eta, \\ -(\xi^2 - \eta^2)^{\nu-1/2}, & |\xi| > \eta \end{cases} \end{aligned} \quad (2.73)$$

получаем из второго уравнения системы (2.59)

$$x_n \frac{\Delta'(k_n)}{\Delta(k_n)} = A \frac{\sqrt{\pi}}{\eta} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2\eta}{\alpha_n}\right)^{1/6} J_{1/6}(\alpha_n \eta) + O(\alpha_n^{-5/3}). \quad (2.74)$$

Учитывая, что с ростом n имеет место равенство $\Delta'(k_n)/\Delta(k_n) = \alpha_n + O(1)$, убеждаемся, что равенство (2.74) тождественно первому равенству в системе (2.68). Этим, по существу, заканчивается доказательство того, что система (2.59) действительно обладает таким решением, асимптотические свойства которого правильно отображают характер особенности колебательной скорости в окрестности угловых точек.

На первый взгляд проведенные выше выкладки носят сугубо формальный характер. Однако при более внимательном анализе обнаруживается, что эти результаты в достаточной мере отражают физические особенности изучаемого поля. Чтобы показать это, вернемся снова к описываемому соотношениями (2.62) распределению колебательной скорости в окрестности угловой точки. Анализ выражения для v_{θ} позволяет установить, что в рассматриваемой задаче должно выполняться равенство

$$\lim_{\xi \rightarrow \eta+0} v_{\theta}(\rho=1) = 2 \lim_{\xi \rightarrow \eta-0} v_{\theta}(\rho=1). \quad (2.75)$$

Используя асимптотическое равенство (2.72) и значение интегралов (2.73), можем убедиться, что из выражения (2.55) для p_2 действительно следует равенство (2.75). Это свидетельствует о том, что в процессе проведенных выше выкладок не только был учтен характер особенности колебательной скорости в угловой точке, но и правильно отражено угловое распределение ее в окрестности этой точки.

После того как установлено существование решения системы (2.59) с нужными свойствами, естественно, возникает вопрос о построении алгоритма, позволяющего эффективно находить это решение. При ответе на этот вопрос будем использовать известные асимптотические свойства неизвестных.

Выражения (2.69), (2.71) и (2.72) содержат некоторую постоянную A . К сожалению, мы не можем указать способа точного определения этой постоянной, и задача заключается в том, чтобы указать способ ее приближенного определения при решении некоторой конечной системы, эквивалентной системе (2.55). Если, начиная с некоторого значения $n \geq N$, при оценке характеристик поля достаточную точность обеспечивают главные члены в асимптотических равенствах (2.69), то представляется естественным определить величину A через

значение неизвестной x_N с помощью равенства

$$x_N = A \frac{\sqrt{3\pi}}{2\eta^2} \Gamma(2/3) \left(\frac{2\eta}{\alpha_N} \right)^{2/3} J_{1/6}(\alpha_N \eta). \quad (2.76)$$

Тогда во всех последующих выкладках можно положить

$$A = x_N \frac{2\eta^2}{\sqrt{3\pi}} \left(\frac{\alpha_N}{2\eta} \right)^{2/3} [(\Gamma(2/3) J_{1/6}(\alpha_N \eta))]^{-1}. \quad (2.77)$$

Такое определение величины A по существу означает следующий алгоритм решения системы (2.59) Бесконечная система заменяется конечной, содержащей N первых неизвестных x_n и значение неизвестной функции $d(\tau)$ на некотором интервале $0 \leq \tau \leq T$, но x_n ($n > N$) и $d(\tau)$ ($\tau > T$) не полагаются равными нулю, а заменяются приближенно главными членами их асимптотических представлений. При таком подходе вместо бесконечной системы (2.59) получаем следующую эквивалентную ей конечную систему.

$$d(\tau) \frac{G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N (x_n - \tilde{x}_n) a_n(\tau) + \frac{\eta}{\pi} x_N \left(\frac{\alpha_N}{\eta} \right)^{2/3} \frac{J_{1/6}(\tau\eta)}{J_{1/6}(\alpha_N \eta)} - \frac{2}{\pi} v_0 r_1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{M_0(k_n)}{M_0'(k_n \rho_0)} a_n(\tau); \quad (2.78)$$

$$x_n \frac{\Delta'(k_n)}{\Delta(k_n)} = \frac{2}{\eta} \int_0^T [d(\tau) - \tilde{d}(\tau)] a_n(\tau) d\tau + x_N \frac{\sqrt{3}}{3} \alpha_N \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_n} \right)^{2/3} \times \\ \times \frac{J_{1/6}(\alpha_N \eta)}{J_{1/6}(\alpha_n \eta)} + v_0 r_1 f_n \frac{M_0(k_n)}{M_0'(k_n \rho_0)},$$

где

$$\tilde{x}_N = x_N \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_n} \right)^{2/3} \frac{J_{1/6}(\alpha_N \eta)}{J_{1/6}(\alpha_n \eta)},$$

$$\tilde{d}(\tau) = \frac{\eta \sqrt{3}}{3\pi} x_N \alpha_N \left(\frac{\alpha_N}{\tau} \right)^{2/3} \frac{1}{J_{1/6}(\alpha_N \eta)} [J_{1/6}(\tau\eta) - 2N_{-1/6}(\tau\eta)] \quad (2.79)$$

Зная асимптотические свойства коэффициентов рядов и плотностей интегральных представлений в выражении (2.55), можно получить удобные для вычислений формулы в любой точке существования поля. Наихудшая сходимость соответствующих рядов и интегралов наблюдается на поверхности раздела частичных областей. В связи с этим приведем соответствующие выражения для потенциала скорости и радиальной составляющей колебательной скорости на этой поверхности, полученные путем выделения и представления в замкнутом виде соответствующих медленно сходящихся частей рядов и интег-

ралов

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \sum_{n=1}^N (x_n - \tilde{x}_n) \cos \alpha_n \xi + x_N \left(\frac{\alpha_N}{2\eta} \right)^{2/3} \frac{\eta (\eta^2 - \xi^2)^{1/6}}{\sqrt{\pi} \Gamma(5/3) J_{1/6}(\alpha_N \eta)} - \\ &- v_0 r_1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{M_0(k_n)}{M_0'(k_n \rho_0)} \cos \alpha_n \xi; \\ v_1 &= \sum_{n=1}^N \left[x_n \frac{\Delta'(k_n)}{\Delta(k_n)} - \tilde{x}_n^{(1)} \alpha_n \right] \cos \alpha_n \xi - \\ &- v_0 r_1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{M_0(k_n)}{M_0'(k_n \rho_0)} \cos \alpha_n \xi + \frac{x_N}{\sqrt{3}} \left(\frac{\alpha_N}{2\eta} \right)^{2/3} \frac{\alpha_N \eta (\eta^2 - \xi^2)^{-1/6}}{\sqrt{\pi} \Gamma(2/3) J_{1/6}(\alpha_N \eta)}; \\ \Phi_2 &= \int_0^T \left[d(\tau) \frac{G_0(s)}{G_0'(s)} + \frac{1}{\tau} d_1(\tau) \right] \cos \tau \xi d\tau + \\ &+ \begin{cases} x_N \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\alpha_N}{2\eta} \right)^{2/3} \frac{(\eta^2 - \xi^2)^{1/6}}{\Gamma(5/3) J_{1/6}(\alpha_N \eta)}, & |\xi| \leq \eta, \\ 0, & |\xi| > \eta; \end{cases} \\ v_2 &= \int_0^T [d(\tau) - \tilde{d}(\tau)] \cos \tau \xi d\tau + \frac{x_N}{\sqrt{3}} \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\alpha_N}{2\eta} \right)^{2/3} \times \\ &\times \frac{\alpha_N}{\Gamma(2/3) J_{1/6}(\alpha_N \eta)} \begin{cases} (\eta^2 - \xi^2)^{-1/6}, & |\xi| < \eta, \\ 2(\xi^2 - \eta^2)^{-1/6}, & |\xi| > \eta. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

Здесь кроме принятых в (2.79) обозначений введем следующие новые:

$$\tilde{x}_n^{(1)} = \frac{x_N}{\sqrt{3}} \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_n} \right)^{2/3} \frac{J_{1/6}(\alpha_N \eta)}{J_{1/6}(\alpha_n \eta)}; \quad (2.81)$$

$$\tilde{d}_1(\tau) = -x_N \frac{2}{\pi} \left(\frac{\alpha_N}{\tau} \right)^{2/3} \tau \frac{J_{1/6}(\tau\eta)}{J_{1/6}(\alpha_N \eta)}.$$

Все выкладки, проведенные выше, касались случая, когда торцовые экраны были выполнены из акустически мягкого материала, т.е. когда имели место граничные условия (2.53). Теперь рассмотрим случай, когда торцовые экраны акустически жесткие. Поскольку схема решения задачи в этом случае аналогична рассмотренной выше, приведем только основные соотношения, а промежуточные выкладки опустим.

Для удовлетворения условий (2.54), очевидно, необходимо положить

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{\eta} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (2.82)$$

Функциональные уравнения, объединяющие условия непрерывности поля на границе раздела областей I и II и граничное условие

(2.54), примут вид

$$\frac{\partial p_2}{\partial \gamma} = \begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial \gamma}, & |\xi| \leq \eta, \quad \gamma = 1, \\ 0 & |\xi| > \eta, \quad \gamma = 1; \end{cases} \quad (2.83)$$

$$p_2 = p_1, \quad |\xi| \leq \eta, \quad \gamma = 1.$$

Алгебраизация последних уравнений приводит к следующей системе:

$$d(\tau) \frac{G'_0(s)}{G_0(s)} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \tilde{a}_n(\tau) - v_0 r_1 \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{M'_0(k_n)}{M'_0(k_n \gamma_0)} \tilde{a}_n(\alpha_n), \quad (2.84)$$

$$x_n \frac{\Delta(k_n)}{\Delta'(k_n)} = \frac{2}{\eta} \int_0^{\infty} d(\tau) \tilde{a}_n(\tau) d\tau + v_0 r_1 f_n \frac{M_0(k_n)}{M_0(k_n \gamma_0)},$$

где

$$\tilde{a}_n(\tau) = (-1)^n \tau \sin \tau \eta / (\alpha_n^2 - \tau^2), \quad \tilde{a}_n(\alpha_n) = \begin{cases} -\eta, & n = 0, \\ -\frac{1}{2} \eta, & n \neq 0. \end{cases}$$

На этом закончим решение задачи и приступим к количественному анализу поля излучения.

Определим дальнейшее поле цилиндрического излучателя с акустически мягким экраном. Для этого выразим величину $d(\tau)$ через x_n из первого уравнения системы (2.59) и подставим ее в выражения (2.55). С учетом соотношения $2 \cos \tau \xi = e^{i\tau \xi} + e^{-i\tau \xi}$ нетрудно получить

$$p_2 = i\omega \rho_0 \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[x_n - v_0 r_1 f_n \frac{M_0(k_n)}{M'_0(k_n \gamma_0)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} a_n(\tau) e^{i\tau \xi} \frac{G_0(s\gamma)}{G_0(s)} d\tau \quad (2.85)$$

Рассмотрим несобственный интеграл в этом выражении. Производя замену переменной

$$\tau = k_1 \sin \alpha, \quad \alpha = \alpha' + i\alpha'', \quad (2.86)$$

а также учитывая известное равенство $K_0(x) = i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(ix)$, можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_n(\tau) e^{i\tau \xi} \frac{G_0(s\gamma)}{G_0(s)} d\tau = \int_{\Gamma} a_n(k_1 \sin \alpha) \cos \alpha e^{ik_1 \xi \sin \alpha} \frac{H_0^{(1)}(k_1 \gamma \cos \alpha)}{H_0^{(1)}(k_1 \cos \alpha)} d\alpha, \quad (2.87)$$

где Γ — контур Зоммерфельда.

При изучении дальнего поля излучателя правомерна замена функций Ханкеля в выражениях (2.55) их асимптотическими представлениями для больших значений аргумента. Учитывая такие пред-

ставления, получаем:

$$\int_{\Gamma} a_n(k_1 \sin \alpha) \cos \alpha e^{ik_1 \xi \sin \alpha} \frac{H_0^{(1)}(k_1 \gamma \cos \alpha)}{H_0^{(1)}(k_1 \cos \alpha)} d\alpha = \left(\frac{2k_1}{\pi \gamma} \right)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\Gamma} a_n(k_1 \sin \alpha) \sqrt{\cos \alpha} \frac{e^{ik_1(\gamma \cos \alpha + \xi \sin \alpha)}}{H_0^{(1)}(k_1 \cos \alpha)} d\alpha. \quad (2.88)$$

В работе [177] показано, что интеграл такого типа, как в выражении (2.88), может быть вычислен методом перевала. Используя результаты, приведенные в работе [177], можно показать, что

$$\int_{\Gamma} a_n(k_1 \sin \alpha) \sqrt{\cos \alpha} \frac{e^{ik_1(\gamma \cos \alpha + \xi \sin \alpha)}}{H_0^{(1)}(k_1 \cos \alpha)} d\alpha = ik_1 \frac{e^{ik_1 R'}}{R'} \frac{a_n(k_1 \sin \beta)}{H_0^{(1)}(k_1 \cos \beta)}, \quad (2.89)$$

где β — угол между отрезком R' (рис. 26) и плоскостью нормальной оси z ; R' — расстояние между началом координат и точкой M , в которой нужно определить поле.

Имея в виду выражения (2.56), (2.85) и (2.89), дальнейшее поле излучателя с акустически мягкими торцовыми экранами с точностью до постоянной выразим следующей формулой:

$$p_2 \approx \frac{e^{ikR}}{R'} \frac{1}{H_0^{(1)}(kr_1 \cos \beta)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \cos(kh \sin \beta)}{(kh \sin \beta)^2 - \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi \right]^2}, \quad (2.90)$$

где

$$\varepsilon_n = (-1)^{n+1} \alpha_n \left[x_n - v_0 r_1 f_n \frac{M_0(k_n)}{M'_0(k_n \gamma_0)} \right].$$

Производя выкладки, аналогичные приведенным, нетрудно показать, что в случае акустически жестких экранов потенциал скорости, создаваемый излучателем в дальней зоне, примет форму

$$p_2 \approx \frac{e^{ikR}}{R'} \frac{1}{\cos \beta H_1^{(1)}(kr_1 \cos \beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\varepsilon}_n kh \sin \beta \sin(kh \sin \beta)}{(kh \sin \beta)^2 - (n\pi)^2}, \quad (2.91)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_n = (-1)^n \left[x_n - v_0 r_1 f_n \frac{M'_0(k_n)}{M_0(k_n \gamma_0)} \right].$$

Нормированная диаграмма направленности может быть записана в виде

$$R(\beta) = \frac{|p_2(\beta)|}{|p_2(\beta')|}. \quad (2.92)$$

Будем полагать, что нормирование осуществляется по отношению к направлению $\beta' = 0$.

Из выражений (2.90) и (2.91) следует, что поле в дальней зоне может быть представлено тремя множителями, один из которых опре-

деляет сферическую волну, а два других не зависят от расстояния R' . Этот результат является следствием теоремы умножения [147]. Проанализируем множители в выражениях (2.90) и (2.91). Прежде всего остановимся на множителях $[\cos \beta H_1^{(1)}(kr_1 \cos \beta)]^{-1}$ и $[H_0^{(1)}(kr_1 \cos \beta)]^{-1}$. Очевидно, что они определяют угловое распределение дальнего поля, когда высота цилиндрического излучателя $2h \rightarrow 0$. Заметим, что в случае акустически жесткого экрана множитель

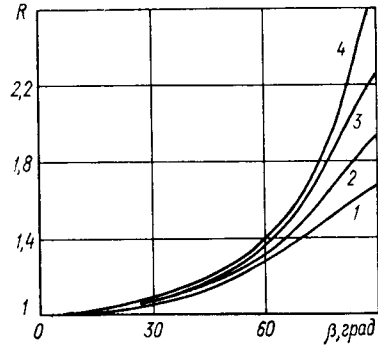


Рис. 27

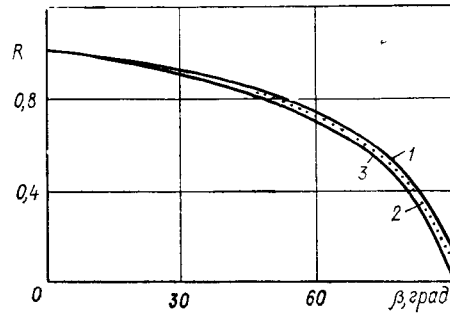


Рис. 28

$[\cos \beta H_1^{(1)}(kr_1 \cos \beta)]^{-1}$ полностью совпадает с таковым для частного случая задачи, когда $r_0 = r_1$ [4, 97].

На рис. 27 приведена зависимость величины $|H_1^{(1)}(kr_1)| \cdot |\cos \beta \times H_1^{(1)}(kr_1 \cos \beta)|^{-1} = R$ от угла β при значениях kr_1 , равных 0,51; 0,72; 1,08 и 1,44 (соответственно кривые 1, 2, 3 и 4), по сути, представлена диаграмма направленности цилиндра при $2h \rightarrow 0$. Характерной особенностью таких диаграмм направленности является наличие сильно выраженного лепестка в направлении оси z .

Совершенно иначе обстоит дело, когда слой является акустически мягким (рис. 28). В этом случае диаграмма направленности цилиндра при $2h \rightarrow 0$ определяется выражением $|H_0^{(1)}(kr_1)| \times |H_0^{(1)}(kr_1 \cos \beta)|^{-1}$, из которого следует, что значение поля в направлении оси z равно нулю (кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям kr_1 , равным 0,51; 0,72 и 1,44).

Как следует из рис. 28, наблюдается слабая зависимость поведения кривых от $2r_1/\lambda$. Последнее обстоятельство указывает на то, что в случае акустически мягкого слоя цилиндрическому излучателю с малой волновой высотой должны быть присущи диапазонные свойства, т. е. его диаграмма направленности не должна существенно изменяться с изменением частоты.

Перейдем к анализу сомножителей в выражениях (2.90) и (2.91), которые определяются через сумму по индексу n . Очевидно, что эти сомножители представляют собой суперпозицию парциальных диаграмм направленности отрезков высотой $2h$. При этом функция распределения колебательной скорости по высоте каждого из этих отрезков соответствует одной из собственных функций в области I , зави-

сящей от координаты z . Вклад каждой из этих парциальных диаграмм направленности определяется коэффициентами ε_n и $\tilde{\varepsilon}_n$.

Приведенное выше утверждение нетрудно проверить. Например, в случае акустически жесткого экрана первый член суммы в выражении (2.91) будет иметь вид

$$\tilde{\varepsilon}_0 \frac{\sin\left(2 \frac{\pi h}{\lambda} \sin \beta\right)}{2 \frac{\pi h}{\lambda} \sin \beta}.$$

Последнее выражение, как известно [127], определяет диаграмму направленности отрезка $2h$ с равномерным распределением колебательной скорости, т. е. распределением вида $\cos \frac{n\pi}{n} z$ ($n = 0$). В случае акустически мягкого экрана первая парциальная диаграмма направленности имеет вид

$$\varepsilon_1 \frac{\cos(kh \sin \beta)}{(kh \sin \beta)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2},$$

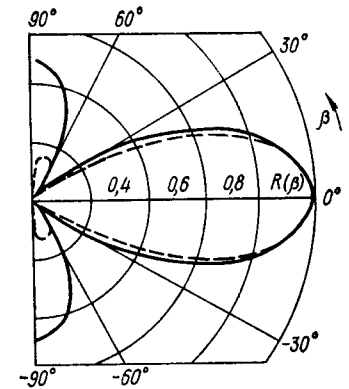


Рис. 29

что соответствует распределению колебательной скорости вдоль отрезка $2h$ по закону $\cos \frac{(2n-1)\pi z}{2h}$ ($n = 1$). Таким же образом можно проанализировать остальные слагаемые под знаком суммы в выражениях (2.90) и (2.91).

Парциальные диаграммы направленности высоких номеров накладываются на первую диаграмму, в результате чего могут появляться новые добавочные максимумы. Как нетрудно видеть из выражений (2.90) и (2.91), углы β_n , при которых появляются добавочные максимумы, могут быть определены из простых соотношений $\beta_n = \arcsin \frac{\pi(n-1/2)}{kh}$ при акустически мягком экране и $\beta_n =$

$$= \arcsin \frac{n\pi}{kh} \text{ при акустически жестком экране.}$$

Достаточно наглядное представление о степени влияния физических свойств слоя на дальнее поле цилиндра можно получить, если обратиться к рис. 29, где $r_0/\lambda = 0,5$; $2h/\lambda = 1,5$; $r_1/r_0 = 1,01$; $f(z) = \text{const}$. Как следует из приведенных данных, акустически мягкий слой (штриховая линия) способствует некоторому обострению основного лепестка и существенно ослабляет уровень боковых лепестков (сплошная линия — акустически жесткий слой).

В заключение заметим, что изложенный в настоящем параграфе анализ основывается на данных работы [34].

6. Дифракция плоской волны на замкнутом кольцевом слое

В параграфе 2 было уделено внимание излучению цилиндра через замкнутый кольцевой слой. Практический интерес представляет также задача о дифракции плоской волны на таком слое для случая, когда внутренний объем заполнен средой с волновым сопротивлением $\rho_2 c_2$ (рис. 30). Вопросам, связанным с дифракцией звука на цилиндрических, заполненных акустической средой объектах подобного рода, уделялось много внимания. Так, в работах [147, 195, 197] рассмотрена дифракция звуковой волны на тонкой упругой цилиндрической оболочке, заполненной жидкой средой, а в работах [188, 193, 203] найдено решение задачи для оболочки произвольной толщины. Рассмотрим случай, когда в кольцевом слое отсутствуют сдвиговые деформации, т. е. частный случай задачи [177]. Такое упрощение, естественно, идеализирует задачу, однако дает возможность существенно облегчить ее решение и получить количе-

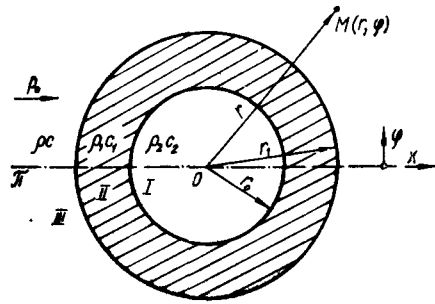


Рис. 30

ственные результаты, позволяющие установить основные особенности звукового поля вблизи слоя при различных волновых сопротивлениях слоя и окружающей среды. Учет сдвиговых деформаций и анализ большого объема исследований содержится в работе [188].

Пусть на кольцевой замкнутый слой падает звуковая волна p_0 (рис. 30). В этом случае целесообразно выделить три частичные области: область I ($r \leq r_0$); область II ($r_0 < r < r_1$) и область III ($r > r_1$). Используя известное представление плоской волны рядом по цилиндрическим функциям [19], звуковые давления в указанных частичных областях запишем в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -i\omega\rho_2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(k_2 r) \cos n\varphi; \\ p_2 &= -i\omega\rho_1 \sum_{n=0}^{\infty} [B_n J_n(k_1 r) + C_n N_n(k_1 r)] \cos n\varphi; \\ p_3 &= -i\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} [D_n H_n^{(1)}(kr) + \varepsilon_n i^n J_n(kr)] \cos n\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

где

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \neq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что на поверхностях $r = r_0$ и $r = r_1$ должны выполнять-

ся следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_2, & v_r^{(1)} &= v_r^{(2)}, & r &= r_0; \\ p_2 &= p_3, & v_r^{(3)} &= v_r^{(3)}, & r &= r_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

Подстановка соотношений (2.93) в граничные условия (2.94) позволяет сразу же получить простую систему линейных алгебраиче-

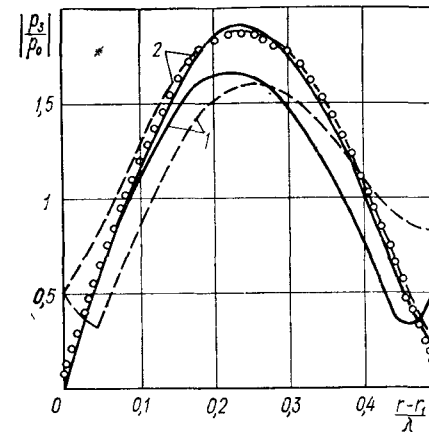


Рис. 31

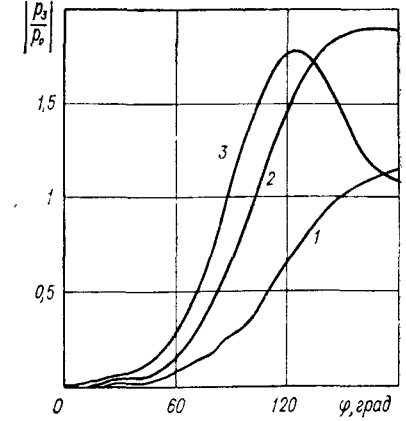


Рис. 32

ских уравнений относительно неизвестных комплексных коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 A_n J_n'(k_2 r_0) &= \rho_1 [B_n J_n'(k_1 r_0) + C_n N_n'(k_1 r_0)]; \\ k_2 A_n J_n'(k_2 r_0) &= k_1 [B_n J_n'(k_1 r_0) + C_n N_n'(k_1 r_0)]; \\ \rho_1 [B_n J_n(k_1 r_1) + C_n N_n(k_1 r_1)] &= \rho [D_n H_n^{(1)}(kr_1) + \varepsilon_n i^n J_n(kr_1)]; \\ k_1 [B_n J_n'(k_1 r_1) + C_n N_n'(k_1 r_1)] &= k [D_n H_n^{(1)'}(kr_1) + \varepsilon_n i^n J_n'(kr_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

Обратимся к анализу количественных данных, характеризующих процесс рассеяния звука кольцевым слоем при различных значениях параметров слоя и окружающей среды. При этом предполагается, что акустические свойства заполняющей и окружающей цилиндр сред совпадают, т. е. $\rho_2 c_2 = \rho c$.

Соотношение между акустическими параметрами слоя и окружающей среды, а также волновые размеры слоя характеризуем параметрами $m = \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}$ и $d_\lambda = (r_1 - r_0)/\lambda_1$, где λ_1 — длина волны звука в материале слоя. На рис. 31 представлено распределение давления перед кольцевым слоем в освещенной зоне, т. е. по направлению $\varphi = \pi$. В обоих расчетных случаях ($\frac{2r_0}{\lambda} = 1$) (кривые 1) и $\frac{2r_0}{\lambda} = 4$ (кривые 2)) рассеивающий слой имеет четвертьволновую толщину, т. е. $d_\lambda = 0,25$. Сплошные линии на рисунке соответствуют случаю очень мягкого слоя ($m = 0,003$). Штриховыми линиями пред-

ставлено изменение давления для случая $m = 0,21$, т. е. для довольно жесткого рассеивающего слоя. Здесь же кружочками показано распределение давления перед плоским слоем при отражении от него плоской волны. Как видно, изменение давления перед кольцевым слоем качественно сходно и максимума давление достигает в области $(r - r_1)/\lambda \approx 0,25$. Как известно, этот максимум обусловлен интерференцией между падающей плоской и отраженной от кольцевого слоя цилиндрической волнами (для плоского слоя отраженная волна

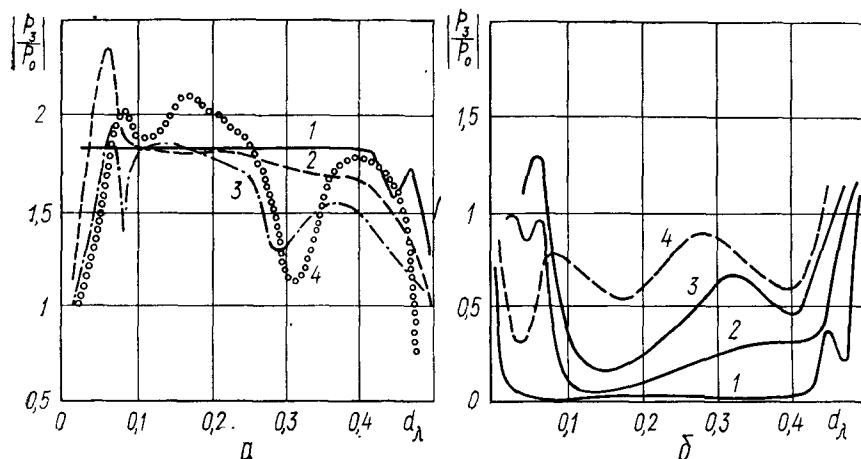


Рис. 33

также плоская). В силу того что амплитуда цилиндрической волны с расстоянием уменьшается, вклад ее в общее поле p_3 также будет уменьшаться по мере увеличения $(r - r_1)/\lambda$, в связи с чем амплитуда осцилляций давления будет падать и при $(r - r_1)/\lambda \gg 1$ $|p_3/p_0| \rightarrow 1$. Для плоского слоя указанная особенность не имеет места. Следует также отметить уменьшение уровня давления поля при $(r - r_1)/\lambda \approx 0,25$ с уменьшением волнового диаметра кольцевого слоя. Причина этого также кроется в снижении вклада отраженной цилиндрической волны в общее поле p_3 , но уже за счет того, что уровень отраженной волны снижается с уменьшением волновых размеров рассеивателя $2r_0/\lambda$.

Теперь интересно рассмотреть, как изменяется уровень давления в зависимости от угла φ (рис. 32). Плоская волна рассеивается на относительно мягком кольцевом слое при $m = 0,003$, $\frac{2r_0}{\lambda} = 4$ и $d_\lambda = 0,25$. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют различным расстояниям от рассеивающей поверхности $(r - r_1)/\lambda$, равным 0,1; 0,25 и 0,40. Из этих данных следует, что до $(r - r_1)/\lambda \leq 0,25$ распределение давления от угла φ характеризуется одним максимумом, расположенным со стороны падающей плоской волны. При больших значениях $(r - r_1)/\lambda$ в направлении $\varphi = \pi$ образуется провал и появляются два симметрично расположенных максимума в боковых направлениях ($\varphi \approx 120^\circ$ и $\varphi = 300^\circ$).

Приведенный анализ особенностей распределения поля вблизи кольцевого слоя был предназначен для частного случая, когда волновая толщина $d_\lambda = 0,25$, т. е. слой обладал минимальной прозрачностью. Рассмотрим теперь, как изменяется распределение поля с изменением прозрачности слоя, оценивая изменение уровня давления по характерным направлениям с изменением волновой толщины слоя d_λ . На рис. 33 представлены зависимости, характеризующие изменение уровня поля перед кольцевым слоем (в освещенной области) и за ним (в зоне тени) при изменении d_λ . На рис. 33, а показан уровень давления в освещенной зоне ($\varphi = \pi$), а на рис. 33, б — в зоне тени ($\varphi = 0$). В обоих случаях положение точки наблюдения определяется равенством $(r - r_1)/\lambda = 0,25$, а волновые размеры полости равны $2r_0/\lambda = 2$. На каждом из рисунков имеется семейство из четырех кривых, которые отражают изменение давления соответственно для четырех значений относительного волнового сопротивления материала кольцевого слоя (0,03; 0,15; 0,25; 0,3).

Как и следовало ожидать, с увеличением прозрачности кольцевого слоя общий уровень поля в зоне тени растет, а в освещенной области падает. Однако характер приведенных зависимостей намного сложнее, чем в случае плоского слоя. Это становится понятным, если учесть, что поле вокруг кольцевого слоя определяется не только волной, прошедшей через слой (как в случае плоского слоя), но и дифрагированной волной вокруг слоя, а также волновыми явлениями, связанными с резонансами объема среды внутри кольцевого слоя [174, 194].

Рассматриваемая задача, хотя и является довольно простой в плане построения выражений для характеристик звукового поля, представляет интерес во многих аспектах. В частности, важную роль в формировании структуры рассеянного поля могут играть резонансные явления в полости. Здесь эти вопросы не рассматриваются, а приведены данные, необходимые для обоснования подхода, развиваемого в следующем параграфе, для проведения сравнения структуры поля в довольно простой рассеивающей области и более сложной области с незамкнутым кольцевым слоем.

7. Дифракция звуковых волн на незамкнутой цилиндрической оболочке конечной прозрачности

Задача дифракции плоской волны на незамкнутой цилиндрической оболочке, по-видимому, впервые была рассмотрена Зомерфельдом в работе [122] для случая условий Дирихле на ее поверхности. В дальнейшем этой задаче уделялось некоторое внимание в работе [182]. Наиболее полный анализ звука, рассеянного незамкнутой цилиндрической оболочкой, можно найти в работе [162], где решение выполнено на основе вариационного метода. Впоследствии ряд исследователей возвращались к указанной задаче (например, в работе [179], где использован метод задачи Римана — Гильберта).

Во всех указанных работах использовалось два существенных предположения. Рассеивающая оболочка предполагалась тонкой и непро-

зрачной для звука. Развитый метод решения граничных задач, очевидно, позволяет легко построить общее решение задачи и учесть влияние всех пренебрегаемых ранее факторов. При этом необходимо использовать выражения для составляющих поля в отдельных частных областях, приведенных в параграфе 6. В тех случаях, когда волновая толщина оболочки достаточно мала, роль волновых эффектов в ней незначительна, однако влияние прозрачности оболочки на структуру рассеянного звукового поля может быть существенным. Во многих случаях влияние прозрачности можно учесть путем описания оболочки

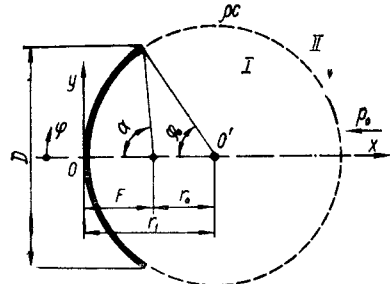


Рис 34

как бесконечно тонкой по отношению к длине волны, но обладающей некоторым конечным импедансом. На основе анализа случая прохождения звука через слой [89] можно предположить, что этот импеданс является импедансом массового типа. Таким образом, в последующем изложении связь между колебательной скоростью и давлением на поверхности оболочки будем определять величиной импеданса

$$Z = -i\omega Mf(\varphi), \quad (2.96)$$

где M — поверхностная плотность оболочки, кг/м²; $f(\varphi)$ — функция распределения поверхностной плотности.

Как отмечалось в первой главе, совокупности решений уравнения Гельмгольца, предназначенные для удовлетворения граничных условий на координатных поверхностях соответствующих координатных систем, могут быть успешно использованы и для решения граничных задач в областях с геометрией, близкой к идеальной. Имея в виду это обстоятельство, используем введенное предположение о свойствах оболочки, для того чтобы рассмотреть здесь практически интересную задачу о рассеивании звука параболической цилиндрической оболочкой.

Аппроксимация параболической цилиндрической оболочкой уже использовалась при рассмотрении задач рассеивания [105, 187]. Такая аппроксимация не вносит существенных искажений в структуру рассеянного звукового поля, если угол раскрытия 2α оболочки в виде параболического цилиндра меньше π [137, 187]. Тогда радиус аппроксимирующей цилиндрической оболочки r_1 следует выбрать равным приблизительно удвоенному фокусному расстоянию параболической оболочки. Более подробное рассмотрение методики выбора характеристик аппроксимирующей оболочки содержится в работе [105].

Учитывая изложенное, будем полагать, что имеется оболочка в виде параболического цилиндра (для краткости будем ее называть параболоидом) с размером раскрытия D , фокусным расстоянием F и углом раскрытия 2α . Этот параболоид мы аппроксимируем цилиндрической незамкнутой оболочкой радиуса r_1 с центральным углом $2\varphi_0$ (рис. 34). Будем также полагать, что толщина параболоида бесконечно мала,

а его поверхность характеризуется локальным импедансом Z в выражении (2.96). При получении всех количественных данных, приведенных выше, точность аппроксимации параболической оболочки круговой цилиндрической была такова, что отклонение в геометрии не превышало $\lambda/10$.

Хотя такие физические свойства параболоида идеализированы, тем не менее они с хорошим приближением могут характеризовать свойства реальных параболоидов в тех случаях, когда их толщина мала по сравнению с длиной волны в материале, из которого они выполнены, а волновое сопротивление самого материала значительно превышает волновое сопротивление окружающей среды [133].

Учитывая принятые выше допущения, всю область существования звукового поля естественно разбить на две частные области: область I ($0 \leq r \leq r_1$) и область II ($r > r_1$). Используя известное разложение плоской волны по цилиндрическим волновым функциям, звуковые давления в частных областях представим в следующей форме:

$$p_1 = -i\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(kr) \cos n\varphi; \\ p_2 = -i\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} [B_n H_n^{(1)}(kr) + \varepsilon_n i^n J_n(kr)] \cos n\varphi, \quad (2.97)$$

где $\varepsilon_n = 1$ при $n = 0$ и $\varepsilon_n = 2$ при $n \neq 0$.

Из принятого предположения о физических свойствах поверхности параболоида следует, что каждый его элементарный участок под воздействием падающей волны движется как одно целое, т. е. колебательная скорость на внешней и внутренней сторонах этих участков одинакова. Этот факт позволяет сформулировать условия сопряжения компонент звукового поля на границе частных областей в следующем виде:

$$\frac{\partial p_1}{\partial (kr)} = \frac{\partial p_2}{\partial (kr)}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ p_2 = \begin{cases} p_1 + Z \frac{1}{i\rho c} \frac{\partial p_1}{\partial (kr)}, & 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ p_1, & \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases} \quad (2.98)$$

Первое из этих условий позволяет установить связь между коэффициентами

$$B_n = \frac{A_n J_n(kr_1)}{H_n^{(1)'}(kr_0)} (1 - \varepsilon_n i^n), \quad (2.99)$$

а второе с учетом выражения (2.99) порождает бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, являющуюся исходной при получении количественных данных:

$$\bar{A}_n - ikr_1 J_n(kr_1) H_n^{(1)'}(kr_1) \varepsilon_n \frac{\omega M}{2\rho c} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m N_{nm} = \varepsilon_n i^n J_n(kr_1), \quad (2.100)$$

где

$$\tilde{A}_n = A_n J'_n(kr_1), \quad N_{nm} = \int_0^{\Phi_0} f(\varphi) \cos n\varphi \cos m\varphi d\varphi.$$

Перейдем к анализу свойств параболоида. Все количественные данные, приведенные ниже, соответствуют следующим параметрам:

$$D/F = 2,8; \quad r_1 = 2,14F, \quad \alpha = 40^\circ, \quad f(\varphi) = \text{const}, \quad \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ c = 1,5 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

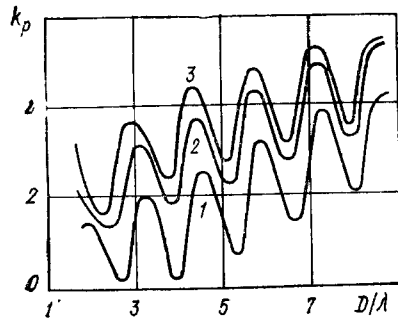


Рис. 35

Количество неизвестных, удерживаемых в системе (2.100) при фактическом ее решении, составляло 36.

Прежде всего рассмотрим влияние прозрачности параболоида на один из главных акустических параметров — коэффициент усиления по давлению $k_p = \frac{p_1(r_0, \varphi = 0)}{p_0}$, т. е. величину, характеризующую отношение давления в фокусе параболического цилиндра к давлению в падающей плоской волне. На рис. 35 представлены частотные зависимости этой величины. В качестве параметра, характеризующего частоту, выбрано отношение длины хорды цилиндра в раскрыве к длине волны. Вычисления выполнены для безразмерной поверхностной $\bar{M} = M \frac{\omega}{\rho c}$ плотности цилиндра, равной 50; 177 и 1770 (соответственно кривые 1, 2 и 3). При увеличении волновых размеров отражателя наблюдается рост некоторого среднего значения коэффициента усиления. Однако во всех расчетных случаях оказываются существенными эффекты интерференции. Именно интерференцией падающей плоской волны и отраженных цилиндрических волн обусловлены осцилляции в значении коэффициента усиления.

Представленные на рис. 35 данные отражают качественно понятную тенденцию к росту коэффициента усиления с уменьшением прозрачности отражателя. Незначительная разница в значениях коэффициента усиления между кривыми 2 и 3 позволяет заключить, что эта характе-

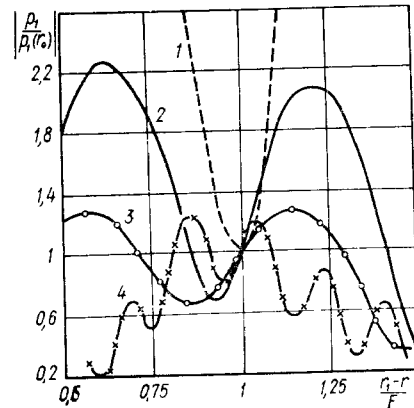


Рис. 36

ристика суммарного поля может надежно определяться для всех $\bar{M} > 1770$ в рамках модели с абсолютно жестким рассеивающим цилиндром.

Роль интерференционных эффектов в формировании звукового поля в окрестности цилиндра представляется более наглядно при рассмотрении изменения давления в плоскости $y = 0$. Некоторая совокупность таких данных представлена на рис. 36. Здесь показано изменение с расстоянием отношения давления в суммарном (падающем и отраженном) поле к давлению в фокусе. Кривые 1—3 соответствуют указанным выше трем значениям поверхностной плотности оболочки. Вычисления выполнены для относительно небольшого рассеивателя ($D/\lambda = 2,6$). Как видно из этих данных, давление в плоскости $y = 0$ характеризуется большой неравномерностью. Причем чем выше прозрачность оболочки, тем больше степень неравномерности поля. Этот парадоксальный на первый взгляд вывод обусловлен тем, что в рассмотренном диапазоне параметров оболочки даже при $\bar{M} = 50$ отраженное поле довольно существенно для того, чтобы образовать с падающим такую интерференционную картину. С уменьшением прозрачности оболочки, т. е. с ростом $\bar{M}$, относительная величина отраженного поля возрастает, вклад падающей волны в суммарное поле уменьшается и степень неравномерности поля уменьшается.

Такие рассуждения можно подтвердить при анализе звукового поля, полученного при рассеивании на цилиндре с гораздо большим волновым размером ($D/\lambda = 8,5$). Соответствующие данные для случая $\bar{M} = 177$ представлены кривой 4 на рис. 36. Увеличение волнового размера рассеивателя приводит к росту влияния отраженного поля и, следовательно, к уменьшению неравномерности в распределении суммарного поля. Поведение кривой 4 подтверждает такой вывод.

Выше рассматривалось влияние прозрачности параболоида на рассеянное поле, когда на него падает плоская звуковая волна. Интерес представляет также вопрос о влиянии прозрачности параболоида на его направленные свойства. Для выяснения этого вопроса поместим в фокус источник звуковых волн в виде пульсирующей нити $H_0^{(1)}(kR)$. Учитывая известное разложение функции $H_0^{(1)}(kR)$ по цилиндрическим волновым функциям [19] (в данном случае необходимость в этом разложении обусловлена тем, что нужно представить функцию $H_0^{(1)}(kR)$ в системе координат с центром O'), звуковые поля в частных областях представим в виде

$$p_1 = -i\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(kr) \cos n\varphi + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \begin{cases} J_n(kr) H_0^{(1)}(kr_0), & r < r_0, \\ J_n(kr_0) H_0^{(1)}(kr), & r > r_0; \end{cases} \quad (2.101) \\ p_2 = -i\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\varphi.$$

Подставляя соотношения (2.101) в функциональные уравнения (2.98), нетрудно получить новую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которая подобна системе (2.100):

$$\tilde{B}_n - ikr_0 J'_n(kr_1) H_n^{(1)'}(kr_1) \varepsilon_n \frac{\omega M}{2\rho c} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{B}_m N_{nm} = \varepsilon_n J_n(kr_0) H_n^{(1)'}(kr_1), \quad (2.102)$$

где $\tilde{B}_n = B_n H_n^{(1)'}(kr_1)$

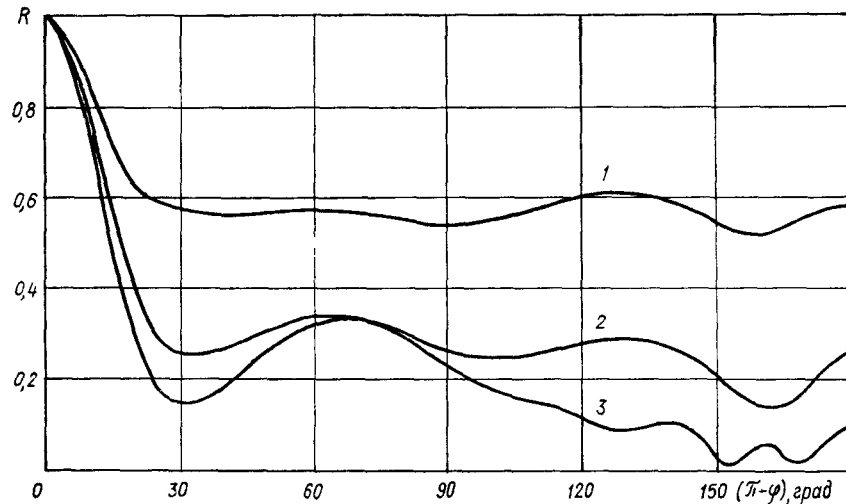


Рис. 37

На основе оценок величин $\tilde{B}_n$, полученных при решении системы (2.102) методом редукции, рассмотрим характеристики направленности звукового поля, рассеянного на параболическом цилиндре. На рис. 37 представлены амплитудные характеристики направленности звукового поля, позволяющие оценить роль прозрачности оболочки. Как и выше, здесь кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям $\bar{M}$, равным 50, 177 и 1770. Волновой размер параболоида $D/\lambda = 3$. В целом тенденция довольно ясна. Чем меньше прозрачность оболочки, тем острее основной лепесток и тем меньше уровень бокового поля. Однако малые различия между кривыми 2 и 3 свидетельствуют об определяющем влиянии рассеянного на ребрах звука на формирование боковых лепестков.

Определяющее влияние на степень направленности рассеянного звукового поля оказывают волновые размеры рассеивателя. С увеличением D/λ вплоть до $D/\lambda = 9$ наблюдается практически плавное обострение основного лепестка. При этом данные по этой характеристике звукового поля $\bar{M} = 177$ и $\bar{M} = 1770$ практически не отличаются. В уровне первого бокового лепестка наблюдаются сильные осцилляции с изменением D/λ . В области средних значений D/λ ($2 < D/\lambda < 6$) наблюдается значительная зависимость уровня первого бокового лепестка от прозрачности оболочки. Причем уровень бокового лепестка

для более прозрачной оболочки с $\bar{M} = 177$ существенно выше. Для $D/\lambda > 7$ различия между оболочками $\bar{M} = 177$ и $\bar{M} = 1770$ становятся незначительными.

В заключение заметим, что уже при $\bar{M} = 1770$ оболочку можно считать практически непрозрачной. Об этом свидетельствуют результаты сравнения полученных расчетных данных с данными работы [182], в которой рассматривается рассеивание на жесткой оболочке.

Выше был проанализирован случай, когда в фокусе параболоида находился один ненаправленный источник звуковых волн. Не представляет труда обобщить эту задачу на любое конечное число источников, расположенных на оси Ox , каждый из которых характеризуется своей амплитудой и фазой. Тогда, используя известное разложение цилиндрической волны $H_0^{(1)}(kr_q)$ по цилиндрическим волновым функциям относительно системы координат с центром O' , можно записать

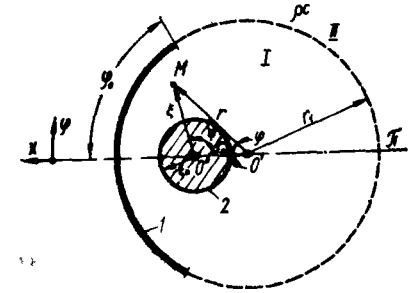


Рис. 38

$$\sum_{q=1}^Q T_q H_0^{(1)}(kr_q) = \sum_{q=1}^Q T_q \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \begin{cases} J_n(kr) H_n^{(1)}(kr_q), & r < r_q, \\ J_n(kr_q) H_n^{(1)}(kr), & r > r_q, \end{cases} \quad (2.103)$$

где T_q — заданный комплексный коэффициент, определяющий амплитуду и фазу q -го источника; r_q — координата q -го источника

Используя выражение (2.103), нетрудно показать, что (при наличии источников) в системе (2.102) следует заменить правую часть на следующее выражение:

$$\varepsilon_n H_n^{(1)'}(kr) \sum_{q=1}^Q T_q J_n(kr_q).$$

Теперь, задавая конкретные значения Q , T_q и r_q , можно создавать более сложное угловое распределение звукового поля в первой частицной области для получения желаемой диаграммы направленности.

Рассмотрим и более сложную задачу, когда в фокусе расположен не точечный источник, а цилиндрический излучатель конечного диаметра. На рис. 38 изображена схема относительного расположения цилиндра 2 и параболоида 1. Введем дополнительную локальную цилиндрическую систему координат с центром в точке O' . Тогда звуковые давления в частичных областях I и II можно представить следующими рядами:

$$p_1 = -i\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(kr) \cos n\varphi + \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m^{(1)}(k\xi) \cos m\psi; \quad (2.104)$$

$$p_2 = -i\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\varphi.$$

Пусть на поверхности цилиндрического излучателя задано некоторое распределение колебательной скорости $v_0 f(\psi)$, симметричное относительно оси Ox . Тогда должно иметь место следующее условие:

$$\frac{1}{i\rho c} \frac{\partial p_1}{\partial (kr)} = v_0 f(\psi), \quad \xi = \xi_0. \quad (2.105)$$

Для использования условия (2.105) необходимо, чтобы обе суммы в выражениях (2.104) были представлены в одной системе координат, в данном случае в системе с центром O'' . Применяя известную теорему сложения для функций Бесселя, нетрудно показать, что в системе координат с центром O''

$$p_1 = -i\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k\xi) J_{n+m}(kr_0) \cos m\psi + \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m^{(1)}(k\xi) \cos m\psi \quad (2.106)$$

Подставив это выражение в условие (2.105), после элементарных преобразований получим

$$B_m H_m^{(1)}(k\xi_0) + J'_m(k\xi_0) \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_{n+m}(kr_0) = F_m, \quad (2.107)$$

где

$$F_m = -\frac{v_0}{k\delta_m} \int_0^\pi f(\psi) \cos m\psi d\psi, \quad \delta_m = \pi (m=0), \quad \delta_m = \frac{1}{2}\pi (m \neq 0).$$

Теперь необходимо использовать условия сопряжения (2.98), для чего обе суммы в выражениях (2.104) следует представить в системе координат с центром в точке O' . Здесь нужно применить теорему сложения для функций Ханкеля [102], в результате чего выражение для p_1 приводится к виду

$$p_1 = -i\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(kr) \cos n\psi + \sum_{m=0}^{\infty} B_m \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(kr) J_{n+m}(kr_0) \cos n\psi. \quad (2.108)$$

Подстановка выражения (2.108) в условие (2.98) и последующая алгебраизация этих условий окончательно дает систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных A_n , B_m и C_n :

$$\begin{aligned} C_n H_n^{(1)}(kr_1) - A_n J_n(kr_1) &= -H_n^{(1)'}(kr_1) \sum_{m=0}^{\infty} B_m J_{n+m}(kr_0); \\ C_n H_n^{(1)}(kr_1) - A_n J_n(kr_1) &= -H_n^{(1)}(kr_1) \sum_{m=0}^{\infty} B_m J_{n+m}(kr_0) + \\ &+ \frac{Zk}{i\omega\rho\delta_n} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_m J'_m(kr_1) N_{nm} + \sum_{m=0}^{\infty} B_m \sum_{t=0}^{\infty} H_t^{(1)}(kr_1) J_{n+t}(kr_0) N_{nt} \right\}, \end{aligned} \quad (2.109)$$

где $N_{nq} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+q)\varphi_0}{n+q} + \frac{\sin(n-q)\varphi_0}{n-q} \right] (q=m, t); \quad \delta_n = \pi$ при $n=0$ и $\delta_n = \pi/2$ при $n \neq 0$.

Следует заметить, что с помощью предложенной расчетной схемы можно исследовать такие важные вопросы, как влияние типа распределения колебательной скорости по поверхности цилиндра на диаграмму направленности параболоида, степень затемнения цилиндром поверхности параболоида и др.

8. Излучение звука цилиндрическими оболочками

В рассмотренных выше задачах, связанных с излучением звука цилиндрическими источниками, предполагалось, что на их излучающих поверхностях задана нормальная составляющая колебательной скорости. Источники такого рода фактически представляют собой генератор колебательной скорости с бесконечно большим внутренним импедансом, поскольку колебательная скорость не зависит от реакции окружающей среды.

В отличие от таких идеализированных источников реальные источники звука характеризуются конечным значением своего внутреннего импеданса. Как следствие этого колебательная скорость их поверхностей существенно зависит от реакции окружающей среды. Помимо этого, звуковые поля могут существовать и во внутренних полостях источников, что также оказывает влияние на их колебательную скорость.

Указанные обстоятельства являются причиной того, что уровни звуковых полей, излучаемых реальными источниками, могут значительно отличаться от предсказываемых с использованием идеализированных схем.

Рассмотрим источник звука в виде бесконечно длинной тонкой упругой цилиндрической оболочки, совершающей под воздействием равномерно распределенной периодической нагрузки p пульсирующие колебания (рис. 39). Сразу же оговорим, что нагрузка p может быть создана разными способами. В частности, если материал оболочки пьезоактивный, то нагрузку p можно легко реализовать с помощью электрического напряжения, которое прикладывается к электродам оболочки [118]. Пусть внутри оболочки (область I) вакуум, а снаружи (область II) она окружена жидкостью с волновым сопротивлением ρc . Тогда звуковое давление, создаваемое пульсирующей оболочкой в окружающей среде, можно представить выражением [121]

$$p_2 = -i\omega\rho A H_0^{(1)}(kr) \quad (2.110)$$

Неизвестная комплексная постоянная A представляется из очевидного условия сопряжения

$$p = p_2 + v_2 Z, \quad r = r_1, \quad v_2 = v_0, \quad (2.111)$$

где $v_2 = \frac{1}{i\rho c} \frac{\partial p_2}{\partial (kr)}$.

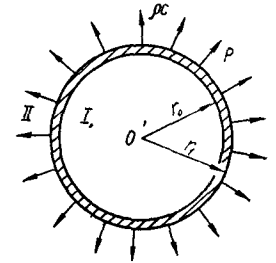


Рис 39

После определения постоянной A для звукового поля вне оболочки окончательно имеем

$$p_2 = \frac{i\rho H_0^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)'}(kr_1)\tilde{Z}};$$

$$\tilde{Z} = Z_1 + Z_2; \quad Z_1 = Z/\rho c; \quad Z_2 = -i \frac{H_0^{(1)}(kr_1)}{H_1^{(1)}(kr_1)}. \quad (2.112)$$

Величина Z_2 , как известно [121], характеризует импеданс излучения пульсирующего цилиндра, мнимая часть которого определяет присоединенную массу среды, соколеблющуюся с оболочкой. Если вспомнить, что без учета диссипативных потерь $Z = -i\omega m + i \frac{s}{\omega}$ [116] (где m и s — соответственно масса и упругость единицы поверхности оболочки, $m = \tilde{\rho}(r_1 - r_0)$; $s = 4E(r_1 - r_0)/(r_1 + r_0)^2$; $\tilde{\rho}$ и E — соответственно плотность и модуль Юнга материала оболочки), то становится очевидным, что резонансная частота пульсирующей оболочки при наличии окружающей среды уменьшится. Этот факт хорошо известен в литературе (см., например, работу [143]).

Несколько усложним рассматриваемую задачу, полагая наличие внутри оболочки (область I) жидкости с волновым сопротивлением $\rho_1 c_1$. Тогда звуковое давление внутри оболочки следует представить в форме

$$p_1 = -i\omega\rho_1 A J_0(k_1 r), \quad k_1 = \omega/c_1. \quad (2.113)$$

Величины A и B в выражениях (2.110) и (2.113) определяются теперь из условий

$$\begin{aligned} p &= p_2(r_1) - p_1(r_0) + v_2(r_1)Z; \\ v_1(r_0) &= v_2(r_1) = v_0 \end{aligned} \quad (2.114)$$

Заметим, что в условии (2.114) колебательные скорости внешней и внутренней поверхностей тонкой оболочки предполагаются равными. Для не слишком высоких частот это тем более справедливо, чем меньше отношение $(r_1 - r_0)/r_0$.

Используя условия (2.114), с учетом выражений (2.110) и (2.113) получаем

$$p_2 = \frac{i\rho H_0^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)'}(kr_1)[Z_1 + Z_2 + Z_3]}, \quad (2.115)$$

где

$$Z_3 = i \frac{\rho_1 c_1}{c} \frac{J_0(k_1 r_0)}{J_1(k_1 r_0)}.$$

Величина Z_3 характеризует импеданс излучения внутрь оболочки [55] и в отличие от Z_2 носит чисто реактивный характер. При $k_1 r_0 < 2,405$ величина Z_3 имеет упругий характер, в области $2,405 < k_1 r_0 < 3,832$ — характер массы, при $3,832 < k_1 r_0 < 5,520$ — снова упругий

характер и т. д. (рис. 40). На рис. 40 [55] кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям $\rho_1 c_1/\rho c$, равным 1, 0,5 и 0,3. Таким образом, наличие жидкости внутри оболочки может приводить как к снижению, так и к повышению ее резонансной частоты, и это зависит от волновых размеров оболочки на ее резонансной частоте. В частности, если резонансная частота оболочки соответствует области $k_1 r_0 < 2,405$, то наличие жидкости внутри оболочки приведет к увеличению ее резонансной частоты.

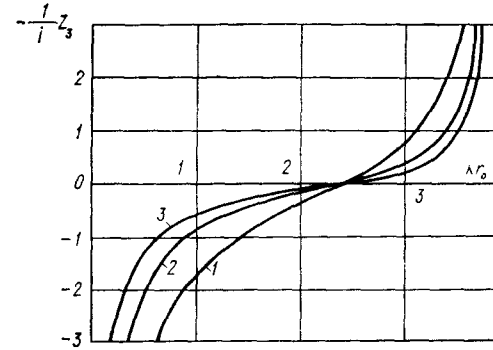


Рис. 40

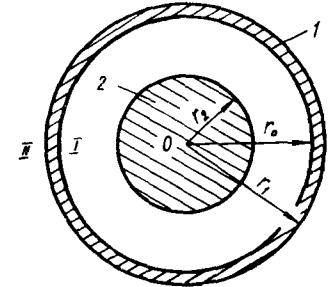


Рис. 41

Рассмотрим теперь случай, когда внутри оболочки 1 расположен соосный с ней незвукопрозрачный цилиндр 2 (рис. 41). В этом случае поле в кольцевом зазоре (область I) между оболочкой и этим цилиндром описывается следующим выражением:

$$p_1 = -i\omega\rho_1 [B J_0(k_1 r) + C N_0(k_1 r)]. \quad (2.116)$$

Используя условие (2.114) с учетом (2.116) и (2.110), легко получить выражение для внешнего поля пульсирующей оболочки (область II):

$$p_2 = \frac{i\rho H_0^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)'}(kr_1)[Z_1 + Z_2 + Z_4]}, \quad (2.117)$$

где

$$Z_4 = \begin{cases} i \frac{\rho_1 c_1}{c} \left[\frac{J_0(k_1 r_0) N_1(k_1 r_2) - N_0(k_1 r_0) J_1(k_1 r_2)}{J_1(k_1 r_0) N_1(k_1 r_2) - N_1(k_1 r_0) J_1(k_1 r_2)} \right]; \\ -i \frac{\rho_1 c_1}{\rho c} \left[\frac{J_0(k_1 r_0) N_0(k_1 r_2) - N_0(k_1 r_0) J_0(k_1 r_2)}{J_1(k_1 r_0) N_0(k_1 r_2) - N_1(k_1 r_0) J_0(k_1 r_2)} \right]. \end{cases}$$

Первое выражение для Z_4 определяет составляющую импеданса для акустически жесткого цилиндра, а второе — для акустически мягкого.

Величина Z_4 для акустически жесткого внутреннего цилиндра была исследована в работе [55]. В ней показано, что зависимость Z_4 от частоты имеет характер, качественно аналогичный зависимостям, приведенным на рис. 40, и поэтому рассмотрение этого случая не представляет интереса.

Гораздо более важным представляется случай, когда внутренний цилиндр акустически мягкий. На рис. 42 приведены частотные зависи-

мости Z_4 для этого случая. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям, r_2/r_0 , равным 0,28; 0,425 и 0,72. Как видно, на низких частотах величина Z_4 имеет характер массы, поэтому резонансная частота оболочки за счет наличия акустически мягкого внутреннего цилиндра должна снижаться. Это свойство особенно полезно помнить тогда, когда по тем или иным причинам необходимо понизить частоту резонанса, например пульсирующего электроакустического преобразователя в виде пьезо-керамической цилиндрической оболочки [14, 15, 146, 214, 215].

Проиллюстрируем количественную сторону рассмотренного эффекта примером. Пусть име-

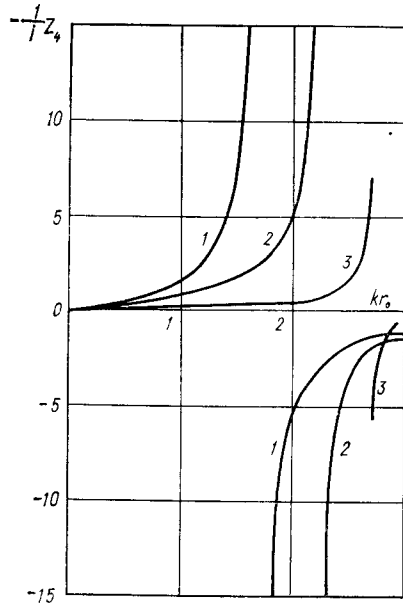


Рис 42

ется пьезокерамическая оболочка с внутренним акустически мягким цилиндром: $r_0 = 0,027$ м; $r_1 = 0,03$ м; $r_2/r_0 = 0,35$; $\rho c = \rho_1 c_1 = 1,5 \times 10^6$ кг/м² · с; $\tilde{\rho} = 7,2 \cdot 10^3$ кг/м³; $E = 0,86 \cdot 10^{11}$ Па. Резонансная частота оболочки, рассчитанная с учетом данных рис. 40, составляет примерно 12 кГц, в то время как резонансная частота самой оболочки в вакууме (при $\rho c = \rho_1 c_1 = 0$) составляет около 19,2 кГц. Таким образом, за счет использования внутреннего акустически мягкого цилиндра резонансную частоту оболочки удалось снизить почти в 1,6 раза.

Установленные различия во влиянии на спектральные свойства цилиндрической оболочки находящегося внутри нее идеального цилиндра имеют довольно четкое физическое объяснение. В случае жесткого цилиндра, очевидно, изменение объема между вставкой и колеблющейся оболочкой может произойти только за счет сжатия среды. На относительно малых частотах это определяет упругий характер сопротивления заполняющей полость жидкости и, следовательно, рост собственной частоты механической колебательной системы. В случае мягкого цилиндра упругие свойства жидкости совершенно не проявляются. Изменение объема между оболочками на относительно низ-

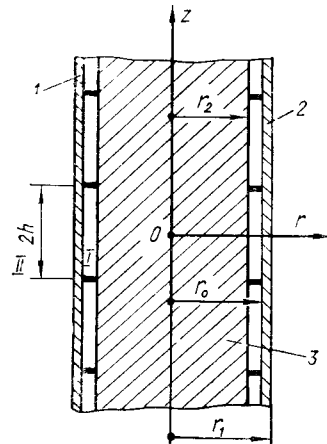


Рис 43

ких частотах происходит за счет перемещения слоя жидкости в целом. Реакция заполняющего слоя на движения внешней оболочки носит чисто массовый характер, и, следовательно, собственная частота колебательной системы падает. Представленный пример интересен прежде всего своими количественными данными. Оказывается, что описанный эффект может иметь довольно существенное значение при рассмотрении колебаний пьезокерамических и других близких им по механическим свойствам оболочек в воде [202].

Поскольку описанное явление существенного уменьшения значения собственной частоты связано с наличием податливых стенок во внутреннем объеме, заполненном жидкостью, то можно указать еще на один метод снижения резонансной частоты пульсирующей бесконечной цилиндрической оболочки. Рассмотрим оболочку 1, внутри которой соосно с ней размещен акустически жесткий цилиндр 3, а в зазор между оболочкой и этим цилиндром вставлены акустически мягкие кольцевые перегородки 2, периодически повторяющиеся вдоль оси z (рис. 43). Учитывая указанное, достаточно ограничиться изучением только одного периода $|z| \leq h$ и принять следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{i\rho_1 c_1} \frac{\partial p_1}{\partial (kr)} &= 0, & r &= r_2, & |z| &\leq h; \\ p_2 &= 0, & r_2 &\leq r \leq r_0, & |z| &= h, \\ \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_2}{\partial z} &= 0, & r &\geq r_1, & |z| &= h. \end{aligned} \right\} \quad (2.118)$$

Звуковое поле внутри (область I) и вне (область II) оболочки выразим в форме

$$p_1 = -i\omega\rho_1 \sum_{n=0}^{\infty} [A_n F_0(k_n r) + B_n Q_0(k_n r)] \cos \frac{(2n+1)\pi}{2h} z; \quad (2.119)$$

$$p_2 = -i\omega\rho \sum_{m=0}^{\infty} D_m G_0(k_m r) \cos \frac{m\pi}{h} z,$$

где $k_n = \left\{ k^2 - \left[\frac{(2n+1)\pi}{2h} \right]^2 \right\}^{1/2}; \quad k_m = \left[k^2 - \left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 \right]^{1/2},$

$$F_0(k_n r) = \begin{cases} J_0(k_n r), & k_1 \geq \frac{(2n+1)\pi}{2h}, \\ I_0(k_n r), & k_1 < \frac{(2n+1)\pi}{2h}; \end{cases}$$

$$Q_0(k_n r) = \begin{cases} N_0(k_n r), & k_1 \geq \frac{(2n+1)\pi}{2h}, \\ K_0(k_n r), & k_1 < \frac{(2n+1)\pi}{2h}; \end{cases}$$

$$G_0(k_m r) = \begin{cases} H_0^{(1)}(k_m r), & k \geq \frac{m\pi}{h}, \\ K_0(k_m r), & k < \frac{m\pi}{h}. \end{cases}$$

Неизвестные комплексные коэффициенты в выражениях (2.119) определяются из системы функциональных уравнений, вытекающей из условий (2.118), которая стандартным образом приводится к бесконечной системе алгебраических уравнений.

Если ограничиться случаем, когда $2h \ll c/2f$, то в рядах (2.119) можно оставить только нулевые члены. Тогда звуковое поле вне цилиндра приближенно может быть описано следующим выражением:

$$p_2 \approx \frac{i p H_0^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)'}(kr_1) [Z_1 + Z_2 + Z_3]}, \quad (2.120)$$

где

$$Z_3 = -i \frac{8k\rho_1}{\pi^2 k_0 \rho} \frac{I_1(k_0 r_2) K_0(k_0 r_0) + K_1(k_0 r_2) I_0(k_0 r_0)}{I_1(k_0 r_0) K_1(k_0 r_2) - K_1(k_0 r_0) I_1(k_0 r_2)};$$

$$k_0 = \{(\pi/2h)^2 - k_1^2\}^{1/2}.$$

Если к тому же $k_0 r_2 \gg 1$, то, используя асимптотические выражения для функций Кельвина и Макдональда [181], получаем

$$Z_3 \approx -i \frac{8k\rho_1}{\pi^2 k_0 \rho} \operatorname{cth} [k_0 (r_0 - r_2)]. \quad (2.121)$$

В таком приближении довольно четко прослеживается связь между величиной присоединенной массы и величиной зазора между цилиндрами. В принципе, уменьшая ширину кольцевой щели $r_0 - r_2$, присоединенную массу можно сделать сколь угодно большой.

Непосредственный расчет резонансной частоты пьезокерамической оболочки с параметрами, указанными выше при $r_2 = 0,0265$ м и $2h = 0,025$ м, дают значение 8,2 кГц. Таким образом, за счет использования внутреннего акустически жесткого цилиндра с акустически мягкими кольцевыми перегородками удалось снизить резонансную частоту оболочки почти в 2,3 раза. При необходимости резонансную частоту оболочки можно снизить еще больше. Для этого, как следует из выражения (2.121), достаточно уменьшить $r_0 - r_2$.

Эффекту снижения резонансной частоты оболочки в структуре, изображенной на рис. 43, можно дать простую физическую интерпретацию. Благодаря большому отношению $(r_0 - r_2)/2h$ и идеальной податливости кольцевых перегородок, относительно малые радиальные перемещения стенок оболочки вызывают значительные перемещения частиц жидкости внутри оболочки в осевых направлениях (вдоль оси z). Иными словами, происходит трансформация радиальной колебательной скорости в осевую скорость с коэффициентом трансформации $N \approx 2h/(r_0 - r_2)$, в результате чего внутренняя стенка оболочки оказывается нагруженной эффективной массой, примерно в N^2 раз превышающей фактическую массу среды, находящейся внутри оболочки [20].

Некоторые дополнительные данные об особенностях излучения звука колеблющимися цилиндрическими оболочками с учетом их внутреннего сопротивления на неосесимметричных формах приведены в работах [195, 201].

9. Излучение звука цилиндром конечной длины

Задача определения характеристик звукового поля, создаваемого цилиндром конечной длины, традиционно привлекает внимание акустиков [101, 204, 213]. Интерес к ней обусловлен двумя обстоятельствами. Решение такой задачи представляет значительный практический интерес. Наличие эффективного решения такой задачи позволило бы в полном объеме изучить и звуковое поле, создаваемое колеблющимся цилиндром с учетом структуры его спектра собственных частот и особенностей форм колебаний.

С другой стороны, задача об излучении звука конечным цилиндром представляет большой теоретический интерес, чем в не малой степени обусловлено значительное число посвященных ей публикаций. Этот интерес связан с наличием некоторых специфических трудностей в решении внешних задач для уравнения Гельмгольца для таких областей, как прямоугольник (плоская задача), конечный цилиндр и т. д. Ниже мы обратим внимание на эти трудности и построим достаточно эффективное решение поставленной задачи. Такое решение является важным для более полного отражения возможностей метода частных областей.

Предположим, что излучатель в виде цилиндра конечной длины занимает объем $0 \leq r \leq r_0$, $|z| \leq H$ (рис. 44). На его поверхностях задано распределение колебательной скорости

$$\frac{1}{i\rho c} \frac{\partial p}{\partial (kr)} = f(z), \quad r = r_0;$$

$$\frac{1}{i\rho c} \frac{\partial p}{\partial (kz)} = \psi(r), \quad z = \pm H. \quad (2.122)$$

Предположим также, что функция $f(z)$ четная, т. е. $f(z) = f(-z)$. Это предположение, не являясь существенным, позволит несколько уменьшить громоздкость последующих выкладок.

Как следует из приведенных соотношений, будем рассматривать осесимметричное звуковое поле, создаваемое сплошным цилиндром. В рамках излагаемого подхода обобщение результатов на случай неосесимметричного излучения цилиндром с произвольной толщиной стенок не представляет трудностей.

Общее решение граничной задачи (2.122) строится методом частных областей. Первая трудность, которая здесь возникает, связана с тем, что выделение частных областей вне цилиндра неоднозначно. Если ориентироваться на возможность построения в каждой области общего решения соответствующей граничной задачи для уравнения Гельмгольца, то можно предложить три варианта разбиения. В первом варианте с учетом симметрии задачи выделяются две области —

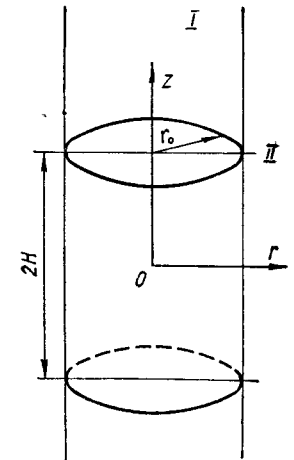


Рис. 44

полубесконечный цилиндр $r \leq r_0$ и $z \geq H$ (область I) и полупространство с цилиндрической полостью $r \geq r_0$, $z \geq 0$ (область II). При этом из симметрии задачи на поверхности $z = 0$ имеет место равенство $\frac{\partial p}{\partial (kz)} = 0$.

Второй вариант разбиения всей области существования поля вне цилиндра основывается на выделении трех областей. Одна из них также полубесконечный цилиндр $r \leq r_0$ и $z \geq H$. Затем выделяется бесконечный слой с цилиндрической полостью $|z| \leq H$, $r \geq r_0$ и, наконец, полупространство с цилиндрической полостью $z \geq H$, $r \geq r_0$. В каждой из таких подобластей можно построить такие наборы частных решений уравнения Гельмгольца для $p(r, z)$, которые содержат достаточно произвола для удовлетворения граничных условий на поверхности цилиндра и условий сопряжения на границах раздела между отдельными областями.

В третьем варианте разбиения выделяются две подобласти (также с учетом симметрии задачи) Первая — это полупространство $z \geq H$, а вторая — бесконечный слой с полостью $r \geq r_0$, $|z| \leq H$. Здесь также легко построить наборы частных решений уравнения Гельмгольца, обладающие достаточной полнотой. Конкретные выкладки приведем ниже для первого способа.

Для построения единственного представления поля вне конечного цилиндра с граничным условием (2.122) следует добавить условия излучения и условия на ребре. Прямое использование условий излучения в их традиционной форме, предполагающей выделение в общей структуре поля бегущих сферических волн, в данном случае нецелесообразно. При использовании метода частичных областей более естественно использовать физическое содержание условий на бесконечности, отражая их в структуре решения для каждой из частичных областей.

Начнем с рассмотрения решения в полубесконечном цилиндре. Здесь общие выражения для $p(r, z)$ должны позволить выполнить второе условие в выражениях (2.122), условия сопряжения на поверхности $r = r_0$, $z \geq H$ и представлять собой волны, уносящие энергию на бесконечность вдоль оси Oz. Составляющую общего решения, позволяющую выполнить второе условие в выражениях (2.122), можно легко построить, используя решение для полубесконечного цилиндрического волновода с мягкими или жесткими стенками. Используя приведенные в первой главе частные решения уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах, эту часть решения можно представить в виде

$$p_1^{(1)}(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i e^{i\alpha_i(z-H)} J_0(\lambda_i r) \quad (z \geq H, r \leq r_0), \quad (2.123)$$

где

$$\alpha_i = \sqrt{k^2 - \lambda_i^2} \quad (k > \lambda_i) \text{ и } \alpha_i = i \sqrt{\lambda_i^2 - k^2} \quad (k < \lambda_i).$$

Такой выбор значений α_i связан с условиями излучения. В представление (2.123) входят либо уносящие на бесконечность энергию бегущие

волны, либо экспоненциально убывающие с ростом z неоднородные волны, не переносящие энергию.

Для выбора последовательности величин λ_i имеется две возможности. В качестве λ_i можно принять корни уравнения $J_0(\lambda r_0) = 0$ либо уравнения $J_1(\lambda r_0) = 0$. Причем в первом случае следует положить $A_0 = 0$. В обоих случаях выражение (2.123) представляет собой набор нормальных волн в цилиндрическом волноводе с мягкими или жесткими стенками. Система функций $J_0(\lambda_i r)$ является полной и ортогональной в области $0 \leq r \leq r_0$. Выбор значений величин A_i позволяет удовлетворить второе условие в выражениях (2.122) при произвольной функции $\psi(r)$, задающей распределение скорости по торцу цилиндра. В дальнейших выкладках примем, что λ_i — корни уравнения $J_1(\lambda_i r_0) = 0$.

Общее представление звукового поля внутри области $z \geq H$, $r \leq r_0$ должно содержать еще выражения, позволяющие удовлетворять условия сопряжения на границе $r = r_0$, $z \geq H$. Соответствующий набор частных решений будем строить, по сути, из решений, вошедших в представление (2.123), но теперь определяющими будут условия на цилиндрической поверхности. Для их удовлетворения надо иметь соответствующий набор тригонометрических функций. Поскольку интервал, на котором необходимо удовлетворить условия, бесконечен, такой набор вместо ряда должен представляться интегралом. С учетом этих соображений вторую составляющую выражения для давления в области I представим в виде интеграла Фурье

$$p_1^{(2)} = \int_0^{\infty} B(\tau) J_0(\gamma r) \cos \tau \xi d\tau, \quad (2.124)$$

где $\gamma = \sqrt{k^2 - \tau^2}$ при $\tau < k$ и $\gamma = i \sqrt{\tau^2 - k^2}$ для $\tau > k$, $\xi = z - H$.

Выражение для давления (2.124) обладает тем свойством, что путем выбора значений произвольной функции $B(\tau)$ можно удовлетворить произвольным условиям по скорости или давлению на поверхности $r = r_0$ при $0 \leq \xi < \infty$. Использование свойств обобщенных функций позволяет рассмотреть и такие типы граничных условий, для которых представления интегралом Фурье в обычном классическом смысле не существует. Для рассматриваемой задачи это очень важно.

При записи выражения (2.124) не обращалось внимания на условия излучения. Учитывая эти условия, можно сказать, что в представлении для $p_1^{(2)}$ содержатся только стоячие волны, которые энергию не переносят.

В представлении для поля давлений во второй области можно непосредственно использовать хорошо известные решения уравнений Гельмгольца для внешности цилиндрической полости. С учетом симметрии звукового поля относительно плоскости $z = 0$ имеем

$$p_{II} = \int_0^{\infty} C(\alpha) H_0^{(1)}(q r) \cos \alpha z d\alpha, \quad (2.125)$$

где $q = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ ($\alpha < k$) и $q = i \sqrt{\alpha^2 - k^2}$ ($\alpha > k$).

Располагая значениями произвольной функции $C(\alpha)$, можно с помощью выражения (2.125) выполнить граничные условия по скорости или давлению на поверхности $r = r_0$. Условие излучения в этом выражении учтено при выборе формы радиальной функции.

Таким образом, все составляющие общего выражения для звукового поля вне конечного цилиндра построены. Для того чтобы приведенные выражения могли служить основой для количественного анализа звукового поля, необходимо указать способ определения произвольных функций $B(\tau)$, $C(\alpha)$, а также произвольных постоянных A_i , по заданным граничным условиям и условиям сопряжения.

Указанные условия с учетом выбора значений λ_i и того факта, что в области I искомое давление p_I представляется в виде $p_I = p_I^{(1)} + p_I^{(2)}$, приводят к следующей системе функциональных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} A_i \alpha_i J_0(\lambda_i r) &= \omega \rho \psi(r), \quad 0 \leq r \leq r_0; \\ \int_0^{\infty} B(\tau) J_0(\gamma r_0) \cos \tau \xi d\tau + \sum_{i=0}^{\infty} A_i e^{i\alpha_i \xi} J_0(\lambda_i r_0) &= \\ = \int_0^{\infty} C(\alpha) H_0^{(1)}(\gamma r_0) \cos \alpha (\xi + H) d\alpha, \quad 0 \leq \xi < \infty; \\ \int_0^{\infty} C(\alpha) q H_1^{(1)}(\gamma r_0) \cos \alpha z d\alpha &= \\ = \begin{cases} -i\omega \rho f(z), & 0 \leq z \leq H; \\ \int_0^{\infty} B(\tau) \gamma J_1(\gamma r_0) \cos \tau (z - H) d\tau, & H \leq z < \infty \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.126)$$

Из первого уравнения этой системы на основе свойств ортогональности функций $J_0(\gamma_i r)$ определяется последовательность постоянных A_i :

$$A_i = \frac{2\omega \rho}{\alpha_i r_0^2 J_0^2(\lambda_i r_0)} \int_0^{r_0} \psi(r) J_0(\lambda_i r) r dr. \quad (2.127)$$

Второе и третье уравнения обращаются на основе использования свойств интеграла Фурье. При этом из второго уравнения находим

$$\begin{aligned} B(\tau) J_0(\gamma r_0) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} A_i e^{i\alpha_i \xi} J_0(\lambda_i r_0) \cos \tau \xi d\xi + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} C(\alpha) H_0^{(1)}(\gamma r_0) \cos \alpha (\xi + H) d\alpha \cos \tau \xi d\xi. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Рассматриваемое на полном интервале $0 \leq z < \infty$ третье равенство

приводит к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} C(\alpha) q H_1^{(1)}(\gamma r_0) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} i\omega \rho f(z) \cos \alpha z dz + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_H^{\infty} \int_0^{\infty} B(\tau) \gamma J_1(\gamma r_0) \cos \tau (z - H) d\tau \cos \alpha z dz. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Если равенства (2.128) и (2.129) трактовать с использованием представлений для обобщенных функций [13, 50], то в них можно поменять порядок суммирования и интегрирования. При этом следует иметь в виду, что соотношения (2.128) и (2.129) уже в представленном виде без дополнительных преобразований образуют систему уравнений для определения функций $C(\alpha)$ и $B(\tau)$. Однако коэффициенты этой системы довольно сложны и непосредственное ее использование затруднено.

После перемены порядка суммирования и интегрирования с использованием данных работы [13] для интеграла в первом слагаемом в правой части уравнения (2.128) имеем

$$\int_0^{\infty} e^{i\alpha_i \xi} \cos \tau \xi d\xi = \frac{\pi}{2} [\delta(\tau + \alpha_i) + \delta(\tau - \alpha_i)] - i \frac{\alpha_i}{\tau^2 - \alpha_i^2}. \quad (2.130)$$

Здесь предполагается, что α_i вещественно. Для чисто мнимых α_i , т.е. для неоднородных волн, этот интеграл существует в обычном смысле:

$$\int_0^{\infty} e^{-|\alpha_i| \xi} \cos \tau \xi d\xi = \frac{|\alpha_i|}{\tau^2 + |\alpha_i|^2}. \quad (2.131)$$

Для второго интеграла с использованием тех же стандартных соотношений [34] получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos \alpha (\xi + H) \cos \tau \xi d\xi &= \cos \alpha H \frac{\pi}{2} [\delta(\tau + \alpha) + \delta(\tau - \alpha)] + \\ &+ \sin \alpha H \frac{\alpha}{\tau^2 - \alpha^2} \end{aligned} \quad (2.132)$$

С помощью равенства (2.132) определяется также значение второго интеграла по z в равенстве (2.129).

Таким образом, после указанных преобразований получаем следующую систему интегральных уравнений для определения произвольных функций $B(\tau)$ и $C(\alpha)$:

$$\begin{aligned} B(\tau) J_0(\gamma r_0) &= -\frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^M A_i J_0(\lambda_i r_0) \left\{ \frac{\pi}{2} [\delta(\tau + \alpha_i) + \delta(\tau - \alpha_i)] - \right. \\ &\left. - \frac{i\alpha_i}{\tau^2 - \alpha_i^2} \right\} - \frac{2}{\pi} \sum_{i=M+1}^{\infty} A_i J_0(\lambda_i r_0) \frac{|\alpha_i|}{\tau^2 + |\alpha_i|^2} + \\ &+ 2C(\tau) H_0^{(1)}(\gamma r_0) \cos \tau H + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} C(\alpha) H_0^{(1)}(\gamma r_0) \frac{\alpha \sin \alpha H}{\tau^2 - \alpha^2} d\alpha; \end{aligned} \quad (2.133)$$

$$C(\alpha) q H_0^{(1)}(q r_0) = -\frac{2}{\pi} i \omega \rho \int_0^H f(z) \cos \alpha z dz + \\ + 2 \cos \alpha H B(\alpha) \gamma J_1(\gamma r_0) + \sin \alpha H \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B(\tau) \gamma J_1(\gamma r_0) \frac{\alpha}{\tau^2 - \alpha^2} d\tau.$$

При получении этих соотношений использовано свойство четности функций $C(\tau)$ и $B(\tau)$, вытекающее из общих свойств интегралов Фурье, представляющих четные функции. Здесь M — число тех корней λ_j , для которых выражение α_j в уравнении (2.123) еще является вещественным. В соответствии со смыслом выражения (2.123) можно сказать, что M — это число распространяющихся при данной частоте мод в цилиндрическом волноводе радиусом r_0 с жесткими стенками. Величина q_τ определяется так же, как и в уравнении (2.125), с заменой в выражении для q величины α на величину τ , а при вычислении значений γ_α в выражении (2.124) следует заменить τ на α .

Система интегральных уравнений (2.133) не может быть использована непосредственно для вычисления значений искомых функций $B(\tau)$ и $C(\alpha)$ при наличии δ -функций в ее правых частях. Однако эта особенность в структуре системы может быть устранена выбором такого частного решения для $B(\tau)$ и $C(\alpha)$, которое устраняет δ -функции в свободных членах системы. Наличие же вычисленных в явном виде особых слагаемых в выражениях для $B(\tau)$ и $C(\alpha)$ не приводит к каким-либо трудностям в вычислениях характеристик поля.

В связи с отмеченным обстоятельством будем считать, что слагаемые с A_j в системе (2.133) отсутствуют. В физическом плане такое предположение эквивалентно тому, что на торце цилиндра имеется жесткая неподвижная поверхность, т. е. $\psi(r) = 0$ в выражениях (2.122). Здесь же следует отметить, что рассмотреть случаи $\psi(r) \neq 0$ можно таким образом, чтобы в соответствующей системе интегральных уравнений не возникали δ -функции в свободных членах, если воспользоваться третьим из указанных выше способов разделения всей области существования звукового поля на частичные области. При этом в выражениях (2.122) следует положить $f(z) = 0$.

Таким образом, сделав некоторые предположения о распределении колебательной скорости по поверхности цилиндра, приходим к следующей системе интегральных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b(\tau) \frac{J_0(\gamma r_0)}{\gamma J_1(\gamma r_0)} - 2d(\tau) \cos \tau H &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d(\alpha) \frac{\alpha \sin \alpha H}{\tau^2 - \alpha^2} d\alpha; \\ -2b(\tau) \cos \tau H + d(\tau) q_\tau \frac{H_1^{(1)}(q_\tau r_0)}{H_0^{(1)}(q_\tau r_0)} &= \\ = \sin \tau H \frac{2}{\pi} \int_0^\infty b(\alpha) \frac{\tau}{\alpha^2 - \tau^2} d\alpha - i \omega \rho \frac{2}{\pi} \int_0^H f(z) \cos \tau z dz; \\ b(\tau) &= B(\tau) \gamma J_1(\gamma r_0), \quad d(\tau) = C(\tau) H_0^{(1)}(q_\tau r_0), \end{aligned} \right\} \quad (2.134)$$

которая является сложной системой сингулярных интегральных уравнений. Методы численного решения таких систем недостаточно разработаны. Дальнейший шаг в упрощении этой системы связан с предположением о том, что входящие в нее сингулярные интегралы могут пониматься в смысле главного значения. Использование такого предположения дает возможность избавиться от сингулярности в системе (2.134). Следует отметить, что поскольку в данном случае речь идет лишь о поиске значений плотностей интегральных представлений, то физическую интерпретацию сделанного предположения дать трудно.

Исходя из представлений (2.124) и (2.125), можно заключить, что неизвестные функции $C(\alpha)$ и $B(\tau)$ должны быть четными, т. е. $C(\alpha) = C(-\alpha)$ и $B(\tau) = B(-\tau)$. Этими же свойствами обладают и $b(\tau)$ и $d(\tau)$. С учетом этого обстоятельства рассмотрим, например, интеграл

$$Q(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d(\alpha) \frac{\alpha \sin \alpha H}{\tau^2 - \alpha^2} d\alpha. \quad (2.135)$$

Тождественные преобразования позволяют представить его в форме

$$Q(\tau) = \frac{1}{\pi \tau} \left\{ \int_0^\infty \frac{d(\alpha) \alpha \sin \alpha H}{\tau - \alpha} d\alpha + \int_0^\infty \frac{d(\alpha) \alpha \sin \alpha H}{\tau + \alpha} d\alpha \right\}.$$

Вводя в первом интеграле замену переменных $u = \tau - \alpha$ и во втором $v = -(\tau + \alpha)$, получаем

$$Q(\tau) = \frac{1}{\pi \tau} \left\{ - \int_\tau^{-\infty} d(\tau - u) (\tau - u) \sin(\tau - u) H \frac{du}{u} + \right. \\ \left. + \int_{-\tau}^{-\infty} d(v + \tau) (v + \tau) \sin(v + \tau) H \frac{dv}{v} \right\}. \quad (2.136)$$

С учетом четности подынтегральных функций после замены v на $-u$ окончательно находим следующее представление для $Q(\tau)$:

$$Q(\tau) = \frac{1}{\pi \tau} \int_{-\infty}^\infty \frac{d(\tau - u) (\tau - u) \sin(\tau - u) H}{u} du \quad (2.137)$$

В этом представлении особенность на пути интегрирования расположена в точке $u = 0$. При этом удастся получить удобное эквивалентное представление для $Q(\tau)$, в котором уже учтено, что несобственный интеграл в представлении (2.137) понимается в смысле главного значения. Для этого необходимо представить интеграл в виде суммы двух интегралов по промежуткам $(-\infty, 0]$ и $[0, \infty)$ и заменить переменную интегрирования u в первом интеграле на $-u$. Тогда получим

$$Q(\tau) = \frac{1}{\pi \tau} \int_0^\infty [d(\tau - u) (\tau - u) \sin(\tau - u) H - \\ - d(\tau + u) (\tau + u) \sin(\tau + u) H] \frac{du}{u}. \quad (2.138)$$

Ясно, что такой интеграл в подынтегральном выражении уже не имеет в точке $u = 0$ особенности. Использование такого приема позволяет получить явный вид регулярной системы интегральных уравнений, отвечающей системе (2.134), регуляризация которой проведена на основе вычисления несобственных интегралов в смысле главного значения:

$$\begin{aligned} b(\tau) \frac{j_0(\gamma r_0)}{\gamma j_1(\gamma r_0)} - 2d(\tau) \cos \tau H &= \frac{1}{\pi \tau} \int_0^\infty [d(\tau - u)(\tau - u) \sin(\tau - u)H - \\ &- d(\tau + u)(\tau + u) \sin(\tau + u)H] \frac{du}{u}; \\ &- 2b(\tau) \cos \tau H + d(\tau) q_\tau \frac{H_1^{(1)}(q_\tau r_0)}{H_0^{(1)}(q_\tau r_0)} = \\ &= \frac{1}{\tau} \sin \tau H \int_0^\infty [b(\tau + u) - b(\tau - u)] \frac{du}{u} - i\omega_0 \frac{2}{\pi} \int_0^H f(z) \cos \tau z dz. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Решение системы (2.139) можно найти на основе метода, аналогичного методу редукции применительно к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Следует также иметь в виду, что в данной задаче об излучении звука конечным круговым цилиндром в окрестности угловых окружностей в звуковом поле будут существовать локальные особенности, характер которых подробно изучен выше. Осесимметричность звукового поля не сказывается на характере особенности, и, следовательно, ранее полученные результаты позволяют однозначно определить характер поведения искомых функций $b(\tau)$ и $d(\tau)$ с ростом их аргумента. Такая информация позволяет существенно улучшить метод редукции также применительно к процедуре решения системы интегральных уравнений (2.139).

В заключение следует сделать еще одно замечание. Возникновение в представлении звукового поля, да и, вообще говоря, любого волнового поля, интегралов с особенностью на пути интегрирования является довольно типичной ситуацией. Возникающая при этом математическая неоднозначность в определении значения такого интеграла означает и некоторую неоднозначность в постановке задачи. Физический анализ такой неоднозначности обычно позволяет достаточно четко определить тот путь вычисления интегралов, который соответствует существу задачи [71]. В частности, очень важно использовать в таком процессе принцип предельного поглощения совместно с переходом к контурному интегрированию. Однако такой прием полностью оправдан на том этапе, когда известны явные выражения для плотностей интегральных представлений, в данном случае функции $b(\tau)$ и $d(\tau)$ в системе (2.139). В рассматриваемой задаче об излучении звука коротким цилиндром эти функции должны определяться из системы сингулярных уравнений, в которой интегралы также допускают неоднозначную трактовку. Введение в среду затухания не сказывается на характере сингулярности системы (2.134). Какие-либо другие способы, кроме приведенного выше способа трактовки интегралов в смысле главного значения для регуляризации системы (2.134), указать трудно.

1. Излучение звука сферой, охваченной незамкнутым сферическим слоем

В предыдущей главе были рассмотрены задачи, решение которых строилось в цилиндрической системе координат. В настоящей главе рассмотрим задачи, решение которых удобно выполнить в сферической системе координат. К ним относятся, в частности, задачи, связанные с излучением сферических источников звука, а также источников, поверхности которых можно аппроксимировать частями координатных поверхностей сферической системы координат [18, 31].

Хорошо известно, что требуемое распределение звуковой энергии в окружающей источник среде можно реализовать двумя способами. Первый способ заключается в том, что на излучающей поверхности источника создается определенное распределение колебательной скорости $f(\theta)$. Он легко реализуем в тех случаях, когда поверхность источника состоит из дискретных элементов. При этом чем больше таких элементов на единицу поверхности источника, тем более сложную функцию $f(\theta)$ можно реализовать. Указанный способ подробно разработан и позволяет решать как прямую задачу — определение звукового поля в пространстве по заданной функции $f(\theta)$, так и обратную задачу — определение $f(\theta)$ по заданному распределению звукового поля в пространстве [79, 89, 154]. В тех случаях, когда источник звука представляет собой механически неразделимую единую колебательную систему (например, колеблющуюся пьезокерамическую цилиндрическую или сферическую оболочку [118]), использование первого способа исключено. В этих случаях применяют второй способ, заключающийся в экранировании части поверхности источника [143]. Такой способ упоминался во второй главе, и можно было убедиться, что, хотя идея этого способа очевидна и он прост в реализации, аналитическое определение звукового поля в окружающей источник среде по заданной схеме экранирования, как правило, представляет собой достаточно сложную дифракционную задачу.

Еще более сложной задачей представляется задача определения схемы экранирования по заданному распределению звукового поля в пространстве. Поэтому при предварительном выборе схемы экранирования источников звукового поля большую роль играет эвристический подход. Для примера рассмотрим пульсирующую сферу. Как известно, она создает равномерное распределение поля в пространстве. Предположим, что нам необходимо сконцентрировать звуковую энергию

вдоль оси z (рис. 45, а). Тогда представляется очевидным, что сферу 1 необходимо охватить незамкнутым сферическим незвукопрозрачным слоем в виде экваториального пояса 2. Если требуется сконцентрировать энергию только в положительном направлении оси z (рис. 45, б), то закрыть слоем необходимо также нижнюю часть сферы. В тех случаях, когда необходимо сконцентрировать энергию в плоскости $z = 0$, оказывается достаточным закрыть слоем полярные области сферы (рис. 45, в).

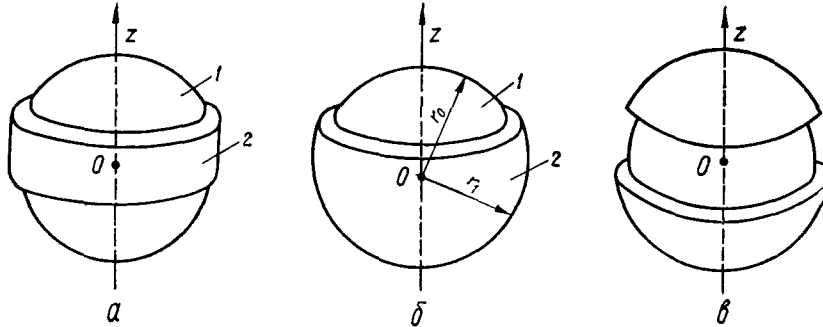


Рис 45

После того как выбрана конкретная схема экранировки источника, можно приступить к определению количественных характеристик его ближнего и дальнего звукового поля. Ниже остановимся на некоторых задачах такого рода.

Рассмотрим излучатель, изображенный на рис. 45, в. Его сечение и соответствующие обозначения представлены на рис. 46. Если мысленно продолжить слой внутри сферического источника до его центра, как показано на этом рисунке штриховыми линиями, то получатся два соосных конических экрана, которые вместе образуют так называемый биконический рупор. Изучение особенностей излучения звука из биконического рупора, в горле которого расположен сферический источник звука, посвящена работа [32]. Именно эта работа и положена в основу исследований, приведенных ниже.

Будем полагать, что слои, охватывающие сферический источник звука, выполнены из акустически мягкого материала:

$$p = 0; \quad \theta = \theta_0; \quad \theta = \theta_1; \quad r_0 \leq r \leq r_1; \quad (3.1)$$

$$p = 0; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0; \quad \theta_1 \leq \theta \leq \pi; \quad r = r_1, \quad (3.2)$$

а на открытой части поверхности сферы задано некоторое осесимметричное (относительно оси Oz) распределение нормальной составляющей колебательной скорости

$$v = v_0 f(\theta); \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1; \quad r = r_0. \quad (3.3)$$

Как обычно, всю область существования поля разобьем на две частичные области: область I ($\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1; r_0 \leq r \leq r_1$) и область II ($0 \leq \theta \leq \leq \pi; r = r_1$). Потенциалы скорости в частичных областях представле-

ны в форме

$$p_1 = -i\omega\rho \sum_{m=1}^{\infty} [A_m i v_m(kr) + B_m n_{v_m}(kr)] T_{v_m}(\cos \theta); \quad (3.4)$$

$$p_2 = -i\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} S_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta), \quad (3.5)$$

где

$$T_{v_m}(\cos \theta) = P_{v_m}(\cos \theta) + D_m(\cos \theta). \quad (3.6)$$

С учетом условия (3.1) и выражения (3.6) для определения величин v_m и D_m имеет место следующая система трансцендентных уравнений:

$$\begin{aligned} P_{v_m}(\cos \theta_0) - D_m Q_{v_m}(\cos \theta_0) &= 0; \\ P_{v_m}(\cos \theta_1) - D_m Q_{v_m}(\cos \theta_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из первого уравнения системы (3.7) следует

$$D_m = \frac{P_{v_m}(\cos \theta_0)}{Q_{v_m}(\cos \theta_0)}. \quad (3.8)$$

Второе уравнение системы (3.7) с учетом выражения (3.8) дает исходное соотношение для определения собственных чисел v_m :

$$P_{v_m}(\cos \theta_0) Q_{v_m}(\cos \theta_1) - P_{v_m}(\cos \theta_1) Q_{v_m}(\cos \theta_0) = 0. \quad (3.9)$$

Установим предварительно асимптотическое выражение для величин v_m , позволяющее получить достаточно точные их значения для больших номеров m . При этом будем пользоваться методом, развитым Д. Г. Стоксом при рассмотрении им аналогичной задачи для функций Бесселя [60], и данными работы [30]. С учетом асимптотических представлений функций Лежандра [8, 60]

$$\begin{aligned} P_{v_m}(\cos \theta) \approx \left(\frac{2}{v_m \pi \sin \theta} \right)^{1/2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4v_m} \right) \cos [(v_m + 1/2)\theta - \pi/4] + \right. \\ \left. + \frac{1}{8v_m} \operatorname{ctg} \theta \sin [(v_m + 1/2)\theta - \pi/4] \right\}; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} Q_{v_m}(\cos \theta) \approx \left(\frac{\pi}{2v_m \sin \theta} \right)^{1/2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4v_m} \right) \cos [(v_m + 1/2)\theta + \pi/4] + \right. \\ \left. + \frac{1}{8v_m} \operatorname{ctg} \theta \sin [(v_m + 1/2)\theta + \pi/4] \right\}; \end{aligned}$$

соотношение (3.9) можно привести к следующему виду:

$$F \sin \varphi + G \cos \varphi = 0,$$

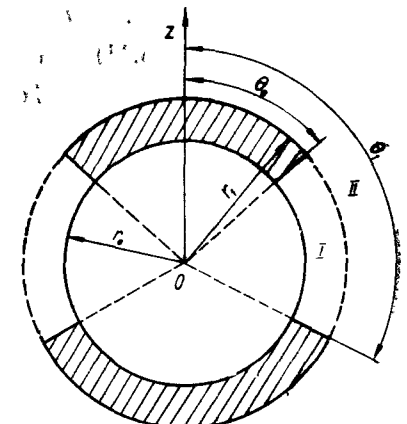


Рис 46

где

$$F = \left(1 - \frac{1}{4v_m}\right)^2 + \frac{1}{64v_m^2} \operatorname{ctg} \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_1; \quad (3.11)$$

$$G = \left(1 - \frac{1}{4v_m}\right)^2 \cdot \frac{1}{8v_m} (\operatorname{ctg} \theta_0 - \operatorname{ctg} \theta_1); \quad \varphi = (v_m + 1/2) (\theta_1 - \theta_0).$$

Введем новые обозначения. Пусть

$$F = M \sin \psi; \quad G = M \cos \psi; \quad (3.12)$$

$$M = (F^2 + G^2)^{1/2}; \quad \psi = \arctg F/G.$$

Тогда уравнение (3.11) примет вид

$$M \cos (\varphi - \psi) = 0. \quad (3.13)$$

Полагая, что $M \neq 0$, с учетом значения величины ψ имеем

$$v_m = -1/2 + \frac{1}{\Delta\theta} \left\{ (m - 1/2) \pi + \arctg \left[\frac{1}{\operatorname{ctg} \theta_0 - \operatorname{ctg} \theta_1} \left(8v_m - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2 + \frac{\operatorname{ctg} \theta_0 - \operatorname{ctg} \theta_1}{8v_m - 2} \right) \right] \right\}, \quad (3.14)$$

где

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0; \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

Используя известное разложение арктангенса, представим выражение (3.14) в виде следующего ряда:

$$v_m = \delta_m - \frac{\operatorname{ctg} \theta_0 - \operatorname{ctg} \theta_1}{\Delta\theta} \left[\frac{8v_m - 2}{(8v_m - 2)^2 + \operatorname{ctg} \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_1} \right] + \\ + \frac{(\operatorname{ctg} \theta_0 - \operatorname{ctg} \theta_1)^3}{3\Delta\theta} \left[\frac{8v_m - 2}{(8v_m - 2)^2 + \operatorname{ctg} \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_1} \right]^3 + \dots, \quad (3.15)$$

где

$$\delta_m = (2\pi m - \Delta\theta)/2\Delta\theta.$$

После разложения величины, заключенной в квадратные скобки в ряд Маклорена ряд (3.15) можно представить в такой форме:

$$v_m = \delta_m - a_1 \frac{1}{v_m} - b_1 \frac{1}{v_m^3} + \dots, \quad (3.16)$$

где

$$a_1 = \frac{\operatorname{ctg} \theta_0 - \operatorname{ctg} \theta_1}{8\Delta\theta}; \quad b_1 = \frac{(\operatorname{ctg} \theta_0 - \operatorname{ctg} \theta_1)^3}{32\Delta\theta}.$$

С учетом выражения (3.16) представим искомую величину v_m рядом по степеням $1/\delta_m$ и определим коэффициенты такого ряда:

$$v_m = \delta_m + a \frac{1}{\delta_m} + b \frac{1}{\delta_m^2} + \dots = \delta_m - a_1 \frac{1}{\delta_m + \frac{a}{\delta_m} + \frac{b}{\delta_m^2} + \dots} -$$

$$- b_1 \frac{1}{\left(\delta_m + \frac{a}{\delta_m} + \frac{b}{\delta_m^2} + \dots \right)^2} + \dots = \delta_m - a_1 \left(1 - \frac{a}{\delta_m^2} - \right. \\ \left. - \frac{b}{\delta_m^3} - \dots \right) \frac{1}{\delta_m} - b_1 \left(1 - \frac{2a}{\delta_m^2} - \frac{2b}{\delta_m^3} - \dots \right) \frac{1}{\delta_m^2} - \dots = \\ = \delta_m - a_1 \frac{1}{\delta_m} - b_1 \frac{1}{\delta_m^2} - \dots \quad (3.17)$$

Используя последнее равенство, а также выражения, определяющие коэффициенты a_1 и b_1 , окончательно получаем

$$v_m \approx \delta_m - \frac{\operatorname{ctg} \theta_0 - \operatorname{ctg} \theta_1}{8(\theta_1 - \theta_0)} \left(\frac{1}{\delta_m} + \frac{1}{4\delta_m^2} \right). \quad (3.18)$$

Выражение (3.18), естественно, не пригодно для вычисления первых значений v_m . Поэтому для практически важного случая симметричной задачи, когда $\theta_1 = \pi - \theta_0$, в табл. 2 приведены первые значения v_m , полученные путем численного решения уравнения (3.9) с помощью точных выражений функций Лежандра через гипергеометрические функции Гаусса [60]. При суммировании гипергеометрических рядов первый отбрасываемый член имел порядок 10^{-7} .

Таблица 2

m	θ_0 , град										
	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
1	0,652	0,768	0,897	1,046	1,220	1,430	1,690	2,020	2,456	3,064	3,972
2	1,986	2,198	2,439	2,721	3,055	3,362	3,968	4,616	5,477	6,682	8,486
3	3,294	3,602	3,957	4,373	4,869	5,474	6,228	7,196	8,485	10,29	12,99
4	4,593	4,998	5,467	6,018	6,677	7,480	8,483	9,772	11,49	—	—
5	5,888	6,390	6,973	7,559	8,481	9,484	10,73	—	—	—	—
6	7,180	7,780	8,477	9,299	10,28	—	—	—	—	—	—
7	8,470	9,168	9,981	10,94	—	—	—	—	—	—	—
8	9,759	10,56	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Данные табл. 2 показывают, что количество корней уравнения (3.9), которые необходимо определять с помощью точных выражений функций Лежандра, зависит от величины угла θ_0 . Заметим, что наибольшее значение v_m для каждого угла в табл. 2 с точностью до четырех значащих цифр совпадает со значением, определяемым формулой (3.18) для данного m .

Условие (3.3) дает возможность установить связь между коэффициентами A_m и B_m с помощью соотношения

$$\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p_1}{\partial (kr)} = v_0 f(\theta); \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1; \quad r = r_0 \quad (3.19)$$

и свойств полноты и ортогональности функции $T_{v_m}(\cos \theta)$ на интервале $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$. При этом

$$B_m = \frac{l_m - A_m i'_{v_m}(kr_0)}{n_{v_m}(kr_0)}, \quad (3.20)$$

где

$$L_m = - \left\{ v_0 \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) T_{v_m}(\cos \theta) d\theta \right\} / k \int_{\theta_0}^{\theta_1} [T_{v_m}(\cos \theta)]^2 d\theta.$$

С учетом соотношения (3.20) выражение для потенциала скорости преобразуется к виду

$$p_1 = -i\omega p \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \Delta_m(kr) + L_m \frac{n_{v_m}(kr)}{n'_{v_m}(kr_0)} \right] T_{v_m}(\cos \theta), \quad (3.21)$$

где

$$\Delta_m(kr) = i_{v_m}(kr) - \frac{i'_{v_m}(kr_0)}{n'_{v_m}(kr_0)} n_{v_m}(kr).$$

Неизвестные комплексные коэффициенты в выражениях (3.5) и (3.21) определяются из следующей системы функциональных уравнений, объединяющих в себе условия непрерывности поля на границе частичных областей и граничное условие (3.2):

$$p_2 = \begin{cases} p_1; & \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1; \quad r = r_1; \\ 0; & 0 \leq \theta \leq \theta_0; \quad \theta_1 \leq \theta \leq \pi; \quad r = r_1; \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial(kr)} = \frac{\partial p_1}{\partial(kr)}; \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1; \quad r = r_1. \quad (3.23)$$

Алгебраизация этих условий уже знакомым нам методом приводит к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$S_n h_n^{(1)}(kr_1) - \frac{2n+1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \Delta_m(kr_1) N_{nm} = \frac{2n+1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} L_m N_{nm} \frac{n_{v_m}(kr_1)}{n'_{v_m}(kr_0)};$$

$$A_m \Delta'_m(kr_1) - \frac{1}{N_m} \sum_{n=0}^{\infty} S_n h_n^{(1)'}(kr_1) N_{nm} = -L_m \frac{n'_{v_m}(kr_1)}{n'_{v_m}(kr_0)}, \quad (3.24)$$

где

$$N_{nm} = \frac{\sin^2 \theta_0 P_n(\cos \theta_0) T_{v_m}(\cos \theta_0) - \sin^2 \theta_1 P_n(\cos \theta_1) T_{v_m}(\cos \theta_1)}{v_m(v_m+1) - n(n+1)};$$

$$N_m = \frac{1}{2v_m+1} \left[\sin^2 \theta_1 T_{v_m}'(\cos \theta_1) \frac{d}{dv_m} T_{v_m}(\cos \theta_1) - \sin^2 \theta_0 T_{v_m}'(\cos \theta_0) \frac{d}{dv_m} T_{v_m}(\cos \theta_0) \right].$$

В практически важном частном случае, когда $\theta_1 = \pi - \theta_0$, величины N_{nm} и N_m упрощаются:

$$N_{nm} = \begin{cases} \frac{2P_n(\cos \theta_0)}{[v_m(v_m+1) - n(n+1)] Q_{v_m}(\cos \theta_0)}, & v_m \neq n, \\ -\frac{(v_m+1)[\cos \theta_0 P_n(\cos \theta_0) - P_{n+1}(\cos \theta_0)]}{v_m \sin^2 \theta_0 Q_{v_m}(\cos \theta_0)}, & v_m = n; \end{cases}$$

$$N_m = \frac{2}{2v_m+1} \left[\sin^2 \theta_0 T_{v_m}'(\cos \theta_0) \frac{d}{dv_m} T_{v_m}(\cos \theta_0) \right]. \quad (3.25)$$

Сравним полученную систему (3.24) с ранее исследованной на квазирегулярность системой (2.13). Очевидно, что их структуры полностью совпадают. Более того, характер поведения коэффициентов при неизвестных и свободных членах (при больших значениях номеров) у обеих систем также совпадают. Убедимся в этом на примере частного случая, когда $\theta_1 = \pi - \theta_0$.

Учитывая соотношение (3.25), введем следующие обозначения:

$$\tilde{S}_n = S_n h_n^{(1)'}(kr_1) P_n(\cos \theta_0); \quad \tilde{A}_m = A_m \frac{\Delta_m(kr_1)}{Q_{v_m}(\cos \theta_0)}.$$

Тогда система (3.24) преобразуется к виду

$$\tilde{S}_n \frac{h_n^{(1)}(kr_1)}{h_n^{(1)'}(kr_1)} - \frac{P_n(\cos \theta_0)(2n+1)}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_m}{v_m(v_m+1) - n(n+1)} =$$

$$= \frac{(2n+1)P_n(\cos \theta_0)}{2} \sum_{m=1}^{\infty} L_m N_{nm} \frac{n_{v_m}(kr_1)}{n'_{v_m}(kr_0)};$$

$$\tilde{A}_m \frac{\Delta'_m(kr_1)}{\Delta_m(kr_1)} - \frac{1}{N_m Q_{v_m}(\cos \theta_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{S}_n}{v_m(v_m+1) - n(n+1)} =$$

$$= -L_m \frac{n'_{v_m}(kr_1)}{n'_{v_m}(kr_0) Q_{v_m}(\cos \theta_0)}. \quad (3.26)$$

Используя асимптотические представления сферических функций Бесселя и Ханкеля при больших значениях индексов [8], нетрудно показать, что

$$\frac{h_n^{(1)}(kr_1)}{h_n^{(1)'}(kr_1)} \approx \frac{kr_1}{n}; \quad \frac{\Delta'_m(kr_1)}{\Delta_m(kr_1)} \approx \frac{v_m}{kr_1}; \quad \frac{n'_{v_m}(kr_1)}{n'_{v_m}(kr_0)} \approx \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{v_m+2}. \quad (3.27)$$

$n \gg kr_1 \qquad v_m \gg kr_1$

Учитывая асимптотические представления функций Лежандра при больших значениях индексов [8] и соотношения (3.27), после несложных выкладок систему (3.26) можно привести к виду

$$\tilde{S}_n^* - \frac{4n}{\pi} \cos^2[(n+1/2)\theta_0 - \pi/4] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_m^*}{v_m(v_m+1) - n(n+1)} =$$

$$= \frac{4n}{\pi kr_1} \cos^2[(n+1/2)\theta_0 - \pi/4] \sum_{m=1}^{\infty} L_m N_{nm} \frac{n_{v_m}(kr_1)}{n'_{v_m}(kr_0)}; \quad (3.28)$$

$$\tilde{A}_m^* - \frac{2v_m}{\pi/2 - \theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{S}_n^*}{v_m(v_m+1) - n(n+1)} = \frac{\sin \theta_0}{v_m(\pi/2 - \theta_0)} \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{v_m+2};$$

где

$$\tilde{S}_n^* = \tilde{S}_n \sin \theta_0; \quad \tilde{A}_m^* = \tilde{A}_m \frac{1}{kr_1}.$$

Непосредственное сопоставление системы (3.28) с системой (2.17) показывает, что они идентичны (в смысле характера убывания коэффициентов при неизвестных и свободных членах). Это может служить достаточной основой для применения метода редукции при отыскании численного решения системы (3.24).

Перейдем к анализу особенностей акустических свойств рассматриваемого излучателя. При этом ограничимся рассмотрением случая, когда $\theta_1 = \pi - \theta_0$, а $f(\theta) = \text{const}$. Характеризуя диаграмму направленности сферического излучателя, охваченного двумя сферическими слоями в виде полярных «шапок», следует отметить ее самые общие особенности — концентрацию основной доли звуковой энергии в плос-

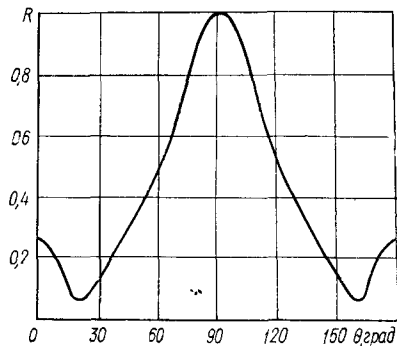


Рис. 47

кости $\theta = \pi/2$ и наличие двух острых дополнительных лепестков в направлении оси z . Для иллюстрации на рис. 47 приведена типичная диаграмма направленности при $r_0/\lambda = 0,36$; $(r_1 - r_0)/\lambda = 1$; $\theta_0 = 50^\circ$; $\theta_1 = 130^\circ$, число коэффициентов S_n и A_m , удержанных в системе (3.24) при ее численном решении, равнялось 12 и 7 соответственно. Как указывалось выше, свойство излучателя концентрировать звуковую энергию в плоскости $\theta = \pi/2$ обусловлено выбором формы слоя. Дополнительные же лепестки в направлениях $\theta = 0$; $\theta = \pi$ (будем называть их осевыми лепестками) появляются за счет рассеивания звуковой волны на кольцевых кромках слоя: $r = r_1$; $\theta = \theta_0$; $\theta = \theta_1$. Образующиеся краевые волны на этих кромках в силу симметрии синфазны относительно направлений $\theta = 0$; $\theta = \pi$, в результате чего и происходит повышение звукового давления в этих направлениях.

Остановимся более подробно на акустических свойствах сферического излучателя со слоем. На рис. 48—50 показано изменение ширины основного лепестка диаграммы направленности $\theta_{0,7}$, уровня осевых лепестков σ и коэффициента концентрации K (кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют значениям $(r_1 - r_0)/\lambda$, равным 0,4; 0,6; 1,0 и 1,5 при $r_0/\lambda =$

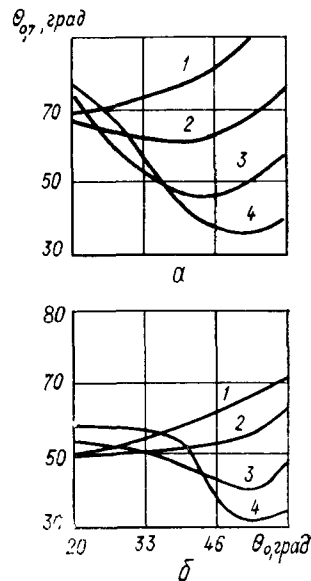


Рис. 48

$= 0,25$ (а) и $r_0/\lambda = 0,5$ (б) в зависимости от угла θ_0). Графические данные позволяют установить еще ряд свойств дальнего поля излучателя. Прежде всего это существенная зависимость диаграммы направленности от угла θ_0 . По мере увеличения угла θ_0 сначала происходит сужение основного лепестка (при $(r_1 - r_0)/\lambda \geq 0,6$), снижение уровня осевых лепестков и увеличение коэффициента концентрации. При

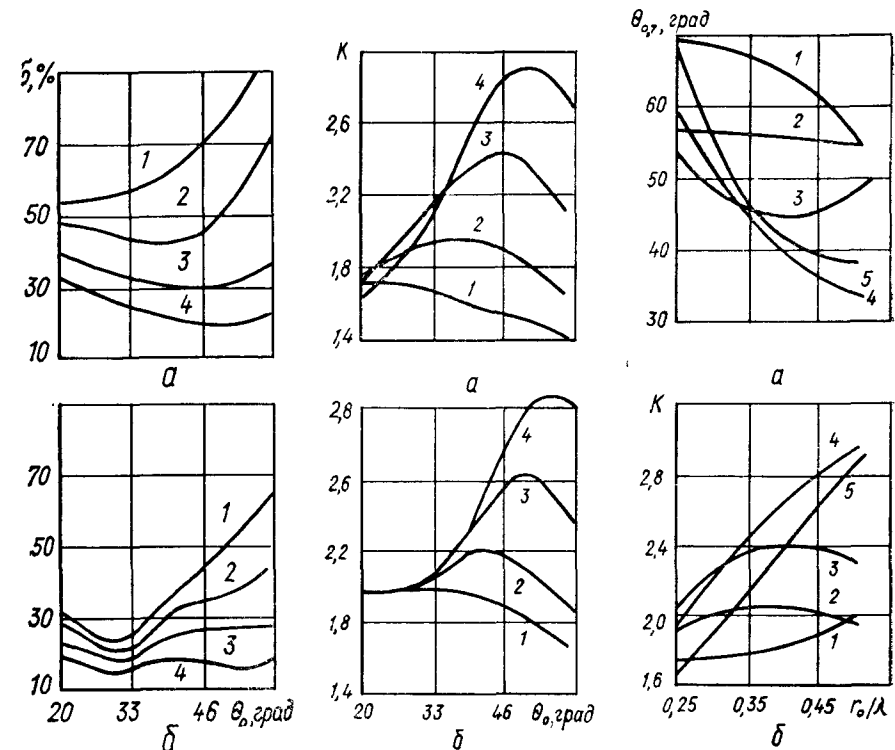


Рис. 49

Рис. 50

Рис. 51

достижении некоторого определенного значения θ_0 эти параметры достигают экстремальных значений. Дальнейший рост θ_0 приводит к обратному процессу — основной лепесток расширяется, уровень осевых лепестков повышается, а коэффициент концентрации падает. Важно также и то, что с ростом волновой толщины слоя происходит увеличение концентрации звуковой энергии в плоскости $\theta = \pi/2$ и уменьшение уровня осевых лепестков. Наиболее ярко это свойство проявляется при средних и больших углах θ_0 .

Оценим способность рассматриваемого излучателя сохранять форму диаграммы направленности в интервале частот. На рис. 51 показана зависимость $\theta_{0,7}$ (рис. 51, а) и K (рис. 51, б) от волнового размера сферы r_0/λ при $(r_1 - r_0)/r_0 = 2,6$ для угла, равного 20; 30; 40; 50 и 60° (соответственно кривые 1, 2, 3, 4 и 5). Анализ поведения кривых позволяет убедиться, что при определенных значениях θ_0 и $(r_1 - r_0)/r_0$ рассмат-

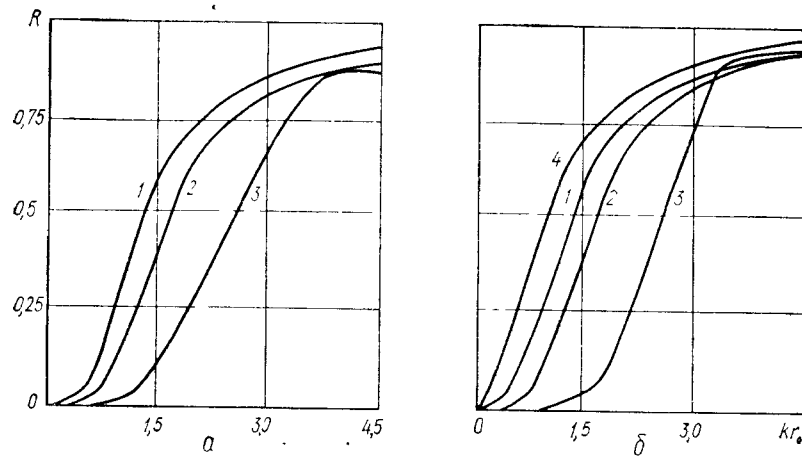


Рис. 52

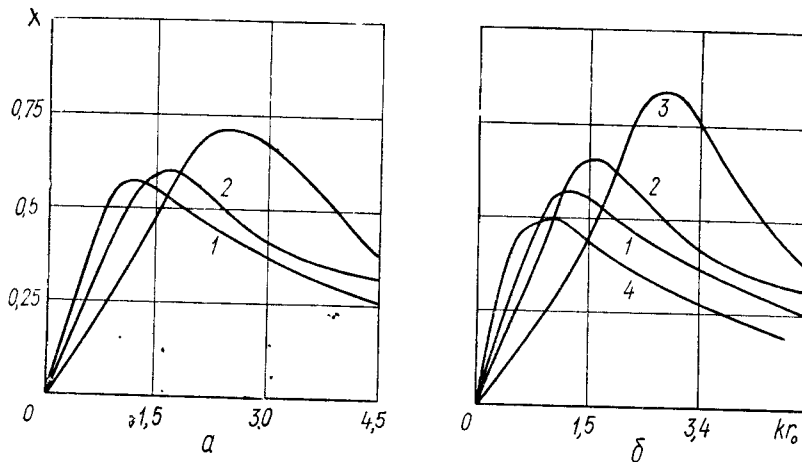


Рис. 53

риваемому излучателю присущи диапазонные свойства, по крайней мере в области частот до одной октавы.

Перейдем к изучению импеданса излучения рассматриваемого источника звуковых волн. На рис. 52 и 53 показаны частотные зависимости безразмерных активной R и реактивной X составляющих импеданса излучения сферы, охваченной слоем в виде двух полярных шапок, для угла θ_0 , равного 20° , 40° и 60° (соответственно кривые 1, 2 и 3) при $r_1/r_0 = 1,1$ (а) и $r_1/r_0 = 2,5$ (б). Как видно, с ростом угла θ_0 все кривые закономерно смещаются в сторону больших значений kr_0 . При этом значение X в области экстремальных участков кривых растет. Важно также отметить, что с уменьшением угла θ_0 значения R и X приближаются к значениям таковых для пульсирующего сферического излучателя без слоя (ср. кривую 1 с кривой 4). Своеобразна закономерность зависимости изменения R и X от отношения r_1/r_0 . Сравнивая

кривые для разных значений r_1/r_0 , нетрудно убедиться, что при небольших значениях угла θ_0 они мало отличаются друг от друга. Однако с ростом θ_0 отличие становится заметным. При этом для R наиболее сильное отличие проявляется в области восходящих участков кривых, а для X — в области экстремальных участков. Дальнейшее увеличение отношения r_1/r_0 уже не вызывает изменения R и X .

Мы рассмотрели случай, когда сферический излучатель был охвачен слоем в виде двух полярных шапок. Если одну из шапок убрать, например верхнюю, то можно прийти к варианту, изображенному на рис. 45, б — обеспечение концентрации звуковой энергии не в плоскости $\theta = \pi/2$, а в направлении оси Oz [31, 47, 96].

В этом случае граничные условия (3.1), (3.2) и (3.3) следует заменить на следующие:

$$p = 0; \quad \theta = \theta_0; \quad r_0 \leq r \leq r_1; \quad (3.29)$$

$$p = 0; \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi; \quad r = r_1; \quad (3.30)$$

$$v = v_0 f(\theta); \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0; \quad r = r_0, \quad (3.31)$$

а частичные области определить так: область I ($0 \leq \theta \leq \theta_0; r_0 \leq r \leq r_1$) и область II ($0 \leq \theta \leq \pi; r \geq r_1$).

Форму записи звуковых давлений можно оставить прежней [см. выражения (3.4) и (3.5)], однако в равенствах (3.6), (3.20) и (3.21) необходимо положить $D_m = 0$. Тогда трансцендентное уравнение для определения постоянных разделения примет вид

$$P_{v_m}(\cos \theta_0) = 0. \quad (3.32)$$

Первые номера v_m корней этого уравнения могут быть определены с помощью численных методов либо графиков, приведенных в работе [49]. Корни более высоких порядков можно вычислить по простой формуле, приведенной в работе [60]:

$$v_m = -\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{\tau_m}{\theta_0} \right)^2 \right], \quad (3.33)$$

где τ_m — корни уравнения $J_0(\tau) = 0$.

Уравнения (3.22) и (3.23) необходимо заменить на следующие:

$$p_2 = \begin{cases} p_1, & 0 \leq \theta \leq \theta_0, \quad r = r_1; \\ 0, & \theta_0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = r_1; \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial (kr)} = \frac{\partial p_2}{\partial (kr)}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0, \quad r = r_1. \quad (3.35)$$

Алгебраизация этих функциональных уравнений, основанная на свойствах полноты и ортогональности функций $P_n(\cos \theta)$ и $P_{v_m}(\cos \theta)$,

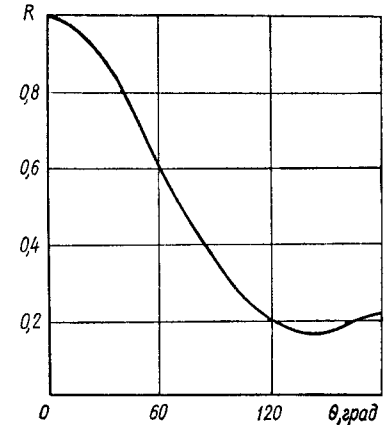


Рис. 54

приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, отличающихся от уравнения (3.24) только значениями величин N_m и N_{nm} :

$$N_{nm} = \begin{cases} \frac{(v_m + 1) P_n(\cos \theta_0) P_{v_m+1}(\cos \theta_0)}{n(n+1) - v_m(v_m+1)}, & v_m \neq n, \\ -\frac{(v_m + 1)(n+1) P_{n+1}(\cos \theta_0) P_{v_m+1}(\cos \theta_0)}{2n+1}, & v_m = n; \end{cases} \quad (3.36)$$

$$N_m = \frac{\sin^2 \theta_0}{2v_m+1} P'_{v_m}(\cos \theta_0) \frac{d}{dv_m} P_{v_m}(\cos \theta_0). \quad (3.37)$$

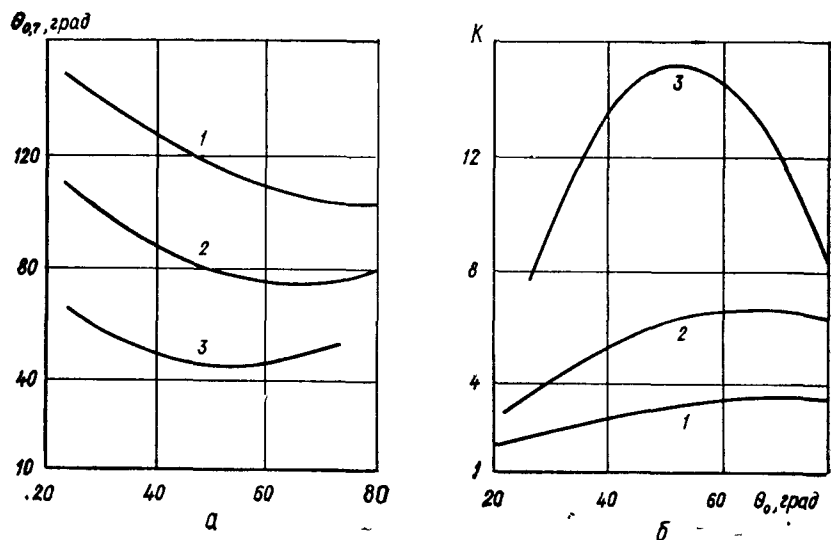


Рис. 55

Заканчивая аналитическую часть решения задачи, проиллюстрируем на примере свойства излучателя, изображенного на рис. 45, б. На рис. 54 изображена типичная диаграмма направленности такого излучателя для $r_0/\lambda = 0,08$; $r_1/r_0 = 6,28$; $\theta_0 = 30^\circ$; $f(\theta) = \text{const}$.

Как видно, высказанное в начале главы предположение о свойствах дальнего поля сферического излучателя со сферическим слоем, имеющим форму, изображенную на рис. 45, б, подтверждается. Такой излучатель действительно концентрирует звуковую энергию в положительном направлении оси Oz . Уровень излучения звука в противоположном направлении весьма мал. Как известно, излучатели, обладающие такими свойствами, называются однонаправленными.

На рис. 55 приведены дополнительные количественные данные для $r_0/\lambda = 0,24$ и r_1/r_0 , равного 1,04; 2; 4,5 (соответственно кривые 1, 2 и 3), более полно характеризующие дальнее поле излучателя. Как видно, для сферы с одной полярной шапкой (так же, как и для сферы с двумя полярными шапками) характерно наличие определенного угла θ , при котором направленное действие максимально. Здесь

на рис. 55, а показана ширина диаграммы направленности, а на рис. 55, б — коэффициент концентрации.

Заканчивая анализ свойств сферических излучателей, охваченных сферическими незамкнутыми слоями, необходимо отметить, что они обладают свойствами, во многом сходными со свойствами цилиндрических излучателей, охваченных незамкнутыми кольцевыми слоями (см. вторую главу). К общим свойствам в первую очередь необходимо отнести наличие ярко выраженной зависимости направленного действия излучателя от поверхности, которая охвачена слоем. Это свойство обусловлено кривизной излучающей поверхности сферы и цилиндра. Пока излучающая поверхность относительно мала (а поверхность, охваченная слоем, велика), направленное действие излучателя растет по мере ее увеличения. Однако так происходит до определенного момента, пока фазовые искажения, обусловленные кривизной излучающей поверхности, малы и не превышают значения $\lambda/16 - \lambda/8$ [5, 105]. Когда излучающая поверхность становится большой (а поверхность, охваченная слоем, малой), фазовые искажения становятся большими и направленное действие прекращает увеличиваться, а в дальнейшем падает. Таким образом, цилиндрам и сферам, охваченным незамкнутыми слоями, в равной мере характерно наличие максимума направленного действия при некотором определенном соотношении между открытой частью поверхности и той частью поверхности, которая закрыта слоем. Указанные свойства являются общими для источников волн, имеющих неплоскую излучающую поверхность, а также рупорных антенн.

Рассмотренные на рис. 45 источники звуковых волн при больших толщинах охватывающего слоя можно рассматривать как рупорные излучатели. Например, излучатель, изображенный на рис. 45, в, по сути, является излучателем с биконическим рупором, а излучатель на рис. 45, б — с коническим рупором.

2. Звуковое поле стержневого излучателя

В этом параграфе покажем, как можно производить оценку звукового поля, создаваемого стержневым излучателем. Вначале напомним, что применяемые в прикладной акустике стержневые излучатели чаще всего выполняются в виде цилиндрического стержня 1 (или трубы) из пьезоактивного материала, на торцах которого закреплены в общем случае неодинаковые металлические накладки 2 (рис. 56). Хорошо известно, что излучатель такого типа совершает механические колебания преимущественно вдоль оси z . Поэтому излучение звука происходит благодаря колебаниям поверхностей накладок s_1 , s_2 и s_3 . Через поверхности s_1 и s_5 звук практически не излучается [143, 191, 214].

При использовании такого излучателя возникает вопрос о количественных характеристиках создаваемого им звукового поля. Однако весьма сложная конфигурация стержневого излучателя препятствует получению достаточно строгого и в то же время эффективного (с точки зрения получения количественных характеристик поля) решения задачи об его излучении. Выполним решение задачи по определению

звукового поля, создаваемого осесимметричным стержневым излучателем на базе аппроксимации его поверхностей частями координатных поверхностей сферической системы координат. На рис. 57 изображено сечение тела, построенного путем использования таких поверхностей. Замена стержневого излучателя телом указанной конфигурации позволяет существенно упростить решение поставленной задачи, если ис-

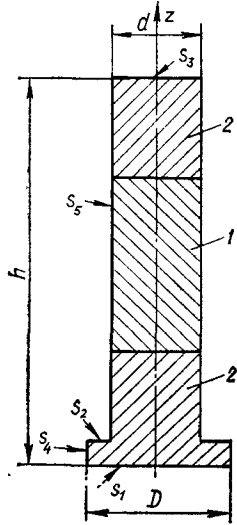


Рис. 56

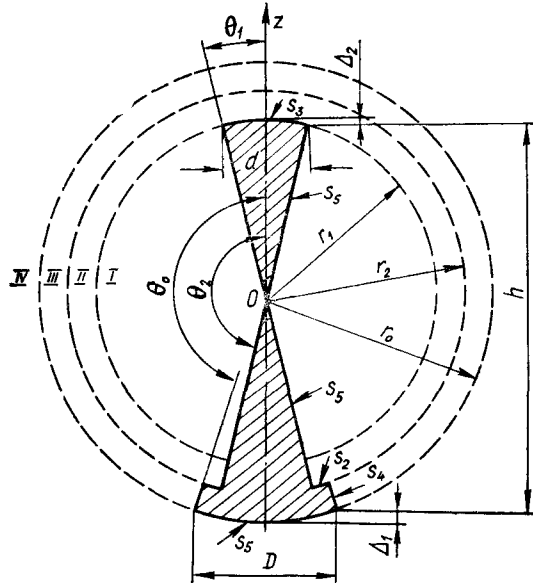


Рис. 57

пользовать метод частичных областей. Основываясь на работе [22], покажем, как это можно сделать.

Пусть на поверхностях передней и тыльной накладок задано некоторое распределение нормальной составляющей колебательной скорости, зависящее только от координаты θ :

$$-k\partial\Phi/\partial(kr) = v_1 f_1(\theta); \quad r = r_0; \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi; \quad (3.38)$$

$$-k\partial\Phi/\partial(kr) = v_2 f_2(\theta); \quad r = r_2; \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_2; \quad (3.39)$$

$$-k\partial\Phi/\partial(kr) = v_3 f_3(\theta); \quad r = r_1; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1, \quad (3.40)$$

а боковые поверхности излучателя будем полагать акустически жесткими, т. е.

$$\partial\Phi/\partial\theta = 0; \quad \theta = \theta_0; \quad r_2 \leq r \leq r_0; \quad (3.41)$$

$$\partial\Phi/\partial\theta = 0; \quad \theta = \theta_2; \quad 0 \leq r \leq r_2; \quad (3.42)$$

$$\partial\Phi/\partial\theta = 0; \quad \theta = \theta_1; \quad 0 \leq r \leq r_1. \quad (3.43)$$

Искомый потенциал скорости представим через потенциалы скоростей в частичных областях I—III:

$$\Phi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m i_{m_v}(kr) [P_{m_v}(\cos \theta) + B_v Q_{m_v}(\cos \theta)]; \quad (3.44)$$

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; \quad 0 \leq r \leq r_1;$$

$$\Phi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} [F_m i_{m_\eta}(kr) + T_m n_{m_\eta}(kr)] P_{m_\eta}(\cos \theta); \quad (3.45)$$

$$0 \leq \theta \leq \theta_2; \quad r_1 \leq r \leq r_2;$$

$$\Phi_3 = \sum_{m=1}^{\infty} [C_m i_{m_\tau}(kr) + D_m n_{m_\tau}(kr)] P_{m_\tau}(\cos \theta); \quad (3.46)$$

$$0 \leq \theta \leq \theta_0; \quad r_2 \leq r \leq r_0;$$

$$\Phi_4 = \sum_{n=0}^{\infty} E_n h_n^{(2)}(kr) P_n(\cos \theta); \quad (3.47)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi; \quad r = r_0.$$

Условия (3.42) и (3.43) позволяют определить величины m_v и B_v . С учетом выражения (3.44) имеем

$$P'_{m_v}(\cos \theta_1) + B_v Q'_{m_v}(\cos \theta_1) = 0;$$

$$P'_{m_v}(\cos \theta_2) + B_v Q'_{m_v}(\cos \theta_2) = 0.$$

Величины m_η и m_τ можно определить, если воспользоваться условиями (3.41) и (3.42) и выражениями (3.45) и (3.46). Исходные трансцендентные уравнения для определения m_η и m_τ будут иметь вид

$$P_{m_\eta}(\cos \theta_2) = 0; \quad (3.48)$$

$$P_{m_\tau}(\cos \theta_0) = 0. \quad (3.49)$$

Остальные комплексные коэффициенты в выражениях (3.44) — (3.46) должны быть определены из следующей системы функциональных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2; \quad r = r_1; \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; \\ -k\partial\Phi_2/\partial(kr) &= \begin{cases} -k\partial\Phi_1/\partial(kr); & r = r_1; \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; \\ v_3 f_3(\theta); & r = r_1; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1; \end{cases} \\ \Phi_2 &= \Phi_3; \quad r = r_2; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0; \\ -k\partial\Phi_2/\partial(kr) &= \begin{cases} -k\partial\Phi_3/\partial(kr); & r = r_2; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0; \\ v_2 f_2(\theta); & r = r_2; \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_2; \end{cases} \\ \Phi_3 &= \Phi_4; \quad r = r_0; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0; \\ -k\partial\Phi_4/\partial(kr) &= \begin{cases} -k\partial\Phi_3/\partial(kr); & r = r_0; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0; \\ v_1 f_1(\theta); & r = r_0; \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

Мы уже много раз сталкивались с функциональными уравнениями подобного вида и научились их алгебраизировать. Поэтому сразу перейдем к анализу акустических свойств стержневого излучателя. Как всегда, нас будут интересовать характеристики дальнего и ближнего поля и в первую очередь диаграмма направленности, которую определим как

$$R(\theta) = |R(\theta)| e^{i\psi(\theta)} = p_4(\theta)/p_4(\pi), \quad (3.51)$$

где $|R(\theta)|$ — амплитудная диаграмма направленности; $\psi(\theta)$ — фазовая диаграмма направленности, $\psi(\theta) = \arctg [\operatorname{Im} R(\theta)/\operatorname{Re} R(\theta)]$;

$$p_A(\theta) \approx \frac{e^{-ikR}}{R} \rho c \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n(\cos \theta) e^{i\pi n/2} \quad (3.52)$$

— звуковое давление в области IV в дальней зоне; ρc — волновое сопротивление среды.

Используя выражение (3.47), определим импеданс излучения передней накладки (поверхности s_1) излучателя:

$$Z = \rho c s_1 (\alpha + i\beta), \quad (3.53)$$

где

$$\alpha = \gamma \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{n=0}^{\infty} E_n h_n^{(2)}(kr_0) \delta_n \right\};$$

$$\beta = \gamma \operatorname{Im} \left\{ i \sum_{n=0}^{\infty} E_n h_n^{(2)}(kr_0) \delta_n \right\};$$

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda (1 + \cos \theta_0)}; \quad \delta_n = \int_{\cos \theta_0}^{-1} P_n(\cos \theta) d(\cos \theta).$$

Заметим, что мы ограничиваемся изучением импеданса излучения только поверхности s_1 , поскольку он наиболее интересен с точки зрения практики. Однако при необходимости можно определить импедансы излучения также и поверхностей s_2 и s_3 , а также суммарное значение импеданса на всех трех поверхностях.

Проанализируем количественные данные, соответствующие следующим параметрам излучателя и среды: $\theta_1 = 28^\circ$; $\theta_0 = 143^\circ$; $\theta_2 = 152^\circ$; $r_0 = 0,835D$; $r_1 = 0,725D$; $r_2 = 0,75D$; $\rho c = 1,5 \cdot 10^6$ кг/м² с. При этом будем полагать, что $f_1(\theta) = f_2(\theta) = f_3(\theta) = \text{const}$; $v_1 = 1$; $v_2/v_1 = \xi$; $v_3/v_1 = \varepsilon$. Задавая конкретными значениями величин ξ и ε , можно определять акустические параметры излучателей для тех случаев, когда колебательные скорости передней и тыльной накладок различны (например, из-за различия масс накладок). Можно также создавать ситуации, эквивалентные тем случаям, когда поверхности накладок s_2 и s_3 частично или полностью звукоизолированы от окружающей среды. Примеры стержневых излучателей со звукоизолированными поверхностями s_2 и s_3 приведены, например, в работах [142, 143]. Учитывая изложенное, приступим к анализу направленных свойств стержневого излучателя. На рис. 58 приведены амплитудные диаграммы направленности для различных значений ξ и ε при $v_1 = \xi = 1$; $\varepsilon = 0,5$ (а) и $v_1 = 1$; $\xi = \varepsilon = 0$ (б) и D/λ , равном 0,76; 0,455; 0,325 и 0,227 (соответственно кривые 1, 2, 3 и 4); кривая 5 соответствует $D/\lambda = 0,325$; $\varepsilon = 0$; кривая 6 — $D/\lambda = 0,455$, $\varepsilon = 0$, когда поверхность s_3 акустически мягкая; кривая 7 — $D/\lambda = 0,455$ (эксперимент). Обратимся прежде всего к кривым на рис. 58, а, которые соответствуют самому общему случаю, когда излучают все поверхности накладок. Хорошо видно, что с ростом частоты направленность излучателя увеличивается и в области относительно больших значений D/λ излучатель обладает ярко выраженной однонаправленностью. Иначе обстоит

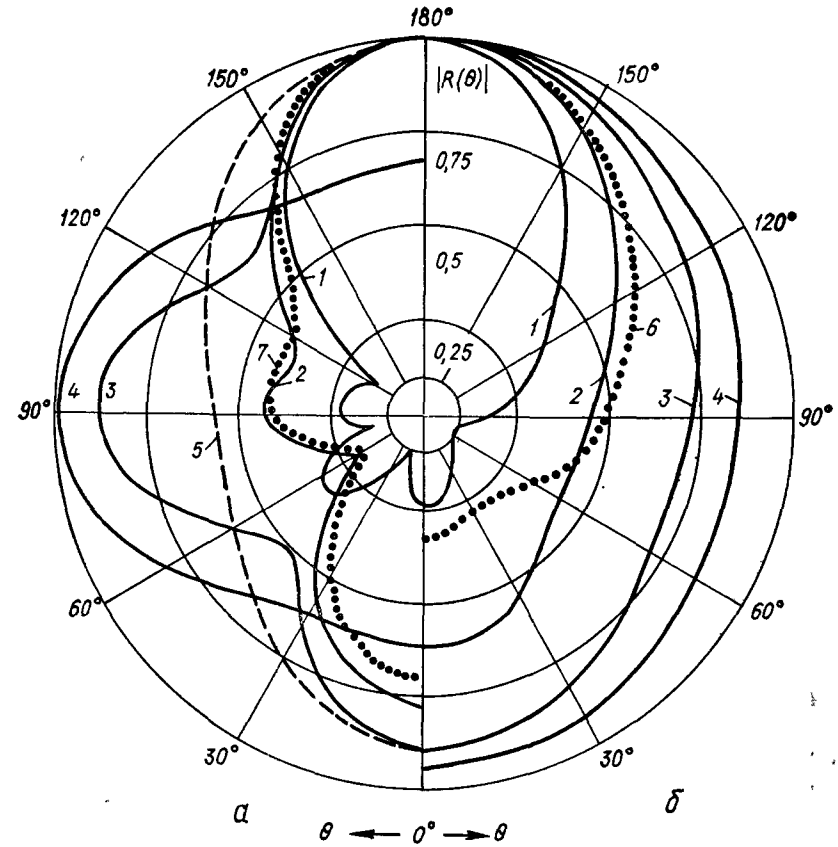


Рис. 58

дело при малых значениях D/λ . В связи с этим обратим внимание на весьма характерную деталь диаграммы направленности — дополнительный лепесток в направлении $\theta = \pi/2$. Причина появления этого лепестка в том, что звуковые волны, излучаемые поверхностями s_1 и s_2 относительно любой точки направления $\theta = \pi/2$, находятся в фазе (некоторая расфазировка имеет место лишь вследствие незначительного отличия r_0 от r_1). На относительно высоких частотах, когда диаметр накладок сравним с длиной волны и основная доля звуковой энергии излучается в направлении оси z , указанный дополнительный лепесток относительно мал (например, кривые 1 и 2). С понижением частоты дополнительный лепесток растет и оказывает более существенное влияние на форму амплитудной диаграммы направленности (кривая 3). Наконец, при $D/\lambda \approx 0,23$ основное излучение имеет место уже в направлении $\theta = \pi/2$. Анализ результатов расчетов, проведенных для различных значений ε , показывает, что при $\varepsilon > 0,5$ уровень дополнительного лепестка в направлении $\theta = \pi/2$ увеличивается, а при $\varepsilon < 0,5$ уменьшается. При $\varepsilon = 0$ (что эквивалентно полной звукоизоляции

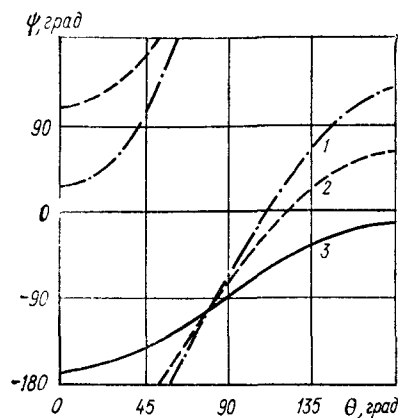


Рис. 59

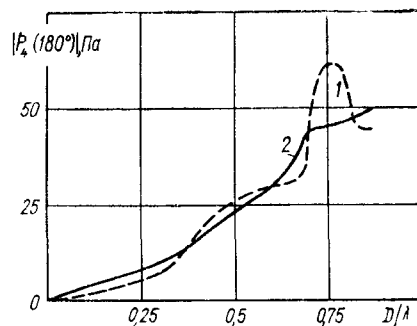


Рис. 60

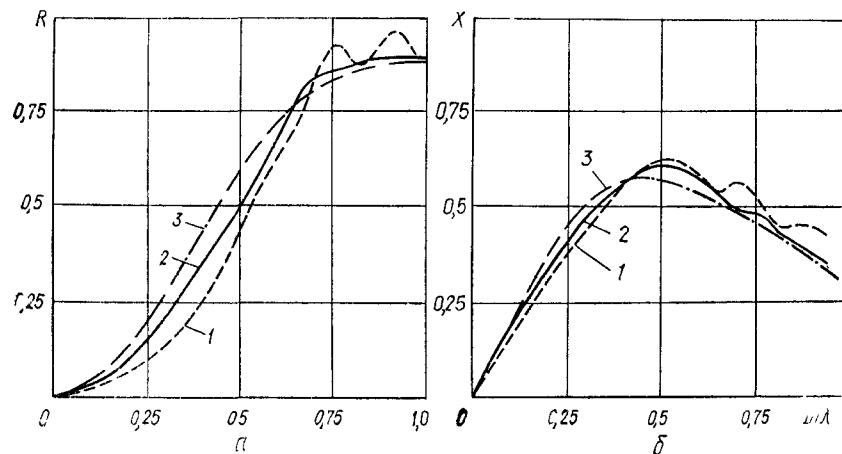


Рис. 61

тыльной накладкой излучателя) указанный лепесток исчезает. Для иллюстрации этого случая на рис. 58 представлена кривая 5 (ср. с кривой 3).

Рассмотрим еще один случай, когда звуковая энергия излучается только поверхностью s_1 . Этот случай интересен тем, что позволяет оценить предельное снижение тыльного излучения стержня, которое можно достичь звукоизоляцией его поверхностей s_2 и s_3 . Из данных рис. 58, б следует, что тыльное излучение, обусловленное только огибанием звуковыми волнами тела излучателя, имеет высокий уровень. Например, при широко употребительном на практике размере накладки $D/\lambda \approx 0,4 \div 0,5$ относительное значение тыльного излучения достигает примерно 0,6.

Остановимся на фазовых диаграммах направленности стержневого излучателя (рис. 59). Здесь $v_1 = 1$; $\xi = \varepsilon = 0$; D/λ равно 0,76; 0,455 и 0,227 (соответственно кривые 1, 2 и 3). Приведенные кривые позволя-

ют утверждать, что стержневой излучатель не имеет фазового центра в строгом смысле этого слова, т. е. $\psi(\theta) \neq \text{const}$. Однако характер изменения кривых показывает, что по крайней мере на низких частотах функция $\psi(\theta)$ близка к косинусоидальной. Это обстоятельство, как указано в работе [5], позволяет найти точку, относительно которой $\psi(\theta) = \text{const}$. Используя выражения, приведенные в работе [5], легко показать, что фазовым центром стержневого излучателя можно приближенно считать точку с координатами $r = r_0$; $\theta = \pi$, т. е. середину поверхности передней накладки.

Проведенный выше анализ особенностей дальнего поля стержневого излучателя представлялся бы неполным без количественных данных о величине звукового давления, развиваемого излучателем на оси. В связи с этим на рис. 60 приведены такие данные: $v_1 = \xi = \varepsilon = 0,01$ м/с (кривая 1); $v_1 = 0,01$ м/с; $\xi = \varepsilon = 0$ (кривая 2). Звуковое давление приведено к 1 м. Обратимся теперь к зависимостям, характеризующим ближнее поле стержневого излучателя, в частности к импедансу излучения его передней накладки к поверхности s_1 . На рис. 61 приведены данные для $v_1 = \xi = 1$; $\varepsilon = 0,5$ (кривая 1); $v_1 = 1$; $\xi = \varepsilon = 0$ (кривая 2). На этом же рисунке для сравнения приведена частотная зависимость импеданса излучения сферического сегмента с углом $\theta_0 = 40^\circ$ (кривая 3), расположенного на сфере [144]. Легко видеть, что импеданс излучения передней накладки стержневого излучателя при $\xi = \varepsilon = 0$ близок импедансу излучения сферического сегмента. При $\xi = 1$ и $\varepsilon = 0,5$ кривая для R проходит ниже всех других кривых, а в области значений $D/\lambda \geq 0,7$ наблюдаются осцилляции величин R (рис. 61, а) и X (рис. 61, б). Нетрудно заметить, что максимумы и минимумы этих осцилляций совпадают с максимумами и минимумами давления на оси излучателя (см. кривую 1 на рис. 60). Эти особенности поведения величин R , X и $p_\kappa(\pi)$ являются следствием акустического взаимодействия излучающих поверхностей s_1 , s_2 и s_3 . С такого рода взаимодействием мы еще встретимся при исследовании поля конечного цилиндра (см. параграф 4 настоящей главы). Важной характеристикой ближнего поля является и распределение звукового давления по излучающей поверхности источника звука. На рис. 62 приведены такие данные для поверхности s_1 , из которых видно, что в пределах средней части поверхности s_1 давление остается практически постоянным (сплошные линии — $v = 0,01$ м/с; $\xi = 1$, $\varepsilon = 0$; штриховые — $v_1 = 0,01$ м/с; $\xi = \varepsilon = 0$; кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям D/λ , равным 0,76; 0,455 и 0,227). Однако по мере приближения к краю давление падает и тем быстрее, чем больше значение D/λ .

Заканчивая анализ акустических свойств стержневого излучателя, небезынтересно указать на одно важное обстоятельство. Выше полага-

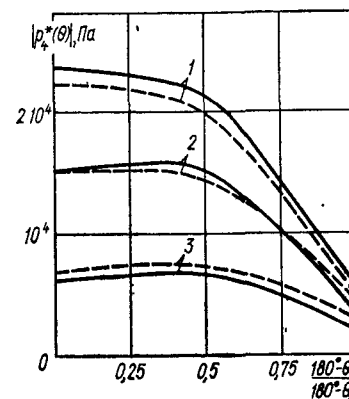


Рис. 62

лось, что боковые стены поверхности излучателя s_3 акустически жесткие. Очевидно, что изменение свойств этих поверхностей должно определенным образом повлиять на звуковое поле, создаваемое излучателем. В связи с этим были проведены расчеты $|R(\theta)|$ в предположении, что поверхность s_3 является акустически мягкой. При этом постоянные разделения m_η и m_τ определялись как корни уравнений $P_{m_\eta}(\cos \theta_2) = 0$ и $P_{m_\tau}(\cos \theta_0) = 0$ соответственно. На рис. 58, б (кривая 6) приведена диаграмма направленности, рассчитанная при этих условиях для $D/\lambda = 0,455$ и $\xi = \epsilon = 0$. Сравнение кривых 2 и 6 показывает, что акустически мягкая боковая поверхность излучателя способствует снижению его тыльного излучения почти в 2 раза. Таким образом, окружая излучающую поверхность (в данном случае поверхность s_1) акустически мягкой поверхностью, мы затрудняем «затекание» звуковой энергии в тыльную область стержневого излучателя. Этот случай можно трактовать и иначе. Выполняя боковую поверхность стержневого излучателя акустически мягкой, мы как бы увеличиваем размеры его диаметра, что и приводит в конечном итоге к снижению тыльного уровня поля излучения.

Здесь уместно провести сравнение с коротким цилиндром, рассмотренным в параграфе 4 этой главы. Там также изучается аналогичный случай, когда часть поверхности цилиндра (торцовые поверхности) акустически мягкая. При этом значительно уменьшается уровень излучения в направлениях оси симметрии цилиндра. Таким образом, напрашивается важный вывод: окружая излучающую поверхность какого-либо объекта акустически мягким материалом, можно добиться снижения уровня боковых и тыльных лепестков диаграммы направленности этого объекта.

Исследуя акустические свойства стержневого излучателя, мы до сих пор не затрагивали вопрос о пределах допустимости аппроксимации стержневого излучателя телом, изображенным на рис. 57. Вполне очевидно, что аппроксимация будет тем точнее, чем меньше кривизна поверхностей s_1 и s_2 . Если оценивать отклонение этих поверхностей от соответствующих плоских поверхностей стержневого излучателя величинами Δ_1 и Δ_2 (см. рис. 57), а также положить $\Delta_1 \leq \lambda/8$ и $\Delta_2 \leq \lambda/8$, что с точки зрения практики обычно допустимо [5, 105], легко определить максимальные значения диаметров накладок, при которых еще возможна замена их частью сферической поверхности:

$$D/\lambda = \sin \theta_0/4 (1 + \cos \theta_0); \quad d/\lambda = \sin \theta_1/4 (1 - \cos \theta_1). \quad (3.54)$$

При практических оценках поля конкретного стержневого излучателя может возникнуть необходимость прогонять расчеты для достаточно больших значений D/λ . Из формул (3.54) очевидно, что максимальное значение D/λ зависит от выбора положения центра O между поверхностями s_1 и s_2 стержневого излучателя. В качестве исходного уравнения, позволяющего рационально выбрать положение этого центра, может служить равенство $\Delta_1 = \Delta_2$, из которого следует, что центр O должен располагаться на расстоянии $\delta \approx h[(D/\alpha)^2 + 1]^{-1}$ от поверхности s_3 . Чтобы закончить с вопросом о допустимости аппроксимации стержневого излучателя телом, изображенным на рис. 57,

обратимся к рис. 58, а, на котором изображена экспериментальная диаграмма направленности (кривая 7), заимствованная из работы [22]. Сопоставляя эту кривую с расчетной кривой 2, можно убедиться в их хорошем совпадении.

Таким образом, оказывается, что, несмотря на кажущуюся на первый взгляд необычность формы тела на рис. 57, с его помощью удастся достаточно точно определить все качественные и количественные характеристики звукового поля, создаваемого стержневым преобразователем.

3. Дифракция звуковых волн на параболическом рефлекторе

Во второй главе рассматривалась дифракция звуковых волн на параболическом цилиндре. Теперь рассмотрим дифракцию волн на параболоиде вращения. Обширная литература [91, 137, 165, 166 и др.], посвященная этому вопросу, содержит громадный объем количественных данных для тех случаев, когда размеры параболоида существенно превышают длину волны, а сам параболоид абсолютно непрозрачный. Для тех случаев, когда параболоид имеет конечную прозрачность, а его размеры сравнимы с длиной волны (причислим сюда параболоиды, диаметр D которых менее 10 длин волн), объем имеющихся в литературе количественных данных незначителен [165]. Такое положение вызвано трудностями, возникающими при решении задач, связанных с определением звуковых полей параболоидов конечной прозрачности, у которых $D/\lambda \leq 10$. При $D/\lambda \leq 10$ существенную роль в формировании поля параболоида играют волновые эффекты, связанные с рассеянием волн краями параболоида. Эти волны взаимодействуют с падающей и отраженной от параболоида волнами и существенно изменяют структуру звукового поля. Ситуация еще более усложняется, когда параболоид имеет конечную прозрачность и появляются волны, проникающие через его тело. Указанные обстоятельства не позволяют исследовать акустические свойства параболоида в рамках лучевой акустики, геометрической теории дифракции и других приближенных методов. Поэтому для получения достоверных количественных данных о поле рефлектора необходимо применять более строгие методы. Ниже, основываясь на работе [24], рассмотрим задачу о дифракции на параболоиде плоских и сферических волн в рамках метода частных областей.

Прежде всего рассмотрим задачу о дифракции на параболоиде плоской звуковой волны. На рис. 63 изображено сечение параболического рефлектора. Здесь D — диаметр раскрытия; F — фокусное расстояние, 2α — угол раскрытия, Φ_0 — падающая плоская звуковая волна, распространяющаяся вдоль оси Oz .

Так же как и при исследовании параболического цилиндра, будем полагать, что толщина рефлектора бесконечно мала, а его поверхность

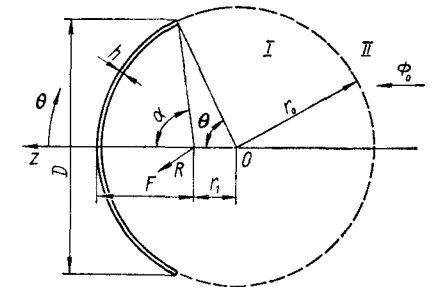


Рис. 63

характеризуется локальным импедансом

$$Z = -i\omega M f(\theta), \quad (3.55)$$

где $f(\theta)$ — функция распределения поверхностной плотности.

Как указывалось во второй главе, принятый способ описания свойств рефлектора эффективен в тех случаях, когда его толщина мала по сравнению с длиной волны в материале, из которого он выполнен, а волновое сопротивление самого материала значительно превышает волновое сопротивление окружающей среды.

Ограничимся рассмотрением длиннофокусных рефлекторов, у которых $\alpha < \pi/2$. Тогда оказывается возможной аппроксимация параболического рефлектора сферическим рефлектором с радиусом r_0 [105] и переход к сферической системе координат с центром в точке O (рис. 63).

Всю область существования звукового поля разобьем на две части ч-ные области: область I ($0 \leq r \leq r_0$) и область II ($r \geq r_0$). С учетом известного разложения плоской волны по сферическим волновым функциям [84] потенциалы скоростей в частичных областях представим в следующей форме:

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n i_n(kr) P_n(\cos \theta); \quad (3.56)$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) i_n(kr) P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta). \quad (3.57)$$

В рамках принятой идеализации свойств рефлектора различия в скоростях частиц внешней поверхности не учитываются, т. е. колебательная скорость на внешней и внутренней поверхностях этих участков одинакова. Учитывая это обстоятельство, условия сопряжения составляющих звукового поля на границе раздела частичных областей $r = r_0$ можно сформулировать в следующем виде:

$$v_2 = v_1; \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad (3.58)$$

$$p_2 = \begin{cases} p_1 - Zv_1; & 0 \leq \theta \leq \theta_0; \\ p_1; & \theta_0 \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (3.59)$$

Условие (3.58) позволяет установить связь между коэффициентами A_n и B_n :

$$B_n = \frac{1}{h_n^{(1)}(kr_0)} [A_n - i^n (2n+1) i_n(kr_0)]. \quad (3.60)$$

Алгебраизация условия (3.59), основанная на свойствах полноты и ортогональности функций $P_n(\cos \theta)$, с учетом выражения (3.60) приводит к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$A_n + (kr_0)^2 (2n+1) h_n^{(1)}(kr_0) \frac{Z}{2\rho c} \sum_{m=0}^{\infty} A_m i_m'(kr_0) N_{nm} = (2n+1) i^n, \quad (3.61)$$

где

$$N_{nm} = \int_{\cos \theta_0}^1 f(\theta) P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) d(\cos \theta).$$

Анализ рассеянного звукового поля проводится на основе данных о коэффициентах A_n , получаемых путем редукции этой бесконечной системы.

Перейдем к анализу акустических свойств параболического рефлектора. Все количественные данные, приведенные ниже, соответствуют следующим параметрам рефлектора и окружающей среды: $D/F = 2,8$; $\alpha = 70^\circ$; $f(\theta) = \text{const}$; $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$; $c = 1,5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$.

Радиус сферического рефлектора, аппроксимирующего параболический рефлектор, принят равным $r_0 = 2,14F$. Заметим, что это значение величины r_0 обеспечивает (в диапазоне рассматриваемых ниже волновых размеров рефлектора) отсутствие фазовых ошибок в раскрытие рефлектора, превышающих $\lambda/12$. Число неизвестных, удерживаемых в системе (3.61) при замене ее конечной, составляло 36.

Прежде всего рассмотрим влияние прозрачности рефлектора на один из важнейших его акустических параметров — коэффициент усиления по давлению K_p . На рис. 64 представлены частотные зависимости величины K_p при M , равном $1,06 \cdot 10^2$; $1,77 \cdot 10^2$ и $1,77 \cdot 10^3$ (соответственно кривые 1, 2 и 3). Для сравнения здесь также приведена кривая 4, рассчитанная по методу, который предполагает рефлектор абсолютно жестким [137]. Как и можно было ожидать, с увеличением прозрачности рефлектора наблюдается существенное снижение коэффициента усиления. При больших значениях M , когда прозрачность рефлектора близка к нулю, значение приближается к таковому, рассчитанному по методу, приведенному в работе [137]. Некоторое отличие кривых 3 и 4 можно объяснить тем, что в работе [137] поле рефлектора определяется без учета дифракции волн на кромке рефлектора, в то время как предлагаемый метод, естественно, учитывает это явление.

Перейдем к анализу закономерностей изменения поля в области фокуса рефлектора. На рис. 65 представлены кривые, характеризующие изменение нормированного давления по отношению к давлению в фокусе вдоль оси симметрии рефлектора при $D/\lambda = 2,6$ и M , равном $1,06 \cdot 10^2$; $1,77 \cdot 10^2$ и $1,77 \cdot 10^3$ (соответственно кривые 1, 2 и 3). Как следует из этих данных, при больших значениях M распределение давления вдоль оси z относительно мало отличается от рассчитанного по методу, рассмотренному в работе [137] (кривая 4). Иначе обстоит дело, когда прозрачность рефлектора становится заметной. В этом случае амплитуда осцилляций давления вдоль оси абсцисс становится более значительной и растет по мере увеличения прозрачности рефлектора. Причина такого явления становится понятной, если учесть, что звуковое давление перед рефлектором главным образом определяется

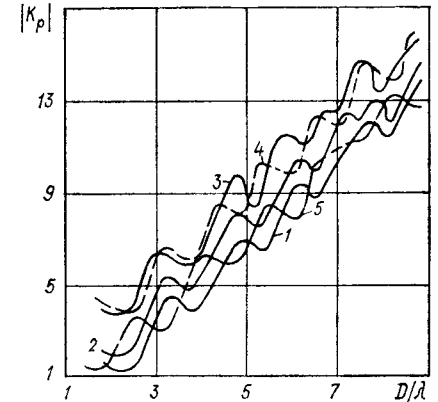


Рис. 64

плоской падающей и сферической отраженной волнами. При увеличении прозрачности рефлектора давление в отраженной волне уменьшается и как следствие растет относительный вклад падающей волны. Это обстоятельство и приводит в конечном итоге к увеличению амплитуды осцилляций давления вдоль оси рефлектора. На рис. 65 приведена также зависимость фазы давления (кривая 5) на оси z для $M = 1,77 \cdot 10^3$.

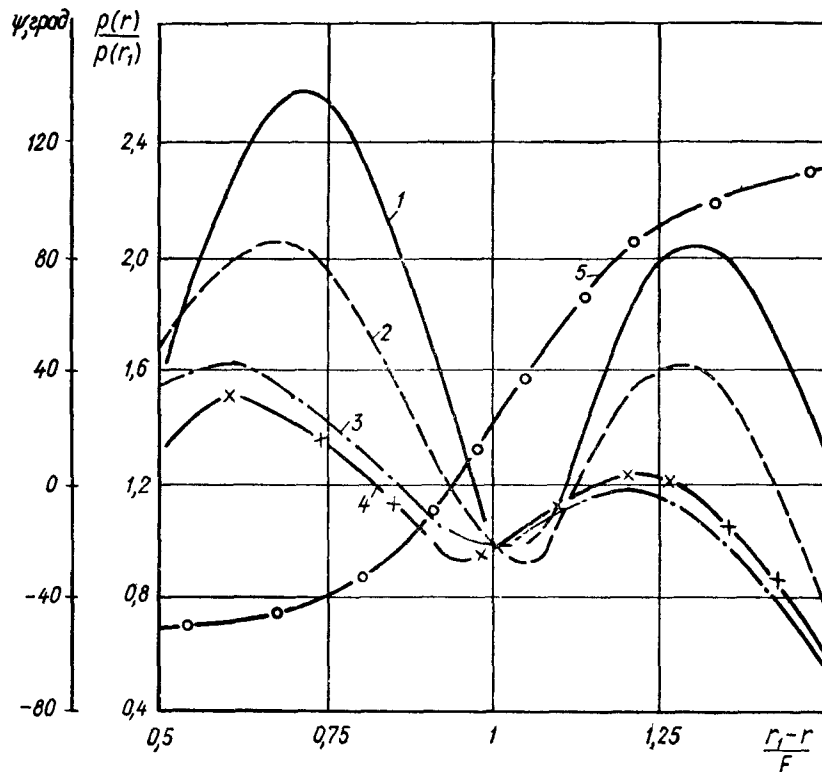


Рис 65

В отличие от распределения давления вдоль оси абсцисс, распределение давления в фокальной плоскости не столь сильно зависит от прозрачности рефлектора и, как показывают расчеты, близко к рассчитанному по методу, изложенному в работе [137].

Выше рассматривалось влияние прозрачности рефлектора на поле в его фокальной области, когда на рефлектор падает плоская звуковая волна. Определенный интерес представляет также вопрос о влиянии прозрачности рефлектора на его направленные свойства. Для получения количественных данных по этому вопросу поместим в фокусе рефлектора точечный источник звуковых волн и решим задачу дифракции сферической волны на рассматриваемом рефлекторе. Учитывая известное разложение величины $\frac{e^{ikr}}{r}$ по сферическим волновым функциям [84], звуковые поля в частных областях представим в следующей

форме:

$$\Phi_1 = jk \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i_n(kr_1) h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) i_n(kr); \quad (3.62)$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta), \quad (3.63)$$

где r_1 — координата точки относительно O , в которой помещен источник звуковых волн.

Используя соотношения (3.58), (3.59), (3.62), (3.63) и выполняя выкладки, аналогичные приведенным при получении системы (3.61), приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений, являющейся исходной для определения количественных характеристик звукового поля рефлектора с точечным источником в фокусе:

$$B_n + (kr_0)^2 i_n'(kr_0) \frac{(2n+1)Z}{2\rho c} \sum_{m=0}^{\infty} B_m h_m^{(1)}(kr_0) N_{nm} = jk(2n+1) i_n(kr_1). \quad (3.64)$$

Представленные на рис. 66 кривые иллюстрируют степень влияния прозрачности рефлектора на его диаграмму направленности $R(\theta)$ при $D/\lambda = 2,6$ для M , равного $1,06 \cdot 10^2$; $1,77 \cdot 10^2$ и $1,77 \cdot 10^3$ (соответственно кривые 1, 2 и 3). Только при больших значениях M , когда рефлектор практически непрозрачен, диаграмма направленности начинает совпадать с рассчитанной по методу, описанному в работе [137], кривой 4. Однако такое совпадение имеет место лишь в зоне углов $\pi - \theta \leq \pi/2$. При углах $\pi - \theta > \pi/2$ расчет диаграммы направленности в рамках метода, указанного в работе [137], невозможен, поскольку он не позволяет учесть ни поле, прошедшее через рефлектор, ни поле, рассеянное на кромке рефлектора. Чтобы упростить дальнейший анализ частотной зависимости диаграммы направленности, разобьем весь диапазон значений углов θ на несколько характерных зон: зону основного лепестка; зону первого бокового лепестка; зону бокового излучения ($\pi - \theta \approx \pi/2$) и зону геометрической тени.

Прежде всего остановимся на зоне основного лепестка. Анализ расчетных данных показывает, что в диапазоне значений $D/\lambda \geq 2,5$ прозрачность рефлектора несущественно влияет на ширину основного лепестка. При этом ширина основного лепестка совпадает с таковой, рассчитанной по методу, указанному в работе [137]. При меньших значениях D/λ прозрачность рефлектора приводит к расширению основного лепестка. Так, например, при $D/\lambda = 1,75$ отношение ширины лепестка, рассчитанное для $M = 1,06 \cdot 10^2$ и $M = 1,77 \cdot 10^3$, составляет 1,5.

Перейдем к зоне первого бокового лепестка. Как следует из данных, приведенных на рис. 67, общий уровень величины σ_1 растет с увеличением прозрачности рефлектора (кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям

$\bar{M}$, равным $1,06 \cdot 10^2$; $1,77 \cdot 10^2$ и $1,77 \cdot 10^3$. Частотная зависимость σ_1 носит осциллирующий характер (обусловленный интерференцией между падающей и отраженной волнами), причем амплитуда осцилляций уменьшается с ростом частоты, а значение σ_1 асимптотически приближается к 0,105, что соответствует уровню бокового лепестка, рассчитанному по методу, описанному в работе [137], без учета падающей волны

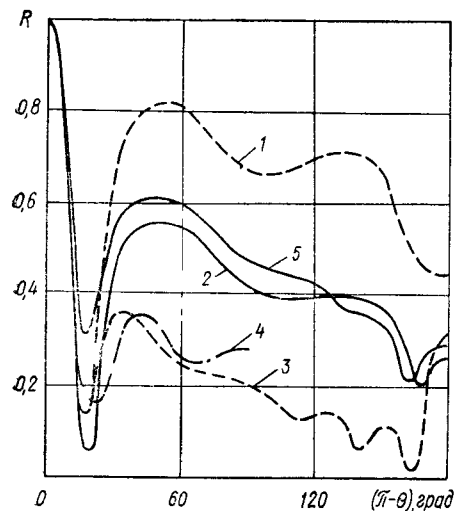


Рис. 66

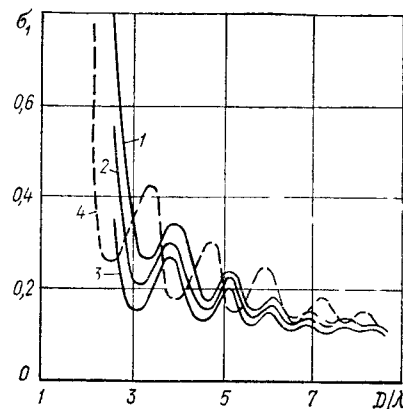


Рис. 67

Следующей по порядку зоной является зона бокового излучения, которая соответствует углам θ , прилежащим к $\pi/2$. В этой зоне изменение величины $R(\theta)$ относительно невелико и поэтому достаточно ограничиться знанием значения диаграммы направленности только при $\theta = \pi/2$, которое обозначим σ_2 . На рис. 68 представлена частотная зависимость σ_2 при M , равном $1,06 \cdot 10^2$, $1,77 \cdot 10^2$ и $1,77 \cdot 10^3$ (соответственно кривые 1, 2 и 3). Как видно, уровень бокового излучения рефлектора падает по мере уменьшения его прозрачности и роста частоты. Учитывая, что боковое излучение в первом приближении определяется полем точечного источника в отсутствие рефлектора, естественно предположить наличие следующей связи:

$$\sigma_2 \approx 1/K_p. \quad (3.65)$$

В правомерности этого предположения легко убедиться, если сравнить кривые 1 и 4 на рис. 68. Кривая 4 определена по формуле (3.65) с учетом данных рис. 64.

Перейдем к оценке уровня поля за рефлектором, в области углов θ , соответствующих его геометрической тени. Анализ расчетных данных показывает, что изменение $R(\theta)$ в этой области имеет весьма сложный характер, который определяется интерференцией между волной, прошедшей через рефлектор, и волной, дифрагированной на кромке реф-

лктора. Это обстоятельство не позволяет количественно охарактеризовать частотную зависимость уровня поля во всей зоне тени на основе анализа частотной зависимости величины для одного какого-либо направления, например для $\theta = 0$. В связи с этим для количественной оценки поля в зоне тени целесообразно использовать интегральный параметр

$$\sigma_3 = \int_0^\alpha R(\theta) \sin \theta d\theta / \int_0^\alpha \sin \theta d\theta, \quad (3.66)$$

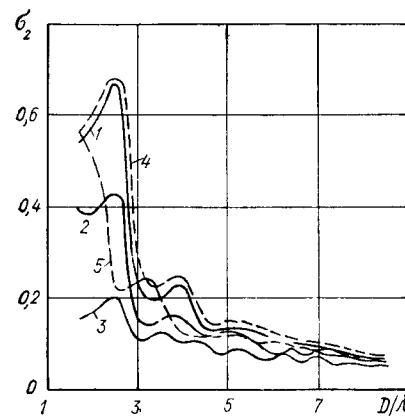


Рис. 68

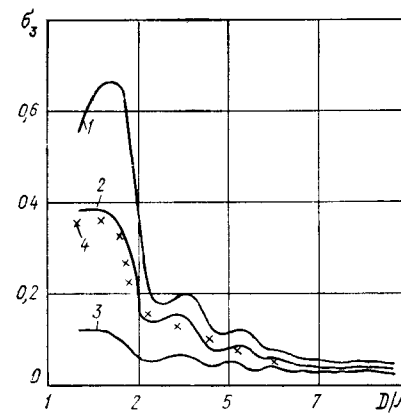


Рис. 69

который представляет собой не что иное, как среднее значение $R(\theta)$ в зоне геометрической тени. На рис. 69 представлены данные, позволяющие определить поле за рефлектором в зависимости от его прозрачности и частоты (здесь кривым 1—3 соответствуют те же значения M , что и на рис. 68). Важно отметить, что кривая 3 характеризует уровень поля, обусловленный только дифракционными эффектами на кромке рефлектора.

Мы изучили акустические свойства параболического рефлектора, основываясь на использовании математической модели, которая наделена достаточно идеализированными свойствами. Поэтому может возникнуть вопрос, насколько полученные количественные результаты могут быть пригодны для оценки акустических свойств реальных рефлекторов. Ответ на этот вопрос можно получить, если сопоставить экспериментальные и расчетные данные. В связи с этим на рис. 66 и 69 помимо расчетных данных приведены также экспериментальные данные (соответственно кривые 5 и 4 для $M = 1,77 \cdot 10^2$). Сравнение этих данных позволяет положительно ответить на поставленный вопрос. Действительно, расчеты, проведенные на основе принятой математической модели параболического рефлектора, как качественно, так и количественно, правильно отражают основные свойства реальных рефлекторов.

Выше мы рассмотрели рефлектор, характеризуемый инерционными свойствами. Интересно рассмотреть также случай, когда импеданс

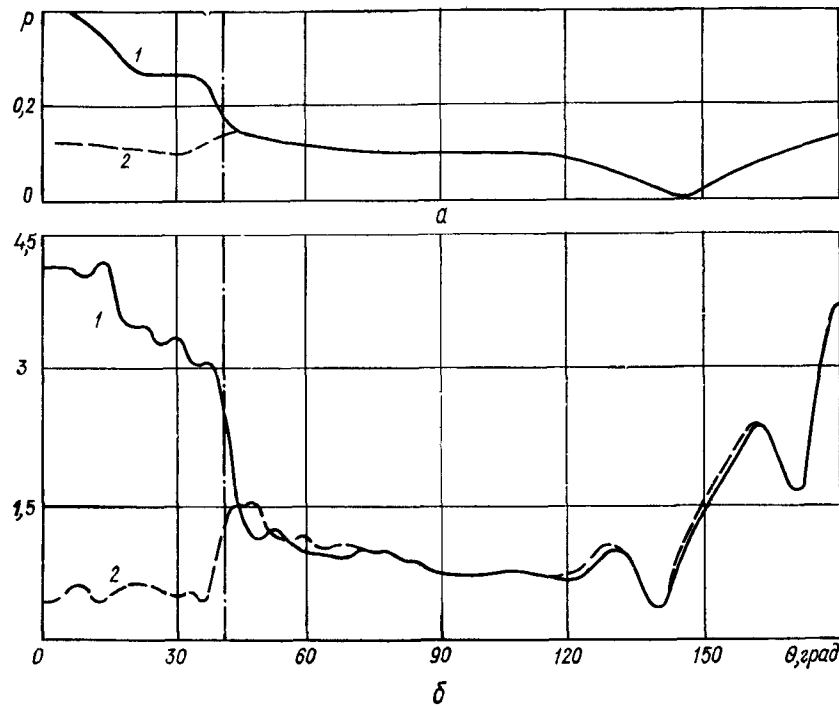


Рис. 70

рефлектора носит характер упругости: $Z = j \frac{s}{\omega} f(\theta)$, что свойственно тонким слоям газа в жидкости (s — поверхностная упругость, Н/м³). При изучении этого случая условие (3.58) необходимо заменить на

$$p_2 = p_1; \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad v_2 = \begin{cases} v_1 - p_1/Z; & 0 \leq \theta \leq \theta_0; \\ v_2; & \theta_0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (3.67)$$

и провести соответствующие выкладки для получения новой бесконечной алгебраической системы. Опуская эти выкладки, приведем результаты расчетов величин K_p и $R(\theta)$ при $s = 2,1 \cdot 10^{10}$ Н/м³ и $f(\theta) = \text{const}$ (кривые 5; 4 и 5 на рис. 64, 67 и 68 соответственно). Заметим, что принятое значение s эквивалентно по коэффициенту прохождения звука рассмотренному выше случаю, когда $M = 1,06 \cdot 10^2$ кг/м². Как следует из данных рис. 64, кривые, соответствующие разным свойствам поверхности рефлектора, характеризуются тем, что максимумы осцилляций кривой 5 приходятся на минимумы кривой 3. Аналогичная особенность наблюдается для величины σ_1 и отчасти σ_2 .

В заключение приведем данные, характеризующие степень выполнения условий (3.59) при численном решении системы указанного выше порядка. На рис. 70 приведены распределения относительного значения модуля звукового давления, рассчитанного по формулам (3.56) (кривая 1) и (3.57) (кривая 2) при $r = r_0$ для $D/\lambda = 2,6$ (а) и

$D/\lambda = 7,8$ (б). Как видно, при $D/\lambda = 2,6$ практически во всей зоне $40^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ кривые 1 и 2 с графической точностью совпадают. При больших значениях D/λ совпадение кривых 1 и 2 в области углов $40^\circ \leq \theta \leq 50^\circ$ несколько хуже, особенно в окрестности края рефлектора $40^\circ \leq \theta \leq 43^\circ$, где невязка достигает примерно 50—60 %. Таким образом, при принятии уровня усечения систем (3.61) и (3.64) (при фактическом их решении) можно оценивать уровень поля с достаточной для практики точностью в любой точке пространства, за исключением окрестности края рефлектора. При необходимости точной оценки поля у края рефлектора необходимо применить метод, изложенный в главе второй.

4. Излучение звука цилиндром конечной высоты [приближенное решение]

Важное место в прикладной акустике занимает излучатель в виде цилиндра конечной высоты. В связи с этим возникает необходимость выполнять оценки его акустических свойств. К сожалению, до настоящего времени все еще возникают трудности в получении достаточно строгого и в то же время эффективного (с точки зрения определения количественных характеристик звукового поля) решения задачи об излучении звука цилиндром конечной высоты (см. главу вторую). В связи с этим большое практическое значение имеет построение приближенных решений такой задачи. Один из широко применяемых способов основывается на замене цилиндра конечной высоты бесконечным цилиндром [4]. При этом часть последнего, равная h , излучает звуковые волны, а остальная является акустически жесткой.

Такая модель позволила дать простые аналитические выражения, пригодные для определения поля излучения реальных цилиндрических излучателей, когда $h \gg \lambda$ (λ — длина волны). Для случаев $h \leq \lambda$ этот способ приводит к существенным погрешностям в оценке количественных характеристик поля, поскольку он не может учесть дифракцию волн на торцах цилиндра [4].

Ниже развивается метод, основанный на замене цилиндрического излучателя в случае $h < \lambda$ при $h < 2r_0$ сферическим излучателем [44].

В основу предлагаемой расчетной схемы положена аппроксимация цилиндрического излучателя конечной высоты экваториальным шаровым слоем, имеющим в сечении конфигурацию, изображенную на рис. 71. Здесь штриховой линией обозначен контур сечения аппроксимируемого цилиндра. Замена цилиндра конечной высоты шаровым слоем позволяет значительно упростить задачу определения звукового поля и использовать для ее решения метод частичных областей.

Пусть на сферической поверхности шарового слоя задано некоторое распределение нормальной составляющей колебательной скорости, зависящее только от координаты θ :

$$-k \frac{\partial \Phi}{\partial (kr)} = v_0 f(\theta); \quad r = r_0; \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1, \quad (3.68)$$

а на торцевых поверхностях шарового слоя выполняются следующие условия:

$$\partial \Phi / \partial \theta = 0; \quad 0 \leq r \leq r_0; \quad \theta = \theta_0; \quad \theta = \theta_1. \quad (3.69)$$

Полагая $\theta_1 = \pi - \theta_0$, а функцию симметричной относительно оси Oy , искомый потенциал скорости $\Phi(r, \theta) = \Phi(r, \pi - \theta)$ представим через потенциалы скоростей в областях I и II:

$$\Phi_1 = \sum_{v=1}^{\infty} A_v i_{m_v}(kr) P_{m_v}(\cos \theta); \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0; \quad 0 \leq r \leq r_0; \quad (3.70)$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta); \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2; \quad r \geq r_0, \quad (3.71)$$

где A_v ; B_n — комплексные коэффициенты; m_v — корни уравнения; $\partial P_{m_v}(\cos \theta)/\partial \theta = 0$; $\theta = \theta_0$; $n = 0, 2, 4, \dots$

В соответствии с методом частных областей неизвестные A_v и B_n должны быть определены из следующей системы функциональных уравнений, объединяющих условия непрерывности поля на границе раздела областей I и II и граничное условие (3.68):

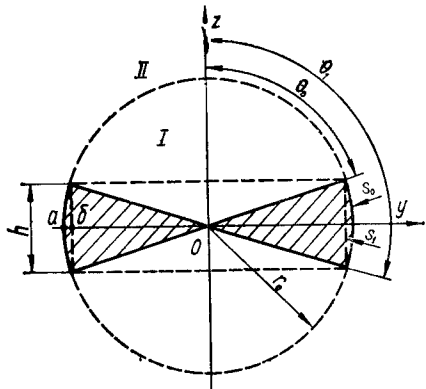


Рис 71

$$\Phi_2 = \Phi_1; \quad r = r_0; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0;$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial (kr)} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial (kr)}; & r = r_0; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0; \\ -v_0 f(\theta)/k; & r = r_0; \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases} \quad (3.72)$$

Алгебраизация этой системы уравнений, основанная на свойствах полноты и ортогональности функций $P_{m_v}(\cos \theta)$ на интервале $0 \leq \theta \leq \theta_0$ и $P_n(\cos \theta)$ на интервале $0 \leq \theta \leq \pi/2$, позволяет получить эквивалентную ей бесконечную систему линейных алгебраиче-

ских уравнений:

$$A_v^* \frac{i_{m_v}(kr_0)}{i_{m_v}'(kr_0)} - \frac{1}{N_v} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^* N_{vn} = 0;$$

$$B_n^* \frac{h_n^{(1)}(kr_0)}{h_n^{(1)}(kr_0)} - (2n+1) \sum_{v=1}^{\infty} A_v^* N_{vn} = -\frac{v_0}{k} (2n+1) F_n, \quad (3.73)$$

где

$$A_v^* = A_v i_{m_v}'(kr_0); \quad B_n^* = B_n h_n^{(1)}(kr_0); \quad N_v = \int_{\cos \theta_0}^1 [P_{m_v}(\cos \theta)]^2 d(\cos \theta);$$

$$N_{vn} = \int_{\cos \theta_0}^1 P_{m_v}(\cos \theta) P_n(\cos \theta) d(\cos \theta); \quad F_n = \int_0^{\cos \theta_0} f(\theta) P_n(\cos \theta) d(\cos \theta).$$

Перейдем к анализу акустических свойств шарового слоя. Анализ будем вести на основе численных результатов, полученных с помощью ЭВМ для широкого диапазона значений kr_0 . Все расчетные и экспериментальные данные, приведенные ниже, соответствуют $\theta_0 = 75^\circ$; $h/2r_0 = 0,2588$; $f(\theta) = \text{const}$.

Остановимся на направленности излучения шарового слоя. На рис. 72, а приведены расчетные диаграммы направленности; здесь кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответствуют значениям kr_0 , равные 0,5; 1; 1,5; 2 и 3. Для сравнения на рис. 72, б приведены диаграммы направленности цилиндрического излучателя, рассчитанные по методике работы [4] для тех же значений kr_0 , что и на рис. 72, а. Сопоставление данных на рис. 72 показывает существенное влияние на направленные свойства дифракции звуковой волны на торцах излучателя. Чтобы выяснить более детально закономерности этого влияния, на рис. 73 представлена зависимость отношения $\sigma = R(\frac{\pi}{2})/R(0)$ от kr_0 (здесь кривая 1 соответствует шаровому слою, а кривая 2 — цилиндрическому излучателю [4]). Как следует из приведенных данных, частотная зависимость величины σ при свободных торцах излучателя имеет сильно выраженный осциллирующий характер. При этом амплитуда осцилляций максимальна в области $kr_0 \approx 2$ и с ростом kr_0 убывает. При $kr_0 > 8$ кривые 1 и 2 сближаются.

Для проверки эффективности описанного способа решения рассматриваемой задачи и подтверждения допустимости аппроксимации цилиндра конечной высоты шаровым слоем было проведено экспериментальное исследование направленности макета цилиндрического излучателя с плоскими торцовыми поверхностями и сравнение ее с приведенными выше расчетными данными.

На рис. 72, а приведены экспериментальные диаграммы направленности (кривые 6, 7 и 8, которым соответствуют значения kr_0 , равные 1; 2 и 3), а на рис. 73 приведена экспериментальная зависимость σ (кривая 3) от kr_0 . Сопоставляя экспериментальные и расчетные данные, можно убедиться в их удовлетворительном совпадении. Обратимся

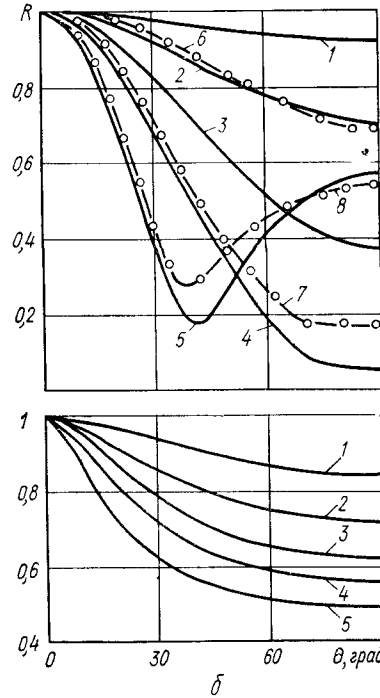


Рис 72

еще раз к рис. 73. Своеобразному поведению σ при свободных торцах излучателя (кривые 1, 3) можно дать следующее упрощенное объяснение. Образующая на торцовом ребре излучателя краевая волна, распространяясь по торцовой поверхности, достигает диаметрально противоположного участка излучающей поверхности и в зависимости от фазы, которая определяется отношением $2r_0/\lambda$, складывается или вычитается с прямой волной, излучаемой этим участком. Естественно,

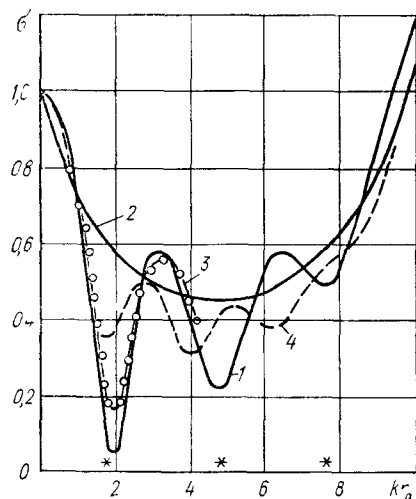


Рис 73

что наиболее неблагоприятные случаи (в направлении $\theta = \pi/2$) должны возникать, когда диаметр излучателя близок к $(2i + 1)\lambda/2$, где $i = 0; 1; 2 \dots$. Это предположение нетрудно проверить. В самом деле, отмечая на оси абсцисс значения r_0 , соответствующие значениям $2r_0/\lambda$, равным 0,5; 1,5; 2,5 (на рис. 73 они обозначены звездочками), можно убедиться, что минимумы кривой 1 действительно лежат в районе этих точек. Следует добавить, что амплитуда осцилляций кривой 1 с увеличением kr_0 падает и при $kr_0 \geq 8$ кривые 1 и 2 начинают совпадать. Это объясняется двумя причинами: с ростом kr_0 уменьшается относительный вклад краевой волны при интерференции ее с прямой волной и увеличивается волновая высота излучателя, что обуславливает увеличение направленного действия излучателя в направлении $\theta = \pi/2$. Отмеченная выше тенденция к совпадению кривых 1 и 2 при $kr_0 \geq 8$ ($h/\lambda \geq 0,65$) подтверждает правомерность сделанных в работе [177] предположений о том, что при $h/\lambda > 1$ звуковое поле конечного по высоте цилиндра удовлетворительно описывается с помощью принятой в этой работе математической модели.

Обратимся теперь к зависимостям, характеризующим импеданс рассматриваемого излучателя (рис. 74). Здесь кривые 1 и 2 соответствуют шаровому слою, а кривые 3 и 4 — цилиндрическому излучателю с бесконечными торцовыми экранами. При этом кривые 1 и 3 соответствуют безразмерной активной, а кривые 2 и 4 — реактивной состав-

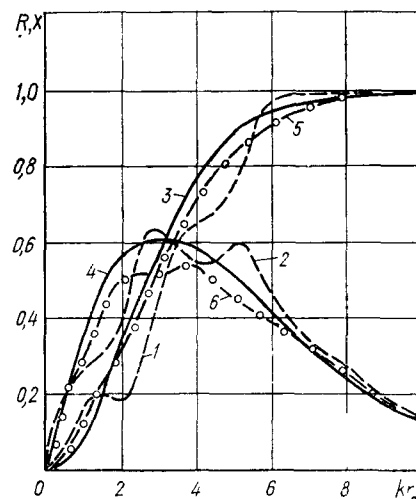


Рис 74

ляющей импеданса. Представленные зависимости показывают, что дифракция на торцах излучателя существенно влияет также и на его импеданс. Как видно, наибольшее влияние проявляется в диапазоне значений $kr_0 \approx 1 \div 6$. При $kr_0 \geq 6$ указанным влиянием можно пренебречь.

Сопоставляя кривую 1 на рис. 74 и кривую 1 на рис. 73, нетрудно убедиться, что уменьшение активной составляющей импеданса шарового слоя происходит при тех же значениях kr_0 , при которых наблюдается уменьшение уровня поля в направлении $\theta = \pi/2$. Особенно ярко это проявляется при kr_0 , равном 2 и 4, 7.

Рассмотрим случай, когда торцы цилиндра акустически мягкие. Для этого достаточно заменить граничное условие на торцовых поверхностях шарового слоя (3.69) на

$$\Phi = 0; \quad 0 \leq r \leq r_0; \quad \theta = \theta_0; \quad \theta = \theta_1, \quad (3.74)$$

а величину m_v в выражении (3.70) определять как корни трансцендентного уравнения $P_{m_v}(\cos \theta) = 0$ при $\theta = \theta_0$. С учетом этих изменений на основе системы (3.73) были проведены расчеты, результаты которых представлены на рис. 73 и 74 (соответственно кривые 4 и 5, 6). Сопоставление количественных данных для случаев акустически жесткого и акустически мягкого торцов цилиндрического излучателя позволяет сделать вывод: акустически мягкие торцы способствуют изменению акустических свойств излучателя. Во-первых, происходит снижение уровня излучения звука вдоль оси симметрии излучателя, а, во-вторых, его активная составляющая импеданса излучения увеличивается, особенно в области $kr_0 \approx 2, 2$.

Как указывалось выше, для оценки поля излучения цилиндра конечной высоты можно использовать предлагаемую в настоящей работе расчетную схему, если выполняются неравенства $h < \lambda$, $h < 2r_0$. Однако можно дать более точную оценку. Для этого необходимо задаться некоторой величиной, характеризующей отклонение сферической излучающей поверхности шарового слоя от цилиндрической поверхности цилиндра конечной высоты. В данном случае разумно выбрать величину ab (см. рис. 71). Если положить $ab \leq \lambda/16$, что обычно допустимо, легко определить предельный волновой размер высоты цилиндрического излучателя, для которого еще допустима его аппроксимация шаровым слоем:

$$h/\lambda \leq \cos \theta_0 / 8 (1 - \sin \theta_0). \quad (3.75)$$

В заключение следует отметить, что исследование цилиндрического излучателя конечной высоты изложенным методом проведено в работе [44] в 1975 г. Позже, в 1976 и 1980 гг. появились работы [101, 204], в которых также изучались акустические свойства конечного цилиндра, но другими методами. При этом следует заметить, что данные работы [101] свидетельствуют о хорошем совпадении результатов, полученных разными методами. Достоверность приведенных выше результатов и факт такого совпадения позволяют считать обоснованными и результаты для параболического цилиндра, описанные во второй главе.

5. Излучение звука радиально колеблющимся отрезком трубы (приближенное решение)

Используя прием, примененный выше при исследовании короткого сплошного цилиндра, можно рассмотреть и более сложную задачу излучения звука коротким отрезком трубы. Излучатели такой конфигурации обладают рядом интересных свойств и уже рассматривались в литературе [51, 62, 200, 205]. Например, в работе [205] отрезок трубы аппроксимирован тором и решение задачи о его излучении звука строилось на основе использования известного представления волновых функций в тороидальной системе координат. Однако указанная аппроксимация позволяет получить удовлетворительные данные о создаваемом звуковом поле только для случаев, когда диаметр трубы намного больше ее высоты, а толщина стенки равна высоте. В работе [62] изучалось поле, создаваемое полым сферическим экваториальным поясом. Задача излучения решалась вариационным методом в сферической системе координат для случая осесимметричного распределения колебательной скорости по поверхности пояса. Поскольку геометрия такого пояса близка к геометрии короткого отрезка трубы, полученные в работе [62] результаты позволяют более точно определить звуковое поле последнего. Однако данные работ [62 и 205] можно использовать применительно к частному случаю осесимметричного распределения колебательной скорости по поверхности трубы, а кроме того, в них не учитывались механические свойства трубы. Ниже на основе модели сферического экваториального пояса выполнено приближенное решение задачи об излучении короткого отрезка трубы с учетом его механических свойств и без ограничений, связанных с характером распределения колебательной скорости по его поверхности.

На рис. 75 показаны сечения отрезка трубы 1 и аппроксимирующего его сферического экваториального пояса 2. Полагается, что толщина стенки трубы t исчезающе мала, а каждый участок стенки совершает колебания как одно целое под воздействием механической нагрузки $p_n = p_0 f(\theta) f(\varphi)$, где p_0 — амплитуда механической нагрузки; $f(\theta)$, $f(\varphi)$ — функция распределения нагрузки соответственно по θ и φ .

Нагрузка p_n может быть вызвана различными причинами. В частности, она возникает в стенках трубы, выполненной из пьезоактивного материала, при приложении к ее электродам электрического напряжения.

Используя для решения задачи метод частичных областей, можно представить звуковое поле, создаваемое трубой, в областях I и II в следующей форме:

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} P_m^n(\cos \theta) \cos n\varphi i_m(kr); & r \leq r_0; \\ \Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_{nm} P_m^n(\cos \theta) \cos n\varphi h_m^{(1)}(kr); & r \geq r_0, \end{cases} \quad (3.76)$$

где Φ — потенциал скорости; A_{nm} , B_{nm} — неизвестные комплексные коэффициенты; $n = 0; 1; 2, \dots$, $m = 0; 1; 2, \dots$

Учитывая принятые выше предположения, первое условие сопряжения полей на поверхности $r = r_0$, очевидно, должно иметь вид

$$\partial \Phi_1 / \partial (kr) = \partial \Phi_2 / \partial (kr); \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (3.77)$$

Второе условие сопряжения полей при $r = r_0$ состоит из двух частей. Первая часть очевидна:

$$p_1 = p_2; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0; \quad \theta_1 \leq \theta \leq \pi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (3.78)$$

где $p = -j\omega\rho\Phi$; ρ — плотность жидкости.

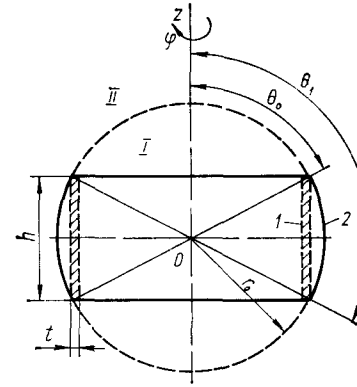


Рис. 75

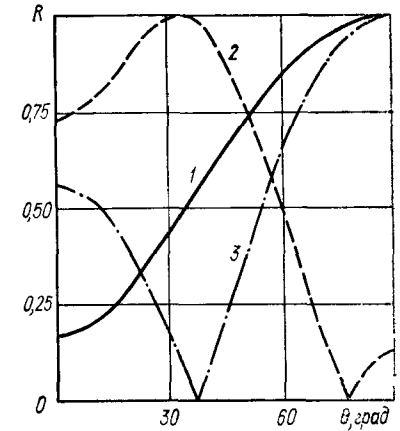


Рис. 76

Вторая часть должна связывать внешнюю нагрузку с реакцией окружающей среды и стенок трубы. Учитывая, что сумма сил реакций должна равняться нагрузке p_n , можно записать

$$p_n = p_1 - p_2 + v_1 Z(\theta, \varphi); \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (3.79)$$

где $Z(\theta, \varphi)$ — механический импеданс стенок трубы.

Объединяя выражения (3.78) и (3.79), нетрудно сформулировать второе условие сопряжения полей:

$$p_2 = \begin{cases} p_1; & 0 \leq \theta \leq \theta_0; \quad \theta_1 \leq \theta \leq \pi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ p_1 - p_n + v_1 Z(\theta, \varphi); & \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (3.80)$$

Учитывая выражение (3.76) и условие (3.77), можно представить поле Φ_2 в следующем виде:

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} P_m^n(\cos \theta) \cos n\varphi \frac{i_m'(kr_0)}{h_m^{(1)'}(kr_0)} h_m^{(1)}(kr). \quad (3.81)$$

Алгебраизация системы функциональных уравнений (3.80) с учетом выражений (3.78) и (3.81), основанная на свойствах полноты и ортогональности функций, характеризующих угловое распределение поля в частичных областях на соответствующих интервалах углов φ и θ , позволяет получить бесконечную систему линейных алгебраиче-

ских уравнений:

$$A_{nm} \left[\frac{i'_m(kr_0)}{h_m^{(1)}(kr_0)} h_m^{(1)}(kr_0) - i_m(kr_0) \right] - i \frac{1}{\rho c N_{nm}} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{ql} i'_q(kr_0) N_{mnl} =$$

$$= -i p_n / \omega \rho, \quad (3.82)$$

где

$$N_{nm} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [P_m^n(\cos \theta) \cos n\varphi]^2 d\varphi d\theta;$$

$$N_{nmql} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_m^n(\cos \theta) \cos n\varphi P_q^l(\cos \theta) \cos l\varphi Z(\theta, \varphi) d\varphi d\theta.$$

Для того чтобы исследовать особенности звукового поля, создаваемого отрезком трубы, необходимо задаться величинами p_n и $Z(\theta, \varphi)$, а также геометрическими и физическими параметрами трубы. В качестве примера выбрана пульсирующая труба с $r_0 = 0,036$ м; $h = 0,88r_0$; $t = 0,1r_0$ (при этом $\theta_0 = \pi - \theta_1 = 64^\circ$). Плотность материала трубы $\rho_1 = 7,54 \cdot 10^3$ кг/м³, упругая податливость $S = 1,22 \times 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона 0,3.

Толщина t при решении дифракционной задачи принята равной нулю, однако для определения $Z(\theta, \varphi)$ необходимо учитывать ее реальное значение. Поэтому положим, что $Z(\theta, \varphi) = i(\omega M - 1/\omega C)$, где M — масса, $M = 2\pi r_0 t \rho$; C — механическая податливость на единицу высоты трубы, $C = r_0 S / 2\pi t$. Внешнее механическое напряжение, приложенное к стенкам трубы, примем равномерным ($p_n = \text{const}$).

Приведенные исходные данные использовались при численном решении системы (3.82), причем количество удерживаемых неизвестных составляло 16. Как показывает анализ расчетных данных, полученных с учетом принятых выше параметров и характера нагрузки, звуковая энергия, излучаемая отрезком трубы, концентрируется преимущественно в плоскости $\theta = \pi/2$. Все это иллюстрирует типичная диаграмма направленности (рис. 76), где кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям $2r_0/\lambda$, равным 0,5; 1,15 и 1,7. Это важное свойство дальнего поля отрезка трубы имеет простое физическое объяснение. Каждый участок стенки колеблется как одно целое, в результате чего на внешней и внутренней поверхностях трубы создается звуковое давление противоположного знака. В связи с этим в направлении $\theta = 0$ излучаемые волны от обеих поверхностей трубы практически компенсируют друг друга. В направлении $\theta = \pi/2$ компенсация обеих волн уже не полная, поскольку волна, излучаемая внутренней поверхностью трубы, запаздывает (по отношению к волне, излучаемой внешней стенкой) вследствие дифракции на цилиндре. В связи с этим диаграмма направленности отрезка трубы имеет максимум при $\theta = \pi/2$. Однако указанная особенность этой диаграммы сохраняется только до тех пор, пока волновой диаметр трубы относительно мал, $2r_0/\lambda < 0,75$.

В области $1,25 \leq 2r_0/\lambda \leq 0,75$ излучаемая звуковая энергия начинает концентрироваться вдоль оси z . При еще больших $2r_0/\lambda$ наблюдается обратный процесс — звуковая энергия вновь концентрируется

в плоскости $\theta = \pi/2$. Описанные изменения направленных свойств иллюстрируют кривые 2 и 3.

При рассмотрении сплошного цилиндра с жесткими торцами (см. предыдущий параграф) наблюдалось явление взаимодействия по полю диаметрально противоположных участков излучающей поверхности цилиндра. Вполне очевидно, что в случае отрезка трубы взаимодействие его стенок по полю должно носить еще более сложный характер, по кольцу излучают обе поверхности стенки.

Выше речь шла о влиянии взаимодействия противофазно колеблющихся стенок на дальнее поле излучателя. Теперь целесообразно рассмотреть, как это взаимодействие влияет на его импеданс излучения.

На рис. 77 приведена частотная зависимость активной R (кривая 1) и реактивной X (кривая 2) составляющих импеданса излучения отрезка трубы. Как видно, величина X характеризуется рядом переходов через ось абсцисс, что указывает на наличие резонансных явлений. Для более подробного рассмотрения причин их возникновения понадобятся некоторые сведения об излучении бесконечной по высоте трубы в ее внутреннюю область, заполненную акустической средой [55]. Если на внутренней поверхности этой трубы цилиндра задана колебательная скорость $v = \text{const}$, то нетрудно показать, что безразмерный импеданс излучения внутренней поверхности $r = r_0$ описывается выражением (см. работу [177])

$$Z^* = -i J_0(kr_0) / J_1(kr_0). \quad (3.83)$$

На рис. 77 приведен график этой величины (кривая 3), из которого следует, что характер импеданса чисто реактивный и имеется бесконечная последовательность резонансов и антирезонансов внутреннего объема среды. При малых значениях kr_0 импеданс имеет упругий характер. Однако этот характер будет сохраняться до тех пор, пока значение диаметра $2r_0$ не станет близким к $0,7\lambda$. При этом цилиндрическая волна, излучаемая каждым элементарным участком трубы, достигает диаметрально противоположного участка трубы, имея уже фазу, отличающуюся на π от фазы волны, излучаемой в этот момент противоположным участком. В результате суммарное давление на внутренней поверхности $r = r_0$ становится равным нулю и как следствие становится равным нулю значение Z^* . Это явление можно интерпретировать как резонанс давлений (или последовательный резонанс). После резонанса величина Z^* меняет знак и имеет уже характер массы. Он сохраняется до тех пор, пока значение $2r_0$ не станет близким к значению λ . При этом давление на внутренней поверхности $r = r_0$ резко повышается, а величина $Z^* \rightarrow \infty$, т. е. наступает антирезонанс (или параллельный резонанс). Далее картина повторяется — резонансы чередуются с антирезонансами. Следует заметить, что этот процесс наглядно иллюстрирует известную теорему Форстера [145], утверждающую, что механический контур любой сложности характеризуется последовательным чередованием резонансных и антирезонансных явлений. При этом, следуя Форстеру, точку $kr_0 = 0$ можно трактовать как антирезонанс Z^* .

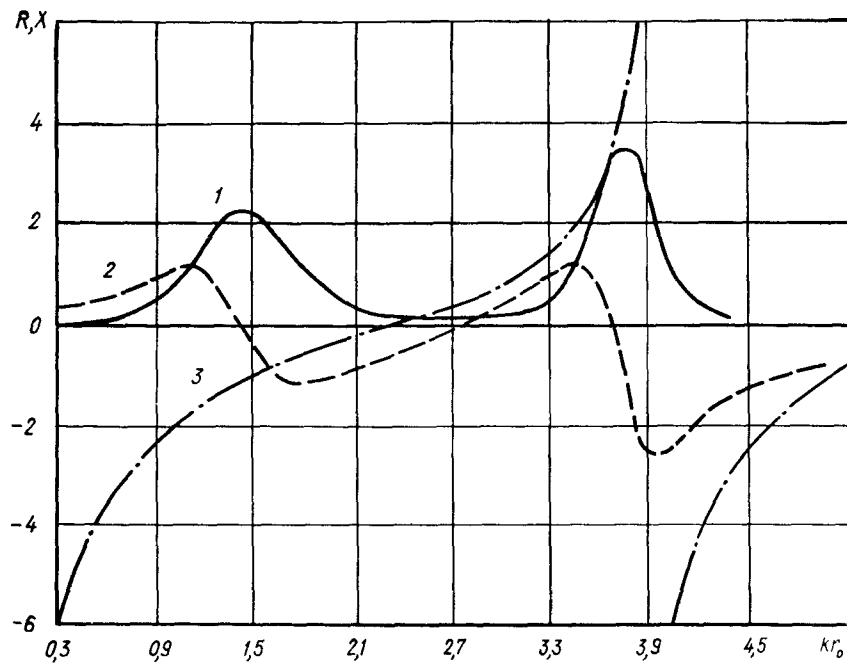


Рис. 77

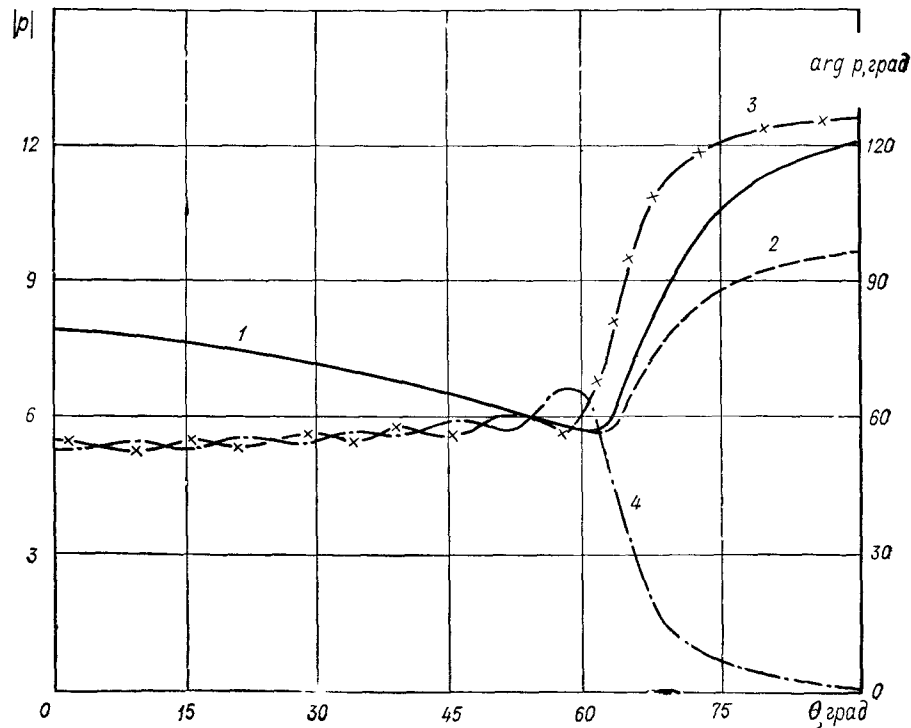


Рис. 78

Учитывая результаты приведенного выше краткого анализа, вернемся к рассматриваемой задаче. Из представленных на рис. 77 частотных зависимостей импеданса излучения следует, что отрезку трубы также присущи резонансные явления. Однако причины возникновения этих резонансов несколько отличны от случая бесконечной трубы. Прежде всего надо остановиться на анализе реактивной составляющей импеданса излучения. На низких частотах величина X имеет характер массы и стремится к нулю при $kr_0 = 0$. Этого и следовало ожидать, так как стенки трубы колеблются противофазно и на низких частотах происходит акустическое короткое замыкание. С повышением частоты начинает играть роль и упругость среды во внутреннем объеме трубы, которая в первом приближении аппроксимируется кривой 3. При $2r_0/\lambda \approx 0,5$ наступает резонанс между упругостью среды во внутреннем объеме и массой среды, соколеблющейся со стенками трубы. Этот резонанс по сути является антирезонансом (параллельным резонансом). Это следует из того факта, что импеданс X при $kr_0 \ll 1$ имеет характер массы. Последнее возможно только в том случае, если упругость и масса «соединены» параллельно. В литературе указанный резонанс носит название объемного резонанса. Однако, по-видимому, более правильно назвать его антирезонансом между упругостью объема среды внутри трубы и присоединенной массой среды на внутренней и внешних стенках трубы. Далее, с ростом величины kr_0 следуют поочередно резонансы и антирезонансы, которые вызваны теми же причинами, что и в бесконечной трубе. Однако в отличие от последней на частотах антирезонансов величина X не терпит разрывов, так как существуют потери на излучение энергии в окружающее пространство.

Интересна также и зависимость от частоты величины R . Как видно, на частотах антирезонанса величина R имеет экстремумы. Это следствие того, что на указанных частотах колебательная скорость стенок трубы резко снижается и их нагружаемость в целом растет.

Выше проанализированы акустические свойства трубы с пульсирующими стенками на основе численного решения системы (3.82) методом редукции. В связи с этим весьма важно определить, насколько точно выполняются условия (3.80) на поверхности $r = r_0$.

На рис. 78 представлены распределения амплитуды (кривые 1, 2) и фазы (кривые 3, 4) звукового давления, рассчитанные с учетом выражения (3.36) (для областей I и II соответственно). При этом $r = r_0$ и $2r_0/\lambda = 0,6$. Как видно, на участке $0 \leq \theta \leq \theta_0$ амплитуды давлений с графической точностью совпадают. Фазы давлений совпадают несколько хуже: в зоне углов $0 \leq \theta \leq 0,94\theta_0$ отличие составляет 2—3 %; в зоне углов $0,94\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ это отличие несколько больше. В целом же отличия амплитуд и фаз давлений, рассчитанные по формулам (3.76), на поверхности $r = r_0$ достаточно малы и обеспечивают хорошую точность при оценке диаграммы направленности и импеданса излучения. Оценки локальных значений ближнего поля можно уверенно производить во всей области существования поля, за исключением точек, лежащих в непосредственной близости от ребер трубы. При необходимости вычисления поля в этих точках следует использовать метод, изложенный в работе [33].

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА НА БЕСКОНЕЧНЫХ РЕШЕТКАХ
ИЗ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ1. Постановка задачи.
Типы рассматриваемых оболочек

В предыдущих главах рассмотрен довольно широкий круг задач, относящихся в основном к проблеме излучения звука. Изучение характеристик излучаемого сложными системами звукового поля велось с использованием двух главных идеализирующих реальные ситуации предположений. Излучающие системы предполагались идеальными, т. е. считалось, что их свойства не зависят от влияния акустической среды. В частности, задаваемое на активных поверхностях распределение колебательной скорости считалось независимым от частоты.

Анализ различных излучающих систем показал большие возможности экранирования как способа управления структурой звукового поля и характеристиками излучателя. При этом экранирующие элементы считались идеально мягкими. В этом заключается второе существенное предположение, содержащееся во всех постановках рассмотренных задач.

Один из возможных способов создания акустически мягких рассеивателей в жидкости заключается в использовании упругих оболочек или систем оболочек при совпадении частоты рассеиваемого звука с собственными частотами оболочек. Такое поведение систем оболочек позволяет практически реализовать мягкое экранирование излучающего объекта, хотя и в ограниченном диапазоне частот.

Постановка задач, которые будут рассмотрены в этой и последующих главах, в общем традиционная и используется в большом числе работ по дифракции звуковых волн [2, 103, 115, 117, 123, 124, 175, 209 и др.]. Имеется погруженная в идеальную сжимаемую жидкость с волновым сопротивлением ρc решетка, на которую падает гармоническая звуковая волна. Искомые величины являются характеристики рассеянного звукового поля, зависимость этих характеристик от частоты и характера колебательных движений стенок упругих оболочечных элементов.

Здесь рассматривается один класс упругих оболочек, стенки которых выполнены из тонких пластин, закрепленных по контуру на недеформируемых опорах. Примеры конструкций таких оболочек даны на рис. 79, где 1 — пластины; 2 — опоры.

В свете указанного выше относительно исходных посылок для выбора рассматриваемого класса задач, естественно, возникает вопрос о возможности использования оболочек классической формы (под обо-

лочками классической формы будем понимать гладкие, круговые и эллиптические цилиндрические оболочки, сферические оболочки и другие, подобные им). Для ответа на этот вопрос проведем некоторый сравнительный анализ колебательных систем в виде указанных классических оболочек и в виде оболочек, показанных на рис. 79.

Ниже показано поперечное сечение нескольких цилиндрических оболочек, бесконечных в направлении оси, перпендикулярной к плоскости рисунка, даны некоторые низшие формы колебаний этих оболочек и указаны соответствующие им значения собственных частот [148, 149, 150, 184, 196, 216].

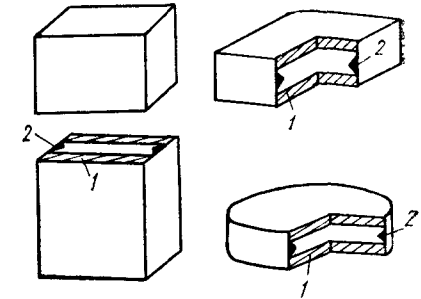


Рис 79

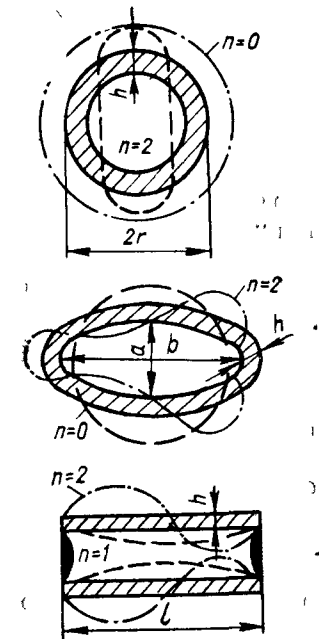
$$\omega_{n=0} = \frac{1}{r} \left(\frac{E_1}{\rho_1} \right)^{1/2};$$

$$\omega_{n=2} = 7,2 \frac{h}{r^2} \left\{ \frac{E_1}{12\rho_1(1-\sigma^2)} \right\}^{1/2}$$

$$\omega_{n=0} = \frac{h(1,64)^2}{b^2} \left\{ \frac{E_1}{12\rho_1(1-\sigma^2)} \right\}^{1/2};$$

$$\omega_{n=2} = \frac{h(2,75)^2}{b^2} \left\{ \frac{E_1}{12\rho_1(1-\sigma^2)} \right\}^{1/2}$$

$$\omega_n = \frac{hn^2}{l^2} \left\{ \frac{\pi^4 E_1}{12\rho_1(1-\sigma^2)} \right\}^{1/2}$$



Здесь E_1 — модуль упругости; ρ_1 — плотность; σ — коэффициент Пуассона материала оболочки.

Как следует из приведенных данных, для достижения выраженной объемной податливости оболочек, наличие которой является основной предпосылкой для получения высоких звукоизолирующих свойств решетки из оболочек [186, 207], предпочтительней использовать первую форму колебаний полого бруса и цилиндрической трубы, поскольку для нее характерно отсутствие противофазно колеблющихся участков поверхности оболочек. Отчасти может быть пригодна и эллиптическая

труба (при $n = 0$), так как противофазно колеблющиеся участки ее поверхности не равны по площади (как показано в работе [196], это неравенство будет тем больше, чем больше отношение a/b). При более сложных формах колебаний (в частности, при $n = 2$) колеблющиеся в противофазе поверхности оболочек равны (или близки) по площади, в результате чего объемная податливость оболочек практически будет сведена к нулю и необходимые предпосылки для обеспечения удовлетворительной звукоизоляции решеткой будут отсутствовать.

Сравним выражения, определяющие собственные частоты оболочек на низшей форме колебаний. Как видно, первая собственная частота цилиндрической трубы обратно пропорциональна ее радиусу, в то время как для полого бруса и эллиптической трубы собственные частоты пропорциональны толщине стенок и обратно пропорциональны квадрату линейного размера поперечного сечения. Эти отличия в связях между собственной частотой и геометрическими размерами оказываются принципиальными. Действительно, учитывая физические свойства воды и свойства конструкционных металлов и пластиков, при $n = 0$ невозможно обеспечить малые волновые размеры диаметра цилиндрической трубы в воде $2r/\lambda_1$ ($\lambda_1 = c/f_{n=0}$, c — скорость звука в воде). Например, труба из стали при $f_{n=0} = 3$ кГц будет иметь $2r = 0,5$ м, а волновой диаметр в воде $2r/\lambda_1 \approx 1$. Отсюда вытекает, что шаг решетки, построенной из цилиндрических труб, невозможно выполнить малым по сравнению с длиной волны в воде, а следовательно, обеспечить необходимую однородность звукоизолирующих свойств поверхности решетки. Само собой разумеется, что экранирование такой решеткой нерабочих поверхностей излучателей окажется просто невозможным, поскольку размеры их обычно не превышают 0,5—1 длины волны в воде.

В противовес этому собственные частоты полого бруса и трубы эллиптического сечения зависят от отношения двух их геометрических размеров. Это позволяет обеспечить малые абсолютные и волновые размеры их поперечного сечения, а следовательно, и малый волновой шаг решетки, построенный на их основе. Однако при прочих равных условиях полые брусья оказываются предпочтительнее труб эллиптического сечения, поскольку у последних (как уже отмечалось выше) имеются все же противофазно колеблющиеся участки поверхности, которые приводят к снижению объемной податливости труб.

Обобщая проведенный качественный анализ, с очевидностью можно утверждать, что для остальных оболочек, изображенных на рис. 79, будут характерны такие же свойства, как и для полых брусьев, а учитывая их конечные размеры, следует ожидать, что они окажутся более пригодными для практического использования.

Изучение явлений дифракции звуковых волн на упругих оболочках основано на совместном решении сложных задач акустики и механики. Специфику таких сопряженных задач рассмотрим вначале на примере анализа решения задач дифракции звука на одиночных оболочках классической формы. Если звуковое поле, возбуждающее упругую оболочку, известно, то решение задачи можно разбить на ряд характерных этапов [20, 108—112, 119, 128, 129, 135, 159, 178, 189, 190, 192, 199, 212]:

а) выбор подходящей координатной системы, в которой разделяются переменные в уравнении Гельмгольца и одна из координатных поверхностей полностью совпадает с поверхностью упругой оболочки;

б) представление звукового поля вне оболочки в виде суперпозиций двух полей — падающего на оболочку и рассеянного ею; при этом необходимо выполнение двух условий: рассеянное поле должно удовлетворять условию Заммерфельда [171] и оба поля должны быть выражены через собственные волновые функции, характерные для области существования внешнего поля;

в) выбор механической модели, описывающей с достаточной точностью движение оболочки и представление колебательной скорости стенок в виде суперпозиции собственных форм колебаний с неизвестными комплексными коэффициентами [108, 128, 140, 151];

г) формулировка функциональных уравнений, отражающих условия сопряжения на поверхностях оболочки нормальных составляющих колебательных скоростей жидкости и оболочки, а также звукового давления в жидкости и механических напряжений в оболочке, нормальных ее поверхности;

д) алгебраизация полученных функциональных уравнений на основе полноты и ортогональности волновых функций, описывающих звуковые поля и колебательные движения оболочки; при этом в большинстве случаев получаем конечную или бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных комплексных коэффициентов рядов по собственным волновым функциям;

е) получение количественных данных и на этой основе установление волновых свойств рассматриваемых акустико-механических систем.

Если мы имеем дело не с одиночной оболочкой, а с группой, то для многих оболочек указанных классических форм можно получить полное решение задачи с использованием теорем сложения для волновых функций [7, 73, 155]. Если форма используемых в решетках упругих оболочек не классическая, а такого типа, как изображена на рис. 79, то такой путь решения задачи не может быть реализован, поскольку не существует координатной системы, в которой с помощью какой-либо одной координатной поверхности можно было бы полностью описать поверхность оболочки.

Ниже на примере гаммы конкретных задач дифракции звуковых волн на решетках из замкнутых упругих оболочек (типа изображенных на рис. 79) укажем возможный подход к их решению и проиллюстрируем его реализацию. В процессе изложения будем придерживаться принципа постепенного наращивания сложности рассматриваемых задач дифракции. Отметим, что используемый ниже подход к решению задач дифракции звука на решетках из упругих оболочек развит в работах [23, 28, 38, 39, 40, 41, 42, 48].

2. Решение для слоя из брусьев с одной упругой стенкой

Рассмотрим периодическую решетку, элементами которой служат полые брусья бесконечной длины, сдвинутые вплотную друг к другу (без щелей). Каждый брус образован тонкой упругой полосой (пластинкой),

закрепленной по краям на недеформируемую опору. На рис. 80 схематически изображено сечение решетки плоскостью, нормальной к ее поверхности.

Предположим, что на решетку под некоторым углом θ падает плоская звуковая волна с потенциалом скорости Φ_0 , которая может возбуждать изгибные колебания пластин (1) и колебательные движения для каждого бруса (2) как единого целого вдоль оси Ox .

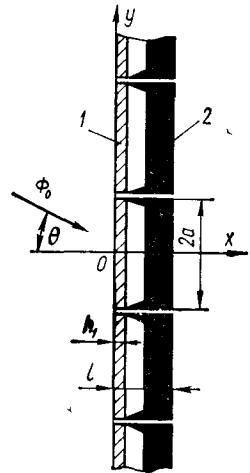


Рис 80

Несмотря на то что такая решетка — простейшая и, возможно, не самая интересная с точки зрения практики, на ее примере легче всего проследить за особенностями метода решения рассматриваемого класса задач и проанализировать механизм проникновения звука через решетку. Полученные ниже конкретные результаты будут служить для сравнения и выявления особенностей поведения более сложных решеток.

Чтобы не заслонять излишними деталями существо решения задачи, введем следующие допущения и упрощения. Будем полагать, что внутри полых брусьев вакуум (в дальнейшем учтем также наличие в них среды), а материал, из которого выполнены пластины, изотропный и идеально упругий. Последнее допущение является определенной идеализацией свойств реальных материалов, тем не менее оно оправ-

дано и широко используется при изучении взаимодействия звуковых волн с упругими пластинами и оболочками в жидкости. Это обусловлено, с одной стороны, тем, что металлы характеризуются низкими диссипативными потерями [108, 161], а с другой стороны, — относительно высокими значениями активных составляющих импеданса излучения изгибно колеблющихся в жидкости упругих пластин и оболочек [108]. Поэтому потери звуковой энергии пластинами (оболочками) за счет переизлучения в окружающую среду существенно больше потерь звуковой энергии в материале пластинок за счет диссипации, в связи с чем последними можно пренебречь. Однако следует отметить, что при изучении колебаний упругих объектов в газообразной среде (см., например работы [106, 107]) такое допущение может оказаться уже не оправданным, поскольку волновое сопротивление газа на много порядков ниже волнового сопротивления жидкости. При этом потери энергии за счет переизлучения звука в окружающую среду могут оказаться одного порядка с диссипативными потерями в материале упругих объектов.

Учитывая конфигурацию решетки, изображенной на рис. 80, выберем для описания процесса рассеяния звука декартову систему координат. При этом благодаря отсутствию щелей между элементами решетки ее фронтальную и тыльную поверхности можно полностью совместить с координатными поверхностями $x = 0$ и $x = l$ соответственно. Таким образом, всю область существования звукового поля можно представить в виде двух частичных областей: область $x \leq 0$ и область

$x \geq l$. Между этими частичными областями происходит обмен энергией за счет движения элементов решетки.

Теперь представим звуковые поля в указанных частичных областях, которые суть полупространства. Как известно, звуковые поля в пространстве можно представить в различной форме, например с применением интеграла Кирхгофа, интеграла Фурье, функции Грина и т. д. [171, 177]. Возможность применения различных форм представления поля используем для того, чтобы упростить процедуру удовлетворения граничных условий на поверхностях решетки. Именно учет периодичности решетки подсказывает определенную периодичность в форме представления звукового поля. Имея это в виду, представим звуковые поля в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся под различными углами к оси Ox . Тогда потенциал скорости в переднем полупространстве ($x \leq 0$) естественно выразить в виде суммы падающей плоской волны и набора отраженных решеткой плоских волн, а за решеткой в области $x \geq l$ — в виде набора уходящих от решетки плоских волн. Учитывая, что отраженные от решетки и уходящие от нее волны должны обладать периодичностью относительно координаты y , потенциалы скоростей в указанных полупространствах представим в следующей форме:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_0 + e^{iky \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-ik_n x} e^{i \frac{\pi}{a} n y}; \quad x \leq 0; \\ \Phi_2 &= e^{iky \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{ik(x-l)} e^{i \frac{\pi}{a} n y}; \quad x \geq l,\end{aligned}\quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}; \quad k_n = \left[k^2 - \left(k \sin \theta + \frac{\pi}{a} n \right)^2 \right]^{1/2}; \\ n &= 0; \pm 1; \pm 2; \dots;\end{aligned}$$

A_n, B_n — не известные комплексные коэффициенты, характеризующие амплитуду и фазу n -й плоской волны. Зависимость от времени, как и выше, принята в форме $e^{-i\omega t}$.

Функции Φ_1 и Φ_2 непрерывны в соответствующих полупространствах и, как легко проверить, являются решением уравнения Гельмгольца. Отдельные слагаемые в них представляют собой расходящиеся от решетки (бегущие) или затухающие (неоднородные) волны.

Теперь необходимо представить колебательные движения пластин (полос), образующих стенки брусьев, для чего предварительно оговорим те свойства пластин, которыми будем их наделять. Пластины предполагаются достаточно тонкими, с тем чтобы в рассматриваемом диапазоне частот пренебречь колебаниями по толщине и принимать во внимание только изгибные колебания пластин [61, 108]. Именно в этом случае можно надеяться обеспечить высокую (по сравнению с водой) податливость брусьев и удовлетворительные звукоотражающие свойства решетки в целом.

Указанные соображения являются основанием для использования в дальнейших выкладках следующего дифференциального уравнения,

описывающего изгибные движения тонкой пластины под воздействием звукового давления:

$$\frac{d^4 v^{(q)}(y)}{dy^4} - k_{из}^4 v^{(q)}(y) = j \frac{\omega}{D_1} p^{(q)}; \quad q = 0; \pm 1; \pm 2, \dots, \quad (4.2)$$

где $v^{(q)}_y$ — колебательная скорость пластины q -го бруса;

$$k_{из} = \left\{ \frac{\omega^2 \rho_1 h_1}{D_1} \right\}^{1/4}; \quad D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12(1-\sigma^2)};$$

$p^{(q)}$ — разность звуковых давлений на внешней и внутренней сторонах пластин q -го бруса.

Колебательную скорость пластин, образующих брус, естественно всего представить через их собственные формы колебаний в вакууме. Соответствующие формы колебаний пластин должны удовлетворять однородному уравнению, отвечающему уравнению (4.2), и граничным условиям на краях пластин. Для того чтобы конкретизировать задачу, будем полагать, что пластины закреплены по краям шарнирно. В этом случае условия на краях пластины примут вид

$$v^{(q)}(y) = 0; \quad \frac{\partial^2 v^{(q)}(y)}{\partial y^2} = 0; \quad y = \pm a + 2qa. \quad (4.3)$$

Условиям (4.3) и уравнению (4.2) с нулевой правой частью удовлетворяют функции вида

$$\psi_t(y) = \sin \frac{\pi t}{2a} (y + a); \quad t = 1; 2; 3, \dots, \quad (4.4)$$

которые и являются собственными функциями изгибно колеблющейся пластины с шарнирным закреплением. Учитывая вид функции (4.4), а также принятое выше предположение о возможности колебательного движения брусков вдоль оси Ox , представим колебательную скорость пластин q -го бруса в следующей форме:

$$v^{(q)}(y) = e^{j2kaq \sin \theta} \left[v_0^{(q)} + \sum_{t=1}^{\infty} v_t^{(q)} \sin \frac{\pi t}{2a} (y + a - 2qa) \right]; \quad (4.5)$$

где $v_0^{(q)}$ — колебательная скорость q -го бруса как единого целого вдоль оси Ox .

Обратим внимание на фазовый множитель перед квадратной скобкой в уравнении (4.5). Он учитывает запаздывание прихода плоской волны к q -му брусу при ее наклонном падении на решетку. Возможность столь простым образом учесть этот факт непосредственно вытекает из свойств периодичности решетки и формально следует из теоремы Флокке [1, 12].

Неизвестные комплексные коэффициенты, входящие в ряды (4.1), (4.5), определяются из следующей системы функциональных уравнений, объединяющих условия сопряжения колебательных скоростей пластин и окружающей среды, а также механических напряжений в

пластинах и звуковых давлений в среде:

$$\left. \begin{aligned} v^{(q)}(y) &= \partial \Phi_1 / \partial y; \quad x = 0; \quad -a + 2qa \leq y \leq a + 2qa; \\ v_0^{(q)} e^{j2kaq \sin \theta} &= \partial \Phi_2 / \partial y; \quad x = l; \quad -a + 2qa \leq y \leq a + 2qa; \\ \frac{d^4 v^{(q)}(y)}{dy^4} - k_{из}^4 v^{(q)}(y) &= -\frac{\omega^2}{D_1} \rho_1 \Phi_1; \\ x = 0; \quad -a + 2qa \leq y \leq a + 2qa, \\ M v_0^{(q)} e^{j2kaq \sin \theta} &= \rho \int_{-a+2qa}^{a+2qa} [\Phi_1(x=0) - \Phi_2(x=l)] dy, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где M — полная масса бруса на единицу его длины, $M = M_{пл} + M_{оп}$; $M_{пл}$; $M_{оп}$ — соответственно масса пластины и опоры.

Алгебраизация системы (4.6) выполняется стандартным способом на основе свойств полноты и ортогональности функций $e^{j \frac{\pi}{2a} ny}$ и $\sin \frac{\pi t}{2a} (y + a - 2qa)$ на интервале $-a + 2qa \leq y \leq a + 2qa$.

Осуществляя подстановку выражений (4.1) и (4.5) в систему (4.6) и используя указанные свойства ортогональности функций координаты y , получаем следующую бесконечную систему при $q = 0$:

$$\left. \begin{aligned} A_n k_n N_n - j v_0^{(0)} N_n^* - j \sum_{t=1}^{\infty} v_t^{(0)} N_{nt} &= -\delta k \cos \theta; \\ v_0^{(0)} \frac{M}{\rho} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n N_n^* + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n N_n^* &= \delta; \\ B_n k_n N_n &= j v_0^{(0)} N_n^*; \\ v_t^{(0)} a Z_t - v_0^{(0)} \delta_t (\theta = 0) + \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n N_{nt} &= -\beta \delta_t. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} N_n &= \begin{cases} 2a; & n \neq m; \\ 0; & n = m; \end{cases} \quad \delta_n = \begin{cases} 2a; & n = 0; \\ 0; & n \neq 0; \end{cases} \quad \beta = \frac{\rho}{\rho_1 h_1}; \\ Z_t &= \left(\frac{\omega_t}{\omega} \right)^2 - 1; \quad \omega_t^2 = \frac{D_1}{\rho_1 h_1} \left(\frac{\pi t}{2a} \right)^4; \\ \delta_t &= \frac{\pi t}{2a} \frac{e^{-jka \sin \theta} - (-1)^t e^{jka \sin \theta}}{\left(\frac{\pi t}{2a} \right)^2 - (k \sin \theta)^2}; \quad \delta = \frac{2 \sin (ka \sin \theta)}{k \sin \theta}; \\ N_{nt} &= (-1)^n \frac{\pi t}{2a} \frac{e^{jka \sin \theta} - (-1)^t e^{-jka \sin \theta}}{\left(\frac{\pi t}{2a} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a} - k \sin \theta \right)^2}; \\ N_n^* &= 2 \frac{(-1)^n \sin (ka \sin \theta)}{k \sin \theta - \frac{n\pi}{a}}. \end{aligned}$$

Определив из третьего уравнения системы (4.7) величину $v_0^{(0)}$ и подставив ее в первое и последнее уравнения, можно несколько упростить систему, приведя ее к виду

$$\left. \begin{aligned} A_n k_n N_n - B_n k_n N_n - j \sum_{t=1}^{\infty} v_t^{(0)} N_{nt} &= -\delta_n k \cos \theta; \\ B_n \frac{j k_n M N_n}{\rho N_n^*} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} N_m^* (A_m - B_m) &= -\delta; \\ v_t^{(0)} a Z_t + B_n j k_n \delta_t (\theta = 0) \frac{N_n}{N_n^*} + \beta \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m N_{mt} &= -\beta \delta_t. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Система (4.8) является исходной при получении количественных характеристик рассеянного решеткой звукового поля и колебательных скоростей пластин и брусьев в целом. В то же время эта система в большой мере является типичной по отношению к системам, которые будут получены ниже при исследовании других, в том числе и более сложных решеток из упругих оболочек.

В связи с указанными обстоятельствами представляется важным провести исследование системы (4.8) для определения возможности ее решения с помощью метода редукции или метода последовательных приближений. Для этого можно воспользоваться известным подходом, предложенным Кохом [92, 93] и основанным на проверке сходимости определенных рядов, составленных из матричных коэффициентов бесконечной системы.

Как видно, система (4.8) весьма сложна и проведение ее анализа для самого общего случая представляется достаточно сложной задачей. Поэтому ограничимся анализом частного, но важного с точки зрения практики случая, когда $\theta = 0$. В этом случае исходная физическая задача становится симметричной относительно плоскости $y = 0$ (см. рис. 80), что позволяет значительно упростить систему (4.8). Опуская промежуточные выкладки, для этого случая получаем [45]

$$A_n + A_0 \frac{1}{j k \frac{M}{2a\rho} - 1} - j \frac{1}{2a} \sum_{t=1}^{\infty} v_t^{(0)} \frac{\bar{N}_{nt}}{k_n} - \frac{\delta^*}{k} \left[1 - \frac{1}{j k \frac{M}{2a\rho} - 1} \right]; \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} v_t^{(0)} - j A_0 \frac{k \delta_t}{\left[j k \frac{M}{2a\rho} - 1 \right] Z_t} + \frac{2\beta}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{\bar{N}_{nt}}{Z_t} &= \\ &= \frac{\delta_t}{Z_t} \left[\beta - \frac{k}{a \left[j k \frac{M}{2a\rho} - 1 \right]} \right], \end{aligned}$$

где $\delta^* = \begin{cases} 1; & n = 0; \\ 0; & n \neq 0; \end{cases}$ $\bar{N}_{nt} = (-1)^n \pi t/a \left[\left(\frac{\pi t}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 \right]; t = 1; 3; 5...$

Система (4.9) представляет собой совокупность двух бесконечных систем с двумя рядами неизвестных $A_0, A_1, A_2, \dots$ и $v_1^{(0)}, v_3^{(0)}, v_5^{(0)}, \dots$. Поскольку для таких систем остаются справедливыми все результаты, относящиеся к одиночным бесконечным системам [92, 93] вида

$$x_n + \sum_m C_{nm} x_m = b_n,$$

оценим сходимость двойных рядов $\sum_{t,n} |\bar{N}_{nt}/k_n|^2$ и $\sum_{t,n} |\bar{N}_{nt}/Z_t|^2$, не останавливаясь на частных значениях частот, при которых одно из значений Z_t может обратиться в ноль. Такие случаи, когда Z_t при некотором конкретном значении индекса $t = T$ и частоты $f = f^*$ обращается в ноль, не доставляют принципиальных затруднений при решении вопроса о разрешимости системы методом редукции. Фактически, поскольку речь всегда будет идти о конечном значении частоты и индекса, такие случаи порождают квазирегулярные системы. Для доказательства их разрешимости необходимо проделать такие же выкладки и рассуждения, как и проведенные ниже при рассмотрении системы 4.9. Учитывая приведенную выше расшифровку значений k_n и $\bar{N}_{nt}$, вводя обозначение $q = t/2$ с точностью до постоянной, имеем

$$\sum_{q,n} |\bar{N}_{nq}/k_n|_{n,q \gg 1}^2 = \sum_{q,n} \frac{q^2}{n^2 (n^2 - q^2)^2} = \sum_q q^2 \sum_n \frac{1}{n^2 (n^2 - q^2)^2}. \quad (4.10)$$

Представим выражение под суммой с индексом n в виде трех слагаемых

$$\frac{1}{n^2 (n^2 - q^2)^2} = \frac{1}{q^4 n^2} - \frac{1}{q^4 (n^2 - q^2)} + \frac{1}{q^2 (n^2 - q^2)^2}. \quad (4.11)$$

Учитывая выражение (4.11), получаем

$$\begin{aligned} \sum_q q^2 \sum_n \frac{1}{n^2 (n^2 - q^2)^2} &= \\ &= \sum_q \frac{1}{q^2} \sum_n \frac{1}{n^2} - \sum_q \frac{1}{q^2} \sum_n \frac{1}{n^2 - q^2} + \sum_q \sum_n \frac{1}{(n^2 - q^2)^2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ряд, определяемый первым слагаемым правой части последнего выражения, сходится. Можно показать, что ряды, определяемые вторым и третьим слагаемыми правой части выражения (4.12), также сходятся. Действительно, используя выражение, приведенное в работе [63], нетрудно определить суммы следующих рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - q^2} = \frac{1}{\pi q^2} - \frac{1}{2q} \operatorname{ctg} \pi q; \quad (4.13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - q^2)^2} = \frac{\pi}{4q^2 \sin^2 \pi q} + \frac{1}{4q^3} \operatorname{ctg} \pi q - \frac{1}{\pi q^4}.$$

С учетом последних выражений, а также того, что $q = t/2 = 0,5;$

1,5; 2,5..., получим

$$\sum_q \frac{1}{q^2} \sum_n \frac{1}{n^2 - q^2} = \frac{1}{\pi} \sum_q \frac{1}{q^4};$$

$$\sum_q \sum_n \frac{1}{(n^2 - q^2)^2} = \frac{\pi}{4} \sum_q \frac{1}{q^2} - \frac{1}{\pi} \sum_q \frac{1}{q^4}. \quad (4.14)$$

Сходимость двойного ряда $\sum_{q,n} \left| \frac{\bar{N}_{nq}}{Z_q} \right|^2$ намного быстрее сходимости ряда $\sum_{q,n} \left| \frac{\bar{N}_{nq}}{k_n} \right|^2$, что непосредственно следует из оценки

$$\sum_{q,n} |\bar{N}_{nq}/Z_q|^2_{n,q \gg 1} = \text{const} \sum_q \frac{1}{q^6} \sum_n \frac{1}{(n^2 - q^2)^2}. \quad (4.15)$$

Таким образом, основываясь на анализе сходимости рассмотренных двойных рядов, а также очевидной сходимости ряда $\sum_t |\delta_t/Z_t|^2$, можно сделать следующие выводы:

1) решение поставленной граничной задачи в принятой форме существует;

2) значения необходимого числа первых неизвестных в выражениях (4.9) могут быть найдены методом редукции или методом последовательных приближений.

При выборе порядка конечной системы следует руководствоваться определенными критериями качества решения рассматриваемой задачи. Такие критерии качества довольно просто можно сформулировать, имея в виду физическое содержание вопросов, на которые необходимо найти ответ в рамках используемой математической модели.

3. Анализ структуры поля и движения элементов слоя

Приступим к количественному анализу акустических свойств рассматриваемой решетки. Определим прежде всего длинноволновое (приближенное) решение системы (4.9), полагая $2a \ll \lambda_1$; $\lambda_1 = c/f_1$, где f_1 — первая собственная частота пластин в вакууме. Очевидно, что в диапазоне длин волн $\lambda \geq \lambda_1$ в полупространствах $x \leq 0$, $x \geq l$ будет существовать лишь по одной распространяющейся плоской волне, так как $\text{Im } k_n = 0$ только при $n = 0$. При $n \neq 0$ будут существовать одни затухающие (неоднородные) волны, поскольку $\text{Re } k_n = 0$.

Учитывая изложенные соображения и принятое ограничение на область частот в системе (4.9), с известным приближением допустимо удерживать неизвестные только с номерами $n = m = 0$ и $t = 1$. Тогда решение системы (4.9) становится тривиальным и может быть получено в явном виде. Опуская несложные выкладки, приведем выражения

для коэффициентов прохождения и отражения звука при $\theta < \pi/2$:

$$k_{\text{пр}} = B_0 = \frac{2}{2 + \frac{1}{Z_1} \left[1 - \frac{M\alpha^2}{2a\rho_1 h_1} \right] - i \left[\frac{\beta}{kZ_1 \cos \theta} + \frac{kM\alpha^2 \cos \theta}{2a\rho} \right]};$$

$$k_{\text{отр}} = A_0 = -1 + \frac{2 \{ 1 - jMk\alpha^2 \cos \theta / 2a\rho \}}{2 + \frac{1}{Z_1} \left[1 - \frac{M\alpha^2}{2a\rho_1 h_1} \right] - i \left[\frac{\beta}{kZ_1 \cos \theta} + \frac{kM\alpha^2 \cos \theta}{2a\rho} \right]}, \quad (4.16)$$

где $\alpha = \frac{ka \sin \theta}{\sin (ka \sin \theta)}$.

Из выражений (4.16) непосредственно следует: при $\omega \rightarrow 0$

$$Z_1 \rightarrow \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \rightarrow \infty; \quad k_{\text{пр}} \rightarrow 1; \quad k_{\text{отр}} \rightarrow 0;$$

при $\omega \rightarrow \omega_1$

$$Z_1 \rightarrow 0;$$

$$\left. \begin{aligned} k_{\text{пр}} &\rightarrow 2Z_1 / \left\{ 1 - \frac{M\alpha^2}{2a\rho_1 h_1} - j \frac{\beta}{k \cos \theta} \right\} \rightarrow 0; \\ k_{\text{отр}} &\rightarrow -1 + 2Z_1 \left[1 - \frac{Mk\alpha^2 \cos \theta}{2a\rho} \right] / \left[1 - \frac{M\alpha^2}{2a\rho_1 h_1} - j \frac{\beta}{k \cos \theta} \right] \rightarrow -1 \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Оценки в системе (4.17) позволяют установить ряд важных и интересных свойств, присущих решеткам из полых упругих брусьев:

а) на частотах значительно ниже первой собственной частоты упругих пластин решетка практически полностью звукопрозрачна;

б) в области частот, близких к первой собственной частоте пластин, звукопрозрачность решетки незначительна;

в) фаза коэффициента отражения звука в области первой собственной частоты пластин равна π ; иными словами, решетка на этих частотах ведет себя подобно акустически мягкой поверхности.

Полученные выше формулы (4.16) и (4.17) приближенные, поэтому возникает естественный вопрос о точности расчета, который с их помощью можно осуществить. Полный ответ на этот вопрос будет дан ниже на основании сравнения результатов расчета по формуле (4.16) и численного решения системы (4.8) при удержании неизвестных более высокого порядка. Тем не менее косвенно о точности расчетов по формулам (4.16), (4.17) можно судить на основании проверки выполнения закона сохранения энергии, который в нашем случае формулируется простым хорошо известным соотношением [12]:

$$|k_{\text{отр}}|^2 + |k_{\text{пр}}|^2 = 1. \quad (4.18)$$

Заметим, что проверка равенства (4.18) имеет и еще один аспект — служит одним из аргументов в пользу возможности решения системы (4.8) методом редукции.

Подставляя в равенство (4.18) выражения (4.16), получаем

$$|k_{отр}|^2 + |k_{пр}|^2 = 1 - \kappa,$$

где

$$\kappa = \frac{\frac{2}{Z_1} \left[1 + \frac{M\alpha^2}{2a\rho_1 h_1} \right]}{\left\{ 2 + \frac{1}{Z_1} \left[1 - \frac{M\alpha^2}{2a\rho_1 h_1} \right] \right\}^2 + \left\{ \frac{\beta}{kZ_1 \cos \theta} + \frac{kM\alpha^2 \cos \theta}{2a\rho} \right\}^2}.$$

Дадим оценку величины невязки κ для следующих двух случаев:

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0; \quad \kappa &\rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 (1/2 + \alpha^2); \\ \omega \rightarrow \omega_1; \quad Z_1 &\rightarrow 0; \quad \kappa \rightarrow Z_1 \cdot \frac{2(1 + 2\alpha^2)}{(1 - 2\alpha^2)^2 + \left(\frac{\beta}{k \cos \theta} \right)^2}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Как следует из выражений (4.19), закон сохранения энергии выполняется достаточно удовлетворительно. Например, полагая для простоты $\theta = 0$, на частоте $\omega/\omega_1 = 0,1$ имеем $\kappa = 0,015$ и $|k_{отр}|^2 + |k_{пр}|^2 = 0,985$; на частоте $\omega/\omega_1 = 1$ имеем $\kappa = 0$.

Проведенный анализ указывает на то, что основные количественные характеристики звуковых полей в областях $x < 0$ и $x > l$ определяются лишь несколькими первыми членами соответствующих рядов.

Перейдем к анализу количественных данных, полученных на основании численного решения системы (4.8) на ЭВМ. Порядок усечения системы (4.8) определялся путем численного эксперимента и последующего сравнения полученных расчетных данных. В частности, было установлено, что усечение системы на уровне $|n| = N \geq (4-5)ka$; $t = T > 4ka$ практически уже не изменяет первых четырех значащих цифр коэффициентов A_N , B_N , $v_T^{(i)}$, $v_0^{(i)}$ и обеспечивает выполнение равенства (4.18) с точностью не менее $10^{-3}-10^{-4}$.

Все расчеты проводились для случая, когда решетка была погружена в воду с волновым сопротивлением $\rho c = 1,5 \cdot 10^6$ кг/м² · с, а пластины выполнены из титанового сплава [69, 112] с плотностью $\rho_1 = 4,5 \cdot 10^3$ кг/м³, модулем Юнга $E = 1,16 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$; $M_{оп} = 0,1M_{пл}$.

На рис. 81 приведены кривые, характеризующие зависимость коэффициента прохождения звука через решетку при $2a/\lambda_1 = 0,1$ (а) и $2a/\lambda_1 = 0,06$ (б) и различных углах прихода падающей волны; кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответствуют значениям угла θ , равным 0; 30; 60; 70 и 80 град (точка 6 — приближенный расчет). Как видно, с ростом угла θ прозрачность решетки снижается, что выражается в расширении полосы частот, где она весьма низка. Данные рис. 81 подтверждают сделанные выше выводы о высокой звукопрозрачности решетки на низких частотах ($f/f_1 \ll 1$). С ростом частоты прозрачность решетки плавно падает и достигает своего минимального значения вблизи частоты f_1 , после чего снова наблюдается рост прозрачности решетки. Некоторое несопадение минимума прозрачности решетки с частотой f_1 объясняется наличием массы жидкости, соколеблющейся с пластиной.

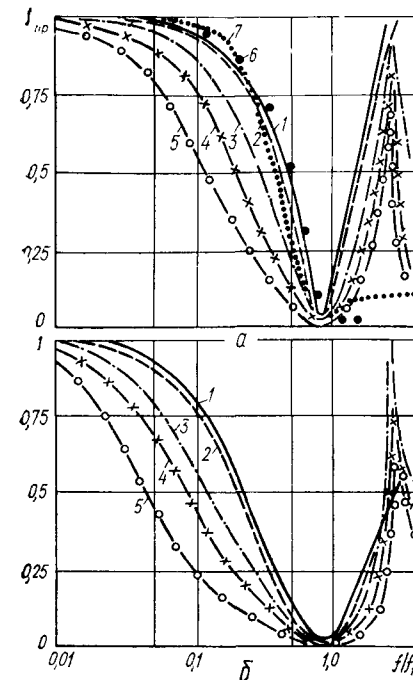


Рис. 81

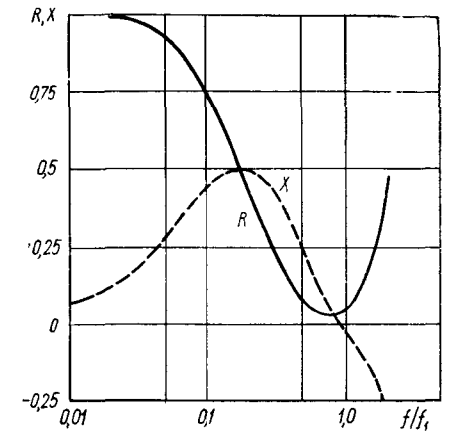


Рис. 82

Сравнивая кривые на рис. 81, а и 81, б, можно убедиться, что область частот, в которой решетка слабопрозрачна, существенно зависит от волнового размера пластины $2a/\lambda_1$. Увеличение параметра $2a/\lambda_1$ (при $f_1 = \text{const}$) приводит к ухудшению диапазоновых свойств решетки как звукоизолятора. Причина этого в том, что с ростом размера пластины

увеличивается ее масса и, как следствие, растет ее добротность как механической колебательной системы. В первом приближении добротность пластины в жидкости можно определить отношением $\omega \bar{M}_{пл}/R$, где $\bar{M}_{пл}$ — эквивалентная масса пластины; R — сопротивление излучения.

Приведенные на рис. 81, а кривые 1—5 рассчитывались для случая, когда масса опоры $M_{оп}$ составляла 10 % массы пластины $M_{пл}$. Естественно, что увеличение $M_{оп}$ должно влиять на звукоизолирующие свойства решетки в целом и прежде всего в области высоких частот. Ход кривой 7 на рис. 81, а подтверждает это предположение и показывает, что рост $M_{оп}$ до $10M_{пл}$ действительно приводит к расширению области непрозрачности решетки за счет уменьшения величины $k_{пр}$ на высоких частотах.

Для того чтобы более глубоко раскрыть некоторые физические стороны процесса прохождения звука через решетку из упругих брусьев, проведем анализ частотной зависимости нормированного (по отношению к ρc) входного импеданса решетки:

$$Z_{вх} = R + iX = \left\{ \int_{-a}^a i\omega\rho\Phi_1(x=0) dy \right\} \left\{ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} dy \right\}^{-1}. \quad (4.20)$$

Рассматривая рис. 82, где $\theta = 0$, а $2a/\lambda_1 = 0,1$, можно убедиться, что

в области $f/f_1 < 1$ реактивная составляющая входного импеданса имеет характер массы. Это обусловлено следующим обстоятельством. На низких частотах податливость стенок брусьев мала и главную роль при прохождении звука играет масса бруса в целом. Поэтому определяющим движением является колебание бруса как единого целого вдоль оси Ox , в силу чего при $f/f_1 < 1$ величина X растет прямо пропорционально частоте. В дальнейшем начинает сказываться упругость пластин и скорость возрастания X уменьшается. В области $f/f_1 \approx 0,2$ значение величины X достигает экстремума, после чего начинает падать

Таблица 3

f/f_1	Амплитуда колебательной скорости в падающей волне, м/с	$ v_1^{(0)} $, м/с	$\arg v_1^{(0)}$, град	$ v_0^{(0)} $, м/с	$\arg v_0^{(0)}$, град
0,1	0,0126	0,00915	224	0,0122	13,5
1,0	0,126	0,4	270	0,0056	264
2,66	0,335	0,935	348	0,303	308

и в районе $f/f_1 \approx 1$ пересекает ось абсцисс, что указывает на наличие резонанса механической колебательной системы полые брусья — окружающая среда. После резонанса величина X носит уже упругий характер.

Частотная зависимость активной составляющей R входного импеданса $Z_{вх}$ сходна с частотной зависимостью величины $k_{пр}$. Таким образом, в районе резонанса системы брусья — вода входной импеданс решетки имеет существенно меньшее значение, чем волновое сопротивление воды, что и обуславливает ее высокие звукоизолирующие свойства.

В заключение анализа акустических свойств рассматриваемой решетки сравним результаты точного расчета величины $k_{пр}$ (кривая 1 рис. 81, а) и расчета, произведенного по приближенной формуле (4.16) (совокупность точек 6 рис. 81, а). Как видно, обе указанные кривые по крайней мере до $f/f_1 \approx 1$ совпадают друг с другом с графической точностью, что дает основание для использования формулы (4.16) при практических расчетах.

Выше уделялось внимание вопросам, связанным с изучением общих акустических свойств решетки из полых брусьев, характер движения пластин и брусьев в целом не рассматривался. В то же время исследование кинематики элементов любой упругой системы зачастую позволяет более глубоко осмыслить физические процессы, происходящие в таких системах. В связи с этим проанализируем амплитуды и фазы колебательных скоростей пластин и брусьев для некоторых наиболее характерных областей частотного диапазона, а именно: в области низких частот $f/f_1 \ll 1$, резонанса $f/f_1 \approx 1$ и в зоне выше резонанса, когда $k_{пр}$ приближается к единице. В табл. 3 приведены такие данные для титановой пластины с волновым размером $2a/\lambda_1 = 0,1$ при нормальном падении плоской волны на решетку, из которых видно, что на низких

частотах амплитуда колебательного движения бруса как единого целого практически равна амплитуде колебательной скорости в падающей волне. Одновременно с этим имеют место и изгибные движения пластины, контрфазные движению бруса. Однако, поскольку $|v_0^{(0)}| > |v_1^{(0)}|$, абсолютное движение пластины совпадает по направлению с движением бруса и равно по амплитуде $|v_0^{(0)}| - |v_1^{(0)}|$. Таким образом, движение бруса как единого целого превалирует, что в конечном счете и определяет высокую прозрачность решетки на этих частотах.

Иначе обстоит дело в области резонанса, т. е. при $f/f_1 \approx 1$. Амплитуда колебательного движения бруса как единого целого весьма мала и составляет около 5 % амплитуды колебательной скорости среды в падающей волне. Амплитуда изгибного движения пластины, наоборот, велика. Таким образом, несмотря на то что падающая волна возбуждает значительные изгибные колебания пластины, последняя не в состоянии инициировать колебания опоры, хотя и имеется механическая связь пластины и опоры. Этот парадоксальный факт обуславливает низкую прозрачность решетки. На частотах $f/f_1 > 1$, когда значение $k_{пр}$ уже близко к единице, также наблюдаются значительные изгибные колебания пластины, однако они хорошо передаются через шарнир на опору, в результате чего амплитуда колебаний последней становится близка амплитуде колебаний среды в падающей волне.

4. Решетка из разнесенных брусьев с упругой стенкой, параллельной плоскости решетки

Рассмотрим более сложный случай, когда брусья разнесены относительно друг друга так, что между ними образуются щели, заполненные окружающей средой. Можно предположить, что наличие щелей приведет к усложнению процесса взаимодействия между упругими элементами решетки и обмена энергией между передним и тыльным полупространствами. В частности, следует ожидать ухудшение звукоизолирующих свойств решетки, поскольку проникновение звуковой энергии из переднего в тыльное полупространство будет происходить не только за счет колебательных движений брусьев, но и за счет прохождения звука через щели между ними.

На рис. 83 (где 1 — пластины; 2 — опоры) изображено сечение рассматриваемой решетки (ср. с рис. 80). Наличие щелей между брусьями фактически исключает возможность полностью совместить поверхность решетки с какой-либо координатной поверхностью декартовой системы координат, как это было сделано в предыдущем параграфе при изучении решетки без щелей между брусьями. Это обстоятельство несколько усложняет структуру общего решения соответствующей дифракционной задачи.

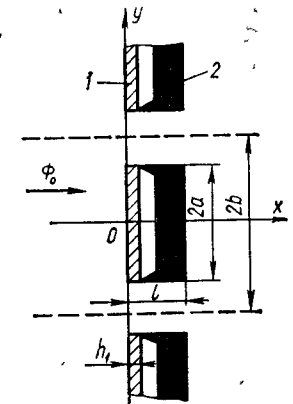


Рис. 83

Для того чтобы преодолеть возникающие трудности, необходимо разбить всю область существования звукового поля на такие подобласти (частичные области), границы которых являлись бы частями координатных поверхностей декартовой системы координат и в пределах каждой подобласти звуковое поле можно было бы представить через собственные волновые функции, характерные для этих подобластей. В дальнейшем необходимо осуществить «сшивание» звуковых давлений и колебательных скоростей на границах раздела подобластей и выполнить алгебраизацию функциональных уравнений, полученных в результате указанного «сшивания».

Описанная схема решения задачи дифракции на решетке из упругих оболочек широко использовалась выше при рассмотрении широкого круга задач акустики. Этот метод построения общих решений граничных задач для уравнения Гельмгольца, естественно, сохраняет свою эффективность и при изучении закономерностей формирования рассеянных полей на упругих элементах. При этом, конечно, в наборы частных решений должны быть включены составляющие, позволяющие выполнить условия сопряжения на поверхности деформируемых пластин.

Обратимся снова к рис. 83. Разобьем всю область существования звукового поля на следующие частичные области: полупространства $x \leq 0$ и $x \geq l$, а также бесконечное число областей, каждая из которых — объем среды в щели между брусками. Чтобы не усложнять решение рассматриваемой задачи, ограничимся случаем нормального падения звуковой волны на решетку $\theta = 0$. Учитывая принятое ограничение и свойства симметрии решетки, исходную задачу можно заменить эквивалентной ей задачей о распространении звука в плоском волноводе с акустически жесткими стенками.

На рис. 83 стенки такого волновода показаны штриховыми линиями. Теперь частичные области естественно определить как область $x \leq 0$; $|y| \leq b$; область $0 \leq x \leq l$; $a \leq y \leq b$; область $0 \leq x \leq l$; $-a \leq y \leq -b$; область $x \geq l$; $|y| \leq b$ (заметим, что благодаря симметрии волновода и падающей волны относительно оси Ox необходимость рассмотрения третьей области отпадает).

Полагая, как и выше, опоры недеформируемыми, а закрепление краев пластин шарнирным, сформулируем граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \partial\Phi/\partial y &= 0; \quad |y| = b; \quad |x| < \infty; \\ \partial\Phi/\partial y &= 0; \quad |y| = a; \quad 0 \leq x \leq l; \\ v^{(1)}(y) &= d^2 v^{(1)}(y)/dy^2 = 0, \quad x = 0; \quad |y| = a, \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

где $v^{(1)}(y)$ — колебательная скорость пластины.

Произведенный выше выбор частичных областей предполагает представление звуковых полей в них через хорошо изученные собственные волновые функции плоского волновода [37]. Учитывая граничные условия (4.21), получаем

$$\Phi_1 = e^{ikx} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-ik_n x} \cos \alpha_n y;$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_2 &= \sum_{p=0}^{\infty} [B_p \cos k_p x + C_p \sin k_p x] \cos \alpha_p (y - a); \\ \Phi_4 &= \sum_{m=0}^{\infty} D_m e^{ik_m (x-l)} \cos \alpha_m y, \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned} k_n &= (k^2 - \alpha_n^2)^{1/2}; \quad k_m = (k^2 - \alpha_m^2)^{1/2}; \quad k_p = (k^2 - \alpha_p^2)^{1/2}; \\ \alpha_n &= \pi n/b; \quad \alpha_m = \pi m/b; \quad \alpha_p = \pi p/(b-a). \end{aligned}$$

Колебательную скорость пластин с учетом граничных условий (4.21) представим в виде ряда по их собственным формам колебаний в вакууме:

$$v^{(1)}(y) = v_0 + \sum_{s=0}^{\infty} v_s^{(1)} \cos \alpha_s y; \quad \alpha_s = (2s+1)\pi/a, \quad (4.23)$$

где v_0 — амплитуда скорости колебательного движения бруса как единого целого вдоль оси Ox .

Неизвестные комплексные коэффициенты в рядах (4.22) определяются из следующей системы функциональных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2; \quad x = 0; \\ \Phi_2 &= \Phi_4; \quad x = l; \quad a \leq y \leq b; \\ -\partial\Phi_1/\partial x &= \begin{cases} -\partial\Phi_2/\partial x; & a \leq y \leq b; \\ v_{(y)}^{(1)}, & 0 \leq y \leq a; \end{cases} \quad x = 0; \\ -\partial\Phi_4/\partial x &= \begin{cases} -\partial\Phi_2/\partial x; & a \leq y \leq b; \\ v_0; & 0 \leq y \leq a; \end{cases} \quad x = l; \\ Mv_0 &= \rho \int_0^a [\Phi_1(x=0) - \Phi_4(x=l)] dy; \quad M = M_{пл} + M_{оп}; \\ \frac{d^4 v^{(1)}(y)}{dy^4} - k_{из}^4 v^{(1)}(y) &= -\frac{\omega^2 \rho}{D_1} \Phi_1; \quad x = 0; \quad 0 \leq y \leq a. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

В системе (4.24) все обозначения такие же, как и в уравнении (4.2)

Алгебраизация системы (4.24), выполненная стандартным способом, приводит к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных $A_n, B_p, C_p, D_m, v_s^{(1)}, v_0$:

$$\left. \begin{aligned} B_p N_p - \sum_{n=0}^{\infty} A_n N_{np} &= \delta_p; \\ B_p N_p \cos k_p l + C_p N_p \sin k_p l - \sum_{m=0}^{\infty} D_m N_{mp} &= 0; \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& jA_n k_n N_n + \sum_{p=0}^{\infty} C_p k_p N_{np} - \sum_{s=0}^{\infty} v_s^{(1)} N_{ns} - v_0 \delta_n = jk \delta_n; \\
& jD_m k_m N_m + \sum_{p=0}^{\infty} B_p k_p N_{mp} \sin k_p l - \sum_{p=0}^{\infty} C_p k_p N_{mp} \cos k_p l + v_0 \delta_m = 0; \\
& \frac{M}{\rho} v_0 - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \bar{\delta}_n + \sum_{m=0}^{\infty} D_m \bar{\delta}_m = 0; \\
& v_s^{(1)} Z_s^{(1)} N_s - v_0 \delta_s + \eta_1 \sum_{n=0}^{\infty} A_n N_{ns} = -\eta_1 \delta_s; \\
& N_n = \begin{cases} b; & n=0; \\ b/2; & n \neq 0; \end{cases} \quad N_m = \begin{cases} b; & m=0; \\ b/2; & m \neq 0; \end{cases} \quad N_p = \begin{cases} b-a; & p=0; \\ (b-a)/2; & p \neq 0; \end{cases} \\
& N_s = a/2; \quad \delta_n = \begin{cases} b; & n=0; \\ 0; & n \neq 0; \end{cases} \quad \delta_m = \begin{cases} b; & m=0; \\ 0; & m \neq 0; \end{cases} \quad \delta_s = \frac{2a(-1)^s}{\pi(2s+1)}; \\
& N_{np} = \begin{cases} b-a; & n=p=0; \\ \frac{n \sin(\pi n a/b)}{\pi b \left[\left(\frac{p}{b-a} \right)^2 - \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]}; & \frac{p}{b-a} \neq \frac{n}{b} \neq 0; \\ (b-a)/2; & \frac{p}{b-a} = \frac{n}{b} \neq 0; \end{cases} \\
& \bar{\delta}_n = \begin{cases} a; & n=0; \\ \frac{b}{\pi n} \sin \frac{\pi n a}{b}; & n \neq 0; \end{cases} \\
& N_{mp} = \begin{cases} b-a; & m=p=0; \\ \frac{m \sin(\pi m a/b)}{\pi b \left[\left(\frac{p}{b-a} \right)^2 - \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]}; & \frac{p}{b-a} \neq \frac{m}{b} \neq 0; \\ (b-a)/2; & \frac{p}{b-a} = \frac{m}{b} \neq 0; \end{cases} \\
& \bar{\delta}_m = \begin{cases} a; & m=0; \\ \frac{b}{\pi m} \sin \frac{\pi m a}{b}; & m \neq 0; \end{cases} \\
& N_{ns} = \begin{cases} \frac{2a(-1)^s}{\pi(2s+1)}; & n=0; \\ \frac{(-1)^{s+1}(2s+1) \cos(\pi n a/b)}{2\pi a \left[\left(\frac{n}{b} \right)^2 - \left(\frac{2s+1}{2} \right)^2 \right]}; & \frac{n}{b} \neq \frac{2s+1}{2} \neq 0; \\ a/2; & (2s+1)/2a = n/b \neq 0; \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\omega_s^{(1)} &= \left\{ \frac{D_1}{\rho_1 h_1} \left[\frac{\pi(2s+1)}{2a} \right]^4 \right\}^{1/2}; \quad Z_s^{(1)} = \left(\frac{\omega_s^{(1)}}{\omega} \right)^2 - 1; \\
\eta_1 &= \frac{D_1}{\rho_1 h_1},
\end{aligned}$$

где D_1 — изгибная жесткость пластин.

Система (4.25) является исходной при получении количественных данных.

Как и в предыдущем параграфе, вначале рассмотрим решение поставленной задачи в длинноволновом приближении. Его можно получить на основе системы (4.25), полагая $kb \ll 1$; $l < b$; $n = m = p = s = 0$. Выполняя несложные, но несколько громоздкие выкладки, имеем

$$k_{np} \approx \frac{2(\varepsilon + \bar{\gamma})}{2(\varepsilon + \bar{\gamma}) - jkl(1 + \varepsilon\bar{\gamma} + \varepsilon^2) - j \frac{\bar{\beta}(1 - \varepsilon)}{kZ_1^{(1)}} [2(\varepsilon + \bar{\gamma}) + 2kl(\bar{\alpha} - 1)]}; \tag{4.26}$$

$$k_{отр} = k_{np} \left[1 - kl \frac{\varepsilon kl + i}{\varepsilon + \bar{\gamma}} \right] - 1,$$

где ε — коэффициент перфорации, $\varepsilon = (1 - a/b)$; γ — отношение массы окружающей жидкости, вытесненной брусом, к массе бруса (все на единицу длины бруса); $\gamma = \rho l a / M$;

$$\bar{\beta} = \frac{4\rho}{\pi^2 \rho_1 h_1}; \quad \bar{\alpha} = \frac{a \rho_1 h_1}{M}; \quad Z_1^{(1)} = \left(\frac{\omega_1^{(1)}}{\omega} \right)^2 - 1.$$

Непосредственная оценка величины k_{np} по формуле (4.26) дает следующие предельные оценки для акустических характеристик решетки:

$$\left. \begin{aligned}
& \omega \rightarrow 0; \quad kl \rightarrow 0; \quad kZ_1^{(1)} \rightarrow \frac{(\omega_1^{(1)})^2}{\omega} \rightarrow \infty; \\
& k_{np} \rightarrow 1; \quad k_{отр} \rightarrow 0; \\
& \omega \rightarrow \omega_1^{(1)}; \quad Z_1^{(1)} \rightarrow 0; \\
& k_{np} \rightarrow \frac{2(\varepsilon + \bar{\gamma}) kZ_1^{(1)}}{-j\bar{\beta} [2(\varepsilon + \bar{\gamma}) + j2kl(\bar{\alpha} - 1)]} \rightarrow 0; \quad k_{отр} \rightarrow -1.
\end{aligned} \right\} \tag{4.27}$$

Из последних двух выражений системы (4.27) следует, что, несмотря на наличие щелей между брусками, решетка сохраняет звукоизолирующие свойства в области первой собственной частоты пластин. Вместе с этим, как и предполагалось выше, величина k_{np} существенным образом зависит от размера щелей между брусками. Поскольку величины k_{np} и ε находятся в сравнительно сложной зависимости друг от друга, количественный анализ целесообразно вести на основе результатов расчета, полученных с помощью формулы (4.26). Все расчеты были выполнены для следующих значений параметров: $2a/\lambda_1 = 0,1$;

$/2a = 0,2$; $\rho_1 = 4,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $E_1 = 1,16 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $\sigma_1 = 0,3$; $\rho c = 1,5 \cdot 10^6 \text{ кг/м} \cdot \text{с}$; $\bar{\gamma} = 1/3$; $\bar{\alpha} = 1/2$; $\beta = 0,27$ и сведены в табл. 4.

Заметим, что данные табл. 4 для $\epsilon = 0$ получены на основе использования формулы (4.16), справедливой для случая отсутствия щелей между брусками. Как видно из этой таблицы, на частотах, ниже первой собственной частоты пластины в вакууме, увеличение размеров щелей между брусками при прочих равных параметрах приводит к увеличению прозрачности решетки. Однако в окрестности первой собствен-

Таблица 4

Параметр	$f/f_1^{(1)}$											
	0,25				0,5				0,71			
ϵ	0	0,1	0,25	0,5	0	0,1	0,25	0,5	0	0,1	0,25	0,5
$ k_{np} $	0,82	0,87	0,92	0,95	0,46	0,58	0,63	0,78	0,26	0,32	0,39	0,5

ной частоты пластин звукоизолирующее действие решетки оказывается довольно эффективным даже при значительной степени перфорации ($\epsilon = 0,5$).

Естественно, что практическое использование экранирующих свойств решеток из упругих элементов возможно лишь при условии, что такие решетки обладают достаточно высокой отражательной способностью в некотором частотном диапазоне.

Под полосой частот эффективной звукоизоляции решетки будем понимать полосу частот, где выполняется условие $|k_{np}| \leq k_0$ при некоторой заданной величине k_0 . В акустике часто принимается $k_0 = 0,2$. В этом случае на границах полосы частот эффективной звукоизоляции во второе полупространство проходит лишь 4 % переносимой падающей волной энергии.

Данные, позволяющие оценить полосу эффективной звукоизоляции для рассматриваемой решетки, приведены на рис. 84, где кривые 1; 2 и 3 соответствуют значениям коэффициента перфорации, равным $\epsilon = 0, 0,25$ и $0,5$. Представленные здесь частотные зависимости коэффициента прохождения при различных значениях коэффициента перфорации получены на основе численного решения системы уравнений (4.25). С увеличением коэффициента перфорации наблюдается не только сужение полосы эффективной звукоизоляции, но и увеличение коэффициента прохождения на резонансной частоте упругих пластин в решетке, которая несколько ниже собственной частоты пластин в вакууме. Из данных рис. 84 следует также, что степень перфорации оказывает практически незаметное влияние на частотную зависимость k_{np} в области частот $f > f_1^{(1)}$. Изменением геометрических параметров решетки удастся изменять ее свойства лишь для относительно низких частот. Ясно, что управлять свойствами решетки можно также путем введения в нее дополнительных упругих элементов, изменения orienta-

ции решетки относительно падающего звукового поля и т. п. Количественный анализ влияния этих факторов дан в следующем параграфе этой главы.

5. Решетка с двумя упругими стенками

Естественно предположить, что увеличение количества упругих стенок в бруске приведет к увеличению его податливости, а следовательно, к улучшению звукоизолирующих свойств решетки. Поэтому рассмо-

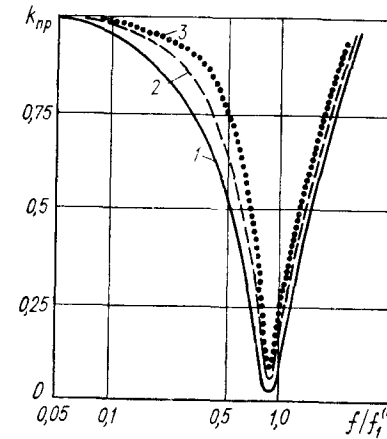


Рис. 84

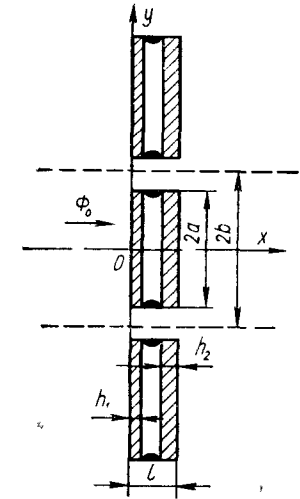


Рис. 85

трим решетку, элементами которой являются бруска с двумя (в общем случае неодинаковыми) пластинами, параллельными плоскости решетки (рис. 85).

Поскольку решение задачи рассеяния плоской звуковой волны на такой решетке во многом аналогично решению рассмотренной выше задачи, не будем его детализировать, а укажем лишь главные отличия.

Во-первых, граничные условия необходимо дополнить еще одним условием, отражающим характер закрепления второй пластины бруска. Полагая закрепление шарнирным, имеем

$$v^{(2)}(y) = d^2 v^{(2)}(y)/dy^2 = 0; \quad x = l; \quad |y| = a, \quad (4.28)$$

где $v^{(2)}(y)$ — колебательная скорость второй пластины.

Во-вторых, колебательную скорость второй пластины необходимо представить в виде ряда по ее собственным формам колебаний в вакууме.

Учитывая принятое условие (4.29), получаем

$$v^{(2)}(y) = v_0 + \sum_{l=1}^{\infty} v_l^{(2)} \cos \alpha_l y, \quad \alpha_l = (2l + 1) \pi/a. \quad (4.29)$$

Далее систему (4.24) следует дополнить еще одним функциональным уравнением, связывающим колебательную скорость второй пластины со звуковым давлением на ее поверхности:

$$\frac{d^4 v^{(2)}(y)}{dy^4} - k_2^4 v^{(2)}(y) = -\frac{\omega^2 \rho}{D_2} \Phi_4; \quad x = l; \quad 0 \leq y \leq a, \quad (4.30)$$

где

$$k_2 = \left(\frac{\omega^4 \rho_2 h_2}{D_2} \right)^{1/4}; \quad D_2 = \frac{E_2 h_2^3}{12(1 - \sigma_2^2)}.$$

И, наконец, четвертое функциональное уравнение системы (4.24) нужно заменить на следующее:

$$-\frac{\partial \Phi_4}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}; & a \leq y \leq b; \\ v^{(2)}(y); & 0 \leq y \leq a; \end{cases} \quad x = l. \quad (4.31)$$

Характер перехода от системы функциональных уравнений, сформулированной с учетом указанных изменений и дополнений к системе (4.24), к алгебраическим уравнениям для определения коэффициентов бесконечных рядов, остается тем же, что и в предыдущем параграфе. Совершенно незначительно изменится и вид уравнений, образующих бесконечную систему. Поскольку получение этих уравнений представляет собой довольно простую, хотя и громоздкую, задачу, решаемую путем разложения довольно простых функций в ряд Фурье, то приводить явный вид уравнений не будем, а обратимся к анализу результатов, которые могут быть получены на основе их решения.

Важные сведения об акустических свойствах рассматриваемой решетки можно получить при рассмотрении низкочастотного предела. В этом случае бесконечная система заменяется конечной с удержанием лишь по одному искомому коэффициенту каждой группы.

Используя полученную таким образом конечную систему, определим приближенное значение коэффициента прохождения звука через решетку. Полагая $kb \ll 1$, $l < b$, находим

$$k_{np} \approx \frac{Q}{F + G}, \quad (4.32)$$

$$\text{где } Q = 2 \left[\varepsilon + \bar{\gamma} + \bar{\gamma}(1 - \varepsilon) \frac{Q}{\pi^2 Z_1^{(2)}} \right];$$

$$F = 2(\varepsilon + \bar{\gamma}) - jkl(1 + \varepsilon\bar{\gamma} + \varepsilon^2) + \frac{2}{\pi Z_1^{(2)}} \left[\bar{\gamma} \frac{4}{\pi^2} + l\beta_2(1 - \varepsilon) \right] - j \frac{2\beta_2(1 - \varepsilon)}{\pi k Z_1^{(2)}} (\varepsilon + \bar{\gamma});$$

$$G = -j(1 - \varepsilon) \frac{\bar{\beta}_1}{\pi k Z_1^{(1)}} \left[2(\varepsilon + \bar{\gamma}) + \frac{16\bar{\gamma}(1 - \varepsilon)}{\pi^2 Z_1^{(2)}} + \right.$$

$$\left. + 2kl(\bar{\alpha} - 1) \left(1 + j \frac{2\beta_2(1 - \varepsilon)}{\pi k Z_1^{(2)}} \right) \right];$$

$$\bar{\beta}_1 = \frac{4\rho}{\pi^2 \rho_1 h_1}; \quad \beta_2 = \frac{4\rho}{\pi^2 \rho_2 h_2}; \quad Z_1^{(2)} = \left(\frac{\omega_1^{(2)}}{\omega} \right)^2 - 1;$$

остальные обозначения те же, что и в уравнении (4.26).

Как показывает проведенное в предыдущем параграфе сравнение данных, полученных на основе приближенного длинноволнового реше-

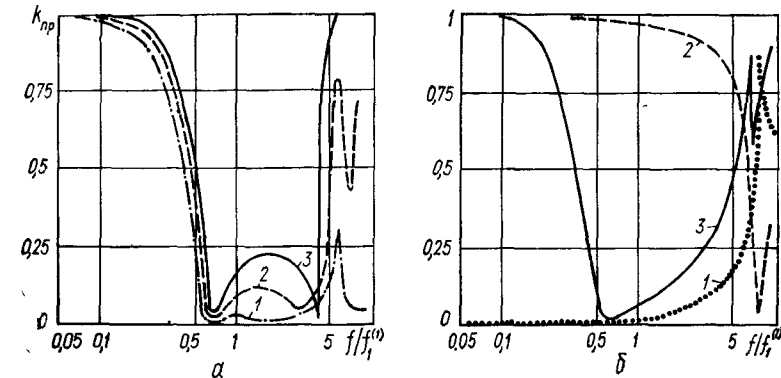


Рис. 86

ния и в определенном смысле точного решения, приближенные соотношения качественно верно отражают акустические свойства решетки. В связи с этим целесообразно провести качественный анализ выражения k_{np} для некоторых характерных частных случаев.

При $\omega \rightarrow 0$ $|k_{np}| \rightarrow 1$. Этот результат является естественным — появление второй упругой стенки в брусках не могло сказаться на акустических свойствах решетки, поскольку в области низких частот важны лишь массовые характеристики ее элементов.

Если частота падающей волны меньше собственной частоты передней упругой пластины ($\omega < \omega_1^{(1)}$) и в то же время собственная частота второй пластины достаточно велика ($\omega_1^{(2)} \gg \omega_1^{(1)}$), то акустические свойства рассматриваемой решетки становятся полностью идентичными свойствам решетки с одной упругой стенкой. Вытекающее из равенства (4.32) выражение для коэффициента прохождения в этом случае полностью совпадает с выражением (4.26).

Изменяя расчетную ситуацию и предполагая, что меньшей является собственная частота тыльной упругой пластины, на основе анализа значений k_{np} можно заключить, что акустические свойства решетки практически не зависят от места расположения упругого элемента в стенках бруса.

Несомненный интерес представляет и тот случай, когда передняя и тыльная упругие пластины идентичны. Приближенная формула для расчета коэффициента прохождения в этом случае указывает на резкое уменьшение прозрачности решетки вблизи собственной частоты пластины. Более полное количественное и качественное описание ситуации

в этом случае можно получить лишь на основе решения соответствующих бесконечных систем. Большое внимание анализу особенностей колебаний упругих пластин в стенках брусьев и связи форм колебаний с акустическими свойствами решетки будет уделено в последующих параграфах. Некоторые характерные данные, полученные на основе решения бесконечной системы, приведены ниже.

На рис. 86, а представлены частотные зависимости $k_{пр}$ для случая идентичных пластин при $2a/\lambda_1 = 0,1$; $l/a = 0,1$, выполненных из сплава, имеющего следующие свойства [59, 104]: $\rho_1 = \rho_2 = 4,5 \cdot 10^3$ кг/м³; $E_1 = E_2 = 1,16 \cdot 10^{11}$ Па; $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,3$. Кривым 1; 2 и 3 соответствуют коэффициенты перфорации ϵ , равные 0,15; 0,35 и 0,5.

Как и следовало ожидать, с ростом коэффициента перфорации ϵ область частот, где решетка слабо прозрачна, уменьшается. Однако вместе с этим важно отметить, что, несмотря на наличие щелей между брусьями, звукоизолирующие свойства рассматриваемой решетки по сравнению с решеткой из брусьев, сдвинутых вплотную (без щелей) друг к другу, не ухудшились. Этот результат, несомненно, является прямым следствием увеличения количества упругих пластин в брусьях, что обеспечило последний более высокую податливость по сравнению с брусьями, в которых содержится лишь одна упругая стенка.

Полученные количественные данные интересно сравнить с результатами, имеющимися в работах, где изучались дифракция звуковых волн на решетках из акустически жестких брусьев [174] и дифракция электромагнитных волн на решетках из идеально проводящих брусьев для случая E -поляризации [117, 209], который эквивалентен в акустике случаю акустически мягких брусьев [174]. На рис. 86, б приведены кривые 1 и 2, соответствующие акустически мягким и жестким брусьям (данные, заимствованные из работ [117, 175, 210]), а также кривая 3 для полых упругих брусьев. Все данные рассчитаны для $\epsilon = 0,5$ и $2a/\lambda_1 = 0,06$. Анализируя эти кривые, нетрудно убедиться, что в области $f/f_1^{(1)} \ll 1$ решетка из полых упругих брусьев по своим акустическим свойствам подобна решетке из акустически жестких брусьев. Однако, начиная с $f/f_1^{(1)} \approx 0,4$ и до $f/f_1^{(1)} \approx 3$, она уже более сходна с решеткой из акустически мягких брусьев. При более высоких частотах указанные соответствия нарушаются, что представляется естественным, поскольку характер взаимодействия упругих брусьев между собой и с окружающей средой усложняется за счет увеличения роли высоких форм колебаний пластин.

6. Решетка из брусьев с упругими стенками, нормальными плоскости решетки

В предыдущих параграфах изучались случаи, когда брусья были ориентированы так, что их упругие стенки располагались параллельно плоскости решетки. Увеличение коэффициента перфорации такой решетки приводит к уменьшению полосы частот эффективной звукоизоляции. В то же время увеличение расстояния между элементами решетки может стимулироваться практическими потребностями, связанными, например, с необходимостью иметь решетку, прозрачную для

потока и непрозрачную для звука. Поскольку в качестве податливых элементов в рассмотренных выше рассеивающих решетках используется изгибно деформируемая пластина, то представляется возможность образовать решетку из малых по сравнению с длиной волны звука в среде элементов. В связи с этим главной акустической характеристикой таких элементов, определяющей свойства решетки, является объемная податливость. Если это так, то имеется возможность менять ориентацию упругих элементов решетки относительно падающего звукового поля без изменения акустических свойств решетки.

Рассмотрим случай, когда упругие стенки брусьев (где 1 — пластины, а 2 — опоры) располагаются перпендикулярно к плоскости решетки (рис. 87). При такой ориентации брусьев их упругие стенки (пластины) находятся непосредственно друг перед другом и можно ожидать, что в такой решетке существенную роль будет играть эффект взаимодействия пластин. При этом следует ожидать не только расширения полосы частот эффективной звукоизоляции для решетки, но и более существенного влияния среды между элементами решетки на собственные частоты пластин. К такому предположению можно прийти на основе анализа свойств цилиндрической оболочки, у которой внутренний объем обладает достаточно высокой податливостью. Такая задача рассмотрена подробно во второй главе.

Это обстоятельство открывает возможность управлять резонансами и акустическими свойствами решетки весьма простым путем — изменением шага решетки. Ниже, при исследовании количественных данных, покажем, что такое управление действительно возможно и может быть использовано на практике.

Перейдем к непосредственному решению задачи. Совершенно очевидно, что всю область существования звукового поля рационально разбить на такие же частичные области, какие были выбраны ранее при изучении решетки, изображенной на рис. 85, а именно: область $x \leq 0$ и область $x \geq l$, а также бесконечное число областей, каждая из которых ограничена объемом щели между соседними брусьями. Используя свойство симметрии рассматриваемой решетки, представим потенциалы скоростей в указанных частичных областях в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= e^{jk(x\cos\theta + y\sin\theta)} + e^{jky\sin\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-jk_n x} e^{j\frac{n\pi}{b} y}; \\ \Phi_2 &= e^{jky\sin\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jk_n(x-l)} e^{j\frac{n\pi}{b} y}; \end{aligned} \right\}$$

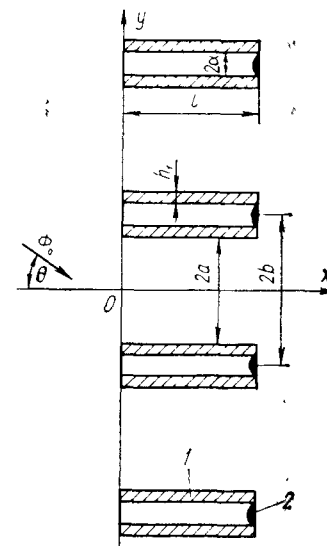


Рис 87

$$\Phi_q = e^{2ikbq\sin\theta} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} [B_p \cos k_p x + C_p \sin k_p x] \cos \frac{\pi p}{2a} (y - 2bq + a) + \right. \\ \left. + \sum_{v=1}^{\infty} \sin \frac{v\pi}{l} x [E_v \cos k_v (y - 2bq + a)] + F_v \sin [k_v (y - 2bq + a)] \right\}, \\ \text{где} \\ k_n = \left\{ k^2 - \left(\frac{\pi n}{l} - k \sin \theta \right)^2 \right\}^{1/2}; \quad k_p = \left\{ k^2 - \left(\frac{\pi p}{2a} \right)^2 \right\}^{1/2}; \\ k_v = \left\{ k^2 - \left(\frac{v\pi}{l} \right)^2 \right\}^{1/2}; \quad (4.33)$$

q — номер щели между брусками, $q = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Обратим внимание на то, что звуковое поле в щелях представлено более сложно — в виде суперпозиции двух бесконечных сумм по индексам p и v , в то время как в выражении (4.22) имелась только одна бесконечная сумма по индексу p . Это вызвано усложнением характера поверхности стенок щелей. При изучении решетки, изображенной на рис. 85, стенки щелей образовывались недеформируемыми (акустически жесткими) опорами. Поэтому представление звукового поля в форме (4.22) оказывалось достаточным, чтобы обеспечить выполнение как граничных условий на стенках щели, так и условий сопряжения компонент звукового поля на входном и выходном отверстиях щели. В рассматриваемом случае стенки щелей уже не акустически жесткие, а упругие. В связи с этим для обеспечения возможности выполнения условий сопряжения на поверхностях упругих пластин и потребовалось введение в выражение для Φ_q дополнительной суммы по индексу v . Как легко проверить, функции $\sin \frac{v\pi}{l} x$ обладают свойствами полноты и ортогональности на интервале от 0 до l , что является необходимым и достаточным условием для формального представления компонент звукового поля на поверхностях пластин.

Колебательные скорости пластин, как и в рассмотренных выше случаях, представим в виде рядов по их собственным формам в вакууме. Оставляя закрепление пластин шарнирным, имеем

$$v_{q\tau}(x) = e^{2ikbq\sin\theta} \sum_{v=1}^{\infty} v_{q\tau v} \sin \frac{v\pi}{l} x, \quad (4.34)$$

где τ — номер пластины в щели ($\tau = 1$ для верхней пластины и $\tau = 2$ для нижней пластины).

Неизвестные комплексные коэффициенты, содержащиеся в выражениях (4.33) и (4.34), должны быть определены из следующей системы функциональных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -\partial\Phi_q/\partial y &= v_{q\tau}(x); \quad 0 \leq x \leq l; \quad |y - 2bq| = a; \\ \Phi_1 &= \Phi_q; \quad x = 0; \\ \Phi_2 &= \Phi_q; \quad x = l; \quad |y - 2bq| \leq a; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} &= \begin{cases} -\frac{\partial\Phi_q}{\partial x}; & |y - 2bq| \leq a; \\ 0; & a \leq |y - 2bq| \leq 2(b - a); \end{cases} \quad x = 0; \\ -\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} &= \begin{cases} -\frac{\partial\Phi_q}{\partial x}; & |y - 2bq| \leq a; \\ 0; & a \leq |y - 2bq| \leq 2(b - a); \end{cases} \quad x = l; \\ \frac{d^4 v_{q\tau}(x)}{dx^4} - k_{из}^4 v_{q\tau}(x) &= -\frac{\omega^2 \rho}{D} \Phi_q; \quad |y - 2bq| = a, \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

которая стандартным образом заменяется эквивалентной ей бесконечной системой линейных алгебраических уравнений второго рода:

$$\left. \begin{aligned} -k_v F_v &= v_{01v}; \quad k_v [E_v \sin 2k_v a - F_v \cos 2k_v a] = v_{02v}; \\ B_p N_p - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n N_{pn} &= \delta_p; \\ B_p N_p \cos k_p l + C_p N_p \sin k_p l - \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n N_{pn} &= 0; \\ -jk_n A_n 2b - \sum_{p=0}^{\infty} C_p k_p N_{pn} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v\pi}{l} [E_v N_{vn} + F_v \bar{N}_{vn}] &= \\ &= -jk \cos \theta \delta_n; \\ jk_n D_n 2b - \sum_{p=0}^{\infty} [-B_p \sin k_p l + C_p \cos k_p l] k_p N_{np} + \\ + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v\pi}{l} (-1)^v [E_v N_{vn} + F_v \bar{N}_{vn}] &= 0; \\ \left[v_{01v} Z_v - \frac{\rho E_v}{\rho_1 h_1} \right] \frac{l}{2} - \frac{\rho}{\rho_1 h_1} \sum_{p=0}^{\infty} [B_p N_{vp} + C_p \bar{N}_{vp}] &= 0; \\ v_{02v} Z_v \frac{l}{2} - \frac{\rho l}{2\rho_1 h_1} [E_v \cos 2k_v a + F_v \sin 2k_v a] - \\ - \frac{\rho}{\rho_1 h_1} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p [B_p N_{vp} + C_p \bar{N}_{vp}] &= 0; \\ N_{pn} = \int_{-a}^a e^{j\left(\frac{\pi n}{b} + k \sin \theta\right)y} \cos \frac{p\pi}{2a} (y + a) dy; \quad N_p = \begin{cases} 2a; & p = 0; \\ a; & p \neq 0; \end{cases} \\ N_{vn} = \int_{-a}^a e^{j\left(\frac{\pi n}{b} + k \sin \theta\right)y} \cos k_v (y + a) dy; \quad \delta_n = \begin{cases} 2b; & n = 0; \\ 0; & n \neq 0; \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

$$\bar{N}_{vn} = \int_{-a}^a e^{j \left(\frac{\pi n}{b} + k \sin \theta \right) y} \sin k_v (y + a) dy; \quad \delta_p = N_{pn}; \quad n = 0;$$

$$N_{vp} = \frac{\frac{v\pi}{l} [1 - (-1)^v \cos k_p l]}{\left(\frac{v\pi}{l} \right)^2 - k_p^2}; \quad \bar{N}_{vp} = (-1)^{v+1} \frac{\frac{v\pi}{l} \cos k_p l}{\left(\frac{v\pi}{l} \right)^2 - k_p^2}$$

Входящие в представления N_{pn} , N_{vn} , $\bar{N}_{vn}$ интегралы, конечно, легко вычисляются и даны здесь в таком виде лишь для уменьшения громоздкости выражений.

Система (4.36) является исходной при проведении количественного анализа акустических свойств решетки.

Прежде всего остановимся на решении задачи в низкочастотном приближении, когда выполняются неравенства $l \ll \lambda_1$, $2a/l \leq 1$, $(b-a)/b \ll 1$. В этом случае в рядах (4.33), (4.34) допустимо ограничиться только первыми членами и, используя систему (4.36), аналитически определить коэффициенты A_0 , D_0 , E_1 , B_0 , C_0 , $v_{от}$. Опуская промежуточные выкладки, сразу приведем выражения для коэффициента прохождения звука $k_{пр}$ через решетку и ее нормированного входного импеданса $Z_{вх}$ при $\theta = 0$:

$$\left. \begin{aligned} k_{пр} &\approx \frac{1}{\xi kl + 1} [\xi kl + j(\xi - 1/2)(kl)^2]; \\ \arg k_{пр} &= \frac{(\xi kl)^2 - \xi}{kl(\xi^2 - \xi - 1/2)}; \quad Z_{вх} = R + jX; \\ R &= \frac{(\xi^2 - 1)(kl)^2}{[kl(\xi - 1)]^2 + 4}; \quad X = -\frac{2(\xi + 1)kl}{[kl(\xi - 1)]^2 + 4}; \\ \xi &= \frac{\bar{Z}_1 - 2}{4}; \quad \bar{Z}_1 = \alpha [Z_1 \beta + \operatorname{ctg} \alpha], \\ Z_1 &= 1 - (f_1/f)^2; \quad \alpha = \pi a/l; \quad \beta = \frac{\pi h_1 \rho_1}{\rho l}. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Оценка выражений $k_{пр}$, R , X при $f \rightarrow 0$ дает $k_{пр} \rightarrow 1$, $R \rightarrow 1$, $X \rightarrow 0$. Таким образом, на очень низких частотах решетка практически полностью прозрачна и ведет себя подобно решеткам, рассмотренным в предыдущих параграфах. Теперь выполним оценку величин $k_{пр}$ и R на частоте резонанса системы упругие пластины — окружающая среда.

В параграфах 4 и 5 такую оценку проводили, устремляя частоту f к f_1 . Это было оправдано, поскольку собственная частота системы пластины — окружающая среда незначительно отличалась от собственной частоты пластин в вакууме (см., например, рис. 82, 83). В рассматриваемом случае так поступить уже нельзя, ибо благодаря принятой ориентации брусьев в решетке влияние среды на резонансную частоту пластин может оказаться значительным. В связи с этим прежде всего определим резонансную частоту системы пластины — окружающая среда, для чего воспользуемся выражением для X (4.37). Полагая $X =$

$= 0$, имеем $\xi = -1$, откуда

$$f_p = f_1 \left\{ \frac{\alpha \beta}{\alpha \beta + \alpha \operatorname{ctg} \alpha - 2} \right\}^{1/2}. \quad (4.38)$$

Из этого выражения непосредственно следует, что при $2a/l \rightarrow 0$ величина $f_p \rightarrow 0$. Более систематичные и конкретные данные о характере изменения f_p в зависимости от $2a/l$ можно получить из рис. 88 для случая $l/\lambda = 0,1$. Как видно, уже при $2a/l \approx 1$ резонансная частота системы пластины — жидкость составляет около 60 % резонансной частоты пластин в вакууме. Еще более сильное снижение величины f_p наблюдается при $2a/l < 0,5$. Эта важная особенность рассматриваемой решетки является прямым следствием усиления эффекта взаимодействия между упругими стенками соседних брусьев при их сближении.

Конкретное физическое проявление этого взаимодействия заключается в следующем. При малых значениях $2a/l$ даже незначительные колебательные движения пластинок $v_{пл}$ вызывают значительные колебательные движения жидкости $v_{жидк}$ в щели вдоль оси Ox . Вполне очевидно, что чем меньше отношение $2a/l$, тем больше при прочих равных условиях отношение $v_{жидк}/v_{пл}$. Таким образом, заполненная жидкостью щель в совокупности с пластинами образует своеобразный трансформатор колебательных скоростей с коэффициентом трансформации в первом приближении, пропорциональным отношению l/a (более точно коэффициент трансформации можно оценить, если учесть, что пластина совершает не поршневые колебания, а колебания по закону $\sin \frac{\pi}{l} x$). Однако, поскольку масса жидкости в щели, колеблющаяся

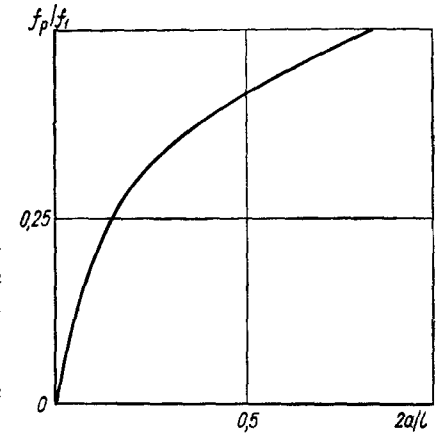


Рис 88

вдоль оси Ox , является, по сути, соколеблющейся (присоединенной) с пластиной массой жидкости, наличие указанного трансформатора увеличивает эффективное значение соколеблющейся массы жидкости примерно в $(l/a)^2$ раз. Поэтому, несмотря на то что при уменьшении расстояния между соседними брусьями абсолютная масса жидкости в щели уменьшается пропорционально a/l , эффективное значение соколеблющейся с пластинами массы жидкости растет и обуславливает снижение резонансной частоты системы пластины — жидкость.

Используя значение $\xi = -1$, нетрудно дать следующие оценки для коэффициента прохождения и активной части импеданса при $f \rightarrow f_p$; $R \rightarrow 0$; $|k_{пр}| \rightarrow kl$, которые подтверждают, что в области частоты f_p при $l \ll \lambda_p$ решетка проявляет себя как хороший звукоизолятор.

Перейдем к более подробному анализу акустических свойств ре-

щетки, основываясь на точных расчетах, полученных с помощью ЭВМ. На рис. 89 представлены типичные частотные зависимости коэффициента прохождения звука через решетку и составляющих ее входного импеданса. Решетка выполнена из сплава с $\rho_1 = 4,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $E_1 = 1,16 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ и находится в воде. Геометрические характеристики решетки определяются равенствами $l/\lambda_1 = 0,05$; $2a/l = 1$; $b/a = 1,05$.

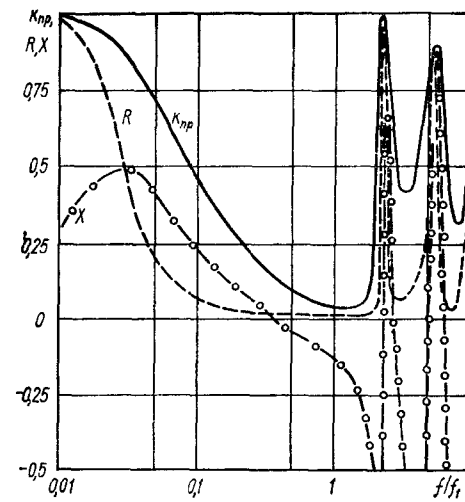
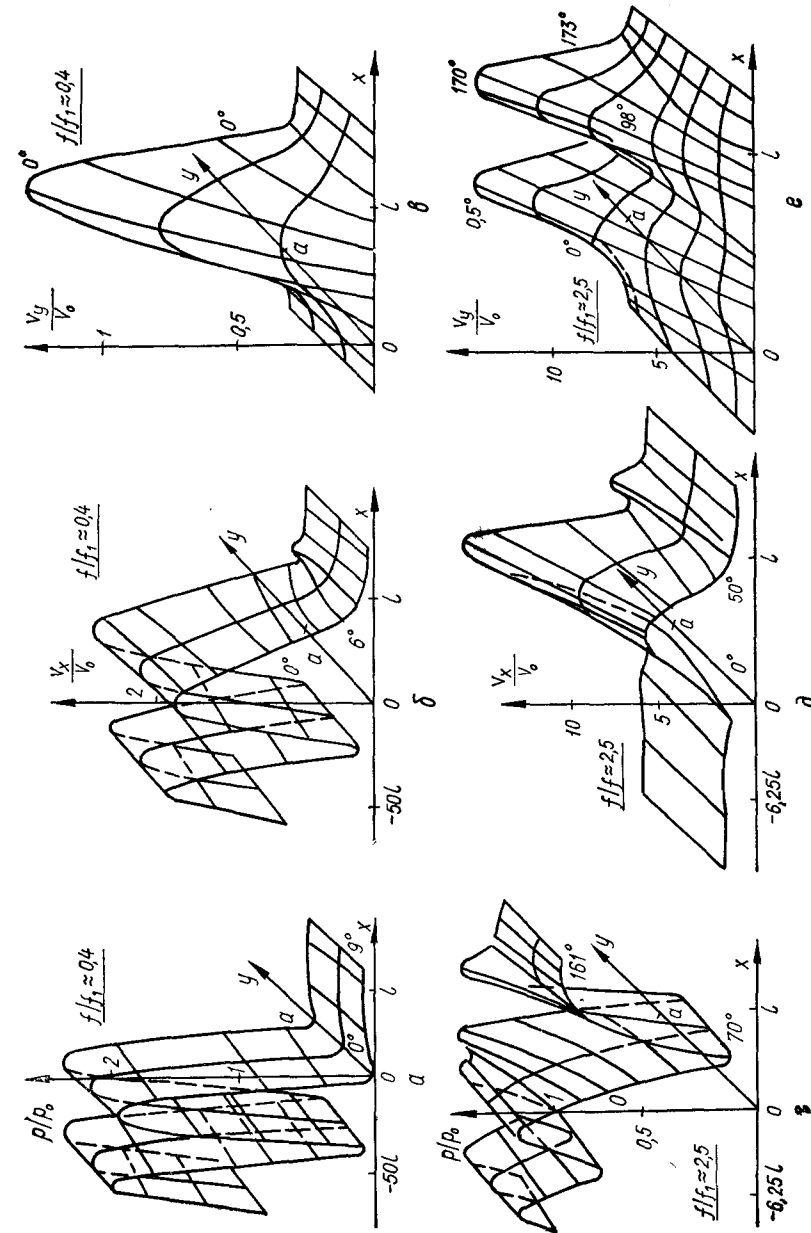


Рис. 89

Как видно, кривая, характеризующая зависимость изменения X от частоты, периодически пересекает ось абсцисс, меняя свой знак, что указывает на наличие резонансных явлений (резонансов) в системе пластины — жидкость. В области частот, соответствующих этим резонансам, величины $k_{пр}$ и R принимают строго чередующиеся друг за другом максимальные и минимальные значения. Примечательно, что при относительно плавном переходе величины X через ось абсцисс величины $k_{пр}$ и R имеют малые значения и, наоборот, при резком переходе — большие значения. Это обстоятельство указывает на чередование ха-

рактера резонансов (т. е. за резонансом следует антирезонанс и т. д.), что является прямым следствием теоремы Форстера [145].

Анализ выражений (4.37) и зависимостей, представленных на рис. 88, 89, позволил нам установить самые общие акустические и механические свойства решетки. Чтобы получить более глубокие представления о физических процессах, происходящих на частотах резонанса и антирезонанса системы пластины — жидкость, необходимо изучить пространственное распределение характеристик звукового поля в окрестности решетки и колебательную скорость поверхности пластинок. С этой целью на рис. 90 и представлены распределения модулей звукового давления и колебательной скорости жидкости в окрестности одного периода решетки при $\theta = 0$. Здесь же, на участке $0 \leq x \leq l$, рядом с кривыми указаны также значения фазы давления и колебательных скоростей. Из данных рис. 90, а хорошо видно, что в области резонанса ($f/f_1 \approx 0,4$) перед решеткой образуется стоячая волна за счет интерференции падающей и отраженной от решетки волн. Поскольку значение $k_{пр}$ на этих частотах мало ($k_{отр}$ соответственно велико), амплитуда звукового давления в стоячей волне близка к $2p_0$ (где p_0 — звуковое давление в падающей волне). В начале щели ($x \approx 0$) звуковое давление резко падает за счет значительной податливости пластин, однако к концу щели ($x \approx l$) несколько возрастает и уже за решеткой остается постоянным по амплитуде. Значение фазы давления остается практически неизменным по всей длине щели.



Распределение продольной составляющей колебательной скорости перед решеткой (рис. 90, б) также характеризуется наличием стоячей волны, однако в зоне $x \approx 0$ (в отличие от звукового давления) величина $|v_x| \approx 2|v_0|$ (здесь v_0 — колебательная скорость жидкости в падающей волне). Указанные особенности звукового поля еще раз подтверждают сделанный выше вывод о том, что в области первого резонанса решетка близка по своим свойствам к акустически мягким по-

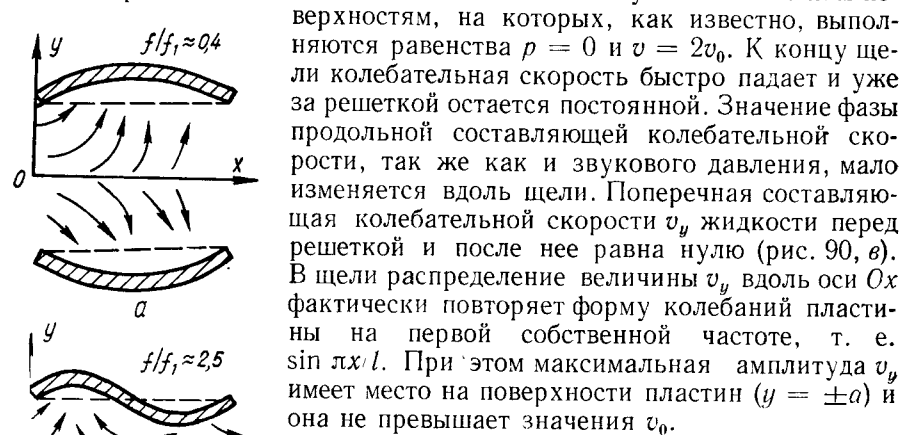


Рис. 91

верхностям, на которых, как известно, выполняются равенства $p = 0$ и $v = 2v_0$. К концу щели колебательная скорость быстро падает и уже за решеткой остается постоянной. Значение фазы продольной составляющей колебательной скорости, так же как и звукового давления, мало изменяется вдоль щели. Поперечная составляющая колебательной скорости v_y жидкости перед решеткой и после нее равна нулю (рис. 90, в). В щели распределение величины v_y вдоль оси Ox фактически повторяет форму колебаний пластины на первой собственной частоте, т. е. $\sin \pi x/l$. При этом максимальная амплитуда v_y имеет место на поверхности пластин ($y = \pm a$) и она не превышает значения v_0 .

Расчет колебательной скорости пластин в области частоты $f/f_1 \approx 0,4$ показывает, что она полностью определяется первым членом ряда (4.34). Амплитуда v_y на поверхности пластины близка к амплитуде колебаний в падающей волне, как и следует из первого условия системы (4.36). Проведенный анализ распределения компонент звукового поля в окрестности решетки позволяет схематически отразить путь тока жидкости в щели и форму колебаний пластины в области первого резонанса системы упругие пластины — жидкость (рис. 91, а). Совершенно иное распределение компонент звукового поля имеет место на второй собственной частоте системы пластины — жидкость при $f/f_1 \approx 2,5$ (рис. 90). Уровень звукового давления перед решеткой и за ней мало отличается от p_0 , что обусловлено высокой прозрачностью решетки. В щели давление резко падает и при $x \approx l/2$ принимает минимальное значение, после чего резко возрастает, но уже имеет противоположную по знаку фазу. Таким образом, на каждую половину пластин воздействует давление противоположного знака. Это приводит к тому, что распределение величины v_y вдоль щели повторяет форму колебаний пластин на второй собственной частоте, т. е. $\sin \frac{2\pi}{l} x$.

Изменение величины v_x вдоль щели характеризуется иной по сравнению с давлением p зависимостью (ср. рис. 90, г и 90, д). Важно отметить, что на второй собственной частоте системы пластины — жидкость амплитуды величин v_y и v_x могут почти на порядок превышать амплитуду v_0 (рис. 90, д, 90, е). Этот факт указывает на большую

добротность механической колебательной системы пластины — жидкость на этой частоте, которая, по сути, обусловлена акустическим коротким замыканием противофазно колеблющихся (равных по площади) участков поверхности пластин. Жидкость в щели совершает осциллирующие колебания преимущественно вдоль оси Ox (движение пластин и жидкости на частоте $f/f_1 \approx 2,5$ показано на рис. 91, б).

Анализ последующих резонансов системы упругие пластины — жидкость показывает, что минимальная звукопрозрачность решетки

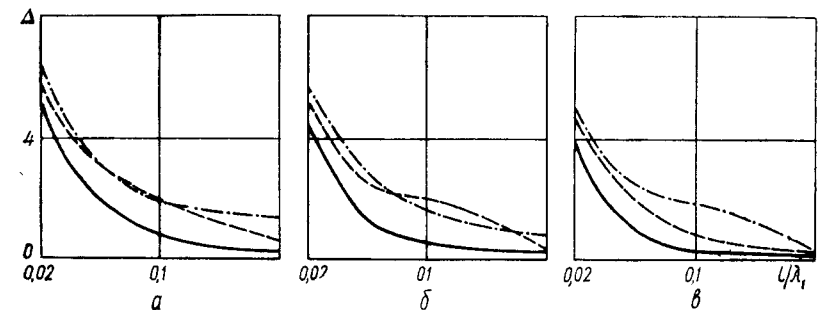


Рис. 92

имеет место, когда доминируют формы колебаний пластин с нечетным индексом n , а максимальная звукопрозрачность — когда доминируют формы колебаний с четным индексом n . Однако следует отметить, что звукоизолирующие свойства решетки наиболее высоки в области первого резонанса системы пластины — жидкость. На последующих резонансах (когда поочередно доминируют формы колебаний с индексом $n = 3; 5; 7...$) эффективность решетки как звукоизолятора падает, что связано с наличием противофазно колеблющихся участков поверхности пластин и ухудшающейся в связи с этим согласованностью между возбуждением и их формой колебаний.

Приступим к анализу зависимостей звукоизолирующих свойств решетки от ее физических, геометрических и волновых параметров. Критерием оценки звукоизолирующих свойств решетки примем величину $\Delta = \log_2 \frac{f_v}{f_n}$, где f_v и f_n — соответственно верхняя и нижняя граничные частоты диапазона частот (в области f_p), в котором выполняется условие $k_{пр} \leq 0,2$. Хотя величина Δ безразмерна, легко убедиться, что она численно равна полосе частот, выраженной в октавах. Ниже величину Δ будем называть полосой эффективной звукоизоляции решетки.

На рис. 92 представлены расчетные данные, характеризующие свойства решетки в зависимости от ее шага, длины упругих пластин l и материала, из которого они выполнены. Во всех расчетных случаях $a/b = 0,95$. Сплошные кривые соответствуют $2b/l = 2$; штриховые и штрихпунктирные — $2b/l = 1$ и $2b/l = 0,67$ соответственно; $\rho_1 c_1 = 1,37 \cdot 10^7$ кг/м² · с (рис. 92, а); $\rho_1 c_1 = 2,34 \cdot 10^7$ кг/м² · с (рис. 92, б); $\rho_1 c_1 = 3,96 \cdot 10^7$ кг/м² · с (рис. 92, в).

Анализ этих данных позволяет установить ряд важных закономерностей, присущих рассматриваемой решетке:

а) полоса эффективной звукоизоляции решетки увеличивается по мере уменьшения волнового размера пластин, образующих брус; $\Delta \approx \text{const } (\lambda_1/l)^\alpha$, где $1 < \alpha < 2$;

б) полоса эффективной звукоизоляции решетки увеличивается с уменьшением волнового сопротивления $\rho_1 c_1$ материала пластин;

в) полоса эффективной звукоизоляции решетки увеличивается с уменьшением расстояния между стенками брусев, по крайней мере в области $2b/l \geq 1$; при меньших значениях $2b/l$ такая закономерность сохраняется в случае стальных пластин, а для более легких материалов — только при определенных значениях l/λ_1 .

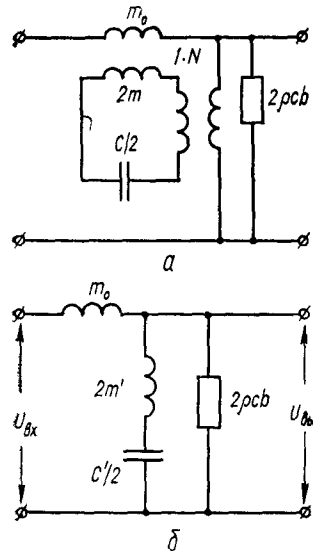


Рис 93

Первые две указанные выше закономерности обусловлены простой физической причиной — с уменьшением волнового сопротивления материала пластин и их волновой длины (при фиксированной частоте f_1) увеличивается податливость пластин и бруса и как следствие улучшаются звукоизолирующие свойства решетки. Третья закономерность более сложна и менее очевидна. Однако можно предположить, что при относительно больших значениях $2b/l$, когда взаимодействие соседних брусев еще не очень велико, уменьшение $2b/l$ приводит к увеличению количества упругих элементов на единицу поверхности решетки и, следовательно, к возрастанию податливости единицы поверхности решетки, а соответственно и звукоизоляции. Когда же величина $2b/l$ становится достаточно малой, взаимодействие брусев начинает играть решающую роль, в результате чего дальнейшее увеличение величины Δ в значительной мере замедляется.

В заключение с помощью метода электромеханических аналогий [86, 170] построим эквивалентную схему одного периода решетки при $\theta = 0$; $l/\lambda_1 \ll 1$; $2b/l \leq 1$.

Такая схема позволяет наглядно отразить основные факторы, обуславливающие отмеченные выше акустические свойства решетки.

Пусть масса жидкости, заключенная в щели между брусьями, $m_0 = 2\rho b l$ совершает колебания под воздействием падающей плоской волны. Очевидно, что эта масса жидкости на поверхностях $|y| = b$, $0 \leq x \leq l$ нагружена на упругие пластины (каждая из которых характеризуется эквивалентной массой m и эквивалентной гибкостью C), а на поверхности $|y| \leq b$ $x = l$ — на среду с механическим сопротивлением $2\rho c b$. Такая простая связь указанных механических элементов может быть представлена эквивалентной схемой, изображенной на рис. 93, а. Введение в эту схему идеального трансформатора

обусловлено тем, что поверхности, через которые масса m_0 связана с элементами $2m$, $C/2$ и $2\rho c b$, различны по площади. Учитывая также, что колебания пластин не поршневые, а описываются функцией $\sin \frac{\pi}{l} x$, необходимо пользоваться не геометрической величиной площади пластин l , а эффективной площадью, которая в данном случае равна $0,64l$. Поэтому $N = b/0,64l$. Используя известные правила пересчета элементов электрической цепи через идеальный трансформатор [133], нетрудно эту схему привести к схеме рис. 93, б, где $m' = m/N^2$ и $C' = C/N^2$.

Эквивалентная схема рис. 93, б позволяет просто и наглядно проводить приближенный анализ акустических свойств решетки. Например, оценим коэффициент передачи эквивалентной схемы $k = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}}$, который эквивалентен коэффициенту прохождения звука через решетку. На частотах $f/f_1 \ll 1$ (здесь $f_1 = \frac{1}{2\pi \sqrt{m'C'}}$) $\omega m_0 \rightarrow 0$, $\omega m' \rightarrow 0$, $1/\omega C' \rightarrow \infty$, в силу чего $\tilde{k} \rightarrow 1$. В противоположность этому при $f/f_1 \rightarrow 1$ в последовательном контуре, образованном элементами m' и C' , наступает резонанс, в силу чего $\tilde{k} \rightarrow 0$.

ВЛИЯНИЕ ЗАПОЛНИТЕЛЯ И КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ В ПЛАНЕ
НА АКУСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕТОК

Во всех рассмотренных выше решетках внутри упругих брусьев предполагался вакуум. Естественно, что такое допущение является идеализацией, и с точки зрения практики важно знать, как изменяются акустические свойства решеток при наличии среды с определенными акустическими свойствами. Для того чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим одну из исследованных выше решеток, например решетку, изображенную на рис. 87, полагая, что брусья заполнены газом с волновым сопротивлением $\rho_0 c_0$. Особенно просто выглядит такая задача, если ограничиться случаем нормального падения звуковой волны на решетку. Тогда в силу свойства симметрии решетки достаточно рассмотреть один ее период ($|y| \leq b$) и выделить четыре частичных области, где существует звуковое поле: область $x \leq 0$, $|y| \leq b$; область $x \geq l$, $|y| \leq b$; область $0 \leq x \leq l$, $|y| \leq a$; область $0 \leq x \leq l$, $a + h \leq |y| \leq b$. Полагая, как и выше, что пластины закреплены по краям шарнирно, а опоры недеформируемые, запишем граничные условия внутри полых брусьев:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 0; \quad x = 0; \quad x = l; \quad a + h \leq |y| \leq b; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 0; \quad 0 \leq x \leq l; \quad |y| = b \end{aligned} \quad (5.1)$$

и вне полости брусьев

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 0; \quad x = 0; \quad x = l; \quad a + h \leq |y| \leq b; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 0; \quad x \leq 0; \quad x \geq l; \quad |y| = b. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Учитывая условия (5.1) и (5.2) для случая нормального падения плоской волны на решетку, представляем звуковые поля в частичных областях и колебательную скорость пластин следующими рядами:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= e^{ikx} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-ik_n x} \cos \frac{\pi n}{b} y; \\ \Phi_2 &= \sum_{m=0}^{\infty} D_m e^{ik_m(x-l)} \cos \frac{\pi m}{b} y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \sum_{p=0}^{\infty} [B_p \cos k_p x + C_p \sin k_p x] \cos \frac{\pi p}{a} y + \\ &+ \sum_{v=1}^{\infty} E_v \sin \frac{v\pi}{l} x \cos k_v y; \\ \Phi_4 &= \sum_{q=0}^{\infty} F_q \cos \frac{q\pi}{l} x [\cos k_q (y - a - h) + \\ &+ \operatorname{tg} k_q (b - a - h) \sin k_q (y - a - h)]; \\ v(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} v_s \sin \frac{\pi s}{l} x, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} k_n &= \left[k^2 - \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad k_m = \left[k^2 - \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 \right]^{1/2}; \\ k_v &= \left[k^2 - \left(\frac{\pi v}{l} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad k_p = \left[k^2 - \left(\frac{\pi p}{a} \right)^2 \right]^{1/2}; \\ k_q &= \left[k_0^2 - \left(\frac{\pi q}{l} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad k_0 = 2\pi f / c_0. \end{aligned}$$

Неизвестные комплексные коэффициенты в рядах (5.3) должны определяться из следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} -\partial \Phi_3 / \partial y &= v(x); \quad 0 \leq x \leq l; \quad |y| = a; \\ -\partial \Phi_4 / \partial y &= v(x); \quad 0 \leq x \leq l; \quad |y| = a + h; \\ -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} &= \begin{cases} -\partial \Phi_3 / \partial x; & |y| \leq a; \\ 0; & a \leq |y| \leq b; \end{cases} \quad x = 0; \\ -\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} &= \begin{cases} -\partial \Phi_3 / \partial x; & |y| \leq a; \\ 0; & a \leq |y| \leq b; \end{cases} \quad x = l; \\ \Phi_1 &= \Phi_3; \quad x = 0; \quad |y| \leq a; \\ \Phi_2 &= \Phi_3; \quad x = l; \quad |y| \leq a; \\ \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - k_0^4 v(x) &= -\frac{\omega^2}{D_1} [\rho \Phi_3 (|y| = a) - \rho_0 \Phi_4 (|y| = \\ &= a + h)]; \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Структура выражений (5.3), характер входящих в них функций позволяют провести переход от системы функциональных уравнений (5.4) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. При этом используются свойства ортогональности и полноты входящих в выражение (5.3) тригонометрических функций. Сама процедура перехода не отличается от описанной выше для оболочек без заполнения. Выбор порядка конечной системы при использовании метода редукции осуществляется на основе сравнения результатов, полученных при последовательном увеличении числа уравнений. Не останавливаясь на подробностях вычислений, проанализируем результаты расчета.

На рис. 94 представлены частотные зависимости, характеризующие изменение звукопрозрачности решетки от свойств среды, заполняющей брус. Здесь $l/\lambda_1 = 0,04$; $2a/l = 0,4$; $d/l = 0,1$; $\rho_1 c_1/\rho c = 15$; кривые 1; 2; 3; 4 и 5 соответствуют значениям $\rho_0 c_0/\rho c$, равным 0,15; 0,067; 0,033; 0,012 и $2,8 \cdot 10^{-4}$.

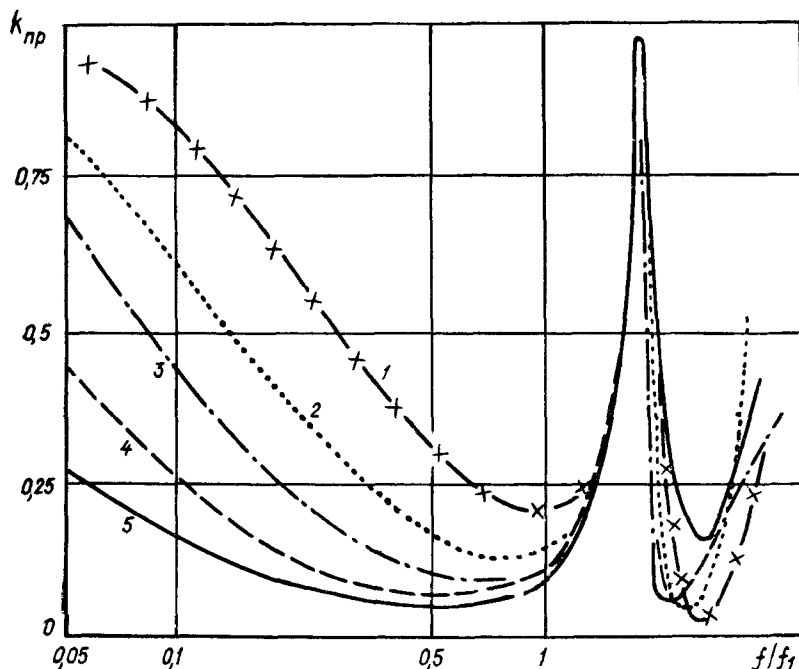


Рис. 94

Хорошо видно, что с ростом отношения $\rho_0 c_0/\rho c$ звукоизолирующие свойства решетки ухудшаются. Этому факту можно дать простое физическое объяснение, справедливое для малых волновых размеров внутренней полости бруса. Объем газа внутри бруса обладает некоторой упругостью, которая, складываясь с упругостью пластин, снижает податливость бруса в целом, что и приводит к ухудшению звукоизолирующих свойств решетки. Вместе с этим важно отметить, что при $\rho_0 c_0/\rho c = 2,8 \cdot 10^{-4}$, которое соответствует отношению волнового сопротивления воздуха при нормальном атмосферном давлении к волновому сопротивлению воды, звукоизолирующие свойства решетки такие же, как и в случае, когда внутри брусев вакуум ($\rho_0 c_0/\rho c = 0$). Последний факт имеет большое практическое значение, поскольку является, по сути, обоснованием допустимости оценки звукоизолирующих свойств решетки без учета влияния воздуха внутри брусев (по крайней мере до значений $\rho_0 c_0/\rho c \approx 10^{-3}$).

Помимо ухудшения звукоизолирующих свойств решетки при увеличении $\rho_0 c_0/\rho c$, что выражается в уменьшении полосы частот эффективной звукоизоляции и в увеличении минимального значения коэф-

фициента прохождения, также наблюдается повышение резонансной частоты системы пластины — жидкость. Количественно степень влияния заполняющей среды на низшую собственную частоту системы отражена на рис. 95, где $l/\lambda_1 = 0,04$; $2a/l = 0,4$; $d/l = 0,1$; $\rho_1 c_1/\rho c = 15$. Как и следовало ожидать, в силу малости волновых размеров полости существенной является та дополнительная упругость в системе, которая приносится заполнителем. На рис. 95 дано отношение первой собственной частоты в системе к первой собственной частоте при отсутствии заполнителя.

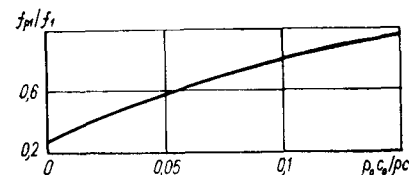


Рис 95

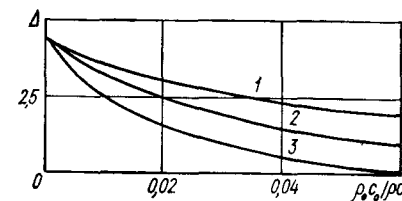


Рис 96

Как следует из предыдущего рассмотрения, частоту, для которой имеет место резкий рост коэффициента прохождения, можно отождествлять со второй собственной частотой системы оболочки — жидкость. Поскольку собственные формы колебаний при этом таковы, что изменения объема полости под упругой пластиной не происходит, то влияние жесткости заполнителя должно быть несущественным. Именно об этом свидетельствуют данные рис. 94. Здесь четко видно, что положение пика на частотной зависимости коэффициента прохождения не зависит от жесткости заполнителя. Во всех расчетных ситуациях прозрачность решетки максимальна для случая, когда $f/f_1 \approx 2,3$.

Данным, представленным на рис. 94, можно дать еще одну трактовку. Основываясь на них, можно считать, что ширина полосы эффективной звукоизоляции решетки из упругих элементов в определенной мере пропорциональна частотному интервалу между первой и второй собственными частотами. Из этого следует вывод о том, что одним из возможных путей улучшения диапазоновых свойств решетки является использование таких конструкций и способов закрепления упругих пластин, которые обеспечивают увеличение интервала между собственными частотами. Возможности для практического использования таких рекомендаций будут рассмотрены в последующих параграфах.

Уменьшение объема полости внутри бруса (при фиксированном значении $\rho_0 c_0/\rho c$) также приводит к ухудшению звукоизолирующих свойств решетки, поскольку и в этом случае упругость объема среды внутри бруса будет увеличиваться.

На рис. 96 представлены обобщенные данные, характеризующие зависимость изменения полосы эффективной звукоизоляции решетки от относительной величины волнового сопротивления среды внутри бруса и от объема его внутренней полости. Такие данные могут оказаться полезными при создании решеток, предназначенных для работы при больших давлениях в среде, когда с целью обеспечения их стати-

ческой прочности внутри брусков подается сжатый газ для компенсации больших внешних гидростатических давлений. Кривые 1; 2 и 3 на рис. 96 соответствуют значениям d/l , равным 0,1; 0,05 и 0,025; остальные параметры такие же, как и на рис. 95.

2. Решетка из оболочек в форме прямого параллелепипеда с упругими пластинами, нормальными плоскости решетки

В предыдущей главе исследовались свойства решеток, состоящих из упругих оболочек, у которых по крайней мере один из размеров (длина) был бесконечен. В настоящей главе уделим внимание решеткам, элементами которых являются упругие оболочки конечных размеров. Это позволит получить количественные данные, более полно характеризующие акустические свойства реальных решеток, причем саму решетку в плане будем предполагать бесконечной.

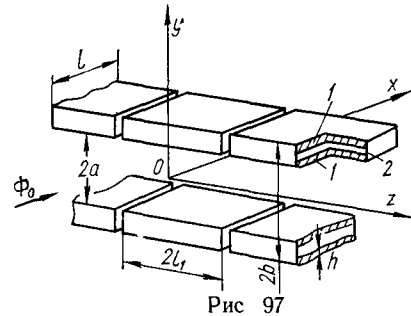


Рис. 97

Рассмотрим периодическую решетку, состоящую из упругих оболочек в форме полого прямого параллелепипеда, образованного двумя

прямоугольными пластинами 1, закрепленными по контуру на недеформируемых опорах 2 (рис. 97). Параллелепипеды ориентированы в пространстве таким образом, что пластины расположены нормально плоскости решетки, при этом соседние в одном ряду параллелепипеды установлены вплотную друг к другу без зазоров. Ограничимся исследованием случая нормального падения плоской волны на решетку, в связи с чем достаточно рассмотреть лишь один период решетки как по координате y , так и по координате z . При этом приходим к анализу звукового поля в прямоугольном волноводе сложного поперечного сечения с жесткими и упругими стенками. Для построения представлений потенциала скоростей, позволяющих удовлетворить всем условиям на стенках волновода, используем метод частичных областей.

Выделим три частичные области: область $x \leq 0$; $|y| \leq b$; $|z| \leq l_1$; область $0 \leq x \leq l_1$; $|y| \leq a$; $|z| \leq l_1$; область $x \geq l_1$; $|y| \leq b$; $|z| \leq l_1$. Используя известные представления звуковых полей в волноводах прямоугольного сечения с акустически жесткими стенками [43, 133] и учитывая принятые предположения о свойствах поверхности опор, представим звуковые поля в выделенных частичных областях в виде следующих двойных рядов:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= e^{ikx} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos \frac{\pi ny}{b} \cos \frac{\pi mz}{l_1} e^{-ik_{nm}x}; \\ \Phi_2 &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} B_{pq} \sin \frac{\pi px}{l_1} \cos \frac{\pi(2q-1)z}{2l_1} \cos k_{pq}y + \\ &+ \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} \cos \frac{\pi \alpha}{a} y \cos \frac{\pi \beta}{l_1} z [E_{\alpha\beta} \cos k_{\alpha\beta}x + F_{\alpha\beta} \sin k_{\alpha\beta}x]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{\infty} D_{v\gamma} \cos \frac{\pi v y}{b} \cos \frac{\pi \gamma z}{l_1} e^{ik_{v\gamma}(x-l_1)}; \\ k_{nm} &= \left[k^2 - \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 - \left(\frac{\pi m}{l_1} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad k_{pq} = \left[k^2 - \left(\frac{\pi p}{l_1} \right)^2 - \right. \\ &\left. - \left[\frac{(2q-1)\pi}{2l_1} \right]^2 \right]^{1/2}; \\ k_{\alpha\beta} &= \left[k^2 - \left(\frac{\pi \alpha}{a} \right)^2 - \left(\frac{\pi \beta}{l_1} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad k_{v\gamma} = \left[k^2 - \left(\frac{\pi v}{b} \right)^2 - \right. \\ &\left. - \left(\frac{\pi \gamma}{l_1} \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Полагая закрепление пластин шарнирным, представим их колебательную скорость в виде двойного ряда по собственным формам колебаний в вакууме [148, 150]:

$$v(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} C_{nq} \sin \frac{\pi nx}{l_1} \cos \frac{(2q-1)\pi z}{2l_1} \quad (5.6)$$

Как и в рассмотренных выше задачах, неизвестные коэффициенты в рядах (5.5), (5.6) определим из системы функциональных уравнений, объединяющих условия сопряжения компонент звукового поля на границах частичных областей, условия равенства колебательных скоростей среды и пластин, а также требование, заключающееся в том, что выражение (5.6) должно удовлетворять дифференциальное уравнение колебаний пластин [150]:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2; \quad x=0; \quad |y| \leq a; \quad |z| \leq l_1; \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} &= \begin{cases} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}; & |y| \leq a; \quad |z| \leq l_1; \quad x=0; \\ 0; & a \leq |y| \leq b; \end{cases} \\ \Phi_2 &= \Phi_3; \quad |y| \leq a; \quad x=l_1; \quad |z| \leq l_1; \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} &= \begin{cases} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x}; & |y| \leq a; \quad |z| \leq l_1; \quad x=l_1; \\ 0; & a \leq |y| \leq b; \end{cases} \\ -\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} &= v(x, z); \quad |y|=a; \quad |z| \leq l_1; \quad x \leq l_1; \\ \frac{\partial^4 v(x, z)}{\partial x^4} &+ 2 \frac{\partial^4 v(x, z)}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 v(x, z)}{\partial z^4} - \\ &- k^4 v(x, z) = -\frac{\omega^2}{D_1} \rho \Phi_2; \quad |y|=a; \quad x \leq l_1; \quad |z| \leq l_1 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Подставляя выражения для Φ_2 и $v(x, z)$ в пятое функциональное уравнение системы (5.7), можно установить связь между коэффициентами C_{pq} и B_{pq} :

$$C_{pq} = k_{pq} \sin(k_{pq}a) B_{pq},$$

после чего колебательную скорость пластин представить в виде **нового** ряда

$$v(x, z) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} B_{pq} k_{pq} \sin k_{pq} a \cdot \sin \frac{\pi p x}{l} \cos \frac{(2q-1)\pi}{2l_1} z.$$

Далее, подставляя выражения (5.5) в оставшиеся функциональные уравнения системы (5.7) и используя полноту и ортогональность функций, зависящих от координат x , y и z , соотношения (5.7) можно привести к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода:

$$\left. \begin{aligned} A_{nm} N_{nm} - \sum_{\alpha} \sum_{\beta} E_{\alpha\beta} N_{nm\alpha\beta} &= -\delta_{nm}; \\ D_{v\gamma} N_{v\gamma} - \sum_{\alpha} \sum_{\beta} [E_{\alpha\beta} \cos k_{\alpha\beta} l + F_{\alpha\beta} \sin k_{\alpha\beta} l] N_{v\gamma\alpha\beta} &= 0; \\ i A_{nm} k_{nm} N_{nm} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} F_{\alpha\beta} k_{\alpha\beta} N_{nm\alpha\beta} + \frac{\pi}{l} \sum_p \sum_q B_{pq} p N_{nm p q} &= \delta_{nm} i k; \\ i D_{v\gamma} k_{v\gamma} N_{v\gamma} - \sum_{\alpha} \sum_{\beta} [-E_{\alpha\beta} \sin k_{\alpha\beta} l + F_{\alpha\beta} \cos k_{\alpha\beta} l] k_{\alpha\beta} N_{v\gamma\alpha\beta} - \\ - \frac{\pi}{l} \sum_p \sum_q B_{pq} p (-1)^p N_{v\gamma p q} &= 0; \\ B_{pq} N_{pq} \left[k_{pq} Z_{pq} \sin k_{pq} a - \frac{\rho}{\rho_1 h_1} \cos k_{pq} a - \right. \\ \left. - \frac{\rho}{\rho_1 h_1} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (-1)^{\alpha} [E_{\alpha\beta} N'_{pq\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} N''_{pq\alpha\beta}] \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

В системе (5.9) приняты следующие обозначения:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} bl_1, & n = m = 0; \\ 0, & n \neq 0; \quad m \neq 0; \end{cases} \quad N_{pq} = ll_1/4; \quad Z_{pq} = 1 - f_{pq}^2/f; \\ N_{nm} = \begin{cases} bl_1; & n = m = 0; \\ \frac{bl_1}{2}; & n = 0, \quad m \neq 0; \\ \frac{bl_1}{4}; & n \neq 0; \quad m \neq 0; \end{cases} \quad N_{v\gamma} = \begin{cases} bl_1; & v = \gamma = 0; \\ \frac{bl_1}{2}; & v = 0; \quad \gamma \neq 0; \\ \frac{bl_1}{4}; & v \neq 0; \quad \gamma \neq 0; \end{cases}$$

$$N_{nm\alpha\beta} = \int_0^a \int_0^{l_1} \cos \frac{\pi n y}{b} \cos \frac{\pi m z}{l_1} \cos \frac{\pi \alpha y}{a} \cos \frac{\pi \beta z}{l_1} dy dz;$$

$$N_{v\gamma\alpha\beta} = \int_0^a \int_0^{l_1} \cos \frac{\pi v y}{b} \cos \frac{\pi \gamma z}{l_1} \cos \frac{\pi \alpha y}{a} \cos \frac{\pi \beta z}{l_1} dy dz;$$

$$N_{nmpq} = \int_0^a \int_0^{l_1} \cos \frac{\pi n y}{b} \cos \frac{\pi \gamma z}{l_1} \cos k_{pq} y \cos \frac{(2q-1)\pi}{2l_1} z dy dz;$$

$$N'_{pq\alpha\beta} = \int_0^l \int_0^{l_1} \sin \frac{\pi p x}{l} \cos \frac{(2q-1)\pi}{2l_1} z \cos k_{\alpha\beta} x \cos \frac{\pi \beta z}{l_1} dx dz;$$

$$N''_{pq\alpha\beta} = \int_0^l \int_0^{l_1} \sin \frac{\pi p x}{l} \cos \frac{(2q-1)\pi}{2l_1} z \sin k_{\alpha\beta} x \cos \frac{\pi \beta z}{l_1} dx dz.$$

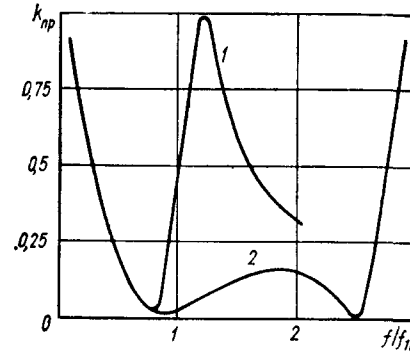


Рис 98

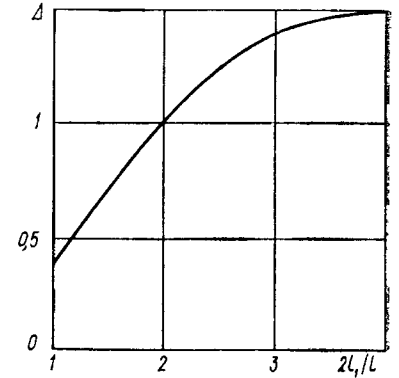


Рис 99

Все интегралы в последних выражениях легко вычисляются, однако при этом получаются более громоздкие выражения.

Система (5.9) является исходной при получении количественных данных о звуковом поле в среде и колебательной скорости пластин. Ее решение получаем с использованием метода редукции.

Проанализируем полученные на основе численного решения системы (5.9) количественные данные, характеризующие свойства рассматриваемой решетки. Отношение волновых сопротивлений материала решетки и акустической среды равно 15. Это соответствует практически повсеместно используемому в работе значению для пары титан — вода, $l/\lambda_{11} = 0,1$; $2a/l = 1$; $2l_1/l = 1$; $b/a = 1,05$.

На рис. 98 кривой 1 представлена частотная зависимость коэффициента прохождения звука через решетку с квадратными упругими пластинами в брусках ($l = 2l_1$). В качестве характерной частоты использована собственная частота нижней формы колебаний квадратной пластины. Поведение этой кривой является типичным с точки зрения полученных выше результатов. Имеется выраженный минимум прозрачности для частоты, несколько ниже резонансной частоты пластины в вакууме. Затем с ростом частоты наблюдается резкий рост прозрачности решетки, достигающий максимума в окрестности второй собственной частоты, когда собственная форма колебаний пластин в решетке такова, что изменение объема элемента решетки не происходит.

Для возможности оценки эффекта конечности элементов решетки в направлении оси Oz кривой 2 представлено изменение коэффициента прозрачности для предельного случая $l_1 \rightarrow \infty$, т. е. когда решетка образована брусками бесконечной длины. Такой предельный случай рассмотрен в предыдущей главе.

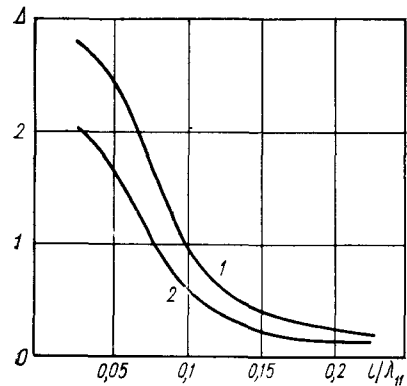


Рис. 100

Как видно из сравнения кривых в области частот ниже первой собственной частоты квадратной пластины в вакууме f_{11} , прозрачности двух рассматриваемых решеток совпадают. Для более высоких частот имеется значительное различие. Если для решетки из бесконечных брусков характерна сравнительно широкая область частот, где ее звукопрозрачность низка, то у решетки из полых упругих параллелепипедов эта область значительно уже.

В предыдущем параграфе уже отмечалось, что полоса эффективной звукоизоляции решетки существенно зависит от расстояния между первой и второй собственными частотами упругих элементов. В данном случае для прямоугольной шарнирно опертой пластинки последовательность собственных частот определяется соотношением

$$f_{pq} = \frac{\pi h_1}{2} \left\{ \left(\frac{p}{l} \right)^2 + \left[\frac{2q-1}{2l_1} \right]^2 \right\} \left[\frac{E_1}{12\rho_1(1-\nu_1^2)} \right]^{1/2}. \quad (5.10)$$

Отношение первой и второй собственных частот $\tau = f_{21}/f_{11}$ в случае квадратной пластинки равно 2,5. При безграничном увеличении величины l_1 , т. е. для бесконечной шарнирно опертой полосы, $\tau = 4$.

В связи с указанным представляется важным проследить, как изменяется полоса эффективной звукоизоляции Δ решетки с ростом отношения $2l_1/l$. На рис. 99 представлены данные, из которых непосредственно следует, что с ростом $2l_1/l$ значение Δ быстро увеличивается, и уже при $2l_1/l > 3$ звукоизолирующие свойства решетки из полых упругих параллелепипедов приближаются к звукоизолирующим свойствам решетки из полых упругих брусков бесконечной длины (здесь $l/\lambda_{11} = 0,14$; $2a/l = 1$, $b/a = 1,05$).

Чтобы иметь более полные сведения о количественных связях между величиной Δ и геометрическими и волновыми параметрами решетки, обратимся к рис. 100, 101, на которых приведены обобщенные результаты расчетов, полученных на основании численного решения системы (5.9) в широком диапазоне значений $2a/l$ и l/λ_{11} : $2a/l = 0,66$ и $2a/l = 1,0$ (соответственно кривые 1 и 2 на рис. 100; $2l_1/l = 1$); $l/\lambda_{11} = 0,06$; $l/\lambda_{11} = 0,1$ и $l/\lambda_{11} = 0,12$ (соответственно кривые 1, 2 и 3 на рис. 101). Для всех расчетных случаев $2l_1/l = 1$. Анализ этих данных позволяет установить следующие акустические свойства, присущие решетке из полых упругих параллелепипедов:

1) полоса эффективной звукоизоляции решетки (так же, как и рассмотренных выше решеток) при прочих равных условиях увеличивается с уменьшением волновой длины пластин l/λ_{11} , $\lambda_{11} = c/f_{11}$;

2) полоса эффективной звукоизоляции решетки существенно зависит от расстояния $2a/l$ между соседними элементами решетки, в частности, существует оптимальное значение $2a/l \approx 0,6$, при котором величина Δ максимальна; ниже оптимального значения $2a/l \approx 0,6$ величина Δ резко падает; при $2a/l > 0,6$ с увеличением этого отношения величина Δ уменьшается сравнительно слабо.

Физические причины, обуславливающие проявление зависимости полосы эффективной звукоизоляции решетки от расстояния между ее элементами рассматривались в предыдущем параграфе. Здесь же следует лишь обратить внимание на резкое уменьшение величины Δ в области значений $2a/l < 0,6$. Это связано с повышением добротности системы пластины — жидкость при уменьшении $2a/l$ в результате роста эффективной массы жидкости, соколеблющейся с пластинами.

Как было установлено в предыдущей главе, уменьшение расстояния между элементами решетки (при нормальном расположении пластин к плоскости решетки) вызывает снижение первой собственной частоты системы пластины — жидкость. В рассматриваемой решетке этот эффект также должен иметь место. Действительно, пользуясь приемом, изложенным в предыдущей главе, можно получить приближенную формулу для оценки первой собственной частоты системы квадратные пластины — жидкость, которую приведем, опуская промежуточные выкладки:

$$f_p \approx f_{11} \left\{ \frac{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}{\bar{\alpha}\bar{\gamma} + 1,74\bar{\alpha} \operatorname{cth}(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + 2} \right\}^{1/2}; \quad (5.11)$$

$$\left. \begin{aligned} l/\lambda_{11} \ll 1; \quad b/a \rightarrow 0; \quad \bar{\alpha} = \pi \frac{a}{l}; \\ \bar{\gamma} = \pi^2 \rho_1 h_1 / 4l\rho; \quad l = l_1 \cdot 2. \end{aligned} \right\}$$

При получении этой зависимости в бесконечной системе (5.9) сохраняется только по одной неизвестной величине каждой группы неизвестных. Используя такое длинноволновое приближение, можно получить также приближенные формулы для определения коэффициента звукопрозрачности и входного импеданса решетки из полых упругих параллелепипедов, если воспользоваться выражениями (4.37), заменив в них

величину $\bar{Z}_1$ на

$$\hat{Z}_{11} = \frac{\pi^3 a}{4 \sqrt{2} l} \left\{ \frac{\rho_1 h_1 \pi \sqrt{2}}{\rho l} Z_{11} + \operatorname{cth} \left(\sqrt{2} \frac{\pi a}{l} \right) \right\}, \quad (5.12)$$

где

$$Z_{11} = 1 - f_{11}^2 / f^2; \quad f_{11} = \frac{\pi h_1}{l^2} \left\{ \frac{E_1}{12 \rho_1 (1 - \sigma_1^2)} \right\}^{1/2}.$$

Приведенные формулы получены для частного случая $l = 2l_1$. Из выражения для f_p видно, что при уменьшении относительного расстояния между элементами решетки, т. е. величины $\bar{\alpha}$, резонансная частота пластин в жидкости может быть сколь угодно малой. Входной импеданс решетки (5.12) при этом стремится к некоторой постоянной величине. Естественно, что эти заключения имеют чисто качественный характер. Количественные оценки всех акустических характеристик решетки следует определять на основе анализа решений, полученных при использовании бесконечной системы (5.9).

3. Решетка из оболочек в форме короткого цилиндра с упругими пластинами, параллельными плоскости решетки

Рассмотрим еще один тип упругой оболочки конечных размеров, образованной двумя тонкими круглыми пластинами, закрепленными по краям на недеформируемую кольцевую опору. Оболочки такого типа имеют ряд преимуществ с точки зрения технологии изготовления по сравнению с другими типами оболочек и поэтому представляют значительный интерес для практики [28]. Исследуем акустические свойства бесконечной плоской решетки, состоящей из указанных оболочек, расположенных в узлах гексагональной сетки (рис. 102). Выбор такой сетки обусловлен тем, что в этом случае можно достичь наиболее плотной упаковки оболочек в решетке и тем самым обеспечить максимальный звукоизолирующий эффект. Кроме того, решение рассматриваемой задачи практически не усложняется, если геометрические и физические характеристики упругих пластин считать разными. Соответствующим подбором этих величин, очевидно, можно существенно изменять акустические свойства решетки.

Ограничимся нормальным падением плоской звуковой волны на решетку. На основе анализа результатов, полученных в предыдущей главе, а также на основе качественного анализа ситуации можно ожидать, что для наклонного падения плоской волны звукоизолирующие свойства решеток из упругих оболочек будут лучше, чем для нормального падения. При этом улучшение звукоизолирующих свойств понимается в том смысле, что будет снижаться прозрачность решетки вблизи частоты основного резонанса и расширяться полоса частот, где коэффициент прохождения будет меньше некоторой заданной величины. В работе в качестве такого характерного значения коэффициента прохождения по давлению принят $k_{пр} = 0,2$.

Рассмотрение случая нормального падения позволяет (в силу симметрии решетки) заменить задачу о дифракции звука на решетке зада-

чей о дифракции звука на одной оболочке, находящейся внутри бесконечного правильного шестигранного волновода [156] с акустически жесткими границами. На рис. 102 такой волновод обозначен штриховыми линиями. Дальнейшее упрощение задачи связано с переходом от шестигранного волновода к круглому волноводу с радиусом $r_1 = (S/\pi)^{1/2}$, где S — площадь поперечного сечения шестигранного волновода. Указанный переход (если нас интересует такой параметр, как коэффициент прохождения звука через решетку) вполне оправдан, когда максимальный поперечный размер шестигранного

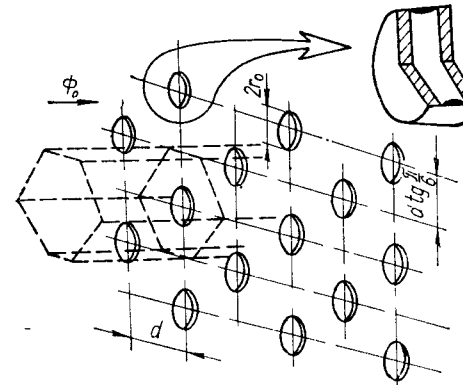


Рис. 102

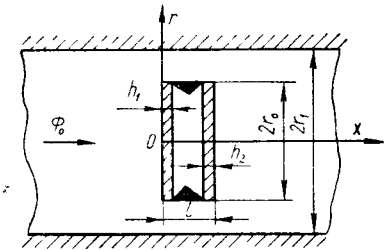


Рис. 103

волновода не превышает половины длины распространяющейся в нем звуковой волны. На рис. 103 изображено продольное сечение круглого волновода с расположенной в нем упругой оболочкой.

Разобьем всю область существования звукового поля в волновод на следующие частичные области: область $r \leq r_1$; $x \leq 0$; область $r_0 \leq r \leq r_1$; $0 \leq x \leq l$; область $r \leq r_1$; $x \geq l$ и представим звуковое поле в этих областях в виде рядов Фурье по нормальным модам круглого и кольцевого волноводов с акустически жесткими стенками:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= e^{ikx} + \sum_{v=1}^{\infty} A_v J_0(\alpha_v r) e^{-ik_v x}; \\ \Phi_2 &= \sum_{p=1}^{\infty} \Delta_p(r) [E_p \sin k_p x + F_p \cos k_p x]; \\ \Phi_3 &= \sum_{\mu=1}^{\infty} C_{\mu} J_0(\alpha_{\mu} r) e^{ik_{\mu}(x-l)}; \\ \Delta_p &= J_0(\alpha_p r) - B_p N_0(\alpha_p r); \\ k_v &= (k^2 - \alpha_v^2)^{1/2}; \quad k_p = (k^2 - \alpha_p^2)^{1/2}; \quad k_{\mu} = (k^2 - \alpha_{\mu}^2)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Колебательные скорости пластин представим как суперпозицию двух составляющих. Первая составляющая соответствует перемещению оболочки вдоль оси Ox как единого целого; вторая составляющая соответствует изгибным колебаниям пластин и имеет вид ряда по их собст-

венным формам колебаний в вакууме [61, 150]:

$$v_\tau(r) = v_0 + \sum_{s=1}^{\infty} v_s^{(\tau)} \Delta_s^{(\tau)}(r); \quad \tau = 1; 2;$$

$$\Delta_s^{(\tau)}(r) = J_0(\alpha_s r) - \frac{J_0(\alpha_s)}{I_0(\alpha_s)} I_0(\alpha_s r). \quad (5.14)$$

Значения коэффициентов $\alpha_v, \alpha_p, \alpha_\mu, \alpha_s$ и B_p в (5.13) и (5.14) определяются из следующих граничных условий, характеризующих принятые выше свойства поверхностей волновода и кольцевых опор, а также тип закрепления пластин по контуру:

$$\left. \begin{aligned} \partial \Phi_2 / \partial (kr) &= 0; & 0 \leq x \leq l; \\ \partial \Phi_1 / \partial (kr) &= 0; & x \leq 0; \\ \partial \Phi_3 / \partial (kr) &= 0; & x \geq l; \\ \partial \Phi_2 / \partial (kr) &= 0; & 0 \leq x \leq l; \\ v_\tau(r) &= \frac{d^2 v_\tau(r)}{dr^2} + \frac{\sigma_\tau}{r} \frac{dv_\tau(r)}{dr} = 0; & r = r_0; \\ x &= 0; \tau = 1; & x = l; \tau = 2. \end{aligned} \right\} \quad r = r_1; \quad (5.15)$$

Последнее условие, как известно [150], описывает шарнирную связь круглых пластин с опорой. В рамках используемой методики можно рассмотреть и другие типы граничных условий (5.13).

В частности, ниже будут рассмотрены акустические характеристики оболочек с жестко зашпеленными по кромке пластинами.

Неизвестные комплексные коэффициенты в рядах (5.13), (5.14) определяются из следующей системы функциональных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2; & x = 0; & r_0 \leq r \leq r_1; \\ -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} &= \begin{cases} -\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}; & r_0 \leq r \leq r_1; \\ v_1(r); & 0 \leq r \leq r_0; \end{cases} & x = 0; \\ \Phi_2 &= \Phi_3; & x = l; & r_0 \leq r \leq r_1; \\ -\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} &= \begin{cases} -\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}; & r_0 \leq r \leq r_1; \\ v_2(r); & 0 \leq r \leq r_0; \end{cases} & x = l; \\ \frac{M}{\rho} v_0 &= \int_0^{r_0} [\Phi_1(x=0) - \Phi_3(x=l)] r dr; \\ \nabla^2 \nabla^2 v_1(r) - k_1^4 v_1(r) &= -\frac{\omega^2 \rho}{D_1} \Phi_1; & x = 0; & 0 \leq r \leq r_0; \\ \nabla^2 \nabla^2 v_2(r) - k_2^4 v_2(r) &= -\frac{\omega^2 \rho}{D_2} \Phi_3; & x = l; & 0 \leq r \leq r_0, \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}; \quad k_\tau^4 = \frac{\omega^2 M_\tau}{D_\tau}; \quad M_\tau = \rho_\tau h_\tau;$$

где M — полная масса оболочки; $M = M_1 + M_2 + \bar{M}$; $\bar{M}$ — масса опоры.

Система функциональных уравнений (5.16) стандартным способом заменяется эквивалентной ей бесконечной системой линейных алгебраических уравнений второго рода, являющейся исходной для получения количественных данных. Эта система имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} A_v N_{vv} - \sum_{p=1}^{\infty} F_p N_{vp} &= -\delta_v; \\ ik_v A_v N_{vv} + \sum_{p=1}^{\infty} k_p E_p N_{vp} - v_0 \delta_v - \sum_{s=1}^{\infty} v_s^{(1)} N_{vs} &= \delta_v; \\ C_\mu N_{\mu\mu} - \sum_{p=1}^{\infty} [E_p \cos k_p l - F_p \sin k_p l] N_{\mu p} - v_0 \delta_\mu - \\ - \sum_{s=1}^{\infty} v_s^{(2)} N_{\mu s} &= 0; \\ v_0 - \frac{2\pi\rho}{M} \sum_{v=1}^{\infty} A_v \delta_v - \frac{2\pi\rho}{M} \sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu \delta_\mu &= r_1^2/2; \\ v_s^{(1)} Z_s^{(1)} N_{ss} + v_0 \delta_s + \frac{\rho}{\rho_1 h_1} \sum_{v=1}^{\infty} A_v N_{vs} &= -\frac{\rho}{\rho_1 h_1} \delta_s; \\ v_s^{(2)} Z_s^{(2)} N_{ss} + v_0 \delta_s + \frac{\rho}{\rho_2 h_2} \sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu N_{\mu s} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta_v &= \int_0^{r_1} J_0(\alpha_v r) r dr; & \delta_\mu &= \int_0^{r_1} J_0(\alpha_\mu r) r dr; \\ \delta_s &= \int_0^{r_0} \Delta_s^{(1)} r dr; & N_{vv} &= \int_0^{r_1} J_0^2(\alpha_v r) r dr; \\ N_{ss} &= \int_0^{r_0} [\Delta_s^{(1)}(r)]^2 r dr; & N_{vp} &= \int_{r_0}^{r_1} J_0(\alpha_v r) \Delta_p(r) r dr; \\ N_{vs} &= \int_0^{r_0} J_0(\alpha_v r) \Delta_s^{(1)}(r) r dr; & N_{\mu s} &= \int_0^{r_0} J_0(\alpha_\mu r) \Delta_s^{(2)}(r) r dr. \end{aligned}$$

Для фактического вычисления этих интегралов достаточно следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a J_0(\alpha r) r dr &= \frac{a}{\alpha} J_1(\alpha a); \\ \int_0^a J_0^2(\alpha r) r dr &= \frac{1}{2} a^2 [J_0^2(\alpha a) + J_1^2(\alpha a)]; \end{aligned} \right\}$$

$$\int_0^a J_0(\alpha r) I_0(\gamma r) r dr = \frac{a}{\gamma^2 + \alpha^2} [\gamma I_1(\gamma a) J_0(\alpha a) - \alpha I_0(\gamma a) J_1(\alpha a)]; \quad (5.18)$$

$$\int_0^a J_0(\alpha r) I_0(\alpha r) r dr = \frac{a}{2\alpha^2} [J_0(\alpha a) I_1(\alpha a) + J_1(\alpha a) I_0(\alpha a)].$$

При этом учитывается, что между функциями Бесселя вещественного и мнимого аргумента имеет место соотношение

$$J_n(ix) e^{-i \frac{n\pi}{2}} = I_n(x).$$

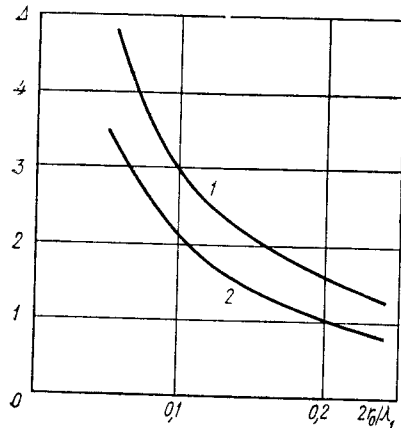


Рис. 104

Характеризуя представленные зависимости, можно сказать, что они в целом качественно аналогичны таковым для других форм оболочек, рассмотренных выше. Действительно, с уменьшением волнового размера пластины увеличивается полоса эффективной звукоизоляции Δ решетки. Важно отметить, что способ закрепления пластин существенно сказывается на акустических свойствах решетки. Как видно, выполняя заделку контура пластин жесткой (кривая 1), можно заметно увеличить значение Δ по сравнению с шарнирным закреплением (кривая 2). При проведении расчетов для этого случая закрепления соответствующее условие в системе (5.15) было заменено на следующее:

$$v_r(r) = dv_r(r)/dr = 0; \quad r = r_0.$$

Отмеченному факту можно дать следующее физическое толкование. Толщина круглой пластины фиксированного диаметра и резонансной частоты зависит от способа закрепления ее контура [150]. Если пластина жестко закреплена по контуру, то ее толщина при одной и той же собственной частоте будет почти в два раза меньше, чем толщина пластины, закрепленной по контуру шарнирно. В связи с этим пластина, закрепленная по контуру, обладает большей динамической податливостью, что в конечном итоге и обуславливает большую полосу эффективной звукоизоляции решетки в целом. Указанное увеличение

податливости пластин особенно заметно сказывается на относительно низких частотах. Чтобы в этом убедиться, достаточно обратиться к рис. 105, на котором приведены частотные зависимости коэффициента прохождения звука через решетку из оболочек с различным способом закрепления пластин по контуру для $2r_0/\lambda_1 = 0,1$. Здесь кривая 1 соответствует случаю шарнирно опертой пластинки, а кривая 2 — жестко защемленной. Первая собственная частота для обеих пластин совпа-

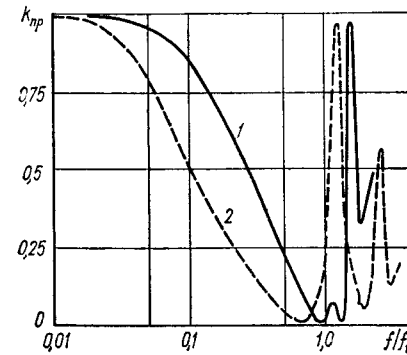


Рис. 105

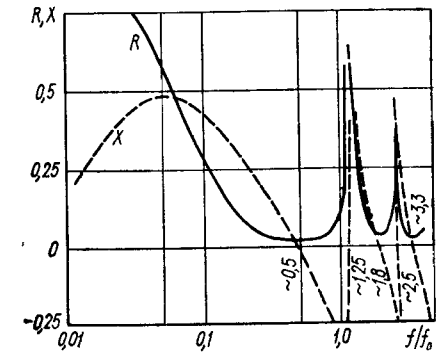


Рис. 106

дает. Отмеченные выше особенности в поведении решеток достаточно четко видны. Поскольку жестко защемленная пластина имеет меньшую толщину, роль присоединенной массы жидкости выражена более сильно. Собственная частота пластины в жидкости значительно ниже собственной частоты в вакууме. В области относительно высоких частот акустические свойства двух типов решеток практически идентичны.

Остановимся на анализе акустических свойств решетки с учетом кинематики пластин и брусев. В четвертой главе достаточно подробно этот вопрос изучен для решетки, пластины которой ориентированы нормально плоскости решетки. В частности, было показано, что чередование максимумов и минимумов звукопрозрачности решетки связано с чередованием резонансов и антирезонансов системы пластины — жидкость. При этом минимумы прозрачности решетки возникали в области резонансов системы пластины — жидкость, где доминировали собственные формы колебаний пластин с нечетными индексами, а максимумы прозрачности решетки возникали в области антирезонансов системы пластины — жидкость, и в собственной форме колебаний доминировали собственные формы колебаний в вакууме с четными индексами. В последнем случае изменение объема бруса в решетке при колебаниях оказывается значительно меньшим, чем в первом случае. Важно отметить, что каждому резонансу или антирезонансу соответствовала только одна собственная форма колебаний пластин.

Выясним физические основы возникновения максимумов и минимумов звукопрозрачности решетки, пластины которой ориентированы параллельно ее плоскости. Анализ проведем на примере рассматриваемой в настоящем разделе решетки.

На рис. 106 приведены типичные кривые, характеризующие вход-

ной импеданс решетки. Сравнивая эти кривые с кривыми на рис. 89, можно убедиться, что зависимости R и X от частоты для решеток с различной ориентацией пластин имеют качественно одинаковый характер. Тем не менее проследим более подробно за колебательной скоростью обеих круглых пластин, образующих оболочку, на частотах резонанса и антирезонанса системы пластины — жидкость, указанных на рис. 106.

Таблица 5

f	$v_1^{(1)}$		$v_2^{(1)}$		$v_1^{(2)}$		$v_2^{(2)}$		Форма колебаний оболочки
	Амп-литу-да	Фаза	Амп-литу-да	Фаза	Амп-литу-да	Фаза	Амп-литу-да	Фаза	
$f_{p1} \approx 2,5f_1$	10	$183^\circ 40'$	15	0°	15	$182^\circ 40'$	0,07 5	4°	
$f_{p3} \approx 1,8f_1$	2,1	180°	3,1	$180^\circ 10'$	4,1	$180^\circ 40'$	0,94	55°	
$f_{p2} \approx 1,25f_1$	39	193°	3,3	18°	39,7	197°	5,7	17°	
$f_{p1} \approx 0,5f_1$	2,3	$2^\circ 30'$	0,08	—	0,98	185°	6,6	—	

Данные об амплитудных и фазовых характеристиках первых двух складываемых в ряд, представляющих колебательные скорости пластин, представлены в табл. 5.

Анализ данных табл. 5 показывает, что на частоте первого резонанса системы пластины — жидкость ($f_{p1} \approx 0,5f_1$) форма колебаний пластин практически совпадает с первой формой колебаний в вакууме. Вклад второй формы пренебрежимо мал. При этом пластины колеблются в противофазе, вследствие чего форма колебаний оболочки имеет вид, показанный на схеме. Таким образом, на первом резонансе системы упругие пластины — жидкость колебания оболочки сопровождаются изменением объема, что и обеспечивает низкую звукопрозрачность решетки.

На частоте антирезонанса ($f_{p2} \approx 1,25f_1$), так же как и на частоте первого резонанса, форма колебаний пластин определяется их первой собственной формой колебаний в вакууме. Однако при этом обе пластины колеблются в фазе и изменения объема оболочки практически не происходит. Движение жидкости в окрестности оболочки носит

осциллирующий характер (пути тока жидкости показаны на схеме стрелками), и решетка становится звукопрозрачной.

Дальнейший анализ данных табл. 5 позволяет убедиться в том, что качественно подобная картина имеет место и для последующих резонансов и антирезонансов системы пластины — жидкость. Однако при этом следует отметить более сложную структуру форм колебаний более высокого порядка. Если для пластины, непосредственно обращенной к падающей звуковой волне, основную роль играет вторая собственная форма в вакууме, то для тыльной пластины даже на второй форме вклад первой формы является очень существенным.

Сравнивая полученные результаты с данными, приведенными в четвертой главе, можно увидеть принципиальное отличие, которое имеет место в природе возникновения резонансов и антирезонансов системы пластины — жидкость и соответственно минимумов и максимумов коэффициента прохождения звука через решетку. Если у решетки, пластины которой ориентированы нормально ее плоскости, каждой собственной форме колебаний пластин соответствует один резонанс или антирезонанс системы пластины — жидкость, то у решетки, упругие пластины в которой параллельны плоскости решетки, каждой собственной форме колебаний пластин соответствует один резонанс и один антирезонанс системы пластины — жидкость.

Интересной особенностью колебательного движения упругих оболочек в решетке является то, что добротность колебаний на разных формах сильно различается. Она очень велика на частотах антирезонанса, когда решетка звукопрозрачна, и относительно мала на частотах резонанса, соответствующих минимуму звукопрозрачности. Именно это обстоятельство обуславливает тот факт, что области частот, где решетка непрозрачна, значительно шире областей частот, где она прозрачна. Указанная особенность является прямым следствием разной степени согласованности со средой такого рассеивателя звуковых волн, как упругая оболочка на разных ее формах колебаний.

В заключение отметим следующее обстоятельство. При изучении акустических свойств решеток из упругих оболочек мы в основном рассматривали случаи шарнирного опирания и жесткой заделки. Однако реально реализуемые на практике закрепления оболочек могут в некоторой степени отличаться от рассмотренных. В связи с этим возникает вопрос о выработке рекомендаций, обеспечивающих реализацию необходимого типа закрепления пластин. В принципе рассматриваемая механическая система в виде короткой цилиндрической оболочки, закрытой тонкими пластинами, допускает полный расчет в рамках теории тонких пластин и оболочек, но вопрос о моделировании условий сопряжения остается открытым. В связи с этим были выполнены обширные экспериментальные исследования реальных оболочек, которые показали, что при определенных соотношениях жесткостей цилиндрической оболочки и пластины их соединение с помощью сварки хорошо моделируется как шарнирное.

4. Одномерные решетки из оболочек в форме короткого цилиндра

В предыдущих главах были исследованы акустические свойства решеток, которые имели бесконечную ширину и высоту. Толщина решетки всегда оставалась конечной и определялась поперечными размерами оболочек. Однако ясно, что с практической точки зрения важно иметь сведения также об акустических свойствах решеток, конечных в плане. Учитывая это, рассмотрим несколько задач о рассеивании звука на решетках из упругих оболочек, у которых по крайней мере ширина или высота конечны.

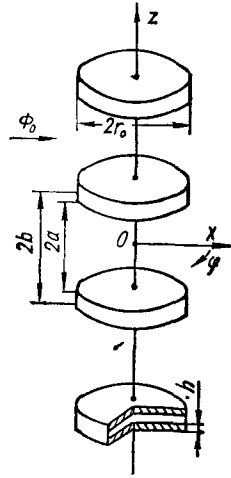


Рис 107

Один из возможных вариантов решетки конечных размеров показан на рис. 107. Это одномерная периодическая решетка, каждый элемент которой представляет рассмотренную в параграфе 3 настоящей главы оболочку, образованную двумя круглыми пластинами, закрепленными на кольцевой опоре.

Будем полагать, что на решетку нормально к ее продольной оси Oz падает плоская звуковая волна с потенциалом скорости Φ_0 . Учитывая периодичность решетки и характер падающего звукового поля при изучении количественных характеристик рассеянного поля, достаточно ограничиться рассмотрением только одного периода решетки и всю область существования звукового поля разбить на две частичные области: область $0 \leq r \leq r_0$, $|z| \leq a$ и область $r \geq r_0$, $|z| \leq b$. Граничные условия на границе волновода $|z| \leq b$ и стенках оболочек будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0, \quad |z| = b, \quad r \geq r_0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= 0, \quad a \leq |z| \leq b, \quad r = r_0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Тогда, учитывая эти два условия и известные представления волновых функций в волноводе в цилиндрической системе координат [133], звуковые поля в указанных выше частичных областях запишем в форме следующих двойных рядов:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{n\pi}{a} z \cos m\varphi F_m(k_n r) + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} B_{mp} \cos k_p z \cos m\varphi J_m(v_p r); \\ k_n^2 &= k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad k_p^2 = k^2 - v_p^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_m(k_n r) &= \begin{cases} J_m(k_n r), & k > \frac{n\pi}{a}, \\ I_m(k_n r), & k < \frac{n\pi}{a}; \end{cases} \\ \Phi_2 &= \Phi_0 + \Phi_{\text{рас}}; \\ \Phi_0 &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m J_m(kr) \cos m\varphi; \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \neq 0; \end{cases} \\ \Phi_{\text{рас}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} D_{mq} \cos \frac{q\pi}{b} z \cos m\varphi Q_m(k_q r), \\ k_q^2 &= k^2 - \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2; \quad Q_m(k_q r) = \begin{cases} H_m^{(1)}(k_q r), & k > \frac{q\pi}{b}, \\ K_m(k_q r), & k < \frac{q\pi}{b}. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Здесь v_p — корни трансцендентного уравнения $J_m(v_p r_0) = 0$.

Колебательную скорость пластин представим в виде двойного ряда по собственным симметричным и неосесимметричным формам колебаний в вакууме. Полагая, как и выше, что пластины закреплены по контуру шарнирно, имеем

$$v(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} E_{ms} \Delta_s(r) \cos m\varphi, \quad (5.21)$$

где

$$\Delta_s(r) = J_m(\beta_s r) - L_m I_m(\beta_s r).$$

Это выражение представляет собой общее решение уравнения движения элемента пластины после представления искомой скорости рядом по $\cos m\varphi$. В нем содержатся две произвольные постоянные L_m и β_s . Они определяются из условий равенства нулю на контуре пластины колебательной скорости и изгибающего момента. Из первого условия находим

$$L_m = J_m(\beta_s r_0) / I_m(\beta_s r_0).$$

Второе условие приводит к некоторому трансцендентному уравнению относительно параметра β , корни которого табулированы [61].

Неизвестные комплексные коэффициенты в рядах (5.20) и (5.21) определяются из следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2, \quad r = r_0, \quad |z| \leq a; \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} &= \begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}, & |z| \leq a, \\ 0, & a \leq |z| \leq b, \end{cases} \quad r = r_0; \\ -\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} &= v(r), \quad |z| = a, \quad 0 \leq r \leq r_0; \\ \nabla^2 \nabla^2 v(r) - k_{\text{пл}}^4 v(r) &= -\frac{\omega^2 \rho}{D} \Phi_1(|z| = a), \quad 0 \leq r \leq r_0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Подробно описанные ранее операции позволяют преобразовать эту систему к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} & A_{mn} F_m(k_n r_0) \delta_n a - \sum_{n=0}^{\infty} D_{mq} Q_m(k_q r_0) (-1)^n \frac{\pi q}{b} \sin \frac{\pi q a}{b} N_{nq} = \\ & = \begin{cases} \varepsilon_m i^m a J_m(k r_0), & n = 0, \\ 0, & n \neq 0; \end{cases} \\ & D_{mq} k_q Q'_m(k_q r_0) \delta_q b + \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} k_n F'_m(k_n r_0) (-1)^q \sin \frac{\pi n b}{a} \times \\ & \times \frac{\pi n}{a} N_{nq} - \sum_{p=1}^{\infty} B_{mp} v_p J'_m(v_p r_0) (-1)^q \frac{k_p \sin k_p b}{(k_p)^2 - \left(\frac{\pi q}{b}\right)^2} = 0; \\ & E_{ms} (\beta_s^4 - k_{n\lambda}^4) \int_0^{r_0} \Delta_s^2(r) r dr = -\frac{\omega \rho}{D} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_{mn} \times \right. \\ & \times \int_0^{r_0} F_m(kr) \Delta_s(r) r dr + \sum_{p=1}^{\infty} B_{mp} \cos k_p a \bar{N}_{ms}(v_p) \Big\}; \\ & B_{mp} k_p \sin k_p a \int_0^{r_0} J_m^2(v_p r) r dr = \sum_{s=1}^{\infty} E_{ms} \bar{N}_{ms}(v_p). \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Здесь

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 1/2, & n \neq 0; \end{cases}$$

$$N_{nq} = \frac{1}{\left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}; \quad \bar{N}_{ns}(v_p) = \int_0^{r_0} \Delta_s(r) J_m(v_p r) r dr.$$

Для уменьшения громоздкости записи в коэффициентах системы сохранены интегралы от функций Бесселя. Явное вычисление всех таких интегралов легко осуществить на основе соотношений (5.18).

Система (5.23) является исходной при проведении количественного анализа акустических свойств одномерной решетки. При этом принимаются следующие значения для геометрических и физических параметров элементов решетки: $2r_0/\lambda_1 = 0,1$, $a/r_0 = 1$, $\rho_1 c_1/\rho c = 15$, $(b-a)/r_0 = 0,06$, где λ_1 — длина волны на некоторой характерной частоте f_1 , совпадающей с низшей собственной частотой пластин в решетке, отвечающей той форме колебаний, при которой происходит изменение объема ячейки. Это последнее обстоятельство важно подчеркнуть, поскольку некоторые неосесимметричные формы колебаний могут иметь собственную частоту, меньшую, чем первая частота осесимметричных форм.

Рассматриваемая задача является неосесимметричной. В связи с этим соотношения (5.23) образуют, по сути, бесконечную по m последо-

вательность бесконечных систем. Это существенно усложняет задачу получения количественных оценок рассеянного звукового поля, особенно в ближней зоне. Однако в данном случае нас будет интересовать такая ситуация, когда волновые размеры рассеивающей оболочки малы.

Обратим внимание еще на одно существенное обстоятельство. Непосредственный анализ звукоизолирующих свойств конечной решетки в тех величинах, которые были использованы для бесконечных решеток, невозможен. В области за решеткой всегда будут существовать волны, не только прошедшие через нее, но и дифрагированные, обошедшие ее. В связи с этим эффективность одномерной решетки как звукоотражателя будем оценивать по уровню рассеянного ею звукового поля.

Выше представлены обширные данные о свойствах рассеянных звуковых полей от решеток, элементы которых малы по сравнению с длиной волны. Обобщая эти результаты, можно сказать, что в непосредственной близости к элементам решетки структура звукового поля достаточно сложна и для надежного описания требуется учитывать в соответствующих бесконечных рядах десятки членов. Поскольку их коэффициенты определяются из бесконечных систем, то порядок соответствующих конечных систем, получаемых по методу редукции, должен быть достаточно высок.

Вместе с тем анализ построенных выше решений позволяет утверждать, что при отыскании интегральных характеристик звуковых полей в диапазоне относительно низких частот можно ограничиться минимальным количеством уравнений при редукции бесконечных систем. Поскольку в данном случае $2r_0 \ll \lambda$, $2a \ll \lambda$ и, кроме того, $a \approx b$, то такое заключение справедливо и в отношении последовательности бесконечных систем (5.23). Причем основной интерес здесь представляет величина D_{00} , отражающая эффективность осесимметричного рассеивания звука решеткой. Оставляя в бесконечной системе, получаемой из (5.23) при $m = 0$, только первые неизвестные, получаем для D_{00} следующее выражение

$$D_{00} = \frac{1}{-1 + i \frac{2}{\pi} \left[\ln \frac{2}{1,78 k r_0} - \tilde{Z} \right]}, \quad (5.24)$$

где

$$\tilde{Z} = \frac{2a}{1,64 r_0} \left[Z_{01} \frac{2,4 \rho_1 h_1}{\rho r_0} + \operatorname{cth} 2,4 \frac{a}{r_0} \right];$$

$$Z_{01} = 1 - f_{01}^2/f^2, \quad f_{01} = \frac{(2,22)^2}{2\pi r_0} \left[\frac{D}{\rho_1 h_1} \right]^{1/2}.$$

Величину $\tilde{Z}$ здесь можно трактовать как импеданс объема жидкости в щели между оболочками, нагруженного на упругие пластины.

Сопоставим выражение (5.24) с известным выражением, определяющим амплитуду рассеянной осесимметричной волны от бесконечного акустически мягкого сплошного цилиндра радиуса $r_0 \ll \lambda$ при па-

дении на него плоской звуковой волны [173]:

$$D_0^* = \frac{1}{-1 + i \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{1,78kr_0}}. \quad (5.25)$$

Как видно, выражение (5.24) отличается от выражения (5.25) только наличием в знаменателе первого величины $\tilde{Z}$. Как видно из выражения для $\tilde{Z}$, надлежащим подбором частоты всегда можно добиться выполнения равенства $\tilde{Z} = 0$. Эта частота не совпадает с собственной частотой пластины f_{01} , при которой обращается в ноль Z_{01} . Структура выражения $\tilde{Z}$ показывает, что значение частоты f , при котором имеет место равенство $\tilde{Z} = 0$ всегда меньше собственной частоты пластины в вакууме. Учитывая отмеченное обстоятельство, можно сделать важный качественный вывод о том, что на частоте резонанса системы пластины — жидкость амплитуда рассеянной волны от одномерной решетки из упругих оболочек равна амплитуде рассеянной волны от равного по диаметру акустически мягкого сплошного цилиндра.

Определим частоту f_p , при которой имеет место равенство $\tilde{Z} = 0$. Из приведенного выше выражения для $\tilde{Z}$ легко определить, что

$$f_p = f_{01} \left[\frac{2,4 \frac{\rho_1 h_1}{\rho r_0}}{2,4 \frac{\rho_1 h_1}{\rho r_0} + \operatorname{cth} 2,4 \frac{a}{r_0}} \right]^{1/2}. \quad (5.26)$$

Непосредственный анализ этого выражения позволяет установить важное свойство: $f_p \rightarrow 0$ при $a/r_0 \rightarrow 0$. Как следует из выражений (5.11) и (4.38), такое поведение резонансной частоты системы оболочка — жидкость характерно для решеток из оболочек, упругие стенки которых ориентированы нормально фронту падающей на решетку плоской волны.

С понижением частоты (относительно f_p) амплитуда рассеянной волны от одномерной решетки оболочек падает быстрее, чем при рассеивании на акустически мягком цилиндре, так как величина $\tilde{Z}$ на низких частотах растет пропорционально $1/f^2$. Для области низких частот можно дать следующую оценку величины D_{00} :

$$D_{00} = i\rho\omega^2 \cdot 0,00682 \frac{(\pi r_0^2)^3}{2aD}, \quad (5.27)$$

где D — изгибная жесткость пластин.

Из этого выражения видно, что на низких частотах амплитуда рассеянной волны пропорциональна квадрату частоты и кубу площади поперечного сечения решетки и обратно пропорциональна расстоянию между соседними оболочками. Для иллюстрации эффективности рассеивания звука решеткой из упругих элементов в области частот $f/f_{01} <$

< 1 на рис. 108 приведены частотные зависимости величин D_{00} и D_0^* . Первая показана сплошной кривой, а вторая штриховой.

Мы рассмотрели акустические свойства одномерной решетки при падении на нее плоской волны. При дальнейшем изучении ее свойств целесообразно рассмотреть ее поведение под действием сходящейся цилиндрической волны. Целесообразность решения задачи в такой постановке обусловлена следующим обстоятельством.

Во второй главе было показано, что, помещая внутрь колеблющегося цилиндра акустически мягкий цилиндр меньшего радиуса, мож-

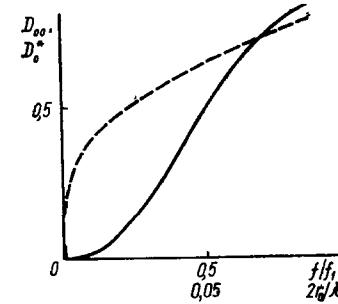


Рис. 108

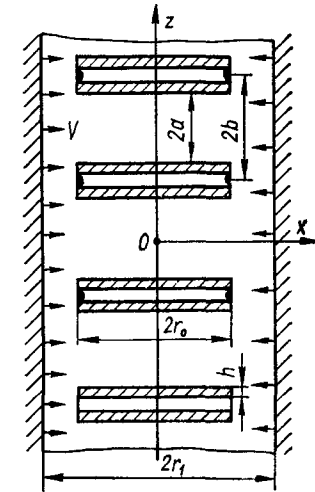


Рис. 109

но достаточно эффективно управлять величиной присоединенной массы и, в конечном итоге, значением резонансной частоты цилиндра. Причем особенно интересным является то, что таким образом можно существенно снизить собственную частоту. В современной акустике проблема снижения резонансной частоты преобразователей стоит довольно остро [214, 215]. Если учесть, что современные пьезокерамические материалы, используемые для создания преобразователей [146], имеют высокие по сравнению с водой скорости распространения продольных волн, то можно заключить, что создание на керамической основе резонансных цилиндрических преобразователей с диаметром, меньшим 0,7 длины волны звука в воде, практически невозможно. Это, в свою очередь, затрудняет решение задачи создания эффективно работающих решеток из таких преобразователей.

То, что рассмотренная одномерная решетка в некотором частотном интервале ведет себя как акустически мягкая, позволяет использовать ее при экранировании излучателей. Поставленная задача о реакции одномерной решетки на действие сходящейся цилиндрической волны позволяет оценить ее возможности как внутреннего экрана водозаполненных цилиндрических излучателей.

Разместим одномерную решетку, изображенную на рис. 107, в цилиндрическую полость, на поверхность которой задана колебательная скорость v (рис. 109). Вся область существования звукового поля $0 \leq r \leq r_1$ теперь разделим на две: $0 \leq r \leq r_0$ и $r_0 \leq r \leq r_1$. В каче-

стве представления для потенциала звукового поля в первой области можно непосредственно использовать выражение для Φ_1 в (5.20). Выражение для потенциала звукового поля в области $r_0 \leq r \leq r_1$, содержащее достаточную степень произвола для удовлетворения граничных условий на поверхности $r = r_1$ и условий сопряжения на поверхности $r = r_0$, имеет в общем случае вид

$$\Phi_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} [C_{mq} F_m(k_q r) + D_{mq} G_m(k_q r)] \cos \frac{\pi q}{b} z \cos m\varphi, \quad (5.28)$$

$$G_m(k_q r) = \begin{cases} N_m(k_q r), & k > \frac{\pi q}{b}; \\ K_m(k_q r), & k < \frac{\pi q}{b}, \end{cases}$$

где C_{mq} и D_{mq} — произвольные постоянные. Остальные обозначения такие же, как и в системе (5.20).

Наибольший практический интерес в рассматриваемой задаче представляет осесимметричный случай $m = 0$. Именно для этого случая получены конкретные количественные оценки. Для получения расчетных соотношений необходимо выполнить стандартные преобразования функциональных уравнений в бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов рядов для Φ_1 в (5.20) и Φ_2 в (5.28). Не будем останавливаться на деталях, а перейдем к анализу количественных данных.

На рис. 110 представлены графики, характеризующие частотную зависимость импеданса внутреннего объема полости, приведенного к поверхности $r = r_1$, для случая, когда на этой поверхности задано равномерное распределение колебательной скорости $v = \text{const}$. Здесь $r_0/r_1 = 0,32$; $a/r_0 = 1,0$; $(b - a)/r_0 = 0,06$; $\rho_1 c_1 / \rho c = 15$; кривые 1; 2 и 3 соответствуют значениям h/r_0 , равным 0,021; 0,315 и 0,0475. Как видно, импеданс имеет чисто реактивный характер, что и следовало ожидать, поскольку область существования поля замкнутая и в ней отсутствуют потери энергии. Обращает на себя внимание чередование резонансов, где $X = 0$, и антирезонансов, когда X терпит разрыв, в системе упругие оболочки — замкнутый объем жидкости. Такое чередование резонансов и антирезонансов является весьма характерной чертой частотных зависимостей импедансов замкнутых цилиндрических объемов, заполненных акустической средой [55]. В связи с этим на рис. 110 представлена также кривая 4, отражающая поведение импеданса цилиндрического объема жидкости в отсутствие решетки внутри. Наличие решетки, как видно, существенно влияет на величину импеданса полости. Особенно важно то, что с помощью решетки оказывается возможным существенно снизить значения частот указанных выше резонансов и антирезонансов. В частности, можно сделать вывод о том, что управлять положением на частотной оси характерных частот можно с помощью изменения шага решетки.

В целом можно сказать, что полученные данные подтверждают возможность эффективного экранирования внутренней поверхности цилиндрических излучателей и целенаправленного снижения их резо-

нансной частоты путем размещения во внутреннем их объеме одномерной решетки из упругих оболочек и рационального подбора ее параметров. Действительно, если на некоторой частоте f^* необходимо осуществить экранировку внутренней поверхности заполненного жидкостью пульсирующего цилиндрического излучателя (например, пьезокерамического кольца [118]), то достаточно подобрать параметры решетки так, чтобы на f^* имел место резонанс в системе упругие пластины —

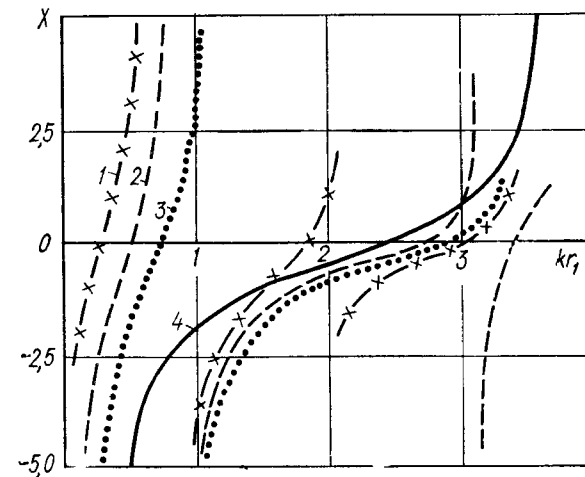


Рис 110

замкнутый объем жидкости. Тогда внутренняя поверхность излучателя звука будет полностью разгружена и поставленная цель достигнута

Если же необходимо снизить частоту резонанса пульсирующего пьезокерамического кольца, то подбор параметров решетки следует вести так, чтобы в области $f < f_0$, где f_0 — резонансная частота кольца с водозаполненной полостью, величина X была большой по абсолютному значению и имела характер массы. При этом система упругие пластины — замкнутый объем жидкости будет играть роль соколеблющейся с кольцом массы, наличие которой приводит к снижению резонансной частоты излучателя.

5. Система одномерных решеток

Выше была рассмотрена дифракция звуковых волн на одной одномерной решетке из упругих оболочек. В рамках изложенного подхода, естественно, возможно изучить акустические свойства и более сложных пространственных структур, состоящих из конечного числа таких одномерных решеток.

Пусть на систему из N одномерных решеток падает плоская звуковая волна с потенциалом Φ_0 . Будем считать, что продольные оси решеток параллельны друг другу, а периоды всех решеток одинаковы и

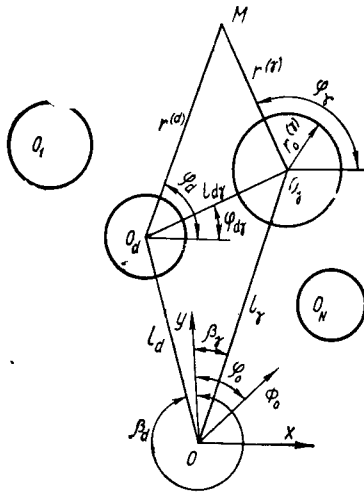


Рис 111

в локальной системе координат с центром O_d можно представить в форме

$$\Phi_0 = e^{i k r^{(d)} \cos(\varphi - \beta_\gamma)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(k r_0^{(d)}) e^{-i m(\varphi_d - \varphi)}. \quad (5.29)$$

При построении выражений для потенциалов скоростей в частных областях, которые выделяются так же, как и в предыдущем параграфе, используются представления (5.20) и (5.21). Причем рассеянное поле по форме представляется как суперпозиция звуковых полей, рассеянных отдельными решетками:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(d)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^{(d)} \cos \frac{n\pi z}{a} e^{i m \varphi_d} F_m(k_n r^{(d)}) + \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} B_{mp}^{(d)} \cos k_p z e^{i m \varphi_d} J_m(v_p r^{(d)}); \\ \Phi_2 &= \sum_{d=1}^N [\Phi_0 + \Phi_R^{(d)}]; \\ \Phi_R^{(d)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} D_{mq}^{(d)} \cos \frac{\pi q}{b} z e^{i m \varphi_d} Q_m(k_q r^{(d)}); \\ v^{(d)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} E_{ms}^{(d)} \Delta_s(r^{(d)}) e^{i m \varphi_d} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Определение неизвестных коэффициентов бесконечных рядов в системе (5.30) связано с решением бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Для получения этих систем используются, по сути, повторенные N раз функциональные уравнения (5.22). Для

того чтобы привести соответствующие выражения для отдельных составляющих поля к единой системе координат, следует использовать следующее соотношение, вытекающее из общих теорем сложения для решений уравнения Гельмгольца:

$$Q_m(k_n r^{(d)}) e^{i m(\varphi_d - \varphi_{d\gamma})} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} F_\tau(k_n r^{(\gamma)}) Q_{m+\tau}(k_n l_{d\gamma}) e^{i \tau(\pi - \varphi_\gamma - \varphi_{d\gamma})}. \quad (5.31)$$

Применяя это соотношение для преобразования выражения для $\Phi_R^{(d)}$ и используя полноту и ортогональность функций, зависящих от координат z и φ , стандартным способом заменяем систему функциональных уравнений эквивалентной ей системой алгебраических уравнений. Ее структура, вид коэффициентов во многом аналогичны системе (5.23). Поэтому не приводим ее в явном виде и обратимся к описанию некоторых результатов расчетов. Причем эти результаты рассматриваются совместно с некоторыми результатами экспериментальных исследований.

Как уже отмечалось выше, исследование акустических свойств конечных в плане решеток представляется практически важной задачей, поскольку на основе полученных при этом сведений можно более обоснованно подходить к формулировке практических рекомендаций об использовании звукорассеивающих решеток на основе упругих оболочек. Естественно, что расчетные данные для конечных решеток являются более подходящими при проведении сравнения экспериментальных и теоретических результатов.

Для проведения указанного сравнения экспериментально определялись свойства двух макетов решеток. Первый макет представлял собой одномерную решетку (рис 112, а) из упругих оболочек. Каждая из оболочек образована двумя круглыми титановыми пластинами, закрепленными по контуру на общей кольцевой опоре. Шаг решетки по вертикали равнялся диаметру пластин, а остальные параметры имели следующие значения: $2r_0/\lambda_{10} = 0,24$; $b/a = 1,05$. Отношение общей длины решетки к диаметру оболочки составляло приблизительно 20, т. е. длина решетки составляла около 5 длин волн на характерной частоте. При этом есть основание ожидать, что измеряемые величины должны быть близки к их расчетным оценкам, получаемым в предположении бесконечности решетки по вертикали.

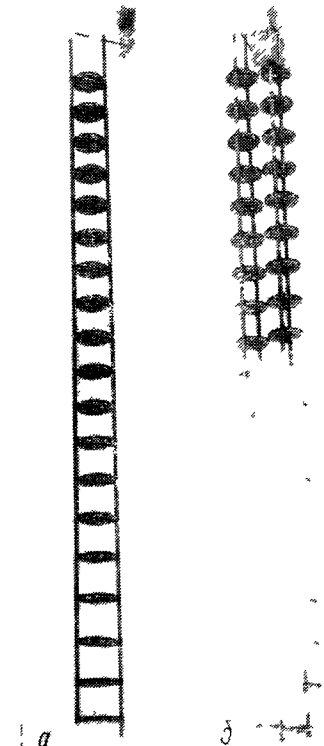


Рис 112

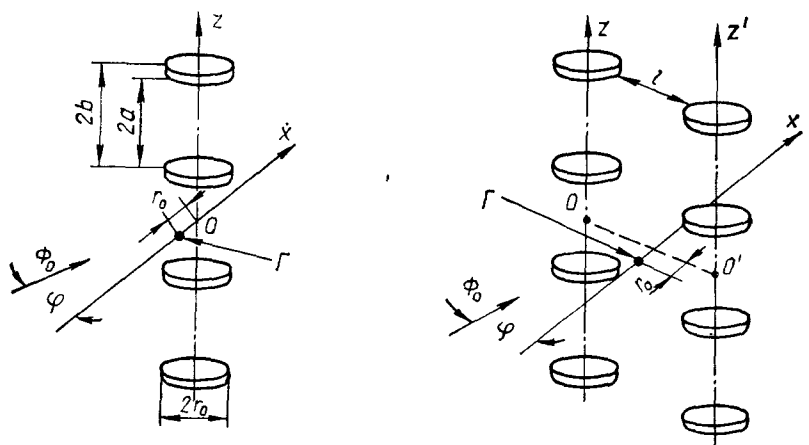


Рис. 113

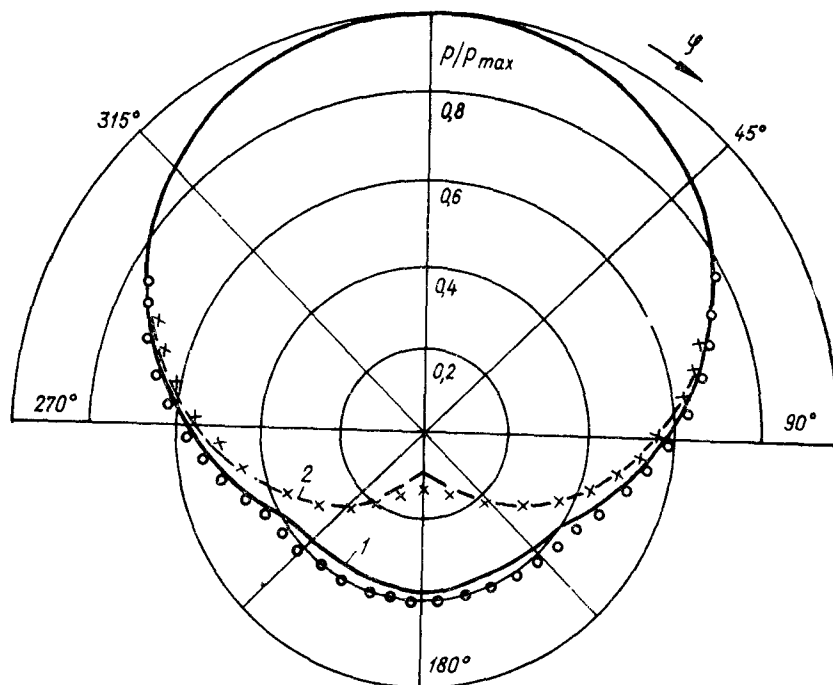


Рис. 114

Второй макет (рис. 112, б) представлял собой систему, состоящую из двух идентичных решеток, параметры которых описаны выше. Расстояние между осями решеток составило 1,1 диаметра пластин.

В качестве измеряемой величины в эксперименте было выбрано звуковое давление в точках Γ , указанных на рис. 113. Звуковое давление измерялось ненаправленным сферическим гидрофоном, диаметр

которого был в 10 раз меньше диаметра упругих пластин в оболочках, составляющих решетку.

На рис. 114 приведены экспериментальные и расчетные зависимости нормированного (к максимальному значению) звукового давления от угла прихода плоской звуковой волны для обоих указанных макетов. Для первого макета расчетные значения давления показаны кривой 1, а для второго — кривой 2. Данные измерений показаны соответственно кружочками и крестиками. Частота падающего звука составляла $0,95f_1$, где f_1 — низшая собственная частота осесимметричных форм колебаний пластин в вакууме.

Сравнивая экспериментальные и расчетные данные, можно констатировать их достаточно хорошее совпадение. Это дает основание считать принятые в математической модели решетки из упругих оболочек предположения о способе закрепления, о бесконечной протяженности решеток в целом допустимыми, а полученные с их помощью количественные данные могут служить основой для прогнозирования акустических свойств реальных решеток.

Как видно из хода кривых рис. 114, в непосредственной близости за решеткой образуется зона тени. При этом с увеличением количества одномерных решеток в системе уровень звукового давления в зоне тени уменьшается. В целом такая тенденция является естественной — наращивание количества одномерных решеток приводит к увеличению волнового размера системы в поперечном направлении и, следовательно, к увеличению экранирующего эффекта. Тем не менее в отличие от бесконечных решеток для конечных решеток всегда характерно увеличение звукового давления в зоне тени при увеличении расстояния от решетки. Это обусловлено эффектами дифракции на краях решеток.

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА МНОГОСЛОЙНЫХ РЕШЕТКАХ И РЕШЕТКАХ ИЗ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

1. Двухслойная решетка из брусьев, упругие стенки которых нормальны плоскости решетки

В предыдущих главах были исследованы акустические свойства одиночных однослойных решеток из полых упругих брусьев. Анализ обширного количества расчетных данных позволил выявить потенциальные возможности такой звукоизолирующей системы как по коэффициенту прохождения звука, так и по ширине полосы частот, где коэффициент прохождения звука мал.

Эффективность звукоизоляции решеток из упругих элементов зависит от многих факторов. Всестороннее исследование роли этих факторов, количественные оценки акустических характеристик решеток позволяют заключить, что во многих практически интересных случаях они могут быть успешно использованы как звукоизолирующие системы. Однако при практическом использовании решеток такого типа может возникнуть необходимость расширить полосу частот, в которой ими обеспечивается эффективная звукоизоляция. Естественным решением такой задачи является применение двух и более решеток, упругие оболочки которых в общем случае имеют различные собственные частоты. Очевидно, что в таких многослойных решетках заметную роль должны играть эффекты взаимодействия между слоями, которые в той или иной мере будут влиять на степень расширения полосы эффективной звукоизоляции и на все акустические свойства решетки.

Учитывая указанные соображения, исследуем акустические свойства многослойных решеток на примере двухслойных решеток. В частности, в настоящем параграфе рассмотрим случай, когда элементами решеток являются брусья, упругие стенки которых ориентированы нормально плоскости решеток (рис. 115).

Пусть на двухслойную решетку падает плоская волна под произвольным углом θ . Учитывая принятую конфигурацию брусьев и решеток в целом, частичные области рационально определить следующим образом: область $x \leq 0$, область $0 \leq x \leq l$, область $l \leq x \leq a$; область $a \leq x \leq r$; область $x \geq r$. Потенциалы скоростей в этих областях и колебательные скорости пластин можно представить, обобщая полученные выше выражения:

$$\Phi_1 = e^{ik(x \cos \theta - y \sin \theta)} + e^{-iky \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i(k_n x - \frac{n\pi}{d} y)}; \quad \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= e^{2ikd \sin \theta} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} B_p \sin \frac{p\pi}{l} x \cos [k_p (y - 2dq + b) - \alpha_p] + \right. \\ &+ \left. \sum_{s=0}^{\infty} C_s \cos (k_s x - \beta_s) \cos \frac{s\pi}{2} (y - 2dq + b) \right\}, \\ \Phi_3 &= e^{-iky \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ D_n e^{-ik_n(x-l)} + E_n e^{ik_n(x-l)} \} e^{i \frac{n\pi}{d} y}; \\ \Phi_4 &= e^{2ikd \sin \theta} \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} F_t \sin \frac{\pi t (x-a)}{r-a} \cos [k_t (y - 2dq + b) - \alpha_t] + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=0}^{\infty} G_m \cos [k_m (x-a) - \alpha_m] \cos \left[\frac{m\pi}{2b} (y - 2dq + b) \right] \right\}, \\ \Phi_5 &= e^{-iky \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n e^{i \left[k_n (x-r) + \frac{n\pi}{d} y \right]}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где

$$\begin{aligned} k_n^2 &= k^2 - \left(\frac{n\pi}{d} - k \sin \theta \right)^2, \quad k_s^2 = k^2 - \left(\frac{s\pi}{2b} \right)^2; \\ k_p^2 &= k^2 - \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2, \quad k_m^2 = k^2 - \left(\frac{m\pi}{2b} \right)^2; \quad k_t^2 = k^2 - \left(\frac{\pi t}{r-a} \right)^2 \end{aligned}$$

Упругие пластины в решетке предполагаются шарнирно оперты по краям и, следовательно, их колебательные скорости представляются по собственным формам колебаний в вакууме в виде

$$v_{lq}^{(\tau)} = e^{2ikd \sin \theta} \left[\sum_{p=1}^{\infty} v_{lqp}^{(\tau)} \sin \frac{p\pi}{l} x \right], \quad (6.2)$$

где l — номер слоя решетки, q — номер щели между брусьями; τ — номер пластины в щели, $\tau = 1$ соответствует верхней пластине в щели, а $\tau = 2$ — нижней

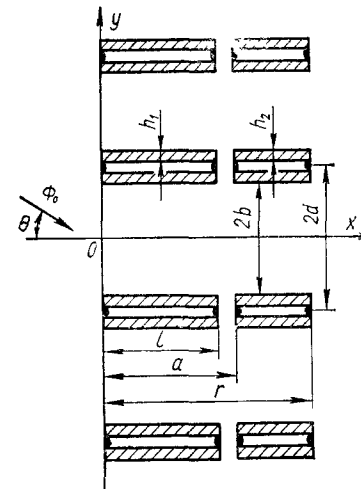


Рис. 115

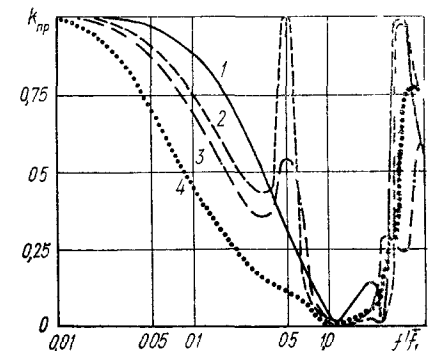


Рис. 116

Неизвестные коэффициенты в выражениях (6.1) и (6.2), а именно $A_n, B_p, C_s, \alpha_p, \beta_s, D_n, E_n, F_t, \alpha_t, G_m, \alpha_m, T_n, v_{lqr}^{(v)}$ определяются из следующей системы функциональных уравнений, которая фактически является обобщением системы (4.35) на случай двухслойной решетки:

$$\begin{aligned}
 &\Phi_1 = \Phi_2; \quad |y| \leq b; \quad x = 0; \\
 &\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}; & |y| \leq b; \\ 0; & b \leq |y| \leq d; \end{cases} \quad x = 0; \\
 &\Phi_2 = \Phi_3; \quad |y| \leq b; \quad x = l; \\
 &\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}; & |y| \leq b; \\ 0; & b \leq |y| \leq d; \end{cases} \quad x = l; \\
 &\Phi_3 = \Phi_4; \quad |y| \leq b; \quad x = a; \\
 &\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x}; & |y| \leq b; \\ 0; & b \leq |y| \leq d; \end{cases} \quad x = a; \\
 &\Phi_4 = \Phi_5; \quad |y| \leq b; \quad x = r; \\
 &\frac{\partial \Phi_5}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x}; & |y| \leq b; \\ 0; & b \leq |y| \leq d; \end{cases} \quad x = r; \\
 &-\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = v_{1q}^{(1)}; \quad y = b; \\
 &-\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = v_{1q}^{(2)}; \quad y = -b; \quad 0 \leq x \leq l; \\
 &-\frac{\partial \Phi_4}{\partial y} = v_{2q}^{(1)}; \quad y = b; \\
 &-\frac{\partial \Phi_4}{\partial y} = v_{2q}^{(2)}; \quad y = -b; \quad a \leq x \leq r; \\
 &\frac{d^4 v_{1q}^{(1)}}{dx^4} - k_1^4 v_{1q}^{(1)} = -\frac{\omega^2 \rho}{D_1} \Phi_2; \quad y = b; \\
 &\frac{d^4 v_{1q}^{(2)}}{dx^4} - k_1^4 v_{1q}^{(2)} = -\frac{\omega^2 \rho}{D_1} \Phi_2; \quad y = -b; \quad 0 \leq x \leq l; \\
 &\frac{d^4 v_{2q}^{(1)}}{dx^4} - k_2^4 v_{2q}^{(1)} = -\frac{\omega^2 \rho}{D_2} \Phi_4; \quad y = b; \\
 &\frac{d^4 v_{2q}^{(2)}}{dx^4} - k_2^4 v_{2q}^{(2)} = -\frac{\omega^2 \rho}{D_2} \Phi_4; \quad y = -b; \quad a \leq x \leq r;
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Большое число частных областей и большое число неизвестных величин в представлениях поля в них делают относительно громоздкой бесконечную систему алгебраических уравнений, вытекающую из соотношений (6.3). Однако как по структуре, так и по свойствам коэффициентов эта система вполне подобна рассмотренным выше для случаев однослойных решеток и в явном виде выписывать ее нецелесообразно. На основе численных оценок для нескольких первых неизвестных, полученных с использованием метода редукции, перейдем к количественному анализу акустических свойств двухслойной решетки.

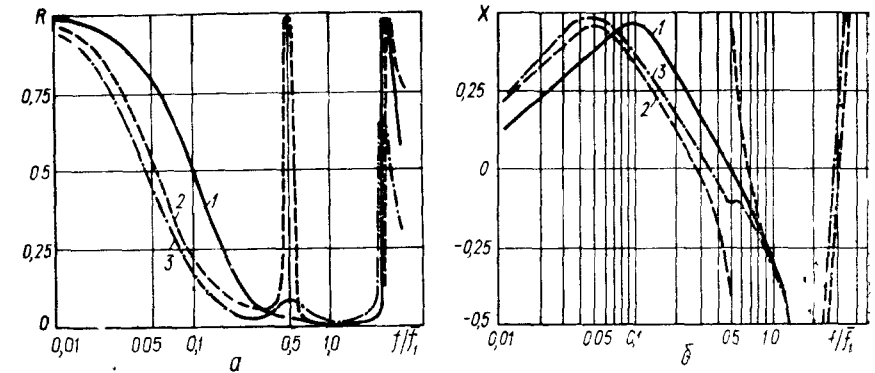


Рис 117

Анализ будем проводить на основе расчетных данных, полученных для случая $\rho_1 c_1 / \rho c = 15$; $a = 1,01l$; $b = 0,5l$; $d = 0,57l$; $l = r - a$; $\theta = 0$. Особенности прохождения звуковой волны через двухслойную решетку могут быть охарактеризованы несколькими типичными зависимостями коэффициента прохождения звука от частоты, которые изображены на рис. 116. Кривая 2 на этом рисунке отвечает случаю, когда оба слоя решетки идентичны, $h_1 = h_2$; $l = r - a = 0,1cf$ ($\bar{f}_1 = \frac{f_1^{(1)} + f_1^{(2)}}{2}$); $f_1^{(1)}$; $f_1^{(2)}$ — первая собственная частота пластин в вакууме в первом и втором слоях соответственно). Для сравнения на этом же рисунке приведена частотная зависимость $k_{пр}$ (кривая 1) для решетки, состоящей из одного слоя, рассматриваемой в четвертой главе.

Случай двух идентичных слоев в решетке интересен прежде всего тем, что здесь наиболее сильно должно проявляться взаимодействие между слоями. Ситуация в определенной мере подобна той, которая возникает в колебательной системе с двумя степенями свободы при наличии сильной связи между парциальными системами [116]. Поскольку в данном случае парциальные системы решетки идентичны, то для них любая связь является сильной. В связи с этим сравнение кривых 1 и 2 дает наглядную картину качественного и количественного влияния взаимодействия между слоями на звукоизолирующие свойства двухслойной решетки. Как видно, в области относительно низких частот наличие второго слоя приводит к уменьшению $k_{пр}$. Однако для частот

ты $f = 0,5\bar{f}_1$ как следствие сильного взаимодействия между слоями наблюдается резкий всплеск звукопрозрачности.

Естественно, что при разнесении собственных частот пластин в слоях решетки связь между слоями должна ослабляться и пик прозрачности в области частот $f = 0,5\bar{f}_1$ должен снижаться. Такая тенденция четко прослеживается в расчетных данных. Кривая 3 на рис. 116 относится к случаю, когда собственная частота пластин первого слоя составляет $0,833\bar{f}_1$, а второго — $1,2\bar{f}_1$. Более важной особенностью разноточастотной решетки является то, что вместе со снижением пика звукопрозрачности наблюдается и уменьшение $k_{пр}$ на низких частотах. Именно это обстоятельство позволяет при соответствующем разнесении собственных частот пластин, принадлежащих различным слоям решетки, добиться существенного увеличения полосы эффективной звукоизоляции. Количественную оценку степени расширения полосы звукоизоляции дает кривая 4, которая относится к тому случаю, когда собственная частота пластин первого слоя составляет $0,625\bar{f}_1$, а второго — $1,6\bar{f}_1$.

Более глубокому пониманию физических сторон процесса прохождения звука через двухслойную решетку способствует анализ частотной зависимости ее входного импеданса Z . Его вещественная R и мнимая X части для трех отображенных на рис. 116 случаев (кривые 1—3) даны соответственно на рис. 117, а и 117, б. Общий характер частотной зависимости величины R по существу повторяет частотную зависимость величины $k_{пр}$. Частотная же зависимость реактивной составляющей входного импеданса в значительной мере дополняет и объясняет ход существующих кривых на рис. 116.

Кривая 1 характеризует изменение X для однослойной решетки. Она (в рассматриваемом диапазоне частот) имеет единственную точку с $X = 0$, которая отвечает резонансу системы пластины — жидкость. Случай решетки из двух идентичных слоев (кривая 2) характеризуется значительно более сложной зависимостью от частоты. Здесь наблюдаются три точки, в которых $X = 0$, а именно $f_{p1} \approx 0,3\bar{f}_1$; $f_{a1} \approx 0,5\bar{f}_1$ и $f_{p2} \approx 0,63\bar{f}_1$. Если теперь обратиться к кривой 2 на рис. 116, то легко установить, что частотам f_{p1} и f_{p2} соответствуют относительные минимумы величины $k_{пр}$, а частоте f_{a1} — максимум этой величины. Однако при этом важно отметить, что разнесение собственных частот в слоях решетки существенно изменяет частотную зависимость мнимой части ее входного импеданса. Как следует из анализа кривой 3 на рис. 117, даже при сравнительно небольшой расстройке указанных частот остается один резонанс системы пластины — жидкость на частоте $f_{p1} \approx 0,35\bar{f}_1$.

Природу возникновения указанных трех резонансов наиболее наглядно можно объяснить в рамках метода электромеханических аналогий, который уже был использован при анализе однослойной решетки. На рис. 118 изображена эквивалентная схема одного периода двухслойной решетки, которая построена путем рассуждений, аналогичных приведенным в главе четвертой. Здесь m_0 и m_0^* — массы среды, заключенные между пластинами первого и второго слоя соответственно.

но: m_1 — масса среды в зазоре между слоями, C , C^* , m , m^* — приведенные эквивалентные гибкости и массы пластин первого и второго слоя соответственно, ξ — входной импеданс полубесконечного пространства за решеткой. В соответствии с теоремой Фостера [145] входной импеданс такой схемы будет характеризоваться максимум тремя резонансными частотами. Две крайние частоты обусловлены наличием двух последовательных резонансных цепей (mC и m^*C^*), а средняя частота — параллельным резонансным контуром, образованным последовательными цепями и массами m_1 и m_0 . Совершенно ясно, что при резонансе последовательных цепей величина ξ в значительной мере шунтируется

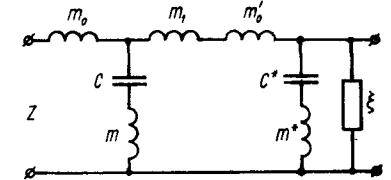


Рис. 118

ими и коэффициент передачи по напряжению (аналогом которого является величина $k_{пр}$) такого четырехполюсника мал. Иначе обстоит дело, когда частота возбуждения четырехполюсника совпадает с частотой параллельного резонанса (антирезонанса). В этом случае величина ξ практически не шунтируется и коэффициент передачи четырехполюсника становится близким к единице.

Таким образом, взаимодействие между слоями приводит к тому, что вместо одной частоты резонанса системы пластины — жидкость,

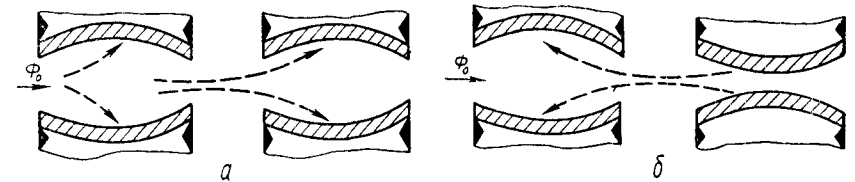


Рис. 119

которая характерна для однослойной решетки, появляются две частоты резонанса и между ними одна частота антирезонанса. Если проследить за формой колебательных движений пластин из разных слоев решетки, то оказывается, что в области этих трех частот распределение колебательной скорости по поверхности пластин соответствует первой собственной форме их колебаний, причем на частоте антирезонанса пластины колеблются строго противофазно. С учетом последнего обстоятельства пути тока жидкости на одном периоде решетки на частоте первого резонанса и антирезонанса такие, как изображено на рис. 119, а и 119, б соответственно. Сравнивая данные рис. 119 и 91, можно убедиться, что они в определенной мере сходны. Тем не менее причины их возникновения (по крайней мере, на антирезонансе) разные. Для однослойной решетки эти пути тока жидкости имеют место тогда, когда доминирует вторая собственная форма колебаний пластин. В случае двухслойной решетки аналогичные пути тока жидкости возникают на первой собственной форме колебаний пластин вследствие взаимодействия пластин из разных слоев решетки.

Мы подробно рассмотрели физическую ситуацию, которая имеет место, когда доминирует первая собственная форма колебаний пластин.

Как показывают расчеты, похожие ситуации возникают и на более высоких формах колебаний пластин. Однако их анализ представляет меньший интерес, поскольку с точки зрения практической звукоизоляции большее значение имеет лишь область частот, где доминирует первая собственная форма пластин.

В заключение укажем на следующее обстоятельство. Как мы видели, улучшение диапазоновых свойств двухслойной решетки достигалось путем использования в каждом слое оболочек с различной резонансной частотой. Это реализовалось за счет того, что упругие стенки оболочек в каждом слое отличались либо геометрическими, либо физическими параметрами. Однако можно в обоих случаях использовать идентичные оболочки, но шаг каждого слоя делать разным. Тогда, как показывают расчетные данные в четвертой главе, и резонансные частоты пластин с учетом влияния окружающей среды в каждом слое будут разными, а это, в свою очередь, обеспечит улучшение диапазоновых свойств двухслойной решетки по сравнению с однослойной.

2. Двухслойная решетка из брусьев, упругие стенки которых параллельны плоскости решетки

Усложним задачу, рассмотренную в параграфе 5 главы четвертой, путем введения второй решетки из полых брусьев (рис. 120). В результате получается двухслойная решетка в общем случае с отличными друг от друга слоями. Однако не будем излишне усложнять задачу и положим, что шаг решетки $2b$ и размер упругих стенок брусьев $2a$ в обеих решетках одинаковы. Искомые величинами, как и выше, будут $k_{пр}$ и $X = \text{Im } Z$ (здесь Z — входной импеданс решетки), а также модуль и фаза колебательной скорости упругих стенок (пластин).

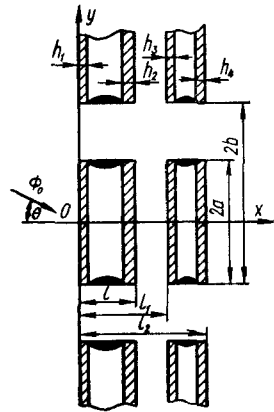


Рис. 120

Поскольку рассматриваемая задача, по сути, является обобщением уже исследованной задачи, не будем останавливаться на деталях построения ее решения. Укажем лишь, что всю область существования звукового поля рационально разбить на пять частичных областей: область $x \leq 0$; область $0 \leq x \leq l$; область $l \leq x \leq l_1$; область $l_1 \leq x \leq l_2$ и область $x \geq l_2$. Потенциалы скоростей в выделенных

частичных областях и колебательные скорости пластин представим в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} + e^{iky \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ik_n x} e^{i \frac{\pi n}{b} y}; \\ \Phi_2 &= e^{ikb \tau \sin \theta} \sum_{p=0}^{\infty} [B_p \cos k_p x + C_p \sin k_p x] \cos \frac{\pi p}{2(b-a)} \times \\ &\times \{[y - 2b(\xi - 1)] \delta - a\}; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau &= (2\xi - 1) \delta; \quad \delta = \begin{cases} 1; & y > 0; \\ -1; & y < 0; \end{cases} \\ \Phi_3 &= e^{iky \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [D_n e^{ik_n(x-l)} + E_n e^{-ik_n(x-l)}] e^{i \frac{\pi n}{b} y}; \\ \Phi_4 &= e^{ikb \tau \sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} [F_m \cos k_m(x-l_1) + G_m \sin k_m(x-l_1)] \times \\ &\times \cos \frac{\pi m}{2(b-a)} \{[y - 2b(\xi - 1)] \delta - a\}; \\ \Phi_5 &= e^{iky \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n e^{[k_n(x-l_2)]} e^{i \frac{\pi n}{b} y}; \\ v_{(\eta, q, s)}(y) &= e^{i2kb \eta \sin \theta} \left\{ v_0^{(\eta, q)} + \sum_{t=1}^{\infty} v_t^{(\eta, q, s)} \sin \frac{\pi t}{2a} (y - 2\eta b + a) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

где $\xi = 1, 2, 3, \dots$ — номер щели между брусьями; $\eta = 0, \pm 1; \pm 2, \dots$ — номер бруса в слое; $q = 1; 2$ — номер слоя решетки; $s = 1; 2$ — номер пластины в брус; $v_0^{(\eta, q)}$ — колебательная скорость бруса как единого целого вдоль оси Ox ;

$$k_n = \left\{ k^2 - \left(k \sin \theta + \frac{\pi n}{b} \right)^2 \right\}^{1/2}; \quad k_m = \left\{ k^2 - \left(\frac{\pi m}{2(b-a)} \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Используя очевидные условия сопряжения звуковых полей на границах частичных областей, условия сопряжения колебательных скоростей на поверхностях пластин, дифференциальные уравнения колебаний пластин, а также свойства полноты и ортогональности волновых функций, зависящих от координаты y , стандартным способом можно получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода, являющуюся исходной для определения неизвестных в выражениях (6.4). Опуская подробности получения этой системы, обратимся к результатам расчета, полученным на ее основе. Расчеты выполнены для следующих параметров:

$$\begin{aligned} 2a/\lambda_1 &= 0,1; \quad b/a = 1,17; \quad h_1 = h_2 = h_3 = h_4; \quad l/a = 0,36; \quad l_1/a = 0,76; \\ l_2/a &= 1,02; \quad \rho_1 = 4700 \text{ кг/м}^3; \quad E_1 = 1,1610^{11} \text{ Па}; \quad \sigma_1 = 0,3; \quad \rho c = \\ &= 1,5 \cdot 10^6 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}; \quad \theta = 0. \end{aligned}$$

Данные о частотной зависимости коэффициента прохождения (сплошная кривая) и мнимой части входного импеданса (штриховая кривая) приведены на рис. 121 ($\mu = f/\bar{f}_1$, $X = \text{Im } Z$). Поведение вещественной части импеданса практически повторяет поведение величины $k_{пр}$.

Как видно, характер частотных зависимостей $k_{пр}$ и X качественно сходен с аналогичными зависимостями, приведенными в параграфе 5 главы четвертой. Однако причины появления максимумов и минимумов звукопрозрачности решетки, характер движения в системе пластины — среда здесь намного сложнее. Это совершенно естественно. Даже по сравнению со случаем, рассмотренным в предыдущем параграфе,

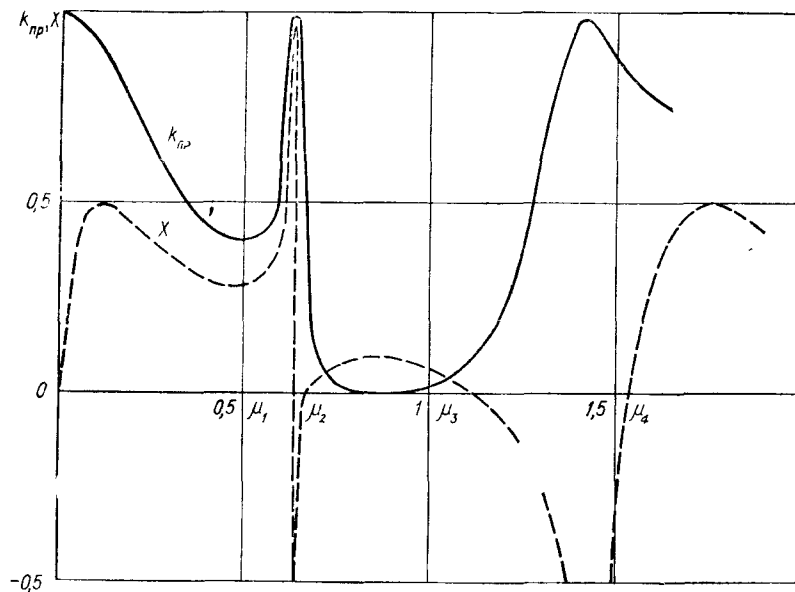


Рис. 121

структура механической колебательной системы сильно усложнилась. Здесь имеем дело уже с системой с четырьмя степенями свободы. Взаимодействие между ними осуществляется за счет движения жидкости, окружающей элементы решетки. Поскольку рассматриваются одинаковые пластины, связь между ними всегда является сильной.

По аналогии с тем, как было сделано в предыдущем параграфе при введении безразмерного частотного параметра, целесообразно в качестве характерной частоты принять $\bar{f}_1 = \frac{1}{4} (f_1^{(1)} + f_1^{(2)} + f_1^{(3)} + f_1^{(4)})$. При этом естественно рассматривать такие ситуации, когда отдельные слагаемые в этом выражении — собственные частоты пластин в вакууме не сильно отличаются друг от друга.

На рис. 121 для рассматриваемой расчетной ситуации указаны четыре нуля μ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) в значении функции $X(\mu)$. Анализ расчетных данных показывает, что вплоть до μ_4 колебательная скорость пластин практически полностью определяется первыми двумя членами ряда для u в выражениях (6.4), т. е. движением брусьев как единого целого вдоль оси Ox , и первой собственной формой колебаний шарнирно закрепленной пластины. К сожалению, из-за сложности характера движения пластин не представляется возможным простейшим и наглядным образом иллюстрировать их движение в области тех значений μ , где значение $k_{пр}$ минимальное (или максимальное), как было сделано в параграфе 5 главы четвертой для более простых решеток. Тем не менее данные, приведенные на рис. 122 и 123, позволяют получить определенное представление о физических процессах, происходящих в решетке при возбуждении ее звуковой волной и установить ряд

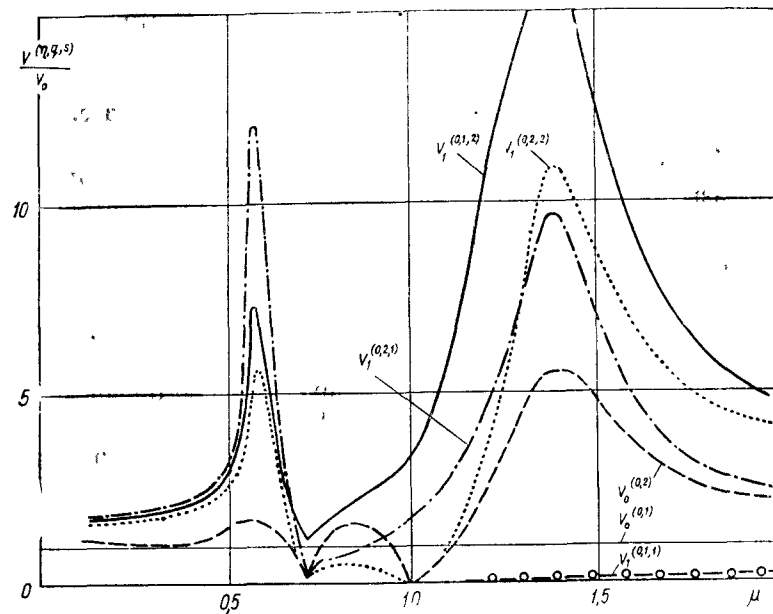


Рис. 122

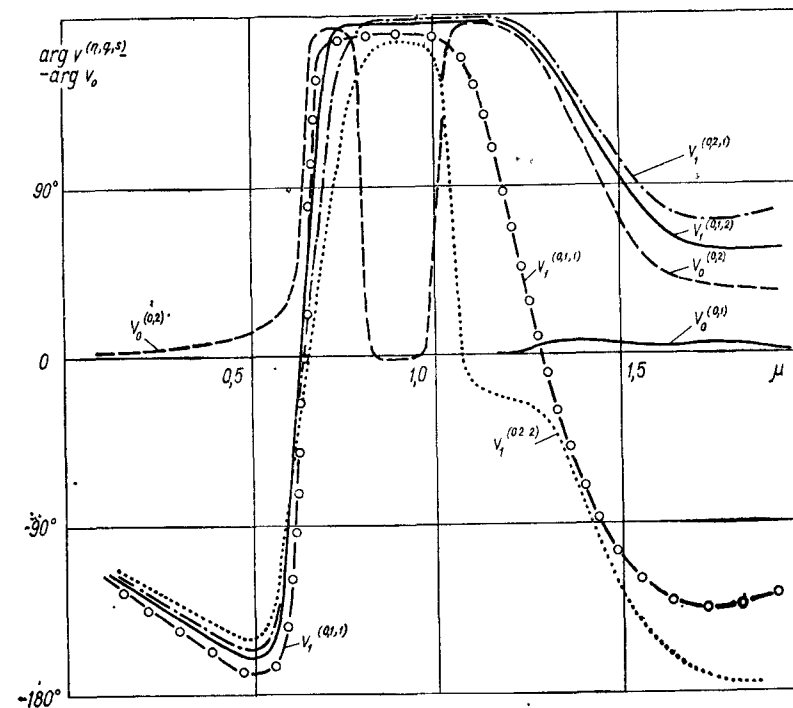


Рис. 123

интересных свойств. Прежде всего следует отметить, что амплитуда и фаза колебательной скорости брусьев в первом слое решетки $v_0^{(0,1)}$ во всем рассматриваемом диапазоне частот равны амплитуде и фазе колебательной скорости в падающей звуковой волне v_0 . Колебательная скорость брусьев второго слоя $v_0^{(0,2)}$ совпадает с v_0 только до первого резонанса системы пластина — среда. В области $\mu \geq \mu_1$ наблюдаются резкие скачки фазы (на величину π) и всплески амплитуды колебательной скорости $v_0^{(0,2)}$. При этом важно отметить, что в области резонансных частот системы пластины — среда μ_2 и μ_3 $v_0^{(0,2)} \approx 0$, а в области частот вблизи μ_1 и μ_4 $v_0^{(0,2)} > v_0$.

Теперь остановимся на поведении колебательных скоростей, связанных с изгибными движениями пластин. Здесь обращает на себя внимание тот факт, что первая пластина в брусьях первого слоя практически не совершает изгибных колебаний ($v_1^{(0,1,1)} \ll v_0$) во всем рассматриваемом диапазоне частот. Между тем вторая пластина в брусеве второго слоя $v_1^{(0,2,2)}$ практически не совершает изгибных колебаний только в области значений от $\mu = \mu_2$ до $\mu = \mu_3$. Учитывая, что при этих значениях величина $v_0^{(0,2)}$ также незначительна, становится понятной причина низкой прозрачности решетки в этой области частот. Смещение как жесткого целого элемента первой решетки практически полностью компенсируется изгибными колебаниями тыльной пластины в первой решетке. В области вблизи $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_4$ характерен обратный процесс. Здесь у всех пластин (за исключением первой) наблюдается резкое увеличение изгибных колебаний и как следствие решетка становится звукопрозрачной.

Таким образом, у рассматриваемой двухслойной решетки первой собственной форме колебаний пластин соответствуют уже два максимума и два минимума величины $k_{пр}$ и четыре резонанса системы пластины — окружающая среда. Дальнейший численный анализ показывает, что аналогичная ситуация имеет место и для более высоких форм колебаний пластин. Необходимо также отметить некоторую важную аналогию в частотной зависимости коэффициента прохождения, представленной на рис. 116 и 121. В обоих случаях вследствие сильного взаимодействия между элементами решетки возникает резкий пик звукопрозрачности в области частот, которая лежит значительно ниже собственной частоты пластин. Это обстоятельство следует постоянно иметь в виду при попытке улучшить звукоизолирующие качества решеток за счет использования дополнительных слоев.

Подводя итоги выполненному анализу, а также обобщая результаты исследований, приведенных в предыдущих главах, можно утверждать, что для правильной физической интерпретации частотных зависимостей звукопрозрачности решеток, элементами которых являются упругие оболочки, недостаточно ограничиваться только изучением резонансных свойств решетки. Важно также подробно исследовать кинематику стенок оболочек (и самих оболочек в целом) относительно друг друга. При этом удастся четко связать особенности собственных форм колебаний в сложных механических системах с их акустическими свойствами.

Полученный объем количественных и качественных данных позволяет убедиться, что характер поведения звукопрозрачности решеток от частоты существенно зависит от количества пластин, приходящихся на один период решетки, и их ориентации относительно плоскости решетки. Увеличение количества идентичных пластин приводит к росту количества резонансов системы пластины — окружающая среда, соответствующих одной и той же собственной форме колебаний пластин, и усложнению движения пластин относительно друг друга. А это в конечном итоге и обуславливает рост числа максимумов и минимумов величины $k_{пр}$. Последнее обстоятельство может приводить к ухудшению диапазонных решеток (в первую очередь многослойных) как звукоизолирующих систем. Если же пластины не идентичны, то эффекты взаимодействия ослабляются и многослойная решетка, как видно из данных предыдущего параграфа, становится способной обеспечивать хорошую звукоизоляцию в более широком диапазоне частот, чем однослойная решетка.

В заключение отметим, что обобщение результатов, полученных при решении конкретных задач, позволяет достичь более высокого уровня понимания физических процессов, имеющих место при взаимодействии звуковых волн с решетками из упругих оболочек, и служить основой для прогнозирования акустических свойств решеток с количеством более двух.

3. Рассеяние звука на решетке, элементы которой дополнительно деформируются заданной внешней силой

Выше мы исследовали звукоизолирующие свойства решеток, состоящих из упругих оболочек, в зависимости от их геометрических, волновых и механических параметров. Естественно, что конкретный выбор этих параметров однозначно определял степень звукоизоляции решетки.

Анализ большого числа конкретных ситуаций позволил получить довольно полное и содержательное представление о роли отдельных факторов при формировании акустических свойств решеток из упругих оболочек. Несмотря на большое различие между рассмотренными расчетными случаями в отдельных деталях, в целом описанные выше результаты позволяют установить однозначную связь между акустическими свойствами решетки и объемной податливостью ее элемента на резонансной частоте. Если частота падающей звуковой волны близка к некоторой собственной частоте упругого элемента и соответствующая этой частоте собственная форма колебаний такова, что в процессе колебаний происходит изменение объема элемента, то решетка является эффективным отражателем звука на этой частоте. Если же соответствующая собственная форма не связана с изменением объема упругого элемента решетки, то решетка практически беспрепятственно пропускает звук.

Конечно, оба сформулированных вывода имеют место в рамках принятых выше ограничений относительно массовых, жесткостных и геометрических характеристик решеток. Однако их следует вспомнить, прежде чем перейти к дальнейшему изложению некоторых новых постановок.

Теперь рассмотрим возможности управления объемной податливостью оболочек при неизменности их геометрических и физических параметров.

Одним из возможных путей решения такой проблемы является применение дополнительных (сторонних) сил (или моментов), прикладываемых к упругим стенкам оболочек. Поясним этот путь на конкретном примере, для чего вернемся к решетке, например той, которая изображена на рис. 87. Если на решетку падает звуковая волна с потенциалом скорости Φ_0 , то под ее воздействием на внешних поверхностях пластин создается некоторое распределение давления, определяемое значениями функции Φ_q , в результате чего пластины будут прогибаться пропорционально своим податливостям. Как указывалось выше, чем больше податливость пластин, тем при прочих равных условиях меньше звукопрозрачность решетки.

Приложим к пластинам некоторое дополнительное давление Φ_q^* той же частоты, что и у падающей звуковой волны. Вполне очевидно, что при одинаковых фазах величин Φ_q и Φ_q^* прогиб пластин будет больше, что эквивалентно увеличению податливости пластин. И наоборот, если у величин Φ_q и Φ_q^* фазы противоположны, то прогиб пластин уменьшится, что эквивалентно снижению их податливости. Таким образом, очевидно, что, изменяя модуль и фазу величины Φ_q^* , можно (по крайней мере в принципе) влиять на звукоизолирующие свойства решетки.

Для того чтобы иметь возможность решить поставленную задачу и в дальнейшем получить количественные данные о характере влияния величины Φ_q^* на акустические свойства решетки, необходимо несколько иначе сформулировать задачу, рассмотренную в главе четвертой. Если считать стороннее воздействие заданным, то оказывается достаточным лишь изменить слагаемое, выражающее нагрузку в дифференциальном уравнении движения пластины (4.35). Если придать вводимому дополнительному воздействию вид некоторого акустического воздействия, то правая часть в соответствующем уравнении (4.35) приобретет вид

$$-\frac{\omega^2 \rho}{D} [\Phi_q + \Phi_q^*]. \quad (6.5)$$

Остановимся на вопросе выбора величины Φ_q^* . Очевидно, что этот выбор должен зависеть от желаемой степени изменения звукоизолирующих свойств решетки. Однако, не располагая априорными сведениями о количественной связи между Φ_q^* и $k_{пр}$, поступим следующим образом. Прежде всего, положим $\Phi_q^* = 0$ и определим распределение величины Φ_q , предварительно разрешив систему (4.36) относительно неизвестных комплексных коэффициентов, входящих в ряды, через которые представляются звуковые поля и колебательные скорости пластин. Далее, вычислив среднее значение потенциала скорости на поверх-

ности пластин по формуле $\Phi_{ср} = \frac{1}{l} \int_0^l \Phi dx$, примем $\Phi_q^* = Ge^{i\gamma} \Phi_{ср}$. Здесь G — действительный коэффициент; γ — фазовый угол. Такой выбор

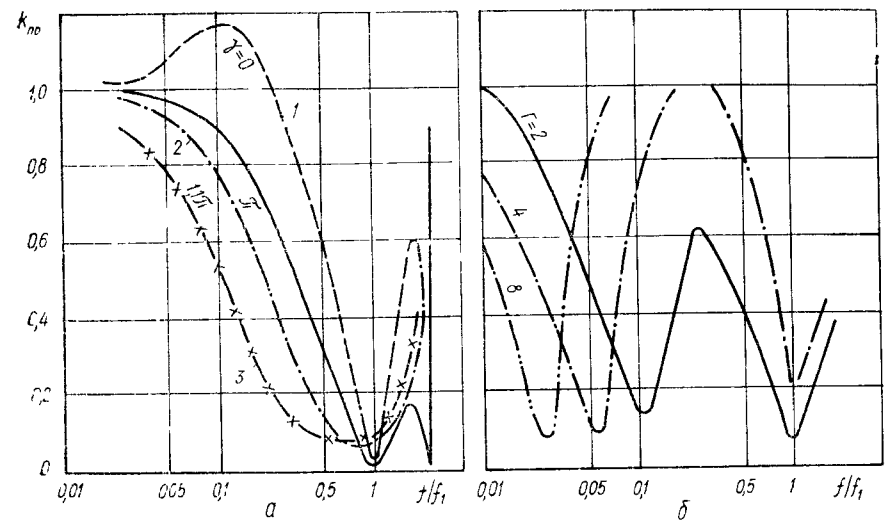


Рис. 124

значений слагаемых, определяющих дополнительное силовое воздействие на упругие пластины в стенках решетки, позволяет достаточно хорошо определить их уровень. По сути, речь идет о таком же по порядку давлений и по энергетике воздействии, как и воздействие падающей звуковой волны. Подставляя таким образом найденное значение Φ_q^* в систему и снова решая ее [с учетом теперь уже правой части уравнения (6.5)], можно оценить коэффициент прохождения звука через решетку.

Обратимся к количественным результатам, полученным с помощью изложенной расчетной схемы и представленным на рис. 124 для $l/\lambda_1 = 0,1$; $2b/l = 1$; $\rho_1 c_1 / \rho c = 15$; $d/b = 1,1$; $\theta = 0$. Как следует из рис. 124, а, варьируя лишь фазовый угол γ (при $\Gamma = \text{const}$), можно в сравнительно широких пределах и повысить и понизить степень звукоизоляции решетки [30] (здесь 1; 2 и 3 — значения γ , соответственно равные 0; π и $1,1\pi$. Сплошная кривая соответствует случаю $\Gamma = 0$).

Амплитуда дополнительного потенциала скорости также существенно влияет на звукоизоляцию решетки (рис. 124, б). При этом важно отметить, что с уменьшением f/f_1 для обеспечения малых значений $k_{пр}$ необходимо увеличить амплитуду дополнительного потенциала скорости. Такая особенность становится понятной, если учесть, что с понижением частоты уменьшается динамическая податливость пластин и для того, чтобы обеспечить малое значение $k_{пр}$, необходимо повышать значение Γ .

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Из рис. 124, а следует, что при некоторых значениях f/f_1 $k_{пр} > 1$. Этот парадоксальный на первый взгляд факт не противоречит закону сохранения энергии, который выражается известным равенством $k_{пр}^2 + k_{отр}^2 = 1$, так как был введен дополнительный источник звуковой энергии.

Мы убедились, что с помощью сторонних нагрузок можно управ-

лять прозрачностью решетки в достаточно широких пределах. Вместе с этим стало совершенно ясно, что для обеспечения конкретной (наперед заданной) величины $k_{пр}$ (например, $k_{пр} = 0$) в широком интервале значений f/f_1 необходимо, чтобы величины Γ и γ (а следовательно, и Φ_q^*) имели определенные частотные зависимости. Определить такие зависимости можно путем проведения численного эксперимента. Задавая некоторый достаточно большой массив значений Γ и γ , нужно (по указанной выше расчетной схеме) произвести оценку $k_{пр}$. После этого, отбирая те значения Γ и γ , при которых обеспечивается заданная величина $k_{пр}$, можно построить искомую частотную зависимость Φ_q^* .

Указанный алгоритм поиска частотной зависимости Φ_q^* , обеспечивающий заданную частотную зависимость величины $k_{пр}$, прост, но трудоемок. Поэтому укажем на более простой способ, который позволяет произвести приближенную оценку Φ_q^* с достаточной для практики точностью в области частот $f/f_1 \leq 1$ при $kl \ll 1$, $b \rightarrow a$, $\theta = 0$. Удерживая в рядах, определяющих потенциалы скоростей в частичных областях и колебательные скорости пластин, только первые члены и решая систему (4.36) с учетом выражения (6.5), можно получить простую аналитическую связь между $k_{пр}$ и Φ_q^* . Не производя выкладок (они достаточно просты), сразу запишем результат [ср. с системой (4.37)]:

$$k_{пр} \approx \frac{1}{\xi kl + i} \left[\xi kl - \frac{kl}{2} \Phi_q^* + i \{ (kl)^2 (\xi - 1/2) + \Phi_q^* \} \right], \quad (6.6)$$

где Φ_q^* — дополнительный потенциал скорости на пластинах, распределенный равномерно по их поверхности; ξ имеет то же значение, что и в формуле (4.37).

С помощью выражения (6.6) нетрудно определить величину Φ_q^* , необходимую для обеспечения заданного значения $k_{пр}$. Для этого достаточно положить $k_{пр} = \bar{k}_{пр}$, где $\bar{k}_{пр}$ — конкретное значение коэффициента прохождения звука. При этом можно определить величину (полного) слагаемого, отнесенного к некоторому заданному значению потенциала в падающей звуковой волне.

Рассмотрим два случая, которые могут представлять практический интерес. Первый случай $\bar{k}_{пр} = 0$, т. е. решетка полностью отражает звук. Используя уравнение (6.6), имеем

$$|\Phi_q^*| \approx kl \left\{ \left[\frac{kl}{2} (\xi - 1) \right]^2 + \xi^2 \right\}^{1/2}; \quad (6.7)$$

$$\arg \Phi_q^* \approx \arctg \frac{2\xi}{-kl(\xi - 1)}.$$

Второй случай $\bar{k}_{пр} = 1$, т. е. решетка полностью прозрачна. Тогда

$$|\Phi_q^*| \approx [(kl)^2 (\xi - 1/2) - 1] \left[1 + \left(\frac{kl}{2} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad (6.8)$$

$$\arg \Phi_q^* \approx \arctg \frac{kl [(\xi - 1/2)(kl)^2 - 1]}{-2[(kl)^2 (\xi - 1/2) - 1]}.$$

На рис. 125 представлены частотные зависимости модуля (кривые 1, 2) и фазы (кривые 3, 4) величины Φ_q^* , рассчитанные по формулам (6.7) и (6.8). Из этих данных видно, что для выполнения условия $\Phi_q^* k_{пр} = 0$ (сплошные кривые) необходимо, чтобы модуль величины имел обратно пропорциональную зависимость от частоты. В случае $k_{пр} = 1$ (штрихпунктирные кривые) модуль величины Φ_q^* слабо зависит от частоты и близок к модулю потенциала скорости падающей волны.

Подводя итоги проведенному анализу, можно сделать вывод о принципиальной возможности создания решетки из упругих оболочек с управляемой прозрачностью. Причем важно то, что при работе в области частот, соответствующих первой собственной частоте пластин ($f \approx f_1$), можно добиться значительного расширения полосы эффективной звукоизоляции при относительно небольших по модулю дополнительных силовых воздействиях. Однако фазовая характеристика такого воздействия (кривая 3 на рис. 125) имеет довольно сильную изменчивость с частотой. Ухудшить отражательную способность решетки оказывается гораздо проще. Прикладывая противофазное давление, равное давлению в падающей волне, можно сделать решетку прозрачной во всем рассматриваемом диапазоне частот.

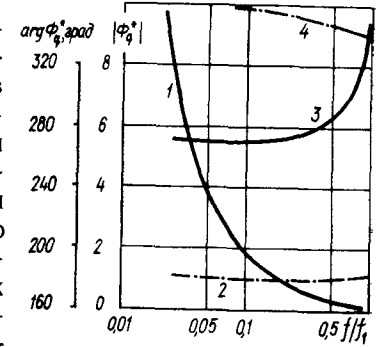


Рис. 125

4. Решетка из брусьев с пьезоактивными стенками, нормальными плоскости решетки

В предыдущем параграфе при рассмотрении несколько абстрактной задачи была подтверждена принципиальная возможность управления звукопрозрачностью решеток из упругих оболочек. Остановимся на вопросе реализации такой возможности. Одним из способов, который может представить практический интерес, является выполнение упругих стенок оболочек полностью (или частично) из пьезоактивного материала. Если такие стенки соответствующим образом нагружать электрическим напряжением с частотой падающей звуковой волны, то стенки начнут прогибаться, что будет эквивалентно воздействию на них некоторого дополнительного внешнего давления [27].

Рассмотрим в качестве примера решетку, изображенную на рис. 87, полагая, что каждая упругая пластина выполнена из трех слоев, а именно: средний слой из пассивного изотропного материала, а внешние слои из пьезоактивного материала, например, из пьезокерамики (рис. 126). Обратим внимание на то, что «плюс» и «минус» это направления предварительной поляризации пьезокерамических слоев. При такой поляризации и указанном способе подвода электрической энергии пластина будет работать на изгиб.

Для описания движения пластин введем локальную систему координат zO_1x . По-прежнему будем полагать, что трехслойная пластина, образующая податливую стенку элемента решетки на рис. 87, является достаточно тонкой для того, чтобы при описании ее движения можно было использовать классическую теорию изгиба пластин [151]. В соответствии с конструкцией решетки в направлении оси O_1y реализуется состояние плоской деформации, т. е. $\epsilon_y = 0$.

С использованием предположений теории тонких пластин уравнения состояния для пластины в данном случае записываются в виде [9, 78, 87, 98, 134]:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= S_{11}^L \sigma_x + S_{12}^L \sigma_y + d_{31} E_z; \\ 0 &= S_{12}^E \sigma_x + S_{11}^E \sigma_y + d_{31} E_z, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где ϵ_x — компоненты тензора деформаций; S_{ij}^L — компоненты тензора упругих податливостей, определенные при постоянном значении на-

пряженности электрического поля, d_{31} — пьезоэлектрический модуль; σ_x , σ_y — компоненты тензора напряжений; E_z — напряженность электрического поля.

Естественно, коэффициенты в равенствах (6.9) являются кусочно-однородной функцией толщинной координаты z . В частности, для среднего пассивного слоя $d_{31} = 0$.

Величину напряженности электрического поля в пьезокерамике можно считать заданной в соответствии с условиями электрического нагружения и расположением электродов:

$$E_z = \begin{cases} E_0 e^{-i\omega t}, & h_1 \leq z \leq h_1 + h_2; \\ 0 & |z| \leq h_1, \\ -F_0 e^{-i\omega t}, & -h_1 - h_2 \leq z \leq -h_1, \end{cases} \quad (6.10)$$

где E_0 — комплексная амплитуда напряженности электрического поля.

Дополнительная напряженность, возникающая из-за связанности между электрическими и механическими величинами в пьезокерамике, практически для всех частот в рассматриваемом диапазоне оказывается незначительной.

Из второго уравнения в системе (6.9) находим значения напряжений σ_y и подставляем их в первое уравнение. При этом получаем следующую связь между напряжениями, деформациями и напряженностью электрического поля

$$\sigma_x = \frac{S_{11}^E}{(S_{11}^L)^2 - (S_{12}^E)^2} \epsilon_x - \frac{d_{31}}{S_{11}^L + S_{12}^E} E_z. \quad (6.11)$$

Считая, что механические свойства пьезокерамических слоев пластины и пассивного заполнителя отличаются несущественно, можно при описании деформаций в пластине принять гипотезу Кирхгоффа для всего пакета. Это приводит к следующему выражению для распределения

деформаций ϵ_x по толщине пластины:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}, \quad (6.12)$$

где $w(x, t)$ — прогиб срединной плоскости пластины $z = 0$.

После элементарных преобразований получаем связь между моментом и кривизной изогнутой срединной плоскости пластины:

$$M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + S E_z.$$

Здесь

$$D = \frac{S_{11}^E}{(S_{11}^E)^2 - (S_{12}^E)^2} \frac{2}{3} [(h_1 + h_2)^3 - h_1^3] + \frac{2Eh_1^3}{3(1-\nu^2)}; \quad (6.13)$$

$$S = \frac{d_{31}}{S_{11}^E + S_{12}^E} [h_1^2 - (h_1 + h_2)^2];$$

E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона среднего слоя пластины.

Учитывая, что в рамках сделанных предположений напряженность электрического поля не зависит от координаты x и принимая во внимание соотношение (6.13), уравнение движения элемента пластины представим в виде

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = i\omega \rho \tilde{\Phi}(x, t). \quad (6.14)$$

Здесь $M = 2\rho_1 h_1 + 2\rho_2 h_2$; ρ_1 , ρ_2 и ρ — соответственно плотность материалов среднего слоя, крайних пьезокерамических слоев и окружающей среды. При записи уравнения (6.14) учтено, что пластина колеблется в акустической среде. Соответствующая акустическая нагрузка представлена в правой части этого уравнения, где $\tilde{\Phi}(x, t)$ — потенциал скорости частиц среды.

Для гармонического движения амплитуда колебательной скорости $v(x)$ находится из уравнения

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} - k_1^4 v(x) = -\frac{\omega^2 \rho}{D} \Phi(x), \quad (6.15)$$

где волновое число определяется равенством $k_1^4 = M\omega^2/D$.

Это уравнение фактически совпадает с уравнением движения элемента пластины из материала без пьезоэффекта. Влияние пьезоэффекта проявляется в граничных условиях. Так, исходя из выражений (6.13), граничные условия шарнирного опирания краев помимо очевидного равенства нулю амплитудной характеристики скорости включают соотношение

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + i\omega S E_z = 0, \quad x = 0, x = l. \quad (6.16)$$

Учитывая неоднородность этого условия для амплитуды скорости, представим общее решение для $v(x)$ в виде ряда по собственным фор-

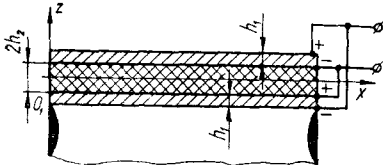


Рис. 126

мам колебаний пластины без пьезоэффекта:

$$v(x) = Ax(x-l) + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sin \frac{s\pi}{l} x, \quad (6.17)$$

где A и a_s — неизвестные комплексные коэффициенты.

Такое представление для амплитудной характеристики колебательной скорости позволяет за счет выбора постоянной A удовлетворить неоднородные граничные условия для момента на краях пластины. Из соотношения (6.16) легко находим

$$A = i \frac{\omega S E_0}{2D}. \quad (6.18)$$

Условие, требующее обращения в нуль на краях пластины выражения $v(x)$, очевидно, удовлетворяется. При подстановке в уравнение движения (6.15) выражения (6.17) слагаемое $Ax(x-l)$ должно быть представлено рядом по полной системе функций $\sin \frac{s\pi}{l} x$. Это разложение вместе с разложением выражения для потенциала $\Phi(x)$ позволяет алгебраизировать уравнение (6.15), входящее в систему уравнений, отражающих граничные условия и условия сопряжения между частичными областями. Возникающие при этом вопросы техники преобразований в полной мере аналогичны подробно рассмотренным выше.

Перейдем к анализу количественных данных об акустических свойствах решеток из активных элементов. Расчеты выполнены для случая нормального падения плоской волны на решетку. При этом геометрические и физические параметры задачи имели следующие значения:

$l/\lambda_1 = 0,1$; $2b/l = 1$; $b/a = 1,1$; $h_1/l = 0,027$; $h_2/l = 0,008$; $\rho_1 = 4,5 \cdot 10^3$ кг/м³; $\rho_2 = 7,5 \cdot 10^3$ кг/м³; $S_{11}^E = 1,2 \cdot 10^{-11}$ м²/Н; $S_{12}^E = -0,405 \cdot 10^{-11}$ м²/Н; $d_{31} = -1,54 \cdot 10^{-10}$ К/Н; $E = 1,16 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0,3$; $\rho c = 1,5 \cdot 10^6$ кг/м² · с.

Давление в падающей волне составляло 0,1 Па. Смысл геометрических параметров решетки разъяснен на рис. 87 и 126. Пьезокерамические слои считаются выполненными из керамики PZT-4 [118].

Цель проведенных расчетов заключалась в том, чтобы оценить возможности управления звукопрозрачностью решетки с помощью подводимого к пьезоактивным слоям внешнего напряжения. В принципиальном отношении возможность этого управления уже вытекает из результатов предыдущего параграфа. Сейчас важно получить оценки достижимого уровня расширения полосы эффективной звукоизоляции при умеренных уровнях напряженности электрического поля в активных элементах пластины и указать достаточно просто реализуемые способы управления фазовыми характеристиками подводимого внешнего поля. Это обстоятельство следует отметить особо, обратив внимание на то, что в выражениях (6.10) величина E_0 считается комплексной. В связи с этим алгоритм расчета был составлен так, чтобы для каждого значения частоты падающей волны коэффициент прохождения

звука $k_{пр}$ вычислялся для некоторого интервала изменения величины $E_0 h_2$. При этом шаг при переборе значений составлял по модулю 0,28 и по фазе — 20°. Из полученного массива данных отбирались те величины, которые имели минимальное значение. Одновременно фиксировалось соответствующее значение модуля и фазы подводимого внешнего напряжения.

На рис. 127 приведена частотная зависимость полученных указанным образом значений $k_{пр}$ (сплошная кривая), а на рис. 128 — ча-

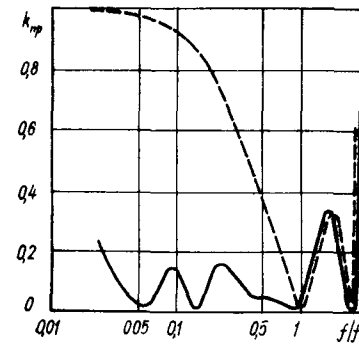


Рис. 127

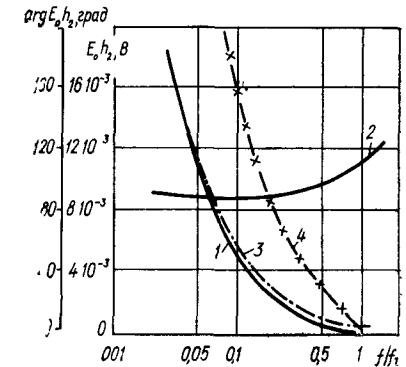


Рис. 128

стотные зависимости модуля и аргумента $E_0 h_2$, при которых обеспечиваются эти значения $k_{пр}$ (кривые 1 и 2 соответственно). Заметим, что осцилляции сплошной кривой на рис. 127 вызваны тем, что при расчетах был выбран сравнительно большой шаг изменения значений амплитуды и фазы $E_0 h_2$.

Анализ этих данных и сравнение их со случаем $E_0 h_2 = 0$ (штриховая линия на рис. 127) показывают, что с помощью электрического поля, приложенного к пьезоактивным пластинам, действительно можно управлять звукопрозрачностью решетки. Обратим внимание на одну важную особенность. Создаваемая рассмотренным образом дополнительная нагрузка на пластины эффективно улучшает звукоизоляцию решетки в области частот $f < f_1$. На более высоких частотах при $f > f_1$ заметного улучшения звукоизоляции не наблюдается. Это вызвано следующим. При $f < f_1$ доминирующей формой прогиба пластин является $\sin \frac{\pi}{l} x$. Прикладывая электрическое напряжение к пластинам, способствуем увеличению их прогиба именно с такой формой [поскольку функция $x(x-l)$ близка к функции $\sin \frac{\pi}{l} x$]. Иначе обстоит дело в области частот $f > f_1$. Здесь большую роль начинают играть высшие формы колебаний пластин, которые характеризуются большей изменяемостью по координате x . При этом из-за несоответствия формы колебаний и равномерного распределения подводимого внешнего напряжения существенно уменьшается эффективный коэффициент электромеханической связи. На высоких частотах при равно-

мерном покрытии электродами пьезоактивных пластин возбуждение колебаний в них является неэффективным.

С другой стороны, как уже отмечалось выше, колебания на более высоких формах не связаны с заметным изменением объема решетки и, следовательно, ее объемной податливости. Именно поэтому она становится плохим отражателем звука, поскольку сами ее элементы являются малыми по сравнению с длиной волны. В соответствии с отмеченными обстоятельствами звукоизолирующие свойства решетки в области частот $f > f_1$ остаются такими же, как и для пассивных элементов. Об этом свидетельствует практически полное совпадение штриховой и сплошной кривых на рис. 127 для $f/f_1 > 1$. Следует отметить, что такой фактор, характеризующий акустические свойства решетки, как эффективный коэффициент электромеханической связи, поддается управлению. Путем надлежащего разделения электродов и изменения полярности подключения можно согласовать пространственное распределение напряженности электрического поля с характеристиками возбуждаемых форм колебаний. При этом эффективный коэффициент электромеханической связи может сильно возрасти, но если соответствующая форма колебаний не связана с изменением объема оболочки, то отражательная способность решетки существенно не изменится.

Для области частот $f < f_1$ можно получить сравнительно простую формулу, связывающую коэффициент прохождения звука через решетку с напряженностью электрического поля в пьезокерамических решетках. Эту формулу можно получить, если ограничиваться в рядах, представляющих звуковое поле и колебательную скорость пластин, только первыми членами. При этом находим

$$k_{\text{пр}} = -\frac{1}{\xi kl + i} \left\{ \xi kl + \frac{kl}{2} \tau U_0 + i \left[(kl)^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \right) - \tau U_0 \right] \right\}, \quad (6.19)$$

где $\tau = (2\pi)^2 \frac{S}{D} f_1^2 \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \frac{M}{300h_2}$; U_0 — комплексная амплитуда разности потенциалов, подводимой к электродам пьезокерамических пластин.

Используя соотношение (6.19), можно получить приближенное решение обратной задачи — по требуемому значению коэффициента прохождения определить необходимую разность потенциалов на электродах. Так, например, полагая $k_{\text{пр}} = 0$, находим

$$|U_0| = \frac{kl}{\tau} \left\{ \left[\frac{kl}{2} (\xi - 1) \right]^2 + \xi^2 \right\}^{1/2}; \quad (6.20)$$

$$\arg U_0 = \arctg \frac{-2\xi}{kl(\xi - 1)}.$$

На рис. 128 (кривая 3) приведены значения модуля разности потенциалов, рассчитанные по приближенной формуле. Как видно, эта кривая довольно близка к той, которая получена в рамках более строгого расчета и которая определяет минимальное значение коэффициента прохождения.

5. Решетка из брусьев с пьезоактивными пластинами, параллельными плоскости решетки

Изменяя податливость стенок с помощью подводимой к пьезопластинам разности потенциалов, можно управлять акустическими свойствами решетки с иной ориентацией пластин. В частности, таким образом можно изменять свойства решетки, представленной на рис. 80. Будем считать, что конструктивно упругие пластины выполнены так же, как показано на рис. 126. Учитывая, что в этом случае (см. рис. 80) начало координатной системы совмещено с центром пластины, ее колебательную скорость представим в виде

$$v^{(q)}(y) = e^{i2kaq \sin \theta} \left[v_0^{(q)} + \tilde{A}(y^2 - a^2) + \sum_{i=1}^{\infty} v_i^{(q)} \sin \frac{\pi i}{3a} (y + a - 2qa) \right]. \quad (6.21)$$

При этом имеется в виду общий случай ориентации плоской падающей волны.

Выражение для колебательной скорости (6.21) отличается от соответствующего выражения (4.5) только наличием дополнительного слагаемого $\tilde{A}(y^2 - a^2)$. Необходимость введения дополнительного слагаемого в разложении колебательной скорости пьезоактивных пластин по собственным формам колебаний в вакууме подробно обсуждалась в предыдущем параграфе. Смысл слагаемого с $\tilde{A}$ в выражении (6.21) при этом такой же, как и слагаемого с A в выражении (6.17). Для случая шарнирного опирания пластин по краям постоянная $\tilde{A}$ связана с внешним изгибающим моментом на краях, возникающим при приложении разности потенциалов к пластинам. Из условия равенства нулю суммарного момента на краях пластины находим

$$\tilde{A} = -i \frac{\omega S E_0}{2D}. \quad (6.22)$$

Используя выражение (6.21) вместо (4.5), можно довольно просто алгебраизировать систему дифференциальных уравнений (4.6) и получить систему уравнений. От системы (4.7) она будет отличаться лишь правой частью в связи с наличием в выражении (6.21) слагаемого с известным уже значением $\tilde{A}$.

Результаты предыдущего рассмотрения показывают, что наиболее подходящей частотной областью, в которой возможно управление акустическими свойствами решетки с помощью подвода разности потенциалов, является область частот $f < f_1$. Если, кроме того, предположить, что $2a/\lambda_1 \ll 1$, то достаточно надежные оценки для коэффициента прохождения можно получить, удерживая в бесконечных рядах для скоростей пластин и потенциалов звукового поля лишь первые слагаемые. Для случая нормального падения звука ($\theta = 0$) и безмассовых опор в решетке ($M_{\text{оп}} = 0$) получаем следующее приближен-

ное значение коэффициента прохождения:

$$k_{\text{пр}} = \frac{2 + i\tilde{A} \frac{2a(1+Z_1)}{3kZ_1}}{2 - \frac{1}{Z_1} - i \left[\frac{\beta}{kZ_1} + \frac{2k}{\beta} \right]}. \quad (6.23)$$

Все влияние электрического поля отражается во втором слагаемом в числителе.

Полагая в формуле (6.23) $k_{\text{пр}} = 0$, легко определить необходимое для выполнения этого условия значение электрического напряжения. Если на решетку падает плоская звуковая волна с амплитудой давления 0,1 Па, то

$$U_0 = -i \frac{18 \cdot 10^3 Z_1 D h_2}{\rho c (1 + Z_1) S a^2}. \quad (6.24)$$

На рис. 128 (кривая 4) представлена частотная зависимость, определяемая по формуле (6.24), для тех же значений геометрических и физических параметров, которые использовались при построении остальных кривых на рисунке.

При сравнении кривых 1 и 4 на рис. 128 видно, что качественный характер частотных зависимостей $|U_0| = E_0 h_2$ при различной ориентации пластин в решетке сходен. Однако количественные значения разности потенциалов U_0 , необходимой для минимизации звукопрозрачности, для решетки, показанной на рис. 84, выше, чем для решетки, показанной на рис. 87.

Если необходимо обеспечить второй предельный случай $k_{\text{пр}} = 1$, то выражение согласно получим (6.23)

$$U_0 = \frac{9 \cdot 10^3 D h_2}{\rho c (1 + Z_1) \omega S a^2} \left\{ \left[\frac{\beta}{k} + \frac{2kZ_1}{\beta} \right] - i \right\}. \quad (6.25)$$

Заканчивая изложение следует указать на тесную связь между постановками, использованными в двух последних параграфах, и проблемами гашения звука. Как известно [167—169, 206], идея активного гашения звука состоит в том, чтобы, используя явление интерференции, добиться подавления некоторого исходного звукового поля звуковым полем с создаваемым дополнительными источниками. Пожалуй, наиболее интересные результаты получены в этой области при рассмотрении звуковых полей в волноводах [157, 158]. Причем речь идет в ряде случаев не только о подавлении низшей моды, но и о подавлении звука в многомодовом волноводе [100].

В случае нормального падения рассмотренные выше задачи очевидным образом переформулируются в задачи об активном гашении звука в волноводе. Все рассмотренные случаи характеризуются такой геометрией и длиной волны, что речь идет об одномодовом волноводе. Полученные при этом результаты интересны с той точки зрения, что дают достаточно полное представление о возможностях активного гашения звука с помощью дополнительных источников в виде колеблющихся упругих пластин, расположенных либо в стенках волновода, либо поперек его сечения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям.— М.: Наука, 1979.— 830 с.
2. Агранович Э. С., Марченко В. А., Шестопалов В. П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках.— Журн. техн. физики, 1962, 32, № 4, с. 381—385.
3. Алексеев Б. Н. Расширение полосы пропускания цилиндрического пьезокерамического преобразователя при помощи двух переходных слоев.— Акуст. журн., 1976, 22, вып. 2, с. 179—184.
4. Алексеев В. К., Лепендин Л. Ф. Акустическое поле пульсирующего кольца в цилиндре.— Там же, 1967, 13, вып. 1, с. 126—128.
5. Айзенберг Г. З., Ямпольский В. Г., Терешин О. Н. Антенны УКВ.— М.: Связь, 1977. Ч. 1.— 381 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.— М.: Наука, 1966.— 295 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье.— М.: Наука, 1967.— 299 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра.— М.: Наука, 1973.— 294 с.
9. Борисейко В. А., Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Соотношения электроупругости для пьезокерамических оболочек.— Прикл. механика, 1976, 12, № 2, с. 34—40.
10. Босый Н. Д. Электрические фильтры.— М.: Гостехиздат, 1955.— 247 с.
11. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье.— М.: Физматгиз, 1962.— 360 с.
12. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.— М.: Изд-во АН СССР, 1957.— 501 с.
13. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций.— М.: Наука, 1977.— 286 с.
14. Бушер М. К. Свободное колебание упругого кольца периодической структуры.— Акуст. журн., 1976, 22, вып. 4, с. 497—504.
15. Бушер М. К. Уравнения динамики цилиндрического пьезокерамического преобразователя — излучателя неоднородной структуры.— Там же, 1978, 24, вып. 6, с. 835—839.
16. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации.— М.: Сов. радио, 1966.— 431 с.
17. Вайнштейн Л. А., Белкина М. Г. Метод двойной редукции и бесконечные системы линейных уравнений для коэффициентов разложений искомой функции с особенностями.— Докл. АН СССР, 1970, 194, № 4, с. 794—797.
18. Вайсслед Ю. В. Рассеяние звуковых волн на конечном конусе.— Акуст. журн., 1971, 17, вып. 1, с. 18—22.
19. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций.— М.: Изд-во иностр. лит., 1949.— Т. 1. 798 с.
20. Векслер Н. Д., Нигул У. К., Пукк Р. А. Об алгоритме вычисления в рядах Фурье эхо-сигналов от упругих сферических объектов в безграничной акустической среде.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1970, № 6, с. 123—127.

21. Вовк И. В. Возбуждение звука преобразователем, погруженным на жидкий клин. — Там же, 1971, 17, № 2, с. 311—314.
22. Вовк И. В. Об одном методе оценки звукового поля, создаваемого стержневым излучателем. — Акуст. журн., 1978, 24, вып. 5, с. 673—680.
23. Вовк И. В. Дифракция звука на решетке из полых упругих брусьев, заполненных газом. — Там же, 1979, 25, вып. 4, с. 502—506.
24. Вовк И. В. Дифракция звуковых волн на параболическом рефлекторе. — Там же, 1979, 25, вып. 5, с. 670—674.
25. Вовк И. В. Излучение звука цилиндром, охваченным незамкнутым кольцевым слоем. — Там же, 26, вып. 3, с. 364—370.
26. Вовк И. В. Излучение звука периодической решеткой из стержневых преобразователей, звукоизолированных с тыльной стороны слоем. — Там же, 1980, 26, вып. 4, с. 522—527.
27. Вовк И. В. Расчет коэффициентов прохождения звука через решетку с управляемой податливостью элементов. — Акуст. журн., 1980, 26, вып. 5, с. 673—677.
28. Вовк И. В. Дифракция звуковой волны на решетке из жестких цилиндров с упругими крышками. — Прикл. механика, 1981, 17, № 8, с. 120—123.
29. Вовк И. В. Излучение звука коаксиальными цилиндрическими оболочками. — Акуст. журн., 1982, 28, вып. 4, с. 470—473.
30. Вовк И. В., Гринченко В. Т. О собственных значениях в некоторых осесимметричных задачах теории упругости и акустики. — Прикл. механика, 1971, 7, № 7, с. 65—69.
31. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Излучение звуковых волн из полого кругового конечного конуса. — В кн.: Линейные краевые задачи математической физики. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973, с. 129—139.
32. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Акустические свойства сферического излучателя, нагруженного на биконический рупор конечных размеров. — Акуст. журн., 1974, 20, № 2, с. 158—161.
33. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Об одном методе исследования свойств рупорных антенн. — В кн.: Акустические методы и средства исследования океана. Владивосток: Дальневост. политехн. ин-т, 1974, с. 158—161.
34. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Свойства волновых полей в волноводе с колеблющимися стенками. — Там же, с. 165—168.
35. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Звуковые поля конечного цилиндра, расположенного между цилиндрическими экранами. — Акуст. журн., 1975, 21, вып. 3, с. 372—377.
36. Вовк И. В., Гринченко В. Т. К вопросу о направленности цилиндрического излучателя, частично покрытого слоем экранирующего материала. — Там же, 1975, 21, вып. 2, с. 294—295.
37. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Излучение поршня в волновод с упругими пластинами в стенках. — Там же, 1976, 22, вып. 5, с. 771—774.
38. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Дифракция плоской волны на двухслойной решетке из полых упругих брусьев. — Там же, 1978, 24, вып. 6, с. 844—849.
39. Вовк И. В., Гринченко В. Т. О влиянии вынужденных колебаний на звукопрозрачность решетки из полых упругих брусьев. — Прикл. механика, 1982, 18, № 1, с. 113—117.
40. Вовк И. В., Гринченко В. Т. О связи звукопрозрачности решеток из полых упругих брусьев с кинематикой стенок брусьев. — Акуст. журн., 1982, 27, вып. 6, с. 746—753.
41. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Резонансное рассеяние звуковых волн на решетках из упругих оболочек. — В кн.: Тр. II Всесоюз. симпоз. по физике акустико-гидродинам. явлений и оптоакустике (Суздаль, 3—7 декабря 1979 г.) М.: Наука, 1982, с. 281—284.
42. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Кононченко Л. А. Дифракция звуковых волн на плоской решетке, состоящей из полых упругих брусьев. — Акуст. журн., 1976, 22, вып. 2, с. 201—205.
43. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Кононченко Л. А. Распространение звука в прямоугольном волноводе, стенки которого содержат упругие пластинки. — Прикл. механика, 1978, 14, № 6, с. 110—112.
44. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Коцюба В. С. Об одном методе оценки акустических свойств цилиндрического излучателя конечной высоты. — Акуст. журн., 1975, 21, вып. 5, с. 701—705.
45. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Лейко А. Г. Анализ акустических свойств плоского волновода с неоднородными стенками. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 9, с. 795—798.
46. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Лейко А. Г. Поле изучения двух цилиндров, расположенных в незамкнутых кольцевых слоях. — Акуст. журн., 1981, 27, вып. 1, с. 70—76.
47. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Маяцкий В. И. Звуковое поле бесконечного кругового цилиндрического преобразователя, частично покрытого слоем акустически мягкого материала. — Там же, 1972, 18, № 3, с. 365—369.
48. Вовк И. В., Кононченко Л. А., Омельченко Б. А. Дифракция звука на конечной решетке из полых упругих оболочек. — Там же, 1984, 30, вып. 4, с. 449—454.
49. Вовк И. В., Маяцкий В. И., Гайдай В. А. Акустическое поле сферического излучателя, частично покрытого слоем акустически мягкого материала. — Акустика и ультразвуковая техника, 1973, № 8, с. 84—88.
50. Гельдфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1959. — 470 с.
51. Гидроакустика за 20 лет. — Л.: Судостроение, 1975. — 172 с.
52. Глазнов В. Е. К вопросу об определении скорости распространения упругих волн в среде с цилиндрическими каналами. — Акуст. журн., 1962, 8, вып. 4, с. 468—469.
53. Глазнов В. Е. Дифракция плоской продольной волны на решетке из цилиндрических полостей в упругой среде. — Там же, 1967, 13, вып. 3, с. 352—360.
54. Глазнов В. Е. Входной импеданс на боковой поверхности радиального возбуждаемого упругого цилиндра. — Там же, 1976, 22, вып. 2, с. 206—213.
55. Глазнов В. Е. Некоторые задачи распространения звука в упругих средах. — Таганрог: ТРТИ, 1975. — 128 с.
56. Глазнов В. Е. Дифракция волны, излученной цилиндром, на решетке из акустически мягких цилиндров. — Акуст. журн., 1968, 14, вып. 4, с. 532—537.
57. Глазнов В. Е., Громова Т. Б. Упругие свойства резиновых слоев с цилиндрическими полостями при больших статических деформациях. — В кн.: Докл. Всесоюз. акуст. конф. (Ленинград, июнь 1971), Л., с. 17—21.
58. Глазнов В. Е., Завалана И. Н., Орлова В. И. Упругость и прочность полиуретановых пенопластов с полостями цилиндрической формы. — Механика полимеров, 1971, № 5, с. 813—819.
59. Глазунов С. Г., Важенкин С. Ф., Зюков-Батырев Г. Д., Ратнер Я. Л. Применение титана в народном хозяйстве. — Киев: Техника, 1975. — 199 с.
60. Гобсон Е. Теория сферических и эллиптических функций. — М.: Изд.-во, иностр. лит., 1952. — 476 с.
61. Гонтиквич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек: Справ. пособие. — Киев: Наук. думка, 1964. — 287 с.
62. Гоц А. А., Дианов Д. В. Акустическое поле сферического пояса. — В кн.: Докл. 8 Всесоюз. акуст. конф. (Москва, июнь, 1973) М.: 1973, с. 100—103.
63. Грандштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962. — 1097 с.
64. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. — Л.: Судостроение, 1976. — 197 с.
65. Грей Э., Метьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложение к физике и механике. — М.: Изд.-во иностр. лит., 1953. — 371 с.
66. Григорьян Ф. Е. Исследование плоского волновода с выводом неразделяющихся решений уравнения Гельмгольца. — Акуст. журн., 1974, 20, вып. 2, с. 214—221.
67. Гринченко В. Т. Осесимметричные задачи теории упругости для полубесконечного кругового цилиндра. — Прикл. механика, 1965, 1, № 1, с. 109—118.
68. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. — Киев: Наук. думка, 1978. — 264 с.
69. Гринченко В. Т., Лунева С. А. Звуковое поле экранированного кругового цилиндра. — Акуст. журн., 1980, 26, вып. 3, с. 462—466.
70. Гринченко В. Т., Лунева С. А. Звуковое поле двух совместно работающих экранированных цилиндрических излучателей. — Там же, 1982, 28, вып. № 1, с. 19—24.
71. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. — Киев: Наук. думка, 1981. — 283 с.

72. Гринченко В. Т., Улітко А. Ф. Про особливості напруженого стану жорстко-закріпленої круглої плити.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1970, № 2, с. 162—164.
73. Гузь А. Н., Головачев В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах.— Киев : Наук. думка, 1972.— 254 с.
74. Гутин Л. Я. Избранные труды.— Л. : Судостроение, 1977.— 597 с.
75. Дианов Д. Б. Исследование частотных характеристик и направленности цилиндрического преобразователя в мягком экране.— Акуст. журн., 1973, 19, вып. 5, с. 677—684.
76. Дианов Д. Б., Кузьменко А. Г. Исследование возможностей расширения полосы пропускания цилиндрических пьезокерамических преобразователей.— Там же, 1970, 16, вып. 2, с. 236—240.
77. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление.— М. : Физматгиз, 1961.— 524 с.
78. Дрейзен И. Г. Курс электроакустики.— М. : Связьиздат, 1940.— Ч. 2. 267 с.
79. Жуков В. Б. Расчет гидроакустических антенн.— Л. : Судостроение, 1977.— 183 с.
80. Завадский Б. Ю. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах.— М. : Наука, 1972.— 558 с.
81. Зарембо Л. К., Тимошенко В. И. Нелинейная акустика.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984.— 103 с.
82. Захаров Л. Н., Леманский А. А. Рассеяние волн «черными» телами.— М. : Сов. радио, 1972.— 288 с.
83. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики.— М. : Изд-во иностр. лит., 1950.— 456 с.
84. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах.— Минск : Наука и техника, 1968.— 584 с.
85. Иванов В. П. Дифракция плоской волны на n -слойной решетке.— Акуст. журн., 1971, 17, вып. 2, с. 240—246.
86. Иофе В. К. Электроакустика.— М. : Связьиздат, 1954.— 227 с.
87. Иофе В. К., Корольков В. Г., Сапожков М. А. Справочник по акустике.— М. : Связь, 1979.— 310 с.
88. Иофе В. К., Ямпольский А. А. Расчетные графики и таблицы по электроакустике.— М. ; Л. : Госэнергоиздат, 1954.— 524 с.
89. Исакович М. А. Общая акустика.— М. : Наука, 1973.— 495 с.
90. Камп Л. Подводная акустика.— М. : Мир, 1972.— 324 с.
91. Каневский И. Н. Фокусирование звуковых и ультразвуковых волн.— М. : Наука, 1977.— 336 с.
92. Канторович Л. В., Крылов В. И. Методы приближенного решения уравнений в частных производных.— Л. ; М. : Гостехиздат, 1936.— 528 с.
93. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.— Л. ; М. : Гостехиздат, 1949.— 695 с.
94. Карновский М. И., Лозовик В. Г. Акустическое поле бесконечно кругового цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности.— Акуст. журн., 1964, 10, вып. 3, с. 313—317.
95. Карновский М. И., Лозовик В. Г. Акустическое поле пространственного излучателя произвольной формы при смешанных краевых условиях.— Там же, 1968, 14, вып. 3, с. 403—408.
96. Карновский М. И., Лозовик В. Г., Обозненко И. Л., Пугач В. П. Направленность излучения сферических преобразователей со смешанными граничными условиями.— Там же, 1970, 16, вып. 3, с. 410—413.
97. Кикучи Е. Ультразвуковые преобразователи.— М. : Мир, 1972.— 424 с.
98. Кенциг В. Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— 234 с.
99. Климов А. Е., Лейко А. Г. Дифракция звуковых волн на системе цилиндров, расположенных в незамкнутых кольцевых слоях.— Акуст. журн., 1979, 25, вып. 5, с. 717—720.
100. Климов С. П., Мазаников А. А., Тютюкин В. В. Широкополосная активная система гашения звуковых полей в двухмодовом волноводе.— Там же, 1984, 30, вып. 5, с. 653—656.
101. Козырев В. А., Шендеров Е. Л. О сопротивлении излучения цилиндра конечной высоты.— Там же, 1980, 26, вып. 3, с. 422—432.
102. Корнев В. Г. Введение в теорию Бесселевых функций.— М. : Наука, 1971.— 287 с.
103. Кудашева О. А., Севрюгова Н. В. Излучение звука бесконечной периодической решеткой с зазорами.— Там же, 1976, 22, вып. 3, с. 385—392.
104. Кэй Д. Ж., Леби Т. Таблицы физических и химических постоянных.— М. : Физматгиз, 1962.— 246 с.
105. Кюн Р. Микроволновые антенны.— Л. : Судостроение, 1967.— 517 с.
106. Лапин А. Д. Способ создания звукоизоляции для звука низкой частоты, распространяющегося в волноводе.— Акуст. журн., 1970, 16, вып. 2, с. 281—285.
107. Лапин А. Д. Звукоизоляция в волноводах : (Обзор).— Там же, 1975, 21, вып. 3, с. 337—351.
108. Лямшев Л. М. Отражение звука тонкими пластинами и оболочками в жидкости.— М. : Изд-во АН СССР, 1955.— 71 с.
109. Лямшев Л. М. Дифракция звука на тонкой ограниченной упругой оболочке.— Докл. АН СССР, 1957, 115, № 2, с. 271—273.
110. Лямшев Л. М. Дифракция звука на тонкой безграничной упругой цилиндрической оболочке.— Акуст. журн., 1958, 4, вып. 2, с. 161—167.
111. Макаров В. И., Кузьмичев Ю. Н. Возбуждение цилиндрических оболочек ультразвуком.— Там же, 1958, 4, вып. 3, с. 282—283.
112. Макаров В. И., Фадеева Н. А. Об излучении звука оболочками в звуковом поле.— Там же, 1960, 6, вып. 2, с. 261—263.
113. Малюжинец Г. Д. Математическая формулировка задач о вынужденных гармонических колебаниях в произвольной области.— Докл. АН СССР, 1951, 78, № 3, с. 439—442.
114. Малюжинец Г. Д. Нестационарные задачи дифракции для волнового уравнения с финитной правой частью.— Тр. Акуст. ин-та, 1971, вып. 25, с. 124—139.
115. Малюжинец Г. Д., Астапенко В. М. Дифракция плоской волны на частой периодической решетке.— Акуст. журн., 1970, 16, вып. 3, с. 354—363.
116. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний.— М. : Наука, 1972.— 470 с.
117. Масолов С. А., Таранов И. Е. Дифракция электромагнитных волн на пространственной периодической решетке, составленной из брусьев прямоугольного поперечного сечения.— Радиотехника и электрон., 1964, 9, № 1, с. 53—60.
118. Мезон У. Физическая акустика.— М. : Мир, 1966.— Т. 1. Ч. А. 592 с.
119. Метсавэяр Я. А. Алгоритм вычисления эхо-сигналов от упругой сферической оболочки в жидкости путем суммирования отдельных групп бегущих волн.— Таллин : Валгус, 1971.— 38 с.
120. Митра Р., Ли С. Акустические методы теории волноводов.— М. : Мир, 1974.— 327 с.
121. Морз Ф. Колебания и звук.— М. : Гостехиздат, 1949.— 496 с.
122. Морз Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960. Т. 2.— 886 с.
123. Нефедов Е. И., Сивов А. Н. Электродинамика периодических структур.— М. : Наука, 1977.— 206 с.
124. Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т. Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн на конечных структурах.— М. : Наука, 1972.— 187 с.
125. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 277 с.
126. Новиков Б. К., Риденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика.— Л. : Судостроение, 1981.— 264 с.
127. Орлов Л. В., Шабров А. Л. Расчет и проектирование антенн гидроакустических рыбопоисковых станций.— М. : Пищ. пром-сть, 1974.— 272 с.
128. Плахов Д. Д. Прохождение акустической волны сквозь многослойную пластину, подкрепленную ребрами жесткости.— Акуст. ж., 1968, 14, № 1, с. 23—28.
129. Плахов Д. Д. Коротковолновая асимптотика для решения задачи о дифракции сферической волны на упругой оболочке в виде тела вращения.— Там же, 1975, 21, вып. 6, с. 917—925.
130. Плахов Д. Д., Саволойсен Г. Д. Дифракция сферической звуковой волны на упругой сферической оболочке.— Там же, вып. 5, с. 789—796.
131. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. В 2-х т.— М. : Наука, 1978.— Т. 1. 391 с.
132. Простаков А. Л. Гидроакустика и корабль.— Л. : Судостроение, 1967.— 200 с.

133. Ржевский С. Н. Курс лекций по теории звука.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1960.— 335 с.
134. Римский-Корсаков А. В. Электроакустика.— М. : Связь, 1973.— 270 с.
135. Римский-Корсаков А. В., Белоусов Ю. И. Колебания и излучение звука круговыми цилиндрическими оболочками.— Ленинград : ЦНИИ «Румб», 1980.— 88 с.
136. Ричардсон И. Д. Некоторые вопросы прикладной акустики.— М. : Воениздат, 1962.— 175 с.
137. Розенберг Л. Д. Звуковые фокусирующие антенны.— М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1949.— 111 с.
138. Рубанов И. Л. К вопросу о звуковом поле цилиндрического излучателя со смешанными условиями.— Акуст. журн., 1978, 24, вып. 3, с. 401—405.
139. Рыбак С. А. Прохождение звука через периодически неоднородную пластину в жидкости.— Там же, 1962, 8, вып. 1, с. 78—84.
140. Рыбак С. А., Тартаковский Б. Д., Швилкина О. Г. Звукопроницаемость пластины с ребрами жесткости.— В кн. : III Всесоюз. конф. по борьбе с шумом и вибрацией (Челябинск, июнь 1980) — М. : Наука, 1980, с. 211—214.
141. Рэлей. Теория звука.— М. : Гостехиздат, 1955, Т. 1—2.— 503 с; 475 с.
142. Свердлин Г. М. Прикладная гидроакустика.— Л. : Судостроение, 1976.— 278 с.
143. Свердлин Г. М. Гидроакустические преобразователи и антенны.— Л. : Судостроение, 1980.— 228 с.
144. Скучик Е. Основы акустики.— М. : Изд-во иностр. лит., 1958.— Т. 2.— 542 с.
145. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. М. : Мир, 1971.— 557 с.
146. Смажеская Е. Г., Фельдман Н. Б. Пьезоэлектрическая керамика.— М. : Сов. радио, 1971.— 198 с.
147. Смарышев М. Д. Направленность гидроакустических антенн.— Л. : Судостроение, 1973.— 277 с.
148. Справочник по динамике сооружений / Под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича.— М. : Стройиздат, 1972.— 510 с.
149. Справочник по строительной механике корабля / Под ред. Ю. А. Шиманского.— Л. : Судпромгиз, 1958.— 527 с.
150. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.— М. : Наука, 1967.— 442 с.
151. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки.— М. : Наука, 1966.— 635 с.
152. Титчмарш Э. И. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка : В 2-х т.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— Т. 1278 с.
153. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О принципе излучения.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1948, 28, № 2, с. 243—247.
154. Тюлин В. Н. Введение в теорию излучения и рассеяния звука.— М. : Наука, 1976.— 253 с.
155. Тюрин А. М., Сташкевич А. П., Таранов Э. С. Основы гидроакустики. Л. : Судостроение, 1966.— 293 с.
156. Тюткин В. В. Распространение упругих волн в среде с цилиндрическими каналами.— Акуст. журн., 1956, 2, вып. 3, с. 214—219.
157. Тюткин В. В., Мазаников А. А. Экспериментальное исследование активного гашения акустических полей.— Там же, 1974, 20, вып. 5, с. 807—808.
158. Тюткин В. В., Мазаников А. А. Об эффективности и устойчивости автономных активных систем гашения звука.— Там же, 1978, 24, вып. 5, с. 788—791.
159. Тюткин В. В., Меркулов В. Н., Приходько В. Ю. Возбуждение нормальных волн в тонкой упругой цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью, силами, заданными на ее поверхности.— Там же, 1979, 25, вып. 1 с. 96—102.
160. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.— М. : Мир, 1977.— 622 с.
161. Ультразвук: Маленькая энциклопедия / Под ред. И. П. Голяминой.— М. : Сов. энцикл., 1979.— 440 с.
162. Уолтер К. Антенны бегущей волны.— М. : Энергия, 1970. 324 с.
163. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции.— М. : Сов. радио, 1962.— 274 с.
164. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики.— В кн. : Вопросы математической физики. Л. : Наука, 1976, с. 93—106.
165. Фрадин А. З. Антенны сверхвысоких частот.— М. : Сов. радио, 1957.— 647 с.
166. Фельд Я. Н., Ансрен А. К. Дифракция скалярной волны на параболическом зеркале.— Радиотехника и электрон., 1977, 22, № 1, с. 1—9.
167. Федорюк М. В. Об одном методе активного гашения звука.— Акуст. журн., 1974, 20, вып. 5, с. 809—810.
168. Федорюк М. В. О гашении звука в волноводе активным методом.— Там же, 1975, 21, вып. 2, с. 281—285.
169. Федорюк М. В. Нестационарная задача об активном гашении звука.— Там же, 1976, 22, вып. 3, с. 439—443.
170. Фурдуев В. В. Электроакустика.— М. : Гостехиздат, 1948.— 515 с.
171. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции.— М. : Мир, 1964.— 428 с.
172. Хортон Д. У. Основы гидроакустики.— Л. : Судпромгиз, 1961.— 480 с.
173. Шендеров Е. Л. Прохождение звуковой волны сквозь тонкую пластину с промежуточными опорами.— Акуст. журн., 1963, 9, вып. 3, с. 359—367.
174. Шендеров Е. Л. Дифракция звука на щелях в экране конечной толщины.— Там же, 1964, 10, вып. 3, с. 359—367.
175. Шендеров Е. Л. Прохождение звука сквозь экран конечной толщины с отверстиями.— Там же, 1970, 16, вып. 2, с. 295—303.
176. Шендеров Е. Л., Лиходаева Е. А. Периферические волны, возникающие при дифракции плоской звуковой волны на тонкой цилиндрической оболочке.— Там же, 1971, 17, вып. 1, с. 79—84.
177. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики.— Л. : Судостроение, 1972.— 347 с.
178. Шендеров Е. Л. Импедансы осесимметричных колебаний сферической оболочки с учетом инерции вращения и сдвига.— Акуст. журн., 1981, 27, вып. 2, с. 300—306.
179. Шестопалов В. П. Метод задачи Римана — Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн.— Харьков : Изд-во Харьков. ун-та, 1971.— 400 с.
180. Шестопалов В. П., Кириленко Л. А., Масанов С. А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции.— Киев : Наук. думка, 1984.— 293.
181. Янке Е. Я., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции.— М. : Наука, 1968.— 342 с.
182. Barakat R., Levin E. Diffraction of plane electromagnetic waves by a perfectly conducting cylindrical lamina.— J. Opt. Soc. Amer., 1964, 54, N 9, p. 1089—1094.
183. Bowman J. I., Senior T. B. A., Uslenghi P. L. E. Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes.— Amsterdam : North — Holland Publ. Co., 1969.— 727 p.
184. Brigham G. A. In-plane vibrations of tapered oval rings.— J. Acoust Soc. Amer., 1973, 54, N 2, p. 451—460.
185. Brigham G. A., Libuha I. I., Radlinsky R. P. Analysis of scattering from large planar gratings of compliant cylindrical shells.— Ibid., 1977, 61, N 1, p. 48—59.
186. Brigham G. A. On the theory of stress-constrained optimum compliant tubes and uniform tube arrays.— Ibid., 1981, 69, N 6, p. 1545—1556.
187. Cole I. E., Garrlich S. M. Diffraction of sound by the impedance parabolic.— Ibid., 1980, 68, N 4, p. 1193—1198.
188. Gaunard G. C., Brill D. Acoustic spectrogram and complex-frequency poles of a resonantly excited elastic tube.— Ibid., 1984, 75, N 6, p. 1680—1693.
189. Hunter I. L., Layfon M. R., Fish M. R. Acoustic backscattering from thin air-filled spherical shells in water.— Ibid., 1977, 62, N 5, p. 1139—1143.
190. Hickling R. Analysis of echoes from a hollow metallic sphere in water.— Ibid., 1964, 36, N 6, p. 1124—1137.
191. Horita R. E. Free-flooding unidirectional resarators for deep-ocean transducers.— Ibid., 1967, 41, N 1, p. 158—166.
192. Junger M. C. Sound scattering by a thin elastic shells.— Ibid., 1952, 24, N 4, p. 562—567.
193. Junger M. C. Radiation and scattering by submerged elastic structures.— Ibid., 1975, 57, N 6, p. 1, p. 1318—1326.

ОГЛАВЛЕНИЕ

194. *Junger M. C.* Vibrations of elastic shells in a fluid medium and the associated radiation of sound.— J. Appl. Mech., 1952, **19**, N 4, p. 439—445.
195. *Junger M. C., Feit D.* Sound, structures and their interaction.— Cambridge: MIT, 1972.— 208 p.
196. *Kenzo Sato.* Free flexural vibrations of an elliptical ring in its plane.— J. Acoust. Soc. Amer., 1975, **57**, N 1, p. 113—115.
197. *Lee F. A.* Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder.— Acustica, 1963, **13**, N 3, p. 26—31.
198. *Liao S., Sachse W.* Experimental measurment of acoustic scattering by waves of cylindrical obstacles.— J. Acoust. Soc. Amer., 1978, **64**, N2, p. 563—570.
199. *Lou G. K., Su T. C.* Free vibrations of spherical shells immersed in water.— Ibid., 1978, **63**, N 5, p. 1402—1408.
200. *Mc. Mahon G. W.* Performance of open ferroelectric ceramic cylinders in underwater transducers.— Ibid., 1964, **36**, N 3, p. 528—533.
201. *Murphy J. D., Breitenbach E. D., Uberall H.* Resonance scattering of acoustic waves from cylindrical shells.— Ibid., 1978, **64**, N 2, p. 677—683.
202. *Pollack L., Klosner J. M.* Acoustic radiation from two concentric cylindrical shells.— AIAA Journal, 1972, **10**, N 12, p. 1631—1636.
203. *Ryan W. W.* Acoustical reflections from aluminium cylindrical shells immersed in water.— J. Acoust. Soc. Amer., 1978, **64**, N4, p. 1159—1164.
204. *Sandman B. E.* Fluid-loading influence coefficients for a finite cylindrical shell.— Ibid., 1976, **60**, N 6, p. 1256—1264.
205. *Sherman C. M., Parke N. G.* Acoustic radiation from a thin torus with application to the free-flooding ring transducer.— Ibid., 1965, **38**, N 5, p. 715—722.
206. *Winbanks M. A.* The active control of sound propagation in long duct.— J. Sound and Vibr., 1973, **28**, p. 411—436.
207. *Toulis W. I.* Acoustic reflection and scattering with compliant elements.— Ibid., 1957, **29**, N 6, p. 1021—1033.
208. *Toulis W. J.* Patent 3.021.504. (США) Apparatus for controlling the effective compressibility of a liquid. Опубл. 2.07.56.
209. *Twersky V.* On the scattering of waves by on infinite grating.— Ann. Ant. Prop., 1962, **10**, N 6, p. 217—223.
210. *Twesky V.* Multiple scattering of waves and optical phenomena.— J. Opt. Soc. Amer., 1962, **52**, N 2, p. 145—171.
211. *Varadan V. K., Varadan V. V.* Acoustic, electromagnetic and elastic scattering. Focus on the T-matrix approach.— New York: Pergamon Press, 1980.— 693 p.
212. *Verby M. F., Green L. H.* A comparison of acoustical scattering from fluid-loaded elastic shells and sound soft objects.— J. Acoust. Soc. Amer., 1984, **76**, N 4, p. 1227—1230.
213. *Williams W., Parke N. G., Moran D. A., Sherman Ch. M.* Acoustic radiation from finite cylinders — Ibid., 1964, **36**, N12, p. 2316—2321.
214. *Woollett R.* Ultrasonic transducers. Underwater sound transducers.— Ultrasonics, 1970, **8**, N 4, p. 2, p. 243—253.
215. *Woollett R.* Tends and problem in sonar transducers design.— IEEE Trans. Conics and Ultrason., 1963, **10**, N3, p. 116—124.
216. *Zalesak I. F., Rogers P. H.* Low-frequency radiation characteristics of free-flooded ring transducers with application to a low-frequency directional hydrophone.— J. Acoust. Soc. Amer., 1974, **56**, N 4, p. 1052—1058.

Предисловие	3
Глава первая	
Общая характеристика используемого метода и круга рассматриваемых задач	5
1. Характеристики звукового поля. Основные уравнения	5
2. Гармонические волны. Основные свойства модели	8
3. Условия на ребре	10
4. Метод частичных областей при решении граничных задач излучения и рассеяния звука	13
5. Звуковое поле в волноводе с колеблющимися стенками	21
6. Прохождение звука через плоскопараллельный слой	25
7. Звуковое поле в волноводе переменного сечения	28
Глава вторая	
Излучение и рассеяние звука цилиндрическими телами	38
1. Излучение звука цилиндром через замкнутый кольцевой слой	38
2. Излучение звука цилиндром через незамкнутый кольцевой слой	42
3. Направленные свойства и импеданс излучения цилиндра в незамкнутом кольцевом слое	52
4. Излучение звука цилиндром через незамкнутый кольцевой слой конечной прозрачности	59
5. Звуковое поле конечного цилиндра, расположенного между цилиндрическими экранами	66
6. Дифракция плоской волны на замкнутом кольцевом слое	78
7. Дифракция звуковых волн на незамкнутой цилиндрической оболочке конечной прозрачности	81
8. Излучение звука цилиндрическими оболочками	89
9. Излучение звука цилиндром конечной длины	95
Глава третья	
Излучение и рассеяние звука сферическими телами	103
1. Излучение звука сферой, охваченной незамкнутым сферическим слоем	103
2. Звуковое поле стержневого излучателя	115
3. Дифракция звуковых волн на параболическом рефлекторе	123
4. Излучение звука цилиндром конечной высоты (приближенное решение)	131
5. Излучение звука радиально колеблющимся отрезком трубы (приближенное решение)	136
Глава четвертая	
Рассеяние звука на бесконечных решетках из упругих элементов	142
1. Постановка задачи. Типы рассматриваемых оболочек	142
2. Решение для слоя из брусьев с одной упругой стенкой	145

3. Анализ структуры поля и движения элементов слоя	152
4 Решетка из разнесенных брусьев с упругой стенкой, параллельной плоскости решетки	157
5. Решетка с двумя упругими стенками	163
6. Решетка из брусьев с упругими стенками, нормальными плоскости решетки	166

Глава пятая

Влияние заполнителя и конечных размеров в плане на акустические свойства решеток	178
1 Влияние газа внутри оболочек на акустические свойства решеток	178
2. Решетка из оболочек в форме прямого параллелепипеда с упругими пластинами, нормальными плоскости решетки	182
3 Решетка из оболочек в форме короткого цилиндра с упругими пластинами, параллельными плоскости решетки	188
4. Одномерные решетки из оболочек в форме короткого цилиндра	196
5. Система одномерных решеток	203

Глава шестая

Дифракция звуковых волн на многослойных решетках и решетках из активных элементов	208
1. Двухслойная решетка из брусьев, упругие стенки которых нормальны плоскости решетки	208
2. Двухслойная решетка из брусьев, упругие стенки которых параллельны плоскости решетки	214
3 Рассеяние звука на решетке, элементы которой дополнительно деформируются заданной внешней силой	219
4. Решетка из брусьев с пьезоактивными стенками, нормальными плоскости решетки	223
5 Решетка из брусьев с пьезоактивными пластинами, параллельными плоскости решетки	229
Список литературы	231

ВИКТОР ТИМОФЕЕВИЧ ГРИНЧЕНКО

ИГОРЬ ВЛАДИМИРОВИЧ ВОВК

ВОЛНОВЫЕ ЗАДАЧИ рассеяния звука на упругих оболочках

Утверждено к печати ученым советом Института гидромеханики АН УССР

Редактор Н. З. Лаптева

Оформление художника А. Л. Омелянюка

Художественный редактор И. Т. Лагутин

Технический редактор Г. Р. Боднер

Корректоры С. И. Кривец, Р. С. Коган, Е. С. Мирзамухамедова

ИБ № 7541

Сдано в набор 19.11.85. Подп. в печ. 03.06.86. БФ 00221. Формат 60×90^{1/16}. Бум. тип. № 1. Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 15,0. Усл. кр.-отт. 15,0. Уч.-изд. л. 18,7. Тираж 1000 экз. Заказ 5-3250. Цена 3 р. 10 к.

Издательство «Наукова думка» 252601 Киев 4, ул. Репина, 3

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкига» 252057 Киев 5, ул. Довженко 3 в Киевской книжной типографии научной книги 252004 Киев 4, ул. Репина, 4. Зак. 6-565.