

АКУСТИКА В задачах

Под редакцией С.Н.ГУРБАТОВА и О.В.РУДЕНКО

*Рекомендовано Министерством
общего и профессионального образования Российской Федерации
для использования в учебном процессе
студентами физических специальностей вузов*



МОСКВА
НАУКА • ФИЗМАТЛИТ
1996

ББК 22.32
А44
УДК 534 (075.8)

Федеральная целевая программа
книгоиздания России

АВТОРЫ:

А.Н. БАРХАТОВ, Н.В. ГОРСКАЯ, А.А. ГОРЮНОВ
С.Н. ГУРБАТОВ, В.Г. МОЖАЕВ, О.В. РУДЕНКО

Акустика в задачах. Учеб. рук-во.: Для вузов /А.Н.Бархатов, Н.В.Горская, А.А.Горюнов и др.; Под ред. С.Н.Гурбатова и О.В.Руденко.—М.: Наука. Физматлит, 1996.—336 с.— ISBN 5-02-014742-7

Систематизированный сборник задач, охватывающий основные разделы классической и современной акустики. В рамках каждого раздела материал расположен в порядке возрастания степени сложности. Многие задачи снабжены комментариями, а наиболее важные—развернутыми решениями, что позволяет использовать руководство для самостоятельной работы. Отражает опыт преподавания общих и специальных курсов акустики в Московском и Нижегородском университетах.

Для студентов, аспирантов физических и радиофизических специальностей вузов, научных работников и инженеров, интересующихся проблемами современной акустики и ее применений.

Табл. 4. Ил. 108. Библиогр. 33 назв.

А $\frac{1604040000-031}{053(02)-96}$ Без объявл.

ISBN 5-02-014742-7

© А.Н.Бархатов, Н.В.Горская,
А.Н.Горюнов, С.Н.Гурбатов,
В.Г.Можаяев, О.В.Руденко, 1996

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
1. Общие вопросы акустики	7
1.1. Линейная акустика идеальной среды	7
1.2. Затухание звука в жидкостях и газах, релаксационное поглощение	21
1.3. Отражение и преломление звука	28
1.4. Отражение от слоя и прохождение через слой	38
1.5. Движение и звук	43
2. Волны в трубах, волноводах и резонаторах	49
2.1. Длинные волны в трубах	49
2.2. Сложные звукопроводы, акустические фильтры	61
2.3. Нормальные волны в резонаторах и волноводах	67
3. Акустика неоднородных сред	78
3.1. Геометрическая акустика. Уравнения эйконала, переноса, луча	78
3.2. Лучи в неоднородных природных средах	87
3.3. Захват энергии, фактор фокусировки, каустики в природных каналах	98
4. Излучение и рассеяние звука	107
4.1. Излучение звука колеблющимися телами	107
4.2. Рассеяние звука	118
5. Нелинейная акустика	125
5.1. Простые волны	125
5.2. Плоские нелинейные волны с разрывами	137
5.3. Нелинейные волны в диссипативных средах. Уравнение Бюргерса	148

5.4.	Сферические и цилиндрические волны. Нелинейные пучки	157
5.5.	Акустические шумы большой интенсивности	166
6.	Упругие волны в твердых телах	176
6.1.	Волны в неограниченных твердых телах	176
6.2.	Волны в твердых телах с плоской границей	182
6.3.	Волны в пластинах, слоях и стержнях	193
6.4.	Кристаллоакустика и акустоэлектроника	210
7.	Статистическая акустика	226
7.1.	Основы теории случайных процессов	226
7.2.	Дифракция и излучение случайных полей	239
7.3.	Рассеяние звука случайными неоднородностями и неровными границами	249
8.	Электроакустические системы	263
8.1.	Механические колебательные системы. Электро-механические аналоги	263
8.2.	Акустические системы и электроакустические аналоги	276
8.3.	Электроакустические преобразователи	288
9.	Обратные задачи дифракции	301
9.1.	Функция Грина и обращение дифференциальных операторов задач скалярной акустики	301
9.2.	Обратные задачи излучения	305
9.3.	Обратные задачи рассеяния: альтернативные постановки	315
9.4.	Линеаризованные обратные задачи дифракции: приближения Борна и Рытова	322
	Список рекомендуемой литературы	334

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время акустика представляет собой развитую область науки и техники, результаты которой используются людьми самых разных профессий. Необходим учебник, позволяющий студенту, аспиранту, специалисту из смежной области за сравнительно небольшой срок овладеть основами акустики, научиться активно использовать развитые здесь методы упрощений, расчетов, получения численных оценок.

Мы считаем, что последовательность логически правильно расположенных задач — одна из наиболее эффективных форм подачи материала. В нашей книге задачи расположены группами. Как правило, первая задача из группы предназначена для проработки важного теоретического вопроса и снабжена развернутым решением. Последующие задачи служат для освоения техники расчетов и оценок. Наиболее простые из них заканчиваются лишь ответами, более сложные — ответами и пояснениями, трудные — решениями. Кроме того, когда группа состоит из однотипных задач, решение дается только к первой; остальные должны быть рассмотрены по аналогии с ней. Этой схемы мы пытались придерживаться всюду, где это было возможно.

Задачник построен на материале курсов, читаемых студентам кафедр акустики Московского и Нижегородского университетов, а также студентам отделения радиофизики физфака МГУ.

В первоначальном варианте главы 1 и 2 были написаны А.Н.Бархатовым при участии С.Н.Гурбатова и О.В.Руденко, гл.3 — А.Н.Бархатовым и С.Н.Гурбатовым, гл.4 — О.В.Руденко при участии А.Н.Бархатова, гл.5 — О.В.Руденко и С.Н.Гурбатовым, гл.6 — В.Г.Можаяевым, гл.7 — С.Н.Гурбатовым при участии А.А.Горюнова, гл.8 — Н.В.Горской, гл.9 — А.А.Горюновым. Однако в процессе редактирования были сделаны добавления. Так,

О.В.Руденко предложил включить ряд новых задач, среди которых задачи 1.1.20, 1.2.19, 1.5.11, 2.1.1, 6.1.7, 6.1.8, 9.2.17, 9.4.2–9.4.6. Аналогичные изменения вносились в текст и другими авторами. Взаимные перекрестные проверки и дополнения, по нашему мнению, способствовали улучшению содержания книги.

Мы старались в максимальной степени использовать опыт преподавания акустики в университетах России, основанный, в частности, на задачниках С.Н.Ржевкина [1], А.Н.Бархатова и Н.В.Горской [2], С.Н.Гурбатова и О.В.Руденко [3], а также на материале учебных пособий [4–7].

Нужно заметить, что формулы нумеруются подряд только в пределах данной задачи. В каждой из задач используется независимая нумерация. Поэтому при ссылках на формулы в общем случае мы пользуемся четырехзначными обозначениями. Так, обозначение (5.2.4.3) относится к формуле (3) задачи 5.2.4, т.е. к формуле (3) четвертой задачи раздела 5.2. Однако число знаков может быть уменьшено. Например, обозначение (3) относится к третьей формуле данной задачи, а (4.3) — к формуле (3) четвертой задачи данного раздела.

Мы выражаем искреннюю благодарность В.А.Хохловой, П.Н.Кравчуну, А.А.Заикину, Н.В.Прончатову-Рубцову за помощь при подготовке задачника и полезные замечания, М.А.Карпачевой за большую работу по оформлению рукописи.

Так как курс акустики читается во многих университетах и технических вузах страны, а также в зарубежных университетах, мы надеемся, что книга "Акустика в задачах" поможет учебному процессу и подготовке специалистов соответствующего профиля. Мы рассчитываем на замечания и предложения наших заинтересованных коллег по улучшению содержания и по дополнениям, которые могли бы быть включены в последующие издания.

С. Н. Гурбатов, О. В. Руденко

1. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АКУСТИКИ

1.1. Линейная акустика идеальной среды

1.1.1. Исходя из уравнений гидродинамики, вывести уравнение для звуковых волн малой амплитуды в идеальной среде.

Решение. Рассмотрим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

и уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad (2)$$

где p — давление, ρ — плотность, $\mathbf{v}$ — скорость частицы.

Представим переменные p и ρ в виде

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad (3)$$

где p_0 , ρ_0 — постоянные равновесные давление и плотность, p' , ρ' — их изменения в звуковой волне ($p' \ll p_0$, $\rho' \ll \rho_0$). Подставляя (3) в (1) и (2) и пренебрегая малыми величинами второго порядка относительно p' , ρ' и скорости $\mathbf{v}$, получим линеаризованные уравнения для акустических величин:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0. \quad (5)$$

Звуковая волна в идеальной жидкости есть адиабатическое движение. При этом давление p зависит только от одной термодинамической величины, например от плотности ρ (баротропная среда): $p = p(\rho)$. Поэтому

$$p' = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_s \rho', \quad (6)$$

где s — энтропия. Тогда из (4) получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_s \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (7)$$

Введем потенциал скорости φ :

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi. \quad (8)$$

Из (5) получим

$$\rho' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (9)$$

а из (7)–(9) находим волновое уравнение для потенциала φ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0, \quad (10)$$

в котором Δ — оператор Лапласа, c — скорость звука,

$$c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s}. \quad (11)$$

В случае плоской волны, распространяющейся по оси x , уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (12)$$

Заметим, что условие применимости линеаризованных уравнений движения $\rho' \ll \rho_0$, $\rho' \ll \rho_0$ эквивалентно малости скорости движения частиц жидкости в волне по сравнению со скоростью звука: $v \ll c$, т.е. малости числа Маха ($M = v/c \ll 1$).

1.1.2. Найти решение волнового уравнения для бегущей плоской волны. Показать, что звуковая волна является продольной, и установить связь между возмущениями давления, плотности и колебательной скоростью в такой волне.

Решение. Нетрудно показать, что уравнение (1.12) имеет общее решение

$$\varphi(x, t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct),$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции. Рассматривая, например, волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x , для потенциала скорости $\varphi(x, t)$ имеем

$$\varphi(x, t) = F(x - ct), \quad (1)$$

и, следовательно, картина возмущений распространяется в среде со скоростью c , называемой скоростью звука. Из формул (1) и (1.8) видно, что в бегущей волне колебательная скорость имеет единственную компоненту $v_x = v$. Это означает, что частицы среды в волне колеблются вдоль направления ее распространения, т.е. звуковая волна является продольной. При этом колебательная скорость v связана с приращениями давления p' и плотности ρ' простыми алгебраическими соотношениями. Используя формулы (1.8) и (1.9), из (1) получаем

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = F(x - ct), \quad p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho_0 c F(x - ct), \quad (2)$$

и, следовательно,

$$p' / v' = \rho_0 c. \quad (3)$$

Соотношение (3) иногда называют акустическим законом Ома, а величину $\rho_0 c$ — волновым сопротивлением. Используя линеаризованное уравнение состояния (1.6), для возмущений плотности ρ' и колебательной скорости имеем

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{v}{c}. \quad (4)$$

Градиент акустического давления, как видно из формулы (1.5), коллинеарен вектору колебательной скорости и — в силу продольного характера звуковой волны — направлению на источник звука. Таким образом, используя приемники градиента давления, можно определить направление прихода акустической волны.

1.1.3. Найти условие, при котором распространение звуковой волны можно рассматривать как адиабатический процесс.

Решение. Распространение звуковой волны сопровождается изменением температуры (см. далее задачи 1.1.31, 1.1.32). Температура увеличивается в тех областях, где среда подвергается адиабатическому сжатию, и уменьшается в областях адиабатического разрежения. Процесс распространения звука можно считать адиабатическим, если за время, равное периоду звуковой волны, тепло не успеет диффундировать на расстояния порядка длины волны λ . Иными словами, "длина температурной волны" λ_T (масштаб диффузии, соответствующий частоте f) должна быть малой по сравнению с длиной акустической волны $\lambda = c/f$.

Длина температурной волны $\lambda_T = 2\sqrt{\pi\chi/f}$ находится из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(x=0, t) = T_0 e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

решение которого при $x > 0$ имеет вид

$$T = T_0 \exp(-kx) \exp(-i\omega t + ikx), \quad (2)$$

где $k = 2\pi/\lambda_T$, χ — коэффициент температуропроводности.

Условие адиабатичности $\lambda > \lambda_T$ будет выполнено для частот

$$f < c^2/(4\pi\chi). \quad (3)$$

Оценки показывают, что условие (3) хорошо выполняется в жидкостях и газах вплоть до очень высоких частот. Так, в воздухе (числовые значения параметров $\chi = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $c = 330 \text{ м/с}$) звук распространяется адиабатически при частотах $f \leq 10^{12} \text{ Гц}$.

1.1.4. Выразить адиабатический модуль объемной упругости κ_a , связывающий приращения давления и плотности

$$p' = \kappa_a \rho' / \rho_0 = \beta_a^{-1} \rho' / \rho_0 \quad (1)$$

(где β_a — адиабатический коэффициент сжатия) через скорость звука c .

Решение. Согласно задаче 1.1.1, малые возмущения давления и плотности в звуковой волне связаны соотношением

$$\frac{p'}{\rho'} = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_s = c^2. \quad (2)$$

Из формул (1), (2) получаем

$$\kappa_a = \rho_0 c^2. \quad (3)$$

Таким образом, измеряя скорость звука и плотность среды, можно найти ее объемный модуль упругости. Такой способ оказывается наиболее эффективным для слабо сжимаемых сред — жидкостей и твердых тел. Заметим, что число Маха $M = v/c$, введенное в задаче 1.1.1, в силу формул (2.3), (2.4) может быть также записано как

$$M = \rho' / \rho_0 = p' / \kappa_a. \quad (4)$$

Поэтому величину κ_a иногда называют характерным внутренним давлением среды.

1.1.5. Вывести формулу для скорости звука в идеальном газе.

Решение. Уравнение адиабатического процесса в идеальном газе имеет вид

$$p / \rho^\gamma = \text{const} = p_0 / \rho_0^\gamma, \quad (1)$$

где p_0 , ρ_0 — равновесные значения давления и плотности, $\gamma = c_p / c_v$ — показатель адиабаты, равный отношению теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме. Для того чтобы найти $(\partial p / \partial \rho)_s$, представим плотность и давление в виде (1.3). Тогда, линеаризуя (1), получаем

$$p' = (\gamma p_0 / \rho_0) \rho'. \quad (2)$$

Используя уравнение состояния идеального газа, имеем

$$pV = \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}, \quad (3)$$

где $R = 8,314$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная, μ — молекулярная масса, T — температура в кельвинах. Из (2), (3) для скорости звука следует

$$c = \left[\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \right]^{1/2} = \left[\gamma \frac{RT_0}{\mu} \right]^{1/2}. \quad (4)$$

Эта формула известна как формула Лапласа, так как именно Лаплас показал необходимость введения множителя γ для адиабатического распространения звука.

1.1.6. Рассчитать адиабатический модуль объемной упругости (внутреннее давление) для воздуха ($c = 330$ м/с, $\rho_0 = 1,3$ кг/м³, $\gamma = 1,4$) и воды ($c = 1500$ м/с, $\rho_0 = 1000$ кг/м³).

Ответ. Для воздуха $\kappa_a = c^2 \rho_0 = 1,4 \cdot 10^5$ Па. В случае идеального газа (см. задачу 1.1.5) внутреннее давление κ_a связано с равновесным давлением p_0 формулой $p_0 = \kappa_a / \gamma$, откуда $p_0 = 1$ атм. В случае воды получаем гораздо большую величину $\kappa_a = 2,25 \cdot 10^9$ Па = $23 \cdot 10^3$ атм. Поэтому для волн, распространяющихся в воде, линейное приближение справедливо в гораздо более широком диапазоне приращения давления, чем для волн, распространяющихся в воздухе.

1.1.7. Получить приближенную формулу для скорости звука в воздухе, учитывая, что $\gamma = 1,4$ и $\mu = 28,8$ г/моль

Ответ. Скорость звука (м/с) рассчитывается по формуле

$$c \approx 20 T_0^{1/2}, \quad (1)$$

где T_0 — температура в кельвинах.

1.1.8. При какой температуре скорость звука в воздухе удвоится по сравнению со скоростью при 0°C и при какой станет в два раза меньше? Скорость звука при $t = 0^\circ\text{C}$ равна $c_0 = 330$ м/с.

Ответ. $c = 2c_0$ при $t = 819^\circ\text{C}$, $c = c_0/2$ при $t = -205^\circ\text{C}$ (если бы воздух оставался идеальным газом).

1.1.9. В два свистка одинаковой длины вдуваются: воздух, охлажденный до температуры жидкого воздуха ($t_1 = -180^\circ\text{C}$), и теплый воздух. Один свисток издает звук на октаву выше, чем другой. Какова должна быть температура воздуха t_2 , вдуваемого во второй свисток?

Ответ. Отношение резонансных частот свистков пропорционально отношению скоростей звука в них. Из (5.4) получаем $t_2 = 99^\circ\text{C}$.

1.1.10. Рассчитать "звуковой барьер" самолета (когда скорость его равна скорости звука), на высоте 9 км, где температура -70°C , и сравнить его со звуковым барьером при 0°C на уровне моря. Зависит ли барьер от атмосферного давления?

Ответ. Около 1000 и 1200 км/ч независимо от давления.

1.1.11. Какова скорость звука внутри цилиндра двигателя внутреннего сгорания сразу же после вспышки, когда давление p равно 200 атм и температура 1000°C , если для газовой смеси $\gamma = c_p/c_v = 1,35$, а плотность смеси при 0°C и атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па равна $\rho_0 = 0,0014$ г/см³?

Решение Считая процесс адиабатическим, находим плотность газовой смеси после вспышки $\rho = \rho_0 (p/p_0)^{1/\gamma}$. Откуда скорость звука $c = (\gamma p/\rho)^{1/2} \approx 620$ м/с

1.1.12. При интерференции двух плоских звуковых волн, излучаемых двумя одинаковыми закрытыми трубами длиной $l = 60$ см, вследствие различия температуры воздуха в них создается 1 биеение в секунду. Температура воздуха в трубе, дающей более низкий тон, равна 16°C . Какова температура воздуха в другой трубе? Считать, что генерируется первая мода колебаний закрытой трубы, т.е. длина волны звука $\lambda = l/2$.

Ответ $t_2 = 16,5^\circ\text{C}$

1.1.13. Записать решение волнового уравнения для плоской монохроматической волны. Найти соотношение между амплитудами давления и смещения, колебательной скорости и ускорения частиц.

Решение. Согласно формулам (2 1), (2 2) решение волнового уравнения для давления в гармонической волне можно записать в виде

$$p'(x, t) = p'_0 \cos(\omega t - kx), \quad (1)$$

где p'_0 — амплитуда давления, ω — частота, $k = \omega/c$ — волновое число. Из (2 3) следует, что колебательная скорость находится в фазе с давлением

$$v(x, t) = v_0 \cos(\omega t - kx), \quad v_0 = p'_0/(\rho_0 c). \quad (2)$$

Величина $\rho_0 c$ носит название волнового сопротивления (импеданса) среды. Для амплитуды смещения частиц $\xi_0 = \int v dt$ и ускорения $\ddot{\xi}_0 = \partial v / \partial t$ имеем из (2)

$$\xi_0 = \frac{v_0}{\omega} = \frac{p'_0}{\rho_0 c \omega}, \quad \ddot{\xi}_0 = \omega v_0 = \frac{p'_0 \omega}{\rho_0 c} \quad (3)$$

Часто используется эффективное среднеквадратичное давление $p_{\text{эф}}$, определяемое через среднее от квадрата звукового давления за один период волны $T = 2\pi/\omega$:

$$p_{\text{эф}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T p^2 dt = \frac{p_0'^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\rho_{эф} = \rho'_0 / \sqrt{2}. \quad (4)$$

1.1.14. Найти длину звуковой волны в воздухе на частоте 500 Гц при температуре $t = 15^\circ\text{C}$ и давлении $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ (плотность воздуха $\rho_0 = 1,26 \text{ кг/м}^3$).

Ответ. $\lambda = c/f = f^{-1} \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0} \approx 0,7 \text{ м}$.

1.1.15. Смещение частиц в плоской бегущей в воздухе звуковой волне имеет вид $\xi = 5 \cdot 10^{-8} \sin(1980t - 6x) \text{ [м]}$. Найти: частоту колебаний; скорость распространения волны; длину волны; амплитуду скорости колебания каждой частицы; ускорение; амплитуду звукового давления, если распространение звука происходит адиабатически ($\rho_0 c = 420 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$).

Ответ. Для данной волны угловая частота $\omega = 1980 \text{ с}^{-1}$, волновое число $k = 6 \text{ м}^{-1}$, амплитуда смещения $\xi_0 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ м}$. Следовательно, $f = \omega/2\pi = 315 \text{ Гц}$, $c = \omega/k = 330 \text{ м/с}$, $\lambda = 2\pi/k = 1 \text{ м}$, $v_0 = \dot{\xi}_0 = \xi_0 \omega = 9,9 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$, $\ddot{\xi}_0 = \omega^2 \xi_0 = 0,2 \text{ м/с}^2$, $p'_0 = v_0 \rho_0 c = 0,04 \text{ Па}$.

1.1.16. Плоская волна с амплитудой акустического давления $0,0002 \text{ дин/см}^2$ при 1000 Гц (порог слышимости) распространяется в воздухе. Найти значения амплитуды скорости и смещения частиц.

Решение. Из задачи 1.1.13 имеем

$$v_0 = p'_0 / (\rho_0 c), \quad \xi_0 = v_0 / \omega.$$

Учитывая, что для воздуха $\rho_0 c = 42 \text{ г/(см}^2 \cdot \text{с)}$, получаем $v_0 = 4,8 \cdot 10^{-8} \text{ м/с}$, $\xi_0 = 7,6 \cdot 10^{-12} \text{ м}$.

1.1.17. Человек с хорошим слухом воспринимает звуковое давление амплитуды $p'_0 = 10^{-3} \text{ дин/см}^2$ при частоте 2000 Гц . Вычислить амплитуду смещения, скорости и ускорения частиц воздуха в такой волне. Решить ту же задачу при частоте 1000 Гц .

Ответ. На частоте 2000 Гц : $\xi_0 = v_0 / (2\pi f) = p'_0 / (2\pi f \rho_0 c) = 1,9 \cdot 10^{-9} \text{ см}$, $v_0 = \dot{\xi}_0 = p'_0 / (\rho_0 c) = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ см/с}$, $\ddot{\xi}_0 = 2\pi f v_0 = 0,3 \text{ см/с}^2$. На частоте 1000 Гц : $\xi_0 = 3,8 \cdot 10^{-9} \text{ см}$, $v_0 = \dot{\xi}_0 = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ см/с}$, $\ddot{\xi}_0 = 0,15 \text{ см/с}^2$.

1.1.18. Сравнить колебательные скорости частиц в бегущей звуковой волне в воде и воздухе при одинаковом акустическом давлении. (Принять $\rho_0 c$ для воды равным $1,5 \cdot 10^5 \text{ г/(см}^2 \cdot \text{с)}$, для воздуха $42 \text{ г/(см}^2 \cdot \text{с)}$.)

Ответ. $v_{\text{возд}} / v_{\text{вода}} = (\rho_0 c)_{\text{вода}} / (\rho_0 c)_{\text{возд}} \approx 3600$.

1.1.19. Амплитуда колебательной скорости в плоской гармонической звуковой волне в воде равна $v_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ см/с. Вычислить амплитуду смещения и звукового давления на частоте 100 Гц. Как изменятся эти величины, если такую же колебательную скорость имеет волна в воздухе?

Ответ. Амплитуда смещения $\xi_0 = 8 \cdot 10^{-10}$ м; амплитуда давления: в воде $p'_0 = 0,75$ Па, в воздухе $p'_0 = 2,1 \cdot 10^{-4}$ Па.

1.1.20. Исходя из линеаризованных уравнений гидродинамики идеальной среды, вывести формулы для объемной плотности энергии и вектора плотности потока энергии звуковой волны.

Решение. Исходим из уравнений (1.4), (1.5). Заменяя приращение плотности приращением давления: $\rho' = p'/c^2$, получим

$$\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p' = 0. \quad (1)$$

Умножим первое из уравнений (1) на p' , второе на $\mathbf{v}$. Складывая полученные соотношения, запишем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p'^2}{2\rho_0 c^2} + \frac{\rho_0 v^2}{2} \right] + \operatorname{div} (p' \mathbf{v}) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет вид дифференциального закона сохранения

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0, \quad (3)$$

где E , $\mathbf{S}$ — квадратичные комбинации переменных, описывающих акустическое поле. Следовательно, объемная плотность энергии дается формулой

$$E = E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}} = p'^2 / (2\rho_0 c^2) + \rho_0 v^2 / 2, \quad (4)$$

а вектор плотности потока энергии (вектор Умова—Пойнтинга)

$$\mathbf{S} = p' \mathbf{v}. \quad (5)$$

Величина

$$J = |\mathbf{S}| = p' v \quad (6)$$

называется интенсивностью (силой) звука. Если проинтегрировать (3) по достаточно большому объему V среды, на границах σ которого движение исчезает, и воспользоваться теоремой Остроградского—Гаусса для преобразования объемного интеграла в поверхностный, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V E dV + \oint_{\sigma} \mathbf{S} n d\sigma = 0. \quad (7)$$

Интеграл по замкнутой поверхности σ равен нулю, поскольку мы условились, что эту поверхность волны не пересекают. При

этом из формулы (7) следует

$$\int_V E dV = \text{const},$$

т.е. полная энергия в объеме V идеальной среды сохраняется.

1.1.21. Получить выражения для объемной плотности энергии и интенсивности плоской бегущей волны.

Решение. Пользуясь соотношением $p' / (\rho_0 c^2) = v/c$, приведем выражение (20.4) к виду

$$E = \rho_0 v^2 = p'^2 / (\rho_0 c^2). \quad (1)$$

Интенсивность равна

$$I = p' v = cE = \rho_0 c v^2 = p'^2 / (\rho_0 c). \quad (2)$$

В гармонической волне $p' = p'_0 \cos(\omega t - kx)$ средняя за период сила звука равна

$$I = p_0'^2 / (2\rho_0 c) = p_{\text{эф}}^2 / (\rho_0 c), \quad I = \rho_0 c v_0^2 / 2. \quad (3)$$

где $p_{\text{эф}}$ — эффективное среднеквадратичное давление (13.4). Используя комплексное представление поля гармонического во времени сигнала

$$p'(x, t) = \frac{1}{2} p'(x) e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} p'^*(x) e^{i\omega t}, \quad v(x, t) = \frac{1}{2} v e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} v^* e^{i\omega t}, \quad (4)$$

получим еще одно полезное соотношение:

$$I = \overline{p'v} = \frac{1}{4} (p'v^* + p'^*v) = \frac{1}{2} \text{Re}(p'v^*), \quad (5)$$

которое используется во многих задачах.

1.1.22. Амплитуда звукового давления в плоской гармонической волне равна $p'_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ дин/см². Вычислить амплитуды колебательной скорости и смещения, средние интенсивность и плотность энергии волны в воздухе на частоте $f = 1$ кГц ($\rho_0 c = 42$ г/(см²·с))

Ответ. $v_0 = p'_0 / \rho_0 c = 4,7 \cdot 10^{-7}$ м/с $\xi_0 = v_0 / 2\pi f = 7 \cdot 10^{-11}$ м,
 $I = p_0'^2 / 2\rho_0 c = 4,8 \cdot 10^{-11}$ Вт/м², $E = I/c = 1,4 \cdot 10^{-13}$ Дж/м³.

1.1.23. Интенсивность звука I равна 0,1 Вт/м². Вычислить объемную плотность энергии E , давление p'_0 , смещение ξ_0 , скорость v_0 и ускорение $\ddot{\xi}_0$ частиц в плоской волне на частоте $f = 10$ кГц в воде и в воздухе. Скорость звука в воде 1500 м/с, в воздухе 340 м/с.

Ответ. Воспользуемся формулами $E = I/c$, $p'_0 = (2I\rho_0 c)^{1/2}$,
 $\xi_0 = p'_0 / (2\pi f \rho_0 c)$, $v_0 = \xi_0 = p'_0 / \rho_0 c$, $\ddot{\xi}_0 = 2\pi f v_0$. Тогда полу-

чаем соответственно для этих величин в воде: $6,7 \cdot 10^{-5}$ Дж/м³, $5,5 \cdot 10^2$ Па, $5,8 \cdot 10^{-9}$ м, $3,7 \cdot 10^{-4}$ м/с, 23 м/с²; в воздухе: $3 \cdot 10^{-4}$ Дж/м³, $9,2$ Па, $3,5 \cdot 10^{-7}$ м, $2,2 \cdot 10^{-2}$ м/с, $1,4 \cdot 10^3$ м/с².

1.1.24. Плоская волна частотой 400 Гц распространяется в воздухе. Интенсивность волны $1,2 \cdot 10^{-2}$ Вт/м². Определить плотность энергии и амплитуду колебаний, если температура воздуха 27°C . Плотность воздуха ρ_0 при $t = 0^\circ\text{C}$ равна $1,18$ кг/м³.

Решение. Плотность энергии $E = I/c$, I — интенсивность звука. Скорость звука $c \approx 20 T_0^{1/2}$ (см.(7.1)). Плотность воздуха при $t = 27^\circ\text{C}$ находим по формуле $\rho = \rho_0(1 + 0,00367t)^{-1} \approx 1,07$ кг/м³. Находим $c = 350$ м/с. Определяем скорость колебаний: $v_0 = (2I/\rho c)^{1/2} = 8 \cdot 10^{-3}$ м/с. Амплитуда колебаний $\xi_0 = v_0/2\pi f$. Подставляя числовые значения, получаем для плотности энергии и амплитуды смещения частиц $E = 3,4 \cdot 10^{-5}$ Дж/м³, $\xi_0 = 3 \cdot 10^{-6}$ м.

1.1.25. В плоской звуковой волне с частотой 1 кГц в воздухе экстремумы давления отличаются на 1 дин/см² от среднего атмосферного давления, равного 10^6 дин/см². Вычислить, чему равны: изменение плотности, сопровождающее распространение такой волны; интенсивность волны; максимальное смещение частиц. Скорость звука равна 340 м/с, $\rho_0 c = 420$ кг/(м²·с).

Ответ. $\rho'_0 = \rho'_0/c^2 = 8,7 \cdot 10^{-7}$ кг/м³, $I = \rho'^2_0/(2\rho_0 c) = 1,2 \times 10^{-5}$ Вт/м², $\xi_0 = \rho'_0/(\rho_0 c \cdot 2\pi f) = 3,8 \cdot 10^{-8}$ м.

1.1.26. В атмосферной акустике принято характеризовать уровень интенсивности $B = 10 \lg(I/J_{\text{ст}})$ относительно стандартного нулевого уровня с интенсивностью $J_{\text{ст}} = 10^{-12}$ Вт/м². Чему равняется среднее звуковое давление $\bar{p}_{\text{ст}}$ в воздухе при нормальных условиях (атмосферное давление 1 атм, $t = 0^\circ\text{C}$) волны нулевой интенсивности ($c = 332$ м/с, $\rho_0 = 1,26$ кг/м³)? Записать выражение для уровня звукового давления относительно стандартного давления $\bar{p}_{\text{ст}}$.

Решение. Для эффективного звукового давления получаем

$$\bar{p}_{\text{ст}} = (J_{\text{ст}} \rho_0 c)^{1/2} \approx 2,04 \cdot 10^{-5} \text{ Па.}$$

Уровень звука при этом записывается как $B = 10 \lg(I/J_{\text{ст}}) = 20 \lg(p/\bar{p}_{\text{ст}})$.

1.1.27. Интенсивность звука равна $2 \cdot 10^{-4}$ Вт/м². Найти уровень интенсивности относительно стандартного нулевого уровня $J_{\text{ст}} = 10^{-12}$ Вт/м².

Ответ. $B = 10 \lg(I/J_{\text{ст}}) = 83$ дБ.

1.1.28. Амплитуда звукового давления $p'_0 = 0,1$ Па. Найти уровень интенсивности в воздухе при температуре 20°C и давлении 1 атм.

Решение. Используя определения

$$B = 10 \lg(I/I_{\text{ст}}), \quad I = p_0'^2/(2\rho_0 c), \quad I_{\text{ст}} = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$$

и подставляя значения ρ_0 и c при $t = 20^\circ\text{C}$ ($\rho_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3$ и $c = 340 \text{ м/с}$), имеем $I = 1,14 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/м}^2$. Следовательно, $B = 70,6 \text{ дБ}$.

1.1.29. Уровень интенсивности плоской звуковой волны в воздухе равен 100 дБ по отношению к стандартному нулевому уровню интенсивности. Вычислить амплитуды скорости v_0 и ускорения $\ddot{\xi}$ частиц на частотах $f_1 = 500 \text{ Гц}$ и $f_2 = 5 \text{ кГц}$.

Ответ. Интенсивность звука равна $I = 10^{-12+0,1B} \text{ Вт/м}^2$. Следовательно, на частоте $f_1 = 500 \text{ Гц}$ имеем $I = 10^{-2} \text{ Вт/м}^2$, $v_0 = (2I/\rho_0 c)^{1/2} = 6,7 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$, $\ddot{\xi} = 2\pi f v_0 = 21 \text{ м/с}^2$. Соответственно на частоте $f_2 = 5 \text{ кГц}$ $I = 10^{-2} \text{ Вт/м}^2$, $v_0 = 6,7 \times 10^{-3} \text{ м/с}$, $\ddot{\xi} = 210 \text{ м/с}^2$.

1.1.30. Плоская волна, распространяющаяся в воздухе с частотой 1000 Гц, имеет амплитуду звукового давления $p'_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ дин/см}^2$ (порог слышимости). Определить амплитуду смещения ξ_0 и амплитуду скорости v_0 частиц среды (в единицах СГС). Тот же расчет сделать для уровня интенсивности в 160 дБ над порогом слышимости.

Ответ. $v_0 = 4,8 \cdot 10^{-6} \text{ см/с}$, $\xi_0 = 7,6 \cdot 10^{-10} \text{ см}$. При увеличении уровня интенсивности на 160 дБ интенсивность возрастет в 10^{16} раз; давление, скорость и смещение частиц — в 10^8 раз.

1.1.31. В воздухе при температуре 27°C и нормальном атмосферном давлении распространяется звуковая волна, уровень интенсивности которой равен $B = 150 \text{ дБ}$ (сильный звук, вызывающий боль в ушах). Определить температуру в месте максимального давления и амплитуду ее колебаний. Как изменится эта величина, если мощность волны уменьшается в 10 раз?

Решение. Находим звуковое давление p' , соответствующее данному уровню интенсивности

$$B = 20 \lg(p'/p_{\text{ст}}),$$

где $p_{\text{ст}}$ — стандартное нулевое давление при нормальных атмосферных условиях ($p_{\text{ст}} = 2,04 \cdot 10^{-4} \text{ дин/см}^2 = 2,04 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$).

Отсюда находим $p' = 645$ Па. Используем уравнение адиабаты для температуры: $T_2 = T_1(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}$, $\gamma = 1,4$. Подставляя $p_1 = p_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Па, $p_2 = p' + p_0$ и учитывая, что $p' \ll p_0$, имеем $T_2 = T_1 \left[1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p'}{p_0} \right]$, т.е. $\Delta T = T_1 \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p'}{p_0}$. Подставляя $T_1 = 300$ К, получаем $\Delta T = 0,55$ К. При уменьшении мощности волны в 10 раз (давления в 3,16 раза) $\Delta T \approx 0,17$ К.

1.1.32. Вычислить изменение температуры в звуковой волне, имеющей интенсивность $J = 0,01$ Вт/м², при температуре воздуха 20 °С и атмосферном давлении.

Ответ. $\Delta T = T \frac{\gamma-1}{\gamma p_0} (2J\rho_0 c)^{1/2} = 2,5 \cdot 10^{-3}$ К.

1.1.33. В гидроакустике уровень звукового давления принято отсчитывать относительно давления $\bar{p}_n = 1$ мкПа = 10^{-6} Па, $B_n = 20 \lg(p/\bar{p}_n)$. Найти формулу пересчета от B_n к стандартному уровню интенсивности $J_{ст} = 10^{-12}$ Вт/м², соответствующему в воде ($\rho_0 = 10^3$ кг/м³, $c = 1500$ м/с) эффективному давлению $\bar{p}_{эф}$.

Решение. Найдем значение стандартного нулевого уровня: $J_{ст} = \bar{p}_{эф}^2 / (\rho_0 c)$. Отсюда $\bar{p}_{эф} \approx 1,22 \cdot 10^{-3}$ Па. Следовательно, имеем $B_n = 20 \lg(p/10^{-6})$, $B = 20 \lg[p/(1,22 \cdot 10^{-3})]$, из которых получаем $B_n = B - 61,72$.

1.1.34. Вычислить радиационное давление, оказываемое плоской звуковой волной на препятствие, если известно приращение давления в звуковой волне.

Решение. Уравнения гидродинамики идеальной сплошной среды, приведенные в задаче 1.1.1, можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) = F, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \quad (1)$$

Сила F , действующая на единицу объема среды, выражается через дивергенцию тензора

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k, \quad (2)$$

называемого тензором плотности потока импульса. Его физический смысл будет понятен, если проинтегрировать (1) по V и воспользоваться формулой Остроградского–Гаусса для преобразования интеграла от дивергенции в поверхностный интеграл:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = - \oint_{\sigma} \Pi_{ik} n_k d\sigma. \quad (3)$$

Левая часть (3) описывает изменение i -й компоненты количества движения в объеме V . Поэтому выражение

$$\Pi_{ik} n_k = p n_i + \rho v_i v_k n_k \quad (4)$$

соответствует потоку i -й компоненты количества движения через единицу площади поверхности с единичным вектором внешней нормали $\mathbf{n}$.

В звуковом поле $p = p_0 + p'$ при гармоническом изменении p' во времени среднее за период звуковое давление $\bar{p}' = 0$. Поэтому в гармонической волне

$$\Pi_{ik} = \rho_0 \overline{v_i v_k} = \rho_0 \overline{v^2} m_i m_k = \bar{E} m_i m_k. \quad (5)$$

Здесь $\bar{E} = \rho_0 \overline{v^2}$ — объемная плотность акустической энергии, усредненная по периоду, $\mathbf{m}$ — единичный вектор вдоль направления распространения волны. Если плоская волна бежит вдоль оси x , то отлична от нуля только компонента $\bar{\Pi}_{xx} = \bar{E} = \rho_0'^2 / (2\rho_0 c^2)$, т.е. поток "иксовой" компоненты количества движения вдоль оси x .

Чтобы найти силу, действующую на препятствие, нужно решить задачу об отражении и прохождении волны через его границу. В простейшем случае, когда облучается плоская граница раздела, ортогональная оси x , слева от нее существуют падающая и отраженная волны с плотностями энергии $\bar{E}_{\text{пад}}$ и $\bar{E}_{\text{отр}}$, а справа — прошедшая волна $\bar{E}_{\text{пр}}$. Поэтому, как следует из формулы (3), на единицу площади поверхности действует сила

$$p = \bar{E}_{\text{пад}} + \bar{E}_{\text{отр}} - \bar{E}_{\text{пр}}. \quad (6)$$

Видно, что давление на стенку учитывает добавку, связанную с реакцией (отдачей) отраженной волны, и уменьшается на величину, связанную с прошедшей волной.

1.1.35. Уровень интенсивности звука составляет $B = 120$ дБ (громкий звук). Найти звуковое давление и мощность — поток энергии, попадающий за 1 с в ухо человека. Считать площадь уха равной 4 см^2 и ухо перпендикулярным направлению распространения волны ($\rho_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3$, $c = 340 \text{ м/с}$).

Решение. Найдем интенсивность звука I . По определению $B = 10 \lg(I/I_{\text{ст}})$, где $I_{\text{ст}} = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ — стандартный нулевой уровень, и, следовательно, $I = 1 \text{ Вт/м}^2$. Амплитуду давления находим из выражения $I = \rho_0'^2 / (2\rho_0 c)$: $\rho_0' = 29 \text{ Па}$, мощность $N = IS$, где $S = 4 \text{ см}^2$, $N = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$.

1.1.36. Какова полная мощность ненаправленного источника звука небольших размеров, если на расстоянии $r = 100 \text{ м}$ амплитуда давления в воздухе равняется $0,1 \text{ Па}$? Поглощением звука пренебречь.

Решение. Ненаправленный источник формирует сферически расходящуюся волну. Поэтому для полной мощности имеем $N = IS = (\rho'_0{}^2/2\rho_0 c) \cdot 4\pi r^2 = 1,43$ Вт.

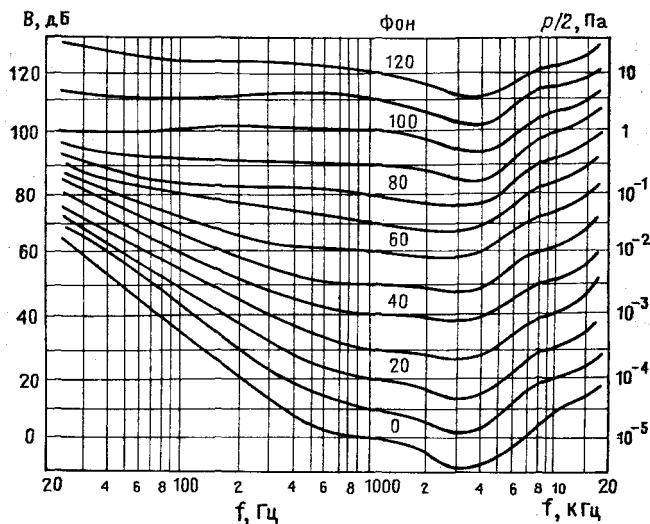
1.1.37. Малый по размерам источник звука излучает в воздухе при атмосферном давлении и температуре 0°C волну частотой $f = 500$ Гц. Мощность источника $N = 5$ Вт. Какова амплитуда смещения, колебательной скорости и ускорения частиц в звуковой волне на расстоянии $r = 10$ м от источника? Поглощением звука пренебречь. Вычислить эти величины также в воде. Параметры сред даны в задаче 1.1.18.

Решение. С учетом сферической расходимости для интенсивности имеем $I = N/(4\pi r^2) = v_0^2 \rho_0 c / 2 = \xi_0^2 \cdot 2\pi^2 f^2 \rho_0 c$; следовательно, для смещения ξ_0 , колебательной скорости $v_0 = \dot{\xi}_0$ и ускорения частиц получаем

$$\xi_0 = \frac{1}{rf} \left[\frac{N}{(2\pi)^3 \rho_0 c} \right]^{1/2}, \quad v_0 = \dot{\xi}_0 = 2\pi f \xi_0, \quad \ddot{\xi}_0 = 2\pi f \dot{\xi}_0.$$

В воздухе: $\xi_0 = 1,4 \cdot 10^{-6}$ м, $\dot{\xi}_0 = 4 \cdot 10^{-3}$ м/с, $\ddot{\xi}_0 = 14$ м/с²; в воде: $\xi_0 = 2,3 \cdot 10^{-8}$ м, $\dot{\xi}_0 = 7,3 \cdot 10^{-5}$ м/с, $\ddot{\xi}_0 = 0,23$ м/с².

1.1.38. На рисунке приведена диаграмма, показывающая свойства человеческого слуха. Кривые соответствуют субъективному восприятию звука одинаковой громкости, которая измеряется в



К задаче 1.1.38

фонах. Пользуясь диаграммой, определить: давление звука на нижней границе слуха (порог слышимости—0 фон) и на верхней границе слуха (болевого порог—120 фон) для частот 200 и 500 Гц; громкость звука при амплитуде давления 1 Па для частот 100 и 2000 Гц; громкость звука при мощности точечного источника звука 10 мВт (человеческая речь) при частоте 200 Гц на расстоянии 5 м; мощность источника звука при громкости 50 фон на расстоянии 10 м (частота 1000 Гц).

Решение. Руководствуемся кривыми, показывающими на диаграмме уровень громкости при различной частоте, а также шкалами давления и уровня интенсивности. Так, давление звука: на нижней границе слышимости на частоте 200 Гц равно около $2 \cdot 10^{-4}$ Па, на частоте 500 Гц—около $5 \cdot 10^{-5}$ Па.

Для нахождения численного значения громкости на расстоянии r от точечного источника требуется учесть сферическую расходимость акустической волны. При этом интенсивность I , измеренная на расстоянии r , для мощности N источника будет равна $I = N/(4\pi r^2)$.

1.2. Затухание звука в жидкостях и газах, релаксационное поглощение

1.2.1. Записать волновое уравнение для акустической волны в вязкой теплопроводящей среде.

Решение. Исходными для решения задачи (в случае вязкой среды) являются линеаризованные уравнения гидродинамики для возмущений плотности ρ' и колебательной скорости v : уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} v = 0 \quad (1)$$

и уравнение Навье—Стокса

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + c_0^2 \nabla \rho' - \left[\frac{4}{3} \eta + \xi \right] \Delta v = 0, \quad (2)$$

где η и ξ —коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости; c_0 —скорость звука. Из (1), (2) находим уравнение для колебательной скорости

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta v - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta v) = 0. \quad (3)$$

Если волна распространяется по оси x , уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (4)$$

Здесь обозначено $b = (4/3)\eta + \xi$. Можно показать, что в вязкой теплопроводящей среде уравнение для колебательной скорости по-прежнему будет иметь вид (3), (4), но с эффективным коэффициентом вязкости

$$b = \frac{4}{3}\eta + \xi + \kappa \left[\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right].$$

Здесь κ — коэффициент теплопроводности, c_p , c_v — удельные теплоспособности при постоянном давлении и объеме.

1.2.2. Вывести формулу для коэффициента затухания звука, обусловленного вязкостью и теплопроводностью среды.

Решение. Ищем решение волнового уравнения (1.4) в виде

$$v = v_0 \exp(ikx - i\omega t). \quad (1)$$

После подстановки в волновое уравнение получаем закон дисперсии $-\omega^2 + c_0^2 k^2 - \frac{b}{\rho_0} i \omega k^2 = 0$. Отсюда находим, что если $b\omega/(c_0^2 \rho_0) \ll 1$ (это соответствует малому затуханию звука на расстояниях порядка длины волны), то

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2 - i b \omega / \rho_0} = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left[1 + i \frac{b \omega}{\rho_0 c_0^2} \right] \equiv (k_0 + i\beta)^2,$$

$$v = v_0 \exp(-\beta x) \exp(ik_0 x - i\omega t), \quad (2)$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0}, \quad \beta = \frac{b \omega^2}{2 \rho_0 c_0^3} = \frac{\omega^2}{2 \rho_0 c_0^3} \left[\left(\frac{4}{3} \eta + \xi \right) + \kappa \left[\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right] \right]. \quad (3)$$

Величина β имеет размерность обратной длины и называется коэффициентом затухания звука. При оценке β по формуле (3) следует учесть, что очень часто можно пренебречь вторым членом ввиду малости коэффициента теплопроводности κ в жидкостях и газах. Коэффициент первой (сдвиговой) вязкости η характеризует касательное диссипативное напряжение, возникающее при скольжении слоев жидкости относительно друг друга. Коэффициент второй (объемной) вязкости ξ характеризует диссипацию, возникающую при всестороннем сжатии среды. В основе объемной вязкости обычно лежит какой-нибудь релаксационный процесс, влияющий на поглощение звука в ограниченной полосе частот в зависимости от характерных времен релаксации. Поэтому при вычислении коэффициента затухания вне областей релаксационного поглощения достаточно учитывать сдвиговую вязкость η . В СГС вязкость измеряется в пуазах: $1 \text{ Пз} = 0,1 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

1.2.3. В гидроакустике принято характеризовать поглощение коэффициентом α , имеющим размерность дБ/м. Установить его связь с коэффициентом β , имеющим размерность непер/м.

Решение. Если задан коэффициент α [дБ/м], то интенсивность волны уменьшается с пройденным расстоянием r как

$$I = I_0 \cdot 10^{-0,1\alpha r}. \quad (1)$$

Соответственно

$$\alpha = -\frac{1}{r} \cdot 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (2)$$

Поскольку $I \sim p'^2$, где p' — акустическое давление ($p' = p'_0 e^{-\beta r}$), то

$$I = I_0 e^{-2\beta r}, \quad (3)$$

$$\alpha = (20 \lg e) \beta \approx 8,7\beta. \quad (4)$$

1.2.4. Найти связь между коэффициентом поглощения плоской волны β и толщиной половинного поглощения $l_{1/2}$ (по интенсивности).

Ответ. $l_{1/2} = 0,35/\beta$.

1.2.5. Звуковая волна с уровнем интенсивности 90 дБ (по отношению к стандартному нулевому уровню $I_{\text{ст}} = 10^{-12}$ Вт/м²) полностью поглощается при нормальном падении на плоский слой пористого вещества толщиной 5 см. Рассчитать, через какое время нагреется этот слой на 1°C, если его удельная теплоемкость $c_p = 0,2$ кал/(К·см³)?

Ответ. Время, необходимое для нагрева слоя на 1°C, примерно равно 1 ч.

1.2.6. Интенсивность звука в плоской волне вследствие поглощения уменьшается в воздухе в несколько раз на расстоянии l_1 . Определить расстояние l_2 , на котором во столько же раз уменьшится интенсивность звука данной частоты в воде. Вязкость в воздухе $\eta = 0,19 \cdot 10^{-4}$ Па·с, в воде $\eta = 10^{-3}$ Па·с. Скорость звука и плотность равны 330 м/с, 1,3 кг/м³ (для воздуха) и 1500 м/с, 1000 кг/м³ (для воды).

Ответ. $l_2 = 1,3 \cdot 10^3$ м.

1.2.7. Найти ослабление звука в децибелах на расстоянии 100 м, если вязкость воды равна $\eta = 10^{-2}$ Пз. Частота 20 кГц.

Решение. Используя выражение коэффициента затухания звука $\beta = [8\pi^2 f^2 / (3\rho_0 c_0^3)] \eta$, найдем ослабление на расстоянии $r = 100$ м: $G = \beta r \cdot 20 \lg e \approx 2,7 \cdot 10^{-3}$.

1.2.8. Найти в децибелах ослабление $G = 10 \lg(I_0/I)$ в воздухе плоской звуковой волны на участке пути длиной 100 м, если вязкость равна $\eta = 0,19 \cdot 10^{-3}$ Пз. Частота звука 20 кГц.

Ответ. $G = 3,7$ дБ.

1.2.9. Записать выражение для уровня акустической сферической и цилиндрической волн в слабопоглощающей среде.

Решение. В среде без поглощения, исходя из закона сохранения энергии для амплитуды, поле $p'(r)$ можно записать выражением

$$p' = p'_0 (r_0/r)^n,$$

где $n = 1/2$ для цилиндрической волны, $n = 1$ для сферической, p'_0 — давление при $r = r_0$. С учетом поглощения имеем

$$p' = p'_0 (r_0/r)^n e^{-\beta r}. \quad (1)$$

Отсюда (см.(3.4))

$$\begin{aligned} B &= 20 \lg(p'/p'_0) = 20 \lg[(r_0/r)^n e^{-\beta r}] = \\ &= 20 n \lg(r_0/r) - r(20 \lg e)\beta \equiv 20 n \lg(r_0/r) - \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

1.2.10. Вычислить в децибелах ослабление G в воде звуковой сферической волны при ее распространении на расстоянии от 2 до 10 км от источника звука. Коэффициент поглощения звука по давлению равен $8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$.

Ответ. $G = 13 \text{ дБ}$.

1.2.11. Интенсивность звука в морской воде согласно эмпирической формуле убывает вследствие поглощения на величину $\alpha = 0,036f^{3/2} [\text{дБ/км}]$, где f — частота в килогерцах. Определить, на каком расстоянии r от источника затухание уменьшит амплитуду волны в 100 раз при частотах 10 и 100 кГц.

Ответ. $r_{10 \text{ кГц}} = 35 \text{ км}$; $r_{100 \text{ кГц}} = 1,1 \text{ км}$.

1.2.12. Интенсивность звука на расстоянии 20 м от сферического источника звука равна $I_1 = 0,03 \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$. Какова интенсивность звука I_2 на расстоянии 100 м от источника, если коэффициент поглощения звука β равен $5 \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-1}$?

Ответ. $I_2 = I_1 (r_1/r_2)^2 \exp[-2\beta(r_2 - r_1)] = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$.

1.2.13. Найти переходное расстояние, на котором в сферической волне потери энергии на расхождение равны потерям на поглощение. Вычислить это расстояние в пресной воде при температуре 14°C на уровне моря, когда коэффициент вязкости равен $1,14 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Частота звука 10 кГц.

Решение. Исходим из выражения для интенсивности затухающей сферической волны $I \sim r^{-2} \exp(-2\beta r)$ (см.(9.1)). Относительное уменьшение интенсивности сферической волны вследствие ее расхождения на отрезке пути Δr равно

$$\left| \frac{\Delta I}{I} \right| = \frac{(2/r^3) \Delta r}{1/r^2} = \frac{2 \Delta r}{r}.$$

Ослабление вследствие затухания звука на том же отрезке равно

$$\left| \frac{\Delta I}{I} \right| = \frac{2\beta \exp(-2\beta r) \Delta r}{\exp(-2\beta r)} = 2\beta \Delta r.$$

Приравнявая эти величины, находим $r' = 1/\beta$. Согласно (2.3), пренебрегая второй вязкостью и теплопроводностью, находим β по формуле $\beta = [8\pi^2 f^2 / (3\rho_0 c_0^3)] \eta$, где коэффициент первой вязкости $\eta = 1,14 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho_0 = 10^3$ кг/м³, $c_0 = 1460$ м/с. Следовательно, $\beta = 10^{-14} f^2 = 10^{-6}$ м⁻¹, $r' = 10^6$ м = 1000 км. При $r < r'$ потери энергии на расхождение пучка больше потерь на поглощение; при $r > r'$ преобладают потери на поглощение.

1.2.14. Цилиндрическая волна распространяется в воздухе. Вычислить коэффициент поглощения звука по давлению, если на дистанции от 1 км до 1,5 км от источника звука интенсивность звука уменьшается на 5 дБ.

Ответ. Используя (9.1), получаем $\beta = 7,5 \cdot 10^{-4}$ м⁻¹ ($n = 1/2$).

1.2.15. В средах с поглощением скорость звука иногда удобно считать комплексной величиной

$$c = c_0 \exp(-i\delta) = c_0 (\cos\delta - i\sin\delta), \quad (1)$$

где δ — угол потерь. Выразить коэффициент поглощения β через δ .

Решение. Потенциал скорости плоской волны в поглощающей среде

$$\varphi = A \exp\left[-i\omega t + i\frac{\omega}{c} x\right] = A \exp\left[-\frac{\omega}{c_0} \sin(\delta x)\right] \exp\left[-i\omega t + i\frac{\omega}{c_0} \cos(\delta x)\right]. \quad (2)$$

Для коэффициента затухания получаем

$$\beta = (\omega/c_0) \sin\delta. \quad (3)$$

В случае слабо поглощающей среды $\beta \approx (\omega/c_0) \delta$.

1.2.16. Найти связь между углом потерь и текущим импедансом среды.

Решение. Текущий удельный акустический импеданс в среде с поглощением — число комплексное:

$$Z = p'/v = R - iX = |Z| e^{-i\sigma}, \quad \text{где } \operatorname{tg}\sigma = X/R. \quad (1)$$

Вычислим давление и скорость с помощью выражения (15.2):

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = i\rho_0 \omega \varphi, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = i\frac{\omega}{c_0} (\cos\delta + i\sin\delta) \varphi.$$

Тогда

$$Z = \frac{\rho_0 c_0}{\cos\delta + i\sin\delta} = \rho_0 c_0 \exp(-i\delta). \quad (2)$$

Сопоставляя (2) с (1), видим, что $\operatorname{tg}\delta = X/R$, а в слабо поглощающей среде $\delta = X/R$. Следовательно, тангенс угла потерь

равен отношению мнимой части текущего импеданса к его действительной части. Заметим, что определение угла потерь в акустике не совпадает с определением этой величины в электротехнике.

1.2.17. Скорость звука в газе равна 351 м/с, угол потерь $\delta = 0,004^\circ$. Найти коэффициент поглощения звука по энергии на частоте 100 кГц.

Ответ. $2\beta = (2\omega/c_0) \delta = 0,25 \text{ м}^{-1}$.

1.2.18. Кислород при 20°C имеет следующие акустические характеристики: $\rho_0 = 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$, $c_0 = 1328 \text{ м/с}$, коэффициент поглощения $\beta = 1,49 \cdot 10^{-13} \text{ ф}^2 \text{ см}^{-1}$. Найти угол потерь и удельный комплексный импеданс среды при частоте $f = 1 \text{ МГц}$.

Ответ. Угол потерь $\delta = \beta c_0 / (2\pi f) = 0,003^\circ$. Удельный комплексный импеданс среды

$$\rho_0 c = \rho_0 c_0 (1 - i\delta) = 1766(1 - i \cdot 0,003) \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}.$$

1.2.19. Вывести формулу для коэффициента поглощения, связанного с наличием в среде релаксационного процесса.

Решение. Примерами релаксационных процессов могут служить молекулярная диссоциация, обмен энергией между внутренними и поступательными движениями многоатомных молекул, фазовые переходы в среде. Распространение звука влияет на внутренние процессы, которые в свою очередь влияют на поглощение и скорость волны

При наличии в среде релаксационного процесса связь между приращениями давления и плотности перестает быть алгебраической ($p' = c_0^2 \rho'$); давление в момент времени t зависит от значений плотности в предшествующие моменты времени:

$$p' = c_0^2 \rho' + m c_0^2 \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \frac{\partial \rho'}{\partial t'} dt'. \quad (1)$$

Здесь τ — характерное время релаксации, m — число, смысл которого выяснен ниже (см. (20.3)). Уравнение (1) рассматриваем совместно с уравнениями гидродинамики идеальной среды (см. задачу 1.1.1). Исключая из этих уравнений переменную p' с помощью (1), получаем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \left[\rho' + m \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \frac{\partial \rho'}{\partial t'} dt' \right] = 0. \quad (3)$$

Для приращения плотности ρ' уравнения (2), (3) сводятся к одному интегродифференциальному уравнению

$$\Delta \left[\rho' + m \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \frac{\partial \rho'}{\partial t'} dt' \right] - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Ищем решение (4) в виде плоской гармонической волны, бегущей вдоль оси x : $\rho' = \rho'_0 \exp(-i\omega t + ikx)$. Получаем дисперсионное уравнение

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left[1 - m \frac{i\omega\tau}{1-i\omega\tau} \right]^{-1}. \quad (5)$$

Число m обычно мало, поэтому из (5) приближенно следует

$$k = \pm \frac{\omega}{c_0} \left[1 - \frac{m}{2} \frac{\omega^2 \tau^2}{1+\omega^2 \tau^2} + i \frac{m}{2} \frac{\omega\tau}{1+\omega^2 \tau^2} \right]. \quad (6)$$

Мнимая часть (6) определяет коэффициент поглощения

$$\beta = \frac{m}{2c_0 \tau} \frac{\omega^2 \tau^2}{1+\omega^2 \tau^2}. \quad (7)$$

1.2.20. Показать, что в области релаксационной дисперсии квадрат скорости звука выражается формулой

$$c^2 = c_0^2 \left[1 + \frac{c_\infty^2 - c_0^2}{c_0^2} \frac{\omega^2 \tau^2}{1+\omega^2 \tau^2} \right], \quad (1)$$

где c_0 — скорость звука при $\omega\tau \ll 1$, а c_∞ — скорость звука на высоких частотах ($\omega\tau \gg 1$).

Решение. Из (19.6) для скорости звука (с учетом $m \ll 1$) получаем выражение

$$c^2 = c_0^2 \left[1 + m \omega^2 \tau^2 / (1 + \omega^2 \tau^2) \right], \quad (2)$$

откуда следует, что $c^2(\omega\tau \rightarrow 0) = c_0^2$, $c^2(\omega\tau \rightarrow \infty) = c_0^2(1+m) \equiv c_\infty^2$. Находим значение $m = (c_\infty^2 - c_0^2)/c_0^2$ и тем самым сводим формулу (2) к искомому виду (1).

1.2.21. Используя формулу для дисперсии скорости звука, обусловленной релаксационным процессом, найти область наиболее быстрого изменения скорости в зависимости от частоты.

Ответ. Область быстрого изменения скорости лежит в окрестности точки перегиба кривой $c^2(\omega\tau)$, описываемой формулой (20.1). Точка перегиба отвечает значению $\omega\tau = 1$.

1.2.22. Найти максимальное значение коэффициента релаксационного поглощения, происходящего на длине волны.

Решение. Коэффициент релаксационного поглощения описывается выражением (19.7):

$$\beta = \frac{\omega^2 \tau}{2c_0} \frac{(c_\infty/c_0)^2 - 1}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad \beta\lambda \approx \pi\omega\tau \frac{(c_\infty/c_0)^2 - 1}{1 + (\omega\tau)^2}.$$

Полагая $d(\beta\lambda)/d(\omega\tau) = 0$, находим, что $\omega\tau = 1$ соответствует максимуму, и, следовательно,

$$(\beta\lambda)_{\max} = \frac{\pi}{2} \left[c_{\infty}^2 / c_0^2 \right] = \frac{\pi}{2} m. \quad (1)$$

1.2.23. Скорость звука в уксусной кислоте на частоте 250 кГц при температуре 20 °С и атмосферном давлении равна 1194 м/с. При увеличении частоты до 3000 кГц относительная дисперсия скорости звука составляет около 1%. Найти максимальный безразмерный коэффициент релаксационного поглощения, отнесенный к длине волны.

Ответ. Используя формулу (21.1), находим $(\beta\lambda)_{\max} = 0,032$.

1.2.24. Вычислить коэффициент поглощения, обусловленный вязкостью и теплопроводностью на частоте 500 кГц, а также максимальный релаксационный коэффициент поглощения, отнесенный к длине волны, в углекислом газе, если его плотность $\rho_0 = 1,85 \text{ кг/м}^3$, коэффициент сдвиговой вязкости $\eta = 1,4 \times 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$, $c_p/c_v = 1,3$, $c_p = 8,5 \cdot 10^2 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, коэффициент теплопроводности $\kappa = 1,63 \eta c_v$. Скорость звука в углекислом газе при 20 °С и атмосферном давлении на частоте около 100 кГц равна $c_0 = 268 \text{ м/с}$, при увеличении частоты до 1000 кГц она возрастает на 4%.

Ответ. Коэффициент поглощения, обусловленный вязкостью и теплопроводностью, равен $3,5 \text{ м}^{-1}$. Безразмерный коэффициент поглощения на длине волны равен 0,128.

1.3. Отражение и преломление звука

1.3.1. Используя условия на границе раздела двух жидких сред — равенство акустических давлений и нормальных компонент скорости по обе стороны от границы (см. рисунок), получить формулы для коэффициентов отражения и "прозрачности" по давлению.

Решение. Опуская временной множитель $\exp(-i\omega t)$, запишем потенциал звукового поля в падающей волне (среда 1):

$$\varphi_{\text{пад}} = A \exp [ik_1(x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)], \quad k_1 = \omega/c_1, \quad (1)$$

и в отраженной волне:

$$\varphi_{\text{отр}} = AV \exp [ik_1(x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1)]. \quad (2)$$

Здесь V — коэффициент отражения; c_1 и ρ_1 — соответственно скорость звука и плотность в среде 1. Потенциал поля в среде 1

$$\varphi_1 = \varphi_{\text{пад}} + \varphi_{\text{отр}}. \quad (3)$$

В среде 2

$$\varphi_2 = AW \exp [ik_2(x \sin \theta_2 - z \cos \theta_2)], \quad k_2 = \omega/c_2. \quad (4)$$

Здесь W — коэффициент прозрачности, c_2 и ρ_2 — соответственно скорость звука и плотность в среде 2.

Граничные условия при $z = 0$:

а) равенство давлений: $p_1 = p_2$, откуда (см. (1.39.3))

$$\frac{\rho_1}{\varphi_1} = \frac{\rho_2}{\varphi_2}; \quad (5)$$

б) равенство нормальных скоростей: $v_{n1} = v_{n2}$ или

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}. \quad (6)$$

Из условия (5), учитывая (1)–(4), находим при $z = 0$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{1+V}{W} = \exp [ix(k_2 \sin \theta_2 - k_1 \sin \theta_1)]. \quad (7)$$

Так как левая часть этого равенства не зависит от x , то из (7) получаем известный закон преломления — закон Снеллиуса:

$$\sin \theta_1 / \sin \theta_2 = k_2 / k_1 = c_1 / c_2 = n, \quad (8)$$

а из (7) — связь между коэффициентами отражения и прозрачности $W = (1+V)/m$, где $m = \rho_2/\rho_1$. Из (6) получаем при $z = 0$

$$(1-V) \cos \theta_1 = nW \cos \theta_2. \quad (9)$$

Из (7)–(9) выводим формулы для V и W (акустические формулы Френеля):

$$\begin{aligned} V &= \frac{m \cos \theta_1 - n \cos \theta_2}{m \cos \theta_1 + n \cos \theta_2} = \frac{m \cos \theta_1 - (n^2 - \sin^2 \theta_1)^{1/2}}{m \cos \theta_1 + (n^2 - \sin^2 \theta_1)^{1/2}} = \\ &= \frac{\rho_2 c_2 / \cos \theta_2 - \rho_1 c_1 / \cos \theta_1}{\rho_2 c_2 / \cos \theta_2 + \rho_1 c_1 / \cos \theta_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $Z_i = \rho_i c_i / \cos \theta_i$ — нормальный импеданс на границе;

$$W = 2 \cos \theta_1 / (m \cos \theta_1 + n \cos \theta_2). \quad (11)$$

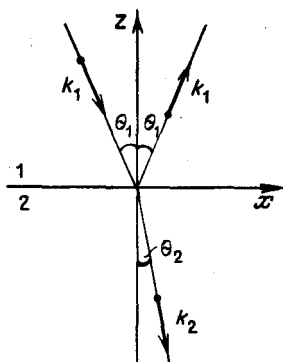
Напомним, что V и W выражают коэффициенты отражения и прозрачности по потенциалу скорости. Так как $p' = -\rho \partial \varphi / \partial t$ (см. (1.1.9)), то соответствующие коэффициенты по давлению равны

$$V_p = V, \quad W_p = \frac{\rho_2}{\rho_1} W = \frac{2m \cos \theta_1}{m \cos \theta_1 + n \cos \theta_2}. \quad (12)$$

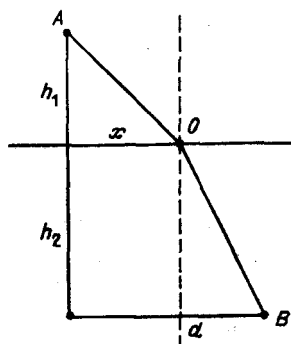
При нормальном падении волны ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) получаем

$$V_p = \frac{m-n}{m+n}, \quad W_p = \frac{2m}{m+n}. \quad (13)$$

1.3.2. Источник со скоростью звука c_1 расположен над поверхностью раздела, а приемник со скоростью звука c_2 — под



К задаче 1.3.1



К задаче 1.3.2

поверхностью раздела (см. рисунок). Источник и приемник разнесены на горизонтальное расстояние d . Показать, что время распространения сигнала вдоль луча, испытавшего преломление на поверхности раздела, минимально, если луч подчиняется закону Снеллиуса (см. (1.8)) — принцип Ферма.

Решение. Время распространения сигнала от точки A до B

$$t = \frac{AO}{c_1} + \frac{OB}{c_2} = \frac{1}{c_1} \sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{c_2} \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}.$$

Минимальное значение t определится из соотношения

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{d-x}{c_2 \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = 0,$$

откуда

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}.$$

1.3.3. Вывести формулы для коэффициентов отражения и прозрачности по колебательной скорости на плоской границе между жидкими средами в случае нормального падения волны. Сравнить их с соответствующими коэффициентами по давлению.

Решение. Запишем потенциал скорости в падающей, отраженной и прошедшей во вторую среду волнах при нормальном падении на границу:

$$\varphi_1 = A \exp(-ik_1 z), \quad \varphi_{\text{отр}} = AV \exp(ik_1 z), \quad \varphi_2 = AW \exp(-ik_2 z), \quad (1)$$

где

$$V = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}, \quad W = \frac{2\rho_1 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}. \quad (2)$$

Коэффициент отражения по скорости равен

$$V_v = \left[\frac{v_{\text{отр}}}{v_1} \right]_{z=0} = \left[\frac{\partial \varphi_{\text{отр}} / \partial z}{\partial \varphi_1 / \partial z} \right]_{z=0} = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} = -V. \quad (3)$$

Коэффициент прохождения по скорости будет иметь вид

$$W_v = \left[\frac{\partial \varphi_2 / \partial z}{\partial \varphi_1 / \partial z} \right]_{z=0} = W \frac{k_2}{k_1} = W \frac{c_1}{c_2} = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{c_1}{c_2} W. \quad (4)$$

1.3.4. Найти коэффициент прозрачности по интенсивности при нормальном падении плоской волны. Показать, что интенсивность прошедшей волны не зависит от ее направления падения.

Решение. Вычислим отношение интенсивности прошедшей через границу плоской волны к интенсивности падающей. При нормальном падении

$$W_I = Z_2 v_2^2 / (Z_1 v_{\text{пад}}^2) = (Z_2 / Z_1) (nW)^2, \quad (1)$$

$$W = 2/(m+n), \quad Z_i = \rho_i c_i, \quad n = c_1/c_2, \quad m = \rho_2/\rho_1, \quad (2)$$

$$W_I = 4Z_1 Z_2 (Z_1 + Z_2)^2. \quad (3)$$

В эту формулу импедансы сред 1 и 2 входят симметрично, поэтому коэффициенты прохождения энергии из среды 1 в среду 2 и обратно одинаковы. Однако акустические давление и скорость при переходе через границу изменяются несимметрично: если $|V_p|_{12} < |V_p|_{21}$, то $|V_v|_{12} > |V_v|_{21}$. Примером может служить переход звука через границу раздела воздух-вода и обратно из воды в воздух.

1.3.5. Исследовать формулу для коэффициентов отражения по интенсивности на границе двух сред в случаях, когда:

- 1) плотности обеих сред равны, а скорости звука различны;
- 2) плотности обеих сред различны, а скорости звука равны.

Ответ.

$$1) V_I = 1 - \left| \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} \right|^2 = \frac{2c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2}, \quad 2) V_I = 1 - \frac{|\rho_2 - \rho_1|}{(\rho_2 + \rho_1)^2} = \frac{2\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}.$$

1.3.6. Найти коэффициент отражения по давлению и коэффициент передачи энергии при нормальном падении звука из воздуха в воду и из воды в воздух. Плотность воздуха $\rho_1 = 1,29 \text{ кг/м}^3$, воды $\rho_2 = 10^3 \text{ кг/м}^3$. Скорость звука соответственно $c_1 = 340 \text{ м/с}$, $c_2 = 1480 \text{ м/с}$. Как изменится коэффициент передачи при косом падении волны на границу раздела сред?

Решение. Коэффициент отражения звука, падающего из воздуха на поверхность воды, равен

$$V_p = (\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1) / (\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1) = 0,9994,$$

т.е. давление на границе оказывается удвоенным по сравнению с давлением в падающей волне. Коэффициент отражения звука, падающего из воды в воздух, равен $V_p = -0,9994$, т.е. результирующее акустическое давление на границе с атмосферой меньше на 0,0006 давления в падающей волне. Коэффициент передачи энергии

$$W_J = 1 - |V_p|^2 = 1 - \left| \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \right|^2 = 0,0012.$$

При косом падении волны на границу коэффициент передачи энергии уменьшится.

1.3.7. Плоская звуковая волна падает по нормали из воздуха на полупространство из углекислоты. Определить коэффициент отражения V_p на границе. Во сколько раз (q) отличается амплитуда прошедшей волны от амплитуды падающей? Определить отношение амплитуд (d) звукового давления в максимумах и минимумах акустического поля в воздухе. Для воздуха $c_1 = 3,4 \times 10^4$ см/с, $\rho_1 c_1 = 42$ г/(см²·с); для углекислоты $c_2 = 2,6 \times 10^4$ см/с, $\rho_2 c_2 = 51$ г/(см²·с).

Ответ. $V_p = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = 0,1$; $q = 1 - V_p = 0,9$; $d = \frac{1+V_p}{1-V_p}$.

1.3.8. Ультразвуковой керамический преобразователь помещен в касторовое масло. Какая доля энергии акустической волны, распространяющейся в керамике, при этом передается маслу? Плотность керамики $\rho_1 = 8 \cdot 10^3$ кг/м³; скорость звука в ней $c_1 = 6,2 \cdot 10^3$ м/с. Плотность масла $\rho_2 = 0,96 \cdot 10^3$ кг/м³, скорость звука в нем $c_2 = 1,49 \cdot 10^3$ м/с. Считать для оценок, что задача сводится к нормальному падению плоской волны на границу.

Ответ. $W_J = 0,18$.

1.3.9. Решить задачу 1.3.8 для магнитострикционного никелевого преобразователя, работающего в воде. Плотность никеля $8,8 \cdot 10^3$ кг/м³, скорость звука в нем $5 \cdot 10^3$ м/с.

Ответ. $W_J = 0,13$

1.3.10. Найти коэффициент прохождения по интенсивности W_J звука при нормальном падении 1) границы раздела воздушных масс с температурами 20 и 0 °С, 2) границы воздуха и водяного пара при 20 °С. Для воздуха при $t = 0$ °С. $\rho = 1,29$ кг/м³, $c = 331$ м/с; при $t = 20$ °С. $\rho = 1,20$ кг/м³, $c = 343$ м/с. Для водяного пара $\rho = 0,58$ кг/м³, $c = 405$ м/с.

Ответ. 1) $W_J = 0,999$; 2) $W_J = 0,93$.

1.3.11. Рассчитать и построить графики функции коэффициентов отражения и прозрачности (по давлению) в зависимости от угла падения для границы раздела вода-жидкий осадок, причем в воде $\rho_1 = 1 \text{ г/см}^3$, $c = 1,5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$; в осадке $\rho_2 = 1,4 \text{ г/см}^3$, $c_2 = 1,48 \cdot 10^3 \text{ м/с}$. Определить, при каком угле падения θ_1 коэффициент отражения равен нулю (угол полной прозрачности).

Решение Нужно исходить из формулы для коэффициента отражения на границе двух жидких сред (см (1.12)). Угол полной прозрачности определяется из условия

$$\cos \theta_1 = \left(\frac{n^2 - 1}{m^2 - 1} \right)^{1/2}.$$

1.3.12. Чему равно значение давления и нормальной компоненты скорости на границе абсолютно жесткой отражающей поверхности? Записать выражение для поля давления в полупространстве, из которого падает волна, если падающая волна имеет амплитуду p'_0 , волновое число $k_1 = \omega/c_1$ и падает под углом θ_1 к нормали (см задачу 1.3.1)

Ответ Для абсолютно отражающей жесткой границы нормальная компонента скорости на границе равна нулю, а амплитуда давления равна удвоенной амплитуде давления падающей волны. Давление в точке (x, z) выражается формулой

$$p' = 2p'_0 \exp(ik_1 x \sin \theta_1) \cos(k_1 z \cos \theta_1).$$

1.3.13. Записать выражение для давления в полупространстве, из которого падает волна, на абсолютно мягкую отражающую поверхность. Чему равно значение давления и нормальной компоненты скорости на границе?

Ответ. Для абсолютно мягкой отражающей границы давление на границе равно нулю, а амплитуда скорости равна удвоенной амплитуде скорости падающей волны. Давление в точке (x, z) выражается формулой

$$p' = -2ip'_0 \exp(ik_1 x \sin \theta_1) \cos(k_1 z \cos \theta_1).$$

1.3.14. Получить из формул Френеля (см. задачу 1.3.1) предельное значение коэффициента отражения по давлению при скользющем падении ($\theta_1 \rightarrow \pi/2$).

Ответ. При $c_1 \neq c_2$ и $\theta_1 \rightarrow \pi/2$ коэффициент отражения по давлению $V_p \rightarrow -1$.

1.3.15. Найти приближенное граничное условие для двух соприкасающихся жидких сред, считая, что $c_1 \gg c_2$.

Решение. Рассмотрим выражение для коэффициента отражения через нормальные импедансы сред на границе (см.(1.10)): $V = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1)$, где $Z_i = \rho_i c_i / \cos \theta_i$, $i = 1, 2$. Если $c_1 \gg c_2$, то независимо от угла падения θ_1 из закона Снеллиуса следует, что угол θ_2 мал, т.е. преломленная волна распространяется почти перпендикулярно границе. При этом $\cos \theta_2 \approx 1$ и $Z_2 \approx \rho_2 c_2$. Из граничных условий $\rho_1 = \rho_2$ и $v_{n1} = v_{n2}$ имеем

$$(\rho_1/v_{n1})_{z=0} = (\rho_2/v_{n2})_{z=0} = Z_2 \approx \rho_2 c_2. \quad (1)$$

Таким образом, характеристики акустического поля в среде 1 удается связать только через материальные константы среды 2:

$$(\rho_1/v_{n1})_{z=0} = \rho_2 c_2. \quad (2)$$

Граничное условие (2) удобно использовать для расчета поля в среде 1, не интересуясь волной в среде 2.

1.3.16. Вывести импедансное граничное условие (граничное условие "третьего рода"), которое связывает ρ_1 и $\partial \rho_1 / \partial z$ при $z = 0$. Воспользоваться граничным условием (15.2).

Решение. Выразим v_{n1} и ρ_1 через акустический потенциал $\varphi_1 \sim \exp(-i\omega t)$:

$$\rho_1 = -\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = i\omega \rho_1 \varphi_1, \quad v_{n1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}. \quad (1)$$

С помощью (1) граничное условие (15.2) примет вид

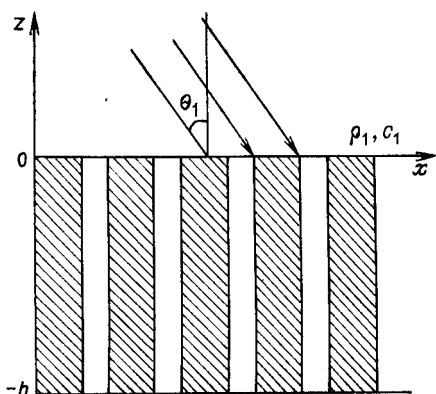
$$\left[\frac{d\rho_1}{dz} - \frac{i\omega \rho_1}{Z_2} \rho_1 \right]_{z=0} = 0. \quad (2)$$

1.3.17. Найти коэффициент отражения звука от пористой среды с узкими каналами, перпендикулярными отражающей поверхности.

Решение. Моделью такой поверхности служит гребенчатая структура, в которой ширина канавок мала по сравнению с длиной волны λ

и глубиной h (см. рисунок). Коэффициент отражения плоской волны от структуры согласно формулам Френеля

$$V = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - \rho_1 c_1}{Z_2 \cos \theta_1 + \rho_1 c_1}, \quad (1)$$



К задаче 1.3.17

где Z_2 — импеданс гребенчатой структуры. Найдем импеданс Z_2 , пренебрегая потерями энергии на стенках из-за трения. Звуковое давление в трубках

$$p_2 = A e^{-ikz} + B e^{ikz}. \quad (2)$$

Пусть на дне ($z = -h$) $v_n = 0$, т.е. $\partial p / \partial z = 0$,

$$(\partial p / \partial z)_{z=-h} = -A e^{ikh} + B e^{-ikh} = 0,$$

отсюда $A = B e^{-2ikh}$. Тогда

$$p_2 = B (e^{-2ikh} e^{-ikz} + e^{ikz}), \quad \partial p_2 / \partial z = -Bik (e^{-2ikh} e^{-ikz} - e^{ikz}).$$

На поверхности ($z = 0$)

$$p_2 = B (e^{-2ikh} + 1), \quad \partial p_2 / \partial z = -Bik (e^{-2ikh} - 1).$$

Из импедансного граничного условия находим (см. задачу 1.3.16)

$$Z_2 = -i\omega\rho_1 \left[\frac{\partial p}{\partial z} \right]_{z=0} = -\frac{\omega\rho_1}{k} \frac{e^{-2ikh} + 1}{-e^{-2ikh} + 1} = -\rho_1 c_1 \frac{e^{ikh} + e^{-ikh}}{e^{ikh} - e^{-ikh}} = i\rho_1 c_1 \operatorname{ctg}(kh).$$

Коэффициент отражения от структуры равен по (1)

$$V = \frac{i \operatorname{ctg}(kh) \cos \theta_1 - 1}{i \operatorname{ctg}(kh) \cos \theta_1 + 1}.$$

1.3.18. Плоская звуковая волна падает в воздухе под углом $\theta_1 = 60^\circ$ на границу пористой среды с капиллярами, перпендикулярными отражающей границе с неподатливым дном. Ширина канавок мала по сравнению с их глубиной h и длиной волны. Вычислить коэффициент отражения звука от такой структуры на частоте 1000 Гц, если $h = 1$ см.

Ответ. $V = |V| \exp(-i\sigma)$, $|V| = 1$, $\sigma = 0,72$.

1.3.19. Показать, что при полном внутреннем отражении и закритических углах падения амплитуда волны в отражающей среде убывает при удалении от границы среды по экспоненте.

Решение. Напишем выражение для коэффициента отражения формулу Френеля (см.(1.10)):

$$V = \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{k_2 \cos \theta_2}{k_1 \cos \theta_1} \right] \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{k_2 \cos \theta_2}{k_1 \cos \theta_1} \right]^{-1},$$

где $k_1 = \omega/c_1$, $k_2 = \omega/c_2$, θ_1 и θ_2 — углы, образованные лучом с нормалью к границе соответственно в средах 1 и 2; $c_2 > c_1$; ρ_1 и ρ_2 — плотности сред. Обозначим $a_1 = k_1 \cos \theta_1$. Из закона Снеллиуса следует, что при угле падения $\theta_1 = \arcsin(c_1/c_2)$, называемом критическим, $\theta_2 = 90^\circ$, т.е. отраженный луч на-

правлен вдоль отражающей границы. При полном внутреннем отражении $\sin\theta_2 = (c_2/c_1) \sin\theta_1$. Это указывает на то, что величина $\sin\theta_2$ должна рассматриваться как мнимая. Число $k_2 = k_2 \cos\theta_2 = i\alpha$ также мнимое. Коэффициент отражения

$$V = \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} - i \frac{\alpha}{a_1} \right] \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} + i \frac{\alpha}{a_1} \right]^{-1} = \exp(-i\sigma), \quad (1)$$

где

$$\operatorname{tg}(\sigma/2) = (\alpha/a_1)(\rho_1/\rho_2), \quad |V| = 1. \quad (2)$$

Коэффициент прозрачности также будет мнимым числом. По формуле Френеля

$$W = 2 \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{k_2}{k_1} \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \right]^{-1} = 2 \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 + \left(\frac{\alpha}{a_1} \right)^2 \right]^{-1/2} \exp(-i\frac{\sigma}{2}). \quad (3)$$

Потенциал поля в среде 2 равен

$$\varphi_2 = 2A \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 + \left(\frac{\alpha}{a_1} \right)^2 \right]^{-1/2} \exp \left[i k_1 x \sin\theta_1 + \alpha z - i \frac{\sigma}{2} \right],$$

A — амплитуда падающей на границу волны. Амплитуда поля убывает при удалении от границы по закону

$$|A_2| = 2A e^{\alpha z} \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 + \left(\frac{\alpha}{a_1} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad \alpha > 0, \quad z < 0.$$

1.3.20. Показать, что полное отражение от поглощающей среды невозможно.

Решение. Если отражающая среда поглощающая, то скорость звука и коэффициент преломления в ней являются комплексными величинами. Поэтому в формуле Френеля для коэффициента отражения

$$V = \frac{m \cos\theta_1 - (n^2 - \sin^2\theta_1)^{1/2}}{m \cos\theta_1 + (n^2 - \sin^2\theta_1)^{1/2}}, \quad m = \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

положим $(n^2 - \sin^2\theta_1)^{1/2} = a + ib$. Тогда

$$V = \frac{(m \cos\theta_1 - a) - ib}{(m \cos\theta_1 + a) + ib} = |V| e^{-i\sigma},$$

причем при всех углах падения $|V| \neq 1$ (кроме скользящего падения: $\theta_1 = 90^\circ$).

1.3.21. Вычислить угол полного отражения звука частотой 100 кГц на границе между водой и анилином. Определить фазу коэффициента отражения и глубину проникновения звука в анилин, на которой при угле падения 80° звуковое давление уменьшается в e раз. Поглощением звука в средах пренебречь. Плотности воды и анилина соответственно равны $\rho_1 = 1$ и $\rho_2 = 1,022$ г/см³, скорость звука $c_1 = 1480$ и $c_2 = 1659$ м/с.

Решение. Угол полного внутреннего отражения равен $\theta_1 = \arcsin(c_1/c_2) = 61^\circ$. Коэффициент отражения при этом $V = e^{-i\sigma}$, где $\operatorname{tg}(\sigma/2) = (\alpha/a_1)(\rho_1/\rho_2)$, $a_1 = (\omega/c_1) \cos \theta_1$. Вычислим мнимый косинус угла преломления θ_2 в среде 2 при угле падения $\theta_1 = 80^\circ$:

$$\cos^2 \theta_2 = 1 - \sin^2 \theta_2 = 1 - (c_2/c_1)^2 \sin^2 \theta_1 < 0, \quad \cos \theta_2 = i\beta.$$

Рассмотрим величину $a_2 = (\omega/c_2) \cos \theta_2 = i\alpha = i \cdot 1,8 \text{ см}^{-1}$. Фаза коэффициента $\sigma = 2,33$. Глубину d , на которой в анилине давление убывает в e раз, находим из $\alpha d = 1$: $d = 0,57 \text{ см}$.

1.3.22. Вывести асимптотическую формулу для коэффициента отражения от слабо поглощающей среды при малых углах скольжения.

Решение. Заменим в формуле (1.10) угол падения θ_1 на угол скольжения χ . Тогда

$$V = \frac{m \sin \chi - (n^2 - \cos^2 \chi)^{1/2}}{m \sin \chi + (n^2 - \cos^2 \chi)^{1/2}}, \quad (1)$$

где $m = \rho_2/\rho_1$, $n = c_1/c_2$. Полагая для малых углов $\cos^2 \chi = 1$ и $\sin \chi \approx \chi$, получим

$$V_p = \frac{m\chi(n^2-1)^{-1/2}-1}{m\chi(n^2-1)^{-1/2}+1} = \frac{\alpha\chi-1}{\alpha\chi+1}, \quad (2)$$

где $\alpha = m(n^2-1)^{-1/2}$. Разложим функцию $V_p(\chi)$ в ряд по χ :

$$V_p(\chi) = -(1 - 2\alpha\chi + 2\alpha^2\chi^2 + \dots). \quad (3)$$

При $\alpha\chi \ll 1$ удобно использовать экспоненциальное представление коэффициента отражения

$$V_p(\chi) \approx -\exp(-2\alpha\chi). \quad (3')$$

В слабо поглощающей среде (угол потерь δ мал)

$$n = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1}{c_{02}(1-i\delta)} \approx \frac{c_1}{c_{02}}(1+i\delta).$$

Отсюда находим

$$\alpha = m[n_1^2(1+i\delta)^2 - 1]^{-1/2}, \quad \text{где } n_1 = c_1/c_{02}.$$

С учетом малости δ получаем

$$\alpha = \frac{m}{(n_1^2-1)^{1/2}} \left[1 - i\delta \frac{n_1^2}{(n_1^2-1)} \right]. \quad (4)$$

Коэффициент отражения представляется выражением

$$V_p = -\exp \left[-\frac{2m\chi}{(n_1^2-1)^{1/2}} \left[1 - i\delta \frac{n_1^2}{n_1^2-1} \right] \right]. \quad (5)$$

1.3.23. Вычислить коэффициент отражения звука, падающего под малыми углами скольжения из воды на морской грунт, кото-

рый рассматривается как жидкая среда с потерями. Плотность воды $\rho_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, скорость звука в ней $c_1 = 1450 \text{ м/с}$. Плотность жидкого грунта $\rho_2 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, комплексная скорость звука в грунте $c_2 = c_{02}(1-i\delta)$, где $c_{02} = 1500 \text{ м/с}$, угол потерь δ считается не зависящим от частоты ($\delta = 0,01$)

Решение. Учитывая, что $m = 2,2$, $n_1 = 0,97$, по формуле (22.5) находим

$$V_p = -\exp\left[-2m\delta \frac{n_1^2}{(1-n_1^2)^{3/2}} + i \frac{m}{(1-n_1^2)^{1/2}}\right] \chi = -e^{-2,9\chi} e^{9,2i\chi}.$$

При $\chi \rightarrow 0$ $|V_p| \rightarrow 1$

1.3.24. Решить задачу 1.3.23 при нормальном падении волны.

Решение Полагая $\theta_1 = 0$, находим по формуле (1.10)

$$V_p = \frac{m-n}{m+n}.$$

Подставляя в эту формулу значения величин, приведенные в задаче 1.3.23, получаем

$$V_p = \frac{2,2-0,97(1+0,01i)}{2,2+0,97(1+0,01i)} = |V_p| e^{i\sigma}, \quad |V_p| = 0,22, \quad \delta = 11,7.$$

1.3.25. Комплексный коэффициент отражения звука от "жидкого" грунта при нормальном падении луча $V = 0,45 \exp(0,01)$ Вычислить параметры грунта—скорость звука и коэффициент потерь—и найти коэффициент затухания в грунте звука частотой 30 кГц. Скорость звука в воде равна 1460 м/с, плотность воды 1,0 г/см³. Плотность грунта 2,2 г/см³.

Решение Коэффициент отражения звука от грунта равен

$$V = |V| \exp(i\sigma) = \frac{m-n}{m+n}, \quad (1)$$

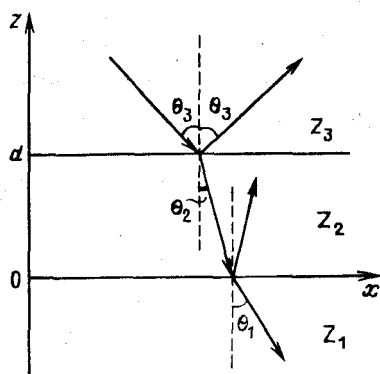
где $m = \rho_2/\rho_1 = 2,2$, $n = c_1/c_2$, $c_2 = c_{02}(1-i\delta)$ —комплексная скорость звука в грунте, δ —угол потерь в грунте, $c_1 = 1460 \text{ м/с}$, $\beta = (2\pi f/c_{02}) \delta$ —коэффициент затухания звука в грунте. Подставляя в (1) выражение для $|n|$ и значения $\sigma = 0,01$, $m = 2,2$, $|V| = 0,45$, находим последовательно σ и c_{02} , коэффициент затухания β при частоте 30 кГц: $c_{02} = 1742 \text{ м/с}$, $\beta = 1,2 \text{ м}^{-1}$.

1.4. Отражение от слоя и прохождение через слой

1.4.1. Найти коэффициент отражения звука от плоского жидкого слоя с нормальным импедансом Z_2 и толщиной d , разделяющего два полупространства с нормальными импедансами Z_1 и Z_3 (см. рисунок).

Решение. Нормальный импеданс каждой среды $Z_j = \rho_j c_j / \cos \theta_j$, $j = 1, 2, 3$. Акустическое давление внутри слоя есть сумма полей двух плоских волн, имеющих отрицательную и положительную проекции волнового вектора на ось z (т.е. бегущих "вниз" и "вверх" на рисунке):

$$p_2 = \left[A \exp(-ia_2 z) + B \exp(ia_2 z) \right] \times \\ \times \exp(ib_2 x).$$



К задаче 1.4.1

В этой формуле опущен временной множитель $\exp(-i\omega t)$ и $a_2 = k_2 \cos \theta_2$, $b_2 = k_2 \sin \theta_2$, $k_2 = \omega/c_2$. Нормальная составляющая скорости в том же слое

$$v_2 = Z_2^{-1} \left[A \exp(-ia_2 z) - B \exp(ia_2 z) \right] \exp(ib_2 x).$$

Эти выражения позволяют рассчитать импеданс на нижней границе ($z = 0$) слоя

$$Z_1 = \left[\frac{p_2}{v_2} \right]_{z=0} = Z_2 \frac{A+B}{A-B},$$

откуда определяется отношение амплитуд двух волн в слое: $B/A = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2)$. Найдем входной ($z = d$) импеданс слоя:

$$Z_{\text{вх}} = \left[\frac{p_2}{v_2} \right]_{z=d} = Z_2 \frac{\exp(-ia_2 d) + (B/A) \exp(ia_2 d)}{\exp(-ia_2 d) - (B/A) \exp(ia_2 d)} = \\ = Z_2 \frac{Z_1 \cos(a_2 d) - i Z_2 \sin(a_2 d)}{Z_2 \cos(a_2 d) - i Z_1 \sin(a_2 d)}. \quad (1)$$

Перейдем к рассмотрению поля в верхней (третьей) среде, состоящего из суммы падающей и отраженной от слоя волн:

$$p_3 = [C \exp(-ia_3(z-d)) + D \exp(ia_3(z-d))] \exp(ib_3 x),$$

$$v_3 = Z_3^{-1} [C \exp(-ia_3(z-d)) + D \exp(ia_3(z-d))] \exp(ib_3 x),$$

где $a_3 = k_3 \cos \theta_3$, $b_3 = k_3 \sin \theta_3$, $k_3 = \omega/c_3$. Отсюда находим другое выражение для входного импеданса слоя:

$$Z_{\text{вх}} = \left[\frac{p_3}{v_3} \right]_{z=d} = \frac{C+D}{C-D} Z_3. \quad (2)$$

Из этой формулы, учитывая выражение (1), находим коэффициент отражения звука от слоя

$$V = \frac{D}{C} = \frac{Z_{\text{вх}} - Z_3}{Z_{\text{вх}} + Z_3} = \frac{Z_2(Z_1 - Z_3) \cos \psi - i(Z_2^2 - Z_1 Z_3) \sin \psi}{Z_2(Z_1 + Z_3) \cos \psi - i(Z_2^2 + Z_1 Z_3) \sin \psi}, \quad (3)$$

где $\psi = k_2 d \cos \theta_2$, $k_2 = \omega/c_2$.

1.4.2. Найти коэффициент отражения звука от плоского слоя толщиной d , разделяющего две одинаковые по своим характеристикам среды.

Решение. Полагая в формуле (1.3) $Z_3 = Z_1$, находим

$$V = - \frac{i(Z_2^2 - Z_1^2) \sin \psi}{2Z_1 Z_2 \cos \psi - i(Z_2^2 + Z_1^2) \sin \psi} = \frac{s^{-1} - s}{s^{-1} + s + 2i \operatorname{ctg} \psi},$$

где $s = \rho_2 c_2 \cos \theta_1 / (\rho_1 c_1 \cos \theta_2)$. Модуль коэффициента отражения

$$|V| = (s^{-1} - s) [(s^{-1} + s)^2 + 4 \operatorname{ctg}^2(k_2 d \cos \theta_2)]^{-1/2}. \quad (1)$$

1.4.3. Вычислить входной импеданс поглощающего слоя на твердой стенке для нормального падения волны.

Решение. Входной импеданс жидкого непоглощающего слоя, расположенного на полупространстве с импедансом Z_1 , при нормальном падении звука на слой выражается формулой (1.1):

$$Z_{\text{вх}} = Z_2 \frac{\exp(-ik_2 d) + (B/A) \exp(ik_2 d)}{\exp(-ik_2 d) - (B/A) \exp(ik_2 d)}.$$

Эту формулу можно обобщить на случай слоя, поглощающего звук, для чего следует заменить k_2 на $k + ia$:

$$Z_{\text{вх}} = Z_2 \frac{\exp(\gamma d) + (B/A) \exp(-\gamma d)}{\exp(\gamma d) - (B/A) \exp(-\gamma d)},$$

где $\gamma = a - ik$, $k = \omega/c$. Отсюда следует

$$Z_{\text{вх}} = Z_2 \frac{Z_2 \operatorname{sh}(\gamma d) + Z_1 \operatorname{ch}(\gamma d)}{Z_1 \operatorname{sh}(\gamma d) + Z_2 \operatorname{ch}(\gamma d)}.$$

В том случае, когда слой расположен на твердой стенке, $Z_1 \rightarrow \infty$ и $Z_{\text{вх}} = Z_2 \operatorname{cth}(\gamma d)$. Если слой непоглощающий, то $\gamma = -ik$ и $Z_{\text{вх}} = iZ_2 \operatorname{cth}(kd)$ — импеданс чисто мнимый.

1.4.4. Найти условия акустического согласования двух непоглощающих сред с помощью промежуточного слоя толщины d . Рассмотреть нормальное падение волны.

Решение. Коэффициент отражения от плоского слоя с импедансом Z_2 , разделяющего среды Z_1 и Z_3 , при нормальном падении можно записать как

$$V = \frac{(V_{23} + V_{12}) \cos \psi + i(V_{23} - V_{12}) \sin \psi}{(1 + V_{23} V_{12}) \cos \psi + i(1 - V_{23} V_{12}) \sin \psi},$$

где $\psi = k_2 d$, $V_{ik} = (Z_i - Z_k) / (Z_i + Z_k)$ — коэффициент отражения на границе i -й и k -й сред. Квадрат модуля коэффициента отражения от слоя равен

$$r = |V|^2 = \frac{(V_{23} + V_{12})^2 - 4V_{23} V_{12} \sin^2 \psi}{(1 + V_{23} V_{12})^2 - 4V_{23} V_{12} \sin^2 \psi} = \frac{a^2 - c \sin^2 \psi}{b^2 - c \sin^2 \psi}, \quad (1)$$

где

$$a = V_{23} + V_{12} = \frac{2Z_2(Z_1 - Z_3)}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)},$$

$$b = 1 + V_{23}V_{12} = \frac{2Z_2(Z_1 + Z_3)}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)}.$$

Пусть $Z_1 > Z_2 > Z_3$. Тогда $a > 0$, $b > 0$, но $a < b$. Числитель и знаменатель (1) осциллируют при изменении ψ . Для нахождения экстремальных значений обозначим $r = f_1(\psi)/f_2(\psi)$, тогда

$$f'_1(\psi) = f'_2(\psi) = -2c \sin \psi \cos \psi = 0, \quad f''_1(\psi) = -2ccos(2\psi).$$

Отсюда следует, что r имеет минимум при

$$d = (m+1/2) \lambda/2, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Величина r максимальна при $d = m\lambda/2$. Первый минимум коэффициента отражения соответствует "четвертьволновой" пластинке, толщина которой $d = \lambda/4$. При этом

$$r_{\min} = \frac{a^2 - c}{b^2 - c}, \quad |V|_{\min} = \frac{V_{23} - V_{12}}{1 - V_{23}V_{12}}.$$

Отражение от слоя полностью отсутствует при $V_{23} = V_{12}$, т.е. если $(Z_2 - Z_3)/(Z_2 + Z_3) = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2)$. Отсюда получаем условие согласования сред: $Z_2^2 = Z_1 Z_3$ (четвертьволновый просветляющий слой).

1.4.5. При какой толщине жидкого слоя, разделяющего две различные среды, свойства материала слоя не влияют на прохождение звука из одной среды в другую?

Решение. Положим в (4.1) $d = \lambda/2$ (полуволновый слой). Тогда

$$\psi = k_2 d = \pi, \quad r = \frac{a^2}{b^2}, \quad |V| = \frac{a}{b} = \frac{Z_1 - Z_3}{Z_1 + Z_3},$$

т.е. свойства промежуточного слоя из этой формулы выпадают.

1.4.6. Рассчитать "просветляющий" слой, обеспечивающий наилучшую передачу звука из воды в воздух.

Решение. В соответствии с формулой (4.2) наилучшую звукопрозрачность обеспечивает слой вещества с минимальной толщиной $d = \lambda/4$, если его удельное акустическое сопротивление удовлетворяет условию $Z = (Z_1 Z_2)^{1/2}$. Здесь $Z_1 = 1,5 \cdot 10^5$, $Z_2 = 42$ — акустические сопротивления воды и воздуха в единицах СГС [г/(см²·с)]. Отсюда находим импеданс просветляющего слоя $Z \approx 2,45 \cdot 10^3$.

Выберем в качестве звукопрозрачного слоя пористую резину. Пусть из общего объема $V_1 + V_2$ часть V_1 относится к чистой

резине, V_2 — к суммарному объему воздушных пор. Скорость звука в резине $c = (\kappa/\rho)^{1/2}$, где ρ , κ — плотность и адиабатический модуль упругости пористой резины:

$$\rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2} \approx \frac{\rho_1 V_1}{V_1 + V_2}, \quad \kappa = \frac{V_1 + V_2}{V_1/\kappa_1 + V_2/\kappa_2}.$$

Здесь $\rho_1 = 1,1 \text{ г/см}^3$, $\rho_2 = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$, $\kappa_1 = 2 \cdot 10^{10}$, $\kappa_2 = 1,4 \cdot 10^6 \text{ г/(см} \cdot \text{с}^2)$ — плотности и модули упругости чистой резины и воздуха. На основании этих данных находим

$$Z^2 = (\rho c)^2 = \rho \kappa = \rho_1 \left[\frac{1}{\kappa_1} + \frac{V}{V_1^2} \frac{1}{\kappa_2} \right]^{-1} = (2,45)^2 \cdot 10^6 [\text{г/(см}^2 \cdot \text{с)}]^2,$$

откуда $V_1/V_2 \approx 3,9$, что соответствует 26%-ному содержанию пузырьков воздуха в общем объеме. Произведение толщины слоя резины на частоту волны должно равняться

$$df = \frac{c}{4} = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{V}{V_1^2} \right] \left[\rho_1 \left[\frac{1}{\kappa_1} + \frac{V}{V_1^2} \frac{1}{\kappa_2} \right] \right]^{-1} \approx 7 \text{ м/с}.$$

1.4.7. Найти выражение для коэффициента прозрачности (по интенсивности) плоского слоя, разделяющего две одинаковые среды. Рассмотреть нормальное падение волны.

Решение. Пользуясь формулой (2.1), найдем ($s = \rho_2 c_2 / \rho_1 c_1$)

$$|W|^2 = 1 - |V|^2 = \left[\frac{1}{4} \left(s + \frac{1}{s} \right)^2 \sin^2(k_2 d) + \cos^2(k_2 d) \right]^{-1}. \quad (1)$$

1.4.8. Коэффициентом звукоизоляции называют величину, обратную коэффициенту прозрачности (по интенсивности). Получить выражение для η на низких частотах; считать, что твердая стенка используется для звукоизоляции в воздухе.

Решение. Полагая в формуле (7.1) $k_2 d \ll 1$ (низкие частоты) и, кроме того, $\rho_1 c_1 \ll \rho_2 c_2$ ($s^{-1} \ll 1$), найдем

$$\eta = |W|^{-1} \approx \frac{1}{4} \left[\frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right]^2 (k_2 d)^2 + 1 \approx \left[\frac{\omega m}{2 \rho_1 c_1} \right]^2. \quad (1)$$

Здесь $m = \rho_2 d$ — масса стенки, приходящаяся на единицу площади. Подставляя значения скорости звука c и плотности ρ_1 воздуха, получим формулу для оценок: $\eta = m^2 f^2 / 200$, $[m] = \text{г/см}^2$, $[f] = \text{Гц}$.

1.4.9. Оценить коэффициент звукоизоляции (в децибелах) кирпичной стенки (плотность $\rho = 1,7 \text{ г/см}^3$) толщиной 27 см в воздухе на частоте 2000 Гц. Поглощением звука в материале стенки пренебречь.

Решение. Пользуясь оценочной формулой предыдущей задачи, найдем $\alpha = 10 \lg(m^2 f^2 / 200) \approx 76 \text{ дБ}$.

1.4.10. Во сколько раз уменьшается мощность плоской звуковой волны с частотой 1 кГц при прохождении через стальной щит толщиной 2,5 см, который разделяет два резервуара с водой. Плотность стали 7,8 г/см³, скорость звука в ней 5100 м/с.

Решение. В задаче 1.4.2 рассчитан модуль коэффициента отражения от плоского слоя (см. (2.1)). Поскольку поглощение звука в стали не учитывается, коэффициент прохождения по мощности $|W|^2 = 1 - |V|^2$ меньше 0,01.

1.4.11. Слой воды разделяет касторовое масло и ртуть. При какой минимальной толщине слоя возникают наилучшие условия перехода звука частотой 1 кГц из масла в ртуть при нормальном падении? Найти коэффициент отражения. Плотности масла, воды, ртути: $\rho_1 = 0,96$, $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = 13,6$ г/см³; скорости звука. $c_1 = 1490$, $c_2 = 1468$, $c_3 = 1453$ м/с.

Решение. Пользуясь результатами задачи 1.4.4, оценим $d = c/4f = 0,37$ м. Коэффициент отражения при этом равен

$$|V| = \left| [(\rho_2 c_2)^2 - \rho_1 \rho_3 c_1 c_3] [(\rho_2 c_2)^2 + \rho_1 \rho_3 c_1 c_3] \right|^{-1} = 0,86.$$

1.5. Движение и звук

1.5.1. Вывести формулы эффекта Доплера. Источник излучает непрерывный тон или длинный "радиоимпульс" с частотой заполнения f_0 . Какую частоту регистрирует приемник в следующих ситуациях: 1) источник звука движется со скоростью u вдоль оси x относительно неподвижной среды, приемник неподвижен; 2) наблюдатель (приемник) движется со скоростью v относительно среды, источник неподвижен; 3) источник и наблюдатель одновременно перемещаются вдоль оси x со скоростями u и v ; 4) источник и наблюдатель со скоростями u и v движутся в произвольных направлениях x ?

Решение. 1. Если источник движется в направлении излучаемых волн, то волны "укорачиваются", их длина $\lambda = (c-u)/f_0$, где c — скорость звука. Неподвижный приемник на оси x регистрирует звук с частотой $f > f_0$:

$$f = c/\lambda = f_0/(1-u/c). \quad (1)$$

Когда источник движется в противоположном (относительно излучаемых волн) направлении, волны "удлиняются", а частота f уменьшается по сравнению с f_0 ; для этого случая в формуле (1) следует полагать $u < 0$.

2. Если приемник движется по направлению к источнику, волны проходят мимо него со скоростью $c + v$. Поэтому частота

$$f = \frac{c+v}{\lambda} = \frac{c+v}{c} f_0 = \left(1 + \frac{v}{c}\right) f_0 \quad (2)$$

Отрицательные v в формуле (2) отвечают движению приемника от источника.

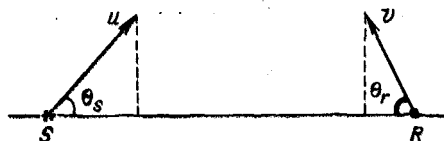
3. При одновременном коллинеарном движении источника и приемника получаем результат в виде очевидной комбинации формул (1), (2):

$$f = f_0 \frac{1+v/c}{1-u/c} \quad (3)$$

О связи знаков скоростей u , v с направлениями движения говорилось выше.

4. Пусть направления движения источника и наблюдателя составляют углы θ_s и θ_r с прямой, соединяющей источник и приемник (см. рисунок). Тогда по-прежнему справедлива формула

(3), только вместо скоростей необходимо брать их проекции на ось x :



К задаче 1.5.1

$$f = f_0 \frac{1+(v/c)\cos\theta_r}{1-(u/c)\cos\theta_s} \quad (4)$$

1.5.2. Локомотив приближается к наблюдателю со скоростью 20 м/с. Какую частоту основного тона гудка услышит наблюдатель, если для машиниста она равна 300 Гц?

Ответ. 320 Гц (см. формулу (1.1)).

1.5.3. Звучащий камертон приближается к стене со скоростью $v = 25$ см/с. Неподвижный наблюдатель, воспринимающий одновременно прямой и отраженный сигналы, слышит биения с частотой 3 Гц. Определить частоту колебаний камертона.

Решение. Биения возникают при сложении двух сигналов: от удаляющегося камертона $f_1 = f_0(1+v/c)^{-1}$ и отраженного от стенки $f_2 = f_0(1-v/c)^{-1}$, к которой камертон приближается. Частота биений

$$\Delta f = f_2 - f_1 = f_0 \frac{2v/c}{1-v^2/c^2},$$

отсюда находим $f_0 \approx 2$ кГц.

1.5.4. Поезд движется со скоростью u . Когда он подходит к туннелю в вертикальной скале, машинист дает гудок, имеющий основную частоту f_0 . Эхо слышит машинист, а также сторож, стоящий в этот момент на земле на уровне последнего вагона.

Какой частоты прямой звук и эхо слышит каждый из них? Какой частоты биения они услышат?

Ответ. Машинист слышит гудок на частоте f_0 , а эхо — на частоте $f_1 = f_0(1+u/c)/(1-u/c)$. Сторож слышит гудок на частоте $f_2 = f_0/(1+u/c)$, а эхо — на частоте $f_3 = f_0/(1-u/c)$. Разность частот $\Delta f = f_1 - f_0 = f_3 - f_2 \approx 2(u/c)f_0$ одинакова. Поэтому и сторож, и машинист услышат биение на частоте Δf .

1.5.5. Самолет летит к вертикальной стене со скоростью, равной половине скорости звука ($u = c/2$), и излучает тональный сигнал на частоте $f_0 = 1$ кГц. Какую частоту имеет эхосигнал, отраженный от скалы и воспринимаемый летчиком?

Ответ. $f = f_0(1+u/c)/(1-u/c) = 3$ кГц.

1.5.6. Теплоход плывет параллельно берегу озера со скоростью $v = 20$ км/ч и подает гудки на частоте $f_0 = 200$ Гц. На какой частоте звук принимает водитель автомобиля, движущегося параллельно берегу со скоростью $u = 80$ км/ч, если звуковой луч образует с направлениями движения угол θ ? Рассмотреть случаи $\theta = 60, 90, 120^\circ$.

Ответ. По формуле $f = f_0(1-ucos\theta/c)/(1-vcos\theta/c)$ находим значения частот 182, 200, 233 Гц.

1.5.7. Рассмотрим сдвиговое течение: полупространство $z < 0$ (среда 2) движется с постоянной скоростью u_0 вдоль границы — оси x . Полупространство $z > 0$ (среда 1) неподвижно. Волна (см. рисунок) падает из неподвижной среды 1 на границу $z = 0$ с движущейся средой 2. Вывести формулы для коэффициентов отражения V и прохождения W .

Решение. Волновое уравнение для звукового давления в среде 1 имеет вид

$$\partial^2 p_1 / \partial t^2 = c^2 \Delta p_1. \quad (1)$$

Волновое уравнение в среде 2 учитывает "ветровой снос" волны:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 p_2 = c^2 \Delta p_2. \quad (2)$$

Звуковое давление в среде 1 есть сумма падающей и отраженной волн:

$$p_1 = A [\exp(ik_{1z}z) + V \exp(-ik_{1z}z)] \exp(-i\omega_1 t + ik_{1x}x). \quad (3)$$

Здесь $k_1^2 = k_{1x}^2 + k_{1z}^2 = \omega_1^2/c^2$, при этом условии (3) есть решение уравнения (1). Звуковое давление прошедшей в среду 2 волны представим в виде

$$p_2 = A W \exp(-i\omega_2 t + ik_{2x}x + ik_{2z}z), \quad (4)$$

причем из волнового уравнения (2) следует

$$k_2^2 = k_{2x}^2 + k_{2z}^2 = (\omega_2 - u_0 k_{2x})^2 / c^2. \quad (5)$$

Динамическое граничное условие $p_1 = p_2$ при $z = 0$ приводит к соотношению

$$(1+V) \exp(-i\omega_1 t + i k_{1x} x) = W \exp(-i\omega_2 t + i k_{2x} x). \quad (6)$$

Поскольку (6) должно выполняться тождественно при любых x и t , получаем

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega, \quad k_{1x} = k_{2x} = k_x, \quad W = 1 + V. \quad (7)$$

Соотношения $k_{1x} = k_{2x}$ и (5) перепишем в виде

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2, \quad k_2^2 = k_1^2 \left[1 - \frac{u_0^2}{c^2} \sin^2 \theta_1 \right]^2,$$

откуда находим угол преломления

$$\sin \theta_2 = \frac{k_1}{k_2} \sin \theta_1 = \frac{\sin \theta_1}{1 - (u_0/c) \sin \theta_1}. \quad (8)$$

Мы получили $\theta_2 > \theta_1$, т.е. благодаря увлечению волны движущейся средой 2 волновой вектор прошедшей волны составляет с границей меньший угол, чем вектор падающей (см. рисунок).

Для расчета коэффициентов V , W требуется еще одно граничное

условие (кинематическое) равенство вертикальных смещений $\xi_1 = \xi_2$ на границе $z = 0$. Для расчета смещений воспользуемся уравнением движения, записанным для сред 1 и 2:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = - \frac{\partial p_1}{\partial z}, \quad \rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 \xi_2 = - \frac{\partial p_2}{\partial z}. \quad (9)$$

Подставляя в уравнения (9) акустические давления (3), (4), приведем условие $\xi_1 = \xi_2$ к виду

$$\frac{i k_{1z} A (1-V)}{\rho_0 \omega^2} = \frac{i k_{2z} A W}{\rho_0 \omega^2 [1 - (u_0/c) \sin \theta_1]}.$$

Обозначая $\alpha = 1 - (u_0/c) \sin \theta_1$ и учитывая закон преломления $k_2/k_1 = \alpha$ (см. (8)), а также $W = 1 + V$ (см. (7)), найдем

$$V = \frac{\alpha^2 \cos \theta_1 - (\alpha^2 - \sin^2 \theta_1)^{1/2}}{\alpha^2 \cos \theta_1 + (\alpha^2 - \sin^2 \theta_1)^{1/2}}, \quad W = \frac{2 \alpha^2 \cos \theta_1}{\alpha^2 \cos \theta_1 + (\alpha^2 - \sin^2 \theta_1)^{1/2}}. \quad (10)$$

1.5.8. Звук падает под углом $\theta = 45^\circ$ на границу атмосферного ветра, движущегося со скоростью $u_0 = 10$ м/с. Вычислить коэффициенты отражения и прозрачности.

Ответ. Пользуясь (7.10), найдем $\alpha^2 \approx 0,94$, $V \approx 2 \cdot 10^{-3}$, $W \approx 1$.

1.5.9. Найти выражение для скорости распространения звука в однородном потоке, движущемся со скоростью u .

Решение. В движущейся системе координат связанной с потоком, монохроматическая волна имеет обычный вид:

$$p = A \exp(-i\omega_0 t + i k r'), \quad \omega_0 = ck. \quad (1)$$

В неподвижной системе координат радиус-вектор $\mathbf{r}$ связан с $\mathbf{r}'$ соотношением $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$. Таким образом, фаза в формуле (1) равна $i k \mathbf{r} - i(ck + \mathbf{u}k)t$, откуда $\omega = ck + \mathbf{u}k$. Дифференцируя это выражение, найдем скорость распространения волны

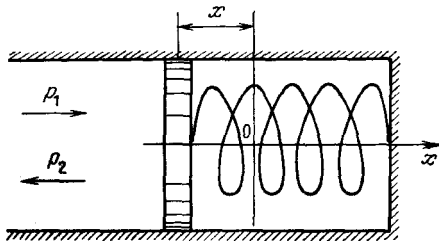
$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{ck}{k} + u, \quad (2)$$

равную сумме двух векторов: скорости звука в неподвижной среде и скорости потока.

1.5.10. Источник звука посылает сигнал в направлении ветра, скорость которого u . Звук отражается от стенки, удаленной на расстоянии l , и принимается источником. Через какое время будет принят отраженный сигнал?

Ответ. $\tau = l/(c+u) + l/(c-u) = (2l/c)(1-u^2/c^2)^{-1}$. При $u \rightarrow c$ время τ стремится к бесконечности.

1.5.11. Низкочастотный звук распространяется вдоль оси x цилиндрической трубки с площадью поперечного сечения S (см. рисунок). Звуковое поле воздействует на колебательную систему, состоящую из поршня массой m и пружинки с жесткостью k . Трение пропорционально скорости поршня ($F_{\text{тр}} = -a\dot{x}$), где x — смещение из положения равновесия.



К задаче 1.5.11

Определить, при каких условиях возможно полное поглощение волны, падающей на поршень.

Решение. Вынужденные колебания поршня под действием акустического давления $p(x, t)$ описываются уравнением

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{S}{m} p \quad 2\delta = a/m, \quad x = 0, t, \quad (1)$$

где $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ — частота собственных колебаний поршня. Акустическое поле при $x < 0$ есть сумма двух плоских волн — падающей и отраженной. Давление и колебательная скорость:

$$p = p_1 \left[t - \frac{x}{c} \right] + p_2 \left[t + \frac{x}{c} \right], \quad u = \frac{1}{\rho c} \left[p_1 \left[t - \frac{x}{c} \right] - p_2 \left[t + \frac{x}{c} \right] \right]. \quad (2)$$

Индекс 1 относится к падающей, 2 — к отраженной волне. Используем формулы (2) для того, чтобы в правую часть уравнения (1) входило бы давление только падающей волны:

$$p(x = 0, t) = p_1(t) + p_2(t) = 2p_1(t) - \rho c u(t). \quad (3)$$

Учтем, что на поверхности поршня $u(t) = \dot{x}$, и с учетом (3) приведем уравнение (1) к виду

$$\ddot{x} + \left[2\delta + \frac{S}{m} \rho c \right] \dot{x} + \omega_0^2 x = 2 \frac{S}{m} p_1(t). \quad (4)$$

Дополнительное слагаемое $(S/m)\rho c$ в диссипативном члене уравнения (4) описывает потери на излучение колеблющегося поршня.

Полагая в (4) $p_1 = p_0 \exp(-i\omega t)$, $x = A \exp(-i\omega t)$, где p_0 , ω — амплитуда давления и частота в падающей волне, A — амплитуда колебаний поршня, найдем

$$A = 2 \frac{S}{m} p_0 \left[\omega_0^2 - \omega^2 - i \cdot 2\delta\omega \left[1 + \frac{\rho c S}{2\delta m} \right] \right]^{-1}. \quad (5)$$

С учетом (5), (3) вычислим отношение амплитуд отраженной и падающей волн:

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{p_0 + i\omega\rho c A}{p_0} = 1 + i \cdot 2\omega\rho c \frac{S}{m} \left[\dots \right]^{-1}. \quad (6)$$

Выражения в квадратных скобках (5), (6) совпадают. На основе (6) рассчитываем коэффициент отражения по интенсивности:

$$K_{\text{отр}}^2 = \left| \frac{p_2}{p_1} \right|^2 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2 [1 - \rho c S / (2\delta m)]^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2 [1 + \rho c S / (2\delta m)]^2}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что отраженная волна на частоте $\omega = \omega_0$ будет отсутствовать при $\rho c S = 2\delta m$; в этом случае падающая на поршень волна полностью поглощается. В этой задаче рассмотрена простейшая модель так называемого резонансного звукопоглотителя, который используется на практике для снижения уровня низкочастотного шума.

2. ВОЛНЫ В ТРУБАХ, ВОЛНОВОДАХ И РЕЗОНАТОРАХ

2.1. Длинные волны в трубах

2.1.1. Вывести уравнение, описывающее распространение звука в узком слое вязкой среды, ограниченном двумя параллельными твердыми плоскостями. Расстояние между ними много меньше длины волны. Колебательная скорость частиц среды одинакова во всем поперечном сечении, за исключением тонкого погранслоя у стенок, где она убывает до нуля. Установить вид диссипативных членов уравнения, описывающих действие вязкости в объеме слоя и вблизи границ.

Решение. Воспользуемся линеаризованными уравнениями динамики вязкой сплошной среды, описывающими малые возмущения:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + c_0^2 \nabla \rho' - \eta \Delta \mathbf{v} - \left[\xi + \frac{\eta}{3} \right] \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

В отличие от (1.2.1.1) и (1.2.1.2) в уравнении (2) движение не предполагается потенциальным. Исключая приращение плотности, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\eta}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \mathbf{v} + \frac{\xi + \eta/3}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (3)$$

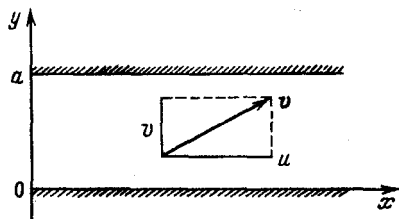
отличающееся от волнового уравнения (1.2.1.3). Для упрощения уравнения (3) обратимся к рисунку.

С учетом того, что $\mathbf{v} = (u, v, w = 0)$, запишем уравнение (3) в проекции на ось x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \frac{\eta}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\xi + \eta/3}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]. \quad (4)$$

Усредним полученное уравнение по сечению. Обозначим для этого среднюю скорость через

$$\bar{u} = \frac{1}{a} \int_0^a u \, dy \quad (5)$$



К задаче 2.1.1

и учтем, что на стенках трубы обе компоненты u , v обращаются в нуль. В результате получим

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2} = \frac{\eta}{\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^a. \quad (6)$$

Левая часть (6) совпадает с уравнениями (1.2.1.4), а правая учитывает пристеночную вязкость

Пристеночный градиент скорости рассчитывается из задачи о погранслое, следующей из уравнения (2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho_0}. \quad (7)$$

Уравнение (7) описывает колебания жидкости вблизи стенок. Скорость u возрастает от нуля (при $y = 0$) до значения $\bar{u}$ (при $y \rightarrow \infty$, т.е. вдали от погранслоя). Известное решение задачи:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^t \frac{1}{(\nu(t-\tau))^{1/2}} \left\{ \exp \left[-\frac{(y-z)^2}{4\nu(t-\tau)} \right] - \exp \left[-\frac{(y+z)^2}{4\nu(t+\tau)} \right] \right\} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} dz d\tau \quad (8)$$

позволяет рассчитать градиент скорости на стенке

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}. \quad (9)$$

Градиент на стенке $y = a$, очевидно, имеет ту же величину, но противоположный знак. Подставляя (9) в (6), придем к искомому уравнению

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2} + \frac{2}{a} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} = 0. \quad (10)$$

Здесь знак усреднения по сечению (черта сверху) опущен. Третий член в (10) описывает действие вязкости в объеме слоя, четвертый член учитывает наличие пограничного слоя. Заметим, что в случае круглой трубы константа a равняется ее радиусу. Для цилиндрической трубы с поперечным сечением произвольной формы a есть константа порядка ее характерного размера.

2.1.2. Показать, что при распространении звука в узкой трубе наблюдается дисперсия. Найти закон дисперсии и частотную зависимость коэффициента затухания для слабого поглощения. Записать связь скорости и давления в бегущей волне, выражение для текущего импеданса.

Решение Ищем закон дисперсии для уравнения (1.10) в виде $u = A \exp(i\omega t - ikx)$ Искомая связь волнового числа k и частоты ω имеет вид

$$-\omega^2 + c_0^2 k^2 + i \frac{b}{\rho_0} \omega k^2 - \sqrt{\frac{2\nu}{a}} (1-i) \omega^{3/2} = 0. \quad (1)$$

В случае слабого влияния вязкости (третий и четвертый члены в (1) малы) получим приближенное соотношение

$$k \approx \frac{\omega}{c_0} \left[1 - i \frac{b\omega}{2c_0^2 \rho_0} + \frac{1}{a} \left[\frac{v}{2\omega} \right]^{1/2} (1-i) \right]. \quad (2)$$

Отсюда следует, что коэффициент затухания (мнимая часть k) равен

$$\beta = \frac{b\omega^2}{2c_0^3 \rho_0} + \frac{1}{a} \left[\frac{\eta \omega}{2c_0^2 \rho_0} \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Дополнительное затухание из-за присутствия стенок пропорционально $\omega^{1/2}$, в отличие от свободного пространства, где $\beta \sim \omega^2$ (см. также (1.2.2.3)). Из формулы (2), кроме того, следует, что

$$c(\omega) \approx c_0 \left[1 - \left[\frac{\eta}{2\rho_0 \omega a^2} \right]^{1/2} \right], \quad (4)$$

т.е. скорость распространения из-за стенок уменьшается тем сильнее, чем ниже частота. Поля давления и скорости в среде без поглощения ($k = \omega/c_0$) складываются из прямой и обратной волн:

$$p = P_+ \exp(i\omega t - ikx) + P_- \exp(i\omega t + ikx),$$

$$\rho_0 c_0 u = P_+ \exp(i\omega t - ikx) - P_- \exp(i\omega t + ikx).$$

Обозначим отношение амплитуд волн, бегущих в противоположных направлениях, как $P_-/P_+ = \exp(-2\psi)$, где ψ — комплексное число. Тогда

$$p = 2P_+ \exp(i\omega t - \psi) \operatorname{ch}(\psi - ikx), \quad \rho_0 c_0 u = 2P_+ \exp(i\omega t - \psi) \operatorname{sh}(\psi - ikx).$$

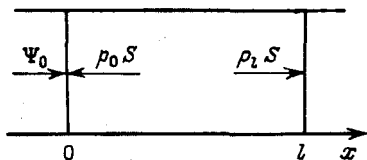
Текущий импеданс в точке с координатой x равен

$$Z(x) = p(x)/u(x) = \rho_0 c_0 \operatorname{cth}(\psi - ikx).$$

В дальнейшем индекс 0 у ρ_0 и c_0 мы опускаем.

2.1.3. Вычислить входной ($x = 0$) акустический импеданс Z_0 в узкую трубу постоянного сечения, заполненную поглощающей средой и нагруженную на конце ($x = l$) на импеданс Z_l (см. рисунок).

Решение. Пусть при $x = 0$ имеется поршень, на который действует сила $\Psi = \Psi_0 \exp(i\omega t)$. При отсутствии в трубе среды импеданс поршня, равный отношению действующей силы к скорости поршня, зависит только от механических свойств поршня и называется его собственным входным импедансом ($Z_c = \Psi_0/u_0$). При



К задаче 2.1.3

наличии среды усилие, производимое во входном отверстии трубы, передается вдоль трубы на ее выходное отверстие, которое в общем случае обладает некоторым сопротивлением Z_l (выходным импедансом). Поэтому входной импеданс в трубу получает приращение, зависящее как от параметров трубы (площади сечения S) и свойств среды (плотности ρ , скорости звука c), так и от нагрузки (сопротивления на выходе) Z_l .

Найдем связь между входным импедансом Z_0 , нагрузкой Z_l и величинами, характеризующими среду в трубе (S , ρ , c). Обозначим давление и скорость в начале трубы ($x = 0$) соответственно через p_0 и u_0 , а в конце ($x = l$) трубы через p_l , u_l . Граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ соответственно имеют вид

$$\Psi_0 - F_0 = Z_c u_0, \quad F_l = Z_l u_l, \quad (1)$$

где обозначено $F_0 = p_0 S$, $p_l S = F_l$. В произвольном сечении складываются две плоские волны, бегущие в противоположных направлениях. В слабо поглощающей среде давление и скорость представимы в виде

$$p = \rho c (a e^{-\gamma x} + b e^{\gamma x}) e^{i\omega t}, \quad u = (a e^{-\gamma x} - b e^{\gamma x}) e^{i\omega t}, \quad (2)$$

где $\gamma = ik + \beta$ — постоянная распространения, a и b находятся из граничных условий (1). При $x = 0$ комплексные амплитуды давления и скорости равны соответственно $p_0 = \rho c(a + b)$, $u_0 = a - b$, и, следовательно, из (1) получаем

$$\Psi_0 = (Z_c + S\rho c) a - (Z_c - S\rho c) b. \quad (3)$$

Аналогично при $x = l$

$$p_l = \rho c(a e^{-\gamma l} + b e^{\gamma l}), \quad u_l = a e^{-\gamma l} - b e^{\gamma l},$$

и из (1) находим

$$(Z_l - S\rho c) a e^{-\gamma l} - (Z_l + S\rho c) b e^{\gamma l} = 0. \quad (4)$$

Из (3), (4) вычисляем величины a и b :

$$a = \frac{Z_l + S\rho c}{\Delta} e^{\gamma l} \Psi_0, \quad b = \frac{Z_l - S\rho c}{\Delta} e^{-\gamma l} \Psi_0, \quad (5)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_c + S\rho c & Z_c - S\rho c \\ (Z_l - S\rho c) e^{-\gamma l} & (Z_l + S\rho c) e^{\gamma l} \end{vmatrix}. \quad (5')$$

Подставляя a и b в (2), получаем давление и скорость в произвольном сечении трубы. В частности, в сечении $x = l$

$$p_l = (2Z_l \rho c / \Delta) \Psi_0, \quad u_l = (2S\rho c / \Delta) \Psi_0. \quad (6)$$

Исключая величину внешней силы Ψ_0 из этих соотношений, можно связать давление и скорость в сечении $x = 0$ с давлением и

скоростью в сечении $x = l$:

$$p_0 = \text{ch}(\gamma l) p_l + \rho c \text{sh}(\gamma l) u_l, \quad u_0 = \frac{\text{sh}(\gamma l)}{\rho c} p_l + \text{ch}(\gamma l) u_l. \quad (7)$$

Давлениям p_0 и p_l соответствуют силы $F_0 = p_0 S$ и $F_l = p_l S$, действующие в сечениях $x = 0$ и l . Из формулы (7) находим

$$F_0 = \text{ch}(\gamma l) F_l + S \rho c \text{sh}(\gamma l) u_l, \quad u_0 = (S \rho c)^{-1} F_l + \text{ch}(\gamma l) u_l. \quad (7')$$

Будем считать, что гипотетический поршень невесомый и не обладает упругими и диссипативными свойствами. Его собственный импеданс равен нулю. С помощью соотношений (7), используя определение $Z_l = F_l / u_l$ для нагрузки на выходе поршня (1), получаем выражение для входного акустического импеданса в трубу

$$Z_0 = \frac{\Psi_0}{u_0} = \frac{F_0}{u_0} = S \rho c \frac{Z_l \text{ch}(\gamma l) + S \rho c \text{sh}(\gamma l)}{Z_l \text{sh}(\gamma l) + S \rho c \text{ch}(\gamma l)}, \quad (8)$$

а в случае слабого затухания звука в трубе

$$Z_0 = S \rho c \frac{Z_l \cos(kl) + i S \rho c \sin(kl)}{S \rho c \cos(kl) + i Z_l \sin(kl)}. \quad (9)$$

Соотношение (7) аналогично уравнению четырехполюсника, широко используемому в радиотехнике и связывающему ток и напряжение на выходе и входе.

2.1.4. Найти входной импеданс в трубу, закрытую на конце жесткой перегородкой. Рассмотреть случай непоглощающей среды. Исследовать поведение импеданса на низких частотах.

Решение. Для жесткой перегородки $u_l = 0$ и $Z_l = \infty$. Следовательно, из (3.8) получаем

$$Z_0 = F_0 / u_0 = S \rho c \text{cth}(\gamma l). \quad (1)$$

В среде без поглощения $\gamma = ik = i\omega/c$ и

$$Z_0 = -i S \rho c \text{ctg}(kl), \quad (2)$$

т.е. импеданс чисто мнимый и имеет наименьшее значение при $kl = \pi(m + 1/2)$, $m = 0, 1, 2 \dots$ При $kl \ll 1$ (низкие частоты или короткие трубы) из (2) имеем

$$Z_0 = -i S \rho c \frac{1}{kl} = -i \frac{S \rho c^2}{\omega l}. \quad (3)$$

Из (3) находим, что величина $S \rho c^2 / l = E$ имеет размерность коэффициента упругости. Отсюда следует что сопротивление закрытой трубы $Z_0 = E / (i\omega)$ является чисто упругим.

2.1.5. Решить задачу 2.1.4 для открытой трубы, считая, что $Z_l = 0$.

Ответ. $Z_0 = S \rho c \text{th}(\gamma l)$. В непоглощающей среде $Z_0 = i S \rho c \text{tg}(kl)$; при $kl \ll 1$ $Z_0 \approx i S \rho c kl = i S \rho \omega l$. Величина $m = S l \rho$ есть масса

среды в трубе. Следовательно, открытая труба представляет собой чисто инерционное сопротивление.

2.1.6. При какой нагрузке Z_l на конце трубы входной импеданс Z_0 равен выходному Z_l ?

Ответ. Из (3.8) видно, что $Z_0 = Z_l$, если $Z_l = Spc$. Эта величина называется характеристическим или волновым импедансом (сопротивлением). Нагрузку $Z_l = Spc$ можно реализовать, например, путем присоединения бесконечно длинной трубы к концу данного отрезка трубы.

2.1.7. Найти коэффициент отражения по давлению V_p от конца отрезка трубы. Считая, что импеданс нагрузки на конце трубы равен $Z_l = R_l + i\chi_l$, найти модуль и фазу коэффициента отражения. Определить, когда $V = 0$.

Ответ. Из (3.2)–(3.5) для комплексного коэффициента отражения по давлению имеем

$$V_p = V e^{i\sigma} = \frac{b e^{\gamma l}}{a e^{-\gamma l}} = \frac{Z_l - Spc}{Z_l + Spc}. \quad (1)$$

Принято вводить безразмерные активное и реактивное сопротивления на единицу площади трубы:

$$Z_l = Spc (R_l + iY_l), \quad R_l = R_l / Spc, \quad Y_l = \chi_l / Spc. \quad (2)$$

Тогда из (1) получаем

$$V = \frac{[(R_l - 1)^2 + Y_l^2]^{1/2}}{[(R_l + 1)^2 + Y_l^2]^{1/2}} = \frac{[(R_l^2 + Y_l^2 - 1)^2 + 4Y_l^2]^{1/2}}{(R_l + 1)^2 + Y_l^2}, \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{2Y_l}{R_l^2 + Y_l^2 - 1}. \quad (3)$$

Коэффициент отражения $V = 0$ при $\chi_l = 0$ и $R_l = Spc$, т.е. когда импеданс нагрузки равен волновому сопротивлению трубы.

2.1.8. Считая, что коэффициент отражения на конце трубы задан в виде $V_p = V e^{i\sigma}$ ($V = |V_p|$), найти распределение максимумов и минимумов давления в трубе без поглощения. Найти коэффициент стоячей волны.

Решение. Если коэффициент отражения V_p задан в виде

$$V_p = V e^{i\sigma} = \frac{b e^{\gamma k l}}{a e^{-\gamma k l}} = \frac{Z_l - Spc}{Z_l + Spc}, \quad (1)$$

то, согласно (3.2), (3.5), давление внутри трубы

$$p(x, t) = A(e^{-ikx} + V e^{i(kx - 2kl - \sigma)}) e^{i\omega t}, \quad A = \frac{\rho c (Z_l + Spc)}{\Delta} e^{ikly_0}. \quad (2)$$

Выражение (2) удобно представить как сумму бегущей прямой волны с амплитудой $A(1 - V)$ и стоячей волны с амплитудой $2AV$:

$$p(x, t) = A(1 - V) e^{i(-kx - \omega t)} + 2AV e^{i(\omega t - kl - \sigma/2)} \cos [k(x - l) + \sigma/2]. \quad (3)$$

Максимумы стоячей волны отстоят от конца трубы на расстояниях

$$d = l - x = \frac{\lambda}{2} \left[m + \frac{\sigma}{2\pi} \right], \quad (4)$$

где m принимает все значения ($m = 0, 1, 2, \dots$), так чтобы $0 < d < l$. Для абсолютно жесткой стенки $\sigma = 0$ и первый максимум лежит на конце трубы ($m = 0, d = 0$). Если $Z_l = 0$, то из (1) следует, что $V_p = -1$ и $\sigma = \pi$. В этом случае первый максимум находится на расстоянии $\lambda/4$ от конца трубы. Минимумы давления находятся на расстоянии

$$d = \frac{\lambda}{2} \left[m + \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{2} \right], \quad (5)$$

где m по-прежнему выбирают так, чтобы $0 < d < l$. Давление в максимумах по амплитуде равно $|p_{\max}| = A(1+V)$, а в минимумах $|p_{\min}| = A(1-V)$, и коэффициент стоячей волны

$$N = \frac{|p_{\max}|}{|p_{\min}|} = \frac{1+V}{1-V}. \quad (6)$$

2.1.9. Чему равен коэффициент отражения от открытого конца трубы, если из него излучается плоская волна высокой частоты?

Решение. Можно пренебречь дифракцией на конце трубы и положить выходной импеданс равным $Z_l = S\rho c$, т.е. импедансу плоской волны; коэффициент отражения на конце трубы близок к нулю. На самом деле на конце трубы происходит преобразование плоской волны в сферическую, и картина поля будет сложнее.

2.1.10. Вычислить коэффициент отражения звука от открытого конца круглой трубы без фланца и найти распределение максимумов давления в стоячей волне внутри трубы. Частота звука $f = 200$ Гц, радиус трубы $r_0 = 2$ см, скорость звука в воздухе $c = 340$ м/с, плотность $\rho = 1,3$ кг/м³. Импеданс на конце трубы определяется выражением

$$Z_l = \frac{\pi \rho f^2 S^2}{c} + i \cdot 4 \pi \rho f r_0^3, \quad S = \pi r_0^2. \quad (1)$$

Решение. Коэффициент отражения звука от открытого конца трубы равен (8.1): $V_p = V e^{i\sigma} = (Z_l - S\rho c)/(Z_l + S\rho c)$, а модуль и фаза определяются (7.3). Максимумы давления внутри трубы отстоят от конца на $d = (\sigma/2\pi + m)\lambda/2$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Полагая $Z_l = S\rho c(R_1 + iY_1)$, находим

$$V = \frac{[(R_1 - 1)^2 + Y_1^2]^{1/2}}{[(R_1 + 1)^2 + Y_1^2]^{1/2}} = \frac{[(R_1^2 + Y_1^2 - 1)^2 + 4Y_1^2]^{1/2}}{(R_1 + 1)^2 + Y_1^2}, \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{2Y_1}{R_1^2 + Y_1^2 - 1}. \quad (2)$$

В данной задаче

$$R_1 = \pi^2 f^2 r_0^2 / c^2, \quad Y_1 = 4fr_0/c.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$V \approx 1, \quad \operatorname{tg} \sigma \approx -8fr_0/c = -0,1, \quad \sigma = \pi - 0,1 \approx 3,04.$$

Максимумы давления внутри трубки отстоят от конца на расстояние $d = \lambda/[2(m+\sigma/2\pi)] = 0,85(m+0,48)$, $m = 0, 1, 2, \dots$

2.1.11. Вычислить импеданс и присоединенную массу открытого конца длинной круглой трубы в среде без поглощения на частоте $f = 100$ Гц. Площадь сечения трубы $S = 1000$ см². Оценить коэффициент отражения от конца трубы и вычислить излучаемую мощность, если амплитуда скорости на выходе из отверстия трубы $u_l = 10^{-4}$ см/с, скорость звука $c = 3,4 \cdot 10^4$ см/с, $\rho c = 44$ г/(см²·с).

Решение. На низких частотах импеданс отверстия вычисляем по приближенной формуле (10.1) $Z_l = R + i \cdot 2\pi f M = (1,2 + i \cdot 9,2) \times 10^3$ г/с. Величина $M = 2\rho r_0^3 = 14,8$ г имеет размерность массы и называется присоединенной массой. Излучаемая мощность $N = Ru_l^2/2 = 6 \cdot 10^{-6}$ эрг/с. Из (7.3) имеем $V \approx 0,95$, $\sigma = \pi - 0,4$.

2.1.12. В конце трубы (см. задачу 2.1.10), заполненной воздухом, вставлена пробка из материала с входным импедансом (кг/с) $Z_l = 0,5 + i \cdot 0,1$. Найти коэффициент отражения звука от материала и распределение в трубе максимумов и минимумов звукового давления. Частота звука равна 1000 Гц.

Ответ. Коэффициент отражения

$$V_p = V e^{i\sigma} = \frac{Z_l - S\rho c}{Z_l + S\rho c} = \frac{0,5 + i \cdot 0,1 - \pi \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 440}{0,5 + i \cdot 0,1 + \pi \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 440}.$$

Максимумы внутри трубы находятся на расстоянии от конца $d = [\sigma/2\pi + m]\lambda/2$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda = 0,34$ м; минимумы — $d' = [\sigma/2\pi + m + 1/2]\lambda/2$. Подставляя числовые значения, имеем $|V| = 0,11$, $\sigma = 1,86$, $d = 0,17(m+0,31)$, $d' = 0,17(m+0,81)$

2.1.13. Труба (см. задачу 2.1.10) закрыта материалом с импедансом $Z_l = 2 + i \cdot 2$. Вычислить коэффициент поглощения энергии на конце трубы.

Ответ. Коэффициент поглощения энергии на конце трубы α связан с коэффициентом отражения очевидным соотношением $\alpha = 1 - |V|^2$, и для приведенных данных $\alpha = 0,42$.

2.1.14. Коэффициент отражения звука на конце трубы выражается следующим образом: $V = (R_1 - 1 + iY_1)/(R_1 + 1 + iY_1) = |V| \times$

$\times \exp(i\sigma)$, где $R_1 = R/(\rho c)$, $Y_1 = Y/(\rho c)$ — безразмерные активное и реактивное сопротивления на конце трубы. Показать, что на плоскости комплексного переменного R_1 Y_1 , кривые равного поглощения $\alpha = 1 - |V|^2$ и равной фазы σ представляют семейство окружностей.

Решение.

$$1. |V|^2 = \frac{(R_1 - 1)^2 + Y_1^2}{(R_1 + 1)^2 + Y_1^2}, \quad \alpha = \frac{4R_1}{(R_1 + 1)^2 + Y_1^2}. \quad \text{Отсюда находим}$$

уравнение окружности в плоскости R_1 Y_1 с центром на оси R_1 :

$$\left[R_1 - \frac{2-\alpha}{\alpha}\right]^2 + Y_1^2 = \frac{4(1-\alpha)}{\alpha}.$$

$$2. V = \frac{R_1^2 + Y_1^2 + 1 + 2iY_1}{(R_1 + 1)^2 + Y_1^2}, \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{2Y_1}{R_1^2 + Y_1^2 + 1} = b. \quad \text{Получаем урав-$$

нение окружности с центром на оси Y_1 :

$$R_1^2 + \left[Y_1 - \frac{1}{b}\right]^2 = \frac{1-b^2}{b^2}.$$

Кривая равного поглощения изображается окружностью с центром в точке с координатами $((2-\alpha)/\alpha, 0)$ и радиусом $2[(1-\alpha)/\alpha]^{1/2}$. Кривые равной фазы изображаются окружностью с центром в точке с координатами $(0, 1/b)$ и радиусом $(1-b^2)^{1/2}/b$.

2.1.15. Амплитуда давления измерена в трубе длиной 100 м в зависимости расстояния x от возбуждаемого конца. Значения максимумов и минимумов давления (в относительных единицах) вдоль трубы даны ниже:

Расстояние от излучателя x , м	25	37,5	50	62,5	75	87,5
Максимум давления	1,899		1,478		1,204	
Минимум давления		1,335		0,869		0,489

Рассчитать по этим данным длину волны, коэффициент поглощения звука (м^{-1}) и амплитуду давления в начале и конце трубы.

Решение. Обозначим через Δp разность давления соответственно между ближайшими максимумом или минимумом, т.е. на расстоянии $\Delta x = \lambda/2 = 25$ м. Находим среднее значение коэффи-

циента ослабления звука на отдельных участках трубы:

$$\beta_k = \frac{1}{\rho_k} \frac{\Delta p_k}{\Delta x}.$$

По всей трубе среднее значение $\bar{\beta} = N^{-1} \sum_k \beta_k$, где $N = 5$ — число участков. Зная $\bar{\beta}$, можно оценить давление в начале и конце трубы. Таким образом, $\lambda = 50$ м, $\bar{\beta} = 0,012$ м⁻¹. Давление в начале трубы около 2,1, в конце около 0,9.

2.1.16. Безразмерный удельный импеданс в некоторой точке ($x = 0$) трубы, заполненной воздухом, $Z_0 = \text{cth} \Psi_0 = 1 + i$ при частоте 340 Гц. Каков будет удельный импеданс в точках, лежащих на расстоянии 12,5 и 25 см далее вдоль трубы? Скорость звука в воздухе $c = 340$ м/с. Поглощением звука пренебречь.

Решение. Удельный безразмерный импеданс в точке с координатой x равен (см. задачу 2.1.2)

$$Z = \text{cth}(\Psi_0 - ikx) = \frac{1 + i \text{cth} \Psi_0 \cdot \text{ctg}(kx)}{\text{cth} \Psi_0 + i \text{ctg}(kx)}.$$

Отсюда находим $Z = 0,5 - i \cdot 0,5$.

Ответ. $x = 0,2$ м, $Z = 0,4 + i \cdot 0,2$, $x = 0,4$ м, $Z = 1 + i \cdot 0,26$.

2.1.17. Возбуждающий звук поршень помещен у одного конца трубы ($x = 0$), наполненной воздухом ($c = 3,44 \cdot 10^4$ см/с, $\rho c = 44$ г/(см²·с)), у которой площадь поперечного сечения равна 10 см², второй поршень помещен у другого конца трубы ($x = 30$ см). Измерение звукового давления показало, что максимальная амплитуда давления в точках $x = 3, 15, 27$ см равна 10 дин/см². Минимальная амплитуда давления 6,57 дин/см², получалась в точках $x = 9, 21$ см. Найти из этих данных механический импеданс второго поршня Z_l , частоту звука f и амплитуду колебаний возбуждающего поршня ξ_0 .

Решение. Напишем выражение для импеданса Z_l через коэффициент отражения от поршня V : $Z_l = \rho c [(1-V)/(1+V)]$ (см. задачу 2.1.7). Представим коэффициент отражения через его модуль и фазу $V = |V| \exp(i\sigma)$. Модуль можно найти, зная значения давления $p_{\max}$ и $p_{\min}$: $|p|_{\max} = 1 + |V|$, $|p|_{\min} = 1 - |V|$ (для волны единичной амплитуды). Отсюда

$$V = \frac{|p|_{\max} - |p|_{\min}}{|p|_{\max} + |p|_{\min}} = 0,207.$$

Фазу коэффициента отражения найдем, определив расстояние от второго поршня до последнего максимума. Расстояние от поршня до максимумов выражается формулой (см. (8.4)) В случае по-

следнего максимума $m = 0$, $d = 3$ см, $\lambda = 24$ см, $\sigma = \pi/2$. Отсюда $V = 0,207$, $Z_l = Spc \cdot \frac{1-i \cdot 0,207}{1+i \cdot 0,207} = 440 e^{-i\varphi}$ г/с, $\operatorname{tg} \varphi = -0,43$, $f = c/\lambda = 1440$ Гц.

Амплитуду колебаний возбуждающего поршня находим по давлению, развиваемому поршнем. Так как в среде нет поглощения, это давление равно $p_0 = (p_{\max} + p_{\min})/2 = 8,285$ дин/см². Тогда $\xi_0 = u_0/\omega = p_0/(\rho c \cdot 2\pi f) = 2 \cdot 10^{-5}$ см.

2.1.18. Найти резонансные частоты узкой трубы длиной l , замкнутой на чисто реактивный импеданс $Z_l = i\chi_l = iSpcY_1$. Поглощением в среде пренебречь.

Решение Резонансными называются частоты, при которых система дает наибольший отклик на внешнюю силу, т.е. частоты, на которых входной импеданс трубы (см. (3.8), (3.9)) минимален. В слабо поглощающей среде входной импеданс трубы, замкнутой на чисто реактивный импеданс, равен

$$Z_0 = Spc \frac{\chi_l \cos(kl) + Spc \sin(kl)}{Spc \cos(kl) + \chi_l \sin(kl)}. \quad (1)$$

Резонансные частоты находятся из условия $Z_0 = 0$ и определяются из трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}(kl) = -\chi_l/(Spc) = -Y_1. \quad (2)$$

В общем случае χ_l также может зависеть от частоты.

2.1.19. Найти резонансные частоты длинной узкой трубы длиной l , возбуждаемой при $x = 0$ колеблющимся поршнем в случаях, если труба закрыта и открыта жесткой перегородкой.

Решение Если труба закрыта жесткой перегородкой, $\chi_l^{-1} = 0$ и из уравнения (18.2) находим резонансные частоты

$$f_r = \left[m + \frac{1}{2}\right] \frac{c}{2l}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Длина трубы при резонансе $l_r = (m+1/2)\lambda/2$. Если труба открыта, $\chi_l = 0$ и

$$f_r = mc/2L, \quad l_r = m\lambda/2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

2.1.20. Показать, что при наличии небольшого, чисто реактивного удельного безразмерного импеданса iY_1 на конце трубы ее резонансная частота f'_r по сравнению с резонансной частотой открытой трубы f_r увеличивается при $Y_1 < 0$ и уменьшается при $Y_1 > 0$.

Решение. Резонансная частота трубы, открытой с одного конца, равна $mc/2L$ (см. (19.2)). Реактивный импеданс можно пред-

ставить в виде

$$iY_1(\omega) = i(m\omega - 1/\omega\bar{c}),$$

где $im\omega$ — инерционное сопротивление; m — приведенная масса, включая присоединенную ($m = M/(Sp_c)$, M — полная масса); $-i/(\omega\bar{c})$ — упругое сопротивление; $\bar{c}$ — приведенная гибкость, которая определяется через гибкость $\bar{c}$ ($\bar{c} = \bar{c}Sc$). Введем величину $\Delta k = k'_r - k_r$, отвечающую изменению резонансной частоты. Тогда из (18.2), (19.2) следует

$$\operatorname{tg}(\delta kl) \approx -Y_1(k, c).$$

Отсюда получаем, что при $Y_1 > 0$ и $k'_r > k_r$ частота $f'_r = f_r - m\lambda_r/l$. При $Y_1 < 0$ и $k'_r < k_r$ частота $f'_r > f_r$. Первый случай может быть реализован путем присоединения к трубе короткой узкой трубки, содержащей среду с массой M ; второй — присоединением замкнутой полости (практически неподвижного объема) с гибкостью $\bar{c}$.

2.1.21. Вывести волновое уравнение для распространения звука в трубке с непрерывно изменяющимся сечением.

Ответ. Распространение квазиплоской волны в трубке, размеры поперечного сечения S которой малы по сравнению с длиной волны, описывается уравнением Вебстера:

$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left[S \frac{\partial p'}{\partial x} \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}. \quad (1)$$

2.1.22. Найти критическую частоту экспоненциального рупора.

Решение. Пусть площадь сечения рупора изменяется по закону $dS/dx = \beta S$, т.е. $S = S_0 \exp(\beta x)$, β — коэффициент расширения экспоненциального рупора. Так как давление p' пропорционально потенциалу скорости φ , из уравнения Вебстера (см. задачу 2.1.21) получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Учтем временную зависимость потенциала скорости $\varphi = \varphi_0(x) \times \exp(i\omega t)$, где φ_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} + \beta \frac{d\varphi_0}{dx} + k^2 \varphi_0 = 0. \quad (1)$$

Ищем решение уравнения (1) в виде $\varphi_0 = \exp(ax)$. Подставляя функцию φ_0 в (1), находим характеристическое уравнение

$$a^2 + \beta a + k^2 = 0,$$

из которого получаем

$$a = -\beta/2 \pm [(\beta/2)^2 - k^2]^{1/2}.$$

Звук распространяется в рупоре, если $\varphi_0(x)$ является периодической функцией. Для этого необходимо, чтобы $k \geq \beta/2$, т.е. частота звука $\omega \geq \beta c/2 = \omega_{кр}$. Критическая частота $\omega_{кр}$ определяет нижнюю границу полосы пропускания рупора.

2.2. Сложные звукопроводы, акустические фильтры

2.2.1. Найти коэффициент отражения при переходе плоской волны из трубы одного сечения в трубу другого сечения, причем сечения труб не сильно различаются.

Решение. Предположим, что при переходе волны из одной трубы в другую плоский характер волны не меняется (перестройка волны происходит на коротком отрезке $\Delta l \ll \lambda$; см. рисунок). Пусть давление и скорость в падающей и отраженной волнах в трубе равны соответственно

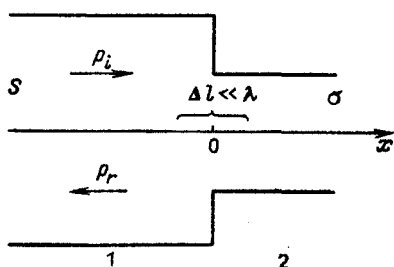
$$p_i = A_i \exp(i\omega t - ikx),$$

$$v_i = (A_i/\rho c) \exp(i\omega t - ikx)$$

(1)

$$p_r = A_r \exp(i\omega t + ikx),$$

$$v_r = -(A_r/\rho c) \exp(i\omega t + ikx).$$



К задаче 2.2.1

Давление и скорость во второй трубе при переходе из первой трубы ($x=0$): $p_\sigma(0)$ и $v_\sigma(0)$. Граничные условия в отверстии:

1) непрерывность давления: $p_S(0) = p_i(0) + p_r(0) = p_\sigma(0) = A_\sigma \exp(i\omega t)$;

2) непрерывность объемной скорости: $S[v_i(0) + v_r(0)] = \sigma v_\sigma(0)$.

Механический импеданс в сечении σ : $Z_\sigma = \sigma p_\sigma / v_\sigma$. Из граничных условий и (1) имеем

$$A_i + A_r = A_\sigma, \quad \frac{S}{\rho c} (A_i - A_r) = \left. \frac{\sigma p_\sigma}{Z_\sigma} \right|_{x=0} = \frac{\sigma A_\sigma}{Z_\sigma}. \quad (2)$$

Отсюда находим коэффициент отражения

$$V_p = \frac{A_r}{A_i} = \frac{Z_\sigma - \rho c (S/\sigma)}{Z_\sigma + \rho c (S/\sigma)} = \frac{Z_\sigma (S/\sigma)^2 - S \rho c}{Z_\sigma (S/\sigma)^2 + S \rho c}. \quad (3)$$

Если вторая трубка достаточно длинная, то $Z_\sigma = \sigma \rho c$; отсюда

$$V_p = \frac{S - \sigma}{S + \sigma}.$$

Сравним формулу (3) с формулой для коэффициента отражения, которая следует из выражения (1.7.1):

$$V_p = \frac{Z_i - S \rho c}{Z_i + S \rho c}.$$

Сопоставляя эти формулы, делаем вывод, что импеданс Z_0 в отверстии площадью σ , расположенным в конце трубы с площадью S , равноценен нагрузке Z_l в конце трубы постоянного сечения S , если $Z_l = (S/\sigma)^2 Z_\sigma = Z_\sigma/u^2$, где $u = \sigma/S$ — коэффициент трансформации. Отсюда

$$Z_\sigma = u^2 Z_l. \quad (4)$$

2.2.2. Определить коэффициент прохождения звука (по энергии) при переходе из трубы сечением 10 см^2 в трубу сечением 7 см^2 .

Ответ. При переходе звука из длинной трубы в другую коэффициент прохождения

$$W_I \approx 1 - \left[\frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1} \right]^2 = 0,97.$$

2.2.3. Найти коэффициент отражения плоской волны при переходе из одной трубы в другую, сечение которой сильно отличается от первой (см. рисунок).

Решение. В этом случае при переходе из одной трубы в другую плоское движение нарушается, появляется сдвиг фазы между давлением и скоростью, импеданс в переходной области комплексный. Учтем это, представив граничное условие для давления в форме

$$p_1(l) = p_2(l) + ip'_2(l), \quad (1)$$

Из соображений размерности следует, что

$$p'_2(l) = M\omega v_2(l)/\sigma,$$

где M — "присоединенная масса", которая появляется при искажении плоской волны в переходной области. Ей соответствует инерционное сопротивление $i\omega M$. Второе граничное условие — равенство объемных скоростей:

$$Sv_1(l) = \sigma v_2(l).$$

Входной импеданс при переходе во вторую трубу

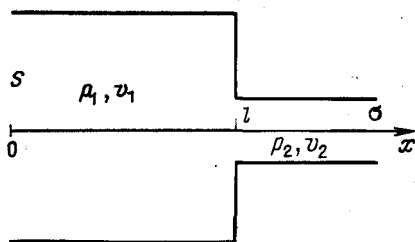
$$Z_l = \frac{Sp_1(l)}{v_1(l)} = \frac{Sp_1}{v_2(\sigma/S)} = \frac{S^2}{\sigma^2} \sigma \frac{p_2(l) + i(\omega M/\sigma)v_2(l)}{v_2(l)} = \frac{S^2}{\sigma^2} \sigma \left[\frac{p_2(l)}{v_2(l)} + i \frac{\omega M}{\sigma} \right]. \quad (2)$$

Если вторая труба достаточно длинная, то $p_2/v_2 = \rho c$,

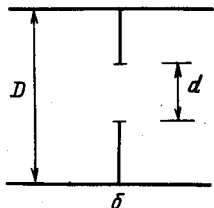
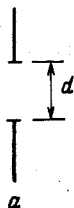
$$Z_l = (S/\sigma)^2 (\sigma \rho c + i\omega M). \quad (3)$$

Коэффициент отражения от переходного сечения равен

$$V = \frac{Z_l - S\rho c}{Z_l + S\rho c}.$$



К задаче 2.2.3



К задаче 2.2.4

2.2.4. Выразить присоединенную массу отверстия через его проводимость.

Решение. Кинетическая энергия жидкости, колеблющейся в трубе длиной l и сечением S со скоростью v , равна

$$T = \frac{1}{2} S l \rho v^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho}{S/l} (Sv)^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho}{K} \dot{X}^2. \quad (1)$$

Величина $K = S/l$ называется проводимостью трубы и имеет размерность длины, $X = Sv$ — объемная скорость. Кинетическая энергия жидкости, проходящей через отверстие площадью σ , по аналогии с (1) представима в виде

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho}{K} \dot{X}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\rho \sigma^2}{K} \right] \overline{v^2} = \frac{1}{2} M \overline{v^2}, \quad M = \frac{\rho \sigma^2}{K}, \quad (2)$$

где $\overline{v^2}$ — средний квадрат скорости в отверстии, M — присоединенная масса, K — проводимость отверстия. Согласно выводу Рэлея проводимость круглого отверстия в бесконечно тонкой и протяженной перегородке (см. рисунок а) равна его диаметру: $K = d$. Общая задача, когда перегородка с круглым отверстием, имеющим диаметр d , стоит поперек круглой трубы диаметром D (см. рисунок б), решена Фоком. Проводимость отверстия $K = dF(d/D)$, где $F(d/D)$ — функция Фока. Присоединенная масса отверстия $M = \rho \sigma^2 / [dF(d/D)]$. Функция Фока возрастающая: $F = 1$ при $d/D = 0$; $F = 2,27$ при $d/D = 0,5$; $F \rightarrow \infty$ при $d/D \rightarrow 1$.

2.2.5. Труба с площадью сечения $S_0 = \pi R^2$ скачкообразно переходит в бесконечную трубу сечения $S = S_0/m = \pi r^2$, где $m > 1$. Определить, учитывая присоединенную массу, на сколько децибел отраженный от переходного сечения звук в воздухе будет слабее падающего. В этом случае на переходном сечении присоединенная масса $M = \rho S^2 / [4r F(r/R)]$, где F — функция Фока. Считать, что $m = 4$, а частота звука такова, что $kr = 4/\pi$: $F(r/R) = F(0,5) \approx 2,27$.

Решение. Коэффициент отражения от переходного слоя равен $V = (Z_l - S_0 \rho c) / (Z_l + S_0 \rho c)$, где импеданс переходного сечения равен $Z_l = (S_0^2 / S^2) / (S \rho c + i \omega M)$. После преобразования находим

$$V = \left[(m-1) + i F(0,5) \frac{m}{4} \frac{k r \pi}{4} \right] \left[(m+1) + i F(0,5) \frac{m}{4} \frac{k r \pi}{4} \right]^{-1}.$$

При $k r_0 = 4/\pi$ модуль коэффициента

$$|V| = \left[\frac{(m-1)^2 + (m/F)^2}{(m+1)^2 + (m/F)^2} \right]^{1/2} = 0,66, \quad \Delta B = 20 \lg |V| = -3,6 \text{ дБ}.$$

2.2.6. Найти коэффициент отражения звука частотой 100 Гц при переходе из круглой трубы диаметром $d_1 = 10$ см в трубу диаметром $d_2 = 1$ см. Принять, что при $d_1 \gg d_2$ проводимость K круглого отверстия равна удвоенному диаметру. Трубы заполнены воздухом. **Указание:** входной импеданс в узкую трубу определяется выражением (3.3), где M — присоединенная масса, связанная с проводимостью формулой (4.2).

Ответ. $V = |V| \exp(i\sigma_0)$, $|V| = 0,98$, $\sigma_0 = 1,5 \cdot 10^{-4}$.

2.2.7. Вычислить коэффициент передачи энергии из одной трубы в другую при наличии промежуточной трубы (см. рисунок).

Решение. Коэффициент отражения при переходе из трубы 2 в трубу 3

$$V_{23} = (Z_l - S_2 \rho c) / (Z_l + S_2 \rho c), \quad (1)$$

где входной импеданс в трубу 3 (см. задачу 2.2.3)

$$Z_l = (S_2 / S_3)^2 (S_3 \rho c + i \omega M). \quad (2)$$

Предположим, что S_2 не сильно отличается от S_3 . Тогда присоединенная масса $M = 0$ и

$$Z_l = (S_2^2 / S_3) \rho c. \quad (3)$$

Импеданс на входе в трубу 2 найдем по аналогии с входным импедансом в плоский слой толщины l между двумя полупространствами:

$$Z_{\text{вх}} = \rho c S_2 \frac{e^{-ikl} + V_{23} e^{ikl}}{e^{-ikl} - V_{23} e^{ikl}}.$$

Подставим сюда из (1) выражение для V_{23} . После преобразования, учитывая (3), получим

$$Z_{\text{вх}} = \rho c S_2 \frac{\cos(kl) - i S_{32} \sin(kl)}{S_{32} \cos(kl) - i \sin(kl)}, \quad S_{32} = \frac{S_3}{S_2}.$$

Соответствующий акустический импеданс

$$Z_{a \text{ вх}} = \frac{\rho c}{S_2} \frac{\cos(kl) - i S_{32} \sin(kl)}{S_{32} \cos(kl) - i \sin(kl)}$$

Коэффициент отражения от трубы 2 находится по входному импедансу в эту трубу:

$$V = V_{12} = \frac{Z_{a \text{ вх}} - \rho c / S_1}{Z_{a \text{ вх}} + \rho c / S_1} = \frac{\cos(kl)(1 - S_{31}) + i \sin(kl)(S_{21} - S_{32})}{\cos(kl)(1 + S_{31}) - i \sin(kl)(S_{21} + S_{32})},$$

где $S_{21} = S_2/S_1$, $S_{31} = S_3/S_1$. Коэффициент передачи энергии из трубы 2 в трубу 3 равен

$$W_J = 1 - |V|^2 = 4S_{31} \left[(1 + S_{31})^2 \cos^2(kl) + (S_{21} + S_{32})^2 \sin^2(kl) \right]^{-1}. \quad (4)$$

2.2.8. Показать, что труба, соединяющая две одинаковые трубы, служит фильтром (последовательный фильтр).

Решение. В задаче 2.2.7 была получена формула для коэффициента передачи энергии звука из трубы 1 в трубу 3 с помощью трубы 2. Пусть сечение труб 1 и 3 одинаково ($S_1 = S_3$). Тогда $S_{31} = 1$, $S_{32} = S_{12} = 1/S_{21}$, коэффициент передачи

$$W_J = \left[1 + \frac{1}{4} (S_{12}^2 - 2 + S_{12}^{-2}) \sin^2(kl) \right]^{-1} = \frac{1}{f(kl)}.$$

Находим экстремумы функции $f(kl)$:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{4} (S_{12}^2 - 2) \sin(2x) = 0, \quad x = kl.$$

Следовательно, W_J имеет максимумы при $kl = m\pi$, минимумы при $kl = (m + 1/2)\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$

2.2.9. В качестве последовательного звукового фильтра используются две трубы постоянного сечения $S_1 = 10 \text{ см}^2$, соединенные трубой сечением $S_2 = 1 \text{ см}^2$ и длиной $l = 30 \text{ см}$. Исследовать свойства фильтра в воздухе ($c = 340 \text{ м/с}$).

Решение. Коэффициент передачи звуковой энергии по системе труб выражается формулой (см. задачу 2.2.8)

$$W_J = [1 + (1/4) (S_{12}^2 - 2) \sin^2(kl)]^{-1},$$

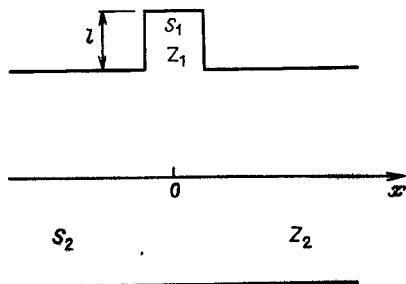
где $S_{12} = S_1/S_2$, причем $S_{12}^2 \gg 1$. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = [1 + (1/4) (S_{12}^2 - 2) \sin^2 x]^{-1}, \quad \text{где } x = kl.$$

Тогда $d\alpha/dx = 0$, если $x = kl = m\pi$ или $(m - 1/2)\pi$, $m = 1, 2, 3, \dots$

При $kl = m\pi$ $\alpha = 1$ и происходит полная передача энергии. Это условие соответствует частоте $f = m c / 2l$. Подставляя числовые значения, получаем коэффициент передачи в зависимости от частоты при $l = 30 \text{ см}$: $W_J = [1 + 24,5 \sin^2(1,765\pi \cdot 10^{-3} f)]^{-1}$. Условие для полной передачи звука ($W_J = 1$): $f \approx 5,67 \cdot 10^2 \text{ [Гц]}$.

2.2.10. Вывести формулу для коэффициента отражения от поперечного отрезка в длинной трубе, закрытого абсолютно твердой стенкой (параллельный фильтр с отрезком; см. рисунок). При какой частоте звук полностью отражается от этого места, если сечения трубы и отрезка одинаковы? Решить задачу при $l = 10$ см. Труба заполнена воздухом (скорость звука $c = 340$ м/с). Поглощением звука пренебречь.



К задаче 2.2.10

Решение. Акустическим импедансом трубы называется отношение механического импеданса к квадрату площади сечения трубы:

$$Z_{\text{ак}} = Z/S^2.$$

Акустический импеданс в точке разветвления по аналогии с электрической цепью при параллельном соединении равен

$$Z_{\text{ак}} = (Z_{1\text{ак}} Z_{2\text{ак}})/(Z_{1\text{ак}} + Z_{2\text{ак}}). \quad (1)$$

Если труба достаточно длинная, то ее акустический импеданс

$$Z_{2\text{ак}} = \rho c/S_2. \quad (2)$$

Считаем, что отрезок ограничен жесткой перегородкой. Тогда его акустический импеданс (в отсутствие поглощения в среде) согласно (1.4.2) равен

$$Z_{1\text{ак}} = -i[\rho c S_1 \text{ctg}(kl)/S_1^2] = -i(\rho c/S_1) \text{ctg}(kl), \quad (3)$$

где l — длина отрезка. Из (1) и (2) найдем $Z_{\text{ак}}$. Пусть $S_2 = S_1 = S$, тогда

$$Z_{\text{ак}} = [(\rho c/S) \cos^2(kl) - i \sin(kl) \cos(kl)] = Z S^2.$$

Коэффициент отражения от места разветвления ($x = 0$)

$$V = \frac{Z - S \rho c}{Z + S \rho c} = \frac{Z_{\text{ак}} - \rho c/S}{Z_{\text{ак}} + \rho c/S} = \frac{\cos^2(kl) - 1 - i \sin(kl) \cos(kl)}{\cos^2(kl) + 1 - i \sin(kl) \cos(kl)} = |V| e^{i\varphi}. \quad (4)$$

Коэффициент прохождения по энергии

$$W_j = 1 - |V|^2 = \frac{4 \cos^2(kl)}{[1 + \cos^2(kl)]^2 + [\sin(kl) \cos(kl)]^2}. \quad (5)$$

Звук не проходит через сечение, если $\cos(kl) = 0$, $l = \lambda/4$, т.е. на частоте $f' = c/(4l) = 850$ Гц.

2.2.11. При каком условии звук, распространяющийся без затухания по длинной трубе с сечением S , полностью отражается от открытой боковой трубы с таким же сечением длиной l ?

Решение. Решение аналогично решению задачи 2.2.10, причем акустический импеданс бокового отростка равен (см задачу 2.1.5) $Z_{1\text{ак}} = i(\rho c/S) \operatorname{tg}(kl)$ Акустический импеданс трубы $Z_{2\text{ак}} = \rho c/S$. Акустический импеданс в точке разветвления имеет выражение

$$Z_{\text{ак}} = \frac{Z_{1\text{ак}} Z_{2\text{ак}}}{Z_{1\text{ак}} + Z_{2\text{ак}}} = \frac{\rho c}{S} [\sin^2(kl) + i \sin(kl) \cos(kl)] = ZS^2,$$

где Z — механический импеданс. Коэффициент отражения от места разветвления

$$V = \frac{Z - S\rho c}{Z + S\rho c} = \frac{\sin^2(kl) - 1 + i \sin(kl) \cos(kl)}{\sin^2(kl) + 1 + i \sin(kl) \cos(kl)} = |V| e^{i\sigma}$$

Коэффициент прохождения по энергии

$$W_j = 1 - |V|^2 = \frac{4 \sin^2(kl)}{[1 + \sin^2(kl) + \sin(kl) \cos(kl)]^2}$$

Если $kl = 0, \pi, 2\pi, \dots$, то $W_j = 0$, т.е. звук полностью отражается от места разветвления.

2.3. Нормальные волны в резонаторах и волноводах

2.3.1. Найти собственные частоты колебания в прямоугольном помещении, стороны которого равны l_x, l_y, l_z , с твердыми, полностью отражающими поверхностями.

Решение. Необходимо решить волновое уравнение для звукового давления,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (1)$$

при следующих граничных условиях: колебательная скорость u для волн в среде (воздухе) в направлении нормали к стенке равна нулю:

$$u_x \Big|_{x=0, l_x} = 0, \quad u_y \Big|_{y=0, l_y} = 0, \quad u_z \Big|_{z=0, l_z} = 0$$

Данным граничным условием удовлетворяет решение уравнения (1) в виде

$$p = \cos\left[\frac{\omega}{c} x\right] \cos\left[\frac{\omega}{c} y\right] \cos\left[\frac{\omega}{c} z\right] e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

если $\omega_x = m(\pi c/l_x)$, $\omega_y = n(\pi c/l_y)$, $\omega_z = q(\pi c/l_z)$, причем m, n, q могут принимать значения $0, 1, 2, 3, \dots$ Или

$$f_x = \frac{\omega_x}{2\pi} = m \frac{c}{2l_x}, \quad f_y = \frac{\omega_y}{2\pi} = n \frac{c}{2l_y}, \quad f_z = \frac{\omega_z}{2\pi} = q \frac{c}{2l_z}.$$

Частота f при этом равна

$$f = f_{mnq} = (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{1/2} = \frac{c}{2} \left[\left(\frac{m}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{q}{l_z}\right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Действительно, из (2) находим, например, выражение для компоненты скорости u_x :

$$u_x = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\omega}{i\omega\rho c} \left[-\sin\left[\frac{\omega}{c}x\right] \cos\left[\frac{\omega}{c}y\right] \cos\left[\frac{\omega}{c}z\right] \right] e^{-i\omega t},$$

из которого видно, что

$$u_x \Big|_{x=0, l_x} = 0.$$

Совокупность трех чисел (m, n, q) определяет одну моду (нормальную волну колебания), структура поля этой моды определяется выражением (2), а частота — выражением (3).

2.3.2. Определить пять низших собственных частот звуковых колебаний в сосуде, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами l_x, l_y, l_z , равными 40, 60, 100 см. Стенки сосуда считать абсолютно твердыми. Скорость звука в воде 1480 м/с.

Ответ. Низшие собственные частоты будут $f_{001} = 740$ Гц, $f_{010} = 1236$ Гц, $f_{011} = 1439$ Гц, $f_{100} = 1850$ Гц, $f_{101} = 1993$ Гц.

2.3.3. Найти число мод в объеме в форме прямоугольного параллелепипеда с жесткими стенками, имеющих частоты не выше заданной частоты f (см. рисунок).

Решение. Мода (m, n, q) может быть представлена точкой в пространстве частот, в котором по осям координат отложены величины

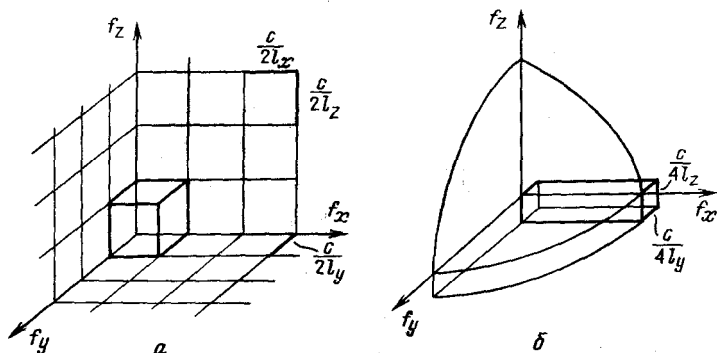
$$f_x = m c / 2l_x, \quad f_y = n c / 2l_y, \quad f_z = q c / 2l_z,$$

где $m, n, q = 0, 1, 2, \dots$; l_x, l_y, l_z — стороны параллелепипеда; c — скорость звука. Совокупность точек (узлов), изображающих моды, образует в пространстве частот нечто похожее на прямоугольную кристаллическую решетку. Для определения числа мод, соответствующих всем частотам от 0 до f , следует рассмотреть в пространстве частот число узлов, лежащих в октанте радиусом f , учтя при этом точки, лежащие на осях (аксиальные моды — только одно из чисел m, n, q не равно 0), на ограничивающих плоскостях (тангенциальные моды — одно из чисел m, n, q равно 0) и внутри октанта ("косые" моды — все m, n, q не равны 0). Для вычисления числа мод определенного класса следует найти объем, "занятый" точками решетки, относящимися к этому классу. Число узлов равно этому объему, деленному на объем одной ячейки: $V_0 = c^3 / (8l_x l_y l_z)$. Объем, занятый косыми модами, равен объему октанта $V_1 = (4\pi/3)f^3/8$. Объем V_2 , занятый тангенциальными модами, складывается из объ-

емов $3/4$ дисков площадью $\pi f^2/4$ и толщиной соответственно $c/(4l_x)$, $c/(4l_y)$ и $c/(4l_z)$:

$$V_2 = \frac{f^2 c \pi}{4} \left[\frac{1}{l_x l_y} + \frac{1}{l_y l_z} + \frac{1}{l_z l_x} \right] \frac{f^2 c}{32} \pi \frac{S}{V},$$

где $S = 2(l_x l_y + l_y l_z + l_z l_x)$ — полная площадь граничных поверхностей параллелепипеда, $V = l_x l_y l_z$ — объем параллелепипеда. Заметим, что множитель $1/2$ в толщине диска получается вследствие того, что граничная поверхность рассматриваемого октанта принадлежит как бы и соседнему октанту (см рисунок а).



К задаче 2.3.3

Объем V_3 , занятый аксиальными модами, складывается из объемов трех брусков длиной f и площадью сечения соответственно $\frac{1}{4} \frac{c^2}{4l_x l_y}$, $\frac{1}{4} \frac{c^2}{4l_y l_z}$, $\frac{1}{4} \frac{c^2}{4l_z l_x}$:

$$V_3 = \frac{c^2 f}{16} \left[\frac{1}{l_x l_y} + \frac{1}{l_y l_z} + \frac{1}{l_z l_x} \right] = \frac{f c^2}{64} \frac{L}{V},$$

где $L = 4(l_x + l_y + l_z)$ — полная сумма длины ребер параллелепипеда. Рисунок б поясняет появление множителя $1/4$ (каждый узел на оси принадлежит четырем квадрантам). Таким образом, при подсчете числа узлов в пространстве частот должен учитываться объем:

$$V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{6} \pi f^3 + \frac{c}{32} \pi \frac{S}{V} f^2 + \frac{c^2}{64} \frac{L}{V} f.$$

Таким образом, для числа мод имеем

$$N = \frac{1}{V} (V_1 + V_2 + V_3) = \frac{4}{3} \frac{\pi V}{c^3} f^3 + \frac{\pi S}{4 c^2} f^2 + \frac{L}{8 c} f + 0(f), \quad (1)$$

где $0(f) < 1$. Число мод в полосе частот от f до $f + \delta f$ находим из (1):

$$dN = \frac{\partial N}{\partial f} \delta f = \left[\frac{4\pi V}{c^3} f^2 + \frac{\pi S}{2 c^2} f + \frac{L}{8 c} + 0'(f) \right] \delta f. \quad (2)$$

2.3.4. Вычислить число нормальных волн в зале размером 50х20х10 м, образующихся при распространении импульса длительностью $\tau = 0,5$ с с частотой заполнения 100 Гц.

Решение. Находим полосу частот звука, возбужденного в зале: от $f_0 - \Delta f/2$ до $f_0 + \Delta f/2$, где $\Delta f = 1/\tau = 2$ Гц. Отсюда определяем число нормальных волн по формуле (3.2): $dN = 73$.

2.3.5. Прямоугольный коридор имеет ширину 2 м, высоту 3 м и длину 10 м. Найти число возбужденных мод ΔN помещения в интервале частот от f до $f + \delta f$ в зависимости от частоты f ($f_1 = 100$ Гц, $f_2 = 1000$ Гц, $\delta f = 5$ Гц).

Ответ. При $f = 100$ Гц $\Delta N = 1-2$ моды; при $f = 1000$ Гц $\Delta N \approx 100$ мод.

2.3.6. Воздух в помещении в форме куба с ребром 5 м приведен в колебание так, что все моды в интервале между $f_1 = 998$ Гц и $f_2 = 1001$ Гц возбуждены. Сколько мод при этом возбуждено? К какому виду они принадлежат?

Ответ. Общее число мод 168–169, из них: косых 160, тангенциальных 8, аксиальных — не более 1.

2.3.7. Представить акустическое поле в прямоугольном волноводе с жесткими стенками как суперпозицию нормальных волн.

Решение. Рассмотрим распространение звука в бесконечной трубе прямоугольного сечения со сторонами a и b , направленными соответственно по осям x и y . Решение волнового уравнения для потенциала

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее условию, что колебательная скорость на границах равна нулю (см. задачу 2.3 1), имеет вид

$$\varphi(z, y, z, t) = \sum_m \sum_n A_{mn} \cos(k_m x) \cos(k_n y) \exp(ik_p z - i\omega t), \quad (2)$$

$$k_m = m\pi/a, \quad k_n = n\pi/b, \quad (3)$$

а продольное волновое число

$$k_q = (k^2 - k_m^2 - k_n^2)^{1/2}, \quad k = \omega/c, \quad (4)$$

является действительным, если

$$\omega/c > (k_m^2 + k_n^2)^{1/2}. \quad (5)$$

Если же это условие не выполнено, то данная мода является нераспространяющейся. Каждой моде с номерами m и n соответствует своя критическая частота

$$f_{m,n} = \frac{c}{2} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (6)$$

Скорость распространения моды (m, n)

$$c_{m,n} = \frac{\omega}{k_{mn}} = \omega \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (7)$$

2.3.8. Показать, что наличие затухающих мод в трубе эквивалентно образованию линий тока в ближней зоне излучения.

Решение. Пусть волновое число моды, направленной вдоль трубы, будет мнимое, т.е. частота звука меньше критической частоты для данной моды. Тогда

$$k_q = k_{mn} = i(k_m^2 + k_n^2 + k^2)^{1/2} = i\mu.$$

Рассмотрим частный случай $k_n = 0$, что соответствует аксиальным модам, параллельным оси x :

$$\varphi_{m0} = A_{m0} e^{-\mu z} \cos(k_m x) e^{-i\omega t}.$$

Вычислим скорость этой моды в направлении осей x и z :

$$v_x = \partial \varphi_{m0} / \partial x = -k_m A_{m0} e^{-\mu z} \sin(k_m x) e^{-i\omega t},$$

$$v_z = \partial \varphi_{m0} / \partial z = -\mu A_{m0} e^{-\mu z} \cos(k_m x) e^{-i\omega t}.$$

Звуковое давление

$$p = -i\omega \rho \varphi_{m0} = -i\omega \rho A_{m0} e^{-\mu z} \cos(k_m x) e^{-i\omega t}$$

по фазе отличается от скорости v_z на $\pi/2$, что указывает на отсутствие потока энергии в направлении оси z . Вместо потока образуются линии тока, замыкающиеся на начальном сечении трубы $z = 0$. Уравнение линий тока находим, разделив v_z на v_x и учитывая, что $v_x dt = dx$, $v_z dt = dz$:

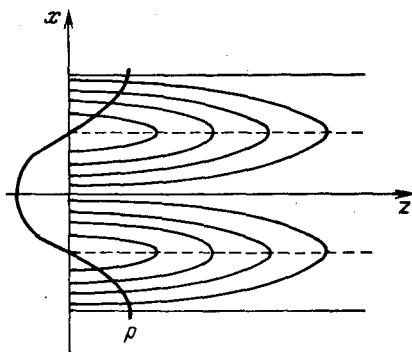
$$\frac{dz}{dx} = \frac{v_z}{v_x} = \frac{\mu}{k_m} \operatorname{ctg}(k_m x).$$

Интегрируя дифференциальное уравнение, получим уравнение линий тока в плоскости xz

$$z = (\mu/k_m^2) \ln |\sin(k_m x)| + c.$$

Картина линий тока для моды $(2, 0)$ схематично показана на рисунке.

2.3.9. Найти шесть низших мод в длинной трубе прямоугольного сечения размером 50 на 100 см с неподатливыми стенками, заполненной воздухом, и построить их дисперсионные кривые.



К задаче 2.3.8

Какие из этих мод будут незатухающими, если частота возбуждения равна 500 Гц?

Ответ Находим критические частоты по формуле (7.6) Незатухающие моды получаются при $f > f_{mn}$ Дисперсионные кривые строим по формуле для скорости распространения моды (см (7.7))

$$c_{mn} = \frac{\omega}{k_{mn}} = \omega \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

Например, для моды (1, 1)

$$c_{11} = \omega \left[\left(\frac{\omega}{340} \right)^2 - 5\pi^2 \right]^{-1/2}$$

$f_{mn} = 170 (m^2 + 4n^2)^{1/2}$ Незатухающими будут моды (1, 0), (0, 1), (2, 0), (0, 2), (1, 1)

2.3.10. Вычислить в функции частоты среднюю плотность потока звуковой энергии для отдельной моды типа $(m, 0)$ в бесконечной по длине прямоугольной трубе сечением $a \times b$, если в начальном сечении ($z = 0$) скорость $v_{m0} = v_0 \cos(2\pi x/\Lambda) \sin(\omega t)$, где $\Lambda = 2a/m$, $m = 1, 2$, Сторона a расположена по оси x , сторона b — по оси y

Решение Потенциал скорости моды $(m, 0)$ запишем в виде

$$\varphi_{m0} = A_{m0} \cos(k_m x) \cos(k_p z - t),$$

где $k_m = m\pi/a$, $k_p^2 = (\omega/c)^2 - k_m^2$ Тогда

$$v = \partial \varphi_{m0} / \partial z = -A_{m0} k_p \cos(k_m x) \sin(k_p z - \omega t)$$

Используя граничное условие, определяем $A_{m0} = -v_0/k_p$ Давление $p = -\rho \varphi_{m0} = -\rho \omega A_{m0} \cos(k_m x) \sin(k_p z - \omega t)$ Средняя по времени плотность потока энергии моды $(m, 0)$ в точке (x, z) равна $J = \overline{pv} = 0,5 A_{m0}^2 k_p \rho \omega \cos^2(k_m x)$, или

$$J = 0,5 \rho \omega v_0^2 \cos^2(m\pi x/a) [(\omega/c)^2 - (m\pi/a)^2]^{-1/2}$$

2.3.11. Найти нормальные волны и связь между фазовой c_ϕ и групповой $c_{гр}$ скоростями нормальной волны номера l и скорость звука c_0 в водной среде, ограниченной идеальным дном и поверхностью

Решение Рассмотрим однородный слой, ограниченный абсолютно отражающими плоскостями $z = 0$ и $z = h$ (коэффициент отражения $V = 1$) Звуковое поле в слое характеризуем потенциалом скорости ψ , удовлетворяющим волновому уравнению

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0, \quad k = \omega/c, \quad (1)$$

при граничных условиях

$$\partial \psi / \partial z = 0, \quad z = 0, \quad z = h \quad (2)$$

Полагая $\psi(x, z) = F(z) \exp(i\xi x)$, из (1) и (2) находим уравнение для определения постоянной распространения для нормальной волны номера l :

$$\xi_l = \left[k^2 - (l\pi/h)^2 \right]^{1/2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Фазовая скорость нормальной волны номера l вдоль слоя равна

$$c_{ф,l} = \omega/\xi_l = c [1 - (f_l/f)^2]^{-1/2}, \quad (3)$$

где $f_l = lc/2h$ — критическая частота. Групповая скорость нормальной волны номера l вдоль слоя будет

$$c_{гр,l} = d\omega/d\xi_l = c [1 - (f_l/f)^2]^{1/2}. \quad (4)$$

Отсюда находим $c_{ф,l} c_{гр,l} = c^2$.

2.3.12. Представить нормальную волну в плоском слое в виде суммы двух бегущих плоских волн с определенными углами наклона их фронтов.

Решение. Рассмотрим плоский слой между двумя жесткими границами (коэффициент отражения $V = 1$). Потенциал поля в слое представляется в виде суммы нормальных волн:

$$\psi(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} F_l(z) \exp(i\xi_l x),$$

где при заданных граничных условиях

$$F_l(z) = 2A_l \cos \left[\sqrt{k^2 - \xi_l^2} z \right], \quad k = \omega_0/c.$$

Учитывая, что $\sqrt{k^2 - \xi_l^2} h = l\pi$, $l = 0, 1, 2, \dots$, имеем

$$\psi(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \cos(l\pi z/h) \exp \left[\pm \sqrt{k^2 - (l\pi/h)^2} x \right],$$

но

$$\cos(l\pi z/h) e^{i\xi_l x} = \frac{1}{2} \left[e^{ik(x \sin \theta_l + z \cos \theta_l)} + e^{ik(x \sin \theta_l - z \cos \theta_l)} \right],$$

где $\sin \theta_l = \xi_l/k$, $\cos \theta_l = l\pi/kh$, θ_l — угол, который нормаль к фронту (луч) образует с осью z . Таким образом, каждая нормальная волна как бы состоит из суммы двух, симметрично наклоненных к оси канала плоских волн (лучи Бриллюэна).

2.3.13. Найти критические частоты и поле в плоском слое, когда верхняя граница слоя $z = h$ является абсолютно мягкой (коэффициент отражения $V = -1$), а нижняя — абсолютно жесткой ($V = +1$).

Решение. Представим поле нормальной волны в виде суммы плоских волн (см. задачу 2.3.12), распространяющихся как в положительном, так и отрицательном направлении оси z : ψ_+ и

ψ_- , причем

$$\psi_+ = A e^{ik_0(x\sin\theta + z\cos\theta)}, \quad \psi_- = B e^{ik(x\sin\theta - z\cos\theta)}. \quad (1)$$

На нижней границе ($z = 0$) ψ_- является падающей волной, ψ_+ — отраженной; на верхней границе ($z = h$) — наоборот. Согласно граничным условиям

$$(\psi_+/\psi_-)_{z=0} = -1, \quad (\psi_-/\psi_+)_{z=h} = 1.$$

Отсюда получаем

$$\frac{A}{B} = 1, \quad \frac{B}{A} \exp(-2ikh\cos\theta) = -1, \quad \exp(-2ikh\cos\theta) = -1,$$

т.е.

$$\cos\theta_l = \pi(l-1/2)/(k_0h), \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

Полное поле в слое равно сумме нормальных волн

$$\psi(x, z) =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} A_l e^{ikx\sin\theta_l} [e^{ikz\cos\theta_l} + e^{-ikz\cos\theta_l}] = \sum_{l=1}^{\infty} A_l \cos \frac{\pi(l-1/2)z}{h} e^{ikx\sin\theta_l}.$$

Так как $\sin\theta_l = \sqrt{1 - [\pi(l-1/2)/kh]^2}$, то критическую частоту находим из условия $\pi(l-1/2)/kh = 1$. Критическая частота нормальной волны номера l равна $f_l = c(l-1/2)/2h$.

2.3.14. Вычислить критические частоты первых трех мод (не считая нулевой) для идеального плоского волновода в воздухе толщиной $d = 10$ см, если коэффициенты отражения звука на его границах равны $V_1 = V_2 = 1$. Будут ли возбуждены эти моды звуком частотой 1, 5, 10 кГц? Построить дисперсионные кривые для фазовой и групповой скоростей указанных мод.

Ответ. Звук с частотой 1 кГц не возбуждает ни одну моду; 5 кГц возбуждает моды 1 и 2; 10 кГц возбуждает все три моды, а также моды 4 и 5.

2.3.15. Определить для мод, рассматриваемых в задаче 2.3.12, направления лучей Бриллюэна, если в волноводе возбужден звук частотой 5 кГц.

Решение. Наклон лучей Бриллюэна к границам волновода находим по формуле $\sin\chi_m = \pm f_m/f$. Значения критических частот: $m = 1$, $f_m = 1700$ Гц; $m = 2$, $f_m = 3400$ Гц; $m = 1$, $\chi \approx 20^\circ$; $m = 2$, $\chi \approx 43^\circ$. Мода $m = 3$ при $f = 5$ кГц не возбуждается.

2.3.16. Слой воды (без поглощения) толщиной 15 м расположен над абсолютно отражающим плоским дном. Вычислить собст-

венные функции для двух первых нормальных волн. Определить их критические частоты.

Решение. Собственные функции имеют вид $z_m = \sin(k_m z)$, где $k_m = (m-1/2)\pi/h$, $m = 1, 2$; $h = 15$ м. Критические частоты $f_k = (2m-1)c/4h$, $m = 1, 2$; $c = 1500$ м/с. Таким образом, $k_1 = \pi/30$ м⁻¹, $k_2 = \pi/10$ м⁻¹; $f_1 = 25$ Гц, $f_2 = 75$ Гц.

2.3.17. Показать качественно вертикальное распределение амплитуды звукового давления в четырех первых модах, включая нулевую, в идеальном плоском волноводе толщиной $d = 10$ см, если коэффициенты отражения на его верхней и нижней границах равны: $V_1 = V_2 = -1$; $V_1 = V_2 = 1$; $V_1 = -1$, $V_2 = 1$.

Решение. Чтобы показать распределение амплитуды давления, необходимо учесть, что давление равно нулю на границе, где коэффициент отражения $V = -1$, и максимально при $V = 1$. В первых двух случаях по глубине укладывается четное число четвертей длин волн, в последнем — нечетное.

2.3.18. Часто на дне озер залегают осадки, содержащие пузырьки, которые образуются при разложении органических веществ. Поэтому жидкий слой может аппроксимироваться слоем с двумя квазисвободными поверхностями сверху и снизу: толщина слоя воды h , скорость звука $c = 1500$ м/с, плотность воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м³. а) Определить собственные функции волновода $Z_m(z)$; б) найти собственные значения k_m волновода при $h = 5$ м; в) вычислить критические частоты для четырех нормальных волн; г) вычислить горизонтальные составляющие ξ_m постоянной распространения и фазовую скорость c_1 первой нормальной волны при частоте сигнала 300 Гц.

Решение. Коэффициенту отражения на границах $V = -1$ удовлетворяют собственные функции волновода $Z_m(z) = \sin(k_m z)$, собственные значения $k_m = m\pi/h$, критические частоты нормальных волн $f_m = mc/2h$. Горизонтальная составляющая постоянной распространения

$$\xi_m = \sqrt{k^2 - \xi_m^2}, \quad k = 2\pi f/c.$$

Фазовые скорости мод $c_m = 2\pi f/\xi_m$. Следовательно: а), б) $Z_m = \sin(k_m z)$, $k_m = m(\pi/5)$ м⁻¹; в) $f_m = 150m$ Гц, $m = 1, 2, 3, 4$; г) $\xi_m = [(2\pi f/c)^2 - (m\pi/h)^2]^{1/2} = (\pi/5)(4-m^2)^{1/2}$ м⁻¹, $c_m = 3000/(4-m^2)^{1/2}$ м/с, для первой моды $m = 1$ $c_1 = 1730$ м/с.

2.3.19. Для донного осадка, описанного в задаче 2.3.18, положить $c_1 = 50$ м/с, $\rho_1 = 1,1 \cdot 10^3$ кг/м³. Найти коэффициент

отражения первой нормальной волны от дна, если частота звука равна 300 Гц; оценить коэффициент затухания этой волны, обусловленного неполным отражением ее от дна. Плотность воды $\rho_0 = 10 \text{ кг/м}^3$. Скорость звука в воде $c_0 = 1500 \text{ м/с}$.

Решение. Представим первую моду через два луча Бриллюэна. Угол наклона лучей $\chi_1 = \arcsin(f_1/f)$, где f_1 — критическая частота первой моды: $f_1 = c_0/2h = 150 \text{ Гц}$, откуда $\chi_1 = 30^\circ$. Находим коэффициент отражения луча по формуле

$$V = \frac{m \sin \chi_1 - \sqrt{n^2 - \cos^2 \chi_1}}{m \sin \chi_1 + \sqrt{n^2 - \cos^2 \chi_1}}, \quad m = \frac{\rho_1}{\rho_0} = 1,1, \quad n = \frac{c_0}{c_1} = 30.$$

Вследствие неполного отражения звука от дна волна в слое воды постепенно ослабевает. Например, на расстоянии L луч отражается от дна $N = L/\Delta$ раз, где $\Delta = 2h/\text{tg} \chi_1$. Относительное уменьшение энергии при каждом отражении луча равно $1 - |V|^2$, а на длине $100 \text{ м} - (1 - |V|^2)N$ с учетом разложения волны на два луча Бриллюэна $2(1 - |V|^2)N$; среднее ослабление на 1 м , т.е. коэффициент затухания первой нормальной волны, равно $2\gamma = 2 \times (1 - |V|^2)N/100$. Числовые значения: $|V| = 0,96$, $\gamma \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$.

2.3.20. В сторону берегового шельфа, каменистое дно которого образует с горизонтальным уровнем воды угол $1,1^\circ$, распространяется звук с частотой 6 кГц от практически ненаправленного излучателя. Определить число незатухающих мод, проходящих в точки, расположенные на расстояниях 10 и 50 м от берега. Найти углы наклона к горизонту лучей Бриллюэна на расстоянии 10 м от берега. Скорость звука в воде 1480 м/с .

Решение. Считая коэффициент отражения равным на верхней границе -1 , на нижней $+1$, находим критические частоты m -моды на различной глубине клиновидного шельфа: $hf_{hm} = (2m-1) \times c/4h$ ($h = r \text{ tg} \chi = 0,0192r$, $c = 1480 \text{ м/с}$). Незатухающие моды образуются, если $f = 6000 \text{ Гц} > f_{hm}$. Находим значения h при r , равных 10 и 50 м , вычисляем для этих глубин критические частоты f_{hm} и определяем незатухающие моды, соответствующие некоторым значениям m . Далее вычисляем углы наклона к горизонту лучей Бриллюэна на расстоянии $r = 10 \text{ м}$ от берега: $\sin \chi_m = f_{hm}/f$. Таким образом, на расстоянии $r = 10 \text{ м}$ образуются две незатухающие моды; при $r = 50 \text{ м}$ — восемь мод. Углы наклона лучей Бриллюэна при $r = 10 \text{ м}$: $m = 1$, $\chi_1 = 18,7^\circ$; $m = 2$, $\chi_2 = 41,7^\circ$.

2.3.21. Вычислить объемную плотность энергии и интенсивность звука в диффузном поле.

Решение. В диффузном (или изотропном) звуковом поле, т.е. в таком пространстве, где отсутствуют упорядоченные направления распространения звука, объемная энергия равна

$$\bar{E} = \frac{A^2}{2\rho c^2} \int d\Omega = \frac{A^2}{2\rho c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{2\pi A^2}{\rho c^2},$$

где $d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ есть элемент телесного угла, A — амплитуда давления, не зависящая от направления вектора $\mathbf{k}$, характеризуемого углами θ и φ . Интенсивность звука, т.е. энергия, падающая в единицу времени на единицу площади, равна

$$J = \frac{A}{2\rho c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{\pi A^2}{2\rho c} = \frac{c\bar{E}}{4}.$$

2.3.22. Вывести формулу для времени реверберации звука в помещении.

Решение. Напишем уравнение баланса энергии в объеме, где находится источник звука с мощностью $N(t)$, а полное поглощение звука (различными предметами, граничными поверхностями) равно a . Энергия источника за вычетом поглощенной энергии в единицу времени идет на изменение энергии поля: $N(t) - Ja = d(\bar{E}V)/dt$, где J — интенсивность звука в диффузном поле, т.е. энергия, падающая на единицу площади в единицу времени, $\bar{E}$ — объемная плотность энергии, V — объем. Но $\bar{E} = 4J/c$, где c — скорость звука (см. задачу 2.3.20). Уравнение баланса энергии: $\frac{dJ}{dt} + \frac{ac}{4V} J = \frac{c}{4V} N(t)$. Пусть источник звука включается в момент $t = 0$. После этого интенсивность звука спадает по экспоненциальному закону, который находим из уравнения

$$\frac{dJ}{dt} + \frac{ac}{4V} J = 0, \quad (1)$$

где $J = J_0 \exp(-\frac{ac}{4V} t)$ — формула отзвука. Время, в течение которого интенсивность звука уменьшается в 10^6 раз (на 60 дБ), называется стандартным временем реверберации. Из уравнения (1) находим $t_r = (24/c \lg e) V/a$; для воздуха ($c = 340$ м/с) $t_r = 0,162 V/a$ [с].

2.3.23. Вычислить время реверберации t_r в прямоугольном зале размером $100 \times 70 \times 20$ м, если средний коэффициент затухания стен, пола и потолка равен $\alpha = 0,6$ м⁻².

Ответ. $t_r = 0,162 V/a = 1,82$ с, $a = \alpha \sum S_k$, где S_k — площадь ограничивающих плоскостей.

3. АКУСТИКА НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

3.1. Геометрическая акустика.

Уравнения эйконала, переноса, луча

3.1.1. Распространение в среде гармонического сигнала ($p \sim \exp(-i\omega t)$), скорость звука в которой зависит от координат $c = c(r)$, описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta p + k_0^2 n^2(r) p = 0. \quad (1)$$

Здесь $k_0 = \omega/c_0$, $n(r) = c_0/c(r)$ — показатель преломления. Если свойства среды изменяются медленно на расстояниях порядка длины волны, решение (1) должно быть близким к локально плоской волне:

$$p = A(r) \exp[ik\Psi(r)], \quad (2)$$

где A и Ψ — амплитуда и эйконал. Вывести приближенные уравнения геометрической акустики, связывающие A , Ψ и $n(r)$.

Решение. Подставляя формулу (2) в уравнение (1), получаем

$$\frac{1}{k_0^2} \Delta A + \frac{i}{k_0} (2\nabla\Psi \nabla A + A \Delta\Psi) - A [(\nabla\Psi)^2 - n^2(r)] = 0. \quad (3)$$

Характерный масштаб изменения A и $\nabla\Psi$ соответствует размеру неоднородности L . При рассмотрении коротких волн в уравнении (3) появляется малый параметр $\lambda/L \ll 1$. В этом случае в уравнении (3) первым членом $\Delta A/k_0^2$ можно пренебречь. Оставшиеся члены образуют уравнение эйконала

$$(\nabla\Psi)^2 = n^2(r) \quad (4)$$

и уравнение переноса

$$2\nabla\Psi \nabla A + A \Delta\Psi = 0. \quad (5)$$

Эти два уравнения называются уравнениями геометрической акустики. Решать их гораздо проще, чем исходное уравнение Гельмгольца (1).

3.1.2. Решение основного уравнения геометрической акустики — уравнения эйконала (1.4) позволяет построить поверхности равной фазы $\Psi(r) = \text{const}$, т.е. поверхности волнового фронта.

Поток волновой энергии направ- z
лен вдоль лучей — линий, перпен-
дикулярных фронтам. Получить
уравнение для траектории луча.

Решение. Если решение урав-
нения эйконала (1.4) известно,
то единичный вектор нормали к
фронту есть

$$\mathbf{l} = \nabla \Psi / |\nabla \Psi| = \nabla \Psi / n. \quad (1)$$

Пусть траектория луча описы-
вается функцией $\mathbf{R}(s)$, где $\mathbf{R}$ —
радиус-вектор, s — расстояние, отсчитываемое вдоль луча (см.
рисунок). Тогда из определения единичного вектора касательной

$$d\mathbf{R}/ds = \mathbf{l} \quad (2)$$

и формулы (1) следует

$$n d\mathbf{R}/ds = \nabla \Psi. \quad (3)$$

Дифференцируя (3) по s , с учетом (1) получаем

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{R}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (\nabla \Psi) = (\nabla \cdot) \nabla \Psi = \frac{1}{n} (\nabla \Psi \nabla) \nabla \Psi = \frac{1}{n} \nabla \frac{(\nabla \Psi)^2}{2}.$$

Из этого соотношения и уравнения эйконала следует уравнение
для траектории луча

$$\frac{d}{ds} \left[n \frac{d\mathbf{R}}{ds} \right] = \nabla n. \quad (4)$$

Во многих задачах вместо длины дуги s удобно использовать
переменную τ такую, что $d\tau = ds/n$. При этом (4) примет вид

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{d\tau^2} = \nabla \frac{n^2}{2}. \quad (5)$$

Это уравнение аналогично уравнению движения материальной
точки в силовом поле с потенциалом $U = -n^2(\mathbf{r})/2$.

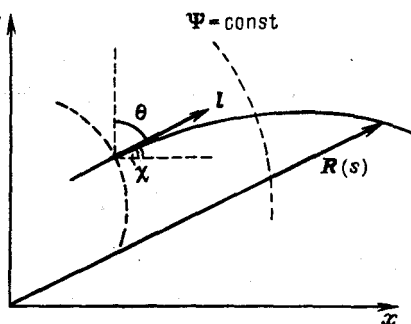
3.1.3. Решить уравнение для траектории луча для среды с
постоянной скоростью звука $c = c_0$.

Ответ. Для луча, выходящего из точки $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0$ при $s = 0$
вдоль единичного вектора $\mathbf{l}_0$, начальные условия имеют вид

$$\mathbf{R}(s=0) = \mathbf{R}_0, \quad d\mathbf{R}(s=0)/ds = \mathbf{l}_0,$$

и в однородной среде ($n = 1$) решение (2.4) $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{l}_0 s$ опи-
сывает прямую линию.

3.1.4. Получить уравнение для траектории луча в плоско-
слоистой среде, скорость звука в которой зависит лишь от
вертикальной координаты: $c = c(z)$.



К задаче 3.1.2

Решение. Пусть луч составляет угол θ с вертикалью и угол $\chi = \pi/2 - \theta$ с горизонталью (см. рисунок к задаче 3.1.2). По определению

$$\frac{dx}{ds} = l_x = \sin\theta = \cos\chi, \quad \frac{dz}{ds} = l_z = \cos\theta = \sin\chi. \quad (1)$$

Из (2.4) следует, что $d(nl_x)/ds = 0$, $nl_x = \text{const}$, или

$$n(z) \sin\theta(z) = n_0 \sin\theta_0, \quad n(z) \cos\chi(z) = n_0 \cos\chi_0, \quad (2)$$

где θ_0 , χ_0 соответствуют углу выхода луча при $z = z_0$, а $n_0 = n(z_0)$. Равенство (2) есть известный закон Снеллиуса для плоскослоистой среды. Для получения траектории луча $z = z(x)$ воспользуемся формулой, следующей из (1) и (2):

$$\frac{dz}{dx} = \text{tg } \chi = \pm \frac{[n^2(z) - n_0^2 \cos^2 \chi_0]^{1/2}}{n_0 \cos \chi_0}. \quad (3)$$

Продифференцируем (3) еще раз по x :

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{2n_0^2 \cos^2 \chi_0} \frac{dn^2}{dz}. \quad (4)$$

Уравнение (4) нужно решать с начальными условиями

$$z(x=0) = z_0, \quad \frac{dz(x=0)}{dx} = \text{tg } \chi_0. \quad (5)$$

Для лучей, распространяющихся под малыми углами к горизонтальной оси x , уравнение траектории луча (4) не содержит χ_0 , так как $\cos^2 \chi_0 \approx 1$.

3.1.5. Используя закон преломления на плоской границе двух сред со скоростями звука c_0 и c_1

$$c_1 \cos \chi_0 = c_0 \cos \chi_1, \quad (1)$$

получить закон Снеллиуса для непрерывной плоскослоистой среды ($c = c(z)$).

Ответ. Чтобы получить закон Снеллиуса (4.2) или

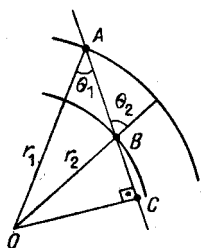
$$\frac{\cos \chi(z)}{c(z)} = \frac{\cos \chi_0}{c_0}, \quad (2)$$

нужно разбить среду на тонкие горизонтальные слои, в каждом из которых скорость звука постоянна. Применяя последовательно на каждой границе закон (1), придем к формуле (2).

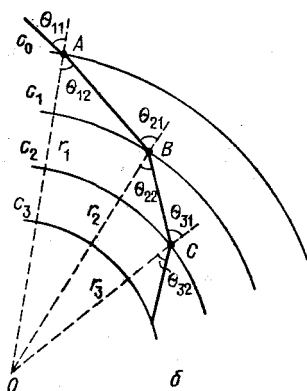
3.1.6. Получить закон преломления луча в сферически-слоистой среде, скорость звука в которой $c = c(r)$ зависит от расстояния r до центра симметрии.

Решение. Разобьем среду на достаточно тонкие сферические слои, в каждом из которых скорость можно считать постоянной.

Рассмотрим луч AB , пересекающий две границы одного слоя



а



б

К задаче 3.1.6

(см. рисунок а). Проведем линию $OC \perp AB$. Имеем вспомогательное соотношение

$$OC = r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2, \quad \text{или} \quad \sin \theta_2 = \frac{r_1}{r_2} \sin \theta_1. \quad (1)$$

Далее обычный закон преломления запишем последовательно для границ слоев. На первой границе (точка А на рисунке б)

$$\frac{\sin \theta_{11}}{\sin \theta_{12}} = \frac{c_0}{c_1}.$$

На границе второго слоя (точка В)

$$\frac{\sin \theta_{21}}{\sin \theta_{22}} = \frac{c_1}{c_2},$$

или с учетом соотношения (1)

$$\frac{r_1 \sin \theta_{12}}{r_2 \sin \theta_{22}} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Продолжая цепочку этих выражений, на границе i -го слоя получим

$$\frac{r_{i-1} \sin \theta_{(i-1)2}}{r_i \sin \theta_{i2}} = \frac{c_{i-1}}{c_i}.$$

Перемножая все записанные выражения, находим

$$\frac{r_1 \sin \theta_{11}}{r_i \sin \theta_{i2}} = \frac{c_0}{c_i} = \frac{n_i}{n_0},$$

или

$$r n(r) \sin \theta(r) = r_0 n(r_0) \sin \theta(r_0) = \text{const} \quad (2)$$

(правило Бонера).

3.1.7. Найти траекторию луча в плоскостной среде.

Решение. Для расчета траектории $z = z(x)$ нужно решить нелинейное дифференциальное уравнение (4.4). Другой путь — ис-

каты зависимости $x = x(z)$, воспользовавшись (4.3):

$$\frac{dx}{dz} = \operatorname{ctg} \chi = \pm \frac{n_0 \cos \chi_0}{[n^2(z) - n_0^2 \cos^2 \chi_0]^{1/2}} \quad (1)$$

Интегрируя это уравнение с условием $x(z=z_0) = 0$, получаем

$$x(z) = \pm n_0 \cos \chi_0 \int_{z_0}^z [n^2(z) - n_0^2 \cos^2 \chi_0]^{-1/2} dz. \quad (2)$$

Точки $z = z_n$, для которых $n^2(z_n) = n_0^2 \cos^2 \chi_0$ и знаменатель под интегралом (2) обращается в нуль, являются точками поворота луча.

3.1.8. Рассчитать эйконал волны в плоскослоистой среде с вертикальной стратификацией скорости звука $c = c(z)$.

Решение. В плоскослоистой среде уравнение эйконала имеет вид

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 = n^2(z). \quad (1)$$

В соответствии с формулой (2.1) имеем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = n(z) l_x = n(z) \cos \chi(z) = \text{const.}$$

Подставляя это соотношение в уравнение (1) и интегрируя его, получим

$$\Psi = x n_0 \cos \chi_0 \pm \int_{z_0}^z [n^2(z) - n_0^2 \cos^2 \chi_0]^{1/2} dz. \quad (2)$$

3.1.9. В приближении геометрической акустики рассчитать поле волны в плоскослоистой среде.

Решение. Подставляя в уравнение переноса (1.5) результат (2) предыдущей задачи, приведем уравнение к виду

$$\frac{d}{dz} [A^2 n(z) \sin \chi(z)] = 0.$$

Отсюда находим амплитуду

$$A = \frac{C}{(n \sin \chi)^{1/2}} = \frac{C}{[n^2(z) - n_0^2 \cos^2 \chi_0]^{1/4}}.$$

Поле в плоскослоистой среде дается выражением

$$p(x, z) = [n^2(z) - n_0^2 \cos^2 \chi_0]^{-1/4} \left\{ C_1 \exp \left[i k_0 x n_0 \cos \chi_0 - i k_0 \int_{z_0}^z (n^2 - \cos^2 \chi_0)^{1/2} dz \right] + \right. \\ \left. + C_2 \exp \left[i k_0 x n_0 \cos \chi_0 + i k_0 \int_{z_0}^z (n^2 - \cos^2 \chi_0)^{1/2} dz \right] \right\}.$$

Решение представляется как сумма двух волн, одна из которых бежит "вверх" вдоль оси, а другая — "вниз".

3.1.10. Получить выражения для кривизны и радиуса кривизны луча в плоскослоистой среде.

Решение. Пусть $\chi(z)$ — угол между направлениями луча и горизонталью. Кривизна K и радиус R кривизны по определению (см. рисунок) равны

$$K = \frac{d\chi}{ds} = \sin\chi \frac{d\chi}{dz}, \quad R = |K|^{-1} \quad (1)$$

Из закона Снеллиуса (см. (5.2)) имеем

$$-\sin\chi \frac{d\chi}{dz} = \cos\chi_0 \frac{1}{c_0} \frac{dc(z)}{dz} \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим

$$K = -\cos\chi_0 \frac{1}{c_0} \frac{dc}{dz}, \quad (3)$$

$$R = \frac{c_0}{\cos\chi_0} \left| \frac{dc}{dz} \right|^{-1}$$

К задаче 1.3.10

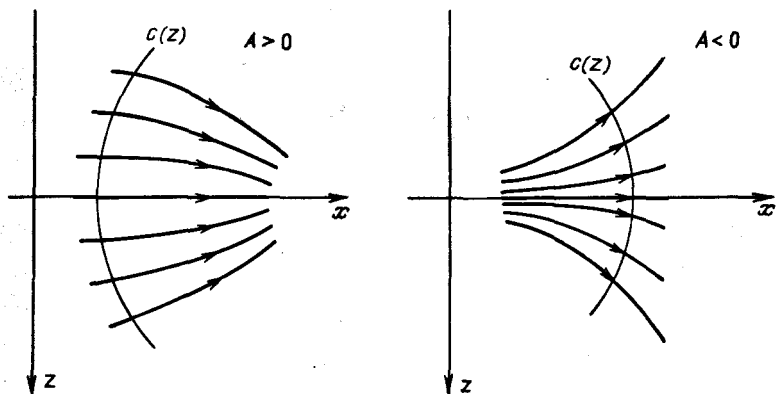
Заметим, что знак K характеризует направление искривления луча. Луч искривляется в сторону меньших значений $c(z)$.

В точке входа луча в неоднородную среду

$$R = \frac{|H|}{\cos\chi_0}, \quad H = \frac{c_0}{dc_0/dz}, \quad (4)$$

где H — величина с размерностью длины, обратная относительному градиенту скорости звука. Из (4) следует, что радиус кривизны при заданных свойствах среды минимален для горизонтальных лучей ($\chi_0 = 0$).

3.1.11. Исследовать зависимость кривизны K луча от вертикальной координаты в точке z_0 входа в плоскослоистую среду,



К задаче 3.1.11

скорость звука в которой $c(z) = Az^2 + B$, $B > 0$. В какую сторону искривляется луч в зависимости от знака A ?

Ответ. $K = -2Az_0 \cos \chi_0 / (Az_0^2 + B)$. При $A > 0$ (волноводный канал) луч искривляется к оси канала $z = 0$, а при $A < 0$ (антиволноводный канал) луч от оси уходит (см. рисунок).

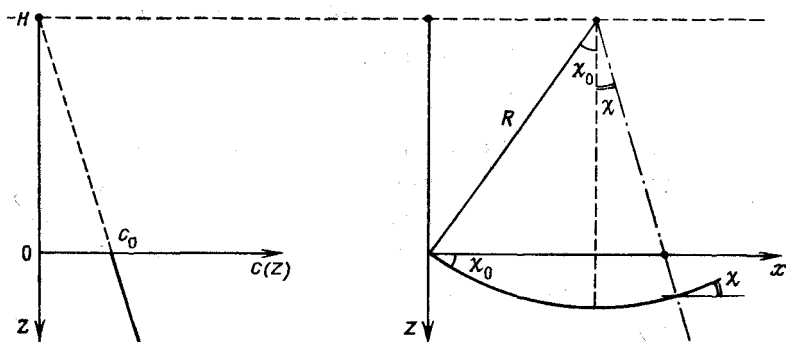
3.1.12. Найти радиус кривизны и траекторию луча в среде с постоянным градиентом скорости звука

$$c(z) = c_0(1 + z/H). \quad (1)$$

Решение. В случае постоянного градиента скорости согласно формуле (10.3)

$$R = \frac{c_0}{\cos \chi_0} \left| \frac{dc}{dz} \right|^{-1} = \frac{|H|}{\cos \chi_0}. \quad (2)$$

Следовательно, радиус кривизны в такой среде постоянен, а траектории лучей имеют вид окружностей. Очевидно, что центр окружности должен соответствовать точке, где скорость звука обращается в нуль, т.е. он должен лежать в плоскости $z = -H$



К задаче 3.1.12

(см. рисунок). Если луч входит в неоднородную среду в точке $(x = 0, z = 0)$ под углом скольжения χ_0 , его траектория с радиусом кривизны (2) описывается уравнением

$$(x - H \operatorname{tg} \chi_0)^2 + (z + H)^2 = H^2 / \cos^2 \chi_0. \quad (3)$$

3.1.13. Рассчитать траекторию луча в плоскослоистой среде с постоянным градиентом скорости (см. (12.1)), используя закон Снеллиуса и выражая пройденное расстояние через начальный χ_0 и конечный χ углы скольжения.

Решение. Из уравнения (7.1) для траектории луча получаем

$$x = \int_{z_0}^z \operatorname{ctg} \chi(z) dz = \int_{\chi_0}^{\chi} \frac{\cos \chi}{\sin \chi} \frac{dz}{dx} d\chi. \quad (1)$$

Используя формулу (10.2), следующую из закона Снеллиуса, для среды с постоянным градиентом скорости получаем

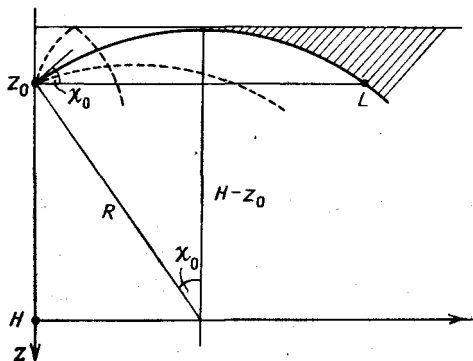
$$x = \frac{H}{c \cos \chi_0} [\sin \chi_0 - \sin \chi(z)]. \quad (2)$$

Можно показать, что выражение (2) сводится к уравнению окружности (12.3); см. также рисунок к задаче 3.1.12.

3.1.14. При распространении звука в океане вертикальное отклонение луча z , как правило, много меньше размера неоднородности H . Используя это условие, получить из формулы (12.3) явное выражение $z = z(x)$ для траектории луча.

Ответ. $z = x \operatorname{tg} \chi_0 - x^2/2H$. Луч представляет собой параболу.

3.1.15. Источник находится на глубине z_0 в плоскостной среде с постоянным отрицательным градиентом скорости $c = c_0 x (1 - z/H)$. Найти горизонтальное расстояние L от источника до границы геометрической тени (см. рисунок).



К задаче 3.1.15

Решение. Граница определяется лучом, идущим под углом χ_0 и касающимся верхней границы среды. Пользуясь рисунком, находим радиус кривизны R и расстояние L :

$$R = \frac{H - z_0}{\cos \chi_0}, \quad L = 2R \sin \chi_0 = 2(H - z_0) \operatorname{tg} \chi_0. \quad (1)$$

Угол χ_0 находится из условия $R = H$: $\cos \chi_0 = 1 - z_0/H$. Подставляя эту формулу в (1), получаем явное выражение для L . При распространении звука в океане обычно $z_0/H \ll 1$, и тогда

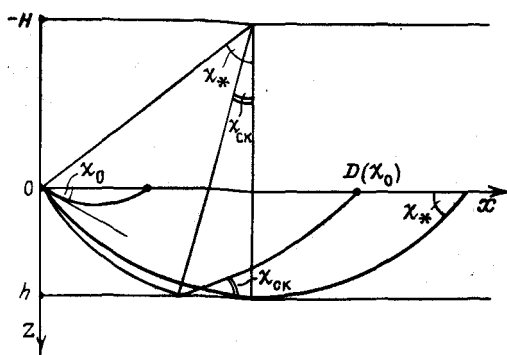
$$L = 2\sqrt{2z_0 H}. \quad (2)$$

3.1.16. Звук распространяется в приповерхностном волноводном канале с постоянным градиентом скорости (см. (12.1),

$H > 0$). Найти длину цикла луча D в зависимости от угла скольжения χ на поверхности.

Ответ. $D = 2H \operatorname{tg} \chi$. С увеличением угла χ длина цикла возрастает.

3.1.17. Найти длину цикла в условиях предыдущей задачи, если волновод имеет глубину h . Рассмотреть предельные случаи $h \ll H$, $\chi \ll 1$, $\chi = \pi/2$.



К задаче 3.1.17

Решение. В волноводе конечной глубины есть два типа лучей: отражающиеся и не касающиеся дна (см. рисунок). Критический угол χ_* определяется формой критического луча, касающегося дна, и является решением уравнения

$$\cos \chi_* = H/(H+h), \quad \chi_* \approx \sqrt{2h/H}, \quad h \ll H. \quad (1)$$

При $\chi_0 < \chi_*$ длина цикла определяется формулой $D = 2H \operatorname{tg} \chi$ (см. задачу 3.1.16). При $\chi_0 > \chi_*$

$$D(\chi_0) = \frac{2H}{\cos \chi_0} (\sin \chi_0 - \sin \chi_{\text{ск}}), \quad (2)$$

где $\chi_{\text{ск}}$ — угол скольжения у дна, определяемый из уравнения

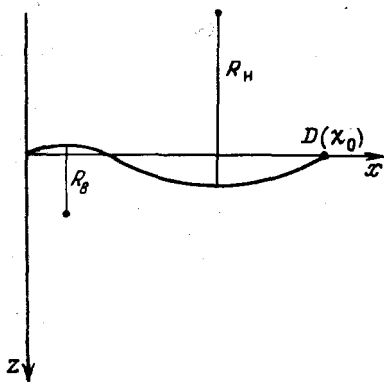
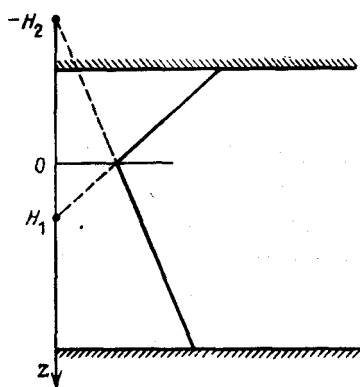
$$\cos \chi_{\text{ск}} = (1 + h/H) \cos \chi_0.$$

Длина цикла — немонотонная функция угла. Вначале она возрастает, а при $\chi > \chi_*$ убывает. В частности, при $\chi \gg \chi_*$ и $h \ll H$

$$D(\chi_0) \approx 2h \operatorname{ctg} \chi_0, \quad (3)$$

т.е. луч практически не испытывает рефракции и длина цикла такая же, как в однородном волноводе глубины h .

3.1.18. Волноводный канал образован двумя слоями с постоянными градиентами скорости звука (см. рисунок): $H = H_2$ при $z > 0$ и $H = -H_1$ при $z < 0$. Найти длину цикла $D(\chi_0)$, а также



К задаче 3.1.18

радиусы кривизны луча в верхней (R_b) и нижней (R_n) полуплоскости в зависимости от угла наклона χ_0 луча на оси канала.

Ответ. Используя результат задачи 3.1.16, находим

$$D = 2(H_1 + H_2) \operatorname{tg} \chi_0, \quad R_b = H_1 / \cos \chi_0, \quad R_n = H_1 / \cos \chi_0. \quad (1)$$

С увеличением угла χ_0 длина цикла возрастает.

3.1.19. Показать, что траектории луча в среде, в которой

$$c = c_0(1 - a^2 z^2)^{-1/2}, \quad n = n_0(1 - a^2 z^2)^{1/2},$$

представляют собой синусоиды. Найти длину цикла $D(\chi_0)$ и исследовать случай малых углов χ_0 для приосевых лучей.

Решение. Из уравнения (4.4) для лучей в плоскостной среде получаем

$$d^2 z / dx^2 = -a^2 z / \cos^2 \chi_0. \quad (1)$$

С учетом начальных условий (4.5) находим

$$z = (\sin \chi_0 / a) \sin(ax / \cos \chi_0). \quad (2)$$

Длина цикла $D = 2\pi \cos \chi_0 / a$ при малых χ_0 не зависит от угла χ_0 . Такой же результат можно получить, вычисляя интеграл (7.2).

3.1.20. Рассчитать траекторию луча в плоскостной среде с показателем преломления $n = n_0(1 + a^2 z^2)^{1/2}$.

Ответ. $z = (\sin \chi_0 / a) \operatorname{sh}(ax / \cos \chi_0)$. Луч экспоненциально быстро уходит от оси канала.

3.2. Лучи в неоднородных природных средах

3.2.1. При определении скорости звука часто используют различные эмпирические формулы, которые позволяют по измерениям температуры t (в градусах Цельсия), солености s (в

промиллях; $1\text{‰} = 0,1\%$), глубины z (в метрах) рассчитать скорость звука c (в м/с). Формулы различаются точностью определения скорости. Одной из них является формула

$$c = 1449,2 + 4,6t - 0,055t^2 + 0,00029t^3 + (1,34 - 0,010t)(s - 35) + 0,06z. \quad (1)$$

Она обеспечивает точность до 1 м/с в диапазоне температур t от 0 до 35°C , солености s от 0 до 45‰ , глубины z от 0 до 1000 м.

Пусть судно находится в широком устье реки, несущей пресную воду в море. Верхние 5 м — это пресная вода при температуре 20°C . Ниже находится толща морской воды с соленостью 20‰ и температурой 15°C . Максимальная глубина $H = 20$ м. Найти и построить профиль скорости звука.

Необходимо ли учитывать добавку к скорости звука, связанную гидростатическим давлением, — последнее слагаемое в (1)? Найти коэффициент отражения по давлению V от скачка скорости.

Ответ. $c = \begin{cases} 1481,6 + 0,016z, & 0 < z < 5 \text{ м,} \\ 1489,2 + 0,016z, & 5 < z < 20 \text{ м.} \end{cases}$ Поправка, связанная с гидростатическим давлением, меньше точности формулы.

Коэффициент отражения равен $V = \Delta c / 2c = 2,5 \cdot 10^{-3}$.

3.2.2. Температура воды на поверхности океана $t = 20^\circ\text{C}$, соленость $s = 10\text{‰}$. На глубине $H = 100$ м соленость $s = 30\text{‰}$, а температура воды $t = 6^\circ\text{C}$. На глубинах, больших 300 м, температура постоянна и равна $t = 6^\circ\text{C}$, соленость $s = 35\text{‰}$. Считая, что градиент скорости звука постоянен на глубинах $h < 100$ м и $h > 300$ м, найти радиус кривизны R луча, вышедшего горизонтально, на глубинах $h_1 = 99$ м, $h_2 = 500$ м. Куда будет загибаться луч?

Ответ. Согласно (1.10.4) радиус кривизны определяется относительным градиентом скорости звука $R = c / |dc/dz|$, а траектория загибается в сторону уменьшения скорости звука. Соответственно получаем: при $h_1 = 100$ м $R_1 = 5 \cdot 10^3$ м, луч загибается ко дну; при $h_2 = 500$ м $R_2 = 9 \cdot 10^4$ м, луч загибается к поверхности.

3.2.3. Каков минимальный радиус кривизны луча, рефракция которого определяется изменением скорости, связанным исключительно с увеличением гидростатического давления. Насколько сильно изменится этот радиус, если глубина равна $h = 1000$ м? Температура постоянна и равна 6°C , соленость $s = 35\text{‰}$.

Решение. Из формулы (1.10.4) следует, что для слоя с постоянным градиентом радиус кривизны минимален для горизонтально выходящих лучей в точке, где c_0 минимально, т.е. у поверхности океана. Используя (1.1.1), получаем, что радиус кривизны у поверхности, где $c_0 = 1475$ м/с, равен $R = 93$ км, на глубине $h = 1$ км $R = 94$ км.

3.2.4. Считая, что температура t спадает с глубиной по линейному закону с градиентом $0,5$ К/м, найти радиус кривизны R звукового луча, выходящего горизонтально из точки, лежащей на глубине 25 м. Скорость звука в этой точке $c_0 = 1475$ м/с. Определить, на каком расстоянии L звуковой луч отклонится на величину $\Delta h = 50$ м.

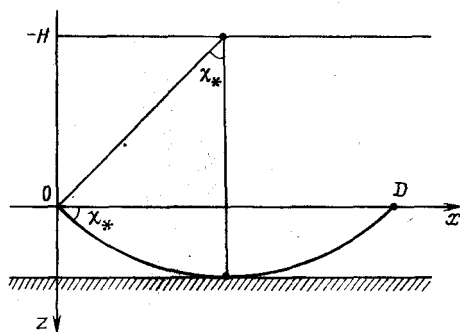
Ответ.

$$R = \frac{c_0}{|dc_0/dz|} = \frac{c_0}{|dc_0/dt| |dt/dz|} = 641 \text{ м},$$

$$L = R \left[1 - [(R - \Delta h)/R]^2 \right]^{1/2} \approx (2R\Delta h)^{1/2} \approx 250 \text{ м}.$$

3.2.5. Градиент скорости звука в слое постоянен и равен $\partial c/\partial z = 0,05$ с⁻¹, скорость звука у поверхности $c_0 = 1500$ м/с, глубина слоя $h = 200$ м. Источник звука находится у поверхности. Найти горизонтальное расстояние, на котором луч, скользнувший по дну, выйдет на свободную поверхность (см рисунок).

Решение. Используя решение задачи 3.1.16, для луча касающегося дна ($\chi_* = 0$), имеем $OD = 2H \operatorname{tg} \chi_*$, ($H = c_0/|\partial c/\partial z| = 30$ км) а критический угол определяется из (1.17.1). Используя условие $h \ll H$, находим $\chi_* \approx (2h/H)^{1/2} \ll 1$, и, следовательно,

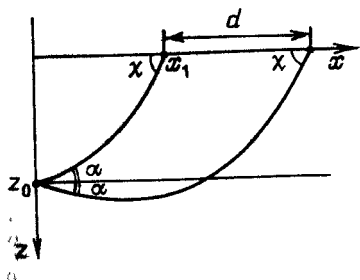


К задаче 3.2.5

$$OD \approx 2H \operatorname{tg} \chi_* \approx 2H \chi_* \approx 2(2Hh)^{1/2}. \quad (1)$$

Подставляя числовые значения, имеем $\chi_* \approx 0,115$, $OD \approx 6,93$ км.

3.2.6. Узконаправленный источник, расположенный на глубине $z_0 = 200$ м, излучает звук в угловых пределах $\chi_0 = \pm \alpha$ ($\alpha = 3^\circ$) относительно горизонта (см. рисунок). Определить, на каком расстоянии (по горизонтали) x звук выйдет на поверх-



К задаче 3.2.6

нием (1.12.1), где $c_0 = 1500$ м/с, $H = c_0(\partial c/\partial z)^{-1} = 50$ км, а расстояние, пройденное лучом, имеющим начальный и конечные углы скольжения χ_0 и χ , описывается выражением (1.13.2). Угол выхода на поверхность определяется из закона Снеллиуса

$$\frac{\cos \chi}{c_0(1-z_0/H)} = \frac{\cos \chi_0}{c_0}.$$

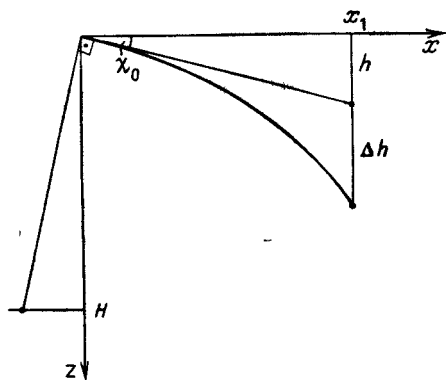
С учетом малости z_0/H получаем для граничных лучей $\chi_1 \approx (\alpha^2 + 2z_0/H)^{1/2}$. Таким образом, для x_1 и d имеем

$$x_1 = (H/\cos \alpha)(\sin \chi_1 - \sin \alpha), \quad d = 2H \tan \alpha.$$

Подставляя числовые значения, получаем $\chi_1 = 5,9^\circ$, $x_1 = 2,42$ км, $d = 5,24$ км

3.2.7. Слой воды имеет постоянный отрицательный градиент скорости звука $-a = |H|^{-1} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$. На каком расстоянии L луч, направленный у поверхности горизонтально, достигает глубины $h = 200$ м. Найти угол скольжения χ в этой точке, фактическую длину луча l .

Ответ. $\cos \chi = (H-h)/H$, $\chi \approx 8^\circ$, $L = 2784$ м, $l = 2792$ м.



К задаче 3.2.8

ность. Какова будет длина d озвученного участка на поверхности? Градиент скорости звука постоянен и равен $\partial c/\partial z = 0,03 \text{ с}^{-1}$, скорость звука на горизонте излучателя $c_0 = 1500$ м/с.

Решение. Считая, что начало координат находится в точке выхода луча, получаем, что скорость звука описывается выражением

3.2.8. Найти поправку на глубину объекта вследствие рефракции луча в среде с постоянным отрицательным градиентом скорости звука $-a = 1/H = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ (см. рисунок). Кажущаяся глубина объекта в однородной среде равна h ; при угле скольжения $\chi_0 = 10^\circ$ $h = 50$ м.

Решение. В предположении, что вертикальное отклонение

луча $z \ll H$, его траектория описывается выражением, полученным в задаче 3.1.14. Пренебрегая рефракцией для кажущейся глубины, имеем $h = x \operatorname{tg} \chi_0$, откуда $x_1 = h / \operatorname{tg} \chi_0$. Поправка, связанная с рефракцией, $\Delta h = x^2 / 2 |H| = 24$ м, т.е. истинная глубина объекта примерно в 1,5 раза больше, чем кажущаяся.

3.2.9. Скорость звука в плоскостом океане измерена в n точках: $c(z_1) = c_1$ — скорость звука на поверхности, $c(z_2) = c_2, \dots, c(z_k) = c_k, \dots, c(z_n) = c_n$ — скорость звука вблизи дна. Предложить алгоритм построения лучевой картины, используя кусочно-линейную аппроксимацию скорости звука.

Решение. После задания значений скорости в точках в каждом из слоев скорость звука можно аппроксимировать линейным профилем:

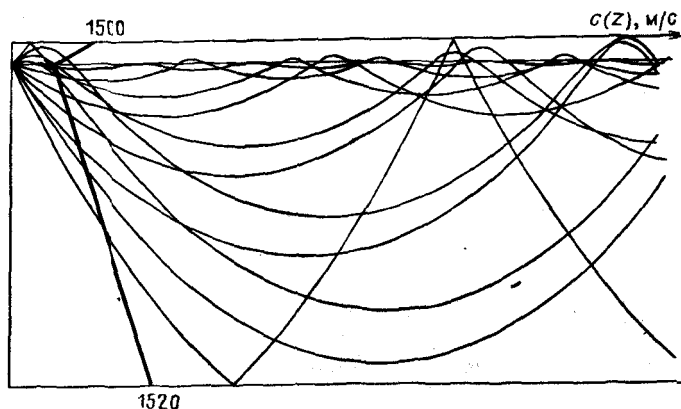
$$c(z) = c_k [1 + a_k(z - z_k)], \quad z_k < z < z_{k+1}, \quad (1)$$

$$a_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{c_k(z_{k+1} - z_k)}, \quad H_k = \frac{1}{a_k}, \quad h_k = z_{k+1} - z_k. \quad (2)$$

В каждом из слоев траектория представляет собой окружность радиусом $R_k = H_k / \cos \chi_k$, где χ_k — угол скольжения на верхней границе k -го слоя. Если $a_k = 0$, то траектории представляют собой прямые.

Если начальная точка находится в k -м слое на глубине $z_k < z_0 < z_{k+1}$, то радиус кривизны первого участка траектории $R_k = H_k [1 + a_k(z_0 - z_k)] / \cos \chi_0$. При построении этого участка возможны три варианта: траектория может коснуться дна или поверхности, либо достигнуть границы следующего слоя. При касании дна или поверхности угол отражения равен углу падения, χ меняется на $-\chi$; при переходе в другой слой угол χ непрерывен. Поэтому алгоритм должен включать в себя условие проверки касания лучом дна или поверхности. Примеры построения лучевой картины по данному алгоритму приведены ниже.

3.2.10. Построить лучевую картину для источника, находящегося на оси волноводного канала при $z_0 = z_2 = h_1 = 200$ м, если скорость у поверхности ($z_1 = 0$) $c_1 = 1500$ м/с, на оси канала ($z_2 = h$) $c_2 = 1470$ м/с, скорость у дна ($z = z_3$) $c_3 = 1520$ м/с. Глубина океана $z_3 = 3200$ м/с, $h_2 = z_3 - z_2 = 3000$ м. Найти аналитические выражения для длины цикла $D(\chi_0)$ при малых углах выхода χ_0 и критические углы χ_n и χ_d , когда луч касается поверхности и дна. Найти длину цикла для луча, касающегося поверхности.



К задаче 3.2.10

Ответ. Лучевая картина приведена на рисунке. Из решения задачи 3.1.18 имеем

$$D(\chi_0) = 2(H_1 + H_2) \operatorname{tg} \chi_0 = 196,4 \operatorname{tg} \chi_0 [\text{км}], \quad (1)$$

$$H_1 = \left| \frac{(z_2 - z_1)c_1}{c_2 - c_1} \right| = 10 \text{ км}, \quad H_2 = \left| \frac{(z_3 - z_2)c_2}{c_3 - c_2} \right| = 88,2 \text{ км}. \quad (2)$$

Критические углы касания поверхности и дна определяются из условий (1.17.1):

$$\begin{aligned} \cos \chi_n &= H_1 / (H_1 + h_1), \quad \chi_n = 11,4^\circ, \quad D(\chi_n) = 39,6 \text{ км}, \\ \cos \chi_d &= H_2 / (H_2 + h_2), \quad \chi_d = 14,7^\circ. \end{aligned} \quad (3)$$

3.2.11. В условиях задачи 3.2.10 построить лучевые картины и найти критические углы, если профиль скорости такой же, но глубина $z_3 = 1200$ м.

Ответ. Скорость звука у дна $c_3 = 1886,6$ м/с меньше скорости у поверхности c_1 . Поэтому критический угол касания дна $\chi_1 = 8,6^\circ$ меньше критического угла касания поверхности $\chi_n = 11,4^\circ$.

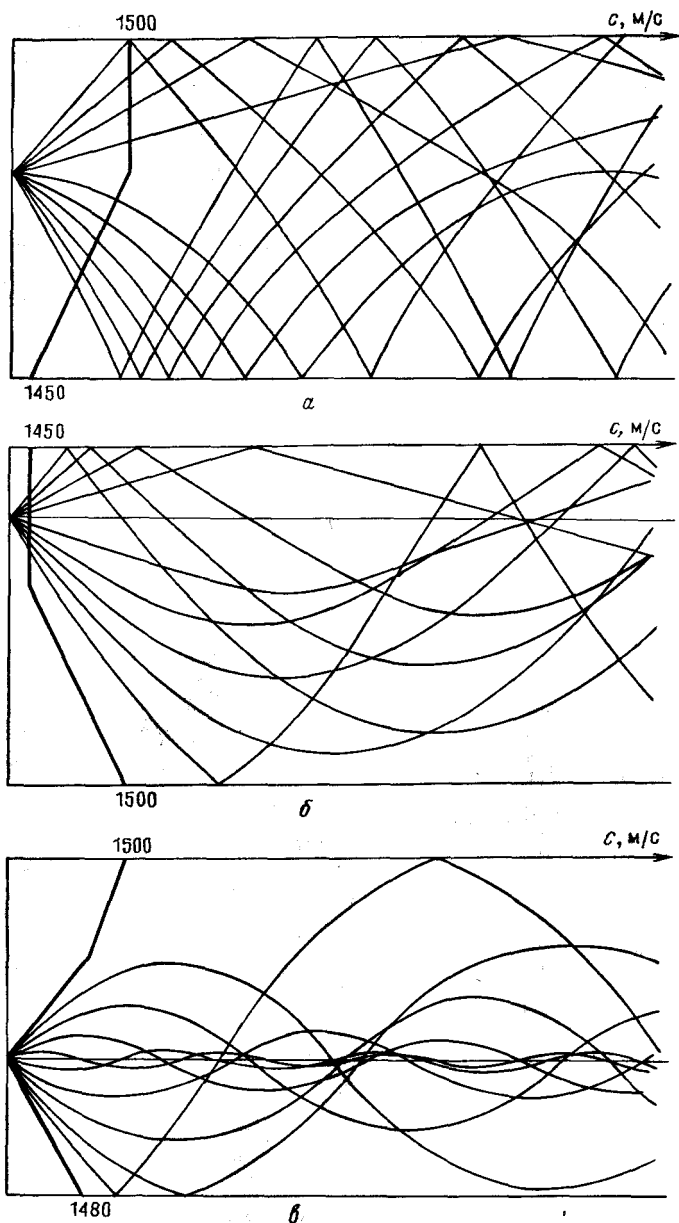
3.2.12. Построить профили скорости звука и лучевые картины, используя линейную аппроксимацию для следующих данных:

а) $z_1 = 0$, $c_1 = 1500$ м/с; $z_2 = 80$ м, $c_2 = 1500$ м/с; $z_3 = 200$ м, $c_3 = 1450$ м/с; координата источника $z_0 = 80$ м;

б) $z_1 = 0$, $c_1 = 1450$ м/с; $z_2 = 80$ м, $c_2 = 1450$ м/с; $z_3 = 200$ м, $c_3 = 1500$ м/с; $z_0 = 40$ м;

в) $z_1 = 0$, $c_1 = 1500$ м/с; $z_2 = 60$ м, $c_2 = 1480$ м/с; $z_3 = 120$ м, $c_3 = 1440$ м/с; $z_4 = 200$ м/с, $c_4 = 1480$ м/с; $z_0 = 120$ м.

Ответ. См. рисунки а, б, в.



К задаче 3.2.12

3.2.13. При физическом моделировании распространения звука в океане используют спиртовые и солевые растворы, обеспечивающие большие градиенты скорости звука. Построить лучевые

картины, найти длину цикла для малых углов выхода $D(\chi_0)$ для источника, находящегося на оси канала, найти критические углы касания поверхности χ_n и дна χ_d , определить длину цикла для луча, коснувшегося первый раз либо поверхности, либо дна, для следующих профилей скорости звука, считая вертикальные градиенты скорости звука постоянными:

а) $z_1 = 0$, $c_1 = 1500$ м/с; $z_2 = 20$ см, $c_2 = 1450$ м/с; $z_3 = 50$ см, $c_3 = 1600$ м/с;

б) $z_1 = 0$, $c_1 = 1550$ м/с; $z_2 = 20$ см, $c_2 = 1500$ м/с; $z_3 = 50$ см, $c_3 = 1500$ м/с.

Ответ. Используя решение задачи 3.2.10, имеем

а) $D(\chi) = 17,8 \operatorname{tg} \chi_0$ [м], $\chi_n = 14,6^\circ$, $D(\chi_n) = 4,6$ м; $\chi_d = 20,7^\circ$ ($H_1 = 6$ м, $h_1 = 0,2$ м; $H_2 = 2,9$ м, $h_2 = 0,3$ м).

б) $D(\chi) = 23,6 \operatorname{tg} \chi_0$ [м], $\chi_n = 20^\circ$, $\chi_d = 14,8^\circ$, $D(\chi_n) = 6,26$ м ($H_1 = 3,1$ м, $h_1 = 0,2$ м; $H_2 = 8,7$ м, $h_2 = 0,3$ м).

3.2.14. Найти зависимость скорости звука $c(z)$ от высоты в неподвижной адиабатической атмосфере.

Решение. Изменение гидростатического давления p в элементарном слое толщиной dz равно

$$dp = -\rho g dz, \quad (1)$$

где ρ — плотность. В адиабатической атмосфере давление $p(z)$ и плотность $\rho(z)$ на высоте z и на горизонте $z = 0$ ($p(0) = p_0$, $\rho(0) = \rho_0$) связаны законом $p/\rho_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma$. Используя это соотношение, получаем из (1) уравнение

$$\rho_0^\gamma \rho^{\gamma-1} \rho_0^{-\gamma} d\rho = -\rho g dz, \quad (2)$$

интегрируя которое, находим

$$\gamma \frac{\rho_0}{\rho_0} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = -g(\gamma-1)z. \quad (3)$$

Учитывая, что скорость звука

$$c^2 = \partial p / \partial \rho = \gamma (p_0 / \rho_0) (\rho / \rho_0)^{\gamma-1},$$

получаем окончательно

$$c^2 = c_0^2 - g(\gamma-1)z, \quad \text{где } c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (4)$$

3.2.17. Вывести формулу для времени пробега луча в плоскостной среде.

Решение. Время распространения сигнала по элементу дуги ds равно (см. рисунок к задаче 3.1.10)

$$dt = \frac{ds}{c(z)} = \frac{dz}{c \sin \chi}, \quad c(z) = \frac{c_0}{n(z)}. \quad (1)$$

Используя закон Снеллиуса (см. (1.5.2)), для времени пробега луча между горизонтами z_0 и z получаем

$$\tau = \frac{1}{c_0} \int_{z_0}^z [n^2(z) - n_0^2 \cos^2 \chi_0]^{-1/2} n^2(z) dz. \quad (2)$$

При $n(z) = \text{const} = 1$ из (2) получаем очевидное соотношение

$$\tau = (z - z_0) / (c_0 \sin \chi_0).$$

3.2.18. Вывести формулу для времени пробега луча в плоскостной среде с постоянным градиентом скорости звука (см. (1.12.1)) через начальный и текущий углы скольжения χ_0 и $\chi(z)$.

Ответ. Переходя в (17.2) к интегрированию по χ и, используя закон Снеллиуса в виде (1.10.2), получаем

$$\tau = \frac{H}{2c_0} \left[\ln \frac{1 + \sin \chi_0}{1 - \sin \chi_0} - \ln \frac{1 + \sin \chi(z)}{1 - \sin \chi(z)} \right]. \quad (1)$$

3.2.19. Пусть рефракция луча определяется неоднородностью скорости звука, связанной исключительно с увеличением гидростатического давления. Найти длину цикла $D(\chi_0)$ и время пробега τ по этому циклу. Сравнить это время с временем распространения τ_0 вдоль горизонтального луча на такую же дальность D в "однородном океане". Найти длину цикла и времена пробега для углов $\chi_0 = 5, 10, 20^\circ$.

Решение. Используя выражение для скорости звука (1.1.1), получаем, что скорость звука линейно возрастает с глубиной: $c = c_0(1 + z/H)$, где $c_0 = 1474,9$ м/с, $H = 92,18$ км. Длина цикла определяется формулой задачи 3.1.16: $D(\chi_0) = 2H \operatorname{tg} \chi_0$, а для времени пробега из (1.18.1) имеем

$$\tau = \frac{H}{c_0} \ln \frac{1 + \sin \chi_0}{1 - \sin \chi_0}. \quad (1)$$

Время пробега в однородном океане на такую же горизонтальную дальность

$$\tau_0 = 2(H/c_0) \operatorname{tg} \chi_0. \quad (2)$$

При малых углах эти времена близки: $\tau \approx \tau_0 \approx 2H\chi_0/c_0$. Подставляя числовые значения, получаем

- а) $\chi_0 = 5^\circ$, $D = 16,129$ км, $\tau = 10,92$ с, $\tau_0 = 10,94$ с;
- б) $\chi_0 = 10^\circ$, $D = 32,508$ км, $\tau = 21,93$ с, $\tau_0 = 22,04$ с;
- в) $\chi_0 = 20^\circ$, $D = 6,102$ км, $\tau = 44,55$ с, $\tau_0 = 45,49$ с.

3.2.20. Найти время распространения сигнала по длине цикла луча, вышедшего с оси волноводного канала и состоящего из

двух слоев с постоянными градиентами скорости звука (см. задачу 3.1.18).

Ответ. Из формулы (18.1) получаем время пробега как сумму времен пробега в верхней и нижней полуплоскостях

$$\tau = \tau_1 + \tau_2, \quad (1)$$

$$\tau_i = \frac{H}{c_0} \ln \frac{1 + \sin \chi_0}{1 - \sin \chi_0}. \quad (2)$$

3.2.21. Температурный профиль в Арктике близок к изотермическому, а скорость звука возрастает с глубиной только из-за роста гидростатического давления. Пусть температура воды равна 0°C и соленость 35‰ . Определить начальный угол выхода луча χ_0 , расстояние $D(\chi_0)$ и время распространения сигнала τ по лучу, который начинается у поверхности, касается дна и возвращается к поверхности. Глубина $h = 2\text{ км}$

Ответ. Из (1.1) следует, что градиент скорости постоянен, скорость описывается (1.12.1), где $c_0 = 1449,2\text{ м/с}$, $H = 90,575\text{ км}$. Угол выхода χ , при котором луч касается дна, определяется из (1.17.1), и $\chi_* = 11,9^\circ$. Длина цикла этого луча определяется по формуле, полученной в задаче 3.1.16, время пробега — по (20.2), $D(\chi_*) = 38,28\text{ км}$, $\tau = 26,2\text{ с}$

3.2.22. Для волноводного канала, приведенного в задаче 3.2.10, вычислить время, необходимое для прохождения пути между двумя последовательными пересечениями оси канала, для лучей, вышедших вверх под углами $\chi_0 = 5, 10, 20, 40, 80^\circ$.

Ответ. Для углов $\chi_0 < \chi_n = 11,4^\circ$ лучи не касаются поверхности и время пробега определяется формулой (20.2). Соответственно $\chi_0 = 5^\circ$, $\tau_1 = 1,19\text{ с}$; $\chi_0 = 10^\circ$, $\tau_1 = 2,39\text{ с}$. При больших углах время пробега $\tau_1 = 2\tau$, где τ — время пробега от оси до поверхности и описывается формулой (18.1). Угол скольжения χ у поверхности определяется из закона Снеллиуса:

$$\cos \chi = (1 + h/H_1) \cos \chi_0, \quad (1)$$

и для времен пробега имеем соответственно: $\chi_0 = 20^\circ$, $\tau_1 = 0,86\text{ с}$; $\chi_0 = 40^\circ$, $\tau_1 = 0,43\text{ с}$; $\chi_0 = 80^\circ$, $\tau_1 = 0,27\text{ с}$. Таким образом, рост времени пробега на начальной стадии при $\chi < \chi_n$ сменяется при $\chi > \chi_n$ на уменьшение.

3.2.23. Вычислить полное время пробега t импульса от излучателя до приемника при N циклах, считая, что они находятся на оси волноводного канала, образованного двумя слоями с постоянным градиентом скорости звука (см. задачу 3.1.18).

Решение. При $N \gg 1$ (т.е. на достаточно больших расстояниях) искомое время равно

$$t = N\tau = \frac{NH}{c_0} \ln \frac{1 + \sin \chi_0}{1 - \sin \chi_0}, \quad (1)$$

где τ — время пробега по одному циклу — определяется формулами (20.1) и (20.2), $H_* = H_1 + H_2$. Если r — расстояние между излучателем и приемником, то с учетом выражения для длины цикла (см. (1.18.1)) имеем

$$r = 2NH \operatorname{tg} \chi_0, \quad \operatorname{tg} \chi_0 = \frac{r}{2NH}. \quad (2)$$

Решая это уравнение относительно χ_0 и подставляя ответ в (1), получим время пробега как функцию числа циклов N . Для океана $\chi_0 \ll 1$ и $N \gg 1$. Поэтому из (1), (2) имеем

$$\chi_0 \approx \frac{r}{2NH} - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{2NH} \right)^3, \quad t \approx \frac{2NH}{c_0} \left(\chi_0 + \frac{1}{6} \chi_0^3 \right), \quad (3)$$

и, следовательно,

$$t = \frac{r}{c_0} \left[1 - \frac{r^2}{24H^2N^2} \right]. \quad (4)$$

Наибольшее время достигается для луча, совершающего осцилляции около оси канала ($N \rightarrow \infty$), т.е. для горизонтального луча. Формула (4) получена в предположении, что лучи не касаются дна и поверхности. Как правило, лучи, отраженные от дна, затухают, и поэтому время прихода начала сигнала будет определяться лучом, касающимся дна (N минимально).

3.2.24. Пусть скорость звука волноводного канала (см. задачу 3.2.11) у поверхности больше, чем скорость звука у дна. Оценить уширение очень короткого импульса в таком канале, если $r = 1470$ км.

Решение. Согласно (23.4) длительность принимаемого сигнала определяется временем между приходом импульса вдоль луча, касающегося дна ($N_{\min}$), и импульса, распространяющегося по оси канала,

$$\Delta t = \frac{r^3}{24c_0H^2N^2}. \quad (1)$$

Если расстояние от оси канала до дна равно h_2 , то критический угол χ_d определяется из уравнения (10.3) и при $h_2 \ll H_2$ приближенно равен $\chi_d \approx 2h_2/H_2$. Из задачи 3.2.23 для числа циклов имеем $N = r/(2h\chi_d^2) \approx r^2H_2/(8H^2h_2)$. Следовательно, уширение длительности сигнала определяется выражением

$$\Delta t = \frac{r h_2}{3c_0 H_2} = t_* \frac{h_2}{3H_2},$$

где $t_* = r/c_0$ — время прихода импульса, c_0 — скорость на оси канала. Для условий задачи 3.2.11 $c_0 = c_2 = 1470$ м/с, $h_2 = 1$ км, $H_2 = 88,2$ км, время пробега и уширение импульса равны $t = 1000$ с, $\Delta t = 3,78$ с.

3.2.25. Звук распространяется от поверхности Земли вертикально вверх. Температура у поверхности Земли $t_0 = 16^\circ\text{C}$ ($T_0 = 289$ К), а вертикальный градиент температуры постоянен и по модулю равен $b = 0,007$ К/м. Считая атмосферу идеальным газом, найти время пробега τ звука от поверхности до высоты $h = 10$ км. Сравнить это время со временем пробега τ_0 в изотермической атмосфере $T = T_0 = \text{const}$. Начиная с каких высот, относительная поправка, связанная с неизотермичностью атмосферы, превысит $\delta = 5\%$?

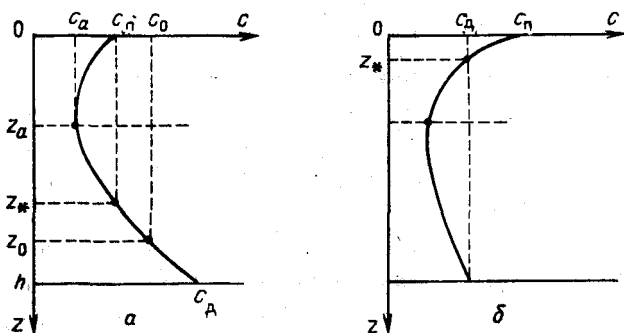
Решение. В идеальном газе скорость звука определяется абсолютной температурой ($c \sim T^{1/2}$), и для атмосферы $c = 20T^{1/2}$ (см. (1.1.7)). Для температуры можно записать $T = T_0 - bz = T_0(1 - z/H)$, где $H = T_0/b = 41,29$ км — эффективная высота. Таким образом, для скорости получаем $c(z) = c_0(1 - z/H)^{1/2}$, $c_0 = 20T_0^{1/2} = 340$ м/с. Время пробега от поверхности Земли до высоты h равно

$$\tau = \int_0^h \frac{dz}{c(z)} = \frac{2H}{c_0} \left[1 - \left(1 - \frac{h}{H} \right)^{1/2} \right]. \quad (1)$$

Для малых высот ($h/H \ll 1$) из (1) имеем приближенную формулу $\tau \approx \frac{h}{c_0} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{h}{H} \right]$. Относительная поправка, связанная с неизотермичностью, меньше δ , для высот $h < 4H$ $\delta = 8,26$ км. Для высоты $h = 10$ км время пробега $\tau = 31,45$ с, рассчитанное по приближенной формуле, равно $\tau_n = 31,19$ с, а для изотермической атмосферы $\tau_0 = h/c_0 = 29,4$ с. Таким образом, относительная поправка равна $6,5\%$.

3.3. Захват энергии, фактор фокусировки, каустики в природных каналах

3.3.1. Ненаправленный излучатель находится в волноводном канале. Скорость звука на глубине источника равна c_0 , у поверхности — c_n , у дна — c_d (см рисунок). Найти коэффициент захвата энергии подводным каналом, считая, что коэффициент отражения от дна $V < 1$. Рассмотреть случаи спокойной и взволнованной поверхностей.



К задаче 3.3.1

Решение. В случае спокойной поверхности каналом будут захвачены лучи, которые не попадают на дно. Луч, касающийся дна, выходит из источника под углами $\pm \chi_d$, причем из закона Снеллиуса (см. (1.5.2)) следует, что $\cos \chi_d = c_0/c_d$. Обычно изменения скорости малы, поэтому малы и углы χ_d . Следовательно, можно написать

$$1 - \chi_d^2/2 = (c_d - \Delta c_d)/c_d, \quad \Delta c_d = c_d - c_0. \quad (1)$$

Отсюда

$$\chi_d \approx (2\Delta c_d/c_d)^{1/2} \approx (2\Delta c_d/c_0)^{1/2}. \quad (2)$$

Полная энергия, излученная ненаправленным излучателем, содержится в телесном угле 4π , а энергия, захваченная каналом, — в телесном угле Ω , ограниченном в вертикальной плоскости углами $\pm \chi_d$:

$$\Omega = 2\pi \int_{-\chi_d}^{\chi_d} \cos \chi \, d\chi = 4\pi \sin \chi_d \approx 4\pi \chi_d.$$

Отсюда отношение энергии, захваченной каналом, к полной излученной энергии ("коэффициент захвата") равно

$$K = \Omega/4\pi = \chi_d = (2\Delta c_d/c_d)^{1/2}. \quad (3)$$

В случае взволнованной поверхности лучи, попадающие на поверхность, рассеиваются и в конце концов попадают на дно, где поглощаются. Поэтому в данном случае коэффициент захвата

$$K = \min(\chi_d, \chi_n), \quad \chi_n = (2\Delta c_n/c_n)^{1/2}, \quad \Delta c_n = c_n - c_0. \quad (4)$$

3.3.2. Излучатель находится на глубине z_0 в приповерхностном волноводном канале с постоянным градиентом скорости звука (см. (1.12.1)). Глубина волновода $h = 2$ км, $H = 90$ км.

Найти зависящий от глубины коэффициент захвата $K(z_0)$ и его максимальное значение. На какой глубине z_* коэффициент захвата в два раза меньше максимального?

Ответ. Канал будет возникать только при спокойной поверхности, и согласно (1.1.3)

$$K(z_0) = [2(h-z_0)/H]^{1/2}, \quad K_{\max} = K(0) = (2h/H)^{1/2} \approx 0,21$$

Из уравнения $K(z_*) = K(0)/2$ следует $z_* = 3h/4 = 1,5$ км.

3.3.3. Волноводный канал характеризуется следующими значениями скорости звука у поверхности, на оси канала ($z = z_a$) и на дне (см. рисунок к задаче 3.3.1):

$$1) c_n = 1500 \text{ м/с}, c_a = 1450 \text{ м/с}, c_d = 1550 \text{ м/с}.$$

$$2) c_n = 1550 \text{ м/с}, c_a = 1450 \text{ м/с}, c_d = 1500 \text{ м/с}.$$

Найти максимальный коэффициент захвата в случае спокойной и взволнованной поверхностей. Построить качественную зависимость коэффициента захвата от глубины излучателя.

Ответ. Для волноводного канала 1 для спокойной поверхности

$$K_{\max} = K(z_a) = (2\Delta c_d/c_d)^{1/2} \approx 0,36,$$

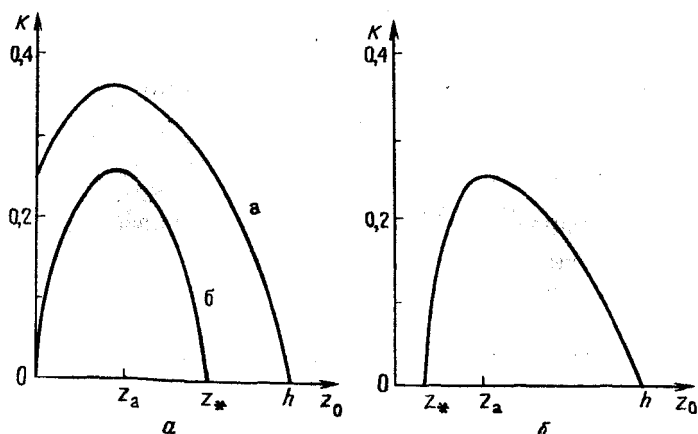
для взволнованной поверхности

$$K_{\max} = K(z_a) = (2\Delta c_n/c_n)^{1/2} \approx 0,26.$$

Графики для этих случаев приведены на рисунке а.

Для волноводного канала 2, когда скорость у дна c_d меньше скорости у поверхности c_n , оба случая (см. рисунок б) совпадают и

$$K_{\max} = K(z_a) = (2\Delta c_d/c_d)^{1/2} \approx 0,26.$$



К задаче 3.3.3

3.3.4. Подводный звуковой канал имеет вид $c = c_0$ ($0 \leq z < h$, $z > h_2$) и $c = c(z)$ ($h \leq z \leq h_2$). Существует ли такой профиль $c(z)$, при котором часть лучей, идущих с поверхности океана, будет захватываться каналом?

Решение. Из закона Снеллиуса для угла скольжения на глубине z следует выражение

$$\cos \chi(z) = \cos \chi_0 \frac{c(z)}{c_0}. \quad (1)$$

Следовательно, луч не проникает в область $z > h_2$ только в случае, если в какой-то области $c(z) > c_0$. При этом часть лучей будет захватываться приповерхностным волноводным каналом.

3.3.5. Оценить, какой выигрыш по амплитуде по сравнению со сферически расходящейся волной амплитуды p_n дает волноводный канал, параметры которого даны в задаче 3.3.3, если поверхность взволнована, $z_* = 1,5$ км, $r = r_1 = 1000$ км, $r = r_2 = 10\,000$ км. Ненаправленный излучатель расположен на оси канала.

Решение. В сферически расходящейся волне закон сохранения энергии можно записать как

$$4\pi r^2 \cdot p_n^2 / (2\rho c) = W, \quad (1)$$

где W — мощность источника звука, ρ — плотность воды, c — скорость звука. Для оценки поля в канале можно считать, что энергия равномерно распределена по глубине канала, т.е. от 0 до z_* ; тогда закон сохранения энергии будет иметь вид

$$2\pi r z_* \cdot p^2 / (2\rho c) = KW, \quad (2)$$

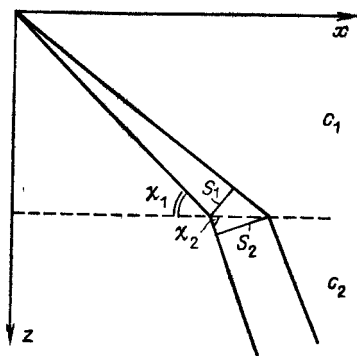
где K — коэффициент захвата (см. (1.4)), c — средняя скорость звука. Таким образом, для отношения амплитуд имеем $\mu = p/p_n = (2Kr/z_*)^{1/2}$. С учетом решения задачи 3.3.3 $K = 0,26$ получаем соответственно для двух дальностей $\mu_1 \approx 19$, $\mu_2 \approx 59$.

3.3.6. В условиях предыдущей задачи оценить акустическое давление, если акустическая мощность излучателя $W = 10$ кВт.

Ответ. $p = (KW\rho c / \pi r z_*)^{1/2}$. Для двух дальностей имеем соответственно $p = 0,9$ Па и $p = 0,29$ Па.

3.3.7. Гидролокатор лоцирует объект, находящийся под слоем резкого отрицательного скачка скорости звука (под термоклином; см. рисунок). Найти ослабление принимаемого сигнала K , связанное с наличием термоклина.

Решение. Пренебрегая отражением от слоя скачка и считая, что энергия в лучевой трубке сохраняется при переходе через



К задаче 3.3.7

слой, можно написать для отношения интенсивностей при однократном прохождении через слой

$$\frac{1}{K_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\sin \chi_1}{\sin \chi_2}. \quad (1)$$

При эхолоцировании общее ослабление, связанное с наличием термоклина, равно

$$K = K_1^2 = \left[\frac{\sin \chi_2}{\sin \chi_1} \right]^2. \quad (2)$$

Используя закон Снеллиуса (см. (2.4.1)) и условие, что скачок

скорости мал ($\Delta c = c_1 - c_2 \ll c_1$), получаем

$$\sin^2 \chi_2 = 1 - \cos^2 \chi_2 = 1 - \left[\frac{c_2}{c_1} \right]^2 \cos^2 \chi_1 \approx \sin^2 \chi_1 + \left[\frac{2\Delta c}{c_1} \right] \cos^2 \chi_1. \quad (3)$$

И для ослабления силы звука в логарифмическом масштабе из (1)–(3) имеем

$$G = 10 \lg K = 10 \lg \left[1 + \frac{2\Delta c}{c_1} \operatorname{ctg}^2 \chi_1 \right]. \quad (4)$$

3.3.8. Найти ослабление силы звука при эхолоцировании с поверхности подводного объекта, находящегося непосредственно под термоклином, с перепадом скорости $\Delta c = 50$ м/с ($c_1 = 1450$ м/с), если расстояние до объекта $r = 1$ км, а термоклин расположен на глубине $h = 100$ м.

Ответ. $\chi_1 = 5,7^\circ$, $G = 9$ дБ.

3.3.9. Фактором фокусировки F в гидроакустике называется отношение интенсивности поля $I(R)$ в неоднородной среде в точке, удаленной на расстояние R от источника звука, к интенсивности I_0 в однородной среде на том же расстоянии R от источника:

$$F = I/I_0. \quad (1)$$

Вычислить фактор фокусировки в плоскостной среде.

Решение. Если W — акустическая мощность источника, то в однородной среде в силу симметрии из закона сохранения энергии имеем

$$I_0 = \frac{W}{4\pi R^2}. \quad (2)$$

В неоднородной среде энергия сохраняется вдоль лучевых трубок, которые искривляются вследствие рефракции. Рассмотрим, как изменяется интенсивность вдоль лучевой трубки, ограниченной лучами, вышедшими из источника под углами χ_0 и $\chi_0 + d\chi_0$

(см. рисунок). С учетом цилиндрической симметрии задачи мощность, излучаемая источником внутри телесного угла $d\Omega$, ограниченного этими лучами, равна

$$dW = \frac{W}{4\pi} d\Omega, \quad d\Omega = 2\pi \cos\chi_0 d\chi_0. \quad (3)$$

Если $r = r(\chi_0)$ — дальность в зависимости от угла выхода при фиксированной глубине z , $\chi(z)$ — угол скольжения в точке приема, то для мощности внутри этой лучевой трубки можно написать

$$dW = I dS, \quad dS = 2\pi r dl = 2\pi r |dr| \sin\chi(z). \quad (4)$$

Учитывая, что

$$dr = \frac{dr}{d\chi_0} d\chi_0,$$

из (3), (4) для интенсивности получаем

$$I = W \cos\chi_0 \left[4\pi r \left| \frac{dr}{d\chi_0} \right| \sin\chi(z) \right]^{-1}. \quad (5)$$

Для фактора фокусировки из (2)–(5) находим

$$F = R^2 \cos\chi_0 \left[r \left| \frac{dr}{d\chi_0} \right| \sin\chi(z) \right]^{-1}. \quad (6)$$

При малых углах скольжения, когда $R \approx r$, $\cos\chi_0 \approx 1$, справедлива приближенная формула

$$F \approx r \left[\left| \frac{dr}{d\chi_0} \right| \sin\chi(z) \right]^{-1}. \quad (7)$$

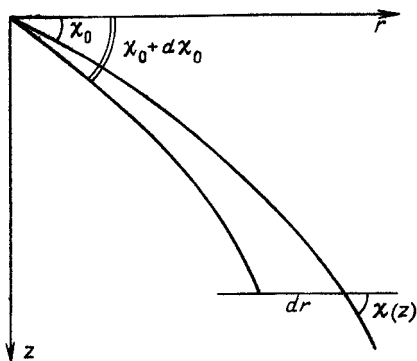
3.3.10. Показать, что в однородной среде фактор фокусировки F , определяемый выражением (9.6), действительно равен единице.

Решение. Используя соотношение между глубиной z и дальностью r ($z = r \operatorname{tg}\chi_0$), получаем из (9.6), что $F = 1$.

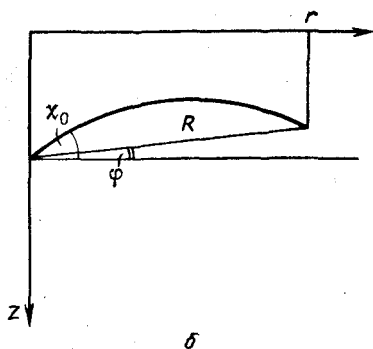
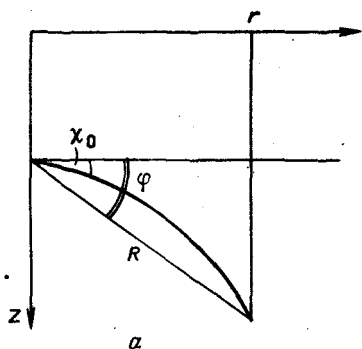
3.3.11. Найти фактор фокусировки звука в слоисто-неоднородной среде с постоянным градиентом скорости звука (см. (1.12.1)).

Ответ. Воспользовавшись (1.13.2) для пройденного лучом расстояния $r \equiv x$ и законом Снеллиуса (см. (2.4.1)), получаем для фактора фокусировки (см. (9.6))

$$F = (R/r)^2 \cos^2\chi_0. \quad (1)$$



К задаче 3.3.9



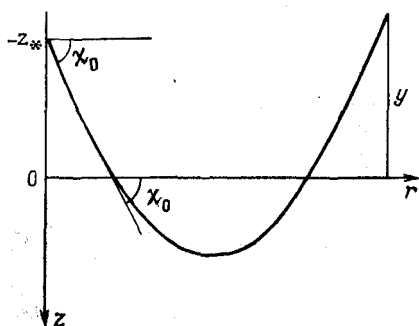
К задаче 3.3.11

где χ_0 — угол входа луча, R — расстояние от источника до точки приема, r — горизонтальная дальность. Вводя угол φ , направленный из излучателя в точку приема (см. рисунок), фактор фокусировки можно записать в виде

$$F = \cos^2 \chi_0 / \cos^2 \varphi. \quad (2)$$

В реальных условиях, когда $\chi_0, \varphi \ll 1$, отличия F от 1 малы.

3.3.12. Скорость звука в среде изменяется по закону $c = c_0$ ($z < 0$), $c = c_0(1 + z/H)$ ($z > 0$). Сферический источник находится на высоте $z = -z_*$ над уровнем излома скорости.



Найти уравнение отраженных лучей в верхнем полупространстве, уравнение для каустики.

Решение. Введём координату $y = -z$ (см. рисунок). Тогда для луча, вышедшего под углом χ_0 из источника и прошедшего горизонтальное расстояние r , справедливо равенство

К задаче 3.3.12

$$r = \frac{z_* + y}{\operatorname{tg} \chi_0} + 2H \operatorname{tg} \chi_0, \quad (1)$$

где первое слагаемое есть горизонтальное расстояние в верхнем пространстве, а второе — в нижнем (см. (1.16.1)). Интенсивность обращается в бесконечность в точках, где

$$\frac{\partial r}{\partial \chi_0} = -\frac{z_* + y}{\sin^2 \chi_0} + \frac{2H}{\cos^2 \chi_0} = 0. \quad (2)$$

Уравнения (2), (3) задают каустику (геометрическое место точек, где интенсивность обращается в бесконечность) в пара-

метрическом виде. Исключая χ_0 из (2), (3), получаем уравнение каустики в явном виде:

$$r = 2 [2H(z_* + y)]^{1/2}, \quad y = -z_* + r^2/8H, \quad y > 0. \quad (3)$$

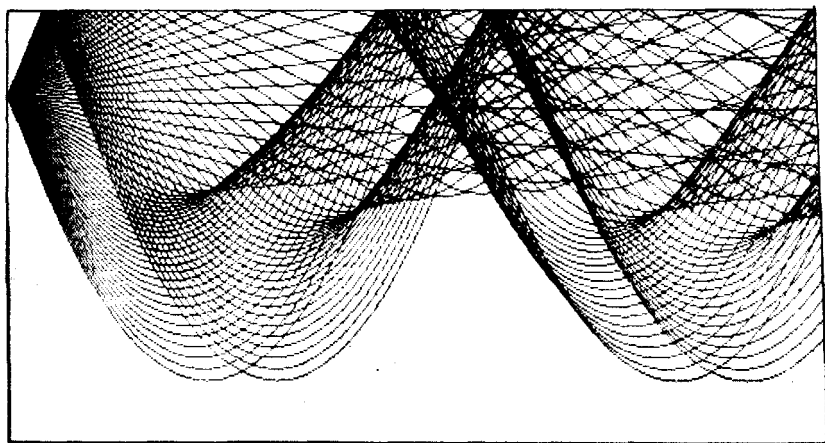
Из (4) следует, в частности, что расстояние до r_* появления каустики в верхнем полупространстве ($y = 0$ в (4)) равно

$$r_* = (8Hz_*)^{1/2} \quad (4)$$

и растет с удалением излучателя от границы излома скорости.

3.3.13. В условиях задачи 3.2.12 (случай б)) найти уравнения каустик: для лучей, не отраженных от поверхности; для лучей, отраженных один раз. Найти расстояние r_n для выхода каустики на поверхность. Рассмотреть глубины излучателя $z_0 = 80, 40, 0$ м.

Решение. Из данных задачи 3.2.12 получаем, что в верхнем слое скорость звука постоянна, а в нижнем имеет постоянный градиент $H = c_2(z_3 - z_2)/(c_3 - c_2) = 3,48$ км. Если ввести ко-



К задаче 3.3.13

ординату y , отсчитываемую от границы излома, для лучей, направленных в нижнюю полуплоскость, высота излучателя над границей излома равна $z_* = z_2 - z_0$ и уравнение каустики в однородном слое имеет вид (см. (12.4))

$$y = (z_0 - z_2) + r^2/8H, \quad r \geq [8H(z_2 - z_0)]^{1/2}. \quad (1)$$

Каустика достигает поверхности на расстоянии

$$r_n = [8H(2z_2 - z_0)]^{1/2}. \quad (2)$$

Для лучей, направленных в верхнюю полуплоскость и отраженных от границы, эффективная высота источника над границей раздела равна $z_* = z_2 + z_0$. Соответственно уравнение каустики и расстояние выхода каустики на поверхность равны

$$y = (z_0 + z_2) + r^2/8H, \quad r \geq [8H(z_2 + z_0)]^{1/2}, \quad (3)$$

$$r_n = \{8H(2z_2 + z_0)\}^{1/2} \quad (4)$$

Подставляя числовые значения, получаем

а) $z_0 = 80$ м, $r_n = 1,49$ км; $z_0 = 40$ м, $r_n = 1,82$ км; $z_0 = 0$ м, $r_n = 2,11$ км.

б) $z_0 = 80$ м, $r_n = 2,58$ км; $z_0 = 40$ м, $r_n = 2,35$ км; $z_0 = 0$ м, $r_n = 2,11$ км.

Положения каустик видны на рисунке (глубина $z_0 = 40$ м).

3.3.14. Найти уравнения каустик в приповерхностном канале с постоянным градиентом скорости звука $c = c_0(1+z/H)$. Считать, что излучатель расположен на поверхности, и ограничиться малоугловым приближением.

Решение. Найдем горизонтальное расстояние от излучателя до точки с координатами (r, z) , если при этом луч делает N полных циклов и еще проходит часть цикла $\Delta r < D$. Длина цикла $D = 2H \operatorname{tg} \chi_0$ (см. задачу 3.1.16). Тогда из (1.13.2) получаем

$$r = ND + \Delta r = 2NH \operatorname{tg} \chi_0 + \frac{H}{\cos \chi_0} (\sin \chi_0 - \sin \chi) = H(2N+1) \operatorname{tg} \chi_0 - H \frac{\sin \chi}{\cos \chi_0}. \quad (1)$$

Угол χ определяется из закона Снеллиуса: $\cos \chi / c = \cos \chi_0 / c$. Для малых углов скольжения из (1) получаем

$$r = H \{ (2N+1) \chi_0 \mp (\chi_0^2 - 2z/H)^{1/2} \}, \quad (2)$$

где знак минус соответствует первой половине последнего неполного цикла, знак плюс — второй. Фактор фокусировки обращается в нуль в точках, где

$$\partial r / \partial \chi_0 = 0, \quad (3)$$

откуда следует, что каустики возникают только на первой половине неполного цикла, и, следовательно, в (2) нужно оставить только знак минус. Из (3) находим

$$\chi_0 = \frac{(2N+1)(2z/H)^{1/2}}{((2N+1)^2 - 1)^{1/2}}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2), для формы каустик получаем уравнение

$$z = r^2 / [8(N+1)NH]. \quad (5)$$

4. ИЗЛУЧЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЗВУКА

4.1. Излучение звука колеблющимися телами

4.1.1. Рассмотрим сферически-симметричные пульсации сферы, излучающей расходящуюся гармоническую волну. Рассчитать интенсивность звука и мощность источника, полное механическое сопротивление (импеданс), а также присоединенную массу.

Решение. Используем выражение для потенциала сферически расходящейся волны

$$\varphi = \frac{A}{r} \exp(-i\omega t + ikr_1), \quad (1)$$

где $k = \omega/c$, $r_1 = r - a$, a — радиус шара. Пользуясь формулой (1), рассчитаем радиальную компоненту колебательной скорости:

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \exp(-i\omega t + ikr_1). \quad (2)$$

Полагая, что на сфере $r = a$ задана амплитуда v_0 колебательной скорости, из (2) находим константу

$$A = a^2 v_0 / (ika - 1). \quad (3)$$

Найдем теперь акустическое давление:

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = i\rho c \frac{k a^2 v_0}{i ka - 1} \exp(-i\omega t + ikr_1). \quad (4)$$

Интенсивность звука для гармонической волны вычисляется на основании (2), (4) по формуле

$$J = \overline{p v} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p v^*) = \frac{1}{2} \rho c v_0^2 \left[\frac{a}{r} \right]^2 \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2}. \quad (5)$$

Здесь черта сверху означает усреднение по периоду, звездочка — знак комплексного сопряжения. Полная мощность источника

$$N = 4\pi r^2 J = 2\pi a^2 (\rho c v_0^2) \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2} = 2\pi \rho c^3 \xi_0^2 \frac{(ka)^4}{1 + (ka)^2}. \quad (6)$$

Здесь введена амплитуда $\xi_0 = v_0 / ck$ колебаний смещения поверхности сферы. Результат (6) показывает, что при фиксированной амплитуде смещения ξ_0 излучаемая мощность в случае низких частот ($k^2 a^2 \ll 1$) пропорциональна 4-й степени частоты, а в случае высоких частот ($k^2 a^2 \gg 1$) — 2-й степени частоты.

ты. Таким образом, на низких частотах процесс излучения мало эффективен, что связано с большой массой соколеблющейся жидкости — слоя, прилегающего к поверхности сферы.

Механический импеданс (отношение силы реакции поля излучения, действующей на поверхность сферы, к скорости v) вычисляется по формулам (2), (4):

$$Z = S \left[\frac{p}{v} \right]_{r=a} = \rho c S \frac{(ka)^2 - ika}{1 + (ka)^2} = R - iY. \quad (7)$$

Здесь $S = 4\pi a^2$ — площадь сферической поверхности, R и Y — активная и реактивная части импеданса:

$$R = \rho c S \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2}, \quad Y = \omega M' = \rho c S \frac{ka}{1 + (ka)^2}. \quad (8)$$

Присоединенная (соколеблющаяся) масса (8) равна

$$M' = 4\pi a^3 \rho (1 + k^2 a^2)^{-1}. \quad (9)$$

На низких частотах присоединенная масса равна утроенной массе жидкости, вытесненной шаром. С увеличением частоты масса M уменьшается до нуля.

4.1.2. Определить полную мощность излучения сферы радиусом 1 см, совершающей колебания в воздухе (а) или в воде (б) с амплитудой $\xi_0 = 1$ мм на частоте $f = 100$ Гц.

Решение. Данные, приведенные в условии задачи, соответствуют низкочастотному пределу $ka = 2\pi af/c \ll 1$ как для воздуха, так и для воды. Поэтому (1.6) примет вид

$$N = (2\pi)^5 (af)^4 \xi_0^2 (\rho/c). \quad (1)$$

Полагая для воздуха $\rho/c = 3,8 \cdot 10^{-3}$ кг/(м⁴·с), для воды $\rho/c = 6,7 \cdot 10^{-1}$ кг/(м⁴·с), получаем оценки излучаемой мощности: а) $N = 3,7 \cdot 10^{-5}$ Вт, б) $N = 6,5 \cdot 10^{-3}$ Вт.

4.1.3. Рассчитать активную составляющую удельного акустического импеданса и соколеблющуюся (присоединенную) массу на единицу площади сферического излучателя радиусом a , колеблющегося в воздухе с частотой f . Рассмотреть два случая: а) $a = 0,25$ м, $f = 100$ Гц, б) $a = 1$ м, $f = 400$ Гц.

Решение. По формулам (7), (8) задачи 4.1.1 находим

$$\frac{R}{S} = \rho c \frac{(2\pi f a/c)^2}{1 + (2\pi f a/c)^2}, \quad \frac{M'}{S} = \frac{\rho a}{1 + (2\pi f a/c)^2}. \quad (1)$$

Для значений $\rho = 1,3$ кг/м³, $c = 330$ м/с, $\rho c = 429$ кг/(м²·с) получаем значения $k^2 a^2$: а) 0,23, б) 58. Искомые величины R/S [кг/(м²·с)] и M'/S (кг/м²) соответственно равны: а) 79 и 0,27; б) 420 и 0,022.

4.1.4. Рассмотрим поступательное осцилляторное движение сферы (происходящее без изменения ее объема) вдоль полярной оси z сферической системы координат. Рассчитать интенсивность звука и мощность источника, полное механическое сопротивление (импеданс), а также присоединенную массу.

Решение. Действуем по аналогии с задачей 4.1.1. Однако здесь нельзя брать решение волнового уравнения в виде (1.1) (где A — не зависящая от θ константа), поскольку при этом не удастся удовлетворить граничному условию

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_0 \cos \theta \exp(-i\omega t) \quad (1)$$

для радиальной компоненты скорости на поверхности сферы $r = a$.

Чтобы получить нужную зависимость от азимутального угла θ $v_r \sim \cos \theta$ (1), возьмем решение волнового уравнения в виде производной от решения (1.1):

$$\varphi_1 = (\nabla \varphi) = v_0 \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_0 \cos \theta \frac{A}{r} \left[ik - \frac{1}{r} \right] \exp(-i\omega t + ikr_1). \quad (2)$$

Зная φ_1 , вычислим $v_r = \partial \varphi_1 / \partial r$ и положим константу A равной $a^3 / (2 - 2ika - k^2 a^2)$, чтобы удовлетворить условию (1) при $r = a$:

$$v_r = v_0 \cos \theta \left[\frac{a}{r} \right]^3 \frac{k^2 r^2 + 2ikr - 2}{k^2 a^2 + 2ika - 2} \exp(-i\omega t + ikr_1). \quad (3)$$

Соответствующая формула для акустического давления имеет вид

$$p = i\rho c v_0 \cos \theta \left[\frac{a}{r} \right]^2 (1 - ikr) \frac{ka}{k^2 a^2 + 2ika - 2} \exp(-i\omega t + ikr_1). \quad (4)$$

Переходя в решении (3), (4) к дальней зоне ($kr \gg 1$), найдем интенсивность излучаемого звука

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(pv_r^*) = \frac{1}{2} \rho c v_0^2 \left[\frac{a}{r} \right]^2 \frac{(ka)^4}{4 + (ka)^4} \cos^2 \theta. \quad (5)$$

Сравнивая (5) с (1.5) для радиально-пульсирующей сферы, видим, что излучение поступательно-осциллирующей сферы характеризуется функцией направленности $\Phi = \cos^2 \theta$. При этом коэффициент осевой концентрации излученной энергии

$$K = 2 \left[\int_0^\pi \Phi(\theta) \sin \theta \, d\theta \right]^{-1} \quad (6)$$

равен 3, в то время как для ненаправленного излучения ($\Phi = 1$) он равнялся бы 1. Полная излученная мощность, получаемая интегрированием (5) по телесному углу $2\pi r^2 \sin \theta \, d\theta$, выражается формулой

$$N = \frac{2}{3} \pi a^2 \rho c v_0^2 \frac{(ka)^4}{4 + (ka)^4} = \frac{2}{3} \pi \rho c^3 \xi_0^2 \frac{(ka)^6}{4 + (ka)^4}. \quad (7)$$

Сравнение (7) с (1.6) показывает, что на низких частотах мощность излучения осциллирующей сферы ($\sim f^6$) меньше, чем у пульсирующей ($\sim f^4$). Механический импеданс вычисляется на основе формул (3), (4), в которых нужно положить $r = a$:

$$Z = \frac{F}{v_r} = \frac{1}{v_r} \int_0^\pi \rho c \cos\theta \cdot 2\pi a^2 \sin\theta d\theta = \frac{4}{3} \pi a^2 \rho c \frac{k^2 a^2 + ika}{k^2 a^2 + 2ika - 2}. \quad (8)$$

Действительная и мнимая части импеданса равны

$$R = \frac{1}{3} \rho c S \frac{(ka)^4}{4 + (ka)^4}, \quad Y = \omega M' = \frac{1}{3} \rho c S \frac{(ka)^3 + 2ka}{4 + (ka)^4}. \quad (9)$$

Присоединенная масса осциллирующего шара

$$M' = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \frac{2 + (ka)^2}{4 + (ka)^4} \quad (10)$$

на низких частотах равна половине массы жидкости, вытесненной шаром, а на высоких частотах стремится к нулю как f^{-2} .

4.1.5. Определить полную мощность излучения звука сферой радиусом 1 см, совершающей в воздухе поступательные колебания на частоте $f = 100$ Гц с амплитудой смещения $\xi_0 = 1$ мм. Как изменится мощность, если колебания происходят в воде?

Решение. Условия задачи соответствуют низким ($ka \ll 1$) частотам, для которых (1.7) имеет вид $N = (32/3)\pi^7 (af)^6 \xi_0^2 (\rho/c^3)$. Для воздуха $\rho/c^3 \approx 3,3 \cdot 10^{-8}$ кг/(м⁴·с), $N \approx 10^{-9}$ Вт. Для воды $\rho/c^3 \approx 3 \cdot 10^{-7}$ кг/(м⁴·с), поэтому излучаемая мощность примерно в 10 раз выше.

4.1.6. Массивный плоский поршень массой M и площадью S , закрепленный на пружинке с жесткостью β , совершает свободные квазигармонические колебания на входе в газонаполненную трубу того же сечения. При этом поршень излучает плоскую звуковую волну, бегущую вдоль оси x трубы и испытывает вязкое трение, сила которого пропорциональна скорости. Как процесс излучения влияет на собственную частоту и затухание колебаний?

Решение. Уравнение колебаний поршня имеет вид

$$M\ddot{\xi} + \alpha\dot{\xi} + \beta\xi = -pS, \quad (1)$$

где ξ — смещение поршня из равновесного положения $x = 0$, p — давление на поверхность поршня ($x = 0$) излучаемой акустической волны. Поскольку для бегущей плоской волны

$$v = f(t - x/c), \quad p = \rho c f(t - x/c) = \rho c v = \rho c \xi, \quad (2)$$

уравнение (1) примет вид

$$M\ddot{\xi} + (\alpha + \rho c S)\dot{\xi} + \beta\xi = 0. \quad (3)$$

В предположении о квазигармоническом характере колебаний ищем решение (3) в форме $\xi = \xi_0 \exp(-i\omega t)$. Это дает $M\omega^2 + i(\alpha + \rho c S)\omega - \beta = 0$, откуда для комплексной частоты получаем

$$\omega = -i \frac{\alpha + \rho c S}{2M} \pm \left[\frac{\beta}{M} - \left(\frac{\alpha + \rho c S}{2M} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4)$$

Выражение (4) отвечает затухающим колебаниям. Даже если трения нет ($\alpha = 0$), колебания будут затухать благодаря потерям на излучение. Их амплитуда $A(t) = A \exp(-\rho c S t / 2M)$. Собственная частота (действительная часть (4)) вследствие излучения звука уменьшается. Заметим, что механический импеданс $Z = S(p/v)_{x=0} = \rho c S$ в соответствии с (2) есть действительная величина. Поэтому присоединенная масса поршня, излучающего плоскую волну, равна нулю.

4.1.7. Сферическая оболочка радиусом a и массой M совершает сферически-симметричные пульсации под действием нормальной силы $F(t)$, равномерно распределенной по поверхности. Записать уравнение движения оболочки с учетом реакции излучения звуковой волны. Получить выражение присоединенной массы для произвольных во времени низкочастотных колебаний. Для гармонических колебаний рассчитать механический импеданс.

Решение. Уравнение для радиальной скорости оболочки:

$$M\dot{v} = F - pS. \quad (1)$$

Потенциал сферически расходящейся волны

$$\varphi = \frac{A}{r} f\left(t - \frac{r-a}{c}\right), \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

откуда находим связь между скоростью и давлением:

$$\rho c \dot{v} = \dot{p} + (c/r)p, \quad (2)$$

дифференциальная форма связи (2) эквивалентна интегральному соотношению

$$p = \rho c \int_{-\infty}^t \frac{dv}{dt'} \exp\left[-\frac{c}{r}(t-t')\right] dt'. \quad (3)$$

Полагая в (3) $r = a$ и переходя к новой переменной $\tau = t - t'$, приведем уравнение (1) к виду

$$M \frac{dv}{dt} + \rho c S \frac{d}{dt} \int_0^\infty v(t-\tau) \exp\left[-\frac{c}{a}\tau\right] d\tau = F. \quad (4)$$

В случае колебаний на низких частотах функция $v(t-\tau)$ под интегралом (4) является "медленной", и запаздыванием τ в ней можно пренебречь. При этом уравнение (4) принимает вид

$$(M + \rho a S) \frac{dv}{dt} = F. \quad (5)$$

Как видно из (5), присоединенная масса $M' = \rho \cdot 4\pi a^3$, что согласуется с (1.9) при $ka \rightarrow 0$. Для гармонических во времени колебаний можно ввести понятие механического импеданса $Z = S(p/v)_{r=a}$. Полагая в (3) $v = v_0 \exp(-i\omega t)$, $r = a$, найдем

$$\rho = \rho c v_0 \frac{i k a}{i k a - 1} e^{-i\omega t}, \quad Z = \rho c S \frac{(ka)^2 - i k a}{1 + (ka)^2}. \quad (6)$$

Результат (6) совпадает с (1.7).

4.1.8. В условии предыдущей задачи считать, что сила f изменяется во времени по гармоническому закону, а оболочка испытывает вязкое трение. Рассчитать КПД этой излучающей системы: $\eta = N/N_s$, где N — излучаемая мощность, N_s — мощность источника, создающего силу F .

Решение. Уравнение движения имеет вид

$$M\dot{v} + \alpha v = F_0 e^{-i\omega t} - pS. \quad (1)$$

Подставим сюда выражение (7.6) для давления p . Отыскивая решение в виде $v = v_0 \exp(-i\omega t)$, найдем

$$v_0 = F_0 \left[\alpha - i\omega M + \frac{\rho c S}{1 + (ka)^2} [(ka)^2 - ika] \right]^{-1} \quad (2)$$

Мощность источника

$$N_s = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(F^* v) = \frac{1}{2} F_0^2 \left[\alpha + \rho c S \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2} \right] \times \\ \times \left[\left[\alpha + \rho c S \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2} \right]^2 + \omega^2 \left[M + \frac{\rho S a}{1 + (ka)^2} \right]^2 \right]^{-1}. \quad (3)$$

Излучаемая мощность

$$N = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p^* v) = \frac{1}{2} F_0^2 \rho c S \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2} [\dots]^{-1}. \quad (4)$$

Выражения в квадратных скобках формул (3), (4) совпадают. На основании (3), (4) рассчитать КПД излучателя:

$$\eta = \frac{\alpha_n}{\alpha + \alpha_n}, \quad \alpha_n = \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2} \rho c S. \quad (5)$$

Результат (5) показывает, что на низких частотах ($ka \rightarrow 0$) $\eta \rightarrow 0$ — процесс излучения мало эффективен. На высоких частотах ($ka \rightarrow \infty$) приходим к выражению $\eta = \rho c S / (\alpha + \rho c S)$, справедливому для плоского поршневого излучателя площади S . Когда нет потерь на трение ($\alpha = 0$), $\eta = 1$.

4.1.9. Монополем называют точечный источник, создающий сферическую расходящуюся волну. Переходя в результатах задачи 4.1.1 для пульсирующей сферы к пределу $ka \rightarrow 0$, получить соответствующие выражения для монопольного источника.

Ответ. Воспользуемся обозначением $Q = 4\pi a^2 v_0$ для объемной скорости (производительности источника). Тогда

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r^{-1} \\ r^{-2} - ikr^{-1} \\ -\rho c ikr^{-1} \end{bmatrix} \frac{Q}{4\pi} \exp(-i\omega t + ikr), \quad I = \frac{Q^2}{32\pi^2} \rho c \frac{k^2}{r^2}, \quad N = \frac{Q^2}{8\pi} \rho c k^2.$$

4.1.10. Акустическим диполем называют источник, состоящий из двух одинаковых, близко расположенных монополей, колеблющихся в противофазе. Рассчитать характеристики акустического поля дипольного источника. Убедиться в том, что осциллирующая сфера (см. задачу 4.1.4) есть излучатель дипольного типа

Решение. Пусть монополи расположены на полярной оси z сферической системы координат на расстояниях $+\Delta z/2$ и $-\Delta z/2$ от центра. Потенциал поля в точке (r, θ) (зависимость от азимутального угла φ отсутствует из-за симметрии задачи) равен

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{r_1} e^{ikr_1} - \frac{1}{r_2} e^{ikr_2} \right] e^{-i\omega t}.$$

Поскольку значения r_1 и r_2 различаются мало

$$(r_{1,2} = [x^2 + y^2 + (z \pm \Delta z/2)^2]^{1/2} \approx r \pm (z/2r) \Delta z),$$

то $\varphi = \frac{Q}{4\pi} \frac{d}{dr} (r^{-1} e^{ikr}) \Delta r e^{-i\omega t}$. Учитывая, что $\Delta r = (z/r) \Delta z = \cos\theta \cdot \Delta z$, и обозначая "момент диполя" как $D = Q \Delta z$, получим

$$\varphi = \frac{D}{4\pi} \cos\theta \left[ik - \frac{1}{r} \right] \frac{1}{r} \exp(-i\omega t + ikr). \quad (1)$$

Формула (1) с точностью до обозначений совпадает с формулой (4.2). Следовательно, осциллирующая сфера является излучателем дипольного типа, момент которого $D = 2\pi a^3 v_0$, а $\Delta z = a/2$. Все необходимые формулы для диполя получаются из результатов задачи 4.1.4 в пределе $ka \rightarrow 0$. Укажем, что простейший излучатель такого типа получается при помещении монополя в воздухе на высоте $\Delta z/2$ над поверхностью воды. При этом диполь образуется монополем и его мнимым изображением в воде на глубине $\Delta z/2$, колеблющимся в противофазе.

4.1.11. Рассмотреть группу монопольных излучателей, расположенных вблизи начала координат. Положение монополя с номером j задается вектором $\mathbf{r}^j = (x_1^j, x_2^j, x_3^j)$. Получить выражение для потенциала акустического поля в произвольной точке с координатами $\mathbf{R} = (X_1, X_2, X_3)$, расположенной вдали от области локализации источников ($R = |\mathbf{R}| \gg \max |\mathbf{r}^j|$).

Решение. В силу линейности задачи справедлив принцип суперпозиции. Поэтому потенциал результирующего поля равен сум-

ме потенциалов полей отдельных монополей (см. задачу 4.1.9):

$$\varphi = - \sum_j Q^j f(\mathbf{R}-\mathbf{r}^j), \quad f = \frac{\exp(ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}^j|)}{4\pi|\mathbf{R}-\mathbf{r}^j|}. \quad (1)$$

В задаче рассматриваются гармонические возмущения и множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опущен. Поскольку $|\mathbf{r}^j| \ll |\mathbf{R}|$ разложим функцию f в степенной ряд:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{R}-\mathbf{r}^j) &= f(\mathbf{R}) - (\mathbf{r}^j \nabla) f(\mathbf{R}) + \frac{1}{2} (\mathbf{r}^j \nabla) (\mathbf{r}^j \nabla) f(\mathbf{R}) + \dots = \\ &= \left[1 - x_\alpha^j \frac{\partial}{\partial X_\alpha} + \frac{1}{2} x_\alpha^j x_\beta^j \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} + \dots \right] f(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (2)$$

По дважды повторяющимся индексам α, β (принимаящим значения 1, 2, 3) подразумевается суммирование. Подставляя (2) в (1), получим разложение поля по мультипольным компонентам: $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$. Как видно из разложения, чем выше номер n компоненты φ_n , тем быстрее убывает акустическое поле при $R \rightarrow \infty$. Поэтому обычно главным является член

$$\varphi_0 = \left[- \sum_j Q^j \right] \exp(ikR)/(4\pi R). \quad (3)$$

Однако если суммарная производительность всех монополей $Q = \sum Q^j$ равна нулю, то $\varphi_0 = 0$ и главным становится член

$$\varphi_1 = (\mathbf{D} \nabla) \exp(ikR)/(4\pi R), \quad \mathbf{D} = - \sum_j Q^j \mathbf{r}^j, \quad (4)$$

описывающий дипольное излучение. Здесь $\mathbf{D}$ — вектор дипольного момента системы. Наконец, при $Q = 0$ и $\mathbf{D} = 0$ дальнейшее поле создается источником квадрупольного типа

$$\varphi_2 = - \frac{1}{2} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{\exp(ikR)}{4\pi R}. \quad (5)$$

Тензор

$$D_{\alpha\beta} = \sum_j Q^j x_\alpha^j x_\beta^j \quad (6)$$

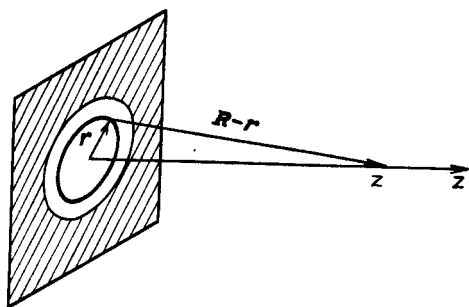
характеризует квадрупольный момент системы.

4.1.12. Рассчитать поле на оси круглого поршня радиусом a , помещенного в бесконечном плоском неподвижном экране и совершающего гармонические колебания с амплитудой v_0 .

Решение. Колебательное движение поршня можно заменить суммой колебаний элементарных монополей, непрерывно распределенных по сечению поршня. Заменяя в формуле (11.1) производительность j -го монополя $Q^j = v_0 S$ на $\Delta Q = v(\mathbf{r}) \Delta s$ (где Δs — площадь элементарного участка поверхности, колеблющегося со скоростью v ; $\mathbf{r}$ — его координаты) и переходя от суммы к интегралу, получим

$$\varphi = - \frac{1}{2\pi} \int_S v(\mathbf{r}) e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \frac{ds}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}. \quad (1)$$

Здесь учтено, что монополи излучают в обе стороны и результат уменьшен в 2 раза. Введем цилиндрические координаты, как показано на рисунке. Положим на поверхности поршня $v = v_0 = \text{const}$. Для точек, лежащих на оси,



$$|R-r| = (r^2 + z^2)^{1/2}.$$

К задаче 4.1.12

При этом выражение (1) для потенциала результирующего поля примет вид

$$\varphi = -\frac{v_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\exp(ik\sqrt{r^2+z^2})}{\sqrt{r^2+z^2}} r dr. \quad (2)$$

Интеграл (2) легко считается:

$$\varphi = -\frac{v_0}{ik} \left[\exp(ik\sqrt{z^2+a^2}) - \exp(ikz) \right]. \quad (3)$$

Отсюда, учитывая гармоническую зависимость от времени, $p = ik\rho c\varphi$, находим акустическое давление

$$p = -\rho c v_0 \cdot 2i \exp\left[i\frac{k}{2}(\sqrt{z^2+a^2} + z)\right] \sin\left[\frac{k}{2}(\sqrt{z^2+a^2} - z)\right]. \quad (4)$$

Модуль этого выражения

$$|p| = 2\rho c v_0 \left| \sin\left[\frac{k}{2}(\sqrt{z^2+a^2} - z)\right] \right| \quad (5)$$

описывает осевое распределение амплитуды давления. Зависимость (5) носит осциллирующий характер. С увеличением z величина $|p|$ проходит через нули и максимумы, значение $2\rho c v_0$ которых в 2 раза больше, чем в плоской волне.

Заметим, что стремление радиуса поршня к бесконечности не дает перехода к неограниченной колеблющейся плоскости, излучающей плоскую волну ($|p| = \rho c v_0 = \text{const}$). Пространственные осцилляции вблизи поршня при $ka \rightarrow \infty$ не сглаживаются, напротив, частота их растет. Это объясняется влиянием резкого края поршня, где скорость уменьшается скачком от v_0 до 0. В реальных условиях осцилляции сглаживаются благодаря присутствию затухания или конечной переходной области у края поршня.

4.1.13. Используя результат задачи 4.1.12 (см. (12.5)), определить положение нулей и максимумов давления на оси поршня, координату наиболее удаленного максимума и поведение амплитуды на больших расстояниях.

Решение. Расстояния, на которых $|p|$ обращается в нуль, определяются из условия

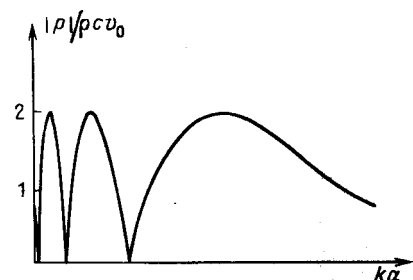
$$(z^2 + a^2)^{1/2} - z = 2\pi m/k = 2m\lambda/2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Физический смысл (1): разность хода двух лучей, идущих в точку наблюдения от края поршня и от его центра, равна чет-

ному числу полуволн. Это означает, что на излучателе укладывается $2m$ зон Френеля. Положение максимумов (см. рисунок) определяется аналогично:

$$(z^2 + a^2)^{1/2} - z = (2m+1)\lambda/2 \quad (2)$$

Они формируются в точках на оси, для которых на излучателе укладывается нечетное число



К задаче 4.1.13

зон Френеля. Наиболее удаленный максимум ($m = 0$) лежит на расстоянии $z = a^2/\lambda - \lambda/4 \approx a^2/\lambda$. В дальней зоне (зоне Фраунгофера, $z \gg a^2/\lambda$) положим в (12.5) $(z^2 + a^2)^{1/2} \approx z + a^2/2z$ и получим

$$|p| = \rho cv_0 (ka^2/2z). \quad (3)$$

Амплитуда (3) убывает с расстоянием без осцилляций по закону z^{-1} , соответствующему расходящейся сферической волне.

4.1.14. Для поршневого излучателя рассчитать диаграмму направленности — зависимость амплитуды акустического давления от угла между осью пучка и направлением на точку наблюдения в дальней зоне.

Решение. Для дальней зоны в формуле (12.1) можно положить $k|R - r| \approx kR(1 - Rr/R^2)$. При этом потенциал

$$\varphi \approx -v_0 \frac{\exp(ikR)}{2\pi R} \int_S \exp\left[-ik \frac{Rr}{R}\right] ds. \quad (1)$$

Выберем в качестве полярной оси сферической системы координат ось z пучка и напомним

$$R = \{R \sin\theta \cos\varphi, R \sin\theta \sin\varphi, R \cos\theta\}, \quad t, \quad r = \{r \cos\Psi, r \sin\Psi, 0\}.$$

Интеграл в (1) примет вид

$$\begin{aligned} \int_S (...) ds &= \int_0^a \int_0^{2\pi} r dr \int_0^\pi \exp[-ikr \sin\theta \cos(\varphi - \Psi)] d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^a J_0(kr \sin\theta) r dr = 2\pi a^2 \frac{J_1(ka \sin\theta)}{ka \sin\theta}. \end{aligned}$$

Здесь J_0 , J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядка. Таким образом, диаграмма направленности дается выражением

$$D(\theta) = \frac{p}{p_{\max}} = \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \quad (2)$$

Как видно из рисунка, зависимость (2) имеет осциллирующий характер. Величины изображенных максимумов равны 1; 0,13; 0,06; 0,04. Первый нуль достигается

при $ka \sin \theta_1 = 3,8$, отсюда находим полуширину основного "лепестка" диаграммы направленности: $\theta_1 = \arcsin(0,61 \lambda/a)$.

4.1.15. Оценить радиус первой зоны Френеля на дне океана для гидролокатора, работающего на частоте $f = 45$ кГц при глубине места $h = 3200$ м. Скорость звука принять равной 1500 м/с.

Ответ. Из $r_1^2 = (h + \lambda/2)^2 - h^2 \approx h\lambda = hc/f$ имеем $r_1 \approx 10$ м.

4.1.16. Звук частотой $f = 1$ кГц, распространяясь в воздухе, проходит через круглое отверстие диаметром $2a = 1$ м в экране. Оценить размер зоны уверенной слышимости на расстоянии $z = 10$ м от экрана.

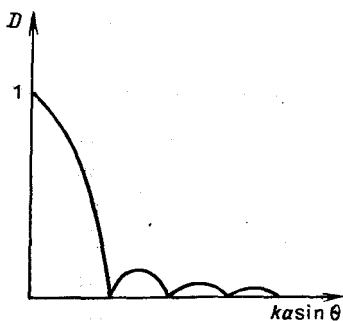
Решение. Поскольку $z \gg a^2/\lambda$, воспользуемся результатами задачи 4.1.14 для дальней зоны. Радиус центрального дифракционного пятна $d = z \operatorname{tg} \arcsin(0,61 \lambda/a) \approx 4,5$ м.

4.1.17. Круглая диафрагма диаметром $2a = 30$ см излучает звук в воде на частоте $f = 30$ кГц. Амплитуда колебательной скорости $v_0 = 1,4$ см/с (излучаемая мощность ~ 10 Вт). На каком предельном расстоянии можно обнаружить звук приемником с чувствительностью по амплитуде колебаний давления $p_{\min} = 1,4$ дин/см². Как изменится предельная дальность по направлению первого бокового лепестка диаграммы направленности?

Решение. Пользуясь результатами задачи 4.1.14, для амплитуды давления в дальней зоне найдем

$$|p| = |\omega \rho \phi| = (\omega \rho v_0 a^2 / 2R) D(\theta). \quad (1)$$

Предельная дальность по направлению главного лепестка ($\theta = 0$, $D = 1$) $R = \omega \rho v_0 a^2 / (2p_{\min}) \approx 210$ км. В направлении первого лепестка ($D = 0,13$) $R \approx 27$ км. Этот максимум направлен под углом $\theta = 12^\circ$ к оси.



К задаче 4.1.14

4.1.18. Поршневой излучатель гидролокатора диаметром $2a = 1$ м используется для излучения и приема. Он регистрирует сигнал, интенсивность которого на 60 дБ меньше интенсивности излученной волны. При какой минимальной частоте можно обнаружить сигнал от препятствия, расположенного на расстоянии $L = 10$ км и отражающего 10 % падающей интенсивности?

Решение. Сигнал проходит путь $2L$ от излучателя до цели и обратно. Регистрируемая интенсивность $I_1 = 0,1(a/R)^2 I_0$, где R — радиус озвученного "пятна" в плоскости приемника, оцениваемой по ширине основного лепестка диаграммы $R \approx 2L \operatorname{tg} \theta_1 \approx 2L \theta_1 \approx 1,22 L \lambda / a$. С учетом условия $I_1/I_0 = 10^{-6}$ для определения частоты получаем соотношение $0,1(a^2 f / 1,22 L c)^2 = 10^{-6}$, откуда $f \approx 200$ кГц.

4.2. Рассеяние звука

4.2.1. Сечением рассеяния σ ($[\sigma] = \text{м}^2$) называют отношение полной рассеянной препятствием мощности к интенсивности падающей плоской волны. Пользуясь сохранением энергии при рассеянии коротковолнового звука на идеальном препятствии, выразить σ через геометрические размеры тела.

Решение. В пределе коротких волн справедливо лучевое описание. Проведем сечение тела плоскостью, перпендикулярной направлению падающей волны. Пусть это сечение является "миделевым" и разграничивает "освещенную" и "затемненную" части тела. Очевидно, что освещенная поверхность тела рассеивает на различные углы, в том числе и назад, всю падающую на нее мощность $N = IS$ (где S — площадь сечения). В области тени формально следует полагать, что рассеяние происходит вперед; рассеянное поле должно быть равно взятому с обратным знаком полю падающей волны, чтобы гасить его в результате интерференции. Поэтому затемненная часть тела как бы рассеивает ту же мощность $N = IS$. Следовательно, сечение рассеяния $\sigma = 2N/I = 2S$ в 2 раза больше площади максимального поперечного сечения тела.

4.2.2. Звук падает на препятствие произвольной формы, имеющее малые (по сравнению с длиной волны) размеры. Препятствие неподвижно относительно колеблющейся окружающей среды, но его объем пульсирует под действием переменного акустического давления. Рассчитать сечение рассеяния, зная

частоту волны, объем V и свойства материала препятствия, а также свойства среды.

Решение. При адиабатическом деформировании материала препятствия (скорость звука c_1 , плотность ρ_1) приращения давления и плотности связаны соотношением $p' = c_1^2 \rho'$. Поскольку относительное изменение объема $V'/V = -\rho'/\rho_1$, получим

$$V' = -(\rho'/c_1^2 \rho_1) V = -\beta_1 V \rho', \quad (1)$$

где β_1 — адиабатическая сжимаемость материала. Если бы препятствие отсутствовало, выделенный им объем среды изменялся бы по аналогии с (1) на $V' = -\beta_0 V \rho'$, где $\beta_0 = (c_0^2 \rho_0)^{-1}$, индекс нуль относится к параметрам окружающей среды. Разность этих величин $(\beta_0 - \beta_1) V \rho'$ характеризует изменение объема, связанное с присутствием препятствия. Производная по времени от последнего выражения $Q = (\beta_0 - \beta_1) V dp'/dt = -i\omega(\beta_0 - \beta_1) V \rho'$ есть производительность монополярного источника, излучающего рассеянное поле (см. задачу 4.1.9):

$$p_s = -\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 V \left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0}\right] \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \rho'. \quad (2)$$

Мощность рассеянной волны, вычисляемая на основе (2), есть

$$N = 4\pi r^2 \frac{|p_s|^2}{2c_0 \rho_0} = \frac{1}{8\pi c_0 \rho_0} \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^4 V^2 \left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0}\right]^2 |\rho'|^2.$$

Поскольку интенсивность плоской волны, падающей на препятствие, равна $I = |\rho'|^2 / (2c_0 \rho_0)$, сечение рассеяния

$$\sigma = \frac{N}{I} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^4 V^2 \left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0}\right]^2. \quad (3)$$

4.2.3. Пользуясь решением предыдущей задачи, получить сечение рассеяния звука сферой малого радиуса a , $ka \ll 1$. Оценить сечение рассеяния волны частотой 300 Гц, распространяющейся в воздухе, на капле тумана радиусом 20 мкм.

Ответ. Сечение рассеяния $\sigma = \frac{4}{9} \pi a^2 (ka)^4 (1 - \chi_1/\chi_0) \sim 10^{-25} \text{ м}^2$. Благодаря множителю $(ka)^4$ сечение σ оказывается очень малым. В то же время при рассеянии света на капле в соответствии с задачей 4.2.1 $\sigma = 2\pi a^2 \sim 10^{-9} \text{ м}^2$. Это объясняет хорошую акустическую прозрачность густого тумана.

4.2.4. Пузырек воздуха в воде имеет сферическую форму и пульсирует в поле плоской звуковой волны частоты ω , рассеивая ее энергию в виде сферической расходящейся волны. Рассчитать сечение рассеяния считая радиус a пузырька малым по

сравнению с длиной волны. Использовать непрерывность давления и нормальной компоненты скорости на границе пузырька.

Решение. Введем сферическую систему координат, начало которой поместим в центр пузырька. Плоская волна падает в направлении оси z :

$$\varphi_i = \varphi_0 \exp(ikz) = \varphi_0 \exp(ikr \cos \theta). \quad (1)$$

Потенциал рассеянной волны запишем как

$$\varphi_s = A(\varphi_0/kr) \exp(ikr), \quad (2)$$

где A — неизвестная амплитуда рассеяния. Непрерывность скорости на границе в случае $ka \ll 1$ дает

$$v_0 = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_i + \varphi_s)_{r=a} \approx -(A\varphi_0/ka^2), \quad (3)$$

v_0 — амплитуда колебаний скорости границы пузырька. Условие равенства суммарного давления падающей и рассеянной волн избыточному внутреннему давлению имеет вид

$$i\omega\rho_0(\varphi_i + \varphi_s)_{r=a} = p'_{\text{вн}} \quad (4)$$

Внутреннее давление рассчитывается по аналогии с (2.1):

$$p'_{\text{вн}} = -\frac{1}{\beta_1} \frac{V'}{V} = -\frac{1}{\beta_1} \frac{4\pi a^2 \xi_0}{(4/3)\pi a^3} = -i \frac{3v_0}{\beta_1 \omega a}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и используя (1), (2), в пределе $ka \ll 1$ получим

$$i\omega\rho_0 \left[\varphi_0 + A \frac{\varphi_0}{ka} (1+ika) \right] = -i \frac{3v_0}{\beta_1 \omega a}. \quad (6)$$

Система (3), (6) позволяет рассчитать амплитуду рассеяния

$$A = \frac{\omega a / c_0}{(\omega_0 / \omega)^2 - 1 - i(\omega a / c_0)}. \quad (7)$$

Видно, что кривая $A(\omega)$ (см. (7)) имеет резонансный характер. Здесь собственная частота колебаний пузырька

$$\omega_0 = [3/(\beta_1 \rho_0 a^2)]^{1/2}. \quad (8)$$

Сечение рассеяния

$$\sigma = 4\pi \frac{|A|^2}{k^2} = \frac{4\pi a^2}{((\omega_0/\omega)^2 - 1)^2 + (\omega a / c_0)^2}. \quad (9)$$

4.2.5. Получить оценочную формулу, связывающую радиус и резонансную частоту воздушного пузырька, находящегося вблизи водной поверхности и на глубине h . Оценить размер пузырька для частоты 100 кГц. На какой глубине собственная частота вдвое больше, чем у поверхности?

Решение. Воспользуемся (4.8). Сжимаемость $\beta_1 = (c_1^2 \rho_1)^{-1} = (\gamma p_{\text{вн}})^{-1}$. Здесь $p_{\text{вн}}$ — давление газа внутри пузырька, равное

атмосферному давлению $p_{\text{ат}}$ (если не учитывать сил поверхностного натяжения) для положения вблизи поверхности и равное $p_{\text{ат}} + \rho_0 gh$ для положения на глубине h . Поэтому

$$a\omega_0 = [3\gamma (p_{\text{ат}}/\rho_0 + gh)]^{1/2}. \quad (1)$$

Подставляя в (1) числовые значения параметров воды (ρ_0) и воздуха ($\gamma, p_{\text{ат}}$), получим оценочную формулу $a f \approx 327$ Гц·см для приповерхностного пузырька. Для $f_0 = 100$ кГц имеем $a \approx 33$ мкм. Собственная частота (при фиксированном a) возрастает в 2 раза на глубине 30 м.

4.2.6. Исследовать поведение сечения рассеяния звука пузырьком в области низких и высоких частот и при резонансе. Оценить добротность воздушного пузырька, находящегося у поверхности воды.

Решение. В области низких частот ($\omega \ll \omega_0$) из (4.9) имеем

$$\sigma \approx 4\pi a^2 \left[\frac{\omega}{\omega_0} \right]^4 = \frac{4}{9} \pi a^2 (ka)^4 \left[\frac{\beta_1}{\beta_0} \right]^2. \quad (1)$$

Формула (1) совпадает с результатом задачи 4.2.3 при $\beta_1 \gg \beta_0$. Так и должно быть — воздух гораздо более сжимаем, чем вода. В области высоких частот ($\omega \gg \omega_0$) получается результат $\sigma = 4\pi a^2$, совпадающий с сечением рассеяния малой абсолютно мягкой сферы. При резонансе ($\omega = \omega_0$)

$$\sigma = 4\pi a^2 / (k_0 a)^2, \quad (2)$$

т.е. сечение оказывается гораздо большим геометрического сечения пузырька. Резкое возрастание рассеивающей способности пузырька вблизи резонансной частоты объясняется его способностью накапливать энергию падающей волны (благодаря высокой добротности) и затем "высвечивать" усиленные колебания.

Добротность пузырька, обратная относительной ширине резонансной кривой (см. (4.9)), для приповерхностного пузырька воздуха оценивается как

$$q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{1}{k_0 a} = \frac{c_0}{2\pi a f_0} \approx \frac{c_0}{2\pi \cdot 327} \approx 70. \quad (3)$$

Оценка (3) учитывает затухание колебаний пузырька вследствие потерь на излучение звука и поэтому завышена. Учет необратимых потерь энергии из-за вязкости, тепло- и массообмена пузырька с окружающей жидкостью может понизить добротность на порядок. Соответственно уменьшится и резонансное сечение рассеяния (2).

4.2.7. Плавательный пузырь небольшой рыбки, плывущей на малой глубине, эквивалентен воздушному пузырьку радиусом $a = 0,3$ см. Оценить собственную частоту и резонансное сечение рассеяния.

Ответ. Пользуясь результатами задачи 4.2.5 и (4.6), находим $f_0 \approx 1$ кГц, $\sigma \approx 0,7$ м². Отметим, что $\sigma \gg \pi a^2 \approx 0,3$ см².

4.2.8. В 1 см³ воды содержится $n = 10^3$ микропузырьков одинакового радиуса $a = 33$ мкм. По какому закону убывает с расстоянием интенсивность плоской волны вследствие рассеяния на пузырьках? Оценить расстояния, на которых интенсивность волны с частотой $f = 300$ кГц убывает в e раз.

Решение. Рассмотрим смещение на расстояние Δx участка фронта плоской волны, имеющего площадь S . Мощность, прошедшая через S , уменьшается на $\Delta N = N(x+\Delta x) - N(x) = -\sigma(nS\Delta x)I$. Устремляя Δx к 0, с учетом того, что интенсивность $I \approx N/S$, получим

$$dI/dx = -n\sigma I, \quad I(x) = I(0) \exp(-n\sigma x). \quad (1)$$

Интенсивность согласно (1) убывает по экспоненциальному закону. Уменьшение в e раз происходит на расстоянии $x \approx (n\sigma)^{-1}$. Радиус $a = 33$ мкм отвечает частоте $f = 100$ кГц. На частоте 300 кГц согласно (4.9) $\sigma \approx 81\pi a^2/16$. Длина $x = (n\sigma)^{-1} \approx 6$ см.

4.2.9. Малый шарик радиусом a ($ka \ll 1$) совершает осцилляции в поле плоской звуковой волны. Сжимаемость шарика такая же, как у окружающей среды, а его плотность ρ_1 существенно отличается от ρ_0 . Учитывая смещение шарика относительно окружающей среды, рассчитать сечение рассеяния.

Решение. В предыдущих задачах из этого раздела рассматривалось монопольное рассеяние. Учет движения рассеивающего тела относительно среды должен дать дипольную составляющую. Пусть волна падает в направлении полярной оси z сферических координат. Шарик будет совершать колебания вдоль z . Известно, что при потенциальном обтекании однородным потоком, имеющим скорость v , шарик движется со скоростью $U = v \cdot 3\rho_0 \times (\rho_0 + 2\rho_1)^{-1}$. Здесь ρ_0 , ρ_1 — плотности жидкости и материала шарика. Если $\rho_1 > \rho_0$, шарик отстает от жидкости ($U < v$), если $\rho_1 < \rho_0$, он колеблется с большей амплитудой. Скорость шарика относительно жидкости

$$u = U - v = 2v(\rho_0 - \rho_1)/(\rho_0 + 2\rho_1).$$

Радиальная компонента на поверхности шарика равна $u \cos \theta$. Теперь воспользуемся результатами задачи 4.1.4 об излучении звука сферой, совершающей заданное поступательно-осциллирующее движение. Полагая в выражениях задачи 4.1.4 $ka \ll 1$ и заменяя амплитуду колебаний скорости на поверхности сферы рассчитанным выше значением относительной скорости, найдем сечение дипольного рассеяния

$$\sigma = \frac{4}{3} \pi a^2 (ka)^4 \left[\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 + 2\rho_1} \right]^2. \quad (1)$$

При $\rho_1 = \rho_0$, когда шарик неотличим от среды, рассеяния нет. Для очень легкого шарика ($\rho_1 \ll \rho_0$)

$$\sigma = (4/3) \pi a^2 (ka)^4 \quad (2)$$

— в 4 раза больше, чем для очень тяжелого ($\rho_1 \gg \rho_0$).

4.2.10. Определить сечение рассеяния и зависимость от полярного угла амплитуды давления сигнала, сформировавшегося в результате рассеяния плоской волны на шарике малого радиуса; отличающемся от окружающей среды своей плотностью и сжимаемостью.

Решение. Рассеянное поле будет содержать одновременно монопольную p_1 и дипольную p_2 составляющие давления. Они равны

$$p_1 = -\frac{4}{3} \pi a^3 k^2 \left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0} \right] \frac{e^{ikr}}{r} p' \quad (1)$$

(см. (2.2)) и

$$p_2 = -4 \pi a^3 k^2 \left[\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 + 2\rho_1} \right] \frac{e^{ikr}}{r} p' \cos \theta \quad (2)$$

(см. решение задачи 4.2.9). Полное сечение, как нетрудно показать, есть сумма сечений монопольного и дипольного рассеяний:

$$\sigma = \frac{4}{9} \pi a^2 (ka)^4 \left[\left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0} \right]^2 + 3 \left[\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 + 2\rho_1} \right]^2 \right]. \quad (3)$$

Угловая направленность (индикатриса) полного рассеянного поля $D(\theta)$, как видно из (1), (2), пропорциональна выражению

$$-\frac{1}{3} \left[1 - \frac{\chi_1}{\chi_0} \right] - \left[\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 + 2\rho_1} \right] \cos \theta. \quad (4)$$

Принято нормировать $D(\theta)$ так, чтобы максимальное значение равнялось единице.

4.2.11. Записать и проанализировать выражения для индикатрисы и сечения рассеяния плоской волны тяжелым несжимаемым шариком малого радиуса.

Ответ. Пользуясь (10.3), (10.4), найдем

$$\sigma = \frac{4}{9} \pi a^2 (ka)^4 \left[1 + \frac{3}{4} \right].$$

Видно, что монопольное и дипольное рассеяния дают сравнимый по величине вклад (1 и 3/4). Индикатриса имеет вид

$$D(\theta) = |3\cos\theta - 2|/5.$$

Как видно, сильнее всего шарик рассеивает в обратном направлении ($\theta = -\pi$) — навстречу падающей волне. Небольшой по величине лепесток ($D(\theta=0) = 0,2$) связан с рассеянием вперед. Угловая полуширина этого лепестка находится из $\cos\theta = 2/3$.

4.2.12. Ультразвуковой излучатель дельфина на частоте 80 кГц создает мощность излучения $N = 0,1$ Вт. Коэффициент осевой концентрации (см. (1.4.6)) $K = 50$. Оценить расстояние L , на котором дельфин способен обнаружить твердый металлический шарик радиусом $a = 0,5$ см, если амплитуда давления принимаемого сигнала должна быть не менее $p_{\min} = 2 \cdot 10^{-3}$ Па.

Решение. Интенсивность сконцентрированного излучения, падающего на шарик, оценим как $I = NK/(4\pi L^2)$. Рассеянная шариком мощность $N_s = \sigma I$, сечение σ найдено в задаче 4.2.11. Эта мощность выражается через минимальное давление сигнала который способен почувствовать дельфин: $N_s = 4\pi L^2 p_{\min}^2 / (2c_0 \rho_0)$. Приравнявая выражения для N_s при заданных числовых значениях, оценим: $L \sim 60$ м

5. НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

5.1. Простые волны

5.1.1. Показать, что система уравнений гидродинамики в переменных Лагранжа для одномерного плоского движения имеет решение в виде простых волн. Свести эту систему к одному нелинейному уравнению для переменной $\xi(x, t)$ — смещению частиц среды из своего начального положения x .

Решение Исходные уравнения гидродинамики в лагранжевом представлении имеют вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho_0 = \rho \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right), \quad p = p(\rho) = p_0 \left[\frac{\rho}{\rho_0}\right]^\gamma. \quad (1)$$

Первое уравнение представляет собой обобщение второго закона Ньютона для сплошной среды. Второе (уравнение непрерывности) — закон сохранения массы вещества, записанный в дифференциальной форме. Третье — уравнение состояния, которое для быстрых (по сравнению с термодиффузией) процессов сжатия и разрежения, сопровождающих распространение звука, можно принять в форме адиабаты Пуассона.

Простой волной называют такой волновой процесс (вообще говоря, нелинейный), когда все описывающие этот процесс переменные могут быть выражены одно через другое с помощью некоторых связей. Однако если связи переменных содержат интегралы или производные, волна не будет простой, физически это означает появление дисперсии, т. е. зависимости поведения даже очень слабого возмущения от его спектрального состава. Поскольку два последних уравнения системы (1) представляются в виде

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \partial \xi / \partial x}, \quad p = p(\rho) = p \left[\frac{\rho_0}{1 + \partial \xi / \partial x} \right], \quad (2)$$

плотность и давление выражаются как функции только одной переменной $\partial \xi / \partial x$. Это означает, что система (1) имеет решение в виде простых волн.

Возьмем уравнение состояния (1) в форме адиабаты. Тогда из (2) имеем $p = p_0 (1 + \partial \xi / \partial x)^{-\gamma}$. Подставляя это соотношение в правую часть первого уравнения системы (1), приходим к нелинейному уравнению Ирншоу

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \xi / \partial x^2}{(1 + \partial \xi / \partial x)^{\gamma+1}}. \quad (3)$$

Здесь $c_0 = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$ — равновесная скорость звука. Уравнение (3) содержит нелинейность общего вида и формально пригодно для описания сильных возмущений; требуется, однако, чтобы знаменатель в (3) не обращался в нуль ($\partial \xi / \partial x \neq -1$). В нелинейной акустике имеют дело со слабо нелинейными волнами, для которых $|\partial \xi / \partial x| \ll 1$.

5.1.2. Считая нелинейность слабой, упростить уравнение Ирншоу (1.3), сохранив в нем только два главных нелинейных члена.

Решение. Воспользуемся приближенным соотношением

$$\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{-(\gamma+1)} \approx 1 - (\gamma+1) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{2} (\gamma+1) (\gamma+2) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2. \quad (1)$$

Подставляя разложение (1) в правую часть уравнения Ирншоу, найдем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - c_0^{-2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (\gamma+1) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} (\gamma+1) (\gamma+2) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Левая часть (2) соответствует обычному линейному волновому уравнению. Правая часть, полученная в результате разложения нелинейности общего вида в ряд по степенным нелинейностям, содержит квадратично-нелинейный и кубично-нелинейный члены.

5.1.3. Нелинейная среда занимает полупространство $x > 0$, а на ее границе $x = 0$ задан гармонический сигнал $\xi = A \times \sin(\omega t)$ с частотой ω . Анализируя уравнение (2.2) методом последовательных приближений, определить, какие частоты могут возникать при распространении волны в среде из-за квадратичной и кубичной нелинейностей.

Решение. Считая нелинейные эффекты слабыми, в первом приближении пренебрежем в уравнении (2.2) его правой частью. Решением линейного волнового уравнения в виде бегущей в положительном направлении оси x волны будет

$$\xi^{(1)}(x, t) = A \sin[\omega(t - x/c_0)]. \quad (1)$$

Чтобы найти решение второго приближения $\xi^{(2)}$, нужно подставить (1) в правую часть нелинейного уравнения, которая при

этом примет вид

$$F = \frac{1}{2}(\gamma+1) A^2 \left[\frac{\omega}{c_0} \right]^3 \sin(2\omega\tau) + \frac{1}{8}(\gamma+1)(\gamma+2) A^3 \left[\frac{\omega}{c_0} \right]^4 + [\sin(3\omega\tau) + \sin(\omega\tau)], \quad (2)$$

где $\tau = t - x/c_0$ — время в "сопровождающей" системе координат, движущейся равномерно вместе с волной со скоростью звука c_0 . Уравнение второго приближения с правой частью (2) будет таким:

$$\frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial t^2} = F(t - x/c_0). \quad (3)$$

Видим, что F имеет смысл "вынуждающей силы" в неоднородном волновом уравнении (3); она возбуждает новые волны на частотах второй гармоники 2ω (квадратично-нелинейный эффект) и третьей гармоники 3ω (кубично-нелинейный эффект). Кроме того, кубичная нелинейность вносит дополнительный вклад в волну основной частоты ω (эффект самовоздействия).

5.1.4. Указать, волны каких частот могут возникать в квадратично-нелинейной среде (в первом приближении), если на ее входе $x = 0$ задан бигармонический сигнал $\xi = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)$. Рассмотреть предельный случай $\omega_1 \rightarrow \omega_2$.

Ответ. По аналогии с задачей 5.1.3 нетрудно показать, что в среде генерируются вторые гармоники $2\omega_1$, $2\omega_2$ волн исходных частот, а также возмущения на суммарной $(\omega_1 + \omega_2)$ и разностной $(\omega_1 - \omega_2)$ частотах. При $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ будет генерироваться только вторая гармоника, так как эффективность возбуждения разностной частоты стремится к нулю (см. также 5.1.7).

5.1.5. Пользуясь методом медленно изменяющегося профиля, упростить уравнение (2.2), сохранив в нем только квадратично-нелинейный член.

Решение. Метод медленно изменяющегося профиля позволяет существенно упростить нелинейные уравнения в частных производных, описывающие процесс распространения интенсивных волн. После упрощения уравнения, естественно, и решать их гораздо проще. Идея метода состоит в следующем. При отсутствии нелинейных членов решением уравнения (2.2) будет сумма двух бегущих волн произвольной формы $\xi = \Phi(t - x/c_0) + \Psi(t + x/c_0)$. Волна с профилем Φ распространяется в положительном направлении оси x , волна Ψ — в отрицательном направлении. Нас будет интересовать первая из этих волн. Когда имеется слабая нелинейность и правая часть уравнения отлична от нуля, форма

волны уже не будет постоянной; она будет деформироваться по мере распространения — с увеличением расстояния x , пройденного волной в нелинейной среде. Когда нелинейность слабая, профиль волны должен изменяться медленно, т.е. наряду с "быстрой" зависимостью функции Φ от $\tau = t - x/c_0$ должна появиться "медленная" зависимость Φ от координаты x :

$$\xi = \Phi(\tau = t - x/c_0, x_1 = \mu x). \quad (1)$$

Здесь $\mu \ll 1$ — малый параметр задачи, отвечающий малости нелинейных членов в (2.2) по сравнению с линейными членами:

$$\mu \sim (\gamma + 1) \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right| \cdot \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right|^{-1} \sim (\gamma + 1) \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| \ll 1.$$

Тот факт, что $|\partial \xi / \partial x| \ll 1$, уже был использован при переходе от уравнения Иришоу (1.3) к упрощенному уравнению (2.2). Если предположить, в частности, что смещение изменяется по гармоническому закону $\xi = A \sin[\omega(t - x/c)]$, условие примет вид

$$\mu \sim (\gamma + 1) A \omega / c_0 = (\gamma + 1) \cdot 2\pi A / \lambda \ll 1.$$

Это значит, что амплитуда смещения частиц среды A должна быть малой по сравнению с длиной волны λ . Можно сказать иначе: отношение u_0/c_0 амплитуды колебательной скорости u_0 к скорости звука c_0 (акустическое число Маха) должно быть малой величиной. Таким образом, малый параметр задачи — это акустическое число Маха $M = u_0/c_0$. Перейдем в уравнении (2.2) от x, t к новым переменным x_1, τ согласно предположению (1). Вычисляем производные:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial \xi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} - \frac{2\mu}{c_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1 \partial \tau} + \mu^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (2.2) и пренебрегая всеми членами порядка μ^2, μ^3 и более высоких порядков малости (нужно также учесть, что правая часть уравнения мала по сравнению с левой), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2} u \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad (3)$$

где $u = \partial \xi / \partial \tau = \partial \xi / \partial t$ — колебательная скорость частиц среды, $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$ — параметр акустической нелинейности. Уравнение (3) в нелинейной акустике называют уравнением простых волн. Заметим, что это — уравнение первого порядка (а не второго, как исходное уравнение), т.е. задачу удалось сильно упростить.

5.1.6. На границе $x = 0$ нелинейной среды колебательная скорость изменяется по закону $u(x=0, \tau=t) = u_0 \sin(\omega t)$. Ре-

шая уравнение простых волн (5.3) методом последовательных приближений, определить закон изменения амплитуды второй гармоники с увеличением расстояния x .

Решение. Из уравнения простых волн получаем уравнения первого и второго приближений:

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon}{c_0^2} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} [u^{(1)}]^2. \quad (1)$$

Решение первого приближения $u^{(1)} = u_0 \sin(\omega t)$ подставляем во второе из (1); интегрируя его с условием $u^{(2)}(0, \tau) = 0$ (на границе среды второй гармоники нет), находим

$$u^{(2)} = (\varepsilon/2c_0^2) \omega u_0^2 x \sin(2\omega \tau). \quad (2)$$

Видим, что амплитуда второй гармоники в среде растет линейно с координатой x . Расстояние

$$x = x_p = c_0^2/(\varepsilon \omega u_0) = \lambda/(2\pi \varepsilon M), \quad (3)$$

на котором амплитуда второй гармоники формально достигает 1/2 от амплитуды первой, называют характерной нелинейной длиной или расстоянием образования разрыва. На самом же деле решение (2) справедливо на расстояниях $x \ll x_p$, так как при заметной перекачке энергии из первой гармоники во вторую решения, полученные методом последовательных приближений, не точны. Из формулы (3) следует, что для акустических сигналов, число Маха которых всегда мало ($M \ll 1$), нелинейная длина $x_p \gg \lambda$. Иными словами, волне нужно пройти расстояние, равное многим длинам волн λ , чтобы ее профиль и спектр заметно исказились. Это и означает "медленность" изменения профиля на масштабах порядка λ (см. задачу 5.1.5).

5.1.7. На границе $x = 0$ возмущение есть сумма гармонических сигналов $u(0, t) = u_1 \sin(\omega_1 t) + u_2 \sin(\omega_2 t)$. Решая уравнение простых волн (5.3) методом последовательных приближений, найти амплитуды u_+ и u_- комбинационных гармоник $\omega_1 + \omega_2$ и $\omega_1 - \omega_2$. Сравнить эффективность генерации суммарной и разностной частот.

Ответ. По аналогии с задачей 5.1.6 находим

$$u_{\pm} = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} u_1 u_2 (\omega_1 \pm \omega_2) x, \quad \frac{u_-}{u_+} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_1 + \omega_2} < 1.$$

5.1.8. Показать, что точное решение уравнения (5.3), отвечающее возмущению произвольной формы $u(x=0, t) = \Phi(t)$ на

границе нелинейной среды дается неявной функцией

$$u(x, \tau) = \Phi(\tau + (\epsilon/c_0^2)ux). \quad (1)$$

Получить формулу (1) методом характеристик, известным из теории квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка.

Решение. Дифференцируя (1), найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(\epsilon/c_0^2)u\Phi'}{1 - (\epsilon/c^2)x\Phi'}, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\Phi'}{1 - (\epsilon/c^2)x\Phi'}. \quad (2)$$

Здесь штрих означает производную по полному аргументу функции Φ . Подставляя (2) в уравнение простых волн, имеем тождество. О решении методом характеристик см. задачу 5.2.2.

Интересно разобраться в том, как в неявной зависимости (2) "скрыты" нелинейные эффекты. Разлагая (2) по малым x в ряд, получим

$$u \approx \Phi(\tau) + \Phi'(\tau)(\epsilon/c_0^2)ux + \dots \approx \Phi(\tau) + (\epsilon/c_0^2)x\Phi(\tau)\Phi'(\tau) + \dots$$

Видно, что второй член квадратичен по функции Φ , т.е. описывает квадратично-нелинейные эффекты. Следующие члены будут соответствовать нелинейностям высших степеней.

5.1.9. Используя неявное решение (8.1) уравнения простых волн, рассмотреть эволюцию "линейного профиля" — исходного возмущения

$$u(x=0, t) = \Phi(t) = \gamma(t-t_*). \quad (1)$$

Обсудить случаи $\gamma > 0$ и $\gamma < 0$.

Решение. Подставляя (1) в общую формулу (8.1), найдем $u(x, \tau) = \gamma[\tau + \epsilon u(x, \tau)x/c_0^2 - t_*]$, и, следовательно,

$$u = \gamma(\tau - t_*)/(1 - \epsilon\gamma x/c_0^2). \quad (2)$$

Таким образом, на любом расстоянии x профиль остается линейным по τ ; изменяется только угол его наклона к оси τ . Когда наклон положителен ($\gamma > 0$), решение справедливо на конечном интервале $x < c_0^2/(\epsilon\gamma)$, пока профиль не станет вертикальным. При отрицательном наклоне ($\gamma < 0$) с увеличением x профиль становится все более пологим, и при $x \gg c_0^2/(\epsilon|\gamma|)$ происходит потеря информации об исходном наклоне γ : $u \approx -(c_0^2/\epsilon x) \times (\tau - t_*)$. Выражение (2) — простейшее, но очень важное решение уравнения простых волн. Оно может быть использовано для описания эволюции близких к линейным участков произвольного профиля.

5.1.10. Проанализировать графически процесс нелинейного искажения формы одного периода исходного гармонического сигнала $u(0, \tau) = u_0 \sin(\omega\tau)$. Воспользоваться неявным решением (8.1) уравнения простых волн, переписав его как явную функцию переменной $\tau(x, u)$:

$$\tau = \Phi^{-1}(u) - (\epsilon/c_0^2) ux, \quad (1)$$

где Φ^{-1} — функция, обратная Φ .

Решение. При $x = 0$ из (1) получаем $\tau(0, u) = \Phi^{-1}(u)$ — эта кривая соответствует исходному профилю волны. Кривая, соответствующая нелинейно-искаженному профилю ($x > 0$), получается на плоскости $u\tau$ графическим сложением исходной кривой и прямой $-(\epsilon/c_0^2) ux$, наклон которой возрастает с увеличением x .

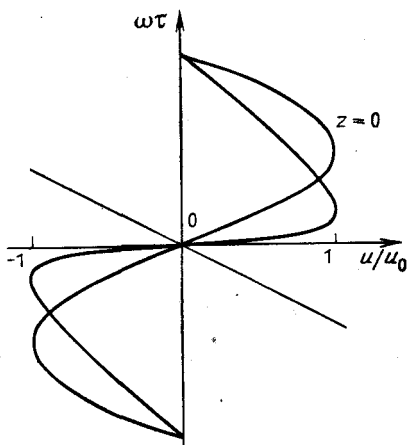
Для гармонического (при $x = 0$) сигнала решение (8.1) запишется так:

$$\frac{u}{u_0} = \sin\left[\omega\tau + \frac{\epsilon}{2} \omega ux\right] = \sin\left[\omega\tau + z \frac{u}{u_0}\right]. \quad (2)$$

Здесь $z = c_0^2/(\epsilon\omega u_0) = x/x_p$ — расстояние, измеренное в единицах длин образования разрыва (см. (6.3)). Формула (1) для рассматриваемого сигнала примет вид

$$\omega\tau = \arcsin \frac{u}{u_0} - z \frac{u}{u_0}. \quad (3)$$

Откладывая вдоль осей значения u/u_0 и $\omega\tau$ и выполняя описанные выше построения, получим картину, изображенную на рисунке. Видно, что с увеличением пройденного волной расстояния передний фронт (обращенный по направлению движения) становится более крутым, а задний — более пологим. Похожая картина наблюдается для волн на поверхности моря при подходе их к берегу. На расстоянии $z = 1$ ($x = x_p$) передний фронт становится вертикальным — образуется разрыв или ударный фронт. При $z > 1$ профиль становится неоднозначным (появляется "перехлест"), т.е. решение в виде простой волны (2) на расстояниях $x > x_p$ не справедливо.



К задаче 5.1.10

5.1.11. Используя сшивку решений вида (9.2), рассмотреть эволюцию формы одиночного треугольного импульса длительностью $2T$. При $x = 0$ профиль аппроксимируется кусочно-линейной функцией

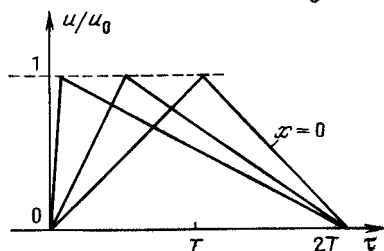
$$\frac{u}{u_0} = 0 \quad (\tau < 0, \tau > 2T), \quad \frac{u}{u_0} = \frac{\tau}{T} \quad (0 < \tau < T), \quad \frac{u}{u_0} = 2 - \frac{\tau}{T} \quad (T < \tau < 2T).$$

Рассмотреть случаи $u_0 > 0$ и $u_0 < 0$. Провести также анализ с использованием графической процедуры (см. задачу 5.1.10).

Ответ $u = 0$ ($\tau < 0, \tau > 2T$),

$$\frac{u}{u_0} = \frac{\tau}{T} \left[1 - \frac{\varepsilon u_0}{c_0^2 T} x \right]^{-1} \quad \left[0 < \tau < T + \frac{\varepsilon u_0}{c_0^2} x \right],$$

$$\frac{u}{u_0} = \frac{2T - \tau}{T} \left[1 + \frac{\varepsilon u_0}{c_0^2} x \right]^{-1} \quad \left[T - \frac{\varepsilon u_0}{c_0^2} x < \tau < 2T \right]$$



К задаче 5.1.11

Решение в виде простой волны справедливо до расстояний

$$\frac{x}{x_p} = \frac{c_0^2 T}{\varepsilon u_0},$$

пока передний фронт импульса не станет вертикальным. Процесс искажения профиля для $u_0 > 0$ показан на рисунке.

5.1.12. Найти спектр простой волны в нелинейной среде, если на входе волна задана как $u(0, \tau) = u_0 \Phi(\omega \tau)$, где Φ — функция, периодическая по своему аргументу с периодом $T = 2\pi$.

Решение. Вычислим коэффициенты C_n разложения в ряд Фурье неявной функции — решения (8.1) уравнения простых волн (5.3):

$$\frac{u}{u_0} = \Phi \left[\omega \tau + z \frac{u}{u_0} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z) \exp(in\omega \tau). \quad (1)$$

Здесь безразмерное расстояние $z = (\varepsilon/c_0^2)\omega u_0 x$. Коэффициенты разложения равны

$$C_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_T \Phi \left[\omega \tau + z \frac{u}{u_0} \right] \exp(-in\omega \tau) d(\omega \tau).$$

Интегрируя один раз по частям, получаем

$$C_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_T e^{-in\omega \tau} d\Phi = \frac{1}{2\pi i n} \int_T e^{-in[\xi - z\Phi(\xi)]} d\Phi(\xi). \quad (2)$$

Здесь мы перешли к переменной $\xi = \omega \tau + zu/u_0$, откуда $\omega \tau = \xi - z\Phi(\xi)$, и наш интеграл теперь содержит явную функцию от ξ . Интегрируя второй раз по частям, получаем ответ:

$$C_n(z) = -\frac{i}{2\pi n z} \int_{-\pi}^{\pi} \left[e^{inz\Phi(\xi)} - 1 \right] e^{-in\xi} d\xi. \quad (3)$$

При $z \rightarrow 0$, разлагая экспоненту под интегралом (3) в ряд, получаем очевидный результат линейного приближения

$$C_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\xi) e^{-in\xi} d\xi = C_n(z=0) = \text{const},$$

т.е. гармоники не взаимодействуют между собой, коэффициенты C_n в среде равны своим исходным значениям.

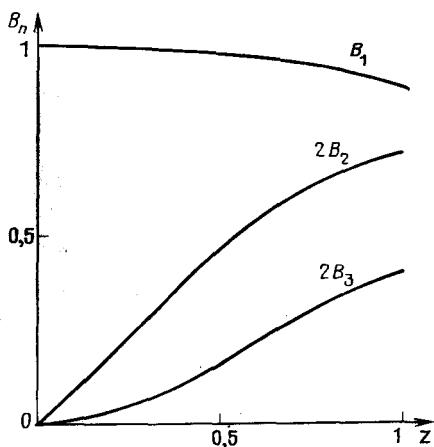
5.1.13. Пользуясь ответом предыдущей задачи (см. (12.3)), найти зависимости амплитуд гармоник от $z = x/x_p$ при задании на входе в нелинейную среду гармонического сигнала $u(0, \tau) = u_0 \sin(\omega\tau)$. Найти степенные законы роста амплитуд для $z \ll 1$.

Решение. Воспользуемся математическим тождеством теории бесселевых функций

$$\exp(iz \cos \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(z) \exp(ik\varphi). \quad (1)$$

С помощью тождества (1) экспоненту под интегралом (12.3) представим как

$$\exp(inz \sin \xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(nz) \exp(ik\xi). \quad (2)$$



К задаче 5.1.13

Интеграл (12.3) после этого легко вычисляется и в результате имеем

$$C_n(z) = -\frac{i}{nz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(nz) \delta_{nk} = -\frac{i}{nz} J_n(nz).$$

Определяя действительные коэффициенты A_n и B_n разложения в ряд Фурье при $\cos(n\omega\tau)$ и $\sin(n\omega\tau)$:

$$A_n(z) = C_n + C_n^* = 0, \quad B_n(z) = i(C_n - C_n^*) = \frac{2J_n(nz)}{nz}$$

(звездочка есть знак комплексного сопряжения) найдем известное решение Бесселя—Фубини:

$$\frac{u}{u_0} = \sin\left[\omega\tau + z \frac{u}{u_0}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n(nz)}{nz} \sin(n\omega\tau). \quad (3)$$

Зависимости амплитуд B_n гармоник от расстояния z приведены на рисунке. Используя первые члены разложения функций Бесселя в ряд $J_n(x) \approx (x/2)^n/n!$, получим

$$B_n(z) \approx (nz/2)^{n-1}/n!, \quad n > 1. \quad (4)$$

5.1.14. Рассмотреть взаимодействие мощного низкочастотного возмущения со слабым высокочастотным сигналом: $u(0, t)/u_0 = \sin(\omega t) + m \sin(N\omega t)$ ($m \ll 1$, натуральное число $N \gg 1$). Как изменяется в пространстве амплитуда слабого сигнала?

Решение. Из формулы (12.3) с учетом малости m получаем

$$C_N(z) \approx \frac{m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\pi} \sin(N\xi) e^{inz \sin \xi} e^{-in\xi} d\xi = -i \frac{m}{2} J_0(Nz). \quad ((1))$$

Отсюда $A_N = 0$, $B_N = mJ_0(Nz)$. Решение (1) справедливо при $z < 1$, в области до образования разрыва. Поскольку $N \gg 1$, аргумент функции Бесселя в (1) может быть большой величиной; при этом амплитуда слабого сигнала будет осциллировать в пространстве, постепенно затухая. Этот эффект нелинейного подавления высокочастотного сигнала при наложении интенсивного низкочастотного возмущения (например, шума) представляет интерес для ряда приложений.

5.1.15. Пользуясь методом последовательных приближений, проанализировать вырожденное параметрическое взаимодействие в простых волнах. Для исходного возмущения $u/u_0 = \sin(2\omega t) + m \sin(\omega t + \varphi)$, $m \ll 1$, определить, при каком сдвиге фаз φ слабый сигнал усиливается, а при каком φ он подавляется.

Решение. Важный для практики нелинейный эффект — параметрическое усиление слабых сигналов в поле интенсивной волны накачки. Если частота накачки 2ω , а сигнала ω , процесс называется вырожденным; он чувствителен к сдвигу фазы φ между этими двумя волнами. В задаче 5.1.6 выписаны уравнения (1) первого и второго приближения. Напоминаем: $u^{(1)}$ — это исходное возмущение, в котором вместо t стоит $\tau = t - x/c_0$; $u^{(2)}$ — это решение второго приближения, которое нужно найти. Сохраняя в правой части уравнения для $u^{(2)}$ фурье-компоненту на частоте сигнала ω , находим

$$\partial u^{(2)} / \partial x = -(\epsilon/2c_0^2) m \omega u_0^2 \sin(\omega \tau - \varphi).$$

Решение на частоте сигнала:

$$\frac{1}{u_0} (u^{(1)} + u^{(2)}) = m \sin(\omega \tau + \varphi) - \frac{m}{2} z \sin(\omega \tau - \varphi).$$

Отсюда видим, что амплитуда сигнала при $z \ll 1$ ведет себя так:

$$2|C_n(z)| = m \left[\left(1 - \frac{z}{2}\right)^2 \cos^2 \varphi + \left(1 + \frac{z}{2}\right)^2 \sin^2 \varphi \right]^{1/2} \approx m \left[1 - z \cos(2\varphi) \right]^{1/2}.$$

Если сдвиг фаз φ изменяется от 0 до π , то усиление происходит в области $\pi/4 < \varphi < 3\pi/4$, причем наиболее эффективно

сигнал усиливается при $\varphi = \pi/2$. В областях $0 \leq \varphi < \pi/4$, $3\pi/4 < \varphi \leq \pi$ сигнал подавляется, наиболее эффективно — при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Полезно решить эту задачу другим способом, используя не метод последовательных приближений, а спектральное представление (2.3) решения уравнения простых волн.

5.1.16. Найти фурье-образ простой волны $u(x, \tau)$

$$C(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau, \quad (1)$$

считая, что возмущение исчезает при $\tau \rightarrow \pm\infty$.

Решение. Используя решение (8.1), для фурье-образа простой волны получим

$$C(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left[\tau + \frac{\varepsilon}{c_0^2} ux\right] \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (2)$$

Как и для задачи 5.1.12, в которой рассмотрен периодический сигнал, здесь нужно перейти к переменной $\xi = \tau + (\varepsilon/c_0^2) ux$. Тогда $\tau = \xi - (\varepsilon/c_0^2) x \Phi(\xi)$ и для (2) имеем явное выражение

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) \left[1 - \frac{\varepsilon}{c_0^2} x \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi}\right] \exp\left\{-i\omega\left[\xi - \frac{\varepsilon}{c_0^2} x \Phi(\xi)\right]\right\} d\xi. \quad (3)$$

Более удобную форму записи можно получить, интегрируя (3) дважды по частям и учитывая, что $\Phi(\pm\infty) = 0$:

$$C(x, \omega) = \frac{1}{2\pi i (\varepsilon/c_0^2) \omega x} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[i \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega x \Phi(\xi)\right] - 1 \right\} e^{-i\omega\xi} d\xi. \quad (4)$$

При $x \rightarrow 0$ из (4) следует, что

$$C(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi = C_0(\omega) \quad (5)$$

— это фурье-образ исходного возмущения.

5.1.17. Исходя из решения (4) предыдущей задачи, найти универсальное поведение фурье-образа в области низких частот. Показать, что если при $\omega \rightarrow 0$ $C_0(\omega) \sim \omega^n$ и $n > 1$, то из-за нелинейных взаимодействий между спектральными компонентами в области низких частот ($\omega \rightarrow 0$) формируется универсальная асимптотика спектра.

Решение. В области низких частот экспоненту в решении можно разложить в ряд. Ограничившись членами, квадратичными по ω , придем к выражению

$$C \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi + \frac{i}{4\pi} \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega x \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi. \quad (1)$$

Учитывая свойство преобразования Фурье

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} C_0(\Omega) C_0(\omega-\Omega) d\Omega,$$

приведем выражение (1) к виду

$$C(x, \omega) = C_0(\omega) + \frac{i}{2} \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega x \int_{-\infty}^{\infty} C_0(\Omega) C_0(\omega-\Omega) d\Omega.$$

Отсюда следует, что для исходных спектров вида $C_0(\omega) \sim \omega^n$ ($n > 1$) спектр волны на низких частотах в нелинейной среде описывается универсальным выражением

$$|C(x, \omega)| \approx \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \Gamma \omega, \quad \Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |C_0(\Omega)|^2 d\Omega. \quad (2)$$

5.1.18. Найти составляющие спектра $C_{\text{вз}}(x, \omega)$, возникающие за счет взаимодействия интенсивной волны накачки $u_1(t)$ и слабого сигнала $u_2(t)$:

$$u(x=0, t) = \Phi(t) = u_1 + u_2, \quad u_1 = u_0 \sin(\omega_0 t), \quad u_2 = b \sin(\Omega t). \quad (1)$$

Решение. Пренебрегая самовоздействием слабого сигнала, экспоненту в формуле (6.4) разложим в ряд по u_2 и ограничимся линейным членом:

$$C(x, \omega) = \frac{1}{2\pi i(\varepsilon/c_0^2)} \omega x \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[i \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega x u_1(\xi) \right] - 1 \right\} e^{-i\omega\xi} d\xi + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_2(\xi) \exp \left[i \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega x u_1(\xi) \right] e^{-i\omega\xi} d\xi. \quad (2)$$

Здесь первое слагаемое описывает фурье-образ волны накачки, второе — спектр $C_{\text{вз}}(x, \omega)$, рождающийся в результате нелинейного взаимодействия сигнала и накачки. Используя соотношение (13.1) для бесселевых функций и фильтрующие свойства δ -функции, из (2) получим

$$C_{\text{вз}}(x, \omega) = i \frac{b}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ J_k \left[\frac{\varepsilon}{c_0^2} (k\omega_0 - \Omega) u_0 x \right] \delta(\omega - \Omega + k\omega_0) - \right. \\ \left. - J_k \left[\frac{\varepsilon}{c_0^2} (k\omega_0 + \Omega) u_0 x \right] \delta(\omega + \Omega + k\omega_0) \right\}. \quad (3)$$

5.1.19. Используя результат предыдущей задачи, рассмотреть случай низкочастотной накачки (данная задача есть обобщение задачи 5.1.14). Описать спектр сигнала на разных стадиях взаимодействия и оценить ширину спектра сигнала.

Решение. При $\omega_0 \ll \Omega$ нелинейное взаимодействие приводит к модуляции высокочастотного сигнала и появлению составляющих на частотах $\omega = \pm\Omega + k\omega_0$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) вблизи частоты

сигнала. Для фурье-образа (18.3) при $k\omega_0 \ll \Omega$ получим

$$C_{\text{вз}}(z, \omega) = i \frac{b}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ J_k \left[\frac{\Omega}{\omega_0} z \right] \delta(\omega - \Omega + k\omega_0) - J_k \left[\frac{\Omega}{\omega_0} z \right] \delta(\omega + \Omega + k\omega_0) \right\}, \quad (1)$$

где $z = (\epsilon/c_0^2) \omega_0 u_0 x = x/x_p$. Легко видеть, что (1) описывает спектр сигнала с гармонической фазовой модуляцией:

$$u_2(x, \tau) = b \sin \left[\Omega \tau + \frac{\epsilon}{2} \Omega x u_0 \sin(\omega_0 \tau) \right]. \quad (2)$$

Следовательно, при $\Omega \gg \omega_0$ взаимодействие можно интерпретировать как низкочастотную фазовую модуляцию сигнала, производимую мощной волной накачки. По мере распространения волн глубина модуляции возрастает. При $(\Omega/\omega_0)z \ll 1$ в спектре преобладают две гармоники: $\omega = \Omega \pm \omega_0$. При $(\Omega/\omega_0)z \gg 1$ спектр существенно уширяется. Используя асимптотики функций Бесселя при больших значениях аргумента, можно оценить эффективное число гармоник в спектре (1): $k_* \approx (\Omega/\omega_0)z$. Соответствующая ширина спектра $\Delta\omega \sim \Omega z \gg \omega_0$.

5.2. Плоские нелинейные волны с разрывами

5.2.1. Найти максимальное расстояние — границу области, в которой справедливо решение (1.8.1) уравнения простых волн.

Решение. В задаче 5.1.8 вычислена производная

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{(\epsilon/c_0^2)x\Phi'}{1 - (\epsilon/c_0^2)x\Phi'}. \quad (1)$$

Максимальное расстояние x_p , как видно из (1), следует находить из условия

$$1 - (\epsilon/c_0^2)x\Phi' = 0. \quad (2)$$

Обращение в нуль знаменателя (2) в формуле (1) отвечает тому, что в некоторой точке профиля на расстоянии x_p производная (1) обращается в бесконечность — касательная в этой точке становится вертикальной; иными словами, начинается процесс образования разрыва в профиле простой волны. Искомая точка профиля соответствует максимальному значению функции Φ' , т.е. находится из условия $\Phi'' = 0$. Таким образом, условие $\Phi'' = 0$ и условие (2) позволяют решить поставленную задачу.

На практике удобно воспользоваться тем, что решение уравнения простых волн может быть записано в явном виде (см. (1.10.1)) относительно $\tau(x, u)$:

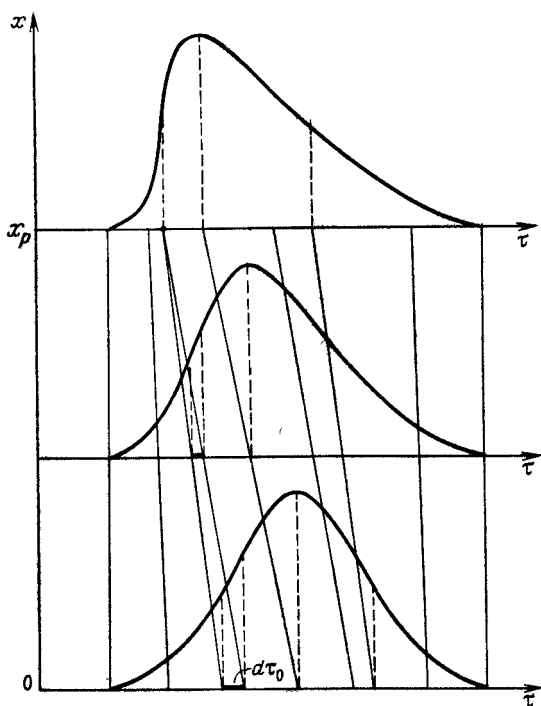
$$\tau = \Phi^{-1}(u) - (\epsilon/c_0^2)ux. \quad (3)$$

Тогда указанные условия: а) на расстоянии $x = x_p$ возникает вертикальная касательная к кривой $u(x_p, \tau)$; б) разрыв образуется в точке перегиба кривой $u(x_p, \tau)$ — приводят к уравнениям:

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} = 0, \quad (4)$$

из которых находится расстояние x_p .

5.2.2. Решая уравнение простой волны (1.5.3) методом характеристик, дать наглядную иллюстрацию полученному в задаче 5.2.1 условию однозначности решения. Определить, какой участок профиля исходного возмущения $u(x=0, \tau) = \Phi(\tau)$ "опрокинется" первым и на каком расстоянии от входа это произойдет.



К задаче 5.2.2

Решение. Система характеристических уравнений для уравнения в частных производных (1.5.3) имеет вид

$$\frac{d\tau}{dx} = -\frac{\varepsilon}{c_0^2} u, \quad \frac{du}{dx} = 0 \quad (1)$$

$(\tau(x=0) = \tau_0, \quad u(x=0, \tau_0) = \Phi(\tau_0))$. Здесь $\tau_0(u)$ — точка в со-
проводжающей системе координат, из которой выходит характе-

ристика для возмущения u (см. рисунок). Решение системы (1)

$$\tau = \tau_0 - \frac{\varepsilon}{c_0^2} \Phi(\tau_0) x \quad (2)$$

описывает семейство прямых на плоскости τx с различным наклоном, зависящим от $u = \Phi(\tau_0)$. Заметим, что выражение (2) аналогично выражению (1.3), записанному в других обозначениях. Временной интервал между соседними характеристиками согласно (2) изменяется так:

$$d\tau = d\tau_0 \left[1 - \frac{\varepsilon}{c_0^2} \Phi'(\tau_0) x \right]. \quad (3)$$

Следовательно, опрокидывание волны произойдет тогда, когда характеристики в первый раз пересекутся (см. рисунок) и $d\tau$ обратится в нуль. Это произойдет на расстоянии

$$x_p = \frac{c_0^2}{\varepsilon \max \Phi'(\tau_0)}. \quad (4)$$

Окрестность точки профиля, где достигается максимум производной Φ' , "опрокинется" первой.

5.2.3. Найти расстояние, на котором образуется разрыв в простой волне, заданной на входе в нелинейную среду в виде однополярного импульса $u(x=0, t) = u_0 \exp(-t^2/t_0^2)$.

Решение. Способ 1. Запишем решение уравнения простых волн для данного однополярного импульса как явную функцию $\tau(x, u)$:

$$\tau = -t_0 \sqrt{\ln(u_0/u)} - \varepsilon u x / c_0^2.$$

Здесь перед корнем взят знак минус, поскольку разрыв образуется всегда на переднем фронте (в данном случае при $\tau < 0$).

Требуем выполнения условий (1.4):

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{t_0}{2u} \left[\ln \frac{u_0}{u} \right]^{-1/2} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} x = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} = -\frac{t_0}{2u^2} \left[\ln \frac{u_0}{u} \right]^{-1/2} + \frac{t_0}{4u^2} \left[\ln \frac{u_0}{u} \right]^{-3/2} = 0. \quad (2)$$

Из (2) находим точку профиля, в которой образуется разрыв: $u = u_0/\sqrt{e}$. Подставляя это значение в (1), находим

$$x_p = \sqrt{\frac{e}{2}} \frac{c_0^2 t_0}{\varepsilon u_0}.$$

Способ 2. Следуя схеме, описанной в задаче 5.2.2, вычислим производную от формы исходного возмущения:

$$\Phi'(\tau_0) = -\frac{2\tau_0}{t_0^2} u_0 \exp\left[-\frac{\tau_0^2}{t_0^2}\right]. \quad (3)$$

Максимум функции (3) достигается при $\tau_0 = t_0/\sqrt{2}$ и равен $\sqrt{2}u_0/(\sqrt{e}t_0)$. Из формулы (2.4) при этом значении $\max \Phi'(\tau_0)$ сразу получаем результат для x_p , совпадающий с выражением, полученным первым способом.

5.2.4. Найти координату образования разрывов в гармонической исходной волне $u(x=0, t) = u_0 \sin(\omega t)$. Определить, в каких точках профиля образуется разрыв.

Ответ. Разрывы образуются в точках $\omega t = 2\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) на расстоянии $x_0 = c_0^2/(\epsilon \omega u_0)$.

5.2.5. На каком расстоянии от излучателя мощного ультразвука в воде образуется разрыв, если интенсивность волны $I = 10$ Вт/см², частота $f = 1$ МГц? Параметры воды: $\rho_0 = 1$ г/см³, $c_0 = 1,5 \cdot 10^5$ см/с, $\epsilon = 4$.

Ответ. Используя результат задачи 5.2.4, получим оценку

$$x_p = \frac{c_0^2}{2\pi\epsilon f} \left[\frac{c_0 \rho_0}{2I} \right]^{1/2} \approx 25 \text{ см.}$$

5.2.6. Какой должна быть интенсивность волны в воде на частоте $f = 200$ кГц, чтобы разрыв образовался на расстоянии 10 м?

Ответ. $I = 0,5 c_0^5 \rho_0 (2\pi\epsilon f x_p)^{-2} \approx 0,15$ Вт/см².

5.2.7. Оценить амплитуду колебательной скорости, смещения, ускорения и число Маха в двух предыдущих задачах.

Ответ. Для задачи 5.2.5 $u_0 = (2I/c_0 \rho_0)^{1/2} \approx 36$ см/с, $\xi_0 = u_0/\omega \approx 6 \cdot 10^{-6}$ см, $a_0 = \omega u_0 \approx 2 \cdot 10^8$ см/с², $M = u_0/c_0 \approx 2,4 \times 10^{-4}$; для задачи 5.2.6 $u_0 \approx 4,5$ см/с, $\xi_0 \approx 4 \cdot 10^{-6}$ см, $a_0 \approx 5 \cdot 10^6$ см/с², $M \approx 3 \cdot 10^{-5}$. Видно, что даже в мощных ультразвуковых полях смещения частиц очень малы (порядка молекулярных масштабов), зато достигаются огромные ускорения (до $10^6 g$, g — ускорение свободного падения). Числа Маха малы, и это факт уже использован для упрощения нелинейных уравнений в задачах 5.1.2 и 5.1.5

5.2.8. Выразить длину образования разрыва плоской монохроматической волны в воздухе ($\gamma = 1,4$) через уровень звукового давления N и частоту f . Определить число Маха и длину образования разрыва для $N = 140$ дБ (двигатель тяжелого реактивного самолета) и $f = 3300$ Гц.

Решение. В атмосферной акустике принято характеризовать интенсивность звука уровнем среднеквадратичного давления N (дБ) относительно $p_* = 2 \cdot 10^{-5}$ Па. Для пикового значения

давления p' при этом имеем $p' = \sqrt{2} p_* \cdot 10^{N/20}$. Длина образования разрыва плоской монохроматической волны определяется соотношением (1.6.3), где $M = u_0/c_0$, u_0 — пиковое значение колебательной скорости. Учитывая, что $c_0^2 = \gamma p_0/\rho_0$, где ρ_0 — плотность воздуха, $p_0 \approx 10^5$ Па — атмосферное давление, для числа Маха имеем

$$M = p'/(c_0^2 \rho_0) = p' / (\gamma p_0).$$

Следовательно,

$$M = \sqrt{2\gamma} \frac{p_*}{p_0} \cdot 10^{N/20} \approx 2,8 \cdot 10^{-3}, \quad x_p = \frac{f}{c_0} \frac{\gamma}{\gamma+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{p_0}{p_*} \cdot 10^{-N/20} \approx 6 \text{ м.}$$

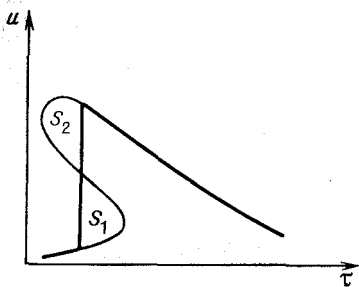
5.2.9. Исходя из закона сохранения количества движения, переносимого простой волной, предложить простое геометрическое построение, устраняющее неоднозначность формы профиля с "перехлестом" (см. рисунок), образующимся при $x > x_p$.

Решение. Убедимся в том, что количество движения в простой волне, занимающей ограниченную область пространства ($u \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$), не зависит от x для $x < x_p$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 u \, d\tau = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tau + \frac{\varepsilon}{c_0^2} u x \right] d\tau = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) d\left[\xi - \frac{\varepsilon}{c_0^2} x \Phi(\tau) \right] = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau) d\xi.$$

Геометрический смысл закона сохранения — постоянство площади между кривой $u = \Phi(x, \tau)$, описывающей профиль волны, и осью τ .

После образования "перехлеста" ($x > x_p$) эта площадь также сохраняется, поскольку область среды, занятая волновым движением, остается замкнутой (на нее не действуют внешние силы). Следовательно, в неоднозначном профиле волны разрыв следует проводить так, чтобы отсекаемые площади S_1 и S_2

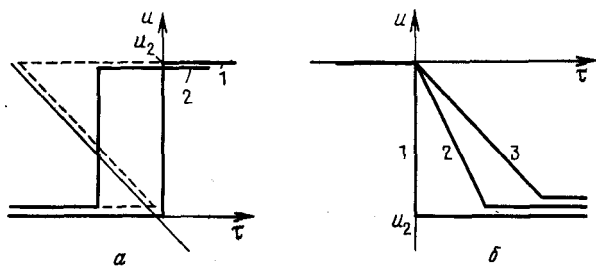


К задаче 5.2.9

(см. рисунок) были равны. Действительно, площадь S_1 "добавляется" к профилю, а площадь S_2 "отторгается" от него; при условии $S_1 = S_2$ площадь под полученной кривой оказывается равной исходному значению $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau) d\tau$.

5.2.10. Показать, что ударная волна сжатия — скачок между двумя постоянными значениями u_1 и u_2 (причем $u_1 > u_2$) — устойчива, т.е. не изменяет своей формы при распространении.

Решение. Пусть для простоты $u_1 = 0$, $u_2 > 0$. В исходной (при $x = 0$) волне разрыв занимает в сопровождающей системе координат положение $\tau = 0$. На расстоянии $x > 0$ искаженный профиль строится графическим методом, описанным в задаче 5.1.10. Очевидно, что профиль становится неоднозначным при сколь угодно малых x (штриховая линия на рисунке а). Эта неоднозначность устраняется в силу "равенства площадей" (см. задачу 5.2.9). В результате получаем скачок такой же формы и величины, но с фронтом, несколько смещенным вперед.



К задаче 5.2.10

Это значит, что волна сжатия устойчива. Смещение фронта в сопровождающей системе координат $\tau = t - x/c_0$ свидетельствует о том, что положительный (относительно невозмущенного уровня $u_1 = 0$) скачок u_2 движется со сверхзвуковой скоростью $c = c_0 + \epsilon u_2/2$ тем быстрее, чем больше перепад u_2 в ударной волне.

Интересно, что ударная волна разрежения ($u_1 < u_2$) неустойчива — при распространении ширина ее фронта растет (см. рисунок б). Чтобы в этом убедиться, достаточно воспользоваться графическим методом задачи 5.1.10. Равенства площадей здесь не требуется.

5.2.11. Используя правило равенства площадей, определить положение и амплитуду разрыва $u_p(x)$ синусоидального исходного возмущения $u(x=0, t) = \Phi(t) = u_0 \sin(\omega t)$. Найти расстояние x_* , при котором величина $u_p(x)$ максимальна, и установить асимптотический закон ее изменения при больших x .

Ответ. В бегущей системе координат ($\tau = t - x/c_0$) разрыв на каждом из периодов занимает фиксированное положение при $\omega\tau = 2\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), а его амплитуда определяется как ненулевой корень уравнения $\arcsin(u_p/u_0) = z(u_p/u_0)$, где

$z = x/x_p = (\epsilon/c_0^2) \omega u_0 x$. Максимальное значение $u_p(x_*) = u_0$ достигается при $z = z_* = \pi/2$. Асимптотический закон убывания $u_p/u_0 = \pi/(1+z)$ хорошо выполняется при $z > 2+3$. Интересно, что при $z \gg 1$ $u_p \approx c_0^2/(\epsilon \omega x)$ и не зависит от амплитуды входного сигнала.

5.2.12. Пользуясь результатами решения предыдущей задачи, найти форму профиля, синусоидального на входе, на расстояниях $z = x/x_p > 2+3$. Вычислить спектральный состав и среднюю плотность энергии $E = \rho_0 \overline{u^2} = \rho_0 T^{-1} \int_0^T u^2(x, \tau) d\tau$.

Ответ. Волна приобретает пилообразный профиль

$$\frac{u}{u_0} = \frac{1}{1+z} (-\omega\tau + \pi \operatorname{sgn} \tau), \quad -\pi \leq \omega\tau \leq \pi. \quad (1)$$

Ее спектр равен

$$\frac{u}{u_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(1+z)} \sin(n\omega\tau). \quad (2)$$

Из-за образования разрывов и их нелинейного затухания (тем более сильного, чем больше u_0) амплитуды гармоник уменьшаются по степенному закону, причем $A_n \sim n^{-1}$. Плотность энергии уменьшаются как $E = \pi^2 u_0^2 / [3(1+z)]^2$ и при $z \gg 1$ не зависит от амплитуды u_0 исходного возмущения.

5.2.13. Используя графические построения задач 5.1.10 и 5.2.9, проследить за эволюцией прямоугольного на входе импульса. $\Phi(\tau) = A$ при $-T < \tau < 0$ и $\Phi(\tau) = 0$ вне этого интервала. Найти асимптотическую форму импульса при $x \rightarrow \infty$.

Ответ. Начальная форма импульса и его форма на трех характерных расстояниях показаны на рисунке. При $x(\epsilon/c_0^2)A/T \gg 1$ импульс приобретает универсальную треугольную форму с наклоном, не зависящим от A и T :

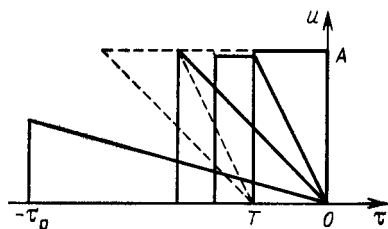
$$u = -(c_0^2/\epsilon x) (-\tau_p < \tau < 0),$$

$$u = 0 \quad (\tau < -\tau_p, \tau > 0).$$

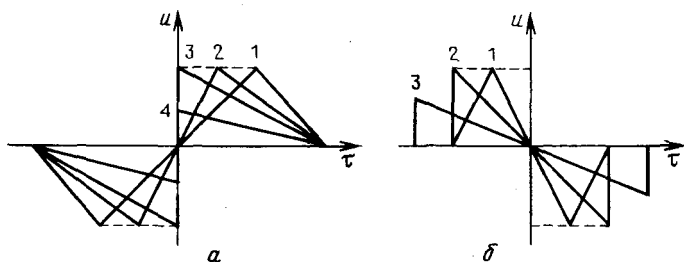
Здесь $\tau_p(x) = [2AT(\epsilon/c_0^2)x]^{1/2}$ — текущая длительность импульса.

Нетрудно проверить, что при любых x площадь импульса равна AT , что отвечает сохранению количества движения

5.2.14. Проанализировать графически процесс нелинейной трансформации профиля двуполярного звукового импульса, состоящего из двух симметричных треугольных импульсов (см. за-



К задаче 5.2.13



К задаче 5.2.14

дачу 5.1.11) длительностью $2T_0$ и площадью S в случаях: а) за фазой разрежения следует фаза сжатия; б) за фазой сжатия следует фаза разрежения.

Ответ. Как показано на рисунке, в случае а) импульс трансформируется в так называемую S -волну неизменной длительности $2T_0$; в случае б) импульс превращается в N -волну, длительность которой $2T(x)$ растет с увеличением x .

5.2.15. В условиях предыдущей задачи, используя результаты эволюции "линейного профиля" (см. задачу 5.1.9), найти асимптотическое поведение фурье-образов при $(\epsilon/c_0^2)Sx/T_0^2 \gg 1$. Обсудить особенности структуры спектров в области высоких и низких частот.

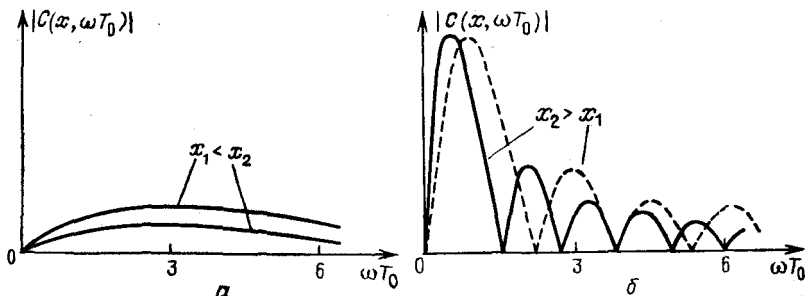
Ответ. Спектр S -волны (случай а)):

$$|C(x, \omega)| = \frac{2T_0^2}{\omega T_0} \left[1 - \frac{\sin(\omega T_0)}{\omega T_0} \right] \frac{c_0^2}{\epsilon x}. \quad (1)$$

Спектр N -волны (случай б) является автомодельным:

$$|C(x, \omega)| = \frac{2T^2}{\omega T} \left| \cos(\omega T) - \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} \right| \frac{c_0^2}{\epsilon x}, \quad T = \left[2S \frac{c_0^2}{\epsilon x} \right]^{1/2}. \quad (2)$$

Зависимости (1), (2) изображены на рисунке. В области высоких частот спектры спадают по степенному закону, что связано



К задаче 5.2.15

с наличием разрывов. Для S -импульса все составляющие спектра уменьшаются как $1/x$. Для N -импульса максимум спектра постепенно сдвигается в сторону низких частот; на высоких частотах спектральные составляющие уменьшаются как $1/\sqrt{x}$, а на низких — как $\omega\sqrt{x}$. Рост спектральной плотности на низких частотах связан с параметрической подкачкой энергии при нелинейном взаимодействии высокочастотных гармоник.

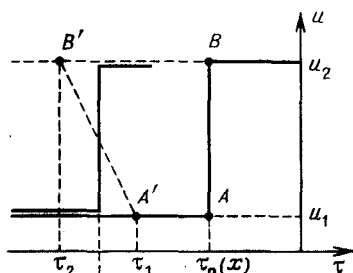
5.2.16. Получить систему уравнений, описывающих эволюцию профиля простой волны, содержащей разрыв.

Решение. Получим дифференциальное уравнение, описывающее движение ударного фронта в сопровождающей системе координат. Рассмотрим разрыв, на расстоянии x имеющий координату $\tau_p(x)$ (см. рисунок). Колебательная скорость непосредственно перед фронтом (точка A) есть u_1 , непосредственно за фронтом (точка B) — u_2 . Когда расстояние увеличится на Δx , точка A перейдет в A' , координата которой

$$\tau_1 = \tau_p(x) - (\varepsilon/c_0^2)u_1 \Delta x,$$

точка B — в B' с координатой

$$\tau_2 = \tau_p(x) - (\varepsilon/c_0^2)u_2 \Delta x.$$



К задаче 5.2.16

Из равенства площадей (см. задачу 5.2.9) следует, что новая координата разрыва

$$\tau_p(x+\Delta x) = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) = \tau_p(x) - \frac{\varepsilon}{2c_0^2}(u_1 + u_2) \Delta x. \quad (1)$$

Переходя в (1) к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим уравнение

$$\frac{d\tau_p}{dx} = -\frac{\varepsilon}{2c_0^2}(u_1 + u_2). \quad (2)$$

Таким образом, скорость перемещения фронта в сопровождающей системе координат зависит только от значений u_1 и u_2 возмущения на разрыве, которые, вообще говоря, зависят от расстояния. Поскольку u_1 и u_2 принадлежат не только разрыву, но одновременно и профилю простой волны, для них справедливо решение (1.3), т.е.

$$\tau_p(x) = \Phi_1^{-1}(u_1) - \frac{\varepsilon}{c_0^2}u_1 x, \quad (3)$$

$$\tau_p(x) = \Phi_2^{-1}(u_2) - \frac{\varepsilon}{c_0^2}u_2 x. \quad (4)$$

Здесь функция Φ_1 описывает профиль простой волны перед разрывом, Φ_2 — за разрывом ($\Phi_{1,2}^{-1}$ — обратные к $\Phi_{1,2}$ функции). Три уравнения (2)–(4) для трех неизвестных $\tau_p(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$ образуют полную систему для решения поставленной задачи.

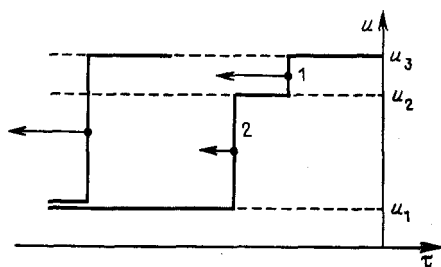
5.2.17. Воспользовавшись уравнениями (2)–(4) предыдущей задачи, найти изменение с расстоянием амплитуды скачка и длительности треугольного импульса с ударной волной на переднем фронте. При $x = 0$ импульс задан так: $u/u_0 = 1 - \tau/T_0$ при $0 < \tau < T_0$, $u = 0$ при всех остальных τ .

Ответ. Величина скачка уменьшается, длительность растет:

$$\frac{u_2(x)}{u_0} = \left[1 + \frac{\varepsilon u_0}{c_0^2 T_0} x\right]^{-1/2}, \quad T(x) = T_0 \left[1 + \frac{\varepsilon u_0}{c_0^2 T_0} x\right]^{1/2}. \quad (1)$$

Поскольку количество движения сохраняется, площадь импульса $u_2(x)T(x) = u_0 T_0 = \text{const}$.

5.2.18. Показать, что две попутные слабые ударные волны сталкиваются по закону абсолютно неупругого удара двух частиц; при этом аналогом массы m частицы является амплитуда скачка $u_2 - u_1$, аналогом скорости частицы v — скорость



К задаче 5.2.18

$$d\tau_p/dx = -(\varepsilon/2c_0^2)(u_1 + u_2)$$

движения фронта в сопровождающей системе координат.

Решение. Пользуясь методами графического анализа, показываем, что две

ударные волны — скачки возмущений $u_2 - u_1$ и $u_3 - u_2$ (см. рисунок) — сливаются и образуют одну волну с перепадом $u_3 - u_1$. Тривиальное соотношение

$$u_3 - u_1 = (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2)$$

есть аналог закона сохранения массы частиц: $m' = m_1 + m_2$. Аналогом закона сохранения количества движения $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m' v'$ будет соотношение

$$(u_2 - u_1) \frac{\varepsilon}{2c_0^2} (u_1 + u_2) + (u_3 - u_2) \frac{\varepsilon}{2c_0^2} (u_2 + u_3) = (u_3 - u_1) \frac{\varepsilon}{2c_0^2} (u_1 + u_3),$$

которое представляет собой тождество.

5.2.19. По невозмущенной среде распространяется слабая ударная волна, за фронтом которой форма простой волны описы-

вается функцией $u = \Phi(\tau + \varepsilon u x / c_0^2)$. Найти зависимость "амплитуды" скачка от расстояния на фронте ударной волны.

Решение. Воспользуемся уравнениями задачи 5.2.18:

$$\tau_p = \Phi^{-1}(u_2) - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u_2 x, \quad \frac{d\tau}{d\tau_p} = -\frac{\varepsilon}{c_0^2} u_2. \quad (1)$$

Здесь $\tau_p(x)$ описывает положение разрыва в сопровождающей системе координат, $u_2(x)$ — "амплитуду" скачка. Исключая из (1) $\tau_p(x)$ и считая $x = x(u_2)$, получим нелинейное уравнение

$$\frac{1}{2} u_2 \frac{dx}{du_2} + x = \frac{c_0^2}{\varepsilon} \frac{d}{du_2} \Phi^{-1}(u_2). \quad (2)$$

Решая (2), найдем общее выражение

$$\frac{\varepsilon}{2c_0^2} x(u_2) = \frac{1}{u_2^2} \int^{u_2} u d\Phi^{-1}(u). \quad (3)$$

Константа интегрирования может быть выбрана, например, по начальной координате x_p образования разрыва (см. задачи 5.2.1–5.2.6): $x(u_2^*) = x_p$, где $u_2^* = u_2(x_p)$ — начальная амплитуда скачка (обычно равная нулю, если только передний фронт исходной простой волны не является отрезком прямой).

5.2.20. Пользуясь формулой (3) предыдущей задачи, найти изменение "амплитуды" $u_2(x)$ разрыва при распространении одиночного импульса, равного $u = u_0 \sin(\omega\tau)$ при $0 \leq \omega\tau \leq \pi$ и $u = 0$ при всех остальных $\omega\tau$.

Решение. В данной задаче $\Phi^{-1} = \omega^{-1} \arcsin(u/u_0)$, и формула (19.3) принимает вид

$$\frac{\varepsilon\omega}{2c_0^2} x = \frac{1}{u_2^2} \int^{u_2} \frac{u}{u_0} \left[1 - \frac{u^2}{u_0^2}\right]^{-1/2} du.$$

Вычисляя интеграл, найдем $V^{-2} \left[\sqrt{1-V^2} + c \right] = -z/2$, где $V = u_2(x)/u_0$, $z = (\varepsilon/c_0^2)\omega u_0 x$, c — константа интегрирования. Как несложно вычислить (см. задачу 5.2.4), в данной задаче $z_p = 1$ и разрыв начинает формироваться от нулевого по "амплитуде" скачка $V(z_p=1) = 0$. Поэтому константа $c = -1$. Таким образом, "амплитуда" ударной волны изменяется в пространстве по закону $u_2(x) = 0$ при $x < x_p$, и

$$u_2(x)/u_0 = 2\sqrt{z-1}/z \quad (1)$$

при $z > z_p = 1$ (или $x > x_p$). Видно, что амплитуда разрыва при $1 < z < 2$ увеличивается, достигает при $z = 2$ максимального значения $u_2 = u_0$, а затем (в области $z > 2$) убывает как $\sim 1/\sqrt{z}$.

5.2.21. Найти изменение длительности одиночного импульса — полупериода синусоиды (см. предыдущую задачу).

Решение. Подставляя решение (20.1) в уравнение движения разрыва (19.1), находим

$$\frac{d(\omega\tau_p)}{dz} = -\frac{V}{2} = -\frac{\sqrt{z-1}}{z}, \quad \omega\tau_p = c + 2 \arctg \sqrt{z-1} - 2\sqrt{z-1}.$$

Поскольку фронт начинает формироваться при $z = 1$ в точке $\tau_p = 0$, находим $c = 0$. Итак, длительность импульса

$$T = \frac{\pi}{\omega} \quad (z < 1), \quad T = \frac{\pi}{\omega} + \frac{2}{\omega} \left[\sqrt{z-1} - \arctg \sqrt{z-1} \right] \quad (z > 1)$$

постоянна до образования разрыва и монотонно увеличивается после образования разрыва из-за его движения с переменной сверхзвуковой скоростью.

5.3. Нелинейные волны в диссипативных средах.

Уравнение Бюргера

5.3.1. Пользуясь методом медленно изменяющегося профиля (см. задачу 5.1.5), упростить линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial^2 x}, \quad (1)$$

описывающее распространение звука в вязкой теплопроводящей среде. Здесь $b = 4\eta/3 + \xi + \kappa(c_v^{-1} - c_p^{-1})$ — коэффициент диссипации, ξ , η — объемная и сдвиговая вязкость, κ — теплопроводность. Найти решения полученного уравнения для синусоидального и однополярного импульсного (на входе в среду) сигналов.

Решение. Считаем, что диссипативные эффекты приводят к медленному искажению профиля, и переходим к сопровождающим координатам $\tau = t - x/c_0$, $x_1 = \mu x$. Пренебрегаем членами μ^2 , $\mu^3, \dots$; члены же порядка μ^0 взаимно уничтожаются. В результате остаются члены одного порядка малости μ^1 , которые образуют уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \delta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad \delta = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0}. \quad (2)$$

Общее решение (2), отвечающее исходному возмущению произвольной формы $u(x=0, t) = u(t)$, выражается с помощью функции Грина:

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\tau') G(x, \tau - \tau') d\tau', \quad G(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta x}} \exp\left[-\frac{\tau^2}{4\delta x}\right]. \quad (3)$$

Для гармонического исходного возмущения $u_0(t) = a \sin(\omega t)$ имеем

$$u(x, \tau) = a \exp(-\delta \omega^2 x) \sin(\omega t) \quad (4)$$

—затухающую по экспоненциальному закону. волну. Величину $x_{\text{зат}}$, обратную коэффициенту затухания ($x_{\text{зат}} \sim 1/\delta \omega^2$), называют характерной длиной затухания. Условие $x_{\text{зат}} \gg \lambda$ означает, что амплитуда волны (4) уменьшается незначительно на расстояниях порядка длины волны λ . Отношение

$$\frac{\lambda}{x_{\text{зат}}} = \frac{\pi b \omega}{c_0^2 \rho_0} \sim \mu \ll 1 \quad (5)$$

есть малый параметр задачи; он порядка отношения правой части (1) к любому из членов левой части этого уравнения. Наличие малого параметра μ оправдывает переход от (1) к (2).

Для однополярного импульса, имеющего на входе характерную длительность t_0 , на расстояниях $4\delta x/t_0^2 \gg 1$ ширина функции $G(x, \tau)$ становится много большей t_0 , и формула (3) упрощается:

$$u(x \gg t_0^2/4\delta, \tau) = G(x, \tau) \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\tau') d\tau'. \quad (6)$$

—на больших расстояниях импульс (для которого интеграл (6) не равен нулю) имеет асимптотическую форму гауссовой кривой.

5.3.2. Получить эволюционное уравнение Бюргерса, описывающее медленные процессы искажения профиля волны из-за наличия у среды нелинейных и диссипативных свойств.

Решение. Методом медленно изменяющегося профиля ранее были получены уравнения простых волн (1.5 3) и параболическое уравнение (1.2):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta u \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \delta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (1)$$

($\beta = \epsilon/c_0^2$, $\delta = b/(2c_0^3 \rho_0)$), описывающие эволюцию профиля вследствие нелинейных и диссипативных эффектов по отдельности. Поскольку эти эффекты слабые, в исходных уравнениях они описываются независимыми членами; следовательно, в упрощенное уравнение нелинейный и диссипативный члены будут входить аддитивно, в виде отдельных слагаемых. Таким образом, приходим к обобщению уравнений (1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad (2)$$

называемому уравнением Бюргерса. Если перейти в (2) к безразмерным переменным

$$V = \frac{u}{u_0}, \quad \Theta = \omega \tau, \quad z = \beta \omega u_0 x = \frac{x}{x_p}, \quad (3)$$

где u_0 — характерное значение возмущения (например, амплитуда гармонической волны или пиковое возмущение в импульсе), ω — характерная частота периодического сигнала (или обратная длительность импульса), уравнение примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial z} = V \frac{\partial V}{\partial \Theta} + \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \Theta^2}. \quad (4)$$

Здесь число

$$\Gamma = \frac{b\omega}{2\epsilon c_0 \rho_0 u_0} = \frac{1}{2\epsilon Re} = \frac{\omega}{u_0} \beta \quad (5)$$

— единственный безразмерный комплекс параметров, входящий в уравнение (1) и тем самым полностью определяющий процесс эволюции. Иногда вместо Γ используют акустическое число Рейнольдса $Re = (2\epsilon\Gamma)^{-1}$. Можно записать Γ как отношение характерных нелинейной и диссипативной длин:

$$\Gamma = \frac{x_p}{x_{\text{зат}}} = \frac{c_0^2}{\epsilon \omega u_0} \left[\frac{2c_0^3 \rho_0}{b\omega} \right]^{-1} = \frac{1}{\beta \omega u_0} \left[\frac{1}{\delta \omega^2} \right]^{-1}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что величина Γ оценивает относительный вклад нелинейных и диссипативных эффектов в искажение профиля волны. При $\Gamma \ll 1$ преобладает нелинейность, при $\Gamma \gg 1$ — диссипация.

5.3.3. Принимая, что коэффициент поглощения звука в воде определяется значением $\delta = 0,6 \cdot 10^{-17} \text{ с}^2/\text{см}$, а в воздухе $\delta = 0,5 \cdot 10^{-14} \text{ с}^2/\text{см}$, оценить акустическое число Рейнольдса в задачах 5.2.5, 5.2.6, 5.2.8.

Ответ. Примерно 22, 13, 300.

5.3.4. Пусть $\Pi(x, \tau)$ — известное решение уравнения Бюргерса (2.2), соответствующее условию на границе $\Pi(x=0, \tau) = \Pi_0(\tau)$. Найти решение, отвечающее наложению постоянного "течения" со скоростью $V_0 = \text{const}$ на исходное возмущение Π , т.е. полагая

$$u(x=0, \tau) = V_0 + \Pi_0(\tau). \quad (1)$$

Ответ.

$$u(x, \tau) = V_0 + \Pi(x, \tau + \beta V_0 x). \quad (2)$$

Скорость распространения волны Π "по течению" на $\Delta s \approx \beta c_0^2 V_0 = \epsilon V_0$ больше, чем по невозмущенной среде.

5.3.5. Найти стационарное решение уравнения Бюргерса, удовлетворяющее условиям симметричного скачка: $u(\tau \rightarrow -\infty) = -u_0$ и $u(\tau \rightarrow \infty) = u_0$. Используя преобразование (4.2), построить стационарное решение, которое удовлетворяет условиям $u(\tau \rightarrow -\infty) = u_1$ и $u(\tau \rightarrow \infty) = u_2 > u_1$.

Ответ. Стационарная волна отыскивается в виде $u(x, \tau) = u(\tau + Cx)$, где константа C определяется из условий при $\tau \rightarrow$

$\rightarrow \pm \infty$. В первом случае стационарное решение имеет вид

$$u = u(\tau) = u_0 \operatorname{th} \frac{\beta u_0 \tau}{2\delta} \quad (1)$$

и описывает симметричную ударную волну, бегущую со скоростью звука. Ширина фронта обратно пропорциональна "амплитуде" скачка u_0 . Полагая $V_0 = (u_1 + u_2)/2$, $u_0 = (u_2 - u_1)/2$, из (1) и (4.2) получаем для движущегося ударного фронта

$$u = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2} \operatorname{th} \left[\frac{\beta u_0}{2\delta} \left[\tau + \beta \frac{u_1 + u_2}{2} x \right] \right]. \quad (2)$$

Полезно убедиться в том, что скорость движения фронта слабой ударной волны (2) не зависит от его ширины и совпадает со скоростью (см. (2.16.2)) движения разрыва.

5.3.6. Показать, что уравнение Бюргерса заменой переменных

$$u = \frac{\partial S}{\partial \tau}, \quad S = \frac{2\delta}{\beta} \ln U \quad (1)$$

или

$$u = \frac{2\delta}{\beta} \frac{\partial \ln U}{\partial t} \quad (2)$$

(замена Хопфа-Коула) сводится к линейному уравнению диффузии. Найти общее решение уравнения Бюргерса.

Решение. Из уравнения (2.2) для S получаем уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right)^2 = \delta \frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2},$$

которое после перехода (1) к U сводится к линейному параболическому уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \delta \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (3)$$

совпадающему по форме с (1.2). Решение этого уравнения с условием на границе $U(x=0, t) = U_0(t)$ запишется аналогично (1.3):

$$U(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta x}} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(t) \exp \left[-\frac{(t-\tau)^2}{4\delta x} \right] dt. \quad (4)$$

С учетом замены (1)

$$U_0(t) = \exp \left[\frac{\beta}{2\delta} S_0(t) \right], \quad S_0(t) = \int_0^t u_0(t') dt' \quad (5)$$

цепочка преобразования (5) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ (2) дает общее решение уравнения Бюргерса — выражает поле $u(x, \tau)$ в произвольном сечении x через исходное поле $u_0(\tau)$. Приведем еще одну форму записи общего решения. Пользуясь (2), из (4), (5) имеем

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-\tau}{\beta x} \exp \left[\frac{1}{2\delta} F(\tau, t, x) \right] dt \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{1}{2\delta} F(\tau, t, x) \right] dt \right]^{-1}, \quad (6)$$

где

$$F = \beta S_0(t) - \frac{(t-\tau)^2}{2x}, \quad S_0(t) = \int_0^t u_0(t') dt'. \quad (7)$$

5.3.7. На основании общего решения уравнения Бюргерса, полученного в предыдущей задаче, рассмотреть эволюцию гармонического исходного сигнала $u_0(t) = a \sin(\omega t)$. Исследовать его асимптотическое поведение при $x \rightarrow \infty$.

Ответ. Используя разложение

$$\exp(z \cos \theta) = I_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(z) \cos(n\theta), \quad (1)$$

где I_n — модифицированные функции Бесселя, из (6.2), (6.4), (6.5) получаем

$$u(x, \tau) = \frac{2a}{\text{Re}} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1} I_n(\text{Re}) \exp(-\delta n^2 \omega^2 x) \sin(n\omega \tau)}{I_0(\text{Re}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(\text{Re}) \exp(-\delta n^2 \omega^2 x) \sin(n\omega \tau)}. \quad (2)$$

Здесь комбинация параметров $a\beta/(2\omega\delta)$ имеет смысл акустического числа Рейнольдса (см (2.5)). При $\delta\omega^2 x \gg 1$ экспоненты в (2) сильно уменьшаются с ростом n и остается только первая гармоника:

$$u(x, \tau) \approx \frac{2a}{\text{Re}} \frac{I_1(\text{Re})}{I_0(\text{Re})} \exp(-\delta\omega^2 x) \sin(\omega \tau). \quad (3)$$

При малых и больших числах Рейнольдса, пользуясь асимптотиками функций Бесселя, получим гармонику, затухающую по закону линейной акустики:

$$u(x, \tau) \approx \exp(-\delta\omega^2 x) \sin(\omega \tau) \begin{cases} a, & \text{Re} \ll 1, \\ 4\delta\omega/\beta, & \text{Re} \gg 1. \end{cases} \quad (4)$$

В последнем случае амплитуда гармоник не зависит от своего исходного значения a .

5.3.8. Пользуясь общим решением уравнения Бюргерса, рассмотреть эволюцию однополярного импульса, аппроксимируя его на входе δ -функций: $u_0(t) = A \delta(t)$. Ввести для данной задачи число Рейнольдса; обсудить предельные случаи $\text{Re} \ll 1$ и $\text{Re} \gg 1$.

Ответ. Решение имеет вид

$$u(x, \tau) = \frac{2\delta}{\beta\sqrt{4\pi\delta x}} \frac{(e^{\text{Re}-1})e^{-\tau/(4\delta x)}}{1 + 0,5(e^{\text{Re}-1})[1 + \Phi(\tau/\sqrt{4\delta x})]}. \quad (1)$$

Здесь $\Phi(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z \exp(-t^2) dt$ — интеграл ошибок, а $\text{Re} = A\beta/2\delta$. При $\text{Re} \ll 1$ результат (1) совпадает с линейным решением (1.6). При $\text{Re} \gg 1$ из (1) следует, что импульс имеет универсальную треугольную форму:

$$u(x, \tau) \approx \begin{cases} -\tau/\beta x & -T < \tau < 0, \\ 0 & \tau < -T, \quad \tau > 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $T = \sqrt{2A\beta x}$ — длительность импульса. Для вывода формулы (2) нужно использовать асимптотику функции $\Phi(-z)$ при $z \rightarrow \infty$.

5.3.9. Пусть $\Pi(x, \tau)$ — известное решение уравнения Бюргерса, отвечающее граничному условию $\Pi(x=0, t) = \Pi_0(t)$. Исследовать взаимодействие этой волны с "линейным профилем" течения (см. задачу 5.1.9) на основе общего представления решения уравнения Бюргерса (см. задачу 5.3.6) для граничного условия

$$u(x=0, t) = \gamma t + \Pi_0(t). \quad (1)$$

Проанализировать случаи $\gamma > 0$ и $\gamma < 0$.

Ответ. Нелинейное взаимодействие с "линейным профилем" приводит к изменению характерных амплитуды и частоты, а также темпов эволюции волны $\Pi(x, \tau)$. Решение имеет вид

$$u(x, \tau) = \frac{\gamma \tau}{1 - \beta \gamma x} + \frac{1}{1 - \beta \gamma x} \Pi\left[\frac{x}{1 - \beta \gamma x}, \frac{\tau}{1 - \beta \gamma x}\right] \quad (2)$$

При $\gamma > 0$, $\beta \gamma x \rightarrow 1$ характерные амплитуда и частота волны неограниченно возрастают.

5.3.10. Используя метод перевала, найти асимптотическое решение уравнения Бюргерса (2.2) при больших числах Рейнольдса ($\delta \rightarrow 0$). Дать графическую интерпретацию этого решения.

Решение. В выражение для общего решения (6.6) уравнения Бюргерса входят интегралы вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp\left[\frac{1}{2\delta} F(\tau, t, x)\right] dt. \quad (1)$$

При $\delta \rightarrow 0$ основной вклад в интеграл будут давать окрестности тех точек, где функция F имеет максимум. Пусть t_k — одна из таких точек; она находится из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \frac{t_k - \tau}{x} - \beta u_0(t_k) = 0. \quad (2)$$

В окрестности этой точки функцию F можно разложить в ряд, ограничившись квадратичными членами:

$$F(\tau, t, x) \approx F_k + F_k'' (t - t_k)^2 / 2, \quad (3)$$

где $F_k = F(\tau, t_k, x)$, $F_k'' = x^{-1} - \beta u_0'(t_k) < 0$. Тогда интеграл (1) представляется как сумма вкладов в точках перевала

$$I = \sum_k I_k, \quad I_k = f(t_k) \left[\frac{4\pi\delta}{|F_k''|} \right]^{1/2} \exp \frac{F_k}{2\delta}. \quad (4)$$

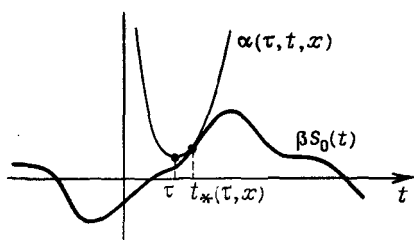
При $\delta \rightarrow 0$ в этой сумме будет превалировать слагаемое, соответствующее абсолютному максимуму функции F . При этом из общего решения (6.6) следует асимптотический результат

$$u(\tau, x) = [t_*(\tau, x) - \tau] / (\beta x) \quad (5)$$

где $t_*(\tau, x)$ — координата абсолютного максимума функции

$$F(\tau, t, x) = \beta S_0(t) - \frac{(t-\tau)^2}{2x}, \quad S_0(t) = \int_0^t u_0(t') dt'. \quad (6)$$

Процедура отыскания абсолютного максимума допускает наглядную графическую интерпретацию. Координата $t_*(\tau, x)$ есть первая точка касания функции F подвижной прямой h , опускающейся из бесконечности параллельно оси абсцисс t . Более удобно,



К задаче 5.3.10

однако, действовать по-другому, а именно рассматривать первую точку касания функции $\beta S_0(t)$ и параболы

$$\alpha(\tau, t, x) = h + (t-\tau)^2/2x, \quad (7)$$

опускающейся (при уменьшении h) сверху на функцию $\beta S_0(t)$ (см. рисунок).

5.3.11. Используя полученное в предыдущей задаче асимптотическое решение уравнения Бюргерса, проанализировать эволюцию однополярного импульса, аппроксимируя его на входе δ -функцией $u_0(t) = A \delta(t)$.

Решение. Для функции $\beta S_0(t)$, определяемой (10.6), имеем $\beta S_0 = \beta A \Theta(t)$, где $\Theta(t)$ — функция Хевисайда (единичного скачка). Графическая процедура отыскания координаты абсолютного максимума в данном случае иллюстрирована (см. рисунок). Зафиксируем расстояние x , т.е. ширину параболы (10.7). Если $\tau > 0$, то парабола 1 коснется ступеньки своим центром $t_* = \tau$, т.е. $t_*(\tau, x) = \tau$; при этом согласно (10.5) поле $u(\tau, x) = 0$ для всех $\tau > 0$.

При $\tau < 0$ существует одна критическая парабола α_* , которая одновременно касается $\beta S_0(t)$ в двух точках: $t = 0$ и $t = -T$. Очевидно, что для такого касания $h = 0$, а положение α_* определяется из системы уравнений

$$\alpha_*(\tau, -T, x) = \frac{(-T-\tau)^2}{2x} = 0, \quad \alpha_*(\tau, 0, x) = \frac{\tau^2}{2x} = \beta A.$$

Отсюда следует, что координата вершины этой критической параболы равна

$$-T = -(2\beta Ax)^{1/2}. \quad (1)$$

Если положить $-T < \tau < 0$, то нетрудно заметить, что парабола 2 на рисунке коснется $\beta S_0(t)$ в точке $t_* = 0$. Из (10.5)

при этом находим $u(\tau, x) = -\tau/\beta x$. Наконец, полагая $\tau < -T$, т.е. перемещая центр подвижной параболы 3 левее центра критической параболы α_* , снова получим $t_* = \tau$, $u = 0$.

Суммируя сказанное, видим, что асимптотический профиль при больших числах Рейнольдса имеет треугольную форму

$$u(x, \tau) = 0, \quad \tau < -T, \quad \tau > 0; \quad u = -\tau/\beta x, \quad -T < \tau < 0. \quad (2)$$

Длительность импульса $T(x)$, определяемая формулой (1), и пиковое значение возмущения $u_{\max}(x)$ равны

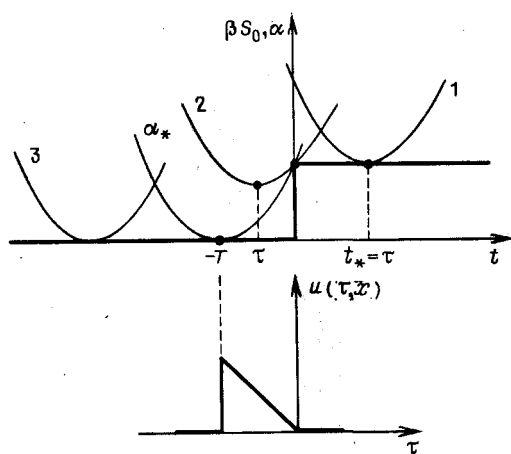
$$T(x) = (2\beta Ax)^{1/2}, \quad (3)$$

$$u_{\max}(x) = u(x, \tau = -T) = (2A/\beta x)^{1/2}$$

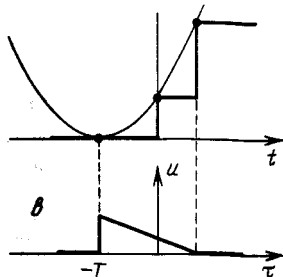
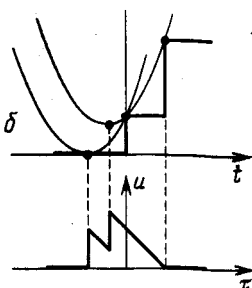
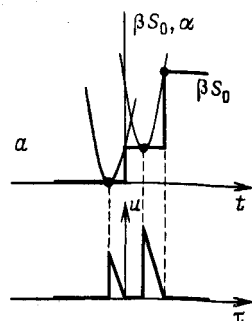
(см. задачу 5.3.8). Площадь импульса равна $u_{\max}(x) T(x)/2 = A = \text{const}$.

5.3.12. Используя графическую процедуру задачи 5.3.10, исследовать процесс взаимодействия двух однополярных импульсов

$$u_0(t) = A_1 \delta(t) + A_2 \delta(t-t_0) \quad (1)$$



К задаче 5.3.11



К задаче 5.3.12

при больших числах Рейнольдса. Найти асимптотическую форму волны, образующуюся в результате слияния импульсов.

Ответ. Критические параболы α_* (см. задачу 5.3.11) и соответствующие профили импульсов приведены на рисунке. Напоминаем, что с увеличением пройденного расстояния x параболы

уширяются. Координаты разрывов легко находятся из условия двойного касания параболы α функции $\beta S_0(t)$ (см. рисунки а, б). Расстояние x , на котором происходит слияние разрывов, определяется из условия тройного касания α и $\beta S_0(t)$ (см. рисунок в). Асимптотическая форма волны — одиночный треугольный импульс (см. (11.2)) с длительностью

$$T = [2\beta(A_1 + A_2)x]^{1/2}.$$

5.3.13. В условиях предыдущей задачи рассмотреть взаимодействие двух δ -импульсов различной полярности. Отдельно разобрать случай $|A_1| = |A_2|$.

5.3.14. Усовершенствовать решение (2.12.1) для одного периода пилообразной волны, приняв во внимание, что в диссипативной среде для больших чисел Рейнольдса ударный фронт имеет малую, но конечную ширину и описывается выражением (5.1)

Решение. Ступенчатую функцию $\operatorname{sgn} \tau$ следует заменить на $\operatorname{th} [\beta u_p(x) \tau / 2\delta]$. В аргументе гиперболического тангенса необходимо учесть, что разрыв уменьшается вследствие нелинейного затухания как $u_p(z)/u_0 = \pi/(1+z)$ (см. задачу 5.2.11); соответственно увеличивается ширина фронта. Таким образом, формула (2.12.1) примет вид

$$\frac{u}{u_0} = \frac{1}{1+z} \left[-\omega\tau + \pi \operatorname{th} \left[\frac{\pi}{1+z} \frac{\beta u_0}{2\delta} \tau \right] \right], \quad (1)$$

для $-\pi < \omega\tau < \pi$, $\operatorname{Re} \gg 1$. Подставляя (1) в уравнение Бюргерса (2.2), имеем его точное решение (решение Хохлова).

5.3.15. Разложить решение Хохлова в ряд Фурье, рассчитать амплитуды гармоник и проанализировать их поведение на больших расстояниях.

Ответ. Разложение в ряд (решение Фея) имеет вид

$$\frac{u}{u_0} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\omega\delta}{u_0\beta} \operatorname{arsh} \left[n(1+z) \frac{\omega\delta}{u_0\beta} \right] \sin(n\omega\tau). \quad (1)$$

Оно хорошо описывает спектр гармонической (на входе $z = 0$) волны для больших чисел Рейнольдса в той области, где фронт стабилизируется, т.е. нелинейное укручение и диссипативное сглаживание профиля уравнивают друг друга. Амплитуда гармоник при $(\omega\delta/u_0\beta)z > 1$ в решении Фея уменьшается примерно по закону $\exp(-n\delta\omega^2x)$ — медленнее, чем по линейной теории ($\sim \exp(-n^2\delta\omega^2x)$); это связано с подкачкой энергии от низших гармоник к высшим. На расстояниях $(\delta\omega/u_0\beta)z \geq 2$ или $\delta\omega^2x \geq 2$ в решении Фея главным становится первый член ряда (1), и

волна принимает вид

$$u = \frac{4\delta\omega}{\beta} \exp(-\delta\omega^2 x) \sin(\omega\tau) = u_{\max}(x) \sin(\omega\tau). \quad (2)$$

Формула (2) совпадает с (7.1) и описывает эффект "насыщения": как сильно ни увеличивать амплитуду u_0 на входе в нелинейную среду, на расстояниях $x \geq 2/\delta\omega^2 = 2x_{\text{зат}}$ невозможно передать волну с амплитудой, большей

$$u_{\max} = \frac{4\delta\omega}{\beta} \exp(-\delta\omega^2 x) = \frac{2b\omega}{\varepsilon c_0 \rho_0} \exp\left[-\frac{b\omega^2}{2c_0^3 \rho_0} x\right]. \quad (3)$$

5.3.16. Используя условия задач 5.2.5 и 5.2.6, оценить диссипативную длину $x_{\text{зат}} = 1/\delta\omega^2 = 2c_0^3 \rho_0 / b\omega^2$ и найти максимальную интенсивность волны, которая может быть передана на расстояние $2x_{\text{зат}}$. Принять для воды $\delta = 6 \cdot 10^{-18} \text{ с}^2/\text{см}$.

Ответ. $x_{\text{зат}} \approx 42 \text{ м}$, $I_{\max} \approx 10^{-4} \text{ Вт/см}^2$ и $x_{\text{зат}} \approx 1 \text{ км}$, $I_{\max} \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/см}^2$.

5.4. Сферические и цилиндрические волны.

Нелинейные пучки

5.4.1. Рассмотреть сходящиеся сферически-симметричные волны в линейном приближении. Исходная форма возмущения $u_0(t)$ задана на сферической поверхности радиусом $r_0 \gg \lambda$ (λ — характерная длина волны). Пользуясь методом медленно изменяющегося профиля, упростить линейное волновое уравнение

$$\Delta u - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (1)$$

Решение. Переходя к сопровождающей системе координат $\tau = t + (r-r_0)/c_0$, $r_1 = \mu r$ и пренебрегая малыми членами порядка μ^2 , получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{c_0}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad (2)$$

Отношение третьего члена к первому в уравнении (2) есть величина порядка $c_0/(r\omega_0) \sim \lambda/r$. Следовательно, третий член мал всюду, за исключением малой окрестности фокуса $r = 0$ размером порядка длины волны λ . Отбрасывая третий член в (2), придем вместо уравнения (1) к упрощенному уравнению

$$\partial u / \partial r + u / r = 0. \quad (3)$$

Решение в виде сходящейся волны (r уменьшается от r_0 до 0):

$$u(r, \tau) = \frac{1}{r} u_0 \left[\tau = t + \frac{r-r_0}{c_0} \right] \quad (4)$$

неограниченно растет по мере приближения к фокусу $r = 0$.

5.4.2. Получить аналог уравнения Бюргерса (3.2.2) для сходящихся сферически-симметричных волн, обобщая упрощенное уравнение (1.3) (см. задачу 5.3.2). Считать, что нелинейные и диссипативные эффекты медленно искажают профиль волны.

Ответ.

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - \beta u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь, $\beta = \varepsilon/c_0^2$, $\delta = b/(2c_0^3\rho_0)$, как и в задаче 5.3.2.

5.4.3. Преобразовать уравнение Бюргерса (2.1) для сферически-симметричных волн с помощью замены переменных

$$U = -\frac{u}{u_0} \frac{r}{r_0}, \quad \Theta = \omega\tau, \quad \xi = \beta\omega u_0 r_0 \ln \frac{r_0}{r}. \quad (1)$$

Сравнив с уравнением (3.2.4) полученное уравнение, указать, какой смысл имеет последнее.

Ответ.

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = U \frac{\partial U}{\partial \Theta} + \Gamma \exp\left[-\frac{\xi}{z_0}\right] \frac{\partial^2 U}{\partial \Theta^2}. \quad (2)$$

Здесь $\Gamma = \delta\omega/\beta u_0$ — обратное число Рейнольдса (см. (3.2.5)), $z_0 = \beta\omega u_0 r_0$ — безразмерный исходный радиус фронта волны. Видно, что использование уравнения (2) сводит задачу о распространении сферических возмущений к задаче о плоских волнах в эквивалентной среде, диссипативные характеристики которой экспоненциально убывают с увеличением пройденного расстояния (с ростом ξ от 0 до ∞).

5.4.4. Получить аналог уравнения Бюргерса для сходящихся цилиндрически-симметричных волн. Действовать по аналогии с задачами 5.4.1, 5.4.2.

Ответ.

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{2r} - \beta u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0. \quad (1)$$

Обозначения здесь такие же, как в уравнении (2.1).

5.4.5. Преобразовать уравнение (4.1) с помощью замены переменных

$$U = -\frac{u}{u_0} \sqrt{\frac{r}{r_0}}, \quad \Theta = \omega\tau, \quad \xi = 2\beta\omega u_0 r_0 \left[1 - \sqrt{\frac{r}{r_0}}\right]. \quad (1)$$

Указать смысл полученного уравнения (так, как это сделано в задаче 5.4.3).

Ответ.

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = U \frac{\partial U}{\partial \Theta} + \Gamma \left[1 - \frac{\xi}{2z_0}\right] \frac{\partial^2 U}{\partial \Theta^2}. \quad (2)$$

Видим, что уравнение (2) эквивалентно уравнению Бюргерса для плоских волн в среде, диссипативные характеристики которой убывают по линейному закону при изменении r от r_0 до 0 (при

этом ξ возрастает от 0 до $2z_0$, где $z_0 = \beta\omega u_0 r_0$ — безразмерный исходный радиус фронта).

5.4.6. Найти расстояние, которое необходимо пройти исходной гармонической сферически-симметричной волне в среде без диссипации, чтобы в ее профиле образовались разрывы. Рассмотреть сходящиеся (а) и расходящиеся волны (б).

Решение. Поскольку при $\Gamma = 0$ уравнение (3.3) совпадает с обычным уравнением простых волн, координату образования разрыва z_p в исходной гармонической волне нужно находить из $\xi = \beta\omega u_0 r_0 |\ln(r_0/r_p)| = 1$ (см. (5.2.4)). Случай $r_0 < r_p < \infty$ соответствует расходящейся волне, а случай $0 < r_p < r_0$ — волне, сходящейся к фокусу $r = 0$. Расстояние $|r_p - r_0|$, которое должна пройти волна, чтобы стать разрывной, равно

$$\text{а) } |r_p - r_0| = r_0 \left[1 - \exp \left[-\frac{1}{\beta\omega u_0 r_0} \right] \right], \quad (1)$$

$$\text{б) } |r_p - r_0| = r_0 \left[\exp \frac{1}{\beta\omega u_0 r_0} - 1 \right]. \quad (2)$$

Видно, что для сходящихся волн (1) выполняется неравенство $|r_p - r_0| < (\beta\omega u_0)^{-1}$, т.е. разрыв образуется на меньших расстояниях, чем в плоской волне. Напротив, из формулы (2) следует, что $|r_p - r_0| > (\beta\omega u_0)^{-1}$, т.е. для образования разрыва расходящейся волне нужно пройти большее расстояние. Изменение темпов накопления нелинейных искажений связано с тем, что в сходящихся сферических волнах амплитуда возрастает при уменьшении r (от r_0 до 0), а в расходящихся убывает (когда r увеличивается от r_0 до ∞).

5.4.7. Определить, всегда ли может образоваться разрыв в сходящейся первоначально гармонической волне, распространяющейся в среде без диссипации.

Решение. В цилиндрической сходящейся волне условие образования разрыва согласно (5.1), имеет вид

$$\xi = 2\beta\omega u_0 r_0 (1 - \sqrt{r/r_0}) = 1. \quad (1)$$

Поскольку $0 < r < r_0$, максимальное значение ξ достигается при $r = 0$ и равно $2\beta\omega u_0 r_0$. Если параметры на излучающей цилиндрической поверхности выбраны так, что $\beta\omega u_0 r_0 < 1/2$, условие (1) не может быть реализовано ни при каких r и разрыв при сходимости к фокусу $r = 0$ не образуется.

Для сферической волны условие (1) имеет вид (см. (2.2)):

$$\xi = \beta\omega u_0 r_0 \ln(r_0/r) = 1.$$

Здесь ситуация обратная: какой бы малой ни была комбинация параметров $\beta\omega u_0 r_0$ на излучающей поверхности, найдется столь малое r вблизи фокуса $r = 0$, где разрыв все же образуется.

5.4.8. Обобщить решение Хохлова (см. (3.14.1)) на сферические волны и проанализировать процесс формирования ударного фронта в сходящейся волне с учетом влияния диссипации.

Решение. Используя обозначения задачи 5.4.3 и сопоставляя обычное уравнение Бюргерса (см. (3.2.4)) и "сферическое" (см. (3.2)), придем к выражению для профиля одного периода сферической сходящейся волны:

$$U = \frac{1}{1+\xi} \left[-\Theta + \pi \operatorname{th} \left[\frac{\pi}{1+\xi} \frac{\Theta}{2\Gamma} e^{\xi/z_0} \right] \right]. \quad (1)$$

Ширина ударного фронта определяется из аргумента гиперболического тангенса:

$$\Delta\Theta_{\text{фр}} = \frac{2\Gamma}{\pi} (1+\xi) \exp \left[-\frac{\xi}{z_0} \right] = \frac{2\Gamma}{\pi} \left[1 + z_0 \ln \frac{r_0}{r} \right] \frac{r}{r_0}. \quad (2)$$

Как следует из анализа выражения (2), при $z_0 = \beta\omega u_0 r_0 > 1$ функция $\Delta\Theta_{\text{фр}}(r)$ имеет максимум. Это означает, что при $z_0 > 1$ наблюдается явление двукратного формирования ударного фронта. Вначале узкий фронт начинает расширяться из-за диссипации. Его ширина достигает максимального значения $(2\Gamma/\pi)z_0 \times \exp(1/z_0 - 1)$ в точке $r_{\text{max}} = r_0 \exp(1/z_0 - 1)$. Затем вновь усиливается действие нелинейности и ширина фронта стремится к нулю при схождении волны к фокусу. Заметим, что требование $r_{\text{max}} < r_p$ (см. (6.1)) приводит к более сильному ограничению ($z_0 > 2$) на область существования эффекта.

5.4.9. Пользуясь квазиоптическим приближением теории дифракции и методом медленно изменяющегося профиля (см. задачу 5.1.5), вывести упрощенное уравнение для волновых пучков в линейном приближении.

Решение. Исходим из линейного волнового уравнения, записанного в декартовых координатах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Пусть волна распространяется вдоль оси пучка x . В квазиоптическом приближении обычно рассматривают гармонический сигнал. При этом полагают, что амплитуда волны изменяется медленно как вдоль оси x (пропорциональной μx), так и поперек пучка (пропорциональной $\sqrt{\mu} y$, $\sqrt{\mu} z$):

$$u = A(x_1 = \mu x, y_1 = \sqrt{\mu} y, z_1 = \sqrt{\mu} z) \exp(-i\omega t + i\omega x/c_0). \quad (2)$$

Если рассматриваются широкополосные сигналы или распространение в нелинейной среде, где спектр сигнала обогащается гармониками, то волну нельзя считать гармонической. Нужно предположить, что ее профиль и спектр медленно изменяются при распространении. Формулу (2) следует обобщить:

$$u = u(\tau = -x/c_0, x_1 = \mu x, y_1 = \sqrt{\mu} y, z_1 = \sqrt{\mu} z). \quad (3)$$

Подставляем (3) в (1). Члены порядка μ^0 взаимно уничтожаются, а членами порядка μ^2 мы пренебрегаем. В результате все сохранные члены имеют один и тот же порядок малости μ^1 . Эти члены образуют упрощенное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} u, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4)$$

Для гармонических сигналов $u = A \exp(-i\omega\tau)$ из (4) следует известное параболическое уравнение теории дифракции

$$-2ik \frac{\partial A}{\partial x} = \Delta_{\perp} A, \quad k = \frac{\omega}{c_0}. \quad (5)$$

5.4.10. Используя метод предыдущей задачи, вывести упрощенное уравнение Хохлова–Заболотской из нелинейного волнового уравнения

$$\Delta u - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\epsilon}{c_0^3} \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Решение. В предположении медленности изменения профиля волны и формы пучка (см. (9.3)) получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\epsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} u. \quad (2)$$

Это — уравнение Хохлова–Заболотской. Если пренебречь зависимостью от поперечных координат ($\Delta_{\perp} u = 0$), то уравнение (2) переходит в уравнение простых волн (1.5.3). Если пренебречь нелинейностью ($\epsilon = 0$), то уравнение (2) переходит в уравнение (9.4) линейной теории дифракции. Таким образом, уравнение (2) описывает волну при одновременном учете нелинейных и дифракционных эффектов.

5.4.11. Действуя по аналогии с задачей 5.3.2, получить выражение для безразмерного комплекса параметров — числа N , позволяющего оценить относительный вклад нелинейных и дифракционных эффектов в искажение волны.

Решение. Пусть на входе $x = 0$ сигнал описывается функцией

$$u(x=0, t) = u_0 f(r/a) \Phi(\omega t). \quad (1)$$

Здесь $r = \{y, z\}$ — координаты в поперечном сечении пучка, a — характерная ширина пучка; u_0 , ω — характерные амплитуда и ча-

стота. Имея в виду функцию (1), перейдем к безразмерным переменным вида (3.2.3):

$$U = u/u_0, \quad \Theta = \omega\tau, \quad z = \beta\omega u_0 x = x/x_p, \quad R = r/a. \quad (2)$$

Уравнение (10.2) сведется к форме

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} \left[\frac{\partial U}{\partial z} - U \frac{\partial U}{\partial \Theta} \right] = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} U. \quad (3)$$

Здесь $\Delta_{\perp}$ — оператор Лапласа по нормированным координатам R . Единственный комплекс параметров, входящий в (3), это число

$$N = \frac{2c_0^3}{\epsilon\omega^2 a^2 u_0} = \frac{1}{2\pi^2 \epsilon M} \left[\frac{\lambda}{a} \right]^2. \quad (4)$$

Запишем N как отношение нелинейной и дифракционной длин:

$$N = \frac{x_p}{x_{\text{диф}}} = \frac{c_0^3 / (\epsilon\omega u_0)}{\omega a^2 / (2c_0)}, \quad (5)$$

т.е. при $N \ll 1$ преобладает нелинейность, при $N \gg 1$ — дифракция.

5.4.12. Рассчитать в линейном приближении изменение характеристик круглого гауссова пучка гармонических волн

$$u(x=0, r, t) = u_0 \exp(-r^2/a^2) \sin(\omega t) \quad (1)$$

вследствие дифракции.

Решение. Для пучков с круглым поперечным сечением уравнение (9.4) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} = \frac{c_0}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right]. \quad (2)$$

Решение (2) с граничным условием (1) можно получить методом разделения переменных или методом интегральных преобразований. Можно также проверить непосредственной подстановкой, что решение (2) имеет вид

$$u = \frac{u_0}{\sqrt{1+x^2/x_{\text{диф}}^2}} \exp \left[-\frac{r^2/a^2}{1+x^2/x_{\text{диф}}^2} \right] \sin \left[\omega\tau - \frac{r^2}{a^2} \frac{x/x_{\text{диф}}}{1+x^2/x_{\text{диф}}^2} + \arctg \frac{x}{x_{\text{диф}}} \right], \quad (3)$$

где $x_{\text{диф}} = \omega a^2 / 2c_0$ — характерная дифракционная длина. Решение (3) описывает превращение исходной плоской волны в сферически расходящуюся. Амплитуда на оси пучка уменьшается по закону

$$u_{\text{max}} = u_0 (1 + x^2/x_{\text{диф}}^2)^{-1/2}. \quad (4)$$

При $x \gg x_{\text{диф}}$ амплитуда убывает как $u_{\text{max}} \approx u_0 x_{\text{диф}}/x$ — по закону $\sim x^{-1}$ сферически расходящейся волны. Ширина пучка растет:

$$a(x) = a(1 + x^2/x_{\text{диф}}^2)^{1/2}. \quad (5)$$

При $x \gg x_{\text{диф}}$ ширина увеличивается с ростом x линейно: $a(x) \approx ax/x_{\text{диф}}$, и все излучение локализуется в конусе с углом при вершине $\Delta\theta \approx 2a(x)/x \approx 2a/x_{\text{диф}} = 4c_0/(\omega a)$. Заметим также, что фаза волны на оси пучка приобретает фазовый сдвиг $\arctg(x/x_{\text{диф}})$. Это означает, что скорость распространения волны на оси пучка несколько выше, чем скорость плоской волны той же частоты. При увеличении частоты ω исходного сигнала (1) процесс дифракции ослабевает и все отмеченные явления проявляются на больших расстояниях.

5.4.13. Пользуясь решением (12.3), показать, что широкополосный сигнал (импульс) изменяет свою форму в дальней зоне ($x \gg x_{\text{диф}}$). Дифракция приводит к дифференцированию формы профиля на оси пучка.

Решение Каждая из гармоник исходного сигнала описывается выражением (12.3), которое при $x \gg x_{\text{диф}}$, $r = 0$ принимает вид

$$u \approx u_0(\omega) \frac{x_{\text{диф}}}{x} \sin(\omega\tau + \frac{\pi}{2}) = \frac{\omega a^2}{2c_0 x} u_0(\omega) \cos(\omega\tau) \quad (1)$$

Форма сигнала определяется суммой всех гармоник (1):

$$u = \frac{a^2}{2c_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\omega) \omega \cos(\omega\tau) d\omega = \frac{a^2}{2c_0 x} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\omega) \sin(\omega\tau) d\omega. \quad (2)$$

Последний интеграл есть исходная форма импульса:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\omega) \sin(\omega\tau) d\omega = u(x=0, \tau). \quad (3)$$

Сравнивая (3) и (2), находим

$$u(x \gg x_{\text{диф}}, \tau) = \frac{a^2}{2c_0 x} \frac{\partial}{\partial \tau} u(x=0, \tau), \quad (4)$$

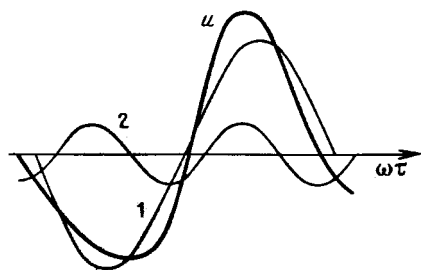
т.е. сигнал в дальней зоне дифференцируется.

5.4.14. Показать, что области сжатия и разрежения нелинейной дифрагирующей волны искажены неодинаково и профиль исходного гармонического сигнала при распространении становится несимметричным. Воспользоваться тем фактом, что разные гармоники из-за дифракции оказываются сдвинутыми по фазе друг относительно друга.

Решение. Для качественного ответа на вопрос представим профиль волны приближенно как сумму только первой и второй гармоник:

$$u = A_1(x) \sin[\omega\tau + \varphi_1(x)] + A_2(x) \sin[2\omega\tau + \varphi_2(x)]. \quad (1)$$

Очевидно, что вторая гармоника, рождающаяся в среде, имеет амплитуду A_2 , малую по сравнению с A_1 . Поскольку частота



К задаче 5.4.14

гармоники более высокая, дифракционный фазовый сдвиг φ_2 для нее меньше, чем φ_1 (см. задачу 5.4.12). С учетом этих фактов графическое сложение двух синусоид (1) действительно дает несимметричный профиль (см. рисунок). Видно, что область сжатия укорочена по длине и заострена, область разрежения растянута и сглажена. Гармоники интерферируют так, что положительное пиковое значение возмущения превышает свое исходное (при $x = 0$) значение.

5.4.15. Пользуясь модельным уравнением (10.1) и методом последовательных приближений, рассчитать амплитуду волны разностной частоты $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, возбуждаемой в нелинейной среде при взаимодействии двух затухающих недифрагирующих высокочастотных волн с близкими частотами ω_1, ω_2 :

$$u^{(1)} = f(y, z) \exp\left[-\frac{x}{x_{\text{зат}}}\right] \left\{ A_1 \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{x}{c_0}\right)\right] + A_2 \exp\left[-i\omega_2\left(t - \frac{x}{c_0}\right)\right] \right\} + \text{к.с.} \quad (1)$$

Здесь $x_{\text{зат}}$ — характеристическая длина затухания волн ω_1, ω_2 ; функция $f(y, z)$ описывает поперечную структуру пучка этих волн.

Решение. Используя (1) в качестве первого приближения, для нахождения второго приближения из (10.1) получаем

$$\Delta u^{(2)} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} = -\frac{\epsilon}{c_0^3} \frac{\partial^2 u^{(1)2}}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Правая часть (2), описывая нелинейные источники на разностной частоте Ω , с учетом (1) примет вид $g(x, y, z) e^{-i\Omega t} + \text{к.с.}$,

$$g = \frac{2\epsilon}{c_0^3} A_1 A_2 f^2(y, z) \exp\left[-\frac{2x}{x_{\text{зат}}} + i\frac{\Omega x}{c_0}\right] + \text{к.с.} \quad (3)$$

Отыскивая решение (2) в виде $u^{(2)} = A_- \exp(-i\Omega t)$, для амплитуды A_- волны разностной частоты получим неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta A_- + K^2 A_- = g, \quad K = \Omega/c_0. \quad (4)$$

Решение этого уравнения

$$A_-(\mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V g(\mathbf{R}_1) \frac{e^{iK r}}{r} dV_1, \quad r = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{R} = \{x, y, z\}$ — радиус-вектор точки наблюдения, $\mathbf{R}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ — радиус-вектор текущей точки объема V , занятого областью пересечения взаимодействующих волн ω_1, ω_2 . В дальней зоне дифракции $|\mathbf{R}| \gg |\mathbf{R}_1|$ можно приближенно положить

$$r = \sqrt{R^2 - 2\mathbf{R}\mathbf{R}_1 + R_1^2} \approx R(1 - \mathbf{R}\mathbf{R}_1/R^2) = R - (xx_1 + yy_1 + zz_1)/R. \quad (6)$$

Подставляя (3), (6) в интеграл (5), приведем его к виду

$$A_- \approx \frac{-\epsilon\Omega^2}{2\pi c_0^3} A_1 A_2 \frac{e^{iKR}}{R} D_t D_l. \quad (7)$$

Наибольший интерес представляет структура выражений D_r, D_l , определяющих направленность излучения, которая связана с поперечным

$$D_t = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(y_1, z_1) \exp\left[-\frac{iK}{R}(yy_1 + zz_1)\right] dy_1 dz_1 \quad (8)$$

и продольным (вдоль оси x)

$$D_l = \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{2x_1}{x_{\text{зат}}} + iK\left(1 - \frac{x}{R}\right)x_1\right] dx_1 \quad (9)$$

распределением первичного поля $u^{(1)}$ (1). Интеграл (8) представляет собой разложение в угловой спектр функции $f^2(y, z)$; он имеет такой же вид, как если бы волна Ω непосредственно излучалась источником высокочастотных волн ω_1, ω_2 . Интеграл (9) более интересен; он описывает направленность излучения волны Ω , возбуждаемой распределенными в пространстве нелинейными источниками.

$$D_l = \left[\frac{2}{x_{\text{зат}}} - iK\left(1 - \frac{x}{R}\right)\right]^{-1}, \quad |D_l| = \frac{x_{\text{зат}}}{2} \left[1 + (Kx_{\text{зат}})^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}\right]^{1/2}. \quad (10)$$

Здесь учтено, что $1 - x/R = 1 - \cos\theta = 2 \sin^2(\theta/2)$; θ — угол между осью пучка x и направлением на точку наблюдения.

Когда $Kx_{\text{зат}} \gg 1$ (вдоль области взаимодействия укладывается много длин волн разностной частоты), излучение направлено под малыми углами к оси. Характерная угловая ширина диаграммы направленности, как следует из (10), равна

$$\Delta\theta_l \sim (Kx_{\text{зат}})^{-1/2} \sim (\Lambda/x_{\text{зат}})^{1/2}. \quad (11)$$

Ширина диаграммы (11), определяемая продольным распределением поля $u^{(1)}$, как правило, много меньше ширины, определяемой поперечным распределением (8). Именно ширина поля (11) определяет узкую направленность низкочастотного излучения.

5.4.16. Оценить угловую ширину диаграммы направленности низкочастотного излучения, определяемую формулой (11) преды-

ушей задачи. Сигнал разностной частоты 100 кГц возбуждается двумя волнами накачки: 1 и 1,1 МГц в воде. Значение коэффициента поглощения приведено в задаче 5.3.3.

Ответ. $\Delta\theta_l \approx 2 \cdot 10^{-2}$ — угловая ширина около одного градуса.

5.4.17. Рассчитать продольный апертурный множитель (см. (15.9)) для области взаимодействия незатухающих ($x_{\text{зат}} \rightarrow \infty$) волн накачки, которая при $x = l$ ограничена фильтром, поглощающим высокие частоты и пропускающим низкую частоту.

Ответ. $|D_l| = l \operatorname{sinc}[Kl \sin^2(\theta/2)]$, где $\operatorname{sinc} x = (\sin x)/x$. Заметим, что в отличие от (15.10), когда область взаимодействия волн высоких частот ограничена их затуханием, в случае ограничения фильтром диаграмма низкочастотной волны содержит боковые лепестки.

5.5. Акустические шумы большой интенсивности

5.5.1. Пренебрегая флуктуациями частоты, найти вероятностное распределение и среднее для длины образования разрыва плоской квазимонохроматической волны, считая известным вероятностное распределение амплитуды $W_a(a)$.

Решение. Длина образования разрыва x_p плоской монохроматической волны равна $x_p = c_0^2/(\epsilon \omega a)$, где ω — частота, a — амплитуда волны. Эту же формулу можно применить для квазимонохроматической волны, когда амплитуда и частота мало меняются на периоде. Задача сводится к нелинейному преобразованию

$$x_p = f(a). \quad (1)$$

Если обратная функция $a = f^{-1}(x_p)$ однозначна, то вероятностное распределение $W_x(x_p)$ связано с $W_a(a)$ соотношением

$$W_x(x_p) = W_a[f^{-1}(x_p)] \left| \frac{df^{-1}(x_p)}{dx_p} \right|. \quad (2)$$

Для моментов величины x_p имеем

$$\langle x_p^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^n(a) W(a) da. \quad (3)$$

Для вероятностного распределения длины образования разрыва и ее среднего получаем

$$W_x(x_p) = W_a \left[\frac{c_0^2}{\epsilon \omega x_p} \right] \frac{c_0^2}{\epsilon \omega x_p^2}, \quad \langle x_p \rangle = \frac{c_0^2}{\epsilon \omega} \int_0^{\infty} W_a(a) a^{-1} da. \quad (4)$$

5.5.2. В условиях задачи 5.5.1 проанализировать случай, когда входной сигнал гауссов с дисперсией σ^2 . Использовать,

что вероятностное распределение амплитуды гауссова сигнала имеет рэлеевское распределение

$$W_a(a) = \frac{a}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (1)$$

Ответ. Для вероятностного распределения длины образования разрыва и ее среднего из (1.4) имеем

$$W_x(x_p) = \frac{c_0}{\varepsilon^2 \omega^2 \sigma^2 x_p^3} \exp\left[-\frac{c_0}{2\varepsilon^2 \omega^2 \sigma^2 x_p^2}\right], \quad \langle x_p \rangle = \left[\frac{\pi}{2}\right]^{1/2} \frac{c_0^2}{\varepsilon \omega \sigma}.$$

5.5.3. Найти вероятностное распределение амплитуды разрыва квазимонохроматической волны

$$u_0(\tau) = a \sin(\omega\tau + \varphi), \quad (1)$$

считая, что входной сигнал гауссов. Флуктуациями частоты пренебречь.

Решение. Амплитуда разрыва определяется из уравнения (см. задачу 5.2.11)

$$\arcsin \frac{u_p}{a} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega u_p x. \quad (2)$$

Используя формулу (1.2) и учитывая, что при $a < c_0^2/\varepsilon \omega x$ разрывы не образуются (формально их амплитуда равна нулю), для вероятностного распределения амплитуды разрыва $W_u(u_p)$ имеем

$$W_u(u_p) = \delta(u_p) \int_0^{c_0^2/\varepsilon \omega x} W_a(a) da + W_a\left[\frac{u_p}{\sin(\varepsilon c_0^{-2} \omega u_p x)}\right] \frac{d}{du_p} \left[\frac{u_p}{\sin(\varepsilon c_0^{-2} \omega u_p x)}\right]. \quad (3)$$

Для гауссова входного сигнала, когда амплитуда распределена по рэлеевскому закону (2.1), из (3) получаем

$$W_u(u_p) = \delta(u_p) \left[1 - \exp\left[-\frac{c_0^4}{2\varepsilon^2 \omega^2 \sigma^2 x^2}\right]\right] + \exp\left[-\frac{u_p^2}{2\sigma^2 \sin^2(\varepsilon c_0^{-2} \omega u_p x)}\right] \frac{1}{2\sigma^2} \frac{d}{du_p} \left[\frac{u_p}{\sin(\varepsilon c_0^{-2} \omega u_p x)}\right]^2. \quad (4)$$

5.5.4. Найти среднее в единицу времени число разрывов $\bar{n}$ на расстоянии x от входа для квазимонохроматического гауссова входного сигнала. Использовать результаты задачи 5.5.3.

$$\text{Ответ. } \bar{n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{c_0^2/\varepsilon \omega x} W_a(a) da = \frac{\omega}{2\pi} e^{-1/2z^2}, \quad z = \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega \sigma x.$$

5.5.5. На начальной стадии проявления нелинейных эффектов (расстояния $x/x_p \ll 1$) для амплитуд высших гармоник простой волны справедливы выражения (1.13.4). Считая, что на входе заданы регулярный монохроматический сигнал амплитуды a_0 и

гауссов квазимонохроматический сигнал с дисперсией σ^2 такие, что интенсивность у них одинакова ($\sigma^2 = a_0^2/2$), сравнить интенсивности высших гармоник шумового ($J_n^{(N)}$) и регулярного ($J_n^{(S)}$) сигналов.

Ответ. $J_n^{(N)}/J_n^{(S)} = n!$

5.5.6. Найти корреляционную функцию и спектр простой волны на начальной стадии, ограничиваясь первым приближением в решении уравнения простой волны методом возмущений. Считать, что входной сигнал стационарен, гауссов, с нулевым средним, с корреляционной функцией $B_0(\rho)$ и спектром $S_0(\omega)$.

Решение В первом приближении решение уравнения простой волны (5.3) можно представить в виде

$$u(x, \tau) = u_0(\tau) + u_1(x, \tau), \quad (1)$$

$$u_1(x, \tau) = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} x \frac{d}{d\tau} y(\tau), \quad y(\tau) \equiv u_0^2(\tau), \quad (2)$$

т.е. связь u_1 и u_0 представляет последовательность квадратичного детектора и дифференцирующей цепочки. Для корреляционной функции $y(\tau)$ при гауссовом входном сигнале имеем

$$K_y(\rho) = \langle y(\tau) y(\tau + \rho) \rangle = B_0^2(0) + 2B_0^2(\rho) \quad (3)$$

С учетом связи процесса и его производной для корреляционной функции простой волны получаем

$$B_u(x, \rho) = \langle u(x, \tau) u(x, \tau + \rho) \rangle = B_0(\rho) - \frac{\varepsilon^2 x^2}{2c_0^4} \frac{d^2}{d\rho^2} B_0^2(\rho). \quad (4)$$

Так как возведению в квадрат корреляционной функции соответствует свертка спектров, то для спектра простой волны из (4) следует

$$g_u(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_u(x, \rho) e^{i\omega\rho} d\rho = S_0(\omega) + \frac{\varepsilon^2 x^2 \omega^2}{2c_0^4} S_0(\omega) \otimes S_0(\omega), \quad (5)$$

$$S_0 \otimes S_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega - \Omega) S_0(\Omega) d\Omega \quad (6)$$

5.5.7. Найти спектр простой волны на начальной стадии для гауссова входного сигнала для а) широкополосного шума с корреляционной функцией $B_0(\rho) = \sigma^2 \exp(-\Delta^2 \rho^2/2)$, б) узкополосного шума с функцией $B_0(\rho) = \sigma^2 \exp(-\Delta^2 \rho^2/2) \cos(\omega_0 \rho)$ ($\omega_0 \gg \Delta$).

Ответ. Используя результаты предыдущей задачи, получаем

$$а) S_u(x, \omega) = \frac{\sigma^2}{(2\pi\Delta^2)^{1/2}} \left[\exp\left[-\frac{\omega^2}{2\Delta^2}\right] + \frac{\varepsilon^2 \omega^2 \sigma^2 x^2}{2\sqrt{2}c_0^4} \exp\left[-\frac{\omega^2}{4\Delta^2}\right] \right]$$

— нелинейное взаимодействие приводит к уширению спектра;

$$б) S_u(x, \omega) = \frac{\sigma^2}{2(2\pi\Delta^2)^{1/2}} \left\{ \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\Delta^2}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{2\Delta^2}\right] + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^2 \omega^2 \sigma^2 x^2}{4\sqrt{2}c_0^4} \left[2 \exp\left[-\frac{\omega^2}{4\Delta^2}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega-2\omega_0)^2}{4\Delta^2}\right] + \exp\left[\frac{(\omega+2\omega_0)^2}{4\Delta^2}\right] \right] \right\}$$

— новые спектральные компоненты возникают вблизи нулевой частоты и вблизи удвоенной частоты $\omega = 2\omega_0$.

5.5.8. Найти усредненную по времени корреляционную функцию простой волны на начальной стадии для входного квазимонохроматического сигнала с гауссовыми фазовыми флуктуациями

$$u_0(\tau) = a_0 \cos[\omega_0 \tau + \varphi(\tau)], \quad (1)$$

считая известной структурную функцию флуктуаций фазы

$$D_\varphi(\rho) = \langle [\varphi(\tau+\rho) - \varphi(\tau)]^2 \rangle. \quad (2)$$

Описать качественно спектральный состав волны.

Ответ.

$$K_u(x, \rho) = \frac{1}{2} a_0^2 \cos(\omega_0 \rho) \exp\left[-\frac{1}{2} D_\varphi(\rho)\right] - \\ - \frac{\varepsilon^2 a_0^4 x^2}{32 c_0^4} \frac{d^2}{d\rho^2} \cos(2\omega_0 \rho) \exp[-2D_\varphi(\rho)], \quad (3)$$

или, учитывая медленность флуктуации фазы,

$$K_u(x, \rho) \approx \frac{1}{2} a_0^2 \cos(\omega_0 \rho) \exp\left[-\frac{1}{2} D_\varphi(\rho)\right] + \\ + \frac{\varepsilon^2 \omega_0^2 a_0^4 x^2}{8 c_0^4} \cos(2\omega_0 \rho) \exp[-2D_\varphi(\rho)] \quad (4)$$

Нелинейное взаимодействие в этом случае приводит к появлению спектральных составляющих вблизи удвоенной гармоник сигнала.

5.5.9. В условиях задачи 5.5.8 найти спектр простой волны на начальной стадии для сигнала с ограниченными и малыми фазовыми флуктуациями ($D_\varphi(\rho) = 2[\sigma_\varphi^2 - B_\varphi(\rho)]$, $\sigma_\varphi^2 \ll 1$), считая известным их спектр $g_\varphi(\omega)$

Ответ

$$g_u(x, \omega) = \frac{a_0^2}{4} \left\{ (1-\sigma_\varphi^2) [\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] + g_\varphi(\omega-\omega_0) + g_\varphi(\omega+\omega_0) \right\} + \\ + \frac{\varepsilon^2 \omega^2 a_0^4 x^2}{64 c_0^4} \left\{ (1-4\sigma_\varphi^2) [\delta(\omega-2\omega_0) + \delta(\omega+2\omega_0)] + 4g_\varphi(\omega-2\omega_0) + 4g_\varphi(\omega+2\omega_0) \right\}.$$

5.5.10. Найти спектр простой волны на начальной стадии для входного сигнала с малыми амплитудными флуктуациями

$$u_0(\tau) = a_0[1 + \alpha(\tau)] \cos(\omega_0 \tau + \varphi_0), \quad \langle \alpha^2 \rangle \ll 1, \quad (1)$$

считая известным спектр амплитудных флуктуаций $g_{\alpha}(\omega)$. Сравнить полученный спектр со спектром в случае малых фазовых флуктуаций (см. задачу 5.5.9).

Ответ.

$$g_{\alpha}(x, \omega) = \frac{a_0^2}{4} \left\{ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) + g_{\alpha}(\omega - \omega_0) + g_{\alpha}(\omega + \omega_0) \right\} + \\ + \frac{\varepsilon^2 \omega^2 a_0^4 x^2}{64 c_0^4} \left\{ 4g_{\alpha}(\omega) + \delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0) + 4g_{\alpha}(\omega - 2\omega_0) + 4g_{\alpha}(\omega + 2\omega_0) \right\}.$$

В этом случае в отличие от сигнала с фазовыми флуктуациями происходит детектирование сигнала и появление низкочастотных компонент — первое слагаемое во вторых квадратных скобках.

5.5.11. Найти спектр простой волны, используя выражение для ее фурье-образа (см. задачу 1.16.4), считая, что на входе задан стационарный шум с характеристической функцией

$$\Theta_2(\gamma_1, \gamma_2, \rho) = \langle \exp[i\gamma_1 \Phi(\tau) + i\gamma_2 \Phi(\tau + \rho)] \rangle, \quad (1)$$

где $\Phi(\tau) = u_0(x=0, \tau)$. Рассмотреть поведение спектра на начальной стадии.

Решение. Для стационарного процесса фурье-образ $C(\omega)$ и спектр мощности $g(\omega)$ связаны соотношением

$$\langle C(\omega) C^*(\omega') \rangle = g(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (2)$$

Умножая фурье-образ простой волны $C(x, \omega)$ на комплексно сопряженную величину $C^*(x, \omega')$ и усредняя, получаем

$$\langle C(\omega) C^*(\omega') \rangle = \frac{1}{4\pi^2 \omega \omega' (\varepsilon/c_0^2)^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Theta_2 \left[\omega \left[\frac{\varepsilon}{c_0^2} \right] x, -\omega' \left[\frac{\varepsilon}{c_0^2} \right] x; \xi_2 - \xi_1 \right] - \right. \\ \left. - \Theta_1 \left[\omega \left[\frac{\varepsilon}{c_0^2} \right] x \right] - \Theta_1 \left[-\omega' \left[\frac{\varepsilon}{c_0^2} \right] x \right] + 1 \right\} \exp(-i\omega \xi_1 + i\omega' \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

здесь $\Theta_1(\gamma) = \langle \exp[i\gamma \Phi(\tau)] \rangle$ — одномерная характеристическая функция. Переходя к интегрированию по $\xi = \xi_2 - \xi_1$ и ξ_1 и учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \xi} d\xi = \delta(\omega),$$

для спектра интенсивности получаем

$$g(x, \omega) = \frac{1}{2\pi \omega^2 (\varepsilon/c_0^2)^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Theta_2 \left[\omega \left[\frac{\varepsilon}{c_0^2} \right] x, -\omega \left[\frac{\varepsilon}{c_0^2} \right] x; \xi \right] - \right. \\ \left. - \Theta_1 \left[\omega \left[\frac{\varepsilon}{c_0^2} \right] x \right] - \Theta_1 \left[-\omega \left[\frac{\varepsilon}{c_0^2} \right] x \right] + 1 \right\} e^{i\omega \xi} d\xi. \quad (3)$$

Пусть для простоты $\langle \Phi \rangle = 0$, тогда, разлагая характеристическую функцию в ряд по моментам, имеем

$$\Theta_2(\gamma_1, \gamma_2, \xi) = 1 - \frac{1}{2} \gamma_1^2 \sigma^2 - \frac{1}{2} \gamma_2^2 \sigma^2 - \gamma_1 \gamma_2 B_0(\xi) + \dots, \\ \Theta_1(\gamma) = 1 - \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma^2 + \dots, \quad (4)$$

где $\sigma^2 = \langle \Phi^2 \rangle$, $B_0(\xi) = \langle \Phi_0(\tau) \Phi_0(\tau + \xi) \rangle$. Из (3) при $x \rightarrow 0$ имеем

$$g(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi = g_0(\omega),$$

где $g_0(\omega)$ — спектр сигнала на входе.

5.5.12. Найти спектр простой волны, считая, что на входе задан стационарный гауссов шум с нулевым средним и корреляционной функцией $B_0(\xi)$.

Ответ. Используя выражения для характеристической функции гауссова процесса, из (11.3) получаем

$$g(x, \omega) = \frac{\exp[-\omega^2 (\varepsilon/x_0^2)^2 \sigma_0^2 x^2]}{2\pi \omega^2 (\varepsilon/c_0^2)^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[\omega^2 \left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \right)^2 x^2 B_0(\xi) \right] - 1 \right\} e^{i\omega\xi} d\xi, \quad (1)$$

где $\sigma_0^2 = B_0(0)$ — дисперсия входного сигнала.

Примечание. Двухточечную характеристическую функцию гауссова процесса легко получить, вспомнив, что для гауссовой случайной величины α справедливо равенство

$$\langle e^{i\gamma\alpha} \rangle = \exp \left[i\gamma \langle \alpha \rangle - \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_\alpha^2 \right], \quad \text{где } \sigma_\alpha^2 = \langle (\alpha - \langle \alpha \rangle)^2 \rangle.$$

5.5.13. Считая, что корреляционная функция гауссова сигнала характеризуется единственным временным масштабом $\tau_* = 1/\omega_0$ и имеет вид $B_0(\xi) = \sigma_0^2 \tilde{R}(\xi/\omega_0)$, написать выражение для спектра простой волны (см. (12.1)) в безразмерном виде.

Ответ.

$$g(x, \omega) = \sigma_0^2 \omega_0 \tilde{g}(z, \Omega), \quad \Omega = \omega/\omega_0, \quad z = (\varepsilon/c_0^2) \sigma_0 \omega_0 x, \quad (1)$$

$$\tilde{g}(z, \Omega) = \frac{e^{-z^2 \Omega^2}}{2\pi z^2 \Omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[z^2 \Omega^2 \tilde{R}(\eta) \right] - 1 \right\} e^{i\Omega\eta} d\eta. \quad (2)$$

5.5.14. Проанализировать эволюцию спектра и корреляционной функции простой волны, представляющей на входе квазимонохроматический сигнал с корреляционной функцией

$$B_0(\xi) = \sigma^2 b_0(\xi) \cos(\omega_0 \xi), \quad b_0(\xi) = \tilde{b}(\Delta \xi), \quad (1)$$

где $b_0(\xi)$ — медленная (в масштабе $\cos(\omega_0 \xi)$) функция, характеризующаяся масштабом $T = 1/\Delta_*$ таким, что $\mu = \Delta_*/\omega_0 \ll 1$.

Решение. Используя замену переменных (13.1), для безразмерного спектра из (13.2) получаем

$$g(z, \Omega) = \frac{e^{-z^2 \Omega^2}}{2\pi z^2 \Omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[z^2 \Omega^2 \tilde{b}_0(\mu\eta) \cos \eta \right] - 1 \right\} e^{i\Omega\eta} d\eta. \quad (2)$$

Используя разложение экспоненты по модифицированным функциям Бесселя $I_n(z)$, можно представить (2) в виде суммы спектров на гармониках сигнала и низкочастотной компоненты:

$$g(z, \Omega) = g_0(z, \Omega) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z, \Omega), \quad (3)$$

$$g_0(z, \Omega) = \frac{e^{-z^2 \Omega^2}}{2\pi z^2 \Omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ I_0 \left[z^2 \Omega^2 \tilde{b}_0(\mu\eta) \right] \cos \eta - 1 \right\} e^{i\Omega\eta} d\eta, \quad (4)$$

$$g_n(z, \Omega) = \frac{2e^{-z^2 \Omega^2}}{2\pi z^2 \Omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ I_n \left[z^2 \Omega^2 \tilde{b}_0(\mu\eta) \right] e^{i\Omega\eta} \cos(n\eta) \right\} d\eta. \quad (5)$$

Поскольку $\mu \ll 1$, то спектр n -й гармоники сосредоточен вблизи $\Omega \approx n$ и в аргументах (5) можно заменить Ω на n , и тогда

$$g_n(z, \Omega) = \frac{2e^{-z^2 n^2}}{2\pi z^2 n^2} \int_{-\infty}^{\infty} I_n \left[z^2 n^2 \tilde{b}_0(\mu\eta) \right] e^{i\Omega\eta} \cos(n\eta) d\eta. \quad (6)$$

Из (6) следует, что корреляционная функция может быть представлена как сумма корреляционных функций отдельных гармоник:

$$B_n(z, \xi) = \frac{2e^{-z^2 n^2}}{z^2 n^2} I_n \left[z^2 n^2 \tilde{b}_0(\mu\eta) \right] \cos(n\xi) \quad (7)$$

и низкочастотной компоненты. Используя разложение функций Бесселя, можно показать, что эффективность генерации гармоник на начальной стадии для шума в $n!$ раз больше, чем для регулярного сигнала (см. задачу 5.5.5).

5.5.15. Используя результаты задачи 5.5.14, найти выражение для низкочастотной части спектра, возникающей из-за детектирования модулированного высокочастотного сигнала, и оценить ширину спектра n -й гармоники $\Delta\omega_n$ на начальной стадии, считая, что на входе $b_0(\xi) = \exp(-\xi^2 \Delta^2/2)$, $\tilde{b}(\eta) = \exp(-\eta/2)$.

Решение. Для низкочастотной компоненты при $z < 1$ (приближение простой волны) имеем $I_0(\gamma) = 1 + \gamma^2/4$, и тогда

$$g_0(z, \Omega) = \frac{1}{4} z^2 \Omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} b_0^2(\mu\eta) e^{i\Omega\eta} d\eta = \frac{z^2 \Omega^2}{4\sqrt{4\pi}\mu^2} \exp \left[-\frac{\Omega^2}{4\mu^2} \right]. \quad (1)$$

Для высших гармоник при $z \ll 1$ имеем $I_n(z) \sim z^n$, и тогда

$$g_n(z, \Omega) \sim \int_{-\infty}^{\infty} b^n(\mu\eta) e^{i\Omega\eta} \cos(n\eta) d\eta \sim \exp \left[-\frac{(\Omega - n)^2}{2n\mu^2} \right],$$

таким образом, $\Delta\Omega_n \sim \sqrt{n} \mu$ или $\Delta\omega_n \sim \Delta\sqrt{n}$. При $\Delta\omega_n \sim \omega_0$ спектры гармоник сливаются.

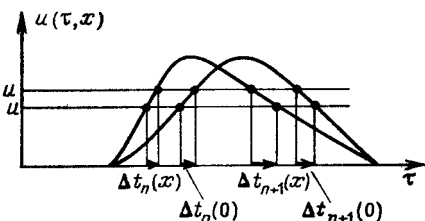
5.5.16. Используя решение простой волны, показать, что для стационарного шума однотоочечное вероятностное распределение сохранится. Предположить, что выполняется условия эргодичности.

Ответ. Для эргодичного процесса вероятностное распределение совпадает с относительным временем пребывания процесса в интервале $u, u + \Delta u$ (см. рисунок):

$$W_n(u, x) = \lim_{T \rightarrow \infty, \Delta u \rightarrow 0} (T \Delta u)^{-1} \sum \Delta t_n. \quad (1)$$

Здесь T — общая длина интервала, Δt_n — длина интервала, где функция находится в промежутке $u, u + \Delta u$. Из-за нелинейных искажений длина каждого из интервалов будет меняться. Так как для каждой точки профиля в сопровождающей системе координат $t = t_0 - (x/c_0^2) u$, то

$$\Delta t_n(x) = \Delta t_n(0) \pm \frac{\varepsilon}{c^2} x \Delta u, \quad (2)$$



К задаче 5.5.16

и сумма двух любых соседних временных интервалов постоянна: $\Delta t_n + \Delta t_{n+1} = \text{const}$; следовательно, не меняется и вероятностное распределение. К изменению вероятностного распределения приводит образование разрывов.

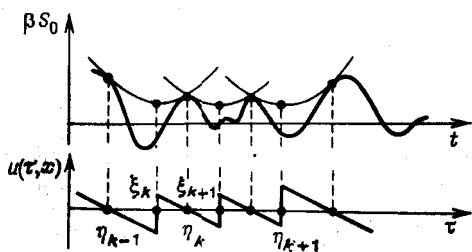
5.5.17. Найти вероятностное распределение гармонического на входе сигнала $u_0(\tau) = a \sin(\omega_0 \tau + \varphi)$ со случайной фазой, равномерно распределенной в интервале $[-\pi, \pi]$. Рассмотреть стадию до образования разрывов ($x < x_p = c_0^2/\varepsilon \omega_0 a$) и стадию развитых разрывов ($x \ll x_p$).

Ответ. (Здесь $\Delta V = \pi c_0^2/\varepsilon \omega x$.)

$$W(u, x) = \pi^{-1}(a^2 - u^2)^{-1/2}, \quad x < x_p; \quad W(u, x) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta V}, & |u| < \Delta V, \\ 0, & |u| > \Delta V, \end{cases} \quad x \gg x_p,$$

5.5.18. Используя предельное решение уравнения Бюргерса при бесконечно малой вязкости (см. задачу 5.3.10), показать, что стационарный непрерывный на входе шум превращается на достаточно больших расстояниях в последовательности пилообразных импульсов с одинаковым наклоном. Найти скорость отдельного разрыва.

Решение. Пусть входной шум имеет дисперсию $\sigma_u^2 = \langle u_0^2(\tau) \rangle$ и характеризуется масштабом τ_0 . Тогда характерная кривизна функции $\beta S_0(\tau)$, входящей в предельное решение, равна $\beta S_0''(\tau) \sim \beta \sigma_u / \tau_0$. Кривизна параболы α в этом же решении равна $1/x$. При $\beta \sigma_u x / \tau_0 \gg 1$ парабола $\alpha(t, \tau, x)$ — плавная функция t в масштабе $\beta S_0(t)$. Поэтому точки касания $\beta S_0(t)$ и $\alpha(t, \tau, x)$ близки к некоторым максимумам $\beta S_0(t)$ (см. рисунок). Поле



К задаче 5.5.18

$u(\tau, x)$ полностью определяется системой критических парабол — парабол, имеющих двойные точки касания с $\beta S_0(t)$. Координаты центров критических парабол определяют положение разрывов ξ_k , и точки пересечения крити-

ческих парабол (совпадающие с некоторыми максимумами $\beta S_0(t)$) определяют нули η_k поля $u(x, \tau)$. Действительно, в интервале между ξ_k и ξ_{k+1} парабола α касается $\beta S_0(t)$ практически в одной и той же точке η_k , а это и означает, что поле $u(\tau, x)$ в интервалах между разрывами имеет универсальную структуру:

$$u(\tau, x) = (\eta_k - \tau) / (\beta x), \quad \xi_k < \tau < \xi_{k+1} \quad (1)$$

Положение разрыва определяется из условия двойного касания α и βS_0 , и для координаты разрыва имеем выражение

$$\xi_k = \frac{\eta_k + \eta_{k-1}}{2} - \beta x \frac{S(\eta_k) - S(\eta_{k-1})}{\eta_k - \eta_{k-1}}, \quad (2)$$

причем "скорость" движения разрыва постоянна:

$$V_k = \frac{d\xi_k}{dx} = -\beta \frac{S(\eta_k) - S(\eta_{k-1})}{\eta_k - \eta_{k-1}}. \quad (3)$$

Таким образом, профиль поля $u(\tau, x)$ на этой стадии представляет совокупность наклонных линий с одинаковыми наклонами $-1/(\beta x)$, выходящих из "нулей" $\tau = \eta_k$. Эти линии соединены вертикальными линиями — разрывами, имеющими координаты ξ_k . Расстояние между отдельными соседними разрывами $\Delta_k = \xi_{k+1} - \xi_k$ может как возрастать, так и уменьшаться. Если Δ_k уменьшается, то разрывы сливаются и превращаются в один с амплитудой, равной сумме амплитуд слившихся разрывов.

5.5.19. Предполагая, что случайное поле $u(\tau, x)$ характеризуется единственным масштабом $\tau(x)$, оценить рост этого масштаба из-за слияния разрывов.

Решение. При случайных возмущениях $u_0(\tau)$ скорости разрывов также случайны. Вследствие этого будут происходить сталкивание и слипание разрывов, приводящие к увеличению характерного временного масштаба поля $\tau(x)$. Оценку роста $\tau(x)$ можно получить, написав уравнение для средней частоты следования разрывов в единицу времени $n(x)$: $n(x) = 1/\tau(x)$. Уменьшение $n(x)$ за счет столкновений пропорционально числу разрывов $n(x)$ и отношению характерной "скорости" сближения разрывов $\Delta V = V_{k+1} - V_k$ к характерному расстоянию между ними $\tau = 1/n$:

$$\frac{dn}{dx} = -n \left[\frac{\Delta V}{\tau} \right] = -n^2 \Delta V. \quad (1)$$

В качестве оценки "скорости" сближения разрывов можно считать, что ΔV порядка характерного разброса скорости разрыва $\langle V_k^2 \rangle$. Используя выражение для "скорости" разрыва (см. (18.3)), для $\langle \Delta V_k^2 \rangle$ получаем оценку

$$\langle \Delta V_k^2 \rangle \approx \langle V_k^2 \rangle \approx \frac{\beta^2}{\tau^2} \langle S_0(\eta + \tau) - S_0(\eta) \rangle^2, \quad (2)$$

или, если задана $B_0(\tau) = \langle u_0(\eta + \tau) u_0(\eta) \rangle$ ($B_0(0) = \sigma_0^2$ — корреляционная функция входного сигнала), то

$$\langle \Delta V^2 \rangle = \beta^2 n \int_0^{1/n} (1 - \eta n) B_0(\eta) d\eta = \begin{cases} n \sigma_0^2 \tau_0, & D \neq 0, \\ n^2 \sigma_0^2 \tau_0^2, & D = 0, \end{cases} \quad (3)$$

здесь $D = \int_0^\infty B_0(\eta) d\eta$ — спектр начального возмущения на нулевой частоте. (При $D \neq 0$ исходное время корреляции τ_0 определяется из $D = \sigma_0^2 \tau_0$, при $D = 0$ — из $\int_0^\infty \eta B_0(\eta) d\eta = -\sigma_0^2 \tau_0^2$.) Подставляя (3) в (1), для роста внешнего масштаба получаем:

$$\tau(x) \approx \begin{cases} \tau_0 (x/x_p)^{2/3}, & D \neq 0, \\ \tau_0 (x/x_p)^{1/2}, & D = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$x_p = \tau_0 / \beta \sigma_0$ — характерная длина проявления нелинейных эффектов.

5.5.20. Предполагая, что статистические характеристики интенсивного шума автомодельные, найти спектр мощности волны. Оценить энергию поля на стадии развитых разрывов.

Ответ. $S(\omega, x) = [\tau^3(x) / \beta^2 x^2] \mathfrak{Z}(\omega, \tau)$, где $\mathfrak{Z}$ — универсальная безразмерная функция;

$$\langle u^2(x, \tau) \rangle \approx \frac{\tau^2(x)}{\beta^2 x^2} \approx \sigma_n^2 \begin{cases} (x_p/x)^{2/3}, & D \neq 0, \\ (x_p/x), & D = 0. \end{cases}$$

Таким образом, из-за слияния разрывов энергия шума спадает медленнее, чем для гармонического входного сигнала, для которого $\langle u^2 \rangle \sim x^{-2}$.

6. УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

6.1. Волны в неограниченных твердых телах

6.1.1. Исходя из общих динамических уравнений теории упругости, вывести уравнение Ламе, описывающее поле вектора смещений в изотропном твердом теле.

Решение. Воспользуемся уравнением движения

$$\rho \partial^2 u_i / \partial t^2 = \partial T_{ij} / \partial x_j = F_i, \quad (1)$$

представляющим собой второй закон Ньютона для элемента упругой деформируемой среды. Здесь u_i — вектор смещений частиц, T_{ij} — тензор напряжений, дивергенция которого определяет объемную силу F_i . Для жидких сред, которые не испытывают упругой реакции на деформацию сдвига, $T_{ij} = -p\delta_{ij}$, где p — акустическое давление. По дважды повторяющимся индексам (индекс j в уравнении (1)) подразумевается суммирование.

Тензор напряжений связан с тензором деформаций S_{ij} уравнением состояния, которое для малых деформаций (линейное приближение) имеет вид закона Гука

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl}. \quad (2)$$

Здесь c_{ijkl} — упругие модули, образующие тензор четвертого ранга, а тензор деформаций связан с компонентами вектора смещений формулой

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]. \quad (3)$$

Для изотропной среды

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (4)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, λ и μ — постоянные Ламе, и закон Гука (2) принимает вид

$$T_{ij} = \lambda S_{kk} \delta_{ij} + 2\mu S_{ij}. \quad (5)$$

Подставляя (3), (5) в (1), получим искомое уравнение Ламе:

$$\rho \partial^2 u_i / \partial t^2 = (\lambda + \mu) \partial^2 u_k / \partial x_i \partial x_k + \mu \partial^2 u_i / \partial x_k^2. \quad (6)$$

Оно может быть записано также в векторной форме:

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (7)$$

6.1.2. Показать, что решение уравнения Ламе, описывающее движение частиц изотропной упругой среды, можно представить как сумму решений двух волновых уравнений, содержащих разные скорости распространения волн.

Решение. Исходя из того, что любые векторные поля можно представить в виде суммы их потенциальной и вихревой частей и такое представление единственно, запишем смещение в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}_l$ и $\mathbf{u}_t$ таковы, что $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0$, т.е. $\mathbf{u}_l$ и $\mathbf{u}_t$ представимы в виде: $\mathbf{u}_t = \operatorname{rot} \vec{\psi}$, $\mathbf{u}_l = \operatorname{grad} \varphi$. Функции φ и $\vec{\psi}$ называют скалярным и векторным потенциалами. Подстановка (1) в уравнение Ламе дает

$$\rho \partial^2 \mathbf{u}_l / \partial t^2 + \rho \partial^2 \mathbf{u}_t / \partial t^2 = \mu \Delta (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_l. \quad (2)$$

Применяя к уравнению (2) операцию div и учитывая соотношение $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0$, получаем

$$\operatorname{div} [\rho \partial^2 \mathbf{u}_l / \partial t^2 - (\lambda + 2\mu) \Delta \mathbf{u}_l] = 0. \quad (3)$$

С другой стороны, поскольку $\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0$, можно написать

$$\operatorname{rot} [\rho \partial^2 \mathbf{u}_l / \partial t^2 - (\lambda + 2\mu) \Delta \mathbf{u}_l] = 0. \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) выполняются вместе лишь при условии, что входящее в них векторное выражение в квадратных скобках тождественно равно нулю:

$$\rho \partial^2 \mathbf{u}_l / \partial t^2 - (\lambda + 2\mu) \Delta \mathbf{u}_l = 0. \quad (5)$$

Применяя далее к уравнению (2) операцию rot с учетом соотношения $\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0$, получаем

$$\operatorname{rot} [\rho \partial^2 \mathbf{u}_t / \partial t^2 - \mu \Delta \mathbf{u}_t] = 0. \quad (6)$$

Из соотношения $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0$ также следует, что

$$\operatorname{div} [\rho \partial^2 \mathbf{u}_t / \partial t^2 - \mu \Delta \mathbf{u}_t] = 0. \quad (7)$$

В итоге для $\mathbf{u}_t$ из (6) и (7) получаем волновое уравнение

$$\rho \partial^2 \mathbf{u}_t / \partial t^2 - \mu \Delta \mathbf{u}_t = 0. \quad (8)$$

Из (5) видно, что скорость распространения потенциальных возмущений c_l определяется выражением $c_l^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$. Вихре-

вые возмущения, как следует из (8), распространяются с меньшей скоростью c_t ($c_t^2 = \mu/\rho$) поскольку для твердых сред $\lambda > 0$.

6.1.3. Найти поляризацию плоских объемных гармонических волн в изотропной твердой среде, движение частиц которой описывается векторным уравнением Ламе.

Решение. В предыдущей задаче было показано, что решение уравнения Ламе можно представить в виде суммы решений u_l и u_t двух волновых уравнений, причем

$$\operatorname{rot} u_l = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u_t = 0. \quad (2)$$

Решение волнового уравнения для плоских гармонических волн имеет вид

$$u \sim u_0 \exp(ikr), \quad (3)$$

где k — волновой вектор, r — радиус-вектор, u_0 — амплитуда смещений в волне. Подставляя (3) в (1), получаем

$$[k, u_l] = 0, \quad (4)$$

т.е. плоские объемные упругие волны, распространяющиеся со скоростью $c_l = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ и представляющие собой волны сжатия и растяжения, поляризованы параллельно волновому вектору. Поэтому эти волны называют обычно продольными. Подстановка (3) в (2) дает

$$(k, u_t) = 0, \quad (5)$$

т.е. волны, распространяющиеся со скоростью $c_t = (\mu/\rho)^{1/2}$ и представляющие собою волны сдвига, поляризованы перпендикулярно волновому вектору. Поэтому их называют поперечными.

6.1.4. В приведенной на с. 179 таблице содержатся примерные значения упругих модулей и плотностей некоторых изотропных твердых тел. В каких из данных материалов скорости продольных и поперечных объемных волн максимальны, минимальны и равны средним значениям? Имеются ли среди включенных в таблицу материалов такие, для которых скорость продольных волн в одном из материалов приблизительно равна скорости сдвиговых волн в другом?

6.1.5. Из динамических уравнений теории упругости вывести закон сохранения энергии в дифференциальной форме и определить выражение для плотностей кинетической и потенциальной энергий и потока энергии (вектор Умова–Пойнтинга).

Материал	$\lambda, 10^{10} \text{ Н/м}^2$	$\mu, 10^{10} \text{ Н/м}^2$	$\rho, 10^3 \text{ кг/м}^3$
Поликристаллические металлы:			
Алюминий	6,1	2,5	2,7
Железо (сталь)	11	8	7,7
Латунь	8,5	3,2	8,5
Серебро	8,5	2,7	10,5
Свинец	3,3	0,55	11,4
Золото	15	2,8	19,7
Лед	5	4	0,9
Плексиглаз (оргстекло)	5,6	1,4	1,15
Стекло силикатное (плавленный кварц)	1,8	3,1	2,2
Известняк	4,6	2,76	2,7
Базальт	4,2	2,68	2,72

Решение. Умножив уравнение движения

$$\rho \partial^2 u_i / \partial t^2 = \partial T_{ij} / \partial x_j \quad (1)$$

на колебательную скорость $\partial u_i / \partial t$, получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 \right] = \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2)$$

Напомним, что по дважды повторяющимся индексам производится суммирование. Правую часть уравнения (2), используя связь деформаций и смещений

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3)$$

можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} T_{ij} \right] - T_{ij} \frac{\partial S_{ij}}{\partial t}. \quad (4)$$

С учетом закона Гука:

$$T_{ij} \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl}. \quad (5)$$

Подстановка формул (4), (5) в (2) приводит к искомому закону сохранения энергии в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} (W_K + W_P) + \text{div } \mathbf{P} = 0, \quad (6)$$

где $W_K = (\rho/2)(\partial u_i / \partial t)^2$ и $W_P = (1/2)c_{ijkl} S_{ij} S_{kl}$ — плотности кинетической и потенциальной энергий, $P_j = -(\partial u_i / \partial t) T_{ij}$ — плотность потока энергии (вектор Умова–Пойнтинга).

6.1.6. В образце из плавленого кварца распространяется объемная продольная волна с частотой $f = 30 \text{ МГц}$ и амплитудой

деформаций порядка 10^{-9} . Рассчитать скорость распространения, длину волны, амплитуду смещения, амплитуду колебательной скорости и интенсивность.

Решение. Скорость продольной волны в изотропном твердом теле равна

$$c_l = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}. \quad (1)$$

Длина волны Λ связана с периодом и частотой колебаний (T и f) соотношениями

$$\Lambda = c_l T = c_l / f. \quad (2)$$

Деформация в плоской продольной волне выражается через смещение по формуле

$$S = \frac{\partial u}{\partial x} \approx ik_l u = i \frac{2\pi u}{\Lambda}, \quad (3)$$

откуда для амплитудных значений смещения и колебательной скорости находим

$$|u| = (\Lambda/2\pi) |S|, \quad (4)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| = \omega |u| = 2\pi f |u| = c_l |S|. \quad (5)$$

Интенсивность волны равна средней по времени энергии, переносимой волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению ее распространения, т.е. в изотропном случае это модуль среднего по времени вектора Умова–Пойнтинга P . В рассматриваемой задаче интенсивность

$$\frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) |S| \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|. \quad (6)$$

Коэффициент $1/2$ в (6) обусловлен усреднением вектора по времени. Используя данные таблицы к задаче 6.1.4, по формулам (1), (2), (4)–(6) находим $c_l \approx 6,03 \cdot 10^3$ м/с, $\Lambda \approx 0,2$ мм, $|u| \approx 3 \cdot 10^{-14}$ м, $|\partial u / \partial t| \approx 6 \cdot 10^{-6}$ м/с, $I \approx 2,4 \cdot 10^{-8}$ Вт/см².

6.1.7. Для точечного гармонического во времени силового источника $f \delta(\mathbf{r})$, действующего в неограниченном однородном изотропном твердом теле, найти тензорную функцию Грина $G_{ij}(\mathbf{r}, \omega)$, связывающую поле смещений с возбуждающей силой: $u_i = G_{ij} f_j$.

Решение. Уравнение Ламе в рассматриваемой задаче:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = -f \delta(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где ω — частота колебаний источника. Ищем решение уравнения (1) методом преобразования Фурье, полагая

$$\mathbf{u} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (2)$$

Здесь $dk = dk_x dk_y dk_z$, $\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$. Подставляя (2) в (1), для фурье-образа $\mathbf{U}$ поля смещений получим алгебраическую систему уравнений

$$-\mu k^2 \mathbf{U} - (\lambda + \mu) \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{U}) + \rho \omega^2 \mathbf{U} = -\mathbf{f}. \quad (3)$$

Умножая (3) на $\mathbf{k}$, найдем выражение для скалярного произведения

$$\mathbf{k}\mathbf{U} = \mathbf{f}\mathbf{k} [(\lambda + 2\mu)k^2 - \rho\omega^2]^{-1}. \quad (4)$$

Теперь нужно подставить скалярное произведение (4) во второй член левой части уравнения (3). Разрешив полученное уравнение относительно $\mathbf{U}$, найдем

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{f}}{\mu k^2 - \rho\omega^2} - \frac{(\lambda + \mu)\mathbf{k}(\mathbf{f}\mathbf{k})}{[\mu k^2 - \rho\omega^2][(\lambda + 2\mu)k^2 - \rho\omega^2]}. \quad (5)$$

С помощью простых алгебраических преобразований удобно привести (5) к виду

$$\rho\omega^2 \mathbf{U} = \mathbf{f}k_t^2 \frac{1}{k^2 - k_t^2} + (\mathbf{f}\mathbf{k})\mathbf{k} \left[\frac{1}{k^2 - k_l^2} - \frac{1}{k^2 - k_t^2} \right]. \quad (6)$$

Далее необходимо совершить преобразование Фурье по формуле (2), где фурье-образ дается формулой (6). При этом полезно напомнить табличные значения тех интегралов, которые используются в процессе вычислений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{k}}{k^2 - k_0^2} = 2\pi^2 \frac{1}{r} e^{ik_0 r}, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_i k_j e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{k}}{k^2 - k_0^2} = -f_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{k}}{k^2 - k_0^2} = -2\pi^2 f_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{e^{ik_0 r}}{r}.$$

Результат вычислений таков ($u_i = G_{ij} f_j$):

$$G_{ij} = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left\{ \delta_{ij} k_t^2 \frac{e^{ik_t r}}{r} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{e^{ik_l r}}{r} - \frac{e^{ik_t r}}{r} \right] \right\}. \quad (7)$$

6.1.8. Записать решение уравнения Ламе (7.1) для пространственно-распределенного силового источника, воспользовавшись тензорной функцией Грина для точечного источника.

Решение. Из предыдущей задачи следует, что решение уравнения Ламе с δ -источником, локализованным в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$:

$$\hat{L}_{ij} u'_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -f_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1)$$

выражается через тензорную функцию Грина:

$$u'_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = f_j G_{ij}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (2)$$

Здесь $\hat{L}_{ij}$ — дифференциальный оператор, соответствующий уравнению Ламе, а координаты $\mathbf{r}'$ выступают в роли произвольных

внешних параметров. Будем считать, что вектор f_j зависит от координат $\mathbf{r}'$ так, что он описывает пространственное распределение силы для распределенного источника, т.е. функция $f_i(\mathbf{r}')$ при замене $\mathbf{r}'$ на $\mathbf{r}$ соответствует уравнению

$$\hat{L}_{ij} u_j(\mathbf{r}) = -f_i(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где u_j — искомое решение задачи для распределенного источника. Интегрируя (1) по штрихованным координатам, приходим к уравнению

$$\hat{L}_{ij} \int u'_j(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = - \int f_i(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -f_i(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Подставляя в интеграл левой части (4) выражение (2), получим

$$\hat{L}_{ij} \int G_{ij}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) f_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -f_i(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Из (3) и (5) видно, что искомое решение для пространственно-распределенного источника имеет вид

$$u_j(\mathbf{r}) = \int G_{ij}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) f_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (6)$$

6.2. Волны в твердых телах с плоской границей

6.2.1. Найти решение уравнения Ламе, описывающее распространение плоских гармонических волн вдоль границы полубесконечного твердого тела с вакуумом (волн Рэлея и объемных сдвиговых волн, поляризованных перпендикулярно направлению распространения и нормали к поверхности).

Решение. Ищем решение задачи в виде плоских гармонических волн, бегущих вдоль оси x в упругом полупространстве, занимающем область $z \leq 0$:

$$u_i = u_{i0} \exp(ik_x x - i\omega t), \quad (1)$$

где u_{i0} для поверхностных волн зависит от глубины z , а для объемных равна константе.

Подстановка (1) в векторное уравнение Ламе приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент u_{i0} , в которую входят производные только по координате z . Решение этой системы уравнений можно искать в виде

$$u_{i0} \sim \exp(ik_z z), \quad (2)$$

где k_z для поверхностных волн в отличие от k_x должно быть чисто мнимой (либо комплексной) величиной. Подстановка (1) и (2) в векторное уравнение Ламе приводит к следующей системе

алгебраических уравнений:

$$\begin{vmatrix} \mu k_z^2 + (\lambda + 2\mu) k_x^2 - \rho \omega^2 & 0 & (\lambda + \mu) k_z k_x \\ 0 & \mu(k_z^2 + k_x^2) - \rho \omega^2 & 0 \\ (\lambda + \mu) k_z k_x & 0 & (\lambda + 2\mu) k_z^2 + \mu k_x^2 - \rho \omega^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{x0} \\ u_{y0} \\ u_{z0} \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Для существования нетривиального решения системы уравнений (3) требуется равенство нулю ее определителя. Из этого условия находим возможные значения k_z :

$$k_z = \pm iq, \quad q \equiv \sqrt{k^2 - k_l^2}, \quad k_z = \pm is, \quad s \equiv \sqrt{k^2 - k_t^2}. \quad (4)$$

Здесь и далее через k обозначается k_x . Решение, соответствующее какому-либо из этих значений k_z , называют обычно парциальной волной. Соотношение компонент u_{x0} и u_{z0} для парциальных волн, как следует из (3), не может быть произвольным, а определяется выражением

$$u_{z0} = M(k_z) u_{x0}, \quad (5)$$

где

$$M(k_z) = - \frac{\mu k_z^2 + (\lambda + 2\mu) k^2 - \rho \omega^2}{(\lambda + \mu) k_z k} = - \frac{(\lambda + \mu) k_z k}{(\lambda + 2\mu) k_z^2 + \mu k^2 - \rho \omega^2}. \quad (6)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений для компонент u_{i0} для полугораниченной среды с учетом соотношений (4)–(6) можно записать в виде

$$u_{x0} = A \exp(qz) + B \exp(sz), \quad u_{y0} = C \exp(sz), \quad (7)$$

$$u_{z0} = A M(-q) \exp(qz) + B M(-s) \exp(sz),$$

где $M(-q) = -iq/k$, $M(-s) = -ik/s$; A , B , C — амплитуды парциальных волн. Из условия ограниченности решения на бесконечности амплитуды парциальных волн, нарастающих при удалении от границы, положены в решении (7) равными нулю.

Обратимся теперь к вопросу о выполнении граничных условий. Из теории упругости известно, что сила f_i , действующая на элемент поверхности площадью dS , связана с тензором упругих напряжений соотношением

$$f_i = T_{ij} n_j, \quad (8)$$

где n_j — компоненты единичной внешней нормали к поверхности. На границе с вакуумом внешние силы отсутствуют, и поэтому из условия непрерывности сил на границе выражение (8) должно обращаться в нуль. Для полупространства с нормалью вдоль оси

з это условие сводится к виду $T_{iz} = 0$, или

$$T_{xz} = \mu \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] = 0, \quad T_{yz} = \mu \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$T_{zz} = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

при $z = 0$. Подстановка сюда решения в форме (7) приводит к системе уравнений относительно констант A , B , C :

$$2qA + s \left[1 + \frac{k^2}{s^2} \right] B = 0, \quad sC = 0, \quad A \frac{k^2 + s^2}{k^2} + 2B = 0. \quad (10)$$

Последнее из уравнений (10) получено с учетом выражения

$$\frac{\lambda(k^2 - q^2)}{\mu k^2} - 2 \frac{q^2}{k^2} = - \frac{k^2 + s^2}{k^2}. \quad (11)$$

Из уравнений (10) следует, что $C \neq 0$ лишь при $s = 0$. Такое решение соответствует однородной объемной сдвиговой волне, поляризованной в трансверсальном направлении (перпендикулярном направлению распространения и нормали к поверхности):

$$u_y = C \exp(ik_1 x - i\omega t), \quad u_x = u_z = 0, \quad (12)$$

где C — произвольная амплитудная постоянная — определяется условиями возбуждения волны. Вслед за сейсмологами эту волну часто называют SH -волной, т.е. сдвиговой волной горизонтальной поляризации (SH — shear horizontal). Такая объемная волна не создает нормальных компонент напряжений на границе твердого тела, но она является неустойчивой в том отношении, что небольшие отклонения в начальной постановке задачи (например, нагрузка поверхности слоем (см. задачу 6.3.2) или наличие в среде пьезоэффекта (см. задачу 6.4.8)) могут сделать эту волну поверхностной.

Второй тип решения системы (10), для которого $A \neq 0$ и $B \neq 0$, соответствует поверхностной волне Рэлея. Для существования этой волны требуется, чтобы определитель матрицы коэффициентов при A и B системы (10) был равен нулю, т.е.

$$(k^2 + s^2)^2 - 4k^2 qs = 0. \quad (13)$$

Из этого условия находится скорость волн Рэлея. Решение для смещений в волне Рэлея находится из (7) и (10) и имеет вид

$$u_{x0} = A \left[e^{qz} - \frac{2qs}{(k^2 + s^2)} e^{sz} \right], \quad u_{z0} = -A \frac{iq}{k} \left[e^{qz} - \frac{2k^2}{(k^2 + s^2)} e^{sz} \right], \quad (14)$$

где A — произвольная амплитудная постоянная. Как следует из (14), волна Рэлея поляризована в сагиттальной плоскости,

проходящей через нормаль к поверхности и направление распространения.

6.2.2. Доказать, что волна Рэлея существует во всех реальных изотропных твердых телах.

Решение. Возводя дисперсионное уравнение для волн Рэлея (1.13) в квадрат и исключая из него тривиальный корень, соответствующий равенству скорости поверхностных волн нулю, приводим его к виду

$$D(\eta) \equiv \eta^6 - 8\eta^4 + 8(3-2\xi^2)\eta^2 - 16(1-\xi^2) = 0, \quad (1)$$

где $\eta = c_R/c_t$, $\xi = c_l/c_t$, c_R — скорость распространения рэлеевских волн. Из выражений для компонент смещений в волнах Рэлея следует, что эти волны существуют, если их скорость не превышает скорости наиболее медленной объемной волны, т.е. в (1) $\eta < 1$. Подставляя в (1) значения $\eta = 0$ и $\eta = 1$, получаем

$$D(\eta=0) = -16(1-\xi^2) < 0, \quad (2)$$

поскольку $\xi = c_l/c_t$ всегда меньше 1 (см. задачу 6.1.2), и

$$D(\eta=1) = 1 > 0. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует наличие корня в области $0 < \eta < 1$, а следовательно, и существование волн Рэлея вне зависимости от конкретных значений упругих модулей.

6.2.3. Найти приближенное выражение для скорости волны Рэлея в изотропных средах, используя в дисперсионном уравнении (1.13) в качестве начального приближения значение $k = k_t$ и учитывая лишь линейные по отклонению k от k_t слагаемые.

Решение. Представим k в виде $k = k_t(1+\delta)$. Подстановка этого выражения в дисперсионное уравнение

$$(k^2 + s^2)^2 = 4k^2qs, \quad (1)$$

возведение уравнения (1) в квадрат и учет только линейных по δ слагаемым приводит к выражению

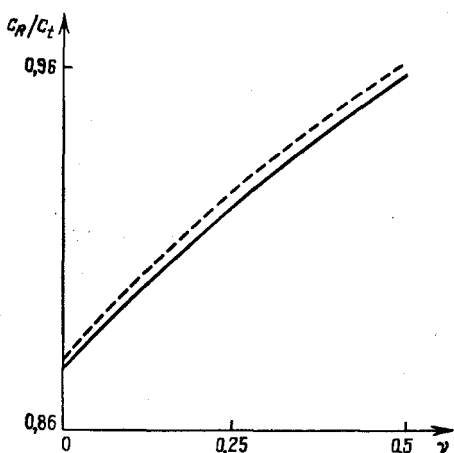
$$8\delta \left[\frac{4(k_t^2 - k_l^2)}{k_t^2} - 1 \right] = 1. \quad (2)$$

Используя для коэффициента Пуассона ν формулу

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (3)$$

преобразуем поправку δ к виду

$$\delta = \frac{1-\nu}{8(1+\nu)}. \quad (4)$$



К задаче 6.2.3

Учитывая далее, что малые возмущения скорости и волнового числа связаны соотношением

$$\frac{\Delta c}{c} = -\frac{\Delta k}{k}, \quad (5)$$

с помощью (4) находим приближенное выражение для скорости волн Рэлея

$$c_R = c_t \frac{0,875 + 1,125\nu}{1 + \nu}. \quad (6)$$

На рисунке сравнивается зависимость $c_R(\nu)$, рассчитанная по формуле (6), с точным решением (штриховая кривая). Для

построения точного решения использовалась обратная зависимость $\nu = \nu(c_R)$, которая находится точно из дисперсионного уравнения (1):

$$\nu = 1 - \frac{8(1 - \eta^2)}{\eta^6 - 8\eta^4 + 8\eta^2}. \quad (7)$$

6.2.4. По известным скоростям рэлеевской и продольной волн ($c_R = 3,00 \cdot 10^3$ м/с и $c_l = 5,85 \cdot 10^3$ м/с) рассчитать скорость поперечной волны и коэффициент Пуассона материала, используя малость различия скоростей поперечной и рэлеевской волн. С помощью таблицы к задаче 6.1.4 определить материал.

Решение. Дисперсионное уравнение (3.1) относительно неизвестной скорости поперечной (сдвиговой) волны является уравнением четвертой степени, что не позволяет точно рассчитать коэффициент Пуассона. Приближенное значение ν можно найти, используя близость скоростей волны Рэлея и объемной сдвиговой волны. Подставляя в формулу

$$\nu = \frac{1 - 2\xi^2}{2(1 - \xi^2)}, \quad \text{где } \xi^2 = c_t^2/c_l^2, \quad (1)$$

вместо c_t значение c_R из условия задачи, получаем $\nu \approx 0,32$. Далее уточним значение c_t по формуле (3.6) для c_R :

$$c_t = \frac{c_R(1 + \nu)}{0,87 + 1,12\nu} \approx 3,22 \cdot 10^3 \text{ м/с}. \quad (2)$$

Подстановка уточненного значения c_t в (1) дает $\nu = 0,28$. Сравнение цифровых значений с данными таблицы к задаче 6.1.4 показывает, что наиболее вероятным материалом является железо.

6.2.5. Определить глубину h_0 (в длинах волн), на которой волна Рэлея поляризована линейно. Числовое значение рассчитать для дюралюминия (коэффициент Пуассона $\nu = 0,34$).

Решение. Волна Рэлея становится линейно поляризованной на глубине h_0 , при которой продольная компонента вектора смещений (u_{x0} в (1.14)) обращается в нуль. Отсюда следует, что

$$\exp[(s-q)h_0] = \frac{k^2 + s^2}{2k^2}, \quad (1)$$

или с учетом дисперсионного уравнения

$$\frac{h_0}{\Lambda_R} = \frac{\ln(1 - \eta^2/2)}{2\pi[\sqrt{1 - \eta^2} - \sqrt{1 - \xi^2\eta^2}]}, \quad (2)$$

где Λ_R — длина рэлеевской волны. Для дюралюминия $\eta \approx 0,93$, а $h_0/\Lambda_R \approx 0,19$.

6.2.6. Определить характер, направление и параметры движения частиц среды на поверхности под действием волны Рэлея. Получить числовые значения для стекла с $\nu = 0,3$. Чем отличается движение на поверхности от движения частиц, находящихся ниже глубины h_0 , определенной в предыдущей задаче?

Решение. Смещение частиц среды под действием волны Рэлея описывается выражениями (см. (1.14))

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_z \end{Bmatrix} = A \left\{ \begin{array}{l} \left[\exp(qz) - \frac{k^2 + s^2}{2k^2} \exp(sz) \right] \\ - \frac{iq}{k} \left[\exp(qz) - \frac{2k^2}{k^2 + s^2} \exp(sz) \right] \end{array} \right\} \exp(ikx - i\omega t). \quad (1)$$

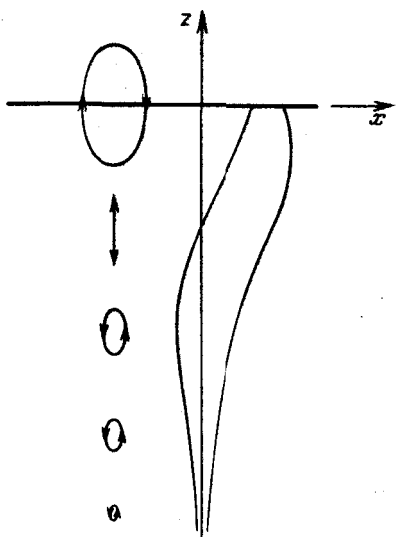
Вследствие сдвига фазы колебаний нормальной компоненты смещений u_z относительно продольной u_x на $\pm \pi/2$ (наличие множителя i у u_z) движение частиц среды происходит по эллиптическим траекториям:

$$u_x = a(z) \cos(\omega t + \varphi), \quad u_z = b(z) \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Направление вращения определяется знаком отношения b/a , зависящим от глубины. На поверхности выражения в квадратных скобках в (1) имеют противоположные знаки. Отсюда видно, что отношение b/a положительно, что соответствует движению по эллипсу по часовой стрелке. Отношение полуосей эллипса на поверхности равно

$$\left| \frac{b(z=0)}{a(z=0)} \right| = \left| \frac{u_z(z=0)}{u_x(z=0)} \right| = \frac{2kd}{k^2 + s^2} = \sqrt{1 - \xi^2\eta^2} \left[1 - \frac{\eta^2}{2} \right]^{-1}. \quad (3)$$

Для $\nu = 0,3$ это отношение равно 1,52. На большой глубине слагаемыми, пропорциональными $\exp(qz)$, можно пренебречь по сравнению с $\exp(sz)$, поскольку $q > s$. При этом знаки в



К задаче 6.2.6

квадратных скобках в выражениях (1) для u_x , u_z будут одинаковыми, т.е. знак отношения b/a и соответственно направление вращения на большой глубине будут противоположны тем, что имеют место на поверхности. Изменение направления вращения происходит на глубине h_0 , рассчитанной в предыдущей задаче. Траектории движения частиц среды в волне Рэлея и зависимости компонент смещений от глубины иллюстрируются на рисунке.

6.2.7. Плоская объемная волна падает под углом θ на плоскую границу однородного изотропного твердого тела с вакуумом. Показать, что если эта волна сдвиговая и поляризована перпендикулярно плоскости падения, то трансформация в другие типы волн отсутствует и коэффициент отражения, определенный через отношение смещений в падающей и отраженной волнах, равен единице.

Решение. Как и в задаче 6.2.1, считаем, что твердое тело занимает полупространство $z \leq 0$. Плоскость падения считаем совпадающей с плоскостью xz . Смещения в падающей волне

$$u_y = C \exp \left[ik_x x \sin \theta + ik_z z \cos \theta - i\omega t \right]. \quad (1)$$

Подстановка (1) в (1.9) показывает, что волна SH -поляризации не связана в граничных условиях с волнами, поляризованными в плоскости падения. Поэтому при отражении возбуждается лишь волна той же поляризации, что и исходная, вида

$$\tilde{u}_y = RC \exp \left[ik_x x \sin \theta - ik_z z \cos \theta - i\omega t \right], \quad (2)$$

где R — коэффициент отражения. Подстановка (1) и (2) в граничное условие

$$T_{yz} = \mu \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

при $z = 0$ дает $R = 1$.

6.2.8. Найти коэффициенты отражения и трансформации в волны других типов (через отношение амплитуд смещений) в

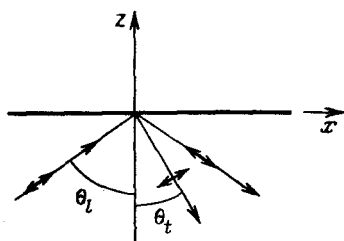
случае, если в условии предыдущей задачи заменить падающую сдвиговую волну на продольную.

Решение. Для выполнения граничных условий в любой точке поверхности необходимо, чтобы проекции волновых векторов, участвующих в процессе отражения волн, были на поверхности равны друг другу. Из этого условия следует, что для продольной волны угол падения θ_i равен углу отражения, а угол θ_t , под которым отражаются сдвиговые волны, связан с углом θ_i соотношением

$$k_t \sin \theta_t = k_i \sin \theta_i \quad \text{или} \quad \sin \theta_t = (c_i/c_t) \sin \theta_i. \quad (1)$$

Лучевая картина для рассматриваемой задачи отражения изображена на рисунке.

Из граничных условий для свободной поверхности (1.19) следует, что падающая продольная волна не возбуждает отраженную волну *SH*-поляризации, но может возбуждать отраженную продольную



К задаче 6.2.8

волну и отраженную сдвиговую волну *SV*-поляризации (волну, поляризованную в плоскости падения; *SV*—shear vertical). Поэтому граничные условия сводятся к двум уравнениям:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \left[1 - 2 \frac{c_t^2}{c_l^2}\right] \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Суммарное поле смещений в полупространстве с учетом изложенного можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{u_x}{u_{i0}} &= \sin \theta_i \exp(ik_l z \cos \theta_i) + R_{ll} \sin \theta_i \exp(-ik_l z \cos \theta_i) + \\ &\quad + T_{lt} \cos \theta_t \exp(-ik_t z \cos \theta_t), \\ \frac{u_z}{u_{i0}} &= \cos \theta_i \exp(ik_l z \cos \theta_i) - R_{ll} \cos \theta_i \exp(-ik_l z \cos \theta_i) + \\ &\quad + T_{lt} \sin \theta_t \exp(-ik_t z \cos \theta_t), \end{aligned} \quad (3)$$

где u_{i0} —амплитуда падающей продольной волны, R_{ll} —коэффициент отражения, T_{lt} —коэффициент трансформации продольной волны в поперечную. Волновой множитель $\exp(ik_l x \sin \theta_i - i\omega t)$ опущен. Подставляя (3) в граничные условия (2) и используя соотношение

$$1 - 2(c_t^2/c_l^2) \sin^2 \theta_i = \cos(2\theta_t), \quad (4)$$

следующее из уравнения (1), получаем систему уравнений относительно коэффициентов R_{ll} и T_{ll} :

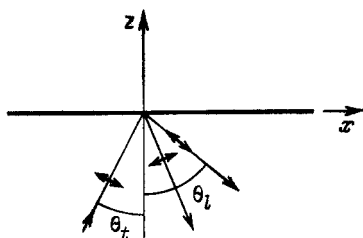
$$R_{ll}k_l \sin(2\theta_l) + T_{ll}k_l \cos(2\theta_l) = k_l \sin(2\theta_l), \quad (5)$$

$$R_{ll}k_l (c_l/c_t)^2 \cos(2\theta_l) - T_{ll}k_l \sin(2\theta_l) = -k_l (c_l/c_t)^2 \cos(2\theta_l).$$

Из (5) легко найти:

$$R_{ll} = \frac{\sin(2\theta_l)\sin(2\theta_l) - (c_l/c_t)^2 \cos^2(2\theta_l)}{\sin(2\theta_l)\sin(2\theta_l) + (c_l/c_t)^2 \cos^2(2\theta_l)}, \quad (6)$$

$$T_{ll} = \frac{2(c_l/c_t) \sin(2\theta_l) \cos(2\theta_l)}{\sin(2\theta_l)\sin(2\theta_l) + (c_l/c_t)^2 \cos^2(2\theta_l)}. \quad (7)$$



К задаче 6.2.9

6.2.9. Найти коэффициент отражения и трансформации в волны других типов в случае, когда в условии задачи 6.2.7 падающая сдвиговая волна поляризована в плоскости падения. Сравнить результат с ответом предыдущей задачи.

Решение. В данной задаче поле смещений имеет вид

$$\frac{u_x}{u_{t0}} = -\cos\theta_t \exp(ik_t z \cos\theta_t) + R_{tt} \cos\theta_t \exp(-ik_t z \cos\theta_t) - T_{tl} \sin\theta_l \exp(-ik_l z \cos\theta_l), \quad (1)$$

$$\frac{u_z}{u_{t0}} = \sin\theta_t \exp(ik_t z \cos\theta_t) + R_{tt} \sin\theta_t \exp(-ik_t z \cos\theta_t) + T_{tl} \cos\theta_l \exp(-ik_l z \cos\theta_l)$$

(лучевую картину см. на рисунке). Подстановка (1) в граничные условия (8.2) приводит к системе уравнений

$$R_{tt}k_t \cos(2\theta_t) - T_{tl}k_l \sin(2\theta_l) = -k_t \cos(2\theta_t), \quad (2)$$

$$R_{tt}k_t \sin(2\theta_t) + T_{tl}k_l (c_l/c_t)^2 \cos(2\theta_l) = k_t \sin(2\theta_t).$$

Из (2) получаем

$$R_{tt} = \frac{\sin(2\theta_t)\sin(2\theta_l) - (c_l/c_t)^2 \cos^2(2\theta_l)}{\sin(2\theta_t)\sin(2\theta_l) + (c_l/c_t)^2 \cos^2(2\theta_l)}, \quad (3)$$

$$T_{tl} = \frac{(c_l/c_t) \sin(4\theta_l)}{\sin(2\theta_t)\sin(2\theta_l) + (c_l/c_t)^2 \cos^2(2\theta_l)}. \quad (4)$$

Сравнивая (8.6), (8.7) с формулами (3), (4) находим, что

$$R_{ll} = R_{tt}, \quad T_{ll} = \frac{\sin(2\theta_l)}{\sin(2\theta_t)} T_{tl}. \quad (5)$$

6.2.10. При каких условиях коэффициенты R_{ll} и R_{tt} , рассчитанные в задачах 6.2.8 и 6.2.9, обращаются по модулю в единицу, в нуль и в бесконечность.

Решение. Условие $|R_{ll}| = |R_{tt}| = 1$ выполняется, если первое или второе слагаемое, входящее в числитель и знаменатель (8.6) и (9.3), обращается в нуль. Отсюда с учетом взаимосвязи углов (8.1) приходим к следующим возможным вариантам:

- 1) нормальное падение объемных волн, $\theta_l = \theta_t = 0^\circ$;
- 2) падение сдвиговых SV-волн под углом $\theta_t = 45^\circ$;
- 3) падение сдвиговых волн под критическим углом $\theta'_t = \arcsin(c_t/c_l)$, при котором отраженная продольная волна скользит вдоль поверхности.

При $\theta_t > \theta'_t$ отраженная продольная волна становится неоднородной, локализованной вблизи поверхности, и этот случай требует дополнительных исследований. Для этого выражение (9.3) удобно преобразовать, заменив углы θ_t и θ_l на проекции волновых векторов падающей и отраженной волн на оси x и z :

$$k_{lx} = k_l \sin \theta_l = k_{tx} = k_t \sin \theta_t \equiv k, \quad k_{lz} = k_l \cos \theta_l, \quad k_{tz} = k_t \cos \theta_t \quad (1)$$

При этом $\cos(2\theta_t)$ с учетом (1) преобразуется к виду

$$\cos(2\theta_t) = 1 - 2(k/k_t)^2, \quad (2)$$

и для R_{tt} в итоге имеем

$$R_{tt} = \frac{4k^2 \sqrt{(k_t^2 - k^2)(k_l^2 - k^2)} - (k_t^2 - 2k^2)^2}{4k^2 \sqrt{(k_t^2 - k^2)(k_l^2 - k^2)} + (k_t^2 - 2k^2)^2}. \quad (3)$$

При $\theta_t > \theta'_t$ $k > k_l$ и первое слагаемое в числителе и знаменателе (3) становится чисто мнимым, а $|R_{tt}| = 1$. Этот случай соответствует полному внутреннему отражению SV-волн.

Углы падения, при которых R_{tt} и R_{ll} обращаются в нуль, по аналогии с оптикой называют углами Брюстера для объемных акустических волн. Соответствующее этим углам условие обращения в нуль числителя формулы (3) отличается от дисперсионного уравнения для волн Рэлея (1.13) лишь знаком перед вторым слагаемым. При возведении уравнений в квадрат (для исключения радикалов) это различие исчезает. В итоге получаем, что углы Брюстера для объемных акустических волн определяются тем же уравнением, что и скорость волн Рэлея. Входящая в это уравнение скорость c для брюстеровских углов является

скоростью движения фазового фронта падающей и отраженных волн вдоль поверхности.

Условие обращения коэффициентов R_{tt} и R_{ll} в бесконечность, как следует из (3), совпадает с дисперсионным уравнением для волн Рэлея. Это совпадение объясняется тем, что формально задачу о распространении поверхностных волн можно рассматривать как частный случай задачи об отражении объемных волн при условии, что падающая волна отсутствует, а углы скольжения отраженных волн могут принимать мнимые значения.

6.2.11. Найти коэффициент Пуассона твердого тела, занимающего полупространство со свободной поверхностью, если известно, что угол Брюстера для сдвиговых объемных волн в этой среде равен 30° .

Решение. Брюстеровские углы для объемных продольных и поперечных волн связаны с решениями дисперсионного уравнения для волн Рэлея (2.1) соотношениями

$$\eta = \frac{k_t}{k} = \frac{1}{\sin \theta_t} = \frac{1}{\xi \sin \theta_l}, \quad \xi = \frac{c_t}{c_l}. \quad (1)$$

При $\theta_t = 30^\circ$ $\eta = 2$. По значению η из (2.1) можно найти ξ :

$$1 - \xi^2 = \frac{\eta^2(\eta^4 - 8\eta^2 + 8)}{16(1 - \eta^2)}. \quad (2)$$

Для $\eta = 2$ $\xi^2 = 1/3$. По формуле (4.1) находим $\nu = 0,25$.

Согласно теореме Виета корни уравнения (2.1) связаны с его коэффициентами при $\xi^2 = 1/3$ соотношениями

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 8, \quad \eta_1^2 \eta_2^2 \eta_3^2 = 32/3. \quad (3)$$

Используя один известный корень $\eta_1 = 2$, для двух других из (3) получаем квадратное уравнение, решение которого имеет вид

$$\eta_{2,3}^2 = 2 \pm 2/\sqrt{3}. \quad (4)$$

Меньший из этих корней определяет скорость волн Рэлея $c_R \approx 0,92c_t$, а больший — второй угол Брюстера для сдвиговых волн

$$\theta_l = \arcsin(2 + 2/\sqrt{3})^{-1/2} \approx 34^\circ. \quad (5)$$

Этому углу соответствует угол Брюстера для продольных волн $\theta_l \approx 77^\circ$, а углу $\theta_t = 30^\circ$ соответствует угол $\theta_l = 60^\circ$.

6.2.12. Сдвиговая волна SH-поляризации падает под углом θ на плоскую границу раздела двух изотропных твердых тел. Найти выражения для коэффициентов отражения и прохождения и сравнить с соответствующими формулами для границы раздела двух идеальных жидкостей.

Решение Будем обозначать индексом 1 величины, относящиеся к среде, из которой падает волна, а индексом 2 величины, относящиеся к смежной среде. Как и прежде, ось z направим по нормали к границе так, чтобы среда 1 занимала полупространство $z \leq 0$, а ось x направим вдоль поверхности в плоскости падения. Поля смещений в обеих средах можно записать в виде

$$u_1 = u_0 [\exp(ik_{z1}z) + R \exp(-ik_{z1}z)], \quad u_2 = Tu_0 \exp(ik_{z2}z). \quad (1)$$

Общий множитель $\exp(ik_x x - i\omega t)$ для краткости опускаем. Подстановка (1) в граничные условия непрерывности смещений и нормальных компонент упругих напряжений при $z = 0$:

$$u_1 = u_2, \quad \mu_1 \partial u_1 / \partial z = \mu_2 \partial u_2 / \partial z, \quad (2)$$

приводит к системе уравнений

$$1 + R = T, \quad \mu_1 k_{z1} (1 - R) = \mu_2 k_{z2} T \quad (3)$$

Отсюда получаем

$$R = (Z_1 - Z_2) / (Z_1 + Z_2), \quad T = 2Z_1 / (Z_1 + Z_2), \quad (4)$$

где импедансы $Z_1 = \rho_1 c_{t1} \cos \theta_1$, $Z_2 = \rho_2 c_{t2} \cos \theta_2$, а углы θ_1 и θ_2 связаны соотношением

$$\cos^2 \theta_2 = 1 - \frac{\rho_1 \mu_2}{\rho_2 \mu_1} \sin^2 \theta_1, \quad (5)$$

вытекающим из условия совпадения тангенциальных компонент волновых векторов

Коэффициенты отражения и прохождения акустических волн на границе двух идеальных жидкостей имеют такой же вид (4), но при несколько ином определении импедансов. Для жидкостей

$$Z_{ж} = \rho c / \cos \theta. \quad (6)$$

Это различие связано с иными граничными условиями. Для твердых тел на границе непрерывно смещение, для идеальных жидкостей — нормальная компонента вектора смещения (напомним, что акустические волны в жидкости являются продольными). Различаются также и выражения для непрерывных на границе нормальной компоненты напряжений в SH -волнах и давления для продольных волн в жидкости, если они записываются через смещения.

6.3 Волны в пластинах, слоях и стержнях

6.3.1. Гармонические волны SH -поляризации распространяются вдоль изотропной плоскопараллельной пластины со свободными поверхностями. Найти решение, описывающее структуру поля, а также фазовую и групповую скорости этих волн

Решение. В данной задаче волны SH -поляризации не связаны с волнами других типов и поэтому они полностью описываются скалярным волновым уравнением (1.2.8). Его решение для гармонических волн, распространяющихся вдоль оси x в пластине с плоскостью симметрии $z = 0$, удобно представить в виде

$$u_y = [A \cos(k_z z) + B \sin(k_z z)] \exp(ikx - i\omega t), \quad (1)$$

где $k_z^2 = k_t^2 - k^2$, A и B — произвольные постоянные. Подставляя (1) в граничные условия $T_{yz} = \mu \partial u_y / \partial z = 0$ при $z = \pm h/2$, где h — толщина пластины, получаем

$$A \sin \frac{k_z h}{2} + B \cos \frac{k_z h}{2} = 0, \quad -A \sin \frac{k_z h}{2} + B \cos \frac{k_z h}{2} = 0. \quad (2)$$

Уравнения (2) допускают два решения. Одно описывает волны, поля которых симметричны относительно плоскости симметрии пластины

$$A \neq 0, \quad B = 0, \quad \sin \frac{k_z h}{2} = 0, \quad k_z h = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Второе решение описывает антисимметричные волны:

$$A = 0, \quad B \neq 0, \quad \cos \frac{k_z h}{2} = 0, \quad k_z h = \pi(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Фазовые скорости

$$c = \left[c_t^{-2} - \left(\frac{\pi m}{\omega h} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (5)$$

где $m = 0, 2, 4, \dots$ для симметричных мод и $m = 1, 3, 4, \dots$ для антисимметричных. Групповая скорость

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = c_t^2 \left[c_t^{-2} - \left(\frac{\pi m}{\omega h} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (6)$$

Симметричная мода с $m = 0$ представляет собой однородную по глубине объемную волну, скользящую вдоль поверхности пластины. Для такой волны нормальные компоненты упругих напряжений равны нулю во всем объеме пластины. Поэтому такие волны существуют в пластине произвольной толщины, причем они являются бездисперсионными.

В плоскости симметрии пластины для симметричных волн с $m \neq 0$ амплитуда смещений достигает максимума, а нормальные напряжения обращаются в нуль. Все наоборот для антисимметричных волн — амплитуда смещений обращается в нуль, а нормальные напряжения в средней плоскости пластины максимальны.

6.3.2. Волны SH -поляризации распространяются в изотропном плоскопараллельном слое, верхняя поверхность которого свободна, а нижняя находится в контакте с изотропным полупространством. Найти решение для поперечной структуры этих волн

(волн Лява) и получить дисперсионное уравнение. Найти приближенное выражение для скорости волн Лява в случае, когда толщина слоя стремится к нулю.

Решение. Будем считать, что подложка занимает полупространство $z \leq -h$, а слой — область $-h \leq z \leq 0$. Материальные параметры и другие величины, относящиеся к слою, будем отмечать штрихом. Смещения в слое могут быть представлены в виде выражения типа (1.1):

$$u'_y = u'_0 [\cos(k'_z z) + A \sin(k'_z z)] \exp(ikx - i\omega t), \quad (1)$$

а в подложке — в виде

$$u_y = u_0 \exp(sz) \exp(ikx - i\omega t), \quad (2)$$

где $s^2 = k^2 - k_i^2$. Подставляя (1) в граничное условие обращения нормальной компоненты упругих напряжений $T'_{yz} = \mu' \partial u'_y / \partial z$ в нуль на верхней свободной поверхности слоя при $z = 0$, получаем $A = 0$. Используя далее граничные условия непрерывности смещения и нормальной компоненты тензора упругих напряжений на границе слоя с подложкой при $z = -h$, получаем систему уравнений:

$$u'_0 \cos(k'_z h) - u_0 \exp(-sh) = 0, \quad u'_0 \mu' k'_z \sin(k'_z h) - u_0 \mu s \exp(-sh) = 0. \quad (3)$$

Из равенства детерминанта системы уравнений (3) нулю, необходимого для существования нетривиального ее решения, получаем дисперсионное уравнение

$$\operatorname{tg}(k'_z h) = \mu s / (\mu' k'_z). \quad (4)$$

Решение для поперечной структуры волнового поля имеет вид

$$u'_y = [u'_0 \cos(k'_z z)] \exp(ikx - i\omega t), \quad -h < z < 0, \\ u_y = [u'_0 \cos(k'_z h)] \exp[s(z+h)] \exp(ikx - i\omega t), \quad z \leq -h. \quad (5)$$

В предельном случае $h \rightarrow 0$ результат (5) переходит в решение для объемных SH-волн, скользящих вдоль свободной границы полупространства. При конечных, но малых h тангенс в уравнении (4) можно заменить его аргументом, после чего с учетом близости значений скоростей волн Лява c_L и объемных сдвиговых волн несложно получить явное выражение для c_L :

$$c_L = c_i \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho'}{\rho} - \frac{\mu'}{\mu} \right)^2 (k_i h)^2 \right]. \quad (6)$$

6.3.3. Используя операцию преобразования векторов и тензоров при инверсии осей координат, вывести условия, которым

должны удовлетворять смещения и нормальные компоненты тензора упругих напряжений, создаваемые симметричными и антисимметричными волнами в средней плоскости пластины при условии, что эта плоскость совпадает с плоскостью симметрии задачи. Рассмотрим задачу о распространении симметричных SH -волн в слое между двумя одинаковыми полупространствами.

Решение. При повороте и инверсии осей системы координат вектор смещения и тензор упругих напряжений преобразуются по формулам

$$u'_i = a_{ij}u_j, \quad T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}, \quad (1)$$

где штрихом обозначены поля в новой системе координат, а a_{ij} — матрица преобразования. Так, при повороте системы координат на угол φ вокруг оси z и при инверсии направления оси z эта матрица равна соответственно

$$a_{ij} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad a'_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Пусть плоскостью симметрии пластины является плоскость $z = 0$. Тогда для симметричных волн выполняются соотношения

$$u_x(z) = u_x(-z), \quad u_y(z) = u_y(-z), \quad u_z = -u_z(-z), \quad (3)$$

а для антисимметричных

$$u_x(z) = -u_x(-z), \quad u_y(z) = -u_y(-z), \quad u_z = u_z(-z). \quad (4)$$

Соотношения (3) эквивалентны преобразованию типа инверсии направления оси z с матрицей преобразования a'_{ij} (2). Использование этой матрицы в (1) показывает, что на средней плоскости меняют знак те компоненты смещения и тензора напряжений, которые имеют один индекс z , т.е. u_z , T_{xz} и T_{yz} . С другой стороны, в любой плоскости пластины должны быть непрерывны смещения и нормальные компоненты тензора упругих напряжений. Отсюда следует, что для симметричных волн в средней плоскости пластины должны выполняться условия

$$u_z = T_{xz} = T_{yz} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (5)$$

Соотношения (4) для антисимметричных волн можно рассматривать как преобразование типа инверсии направления оси z с последующей инверсией всех компонент вектора смещения. При таких преобразованиях происходит смена знака непрерывных на границе компонент поля u_x , u_y и T_{zz} , что означает

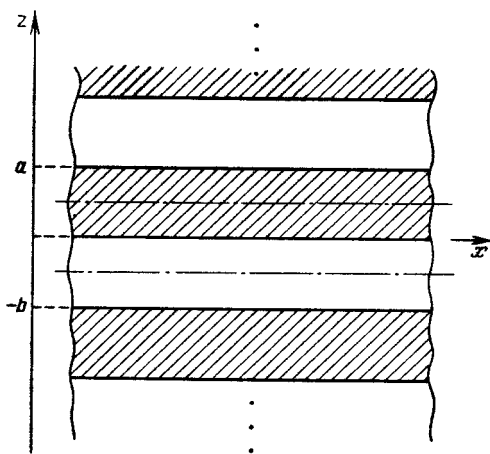
$$u_x = u_y = T_{zz} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (6)$$

Несложно убедиться, что решение задачи 6.3.1 удовлетворяет условиям (5), (6).

Для симметричных волн SH -поляризации, распространяющихся вдоль оси x , условие (5) сводится к виду $T_{yz} = 0$, совпадающему с граничным условием для свободной поверхности. Следовательно, решение для симметричных волн SH -поляризации в слое толщиной h , окруженном с обеих сторон одинаковыми средами (так называемых канальных волн Лява), совпадает с решением для волн Лява, полученным в предыдущей задаче, в слое с толщиной, равной не h , а $h/2$.

6.3.4. Плоскопараллельный слой находится между двумя разными полупространствами. Используя лучевой метод, рассчитать коэффициенты отражения и прохождения плоских гармонических SH -волн, падающих наклонно на слой, выразив их через коэффициенты отражения и прохождения на границе двух полупространств. Из условия обращения коэффициентов для слоя в бесконечность получить дисперсионное уравнение для канальных волн Лява. Рассмотреть частные случаи, когда одна из окружающих слой сред отсутствует (поверхность слоя свободна) и когда окружающие слой среды одинаковы.

Решение. Лучевая картина отражения и прохождения плоских волн через слой изображена на рисунке. Эта картина относится к случаю, когда в процессе отражения волн отсутствует их трансформация в



К задаче 6.3.4

волны других типов. Отраженная и прошедшая через слой волны формируются в результате многократных переотражений падающего луча. Коэффициенты отражения R и прохождения T для слоя рассчитываются путем суммирования образующихся при переотражении лучей.

Будем использовать обозначения: 1—среда, из которой падает волна; 2—слой; 3—среда, в которую волна проходит. В

соответствии с этими обозначениями под r_{ik} , t_{ik} будем подразумевать коэффициенты отражения и прохождения при падении волны из полубесконечной среды i на полубесконечную среду k .

Рассмотрим случай нормального падения. Коэффициенты R и T на основе изложенных соображений могут быть представлены в виде бесконечных рядов

$$R = r_{12} + t_{12}t_{21}r_{23}e^{2i\varphi} + t_{12}t_{21}r_{23}^2r_{21}e^{4i\varphi} + t_{12}t_{21}r_{23}^3r_{21}^2e^{6i\varphi} + \dots,$$

$$T = t_{12}t_{23}e^{i\varphi} + t_{12}t_{23}r_{23}r_{21}e^{3i\varphi} + t_{12}t_{23}r_{23}^2r_{21}^2e^{5i\varphi} + \dots$$

Эти ряды образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $r_{23}r_{21}\exp(2i\varphi)$. Здесь $\varphi = k_2h$, где k_2 — волновое число в слое толщиной h . Используя формулу для суммы геометрической прогрессии, получаем

$$R = \frac{r_{12} + (t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21})r_{23}\exp(2i\varphi)}{1 - r_{23}r_{21}\exp(2i\varphi)}, \quad (1)$$

$$T = \frac{t_{12}t_{23}\exp(i\varphi)}{1 - r_{23}r_{21}\exp(2i\varphi)} \quad (2)$$

При переходе к случаю наклонного падения возникают следующие изменения. Во-первых, коэффициенты r и t становятся функциями углов падения. Во-вторых, изменяется длина пути, проходимого лучами в слое. В-третьих, происходит расщепление лучей, связанное с их смещением вдоль слоя в процессе отражения, в результате чего пути, проходимые различными лучами от слоя к приемному преобразователю, не равны между собой (приемный преобразователь должен располагаться параллельно фазовому фронту отраженной или прошедшей волн, т.е. перпендикулярно лучам). Из рисунка легко видеть, что разность фаз для соседних лучей из-за различия их путей в пластине составляет $\Delta\varphi_2 = 2k_2h/\cos\theta_2$, а из-за различия путей в среде 1 — $\Delta\varphi_1 = 2k_1h \operatorname{tg}\theta_2 \sin\theta_1$. Результирующая разность фаз с учетом $k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2$ равна $\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 = 2k_2h \cos\theta_2$. Такой же результат получаем и для прошедших волн. В итоге оказывается, что формулы (1), (2) применимы и для наклонного падения, если в них считать, что $\varphi = k_{2z}h$, где $k_{2z} = k_2 \cos\theta_2$ — проекция волнового вектора на ось z , а под r и t подразумевать коэффициенты, относящиеся к наклонному падению под углами, определяемыми соотношениями $k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2 = k_3 \sin\theta_3$.

Из условия отсутствия падающей волны при наличии отраженной и прошедшей $R = T = \infty$. Отсюда находим дисперсионное

уравнение для волн, распространяющихся вдоль слоя:

$$1 - r_{23}r_{21} \exp(2i\varphi) = 0. \quad (3)$$

Такое же уравнение можно получить и при непосредственном рассмотрении волноводного распространения в слое.

Подстановка в (3) коэффициентов отражения, рассчитанных в задаче 6.2.12, позволяет найти дисперсионное уравнение для каналовых волн Лява в виде

$$i \operatorname{tg} \varphi = \frac{Z_3/Z_2 + Z_1/Z_2}{1 + (Z_3/Z_2)Z_1/Z_2}, \quad (4)$$

где $\varphi = (\omega h/c_1)\sqrt{1 - c_1^2/c^2}$, $Z_k = \rho_k c_k \sqrt{1 - c_k^2/c^2}$, c — скорость каналовых волн, c_k — скорость объемных сдвиговых волн в среде с номером k .

Для того чтобы волны были локализованы в слое, необходимо, чтобы скорость c была меньше c_2 и c_3 . В этом случае импедансы Z_1 и Z_3 являются чисто мнимыми. При $Z_3 = 0$ из (4) следует дисперсионное уравнение для волн Лява:

$$i \operatorname{tg} \varphi = Z_1/Z_2 \quad (5)$$

Это уравнение совпадает с (2.4). В случае, когда окружающие слой среды 1 и 3 одинаковы, т.е. $Z_3 = Z_1$, из (4) получаем

$$i \operatorname{tg} \varphi = \frac{2Z_1/Z_2}{1 + (Z_1/Z_2)^2}. \quad (6)$$

Из (6) можно вывести уравнение, подобное (5), с единственным отличием — заменой в (5) φ на $\varphi/2$. Это согласуется с выводами, приведенными в решении задачи 6.3.3.

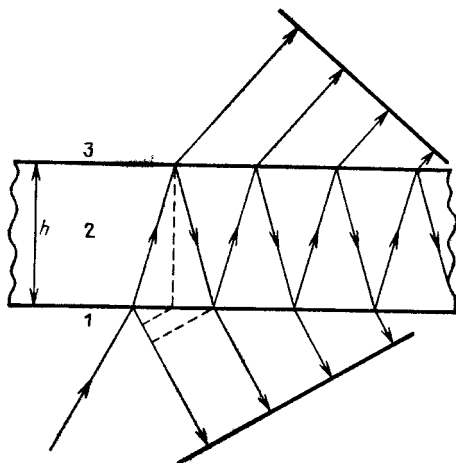
6.3.5. Гармонические волны SH-поляризации распространяются вдоль границ бесконечной периодической слоистой структуры, состоящей из двух чередующихся плоскопараллельных слоев, толщина и параметры одного из которых a , ρ_a , μ_a , а другого — b , ρ_b , μ_b . Вывести дисперсионное уравнение и определить структуру поля смещений для этих волн. Найти низкочастотную асимптотику решения дисперсионного уравнения.

Решение Геометрия задачи изображена на рисунке. Вследствие периодичности структуры решение можно найти, рассматривая акустические поля лишь в двух соседних слоях. Плоскости, проходящие через середины слоев, являются плоскостями симметрии слоистой структуры. Поэтому решение волнового уравнения для сдвиговых волн в каждом из слоев целесообразно разделить на симметричную и антисимметричную части относительно

средних плоскостей слоев $z = a/2$ и $z = -b/2$:

$$\begin{aligned} u_a &= A \cos [\alpha(z-a/2)] + B \sin [\alpha(z-a/2)], \\ u_b &= C \cos [\beta(z+b/2)] + D \sin [\beta(z+b/2)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Общий множитель $\exp(ikx - i\omega t)$ для краткости опущен, $\alpha^2 = k_a^2 - k^2$, $\beta^2 = k_b^2 - k^2$; k_a и k_b — волновые числа объемных



К задаче 6.3.5

сдвиговых волн в слоях a и b . Граничными условиями является непрерывность смещения и нормальной компоненты тензора упругих напряжений на границе соседних слоев

$$u_a = u_b, \quad \mu_a \frac{\partial u_a}{\partial z} = \mu_b \frac{\partial u_b}{\partial z} \quad \text{при } z = 0. \quad (2)$$

Из условия периодичности также следует, что поля в слое a на границе $z = a$ необходимо сшить с полями в слое b на границе $z = -b$. Отсюда имеем

$$u_a(z=a) = u_b(z=-b), \quad \mu_a \frac{\partial u_a}{\partial z} \Big|_{z=a} = \mu_b \frac{\partial u_b}{\partial z} \Big|_{z=-b}. \quad (3)$$

Подстановка выражений (1) в условия (2), (3) приводит к системе уравнений:

$$A \cos \frac{\alpha a}{2} - B \sin \frac{\alpha a}{2} = C \cos \frac{\beta b}{2} + D \sin \frac{\beta b}{2}, \quad (4)$$

$$\mu_a \alpha \left[A \sin \frac{\alpha a}{2} + B \cos \frac{\alpha a}{2} \right] = \mu_b \beta \left[-C \sin \frac{\beta b}{2} + D \cos \frac{\beta b}{2} \right], \quad (5)$$

$$A \cos \frac{\alpha a}{2} + B \sin \frac{\alpha a}{2} = C \cos \frac{\beta b}{2} - D \sin \frac{\beta b}{2}, \quad (6)$$

$$\mu_a \alpha \left[-A \sin \frac{\alpha a}{2} + B \cos \frac{\alpha a}{2} \right] = \mu_b \beta \left[C \sin \frac{\beta b}{2} + D \cos \frac{\beta b}{2} \right]. \quad (7)$$

Складывая (4) и (6) и вычитая (5) и (7), получаем уравнения, в которые коэффициенты B и D не входят:

$$A \cos \frac{\alpha a}{2} - C \cos \frac{\beta b}{2} = 0, \quad (8)$$

$$A \mu_a \alpha \sin \frac{\alpha a}{2} + C \mu_b \beta \sin \frac{\beta b}{2} = 0. \quad (9)$$

Равенство нулю детерминанта этой системы дает дисперсионное уравнение вида

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha a/2)}{\operatorname{tg}(\beta b/2)} = -\frac{\mu_b \beta}{\mu_a \alpha}. \quad (10)$$

Коэффициенты B и D в этом случае равны нулю, т.е. решение, определяемое (8)–(10), соответствует волнам, поле смещений которых симметрично относительно средних плоскостей слоев.

Если, наоборот, вычесть (4) и (6) и сложить (5) и (7), то получим уравнения, в которые входят коэффициенты B и D :

$$B \sin \frac{\alpha a}{2} + D \sin \frac{\beta b}{2} = 0, \quad (11)$$

$$B \mu_a \alpha \cos \frac{\alpha a}{2} - D \mu_b \beta \cos \frac{\beta b}{2} = 0. \quad (12)$$

Дисперсионное уравнение, соответствующее системе уравнений (11), (12), имеет вид

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha a/2)}{\operatorname{tg}(\beta b/2)} = -\frac{\mu_a \alpha}{\mu_b \beta}. \quad (13)$$

В данном случае, как следует из (4)–(7), равны нулю коэффициенты A и C , т.е. уравнениям (11)–(13) соответствуют антисимметричные волны.

В низкочастотном пределе, заменяя тангенсы их аргументами, из дисперсионного уравнения (10) для симметричных волн получаем асимптотическое значение их скорости c :

$$c^2 = \frac{\mu_a a + \mu_b b}{\rho_a a + \rho_b b}. \quad (14)$$

Аналогичное разложение в уравнении (13) показывает, что для антисимметричных волн решение в низкочастотном пределе отсутствует, т.е. для низшей моды антисимметричных волн имеется отсечка по частоте.

Наличие свойств симметрии и антисимметрии у решения, описывающего распространение волн в слоистых структурах, позволяет также решать такие задачи отдельно для симметричных и антисимметричных волн, используя постановку граничных условий в плоскостях симметрии структуры (см. задачу 6.3.3).

6.3.6. Вывести дисперсионное уравнение и рассчитать структуру полей для гармонических антисимметричных волн Лэм-

ба (волн, поляризованных в сагиттальной плоскости), распространяющихся в плоскопараллельной неограниченной пластине со свободными поверхностями. Использовать условия, которым удовлетворяют антисимметричные волны в средней плоскости пластины.

Решение. В соответствии с решением задачи 6.3.3 в средней плоскости пластины $z = 0$

$$u_x = u_y = T_{zz} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (1)$$

Использование условий (1) позволяет ограничиться постановкой граничных условий лишь на одной поверхности

$$T_{xz} = T_{yz} = T_{zz} = 0 \quad \text{при } z = d, \quad (2)$$

где d — полутолщина пластины. Плоские волны, поляризованные в сагиттальной плоскости и распространяющиеся вдоль оси x , с компонентами u_y и T_{yx} не связаны, и поэтому использование условий (1), (2) для этих компонент не требуется. Условия (1), (2) для остальных компонент с помощью закона Гука

$$T_{xz} = \mu \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right], \quad T_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (3)$$

сводятся к виду, куда входят только смещения. Решение для поля смещений волн Лэмба подобно соответствующему решению (2.1.7) для волн Рэлея, но помимо убывающих при удалении от поверхности слагаемых включает также и нарастающие

$$u_{x0} = A e^{qz} + B e^{sz} + C e^{-qz} + D e^{-sz}, \quad (4)$$

$$u_{z0} = A M(-q) e^{qz} + B M(-s) e^{sz} + C M(q) e^{-qz} + D M(s) e^{-sz},$$

где

$$M(\pm q) = \pm iq/k, \quad M(\pm s) = \pm ik/s, \quad u = u_0 \exp(ikx - i\omega t).$$

Подставляя (4) в (1), получаем

$$A + B + C + D = 0, \quad (1 + s^2/k^2)(A + C) + 2(B + D) = 0. \quad (5)$$

Отсюда следует, что $A + C = B + D = 0$. Выражения для компонент смещений в этом случае принимают вид

$$u_{x0} = 2A \operatorname{sh}(qz) + 2B \operatorname{sh}(sz), \quad u_{z0} = -2i \left[A \frac{q}{k} \operatorname{ch}(qz) + B \frac{k}{s} \operatorname{ch}(sz) \right]. \quad (6)$$

Подстановка выражений (3), (6) в граничные условия (2) приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned} A \cdot 2q \operatorname{ch}(qd) + Bs (1 + k^2/s^2) \operatorname{ch}(sd) &= 0, \\ A (1 + s^2/k^2) \operatorname{sh}(qd) + B \cdot 2 \operatorname{sh}(sd) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Приравнивая детерминант этой системы нулю, находим дисперсионное уравнение для антисимметричных волн Лэмба

$$\frac{\text{th}(sd)}{\text{th}(qd)} = \frac{(k^2 + s^2)^2}{4k^2 qs} \quad (8)$$

Поле смещений для этих волн, как следует из (6) и (7), описывается выражениями

$$u_{x0} = u_0 \left[\frac{\text{sh}(qz)}{\text{ch}(qd)} - \frac{2qs}{(k^2 + s^2)} \frac{\text{sh}(sz)}{\text{ch}(sd)} \right],$$

$$u_{z0} = -iu_0 \frac{q}{k} \left[\frac{\text{ch}(qz)}{\text{ch}(qd)} - \frac{2k^2}{(k^2 + s^2)} \frac{\text{ch}(sz)}{\text{ch}(sd)} \right], \quad (9)$$

где u_0 — произвольная амплитудная постоянная.

6.3.7. Решить задачу 6.3.6 для симметричных волн Лэмба.

Решение. Для симметричных волн на средней плоскости пластины $z = 0$ должны выполняться условия (см. задачу 6.3.3)

$$u_z = T_{xz} = T_{yz} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (1)$$

В остальном решение этой задачи аналогично решению задачи 6.3.6. Подстановка выражений для компонент смещений (6.4) в условие (1) приводит к уравнениям

$$\frac{q}{k}(A-C) + \frac{k}{s}(B-D) = 0, \quad q(A-C) + s(B-D) = 0. \quad (2)$$

Отсюда следует, что $C = A$, $D = B$ и

$$u_{x0} = 2A \text{ch}(qz) + 2B \text{ch}(sz), \quad u_{z0} = -2i \left[A \frac{q}{k} \text{sh}(qz) + B \frac{k}{s} \text{sh}(sz) \right]. \quad (3)$$

Последующее использование граничных условий (6.2) дает

$$A \cdot 2q \text{sh}(qd) + Bs(1+k^2/s^2) \text{sh}(sd) = 0,$$

$$A(1+s^2/k^2) \text{ch}(sd) + B \cdot 2 \text{ch}(sd) = 0. \quad (4)$$

Из равенства нулю детерминанта системы (4) находим дисперсионное уравнение для симметричных волн Лэмба:

$$\frac{\text{th}(sd)}{\text{th}(qd)} = \frac{4k^2 qs}{(k^2 + s^2)^2}. \quad (5)$$

Поле смещений, как следует из (3)–(5), в данном случае описывается выражениями

$$u_{x0} = u_0 \left[\frac{\text{ch}(qz)}{\text{sh}(qd)} - \frac{2qs}{k^2 + s^2} \frac{\text{ch}(sz)}{\text{sh}(sd)} \right],$$

$$u_{z0} = -iu_0 \frac{q}{k} \left[\frac{\text{sh}(qz)}{\text{sh}(qd)} - \frac{2k^2}{k^2 + s^2} \frac{\text{sh}(sz)}{\text{sh}(sd)} \right]. \quad (6)$$

6.3.8. Найти выражения для предельных значений фазовых и групповых скоростей низших антисимметричной (изгибной) и симметричной (продольной) волн Лэмба в пластине толщиной

$h \rightarrow 0$. Использовать разложения дисперсионных уравнений (6.8) и (7.5) в ряд по степеням h (до членов порядка h^3)

Решение Дисперсионное уравнение для волн Лэмба:

$$\frac{\operatorname{tg}(\sqrt{1-y}H)}{\operatorname{tg}(\sqrt{x-y}H)} = - \left[\frac{4y\sqrt{x-y}\sqrt{1-y}}{(2y-1)^2} \right]^{\pm 1}. \quad (1)$$

Здесь знак плюс отвечает симметричной, минус — антисимметричной моде, $y = c_t^2/c^2$, $x = c_l^2/c^2$, $H = k_l h/2 = \omega h/(2c_l)$. Левую часть (1) преобразуем, используя разложение $\operatorname{tg} \varepsilon \approx \varepsilon(1+\varepsilon^2/3)$. Для симметричных волн (1) примет вид

$$4y(1-x) - 1 - \left[(4y(1-x) - 1)(2y-x-1) + y-x \right] \frac{H^2}{3} = 0. \quad (2)$$

При $H \rightarrow 0$ отсюда находим $y = [4(1-x)]^{-1}$ или $c = c_p \equiv 2c_t \times (1-c_t^2/c_l^2)^{1/2}$. Предельное значение c_p называют скоростью продольной волны в тонкой пластине. Поскольку c_p от частоты не зависит, фазовая и групповая скорости в этом приближении совпадают. Для антисимметричных волн дисперсионное уравнение:

$$4(1-x) \frac{H^2}{3} y^2 + (4x-3) \frac{H^2}{3} y - \left[1 + \frac{H^2}{3} x \right] = 0. \quad (3)$$

Приближенное решение (3) при $H \rightarrow 0$

$$y = \left[\frac{4}{3}(1-x) H^2 \right]^{-1/2} \quad (4)$$

отвечает классической теории Кирхгофа для тонких пластин. Для квадратов волнового числа и фазовой скорости изгибных волн из (4) следуют выражения $k_a^2 = 2\sqrt{3} k_p/h$, $c_a^2 = \omega h c_p / 2\sqrt{3}$. Групповая скорость в этом приближении $c_{g,a} = d\omega/dk_a = 2c_a$ — вдвое превосходит фазовую.

6.3.9. Найти точное решение динамических уравнений теории упругости, описывающее распространение гармонических крутильных волн в круглом изотропном стержне со свободной границей, имеющем произвольный радиус и бесконечную длину.

Решение. Удобно использовать систему координат, соответствующую форме границы. В этом случае проще добиться выполнения граничных условий. В цилиндрической системе координат r, φ, z уравнения имеют вид

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2T_{\varphi r}}{r}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r}, \quad (3)$$

а деформации связаны со смещениями соотношениями:

$$\begin{aligned} S_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad S_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u}{r} \varphi \right], \quad S_{zr} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} z + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right], \\ S_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad S_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right], \quad S_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{u}{r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для изотропных твердых тел закон Гука в цилиндрической системе координат имеет такой же общий вид, что и в декартовой:

$$\begin{vmatrix} T_{rr} \\ T_{\varphi\varphi} \\ T_{zz} \\ T_{\varphi z} \\ T_{rz} \\ T_{\varphi r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_{rr} \\ S_{\varphi\varphi} \\ S_{zz} \\ 2S_{\varphi z} \\ 2S_{rz} \\ 2S_{\varphi r} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Считаем, что ось z совпадает с осью стержня. Покажем, что уравнения (1)–(5) допускают существование в стержне решения в виде крутильных волн, для которого отлична от нуля лишь одна компонента вектора смещений u_φ . Поиск осесимметричного решения

$$u_r = u_z = 0, \quad u_\varphi \neq 0, \quad (6)$$

для которого производные по углу обращаются в нуль, приводит к равенствам:

$$S_{rr} = S_{\varphi\varphi} = S_{zz} = S_{rz} = 0, \quad T_{rr} = T_{\varphi\varphi} = T_{zz} = T_{rz} = 0; \quad (7)$$

отличны от нуля лишь следующие деформации и напряжения:

$$S_{\varphi z} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} \varphi, \quad T_{\varphi z} = 2\mu S_{\varphi z}, \quad S_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \varphi - \frac{u}{r} \varphi \right], \quad T_{\varphi r} = 2\mu S_{\varphi r}. \quad (8)$$

При выполнении условий (6)–(8) уравнения (1) и (3) удовлетворяются тождественно, поскольку все входящие в них члены обращаются в нуль, а уравнение (2) сводится к виду

$$\frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (9)$$

Поиск решения уравнения (9) в виде гармонических волн

$$u_\varphi = u \exp(ikz - i\omega t) \quad (10)$$

приводит к уравнению относительно $u = u(r)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left[k_t^2 - k^2 - \frac{1}{r^2} \right] u = 0. \quad (11)$$

С помощью (11) несложно убедиться, что простейшим решением уравнения (9) является решение, соответствующее равенству $k = k_t$:

$$u_\varphi = Cr \exp(ik_t z - i\omega t), \quad (12)$$

C — амплитудная постоянная. Используя (8), несложно убедиться, что для этого решения нормальная компонента упругих напряжений $T_{\varphi r}$ всегда равна нулю, т.е. решение (12) удовлетворяет граничным условиям свободной поверхности и существует в круглых стержнях любого радиуса. Соответствующую этому решению волну называют нулевой крутильной модой. Скорость ее распространения совпадает со скоростью объемных сдвиговых волн и от частоты не зависит, т.е. волна является бездисперсионной, и ее групповая скорость равна фазовой. Амплитуда угловых перемещений для нее пропорциональна радиусу, а $u_r = 0$ и $u_z = 0$, т.е. смещениям в этой волне соответствуют повороты каждого поперечного сечения стержня как целого вокруг оси z .

При $k \neq k_t$ решение уравнения (11), ограниченное на оси цилиндра, записывается через функцию Бесселя 1-го порядка:

$$u = C J_1(\beta r), \quad (13)$$

где $\beta^2 = k_t^2 - k^2$. Подставляя это решение в граничное условие $T_{\varphi r}(r=a) = 0$, где a — радиус стержня, и воспользовавшись соотношением $dJ_1(z)/dz = J_0(z) - J_1(z)/z$, получаем дисперсионное уравнение

$$\beta a J_0(\beta a) = 2J_1(\beta a). \quad (14)$$

С помощью таблиц значений функций Бесселя можно показать, что уравнение имеет решения $\beta a = m$, где m — набор положительных чисел; первые члены этого ряда: $m_1 \approx 5,1$, $m_2 \approx 8,4$ и т.д. Этим значениям соответствуют высшие крутильные моды. В отличие от нулевой высшие моды обладают дисперсией. В предельном случае тонкого стержня существует лишь нулевая бездисперсионная крутильная мода. С увеличением радиуса стержня высшие моды возникают пороговым образом, так что, чем толще стержень, тем большее число мод в нем существует. Свойства крутильных мод в круглом стержне сходны со свойствами SH -волн в пластине.

6.3.10. Построить решение, аналогичное решению задачи 6.3.9, для случая распространения в стержне "продольных" (аксиально-радиальных) волн, поля которых симметричны по углу, а угловая компонента вектора смещения отсутствует.

Решение. Данную задачу можно решать, используя уравнения в цилиндрической системе координат. Однако для пояснения принципа разделения уравнений движения, которые для радиаль-

ной и аксиальной компонент оказываются связанными, целесообразно использовать иной подход, основанный на представлении уравнения Ламе в векторной форме. Это уравнение, исходя из (1.1.7) и известного из векторного анализа тождества

$$\text{grad div } \mathbf{u} \equiv \Delta \mathbf{u} + \text{rot rot } \mathbf{u}, \quad (1)$$

запишем в виде

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu \text{rot rot } \mathbf{u} \quad (2)$$

или, вводя обозначения $\Theta = \text{div } \mathbf{u}$, $\vec{\omega} = (1/2) \text{rot } \mathbf{u}$,

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad } \Theta - 2\mu \text{rot } \vec{\omega}. \quad (3)$$

Скалярная величина Θ имеет смысл относительного изменения объема элемента среды при его деформировании, а вектор $\vec{\omega}$ характеризует поворот этого элемента. Для гармонических волн из уравнения (3) получаем

$$\mathbf{u} = -(1/k_l^2) \text{grad } \Theta + (2/k_t^2) \text{rot } \vec{\omega}. \quad (4)$$

Для того чтобы определить вид решения для Θ , подействуем на уравнение (3) оператором div и воспользуемся тождеством (1). В результате получаем волновое уравнение

$$\partial^2 \Theta / \partial t^2 = c_l^2 \Delta \Theta. \quad (5)$$

В цилиндрической системе координат для гармонических осесимметричных волн, бегущих вдоль оси z ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp(ikz - i\omega t)$), уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + (k_l^2 - k^2) \Theta = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (6), ограниченное при $r = 0$, выражается через функцию Бесселя нулевого порядка:

$$\Theta = A J_0(\alpha r) \exp(ikz - i\omega t), \quad (7)$$

где $\alpha^2 = k_l^2 - k^2$, A — произвольная амплитудная постоянная.

Подействуем на уравнение (3) оператором rot . В результате

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{\omega}}{\partial t^2} + c_t^2 \text{rot rot } \vec{\omega} = 0. \quad (8)$$

Это уравнение с помощью тождества (1) можно преобразовать к волновому уравнению, в которое, однако, будет входить лапласиан не от скалярной, а от векторной функции $\vec{\omega}$. Для нахождения вида векторного уравнения (8) при его записи для компонент $\vec{\omega}$ в цилиндрической системе координат предпочтительней использовать само уравнение (8), не преобразуя его в волновое. В цилиндрической системе координат для $\text{rot } \omega$ справедли-

во представление

$$\operatorname{rot} \vec{\omega} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} i_r & r i_\varphi & i_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_r & r \omega_\varphi & \omega_z \end{vmatrix}, \quad (9)$$

Поскольку рассматриваются осесимметричные волны ($\partial/\partial\varphi = 0$), для которых $u_\varphi = 0$, то из (9) следует, что отлична от нуля только одна компонента вектора $\vec{\omega}$:

$$\omega_\varphi = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right], \quad \omega_r = \omega_z = 0. \quad (10)$$

Компоненты вектора $\operatorname{rot} \vec{\omega}$ в этом случае принимают вид

$$(\operatorname{rot} \vec{\omega})_r = -\frac{\partial \omega_\varphi}{\partial z}, \quad (\operatorname{rot} \vec{\omega})_\varphi = 0, \quad (\operatorname{rot} \vec{\omega})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \omega_\varphi)}{\partial r}, \quad (11)$$

т.е. у $\operatorname{rot} \vec{\omega}$ отличны от нуля те же компоненты, что и у вектора смещения. Поэтому согласно (9) у вектора $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\omega}$, как и у $\vec{\omega}$, не равна нулю лишь угловая компонента

$$(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\omega})_\varphi = -\frac{\partial^2 \omega_\varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r \omega_\varphi)}{\partial r} \right]. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (8), для гармонических волн получаем

$$\frac{\partial^2 \omega_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} - \frac{\omega_\varphi}{r^2} + (k_t^2 - k^2) \omega_\varphi = 0. \quad (13)$$

Ограниченное при $r = 0$ решение уравнения (13) имеет вид

$$\omega_\varphi = B J_1(\beta r) \exp(ikz - i\omega t), \quad (14)$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка, $\beta^2 = k_t^2 - k^2$, B — амплитудная постоянная. Компоненты смещений согласно формулам (4) и (11) выражаются через ω_φ и Θ :

$$u_z = -\frac{1}{k_l^2} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{2}{k_t^2 r} \frac{\partial(r \omega_\varphi)}{\partial r}, \quad u_r = -\frac{1}{k_l^2} \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{2}{k_t^2} \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial z}. \quad (15)$$

Подставляя сюда выражения (7), (14) и используя для преобразований взаимосвязи, существующие между функциями Бесселя нулевого и первого порядков,

$$\frac{dJ_0(z)}{dz} = -J_1(z), \quad \frac{dJ_1(z)}{dz} = J_0(z) - \frac{J_1(z)}{z}, \quad (16)$$

получаем

$$u_{z0} = -\frac{ik}{k_l^2} A J_0(\alpha r) + \frac{2\beta}{k_t^2} B J_0(\beta r), \quad u_{r0} = \frac{\alpha}{k_l^2} A J_1(\alpha r) - \frac{2ik}{k_t^2} B J_1(\beta r). \quad (17)$$

Граничные условия на свободной поверхности цилиндра при $r = a$ в соответствии с (1.1.5) можно записать в виде

$$T_{rz} = \mu \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] = 0, \quad T_{rr} = \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0. \quad (18)$$

Из граничных условий и выражений (16), (17) следует, что

$$Ak_i^2 [ik\alpha J_1(\alpha a)] + Bk_i^2 [(k^2 - \beta^2) J_1(\beta a)] = 0, \quad (19)$$

$$Ak_i^2 [(\beta^2 - k^2) J_0(\alpha a) - \frac{2\alpha}{a} J_1(\alpha a)] + Bk_i^2 [-4ik\beta J_0(\beta a) + \frac{4ik}{a} J_1(\beta a)] = 0. \quad (20)$$

Для существования нетривиального решения этой системы уравнений ее определитель должен быть равен нулю. Отсюда находим искомое дисперсионное уравнение

$$\frac{J_1(\alpha a)}{J_0(\alpha a)} \left[\frac{J_0(\beta a)}{J_1(\beta a)} - \frac{k^2 + \beta^2}{2k^2 \beta a} \right] = - \frac{(k^2 - \beta^2)^2}{4k^2 \alpha \beta}. \quad (21)$$

Выражения (17) для поперечной структуры поля смещений с помощью уравнения (19) преобразуются к виду

$$u_{z0} = A_0 \left[\frac{J_0(\alpha r)}{J_1(\alpha a)} + \frac{2\alpha\beta}{k^2 - \beta^2} \frac{J_0(\beta r)}{J_1(\beta a)} \right], \quad u_{r0} = \frac{i\alpha}{k} A_0 \left[\frac{J_1(\alpha r)}{J_1(\alpha a)} - \frac{2k^2}{k^2 - \beta^2} \frac{J_1(\beta r)}{J_1(\beta a)} \right], \quad (22)$$

имеющему сходство с соответствующими формулами для волн Рэлея (см. (2.1.14)) и для волн Лэмба (см. (6.9) и (7.6)). В уравнениях (22) A_0 — амплитудная постоянная. Дисперсионное уравнение (2.1) принято называть уравнением Похгаммера-Кри. Иногда так называют и сами эти волны.

6.3.11. Исследовать поведение решения (10.21), (10.22) для аксиально-радиальных волн в круглом стержне при частоте звука, стремящейся к нулю.

Решение. Для функции Бесселя с малым аргументом положим

$$J_0 = (z) \approx 1, \quad J_1(z) \approx z/2. \quad (1)$$

В этом приближении левая часть дисперсионного уравнения принимает вид $\alpha(3k^2 - \beta^2)/(4k^2\beta)$, и квадрат скорости волны стремится к значению

$$c_b^2 = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{(\lambda + \mu)\rho}. \quad (2)$$

Комбинация упругих модулей в выражении (2) представляет собой модуль Юнга E , т.е. $c_b^2 = E/\rho$. Напомним, что модулем Юнга называют отношение единственной отличной от нуля компоненты упругих напряжений T_{zz} к деформации S_{zz} при статическом растяжении стержня. Компоненты смещения, как следует из (9.22), в низкочастотной области ведут себя так: u_{z0} стремится к постоянному (по сечению стержня) значению, а $u_{r0}/u_{z0} \rightarrow 0$. Поэтому рассмотренный тип волны называют продольной стержневой модой.

6.3.12. Как соотносятся скорости объемной продольной волны и продольной волны в тонкой пластине, а также скорость продольной волны в тонком стержне со скоростью объемной сдвиговой волны, если материалом для всех этих случаев служит сталь ($\nu = 0,28$).

Решение. Используя для коэффициента Пуассона выражение (2.3.3), скорости объемной продольной волны c_l , продольной волны в тонкой пластине c_p и скорости продольной волны в тонком стержне c_b можно выразить через скорость объемной сдвиговой волны c_t и ν :

$$\frac{c_l^2}{c_t^2} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad \frac{c_p^2}{c_t^2} = \frac{2}{1-\nu}, \quad \frac{c_b^2}{c_t^2} = \frac{2}{1+\nu}, \quad (1)$$

Отсюда для $\nu = 0,28$ находим $c_l = 1,81c_t$, $c_p = 1,67c_t$, $c_b = 1,25c_t$. Из (1) легко видеть, что скорости всех трех продольных волн при любых значениях коэффициента Пуассона превышают скорость поперечной объемной волны. Скорости c_p , c_p , c_b образуют убывающий ряд, что согласуется с качественным соображением о том, что введение границы уменьшает связи элемента среды, расположенного вблизи свободной поверхности, в сравнении с элементом, расположенным в объеме среды, за счет чего эффективная жесткость и скорость уменьшаются.

6.4. Кристаллоакустика и акустоэлектроника

6.4.1. Найти общее решение динамических уравнений теории упругости, описывающее распространение плоских однородных объемных акустических волн в безграничных монокристаллах.

Решение. Исходными уравнениями для этой задачи являются уравнение движения и закон Гука для анизотропных сред:

$$\rho \partial^2 u_i / \partial t^2 = \partial T_{ij} / \partial x_j, \quad T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl}. \quad (1)$$

Поиск решения уравнений (1) в виде плоских однородных гармонических объемных волн

$$u_i = u_0 \exp(ik_j x_j - i\omega t) \quad (2)$$

(где k_i — проекции волнового вектора $k = \omega/c$ на оси декартовой системы координат x_i , $k_i = kn_i$, n_i — направляющие косинусы углов между волновым вектором и осями системы координат) приводит уравнения (1) к виду

$$(\Gamma_{ik} - \rho c^2 \delta_{ik}) u_0 = 0, \quad (3)$$

где $\Gamma_{ik} = c_{ijkl} n_j n_l$. Тензор Γ_{ik} принято называть тензором Кристоффеля, а уравнение (3) — уравнением Кристоффеля.

Тензор Кристоффеля определяется тензором упругих модулей c_{ijkl} , в который для кристаллов входит не более 21 независимого модуля. Это следует из симметрии тензоров T_{ij} и S_{ij} относительно перестановки индексов. С учетом данной симметрии удобно использовать сокращенную форму записи индексов в соответствии с правилом

$$11 \rightarrow 1, \quad 22 \rightarrow 2, \quad 33 \rightarrow 3, \quad 32 \rightarrow 4, \quad 31 \rightarrow 5, \quad 21 \rightarrow 6. \quad (4)$$

В такой форме записи закон Гука принимает вид $T_I = c_{IJ} S_J$, где $I, J = 1 \div 6$, или

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ \cdot & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ \cdot & \cdot & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{55} & c_{56} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} \quad (5)$$

при условии, что $S_I = S_{ij}$ для $i = j$ и $S_I = 2S_{ij}$ для $i \neq j$. Матрица упругих модулей c_{IJ} симметрична относительно диагонали c_{II} . Поэтому для наглядности элементы матрицы ниже диагонали в (5) отмечены просто точками.

Тензор Кристоффеля Γ_{ik} , как и тензоры T_{ij} и S_{ij} , симметричен относительно перестановки индексов и может записываться с использованием сокращений (4). При такой форме записи уравнение Кристоффеля имеет вид

$$\begin{vmatrix} \Gamma_1 - X & \Gamma_6 & \Gamma_5 \\ \Gamma_6 & \Gamma_2 - X & \Gamma_4 \\ \Gamma_5 & \Gamma_4 & \Gamma_3 - X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{vmatrix} = 0, \quad X \equiv \rho c^2, \quad (6)$$

а компоненты тензора Кристоффеля, как несложно показать с помощью уравнения (5), связаны с направляющими косинусами n_i соотношением

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \\ \Gamma_5 \\ \Gamma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{66} & c_{55} & 2c_{56} & 2c_{15} & 2c_{16} \\ c_{66} & c_{22} & c_{44} & 2c_{24} & 2c_{46} & 2c_{26} \\ c_{55} & c_{44} & c_{33} & 2c_{34} & 2c_{35} & 2c_{45} \\ c_{56} & c_{24} & c_{34} & c_{44} + c_{23} & c_{45} + c_{36} & c_{46} + c_{25} \\ c_{15} & c_{46} & c_{35} & c_{45} + c_{36} & c_{55} + c_{13} & c_{56} + c_{14} \\ c_{16} & c_{26} & c_{45} & c_{46} + c_{25} & c_{56} + c_{14} & c_{66} + c_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \\ n_2 n_3 \\ n_1 n_3 \\ n_1 n_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Для существования нетривиального решения системы однородных уравнений (6) ее детерминант должен равняться нулю. Это равенство и является дисперсионным уравнением задачи. Вычисления детерминанта приводят к бикубическому уравнению для нахождения фазовой скорости объемных волн c ($c = \sqrt{X/\rho}$):

$$X^3 - (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3) X^2 + (\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_1 \Gamma_3 + \Gamma_2 \Gamma_3 - \Gamma_4^2 - \Gamma_5^2 - \Gamma_6^2) X - (\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 + 2\Gamma_4 \Gamma_5 \Gamma_6 - \Gamma_1 \Gamma_4^2 - \Gamma_2 \Gamma_5^2 - \Gamma_3 \Gamma_6^2) = 0. \quad (8)$$

Здесь X можно рассматривать как эффективный упругий модуль анизотропной среды в заданном направлении. Решение уравнения (8) можно получить в тригонометрической форме. Из этого уравнения следует, что в кристаллах могут распространяться три объемные волны с одинаковым направлением волнового вектора, но разными фазовыми скоростями. Поляризация этих волн определяется из уравнений (6) и в общем случае не является ни продольной, ни поперечной. Совершая в уравнении (8) предельный переход к изотропной среде, несложно показать, что скорость одной из волн совпадает со скоростью продольной волны, а двух других — со скоростью поперечной. Соответствующим образом, как следует из уравнения (6), ведут себя и поляризации. Поэтому "быструю" волну в кристаллах (имеющую максимальную фазовую скорость) принято называть квазипродольной, а две другие волны — квазипоперечными. Скорость и поляризация объемных волн в кристаллах согласно (8) и (6) от частоты не зависят, поэтому приведенное решение применимо и для негармонических волн.

6.4.2. Доказать, что объемные акустические волны, распространяющиеся в кристалле в одном и том же направлении с разными скоростями, имеют взаимно ортогональные поляризации.

Решение. Уравнение Кристоффеля для двух волн с разными скоростями, описываемыми решением этого уравнения, можно записать в виде

$$\Gamma_{ik} u_{i0}^{(1)} = X_1 u_{k0}^{(1)}, \quad (1)$$

$$\Gamma_{ik} u_{i0}^{(2)} = X_2 u_{k0}^{(2)}. \quad (2)$$

Индексы 1 и 2 здесь используются для того, чтобы различать между собой решения, относящиеся к разным волнам. Умножая уравнение (1) на $u_{k0}^{(2)}$, а уравнение (2) на $u_{0k}^{(1)}$, имеем

$$(X_1 - X_2) u_{0k}^{(1)} u_{0k}^{(2)} = 0. \quad (3)$$

Поскольку $X_1 \neq X_2$, то $u_{0k}^{(1)} u_{0k}^{(2)} = 0$, т.е. смещения для волн с разными скоростями ортогональны. Для трех таких объемных волн, в общем случае существующих в заданном направлении в кристалле, векторы поляризаций образуют ортогональный базис, повернутый произвольным образом (поворот зависит от упругих модулей) относительно волнового вектора.

6.4.3. Какие упругие модули кристалла равны нулю, если плоскость $z = \text{const}$ является плоскостью симметрии. Рассчитать анизотропию скорости объемных волн, распространяющихся в этой плоскости.

Решение. Наличие плоскости симметрии в кристалле, нормаль к которой совпадает с осью z , означает, что при инверсии оси z матрица упругих модулей своего вида не меняет. С другой стороны, используя формулу преобразования упругих модулей при повороте и инверсии осей координат x_i

$$c'_{ijkl} = a_{ip} a_{jq} a_{kr} a_{ls} c_{pqrs}, \quad (1)$$

где a_{ij} — матрица преобразования координат ($x'_i = a_{ij} x_j$); а в качестве a_{ij} используя матрицу (3.3.2), соответствующую инверсии оси z , убеждаемся, что при таком преобразовании меняют знаки модули, содержащие индекс 3 нечетное число раз. Это означает, что указанные модули в кристалле с плоскостью симметрии, ортогональной оси z , должны равняться нулю. Матрица модулей данного кристалла (если у него нет дополнительных элементов симметрии, его называют моноклинным) выглядит так:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ \cdot & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ \cdot & \cdot & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{44} & c_{45} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{55} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{66} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Для волн, распространяющихся в плоскости симметрии, $n_3 = 0$, а $n_1 = \cos \varphi$, $n_2 = \sin \varphi$ (φ — угол между волновым вектором и осью x). Отличные от нуля компоненты тензора Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= c_{11} \cos^2 \varphi + 2c_{16} \cos \varphi \sin \varphi + c_{66} \sin^2 \varphi, \\ \Gamma_2 &= c_{66} \cos^2 \varphi + 2c_{26} \cos \varphi \sin \varphi + c_{22} \sin^2 \varphi, \\ \Gamma_3 &= c_{55} \cos^2 \varphi + 2c_{45} \cos \varphi \sin \varphi + c_{44} \sin^2 \varphi, \\ \Gamma_6 &= c_{16} \cos^2 \varphi + (c_{12} + c_{66}) \cos \varphi \sin \varphi + c_{26} \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (3)$$

(см. (1.7)). Уравнение Кристоффеля при этом имеет вид

$$\begin{vmatrix} \Gamma_1 - \rho c^2 & \Gamma_6 & 0 \\ \Gamma_6 & \Gamma_2 - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Отсюда находим скорости объемных волн как функции угла φ

$$\rho c_1^2 = \Gamma_3, \quad \rho c_{2,3}^2 = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2 \pm \sqrt{(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2/4 + \Gamma_6^2}. \quad (5)$$

Из уравнения (4) следует, что волна, распространяющаяся со скоростью c_1 , является чисто поперечной и поляризована перпендикулярно плоскости симметрии. Две другие волны поляризованы в плоскости симметрии. Но они не являются чистыми модами в смысле их поляризации. Одна из них при $\Gamma_6 \neq 0$ является квазипродольной, а другая — квазипоперечной.

6.4.4. Кристалл, имеющий три взаимно ортогональные плоскости симметрии, вырезан в форме параллелепипеда с ребрами, параллельными кристаллографическим осям. Для каждой из трех ортогональных граней образца измерены скорости трех объемных акустических волн, распространяющихся в направлении нормали к грани. Определить общее число независимых упругих модулей кристалла и исследовать возможность их вычисления по известной плотности и данным акустических измерений.

Решение. Вид матрицы упругих модулей в кристалле с плоскостью симметрии, ортогональной оси z , приведен в предыдущей задаче. Наличие плоскости симметрии, ортогональной оси x , означает (см. задачу 6.4.3), что упругие модули, содержащие индекс 1 нечетное число раз, должны обращаться в нуль. Матрица упругих модулей при этом выглядит так:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ . & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & c_{44} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & c_{55} & 0 \\ . & . & . & . & . & c_{66} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

К такому же виду матрица приводится и в случае, если плоскость симметрии ортогональна не оси x , а оси y . Следовательно, имеется девять независимых упругих модулей. Матрица (1) характерна для кристаллов ромбической симметрии. По условию задачи число измерений скоростей акустических волн также равно девяти. Поэтому на первый взгляд задача определения

полного набора упругих модулей может иметь решение. Для точного ответа на этот вопрос требуется исследование взаимосвязи скоростей объемных волн с модулями кристалла.

Из уравнения (1.7) следует, что для волн, распространяющихся вдоль кристаллографических осей в кристалле с матрицей (1), тензор Кристоффеля имеет диагональный вид, и его диагональные компоненты равны:

$$\Gamma_1 = c_{11}, \quad \Gamma_2 = c_{66}, \quad \Gamma_3 = c_{55} \quad (2)$$

для волн, распространяющихся вдоль x ;

$$\Gamma_1 = c_{66}, \quad \Gamma_2 = c_{22}, \quad \Gamma_3 = c_{44} \quad (3)$$

для волн, распространяющихся вдоль y ;

$$\Gamma_1 = c_{55}, \quad \Gamma_2 = c_{44}, \quad \Gamma_3 = c_{33} \quad (4)$$

для волн, распространяющихся вдоль z . Уравнение Кристоффеля для всех этих трех случаев имеет вид

$$\begin{vmatrix} \Gamma_1 - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 - \rho c^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

т.е. объемные волны, распространяющиеся вдоль кристаллографических осей в ромбическом кристалле, являются чистыми модами (поперечными или продольными). Их скорость $c = (\Gamma_i/\rho)^{1/2}$.

Обозначим через c_{xi} скорости объемных волн, распространяющихся в направлении оси x ($i = 1, 2, 3$). Аналогичные обозначения c_{yi} , c_{zi} будем использовать и для волн в двух других направлениях. В соответствии с (2)–(4) часть этих скоростей должна совпадать. Обозначим совпадающие скорости так, чтобы между ними выполнялись равенства

$$c_{x2} = c_{y1}, \quad c_{x3} = c_{z1}, \quad c_{y3} = c_{z2}. \quad (6)$$

В этих обозначениях между модулями и измеренными скоростями существует связь:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{66} & c_{55} \\ c_{66} & c_{22} & c_{44} \\ c_{55} & c_{44} & c_{33} \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} c_{x1}^2 & c_{x2}^2 & c_{x3}^2 \\ c_{y1}^2 & c_{y2}^2 & c_{y3}^2 \\ c_{z1}^2 & c_{z2}^2 & c_{z3}^2 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Таким образом, возможность определения модулей по измерениям скоростей чистых акустических мод в рассматриваемой задаче имеется, но не полного набора модулей, а только их части, находящейся на главной диагонали матрицы (1).

При решении конкретной задачи с числовыми данными соотношения (6) могут выполняться лишь приближенно. Тогда точность их выполнения будет служить критерием точности ориентации граней образца относительно кристаллографических плоскостей.

6.4.5. Определить вид матрицы упругих модулей поперечно-изотропного твердого тела и рассчитать анизотропию скорости распространения в нем объемных акустических волн.

Решение. Будем считать, что осью симметрии является ось z . Поворот системы координат вокруг оси z на 180° можно рассматривать как инверсию всех осей с последующей инверсией оси z . Поскольку при инверсии всех осей тензор упругих модулей как тензор четного (четвертого) ранга не изменяется, го плоскость, перпендикулярная оси поперечной изотропии, является для тензора c_{ij} плоскостью симметрии. Это означает, что часть упругих модулей в матрице (1.5) равна нулю (см. (3.2)).

Рассмотрим теперь поворот на угол $\pm 90^\circ$ вокруг оси z . При этом одна из двух осей (x и y) займет место другой. Такая операция с учетом поперечной изотропии эквивалентна инверсии одной из этих осей. Следовательно, оси x и y являются нормальными к плоскостям симметрии. Это требует равенства нулю еще ряда элементов матрицы упругих модулей, которая в результате принимает вид (4.1). Поскольку направления x и y эквивалентны, матрица c_{ijkl} должна быть также симметричной относительно перестановки индексов $1 \leftrightarrow 2$. С учетом этого матрица c_{ij} запишется в виде

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ . & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & c_{44} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & c_{44} & 0 \\ . & . & . & . & . & c_{66} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Такая матрица соответствует кристаллам тетрагональной сингонии.

Для поперечно-изотропных по линейным упругим свойствам кристаллов требуется еще одно условие на упругие модули. Для его нахождения воспользуемся результатами задачи 6.4.3. Скорости объемных волн, распространяющихся в плоскости симметрии, перпендикулярной оси z , определяются компонентами Γ_1 ,

$\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_6$, которые для матрицы (1) имеют вид

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= c_{11} \cos^2 \varphi + c_{66} \sin^2 \varphi, & \Gamma_2 &= c_{66} \cos^2 \varphi + c_{11} \sin^2 \varphi, \\ \Gamma_3 &= c_{44}, & \Gamma_6 &= (c_{12} + c_{66}) \cos \varphi \sin \varphi.\end{aligned}\quad (2)$$

Подставляя (2) в (3.5), получаем

$$\rho c_1^2 = c_{44}, \quad (3)$$

$$\rho c_{2,3}^2 = \frac{c_{11} + c_{66}}{2} \pm \left[\frac{1}{4} (c_{11} - c_{66})^2 + (c_{12} + c_{11})(c_{12} - c_{11} + 2c_{66}) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right]^{1/2}.$$

Из (3) следует, что для изотропии скорости в плоскости, ортогональной оси z , требуется, чтобы

$$c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2. \quad (4)$$

Второй возможный вариант ($c_{12} + c_{11} = 0$) отброшен как неудовлетворяющий предельному переходу к изотропной среде. Матрица (1) при выполнении (4) соответствует гексагональным кристаллам. Рассмотрим теперь распространение объемных волн под углом θ к оси z . Поскольку выбор ориентации осей x и y в плоскости поперечной изотропии произволен, рассмотрим случай $n_2 = 0$. Компоненты тензора Кристоффеля при этом равны

$$\Gamma_1 = c_{11} \sin^2 \theta + c_{44} \cos^2 \theta, \quad \Gamma_2 = c_{66} \sin^2 \theta + c_{44} \cos^2 \theta, \quad (5)$$

$$\Gamma_3 = c_{44} \sin^2 \theta + c_{33} \cos^2 \theta, \quad \Gamma_4 = \Gamma_6 = 0, \quad \Gamma_5 = (c_{13} + c_{44}) \cos \theta \sin \theta.$$

что соответствует уравнению Кристоффеля вида

$$\begin{vmatrix} \Gamma_1 - \rho c^2 & 0 & \Gamma_5 \\ 0 & \Gamma_2 - \rho c^2 & 0 \\ \Gamma_5 & 0 & \Gamma_3 - \rho c^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Из уравнений (4)–(6) находим

$$\rho c_1^2 = c_{44} + \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12} - 2c_{44}) \sin^2 \theta, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\rho c_{2,3}^2 &= \frac{1}{2} \left[c_{44} + c_{11} \sin^2 \theta + c_{33} \cos^2 \theta \pm \right. \\ &\left. \pm \left[(c_{11} - c_{44}) \sin^2 \theta - (c_{33} - c_{44}) \cos^2 \theta + 4(c_{13} + c_{44})^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] \right]^{1/2}.\end{aligned}\quad (8)$$

Такие же выражения получаются и в случае, когда плоскость, образованная волновым вектором и осью z , повернута на произвольный угол вокруг z относительно осей x и y . Волна со скоростью, определяемой соотношением (7), является поперечной и поляризована перпендикулярно указанной плоскости.

Отметим, что эта задача является единственной, для которой при произвольном направлении распространения волн и произвольном соотношении упругих модулей дисперсионное уравнение факторизуется и удается найти точные явные формулы для скоростей объемных акустических волн.

6.4.6. Определить вид матрицы упругих модулей кубических кристаллов, характеризуемой наличием трех взаимно ортогональных плоскостей симметрии и инвариантностью при переобозначении осей кристаллографического базиса. Показать, что сумма квадратов фазовых скоростей трех различных объемных волн, которые могут распространяться в одном и том же направлении кубического кристалла, для всех направлений одинакова.

Решение. Матрица упругих модулей в кристалле, имеющем три взаимно ортогональные плоскости симметрии, имеет вид (4.1). Инвариантность упругих модулей кубического кристалла при переобозначении осей кристаллографического базиса (взаимной перестановке индексов 1, 2, 3), обусловленная идентичностью кристаллографических направлений этого кристалла, накладывает дополнительные ограничения на упругие модули:

$$c_{11} = c_{22} = c_{33}, \quad c_{12} = c_{13} = c_{23}, \quad c_{44} = c_{55} = c_{66}. \quad (1)$$

С учетом (1) для кубических кристаллов матрица (4.1) принимает вид

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & c_{44} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Эта матрица характеризуется минимальным в сравнении с матрицами кристаллов других классов числом независимых упругих модулей, равным трем.

Фазовая скорость объемных волн в кристаллах в направлении, задаваемом направляющими косинусами n_1, n_2, n_3 , определяется из уравнения (1.8). По теореме Виета сумма корней этого уравнения определяется коэффициентом перед X^2 ($X_0^2 = c^2$), т.е.

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3) / \rho. \quad (3)$$

Подставляя сюда компоненты тензора Кристоффеля, рассчитанные для кубического кристалла с матрицей упругих модулей (2) по формуле (1.7),

$$\Gamma_1 = c_{11}n_1^2 + c_{44}(n_2^2 + n_3^2), \quad \Gamma_2 = c_{11}n_2^2 + c_{44}(n_1^2 + n_3^2), \quad \Gamma_3 = c_{11}n_3^2 + c_{44}(n_1^2 + n_2^2), \quad (4)$$

и учитывая, что $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, получаем

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = (c_{11} + 2c_{44})/\rho. \quad (5)$$

Из (5) следует, что искомая сумма квадратов фазовых скоростей объемных волн, распространяющихся с разными скоростями, но в одном и том же направлении в кубическом кристалле, от направления не зависит.

6.4.7. Как изменится уравнение Кристоффеля при наличии в диэлектрическом кристалле пьезоэффекта?

Решение. Общий вид уравнения движения при наличии в кристалле пьезоэффекта не изменится:

$$\rho \partial^2 u_i / \partial t^2 = \partial T_{ij} / \partial x_j. \quad (1)$$

Изменится закон Гука, который будет включать упругие напряжения, создаваемые за счет пьезоэффекта электрическим полем,

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} - e_{ijk} E_k, \quad (2)$$

где e_{ijk} — пьезомодули, E_i — напряженность электрического поля. Уравнения (1), (2) необходимо дополнить системой уравнений Максвелла. Скорость акустических волн значительно меньше (в 10^5 раз) скорости электромагнитных волн. Поэтому при расчетах электрических полей, сопровождающих акустические волны, скорость электромагнитных волн можно считать равной бесконечности. Это приближение носит название квазиэлектростатического и эквивалентно пренебрежению вихревой частью электрических полей, т.е.

$$E_i = -\partial \Phi / \partial x_i, \quad (3)$$

где Φ — потенциал электрического поля. В этом приближении из всей системы уравнений Максвелла достаточно использовать лишь условие отсутствия в диэлектрике свободных носителей заряда

$$\partial D_i / \partial x_i = 0, \quad (4)$$

где D_i — индукция электрического поля, связанная с E_k и S_{jk} соотношением

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k + e_{ijk} S_{jk}. \quad (5)$$

Вид уравнений состояния (2), (5) определяется выбором независимых переменных и термодинамического потенциала. Для уравнений (2), (5) независимыми являются поля S_{ij} и E_i , а термодинамический потенциал записан в виде

$$H = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} - \frac{1}{2} \epsilon_{kl} E_k E_l - e_{ijk} E_k S_{ij}. \quad (6)$$

Поля T_{ij} и D_k связаны с термодинамическим потенциалом (6), называемым электрической энтальпией, соотношениями

$$T_{ij} = \partial H / S_{ij}, \quad D_k = -\partial H / E_k. \quad (7)$$

Этим объясняется равенство модулей прямого пьезоэффекта в (5) модулям обратного пьезоэффекта в уравнении (2).

Уравнения (1)–(5) сводятся к уравнениям относительно смещения u_i и потенциала Φ , которые для плоских гармонических объемных волн, соответствующих решениям

$$u_i = u_0 \exp(ikn_i x_i - i\omega t), \quad \Phi = \Phi_0 \exp(ikn_i x_i - i\omega t), \quad (8)$$

принимают вид

$$\begin{aligned} c_{ijkl} n_j n_l u_{k0} - \rho \omega^2 u_{k0} + e_{ijk} n_j n_k \Phi_0 &= 0, \\ -\epsilon_{ik} n_i n_k \Phi_0 + e_{ijk} n_l n_j u_{k0} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Исключая отсюда потенциал Φ , получаем уравнение Кристоффеля для пьезоэлектрических кристаллов

$$(\Gamma_{ik} + e_i e_k / \epsilon - \rho \omega^2 \delta_{ik}) u_{k0} = 0, \quad (10)$$

где $\epsilon = \epsilon_{ik} n_i n_k$, $e_i = e_{ijk} n_j n_k$. Свертку e_i пьезомодулей с направляющими косинусами называют пьезоэлектрическим вектором. Величина $\Gamma'_{ik} = \Gamma_{ik} + e_i e_k / \epsilon$ играет роль эффективного тензора Кристоффеля для пьезоэлектрической среды. Это выражение является основанием для введения эффективных так называемых ужестченных модулей упругости

$$c'_{ijkl} = c_{ijkl} + e_{mij} e_{nkl} n_m n_n / \epsilon. \quad (11)$$

При использовании ужестченных модулей задача для пьезоэлектрической среды сводится к задаче для чисто упругой среды. Но эквивалентность решений при таком переходе выполняется лишь для объемных волн в безграничной среде и нарушается при рассмотрении ограниченных сред.

6.4.8. Построить решение задачи о распространении вдоль свободной поверхности в направлении оси x пьезоактивных поверхностных сдвиговых волн, поляризованных вдоль оси z , в гексагональном пьезоэлектрическом кристалле класса $6mm$ y -

среза. Оценить в длинах волн среднюю глубину локализации этих волн (в литературе их принято называть волнами Гуляева-Блюстейна) на металлизированной и свободной поверхностях сульфида кадмия ($K = e_{15}/\sqrt{\epsilon_{11}c_{44}} = 0,188$; $\epsilon_{11}/\epsilon_0 = 9,02$) в пренебрежении его проводимостью и пьезокерамики PZT-4 ($K = 0,71$; $\epsilon/\epsilon_0 = 730$).

Решение. Уравнения состояния (7.2), (7.5) при использовании свертки индексов (1.4) записываются в форме

$$T_I = c_{IJ} S_J - e_{kI} E_k, \quad D_i = \epsilon_{ik} E_k + e_{iI} S_I. \quad (1)$$

Для кристаллов класса *6mm* матрица упругих модулей такая же, как и для поперечно-изотропных сред (см.(5.1)), а матрицы пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей имеют вид

$$e_{iI} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{13} & e_{13} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Подставляя (2) и (5.1) в систему уравнений (7.1)–(7.5), можно убедиться, что для волн, распространяющихся в плоскости *xy* гексагональных пьезокристаллов с плоским вдоль оси *z* фазовым фронтом, система исходных уравнений (и граничных условий) распадается на две несвязанные системы. Одна из них описывает непьезоактивные волны, поляризованные в плоскости *xy*, и совпадает с уравнениями для изотропных сред. Вторая система уравнений, описывающая пьезоактивные сдвиговые волны, поляризованные вдоль оси *z*, имеет вид

$$\begin{cases} \rho(\partial^2 u / \partial t^2) = c \Delta_{\perp} u + e \Delta_{\perp} \Phi, \\ -\epsilon \Delta_{\perp} \Phi + e \Delta_{\perp} u = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$, $c = c_{44}$, $e = e_{15}$, $\epsilon = \epsilon_{11}$, $u = u_z$. Поиск решения уравнений (3) в виде гармонических поверхностных волн (ось *y* направлена вне кристалла)

$$\begin{Bmatrix} u \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(y) \\ \Phi(y) \end{Bmatrix} \exp(ikx - i\omega t), \quad \begin{Bmatrix} u(y) \\ \Phi(y) \end{Bmatrix} \exp(\chi y) \quad (4)$$

приводит к уравнениям

$$\begin{cases} [c(\kappa^2 - k^2) + \rho\omega^2] u + e(\kappa^2 - k^2) \Phi = 0, \\ e(\kappa^2 - k^2) u - \epsilon(\kappa^2 - k^2) \Phi = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Из условия нетривиальности решения системы уравнений находим возможные значения постоянной затухания волны в глубь кристалла κ : $\kappa_1 = k$ и $\kappa_2 = \sqrt{k^2 - k_t^2}$, где $k_t^2 = \omega^2 \rho / [c(1 + K^2)]$ —

квадрат волнового числа объемной сдвиговой волны, которая может распространяться в плоскости xu ; K — коэффициент электромеханической связи, $K^2 = e^2/(c\epsilon)$. Эти значения k соответствуют двум парциальным волнам с убывающей при удалении от границы кристалла амплитудой. Решение граничной задачи ищется в виде суперпозиции этих парциальных волн:

$$u(y) = u_0 \exp(\kappa_2 y), \quad (6)$$

$$\Phi(y) = (eu_0/\epsilon) \exp(\kappa_2 y) + C \exp(ky),$$

где u_0 — амплитуда механических смещений на поверхности кристалла; C — постоянная, определяющая соотношение амплитуд парциальных волн, находится из граничных условий. Механическое смещение и потенциал электрического поля связаны для каждой парциальной волны уравнениями (5). Причем для парциальной волны с $\kappa = k$ амплитуда смещения, как следует из (5), равна нулю, т.е. поле механических смещений в этом кристалле для волны Гуляева–Блюштейна является однопарциальным.

К граничным условиям относятся обращение в нуль на механически свободной поверхности нормальной компоненты тензора упругих напряжений $T_{yz} = c \partial u / \partial y + e \partial \Phi / \partial y$ и непрерывность нормальной компоненты индукции $D_y = -\epsilon \partial \Phi / \partial y + e \partial u / \partial y$ и тангенциальной компоненты напряженности $E_x = -ik \Phi$ электрического поля. Вместо двух указанных граничных условий для электрических полей удобнее использовать их комбинацию — непрерывность отношения $Y = D_y / E_x$, называемого поверхностным электрическим адмиттансом. В качестве второго граничного условия удобно оставить условие непрерывности E_x . Адмиттанс Y в линейной задаче не зависит от амплитуды волны, т.е. он может служить в качестве характеристики свойств среды. Для вакуума решение уравнения Пуассона записывается в виде $\Phi = \Phi_0 \exp(ikx - i\omega t - ky)$, а $D_y = \epsilon_0 k \Phi$, где ϵ_0 — диэлектрическая постоянная. Отсюда следует, что для вакуума $Y = i\epsilon_0$. Если поверхность кристалла металлизирована, то в этом случае $E_x = 0$, а $Y = \infty$.

Подставляя решение (6) в граничные условия $T_{yz} = 0$, $D_y / E_x = Y$ при $y = 0$, где Y — поверхностный электрический адмиттанс внешней среды, получаем

$$c(1+K^2) \sqrt{k^2 - k_t^2} u_0 + ekC = 0, \quad -iY \frac{e}{\epsilon} u_0 + (\epsilon - iY) C = 0. \quad (7)$$

Отсюда

$$\sqrt{k^2 - k_t^2} = kK^2 \Lambda [(1+K^2)(1-\epsilon/iY)], \quad (8)$$

$$C = -(e/\epsilon)u_0/(1-\epsilon/iY). \quad (9)$$

Выражение для скорости волн Гуляева–Блюстейна несложно найти из уравнения (8). Для слабых пьезоэлектриков (с малым коэффициентом электромеханической связи) скорость этих волн мало отличается от скорости пьезоактивных объемных волн той же поляризации — отличие составляет величину порядка K^4 . Средняя глубина локализации $\bar{y}$ рассматриваемой волны совпадает с глубиной, на которой амплитуда механических колебаний, создаваемых волной, спадает в e раз и в длинах волн Λ равна

$$\bar{y}/\Lambda = (1+K^2)(1-\epsilon/iY)/(2\pi K^2). \quad (10)$$

В сульфиде кадмия данное отношение равно 4,6 для металлизированной поверхности и 46,7 для свободной поверхности.

Приведенные соотношения применимы не только для кристаллов, но и для пьзотекстур и пьзокерамик. Для PZT-4, как показывают расчеты, $\bar{y}/\Lambda = 0,47$ для металлизированной поверхности и $\bar{y}/\Lambda = 347$ для свободной поверхности.

6.4.9. Продольная акустическая волна распространяется вдоль оси z гексагонального пьезополупроводника. Найти зависимость скорости и акустоэлектронного затухания этой волны от параметров среды, используя гидродинамическую модель для тока в пролупроводнике с учетом его диффузионной составляющей и малость коэффициента электромеханической связи. При какой проводимости и частоте звука коэффициент акустоэлектронного затухания максимален? Чему равна эта частота при комнатной температуре для кристалла сульфида кадмия (подвижность электронов проводимости $\mu_e = 300 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$; диэлектрическая проницаемость $\epsilon_{33} = 9,5 \epsilon_0$; упругий модуль $c_{33} = 9,38 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2$; плотность кристалла $\rho_m = 4,82 \text{ г/см}^3$) с концентрацией свободных электронов $n_0 = 10^{12} \text{ см}^{-3}$?

Решение. Соответствующая система уравнений имеет вид:

$$\rho_m \partial^2 u / \partial t^2 = \partial T / \partial z \quad (\text{уравнение движения}),$$

$$\partial \rho / \partial t + \partial j / \partial z = 0 \quad (\text{уравнение сохранения зарядов}),$$

$$j = \sigma_0 E - D \partial \rho / \partial z \quad (\text{выражение для тока проводимости}),$$

$$\partial D / \partial z = \rho \quad (\text{уравнение Пуассона}),$$

$$T = c \partial u / \partial z - e E, \quad D = \epsilon E + e \partial u / \partial z \quad (\text{уравнения состояния}),$$

где $c = c_{33}$, $\epsilon = \epsilon_{33}$, $e = e_{33}$, ρ — плотность свободных электронов, σ_0 — проводимость, $\mathcal{D}$ — коэффициент диффузии электронов. Дырочная компонента тока проводимости пренебрежимо мала и в этой системе уравнений не учитывается, поскольку подвижность дырок существенно меньше подвижности электронов, σ_0 и $\mathcal{D}$ прямо пропорциональны подвижности, а равновесные концентрации электронов и дырок вследствие электронейтральности пьезопроводника равны между собой.

При поиске решения в виде гармонической волны, изменяющейся по закону $\exp(ikz - i\omega t)$, уравнения движения и сохранения зарядов с помощью остальных уравнений системы сводятся к следующим уравнениям относительно переменных u и E :

$$(ck^2 - \rho_m \omega^2)u + ikeE = 0, \quad (\mathcal{D}k^2 - i\omega)eiku + (\sigma_0 + \mathcal{D}k^2\epsilon - i\omega\epsilon)E = 0. \quad (1)$$

Из равенства нулю детерминанта системы уравнений (1) находим дисперсионное уравнение

$$k^2 = \rho_m \frac{\omega^2}{c} - K^2 \frac{i\omega - \mathcal{D}k^2}{i\omega - \mathcal{D}k^2 - \sigma_0/\epsilon}, \quad (2)$$

где $K^2 = e^2/(c\epsilon)$. Уравнение (2) является биквадратным уравнением относительно волнового числа k и описывает связанные за счет пьезоэффекта акустические и плазменные волны. Его решение для акустических волн в первом приближении по K^2 :

$$k = k_0 \left[1 + \frac{\Delta k}{k_0} \right], \quad \frac{\Delta k}{k_0} = -\frac{K^2}{2} \frac{1 + i\omega/\omega_D}{1 + i(\omega_C/\omega + \omega/\omega_D)}, \quad (3)$$

где $k_0 = \omega/c_0$, $c_0^2 = c/\rho$, c_0 — скорость акустических волн в отсутствие пьезоэффекта; ω_C и ω_D — так называемые частота релаксации проводимости и диффузионная частота, определяемые соотношениями $\omega_C = \sigma_0/\epsilon$, $\omega_D = c_0^2/\mathcal{D}$. Представляя $\Delta k/k_0$ в виде

$$\frac{\Delta k}{k_0} = -\frac{\Delta c_a}{c_0} + i\alpha, \quad (4)$$

где $\Delta c_a/c_0$ — относительное возмущение фазовой скорости акустических волн из-за наличия в среде пьезоэффекта, α — коэффициент акустоэлектронного затухания, находим

$$\frac{\Delta c_a}{c_0} = \frac{K^2}{2} \frac{1 - (\omega/\omega_D)(\omega_C/\omega + \omega/\omega_D)}{1 + (\omega_C/\omega + \omega/\omega_D)^2}, \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{kK^2}{2} \frac{\omega_C/\omega}{1 + (\omega_C/\omega + \omega/\omega_D)^2}. \quad (6)$$

Из (6) следует, что максимум α по частоте достигается при $\omega = \omega_0 = (\omega_C/\omega_D)^{1/2}$, а максимум по проводимости соответству-

ет выполнению условия $\omega_C = \omega [1 + (\omega/\omega_D)^2]^{1/2}$. В пренебрежении диффузией последнее условие эквивалентно равенству $\omega_C = \omega$. Для сульфида кадмия при выполнении условий задачи $\omega_C = \sigma_0/\epsilon = \mu_e e_0 n_0/\epsilon = 57$ МГц, где $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона, а необходимое для расчета ϵ значение диэлектрической постоянной $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Учитывая далее, что $\mathcal{D} = \mu_e k_B T_K / e_0$, где $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, при комнатной температуре ($T_K \approx 300$ К), находим $\mathcal{D} = 7,7 \times 10^{-4}$ м²/с, $\omega_D = c_0^2/\mathcal{D} = 25,3$ ГГц, $\omega_0 = (\omega_C \omega_D)^{1/2} = 1,2$ ГГц.

6.4.10. Как изменятся результаты, полученные в предыдущей задаче, если вдоль направления распространения волны приложено постоянное дрейфовое электрическое поле напряженностью E_0 . При каких значениях E_0 коэффициент акустоэлектронного затухания равен нулю и максимален и при каких E_0 достигает максимума акустоэлектронное усиление?

Решение. При наличии вдоль направления распространения волны постоянного электрического поля с напряженностью E_0 приведенные выше выражения, как нетрудно показать, остаются справедливыми, если в них вместо параметров ω_C , ω_D использовать эффективные значения ω'_C , ω'_D , равные $\omega'_C = \omega_C/\gamma$, $\omega'_D = \gamma\omega_D$, где $\gamma = 1 - \mu E_0/c_0$; скорость дрейфа электронов v_d равна $v_d = \mu E_0$. Из анализа формулы для коэффициента α в пьезополупроводнике с постоянным дрейфом носителей заряда следует, что α обращается в нуль при $\gamma = 0$ или, что эквивалентно, при равенстве скорости дрейфа скорости звука, а максимален при $\gamma = \omega_C/\omega + \omega/\omega_D$. Акустоэлектронное усиление, возникающее при $\gamma < 0$, максимально при $\gamma = -(\omega_C/\omega + \omega/\omega_D)$. Оптимальная для акустоэлектронного взаимодействия частота ω_0 при $E_0 \neq 0$ количественно не меняется, а оптимальная проводимость (частота релаксации проводимости) изменится в соответствии с приведенными выше эффективными значениями ω'_C и ω'_D : $\omega_C = \gamma\omega [1 + (\omega/\gamma\omega_D)^2]^{1/2}$.

7. СТАТИСТИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

7.1. Основы теории случайных процессов

7.1.1. Записать выражение для вероятностного распределения случайного процесса $v(t)$ и его характеристической функции, используя скобки статистического усреднения. Получить связь статистических моментов с характеристической функцией.

Решение. Если $w_v(v; t)$ — вероятностное распределение случайного процесса $v(t)$, то среднее от произвольной функции $f(v(t))$ равно

$$\langle f(v(t)) \rangle_v = \int f(v) w_v(v; t) dv. \quad (1)$$

Используя фильтрующее свойство δ -функции, можно записать

$$\langle \delta(v - v(t)) \rangle_v = w_v(v; t). \quad (2)$$

Характеристическая функция случайного процесса $\theta_v(k, t)$ связана с вероятностным распределением фурье-преобразованием:

$$\theta_v(k; t) = \int w(v; t) e^{ikv} dv = \langle e^{ikv(t)} \rangle. \quad (3)$$

Из (3) следует, что статистические моменты случайного процесса $v(t)$

$$\mu_n = \langle v^n(t) \rangle = \int v^n w(v; t) dv \quad (4)$$

выражаются через производные характеристической функции при $k = 0$:

$$\mu_n = \left. \frac{\partial^n \theta(k; t)}{\partial (ik)^n} \right|_{k=0}. \quad (5)$$

7.1.2. Записать вероятностное распределение и характеристическую функцию гауссова (нормального) процесса $v(t)$ со средним $m = \langle v(t) \rangle$ и дисперсией $\sigma^2 = \langle (v(t) - m)^2 \rangle$.

Ответ.

$$w(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(v-m)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (1)$$

$$\theta(k) = \exp \{ ikm - k^2 \sigma^2 / 2 \}. \quad (2)$$

7.1.3. В акустике большую роль играют квазимонохроматические сигналы, которые можно представить в виде

$$v(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (1)$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ — медленные функции времени. Найти среднее процесса $v(t)$, считая, что амплитуда постоянна, а $\bar{\varphi}(t)$ — случайная фаза, имеющая гауссово распределение со средним $\bar{\varphi}$ и дисперсией σ_{φ}^2 .

Решение. Рассмотрим процесс $z(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$. Так как линейная комбинация гауссовых процессов остается гауссовой, то $z(t)$ также гауссов процесс со средним $\langle z \rangle = \omega_0 t + \bar{\varphi}$ и дисперсией $\sigma_z^2 = \sigma_{\varphi}^2$. Из (1.3) следует, что

$$\langle v(t) \rangle = A \langle \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \rangle_{\varphi} = A \langle \cos z(t) \rangle_z = \operatorname{Re} \theta_z(1, t).$$

Находя действительную часть характеристической функции гауссова процесса (2.2), имеем

$$\langle v(t) \rangle = A \exp(-\sigma_{\varphi}^2/2) \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}). \quad (2)$$

7.1.4. Случайный процесс $v(t)$ подвергается нелинейному преобразованию

$$u(t) = \psi(v(t)). \quad (1)$$

Считая известным вероятностное распределение $w(v; t)$, найти вероятностное распределение процесса $u(t)$.

Решение. Используя определение вероятностного распределения (1.2), напомним

$$w_u(u; t) = \langle \delta(u - u(t)) \rangle_u = \langle \delta(u - \psi(v(t))) \rangle_v = \int \delta(u - \psi(v)) w_v(v; t) dv. \quad (2)$$

В силу фильтрующего свойства δ -функции "выкалывает" при интегрировании те значения v , где $u - \psi(v) = 0$. Пусть $v_i(u)$ — i -й корень этого уравнения, или, другими словами, i -я ветвь функции, обратной к функции $u = \psi(v)$. Тогда из (2) получаем

$$w_u(u; t) = \sum_i \frac{w_v(v_i(u))}{|\psi'_v(v_i(u))|} = \sum_i w_v(v_i(u)) |v'_i(u)|. \quad (3)$$

Примечание. При выводе формулы (3) использовалось следующее свойство δ -функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(f(t)) dt = \sum_i \frac{\varphi(t_i)}{|f'(t_i)|}, \quad (4)$$

где t_i — корни уравнения $f(t) = 0$.

7.1.5. В задачах рассеяния волны на случайных неоднородностях в приближении метода плавных возмущений (метода Рытова) получается, что амплитуда волны имеет вид $A = e^{\alpha \chi}$, где

χ — случайная гауссова величина со средним значением $\langle \chi \rangle = \bar{\chi}$ и дисперсией σ_χ^2 . Найти вероятностное распределение амплитуды и ее моменты. Найти условие на $\bar{\chi}$ и σ_χ^2 , при выполнении которого сохраняется интенсивность волны (второй момент); выразить для этого случая моменты через σ_χ^2 .

Решение. Обратное преобразование $\chi = (\ln A)/\alpha$ однозначно и из (4.3) получаем

$$w_a(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\chi^2}} \frac{1}{\alpha A} \exp \left\{ - \frac{[(\ln A)/\alpha - \bar{\chi}]^2}{2\sigma_\chi^2} \right\}.$$

Это так называемое логнормальное распределение. Моменты амплитуды удобнее считать, используя характеристическую функцию гауссова процесса $\theta_\chi(\kappa)$:

$$\langle A^n \rangle = \langle e^{n\alpha\chi} \rangle = \theta_\chi(-in\alpha) = \exp(n\alpha\bar{\chi} + n^2\alpha^2\sigma_\chi^2/2).$$

Интенсивность волн сохраняется ($\langle A^2 \rangle \equiv 1$), если среднее и дисперсия χ удовлетворяют условию $\bar{\chi} = -\alpha\sigma_\chi^2$. При этом

$$w_a(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2\sigma_\chi^2}} \exp \left\{ - \frac{1}{2\alpha^2\sigma_\chi^2} [\ln A + \alpha^2\sigma_\chi^2]^2 - \ln A \right\},$$

$$\langle A^n \rangle = \exp[\alpha^2\sigma_\chi^2 n(n-2)/2].$$

Особенностью распределения является то, что его максимум смещается с ростом α в сторону малых A : $A_{\max} = \exp(-2\alpha^2\sigma_\chi^2)$, в то время как высшие моменты быстро растут.

7.1.6. Найти вероятностное распределение квазимонохроматического сигнала $v(t)$ (см. (3.1)) для: а) $A(t) = A = \text{const}$, а фаза φ равномерно распределена в интервале $[0, 2\pi]$; б) A — случайная амплитуда, имеющая рэлеевское распределение:

$$w(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp \left[- \frac{A^2}{2\sigma^2} \right], \quad (1)$$

фаза φ независима от A и распределена равномерно в $[0, 2\pi]$.

Решение. Пусть $w_2(A, \varphi)$ — совместное распределение амплитуды и фазы. По определению вероятностного распределения

$$w_v(v, t) = \langle \delta(v - A \cos(\omega_0 t + \varphi)) \rangle_{A, \varphi} = \int w_2(A, \varphi) \delta(v - A \cos(\omega_0 t + \varphi)) dA d\varphi. \quad (2)$$

В силу условий задачи $w_2(A, \varphi) = w(A)/2\pi$, если $\varphi \in [0, 2\pi]$, и $w_2 = 0$, если $\varphi \notin [0, 2\pi]$. Учитывая, что в (2) обратная функция имеет две ветви, после интегрирования по φ получаем

$$w_v(v; t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (A^2 - v^2)^{-1/2} w(A) dA,$$

|v|

т.е. вероятностное распределение не зависит от времени.

а) В этом случае $w(A) = \delta(A - A_0)$ и

$$w_v(v; t) = [\pi^2(A_0^2 - v^2)]^{-1/2}; \quad (4)$$

б) если $w(A)$ имеет рэлеевское распределение (1), то, вводя новую переменную $A = |v| \operatorname{ch} y$, получаем

$$w_v(v; t) = \frac{1}{\pi} \int w(|v| \operatorname{ch} y) dy, \quad w_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (5)$$

Таким образом, вероятностное распределение сигнала гауссово.

7.1.7 В ЭВМ имеется датчик случайных чисел, генерирующий независимую пару чисел ξ_1 и ξ_2 , каждое из которых равномерно распределено в интервале $[0, 1]$. Используя результаты предыдущей задачи, построить преобразование, которое дает пару чисел, имеющих гауссово распределение с дисперсией σ^2 .

Ответ. Случайные числа

$$v_1 = A \cos \varphi, \quad v_2 = A \sin \varphi, \quad (1)$$

$$A = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - \xi_1)}, \quad \varphi = 2\pi\xi_2, \quad (2)$$

независимы и имеют гауссово распределение с дисперсией σ^2 . При этом величина A имеет рэлеевское распределение (6.1), а φ распределено равномерно в интервале $[0, 2\pi]$.

7.1.8. Квазигармонический сигнал $v(t)$ представляет сумму квадратурных составляющих:

$$v(t) = A_c(t) \cos(\omega_0 t) + A_s(t) \sin(\omega_0 t), \quad (1)$$

где $A_c(t)$ и $A_s(t)$ — статистически независимые гауссовы случайные процессы с нулевыми средними и с одинаковыми дисперсиями σ^2 . Этот же сигнал может быть записан в виде (3.1), где $\varphi = -\arctg(A_s/A_c)$ и $A = (A_c^2 + A_s^2)^{1/2}$ — случайные фаза и амплитуда. Найти вероятностные распределения: а) случайного процесса $v(t)$, б) случайной интенсивности $J(t) = (A_c^2 + A_s^2)/2$, в) случайной амплитуды A .

Ответ.

$$а) w_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right], \quad б) w_J(J) = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{J}{\sigma^2}\right], \quad J > 0, \quad (2)$$

в) вероятностное распределение амплитуды $A = \sqrt{J}$ имеет рэлеевское распределение (см. (6.1)).

7.1.9. На вход сумматора поступают два независимых гауссовых сигнала $u = v_1 + v_2$ с одинаковым средним $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle = m$ и одинаковыми дисперсиями σ^2 . Отношение «постоянной» составляющей к среднеквадратичному значению $r_0 = \langle u \rangle / \sigma_u$ назовем

отношением сигнал/шум Найти вероятностное распределение сигнала u , его среднее значение, дисперсию отношение сигнал/шум на выходе $r_1 = \langle u \rangle / \sigma_u$.

Решение. Если $w_2(v_1, v_2)$ — совместное вероятностное распределение v_1 и v_2 , то

$$w_u(u) = \langle \delta(u - (v_1 + v_2)) \rangle = \iint \delta(u - (v_1 + v_2)) w_2(v_1, v_2) dv_1 dv_2 = \int w_2(u - v_2, v_2) dv_2.$$

При независимых v_1 и v_2 вероятностное распределение есть свертка распределений

$$w_u(u) = \int w_v(u - v_2) w_v(v_2) dv_2, \quad (1)$$

и легко получить, что распределение $w_u(u)$ будет гауссовым со средним $\langle u \rangle = 2m$ и дисперсией $\sigma_u^2 = 2\sigma^2$, так что отношение сигнал/шум на выходе возрастет в $\sqrt{2}$ раз: $r_1/r_0 = \sqrt{2}$.

7.1.10. Отношение сигнал/шум в каждом из каналов сумматора равно $r_0 = 0,1$ (см. задачу 7.1.9). Каково должно быть число каналов сумматора N , чтобы отношение сигнал/шум на входе равнялось $r_1 = 2$?

Ответ. $N = (r_1/r_0)^2 = 400$.

7.1.11. Для эргодического процесса его статистические средние совпадают с временными средними. Исходя из определения вероятностного распределения (см. (2.2)), найти оценку вероятностного распределения $w^T(v)$ через временное среднее.

Решение. Заменим в (1.2) статистическое среднее $\langle \dots \rangle$ на временное среднее

$$\langle \dots \rangle^T = \frac{1}{T} \int_0^T (\dots) dt. \quad (1)$$

Используя фильтрующее свойство δ -функции, получаем для оценки вероятностного распределения $w^T(v)$:

$$w^T(v) = \langle \delta(v - v(t)) \rangle^T = \frac{1}{T} \int_0^T \delta(v - v(t)) dt = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^N \left| \frac{\partial v(t_k)}{\partial t} \right|^{-1}, \quad (2)$$

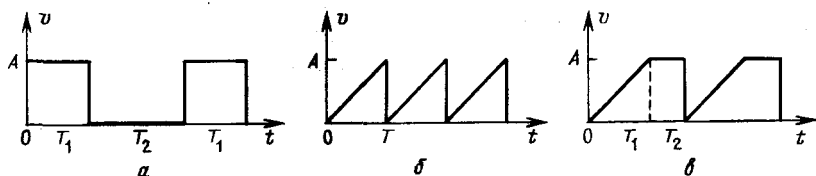
где t_k — корни уравнения $v = v(t_k)$, т.е. моменты времени, где процесс $v(t)$ пересекает уровень v . Записывая в (2) производную через предел конечных приращений, получаем выражение для $w^T(v)$ через относительное время пребывания:

$$w^T(v) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^N \left| \frac{\Delta t_k}{\Delta v} \right|, \quad \Delta v \rightarrow 0, \quad (3)$$

где Δt_k — время пребывания процесса $v(t)$ в интервале $v, v + \Delta v$.

7.1.12. Найти относительное время пребывания гармонического сигнала (3.2) ($A = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$).

Ответ. $w^T(v)$ описывается выражением (6.4) и совпадает со статистическим средним сигнала, имеющим случайную фазу, равномерно распределенную в интервале $[0, 2\pi]$.



К задаче 7.1.13

7.1.13. Реализации периодического случайного процесса имеют вид, изображенный на рисунке. Считая, что процесс эргодический, найти плотности вероятности случайного процесса.

Ответ.

а) $w(v) = [T_2/(T_1+T_2)] \delta(v) + [T_1/(T_1+T_2)] \delta(v-A),$

б) $w(v) = \begin{cases} 1/A, & 0 < v < A, \\ 0, & 0 < A, v < 0, \end{cases}$

в) $w(v) = \begin{cases} [T_2/(T_1+T_2)] \delta(v-A) + [T_1/(T_1+T_2)] A^{-1}, & 0 < v < A, \\ 0, & v < 0, v > A. \end{cases}$

7.1.14. Показать, что если случайный процесс $v(t)$ стационарен и его корреляция равна

$$\langle v(t') v(t'') \rangle = K(t' - t'') = K(\tau), \quad \tau = t' - t'', \quad (1)$$

то фурье-компоненты этого процесса

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2)$$

δ -коррелированы, т.е.

$$\langle C(\omega') C^*(\omega'') \rangle = S(\omega') \delta(\omega' - \omega''), \quad (3)$$

а спектральная плотность мощности (спектр) $S(\omega)$ связана с функцией корреляции фурье-преобразованием

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (4)$$

Решение. Учитывая стационарность случайного процесса, из (2) для статистического среднего произведения фурье-компо-

нент имеем

$$\begin{aligned}\langle C(\omega') C^*(\omega'') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \langle v(t') v(t'') \rangle e^{-i\omega' t' + i\omega'' t''} dt' dt'' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint K(t' - t'') e^{-i(\omega' - \omega'')t'} e^{-i\omega''(t' - t'')} dt' dt''.\end{aligned}$$

Вводя новую переменную $\tau = t' - t''$ и учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt = \delta(\omega), \quad (5)$$

получаем

$$\langle C(\omega') C^*(\omega'') \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega' \tau} d\tau \cdot \delta(\omega' - \omega'') = S(\omega') \delta(\omega' - \omega'').$$

После интегрирования по ω'' получаем равенство (4). Обратное фурье-преобразование дает связь функции корреляции со спектром. В частности, мощность процесса равна

$$K(0) = \langle v^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (6)$$

Если $\langle v \rangle \neq 0$, вводят ковариационную функцию B флуктуационной компоненты $B(t, t') = \langle (v(t) - \langle v \rangle) (v(t') - \langle v \rangle) \rangle$ и для стационарных процессов $B(\tau) = K(\tau) - \langle v \rangle^2$. Спектральную плотность мощности флуктуационной компоненты описывают функцией $g(\omega)$

$$S(\omega) = g(\omega) + \langle v \rangle^2 \delta(\omega),$$

которая связана с B фурье-преобразованием (см. (4)). Если среднее значение равно нулю, то

$$B(\tau) = K(\tau), \quad g(\omega) = S(\omega).$$

7.1.15. Стационарный сигнал $v(t)$ с функцией корреляции $K_v(\tau)$ и спектром мощности $S(\omega)$ записан на магнитофон со скоростью V_0 . Сигнал $u(t)$ получен при воспроизведении сигнала $V(t)$ со скоростью $V_1 = \alpha V_0$. Найти функцию корреляции и спектр сигнала $u(t)$. Как они изменяются при $\alpha > 1$?

Ответ. $K_u(\tau) = K_v(\alpha\tau)$, $S_u(\omega) = S_v(\omega/\alpha)/\alpha$. При воспроизведении с большей скоростью ($\alpha > 1$) корреляционная функция сжимается, а спектр уширяется с одновременным уменьшением амплитуды спектра.

7.1.16. Прохождение сигнала $v(t)$ через линейную систему (радиотехническую цепь, канал распространения звука в океане и т.п.) полностью характеризуется коэффициентом передачи системы $K(i\omega)$, который равен отношению комплексных амплитуд сигнала на выходе u_ω и входе v_ω при гармоническом входном

сигнале частоты ω :

$$K(i\omega) = u_\omega / v_\omega \quad (1)$$

Найти связь спектров мощности сигналов $u(t)$ и $v(t)$ при стационарном входном сигнале. Какие характеристики системы можно получить, если использовать в качестве входного сигнала белый шум $S_v(\omega) = S_0 = \text{const}$? Рассмотреть случаи:

$$\text{а) } u_1(t) = v(t) + \tau_0 \frac{dv(t)}{dt}, \quad \text{б) } u_2(t) = v(t) - \tau_0 \frac{dv(t)}{dt}.$$

Решение. Фурье-компоненты выходного сигнала $u(t)$ и входного сигнала $v(t)$ связаны соотношением

$$C_u(\omega) = K(i\omega)C_v(\omega). \quad (2)$$

Используя (14.3), получаем

$$S_u(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_v(\omega). \quad (3)$$

Для белого шума спектр на выходе пропорционален квадрату модуля коэффициента передачи $S_u(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_0$, т.е. при измерении спектров мощности происходит потеря информации о фазовых характеристиках системы. В частности, для приведенных примеров спектр мощности в обоих случаях одинаков:

$$S_u(\omega) = (1 + \tau_0^2 \omega^2) S_v(\omega).$$

7.1.17. Сферический акустический источник излучает стационарный шум. На расстоянии $r = r_0$ от излучателя спектральная плотность давления равна $S_0(\omega)$. Найти спектральную плотность давления $S_p(\omega, r)$ и скорости $S_v(\omega, r)$ на расстоянии r от излучателя. Можно ли по спектральной плотности определить расстояние от излучателя?

Решение. Потенциал сферически расходящейся волны:

$$\Phi(t, r) = f(t - r/c_0)/r. \quad (1)$$

Акустическое давление p и скорость частиц v в волне:

$$p = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \rho_0 \frac{f'}{r}, \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{f'}{c_0 r} + \frac{f}{r^2}, \quad (2)$$

где ρ_0 , c_0 — плотность среды и скорость звука. Рассматривая гармоническое возмущение $e^{i\omega t}$, из (1) и (2) можно найти "коэффициенты" передачи $K_p(i\omega)$, $K_v(i\omega)$:

$$K_p(i\omega) = \frac{p(r)}{p(r_0)} = \frac{r_0}{r} \exp\left[-\frac{i\omega(r-r_0)}{c_0}\right], \quad (3)$$

$$K_v(i\omega) = \frac{v(r)}{p(r_0)} = \frac{r_0}{r(\rho_0 c_0)} \left[1 + \frac{c_0}{i\omega r}\right] \exp\left[-\frac{i\omega(r-r_0)}{c_0}\right].$$

Из соотношения (16.3) для спектральной плотности получаем

$$S_p(\omega, r) = \frac{r_0^2}{r^2} S_0(\omega), \quad S_v(\omega, r) = \frac{r_0^2}{r^2 (\rho_0 c_0)^2} \left[1 + \frac{c_0^2}{\omega^2 r^2} \right] S_0(\omega).$$

Связь спектральных плотностей, скорости и давления имеет вид

$$S_v(\omega, r) = \frac{S_p(\omega, r)}{(\rho_0 c_0)^2} \left[1 + \frac{c_0^2}{\omega^2 r^2} \right].$$

Таким образом, из-за наличия эффекта ближнего поля (второе слагаемое в зависимости $v(r)$ (см.(2)) имеется принципиальная возможность по абсолютным измерениям шума в одном сечении определить расстояние до источника.

7.1.18. Распространение акустической волны в среде со слабой дисперсией и затуханием описывается уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial p}{\partial t} = -\alpha p - \mu \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^3 p}{\partial t^3},$$

где c_0 — скорость звука; α , μ — коэффициенты, характеризующие частотнонезависимое и высокочастотное затухания; β — коэффициент, характеризующий дисперсию среды. На входе при $z = 0$ задан стационарный шум со спектром $S_0(\omega)$. Найти спектр поля $S_p(\omega, z)$ в сечении z . Какие параметры среды можно определить, измеряя трансформацию спектра?

Ответ. $S_p(\omega, z) = S_0(\omega) \exp(-2\alpha z - 2\mu\omega^2 z)$. Эволюция спектра мощности не зависит от фазовых соотношений, т.е. коэффициентов c_0 , β . По эволюции спектра шума можно определить коэффициенты затухания α , μ .

7.1.19. Функция корреляции случайного стационарного процесса имеет вид $K_v(\tau) = a^2 e^{-|\tau|b + c^2}$. Определить среднее значение процесса $\langle v \rangle$, его дисперсию σ^2 , время корреляции τ_0 . Найти спектральную плотность мощности $S(\omega)$.

Ответ. $\langle v \rangle = \pm c$; $\sigma^2 = a^2$; $\tau_0 = b^{-1}$; $S(\omega) = \frac{a^2}{\pi} \frac{b}{\omega^2 + b^2} + c^2 \delta(\omega)$.

7.1.20. Найти корреляционную функцию $B(\tau)$ и определить дисперсию σ^2 случайных процессов $v(t)$, имеющих следующие спектральные плотности: а) $S(\omega) = D \exp(-\omega^2/2\omega_0^2)$; б) $S(\omega) = (D\omega^2/\omega_*^2) \exp(-\omega^2/2\omega_0^2)$; в) $S(\omega) = D \operatorname{ch}^{-1}(\omega/2\omega_0)$; г) $S(\omega) = (D\omega_0^2/(\omega^2 + \omega_0^2))$.

Ответ. а) $B(\tau) = \sqrt{2\pi} D \omega_0 \exp(-\tau^2 \omega_0^2/2)$, $\sigma^2 = B(0) = \sqrt{2\pi} D \omega_0$; б) $B(\tau) = \sqrt{2\pi} D \omega_0^3 \omega_*^{-2} (1 - \tau^2 \omega_0^2) \exp(-\tau^2 \omega_0^2/2)$, $\sigma^2 = \sqrt{2\pi} D \omega_0^3 \omega_*^{-2}$; в) $B(\tau) = 2D \omega_0 \pi \operatorname{ch}^{-1}(\tau \omega_0 \pi)$, $\sigma^2 = 2D \omega_0 \pi$; г) $B(\tau) = \pi \omega_0 D e^{-|\tau| \omega_0}$, $\sigma = \pi \omega_0 D$.

7.1.21. Смещение частиц в плоской волне представляет собой стационарный процесс $x(t)$ с корреляционной функцией $B_x(\tau)$ и спектром $S_x(\omega)$. Найти корреляционную функцию, спектр мощности и дисперсию скорости частиц $v(t) = \dot{x}(t)$. Найти совместную корреляционную функцию смещения и скорости частиц.

Ответ. $B_v(\tau) = -d^2 B_x(\tau)/d\tau^2$, $B_{xv}(\tau) = \langle x(t+\tau) v(t) \rangle = -dB_x(\tau)/d\tau = -B_{vx}(\tau)$. В силу четности корреляционной функции $B_{xv}(0) = 0$. Интегрируя (14.4) дважды по частям, получаем $S_v(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$. Заметим, что последнее выражение можно получить из (16.2), учитывая, что для операции дифференцирования $|K|^2 = \omega^2$. Дисперсия скорости:

$$\langle v^2 \rangle = B_v(0) = -d^2 B_x(0)/d\tau^2, \quad \langle v^2 \rangle = \int S_v(\omega) d\omega = \int \omega^2 S_x(\omega) d\omega.$$

7.1.22. В условиях предыдущей задачи рассмотреть случай, когда корреляционная функция смещения частиц равна $B_x(\tau) = \sigma^2 \exp(-\tau^2/\tau_0^2)$.

Ответ.

$$B_v(\tau) = \frac{2\sigma^2}{\tau_0^2} \left[1 - \frac{2\tau^2}{\tau_0^2} \right] \exp\left[-\frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right], \quad B_{xv}(\tau) = \frac{2\tau}{\tau_0^2} \exp\left[-\frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right],$$

$$\sigma_v^2 = \frac{2\sigma^2}{\tau_0^2}, \quad S_v(\omega) = \frac{\omega^2 \sigma^2 \tau_0}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\omega^2 \tau_0^2}{4}\right].$$

7.1.23. В условиях задачи 7.1.21 задан спектр мощности смещения $S_x(\omega)$, и его четные моменты равны

$$\beta_k^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} S_0(\omega) d\omega.$$

Найти дисперсию смещения x , скорости $v = \dot{x}$, ускорения $a = \ddot{x}$ и коэффициенты корреляции между этими переменными в совпадающие моменты времени. Рассчитать их для спектров вида:

а) $S_x(\omega) = (1/2)[\sigma_0^2 \delta(\omega - \omega_0) + \sigma_0^2 \delta(\omega + \omega_0)]$ — квазимонохроматический сигнал частоты ω_0 с нулевой шириной линии;

б) $S_x(\omega) = \sigma_0^2/2\omega_0$ при $|\omega| < \omega_0$ и $S_x(\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_0$ — "белый" шум в полосе частот $[0, \omega_0]$.

Ответ.

$$\sigma_0^2 = \langle x^2 \rangle = \beta_0^2, \quad \sigma_v^2 = \langle v^2 \rangle = \beta_1^2, \quad \sigma_a^2 = \langle a^2 \rangle = \beta_2^2,$$

$$r_{xv} = r_{va} = 0, \quad r_{xa} = \langle xa \rangle / (\sigma_x \sigma_a) = -\beta_1^2 / (\beta_0 \beta_2);$$

$$\text{а) } \sigma_x^2 = \sigma_0^2, \quad \sigma_v^2 = \omega_0^2 \sigma_0^2, \quad \sigma_a^2 = \omega_0^4 \sigma_0^2, \quad r_{xa} = -1;$$

$$\text{б) } \sigma_x^2 = \sigma_0^2, \quad \sigma_v^2 = \omega_0^2 \sigma_0^2/3, \quad \sigma_a^2 = \omega_0^4 \sigma_0^2/5, \quad r_{xa} = -\sqrt{5}/3 \approx -0,75.$$

7.1.24. Найти корреляционную функцию и спектральную плотность квазимонохроматического сигнала

$$v(t) = [A + a(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

считая известными корреляционную функцию $B_a(\tau)$ и спектр $g_a(\omega)$ флуктуации амплитуды. Фаза φ — случайная величина, равномерно распределенная в интервале 2π , $\langle a \rangle = 0$.

Ответ.

$$B_v(\tau) = \frac{1}{2} [A^2 + B_a(\tau)] \cos(\omega_0 \tau),$$

$$g_v(\omega) = \frac{1}{4} [A^2 \delta(\omega - \omega_0) + A^2 \delta(\omega + \omega_0) + g_a(\omega - \omega_0) + g_a(\omega + \omega_0)].$$

Спектр амплитудной модуляции переносится в область высоких частот.

7.1.25. Найти корреляционную функцию квазимонохроматического сигнала

$$v(t) = A_0 \cos[\omega t + \varphi(t) + \varphi_0]. \quad (1)$$

считая, что $\varphi(t)$ — нормальный процесс со структурной функцией $D_\varphi(\tau) = \langle [\varphi(t+\tau) - \varphi(t)]^2 \rangle$. Фаза φ_0 распределена в интервале 2π .

Ответ. $B_v(\tau) = (1/2) A_0^2 \cos(\omega_0 \tau) \exp[-D_\varphi(\tau)/2]$. (2)

7.1.26. В условиях задачи 7.1.25 найти дискретную составляющую спектра для сигнала со стационарными флуктуациями фазы и исследовать интенсивность линии в зависимости от $\sigma_\varphi^2 = \langle \varphi^2 \rangle$ — дисперсии флуктуации фазы. Для $\sigma_\varphi^2 \ll 1$ найти спектр сигнала, считая известным спектр флуктуации фазы $g_\varphi(\omega)$.

Решение. Для стационарных флуктуаций фазы справедливо равенство $D_\varphi(\tau) = \langle [\varphi(t+\tau) - \varphi(t)]^2 \rangle = 2[\sigma_\varphi^2 - B_\varphi(\tau)]$. Экспоненту в (25.2) удобно представить в виде

$$\exp[-D_\varphi(\tau)/2] = [\exp B_\varphi(\tau) - 1] \exp(-\sigma_\varphi^2) + \exp(-\sigma_\varphi^2). \quad (1)$$

Первое слагаемое при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к нулю и не содержит постоянной составляющей. Второе слагаемое соответствует дискретной составляющей спектра: $g_{\text{дис}}(\omega)$. Из (14.4), (25.2) имеем

$$g_v(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{A_0^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{D_\varphi(\tau)}{2}\right] [\exp(i(\omega - \omega_0)\tau) + \exp(i(\omega + \omega_0)\tau)] d\tau, \quad (2)$$

и, следовательно,

$$g_{\text{дис}}(\omega) = \frac{1}{4} A_0^2 \left[\exp(-\sigma_\varphi^2) [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \right].$$

Коэффициент ослабления дискретной линии равен $N = \exp(-\sigma_\varphi^2)$. При $\sigma_\varphi^2 \ll 1$, разлагая в (2) экспоненту в ряд, получаем

$$g(\omega) = \frac{1}{4} A_0^2 \left[(1 - \sigma_\varphi^2) [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + g_\varphi(\omega - \omega_0) + g_\varphi(\omega + \omega_0) \right].$$

Таким образом, при $\sigma_\varphi^2 \ll 1$ спектры сигнала с амплитудными (см. (22.2)) и фазовыми флуктуациями одинаковы.

7.1.27. Гидроакустический буй принимает монохроматический сигнал частотой f_0 и постоянной амплитудой A_0 от неподвижного излучателя. Каждая из трех координат буя испытывает стационарные гауссовы флуктуации с нулевым средним значением и с дисперсией $\sigma_r^2 \ll L^2$, где L — расстояние между излучателем и приемником. Считая известной корреляционную функцию флуктуаций каждой из координат

$$B_r(\tau) = \langle r_i(t+\tau) r_i(t) \rangle, \quad i = 1, 2, 3, \quad \sigma_r^2 = B_r(0),$$

найти корреляционную функцию принимаемого сигнала. Используя ответ задачи 7.1.26, найти коэффициент ослабления интенсивности дискретной линии из-за флуктуаций. Сделать оценки для $\sigma_r = 1$ м, скорости звука $c_0 = 1500$ м/с и частот $f = 100$ Гц и $f = 1000$ Гц. Считать, что сигнал попадает на приемник по прямому лучу.

Решение. Принимаемый сигнал можно записать в виде

$$v(t) = A_0 \cos(\omega t - kR), \quad (1)$$

где $k = \omega/c = 2\pi f/c$ — волновое число, R — расстояние между излучателем и приемником:

$$R = [(L+r_1)^2 + r_2^2 + r_3^2]^{1/2} \approx L + r_1. \quad (2)$$

Таким образом, основной вклад в флуктуации фазы дают флуктуации только одной из координат — проекции на ось, соединяющую излучатель и приемник. Таким образом, для фазы и ее структурной функции имеем

$$\varphi(t) = kR \approx kL + k r_1(t), \quad D_\varphi(\tau) = k^2 D_r(\tau), \quad (3)$$

где $D_r(\tau) = \langle (r_1(t+\tau) - r_1(t))^2 \rangle$ — структурная функция флуктуаций координаты. Для "ограниченных" флуктуаций координаты

$$D_\varphi(\tau) = 2k^2 [\sigma_r^2 - B_r(\tau)] \quad (4)$$

и из задач 7.1.25, 7.1.26 для корреляционной функции принимаемого сигнала и коэффициента ослабления имеем

$$B_x(\tau) = \frac{1}{2} A_0^2 \cos(\omega_0 \tau) \exp \{ -k^2 [\sigma_r^2 - B_r(\tau)] \},$$

$$N = \exp(-k^2 \sigma_r^2) = \exp \left\{ - \left[\frac{2\pi f}{c_0} \right]^2 \sigma_r^2 \right\}. \quad (5)$$

Таким образом, коэффициент ослабления определяется отношением характерного смещения σ_r к длине волны $\lambda = c_0/f$. Для двух

приведенных частот имеем соответственно $N = e^{-0,17} \approx 0,84$ и $N = e^{-17} \approx 2,4 \cdot 10^{-8}$.

7.1.28. Флуктуации частоты $\Omega = \partial\varphi/\partial t$ квазимонохроматического сигнала (см. (25.1)) имеют дисперсию $\sigma_\Omega^2 = \langle \Omega^2 \rangle$ и время корреляции

$$\tau_\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_\Omega(\xi)}{2\sigma_\Omega^2} d\xi = \frac{\pi S_\Omega(0)}{\sigma_\Omega^2}, \quad B_\Omega(\xi) = \langle \Omega(t+\xi) \Omega(t) \rangle, \quad \sigma_\Omega^2 = B_\Omega(0),$$

где $B_\Omega(\xi)$ — корреляционная функция флуктуаций частоты, $S_\Omega(0) \neq 0$ — спектр флуктуаций Ω на нулевой частоте. Считая, что спектр флуктуаций частоты одномасштабен, найти предельные выражения для спектра сигнала в случае "больших и медленных" флуктуаций частоты — $\sigma_\Omega^2 \tau_\Omega^2 \gg 1$ (а) и "малых и быстрых" уходов частоты — $\sigma_\Omega^2 \tau_\Omega^2 \ll 1$ (б).

Решение. Из задачи 7.1.25 видно, что корреляционная функция, а значит, и спектр сигнала (см. (26.2)) определяются поведением структурной функции фазы:

$$\chi_\tau = \varphi(t+\tau) - \varphi(t) = \int_t^{t+\tau} \Omega(t') dt', \quad D_\varphi(\tau) = \langle \chi_\tau^2 \rangle = 2 \int_0^\tau (\tau-\xi) B_\Omega(\xi) d\xi. \quad (2)$$

Для одномасштабной функции $B_\Omega(\xi)$ структурная функция фазы монотонно возрастает и имеет следующие асимптотики:

$$D_\Omega(\tau) = \begin{cases} \sigma_\Omega^2 \tau^2, & |\tau| \ll \tau_\Omega, \\ 2D|\tau|, & |\tau| \gg \tau_\Omega, \end{cases} \quad D = \pi S_\Omega(0) = \sigma_\Omega^2 \tau_\Omega. \quad (3)$$

Если $D_\Omega(\tau_\Omega) \approx \sigma_\Omega^2 \tau_\Omega^2 \gg 1$, то в формуле (26.2) существенная область интегрирования по τ много меньше τ_Ω , и структурную функцию $D_\varphi(\tau)$ можно аппроксимировать как $D_\Omega(\tau) = \sigma_\Omega^2 \tau^2$. Поэтому для "больших и медленных" флуктуаций частоты из (26.2) получаем, что спектр имеет гауссову (доплеровскую) форму:

$$g_v(\omega) = \frac{A_0^2}{4\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega^2} \left[\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma_\Omega^2}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{2\sigma_\Omega^2}\right] \right]. \quad (4)$$

Если $D_\Omega(\tau_\Omega) \approx \sigma_\Omega^2 \tau_\Omega^2 \ll 1$, то в (26.2) структурную функцию фазы можно аппроксимировать как $D_\Omega(\tau) = 2D|\tau|$, и, следовательно, для "малых и быстрых" флуктуаций частоты из (26.2) получаем спектр, имеющий лоренцеву (резонансную) форму:

$$g_v(\omega) = \frac{A_0^2}{\pi} \left[\frac{D}{D^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{D}{D^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]. \quad (5)$$

7.1.29. Монохроматический сигнал принимается на дрейфующий гидроакустический буй (см. задачу 7.1.27). Каждая из

компонент скорости $v_i = dr_i/dt$ буя испытывает стационарные гауссовы флуктуации с нулевым средним, дисперсией σ_0^2 и временем корреляции τ_0 . Определить, какие параметры определяют форму спектра принимаемого сигнала. Для $\sigma_0 = 0,1$ м/с, $\tau_0 = 10$ с и частот f_0 (см. задачу 7.1.27), найти спектр сигнала.

Ответ. При $k^2 \sigma_0^2 \tau_0^2 \gg 1$ ($k = \omega/c_0 = 2\pi f_0/c_0$) спектр сигнала описывается (28.4), где $\sigma_\Omega^2 = k^2 \sigma_0^2$, при $k^2 \sigma_0^2 \tau_0^2 \ll 1$ — (28.5), где $D = k^2 \sigma_0^2 \tau_0$. Для частоты $f_0 = 100$ Гц спектр сигнала описывается (28.5), где $D = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, для $f_0 = 1000$ Гц — (28.4), где $\sigma = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$.

7.2. Дифракция и излучение случайных полей

7.2.1. Плоская монохроматическая волна частоты ω падает на безграничный экран, расположенный в плоскости $z = 0$. Экран хаотически модулирует волну, и за экраном случайное поле $p_0(\mathbf{r}_\perp) = p(\mathbf{r}_\perp, z=0)$ статистически однородно и характеризуется спектральной плотностью

$$F(\vec{\kappa}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \Gamma_0(\vec{\rho}_\perp) \exp(-i\vec{\kappa}_\perp \vec{\rho}_\perp) d^2 \vec{\rho}_\perp. \quad (1)$$

Здесь $\Gamma_0(\vec{\rho}_\perp) = \langle p_0(\mathbf{r}_\perp + \vec{\rho}_\perp) p_0(\mathbf{r}_\perp) \rangle$ — корреляционная функция поля в плоскости $z = 0$. Найти корреляционную функцию поля $p(\mathbf{r}_\perp, z)$ за экраном. Найти условия, при которых поле будет статистически однородным.

Решение. Представим поле в плоскости $z = 0$ двумерным интегралом Фурье:

$$p_0(\mathbf{r}_\perp) = \iint F(\vec{\kappa}_\perp) \exp(i\vec{\kappa}_\perp \mathbf{r}_\perp) d^2 \mathbf{r}_\perp. \quad (2)$$

Для статистически однородных полей справедливо соотношение

$$\langle v(\vec{\kappa}_\perp) v^*(\vec{\kappa}'_\perp) \rangle = F(\vec{\kappa}) \delta(\vec{\kappa}_\perp - \vec{\kappa}'_\perp). \quad (3)$$

В полупространстве $z > 0$ пространственная гармоника $v(\vec{\kappa}_\perp) \times \exp(i\vec{\kappa}_\perp \mathbf{r}_\perp)$ порождает плоскую волну $v(\vec{\kappa}_\perp) \exp(i\vec{\kappa}_\perp \mathbf{r}_\perp + i\kappa_\parallel z)$, где $\kappa_\parallel = \sqrt{k^2 - \kappa_\perp^2}$ — продольная компонента волнового вектора. Используя представление поля $p(\mathbf{r}_\perp, z)$ в виде интеграла Фурье, с учетом статистической однородности (3) для корреляционной функции имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(\vec{\rho}_\perp, z_1, z_2) &= \langle p(\mathbf{r}_\perp + \vec{\rho}_\perp, z_1) p(\mathbf{r}_\perp, z_2) \rangle = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\vec{\kappa}_\perp) \exp[i\vec{\kappa}_\perp \vec{\rho}_\perp + i(\kappa_\parallel z_1 - \kappa_\parallel^* z_2)] d^2 \vec{\kappa}_\perp. \end{aligned} \quad (4)$$

Для $\kappa_{\parallel}$ имеем в зависимости от соотношения между поперечным волновым вектором $\kappa_{\perp}$ и волновым числом k :

$$\kappa_{\parallel} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \kappa_{\perp}^2}, & \kappa_{\perp} < k, \\ i\sqrt{|\kappa_{\perp}^2 - k^2|}, & \kappa_{\perp} > k. \end{cases} \quad (5)$$

На расстояниях, превышающих несколько длин волн, все нераспространяющиеся волны с $\kappa_{\perp} > k$ затухают, и, следовательно,

$$\Gamma(\vec{\rho}_{\perp}, \rho_{\parallel}) = \iint_{|\kappa_{\perp}| < k} F(\vec{\kappa}_{\perp}) \exp(i\vec{\kappa}_{\perp} \vec{\rho}_{\perp} + i\kappa_{\parallel} \rho_{\parallel}) d^2 \vec{\kappa}_{\perp}. \quad (6)$$

Таким образом, при $z_1, z_2 \gg \lambda = 2\pi/k$ поле становится статистически однородным не только в поперечной плоскости, но и в продольном направлении z .

7.2.2. Корреляционная функция случайного поля $\rho_0(\mathbf{r}_{\perp})$ непосредственно за экраном имеет вид

$$\Gamma_0(\rho_{\perp}) = \sigma_0^2 \exp(-\rho_{\perp}^2 / 2l_0^2). \quad (1)$$

Найти корреляционную функцию поля $\rho(\mathbf{r}_{\perp}, z)$ и оценить поперечный и продольный масштабы корреляции в случае мелкомасштабных ($kl_0 \ll 1$) и крупномасштабных ($kl_0 \gg 1$) флуктуаций.

Решение. Найдем вначале спектральную плотность поля $\rho_0(\mathbf{r}_{\perp})$:

$$F(\vec{\kappa}_{\perp}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \Gamma_0(\vec{\rho}_{\perp}) \exp(i\vec{\kappa}_{\perp} \vec{\rho}_{\perp}) d^2 \vec{\rho}_{\perp} = F_0 \exp(-\kappa_{\perp}^2 l_0^2 / 2), \quad (2)$$

где $F_0 = F(0) = \sigma_0^2 l_0^2 / 2\pi$. В зависимости от соотношения между шириной спектра, равной $\kappa_0 = 1/l_0$, и волновым числом k , которое определяет распространяющиеся волны, для мелкомасштабных флуктуаций ($kl_0 \ll 1$) имеем, что спектральная плотность $F(\vec{\kappa}_{\perp})$ практически постоянна в круге $|\vec{\kappa}_{\perp}| < k$. Из формулы (1.6) получаем на расстояниях, больших длины волны,

$$\Gamma(\vec{\rho}_{\perp}, \rho_{\parallel}) = F_0 \iint_{|\kappa_{\perp}| < k} \exp(i\vec{\kappa}_{\perp} \vec{\rho}_{\perp} + i\kappa_{\parallel} \rho_{\parallel}) d^2 \vec{\kappa}_{\perp}, \quad (3)$$

где $\kappa_{\parallel} = (k^2 - \kappa_{\perp}^2)^{1/2}$. Для поперечной функции корреляции имеем

$$\Gamma_{\perp}(\rho_{\perp}) = \Gamma(\rho_{\perp}, 0) = 2\pi F_0 \frac{k J_1(k\rho_{\perp})}{\rho_{\perp}}, \quad (4)$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка. Радиус корреляции поля, определенный по нулю функций Бесселя, $l_{\perp} \approx 0,6\lambda$ и значительно больше радиуса корреляции l_0 в плоскости $z = 0$. Продольный радиус корреляции $l_{\parallel}$ также порядка длины волны λ . Для крупномасштабных флуктуаций ($kl_0 \gg 1$) спектр $F(\kappa_{\perp})$ сосредоточен в узкой области $\kappa_{\perp} \sim 1/l_0 \ll k$. Это позволяет за-

менить в (1.6) пределы интегрирования на $\pm\infty$ и использовать следующую аппроксимацию продольного волнового числа:

$$\kappa_{\parallel} = (k^2 - \kappa_{\perp}^2)^{1/2} \approx k - \kappa_{\perp}^2/2k. \quad (5)$$

В результате для корреляционной функции имеем

$$\Gamma(\vec{\rho}_{\perp}, \rho_{\parallel}) = e^{ik\rho_{\parallel}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(\vec{\kappa}_{\perp}) \exp(i\vec{\kappa}_{\perp} \vec{\rho}_{\perp} - i\kappa_{\perp}^2 \rho_{\parallel}/2k) d^2\vec{\kappa}_{\perp}, \quad (6)$$

$$\Gamma_{\perp}(\vec{\rho}_{\perp}) = \Gamma_0(\vec{\rho}_{\perp}), \quad (7)$$

$$\Gamma_{\parallel}(\rho_{\parallel}) = e^{ik\rho_{\parallel}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_0(\vec{\kappa}_{\perp}) \exp \frac{i\kappa_{\perp}^2 \rho_{\parallel}}{2k} d^2\vec{\kappa}_{\perp}. \quad (8)$$

Из (7) следует очень важный факт, что поперечная корреляционная функция крупномасштабных флуктуаций сохраняется. Следовательно, сохраняется и поперечный радиус корреляции: $l_{\perp} = l_0$. Из (8) видно, что продольная функция корреляции начинает существенно уменьшаться, когда масштаб осцилляций экспоненты $\kappa_{\perp}^* \sim (k/\rho_{\parallel})^{1/2}$ сравнивается с шириной спектра $1/l_0$. Отсюда следует, что продольный радиус корреляции порядка $l_{\parallel} \sim l_0^2 k \gg l_0$ и много больше поперечного радиуса корреляции. Для продольной корреляционной функции с учетом (1) имеем из (8) $\Gamma_{\parallel}(\rho_{\parallel}) = \sigma_0^2 \exp(ik\rho_{\parallel}) / (1 + i\rho_{\parallel}/kl_0^2)$.

7.2.3. В условиях задачи 7.2.2 найти "интенсивность" поля $J = \langle |p^2| \rangle = \Gamma(0,0)$ на расстояниях, много больших длины волны.

Ответ. $J = F_0 \pi k^2 = \sigma_0^2 (kl_0)^2 / 2 \ll \sigma_0^2$, $J = \sigma_0^2$.

7.2.4. Скорость звука и плотность среды в верхнем полупространстве ($z < 0$) равны соответственно c и ρ , в нижнем ($z > 0$) они равны c_1 и ρ_1 . Из верхнего полупространства на границу раздела сред падает шумовое поле с крупномасштабными флуктуациями, характеризующееся поперечной корреляционной функцией (см.(2.1)) ($kl_0 \gg 1$, где $k = \omega/c$ — волновое число в верхнем полупространстве). Найти корреляционные функции для отраженной $\Gamma_{\perp}^{\text{ref}}(\vec{\rho}_{\perp})$ и прошедшей $\Gamma_{\perp}^{\text{tr}}(\vec{\rho}_{\perp})$ волн, оценить поперечный и продольный радиусы корреляции для этих волн. Рассмотреть предельные случаи $k_1 = \omega/c_1 \gg k$ и $k_1 \ll k$.

Решение. Для коэффициентов отражения и прохождения V и W плоской волны, падающей на границу раздела под углом θ :

$$V = \frac{m(k^2 - \kappa_{\perp}^2)^{1/2} - (k_1^2 - \kappa_{\perp}^2)^{1/2}}{m(k^2 - \kappa_{\perp}^2)^{1/2} + (k_1^2 - \kappa_{\perp}^2)^{1/2}}, \quad W = \frac{2m(k^2 - \kappa_{\perp}^2)^{1/2}}{m(k^2 - \kappa_{\perp}^2)^{1/2} + (k_1^2 - \kappa_{\perp}^2)^{1/2}},$$

(см. (3.1.10), (3.1.11)), где $\kappa_{\perp} = k \sin \theta$, $m = \rho_1 / \rho$, $n = k_1 / k$. Для спектральной плотности отраженной волны $F^{\text{ref}}(\kappa_{\perp})$ и прошедшей $F^{\text{tr}}(\kappa_{\perp})$ будем иметь соответственно

$$F^{\text{ref}}(\kappa_{\perp}) = |V(\kappa_{\perp})|^2 F_0(\kappa_{\perp}), \quad F^{\text{tr}}(\kappa_{\perp}) = |W(\kappa_{\perp})|^2 F_0(\kappa_{\perp}), \quad (1)$$

где $F_0(\kappa)$ — спектральная плотность падающего поля. Корреляционные функции этих волн будут определяться (1.6), где нужно подставить соответствующие спектральные плотности. Вид корреляционных функций зависит от соотношения между волновыми векторами k , k_1 и шириной спектра падающей волны κ_0 .

Если $k_1 \gg k$, то флуктуации будут крупномасштабными и во второй среде ($\kappa_0 \ll k_1$). Поэтому для коэффициентов отражения и прохождения можно записать приближенные формулы в виде

$$V(\kappa_{\perp}) \approx \frac{m-n}{m+n}, \quad W(\kappa_{\perp}) \approx \frac{2m}{m+n}, \quad (2)$$

$$\Gamma^{\text{ref}}(\rho_{\perp}) = V^2 \Gamma_0(\rho_{\perp}), \quad \Gamma^{\text{tr}}(\rho_{\perp}) = W^2 \Gamma_0(\rho_{\perp}). \quad (3)$$

Для прошедшей волны продольный масштаб корреляции $l_{\parallel}^{\text{tr}} = l_0^2 k_1 = l_{\parallel} k_1 / k \gg l_{\parallel}$ и много больше, чем в падающей волне. В вырожденном случае $m = n$, когда для нормально падающей плоской волны отражение отсутствует, корреляционная функция отраженной волны будет сильно отличаться от Γ_0 .

Если $k_1 \ll k$, то в зависимости от соотношения κ_0 и k_1 можно выделить два подслучая. При $\kappa_0 \ll k_1$ флуктуации остаются крупномасштабными и во второй среде. Для корреляционной функции по-прежнему справедливы соотношения (3), т.е. поперечный масштаб корреляционной функции не меняется, а продольный масштаб в прошедшей волне уменьшается ($l_{\parallel}^{\text{tr}} = l_{\parallel} k_1 / k \ll l_{\parallel}$). Если же $\kappa_0 \gg k_1$, то для второй среды флуктуации становятся мелкомасштабными, и характерные масштабы корреляций во второй среде порядка длины волны $\lambda = 2\pi/k$ и много больше, чем в падающей. Аналитические выражения удастся получить, если $m \gg n$ ($n \ll 1$). В этом случае $V \approx 1$, $W \approx 2$ и корреляционная функция отраженной волны совпадает с корреляционной функцией падающей. Корреляционная функция отраженной волны описывается (2.3) и (2.4), где F_0 равно учетверенному значению спектральной плотности на нулевой частоте у падающей волны.

7.2.5. Плоская монохроматическая волна $\exp(ikz)$ падает на случайный фазовый экран, и поле в плоскости $z = 0$ за экраном равно $\rho_0(\mathbf{r}_{\perp}) = \exp[iS(\mathbf{r}_{\perp})]$. Флуктуации фазы $S(\mathbf{r}_{\perp})$ статисти-

чески однородны, гауссовы со структурной функцией

$$D_S(\rho_{\perp}) = \langle [p_0(\mathbf{r}_{\perp} + \vec{\rho}_{\perp}) - p_0(\mathbf{r}_{\perp})^2]^2 \rangle, \quad \langle S \rangle = 0.$$

Найти среднее и корреляционную функцию поля $p_0(\mathbf{r}_{\perp})$, считая, что дисперсия флуктуаций фазы σ_s^2 ограничена и $B_S(\rho_{\perp}) = \sigma_s^2 \times [1 - \rho_{\perp}^2/2l_S^2 + \dots]$, где l_S — масштаб корреляции S . Найти корреляционную функцию $\Gamma_0(\rho_{\perp})$ в предельных случаях: $\sigma_s \ll 1$ и $\sigma_s \gg 1$. Выяснить, при каких условиях флуктуации поля $p(\mathbf{r}_{\perp}, z)$ можно считать крупномасштабными. Найти в этих случаях поперечный $l_{\perp}$ и продольный $l_{\parallel}$ радиусы корреляции.

Ответ.

$$\langle p_0 \rangle = \exp\left[-\frac{\sigma_s^2}{2}\right], \quad \Gamma_0(\rho_{\perp}) = \exp\left[-\frac{D_S(\rho)}{2}\right] = \exp\left[-[B_0(0) - B_S(\rho_{\perp})]\right].$$

При $\sigma_s \ll 1$ функция $\Gamma_0(\rho_{\perp}) \approx (1 - \sigma_s^2) + B_S(\rho_{\perp})$, $l_{\perp} = l_S$, $l_{\parallel} = l_S^2 k$ (условие крупномасштабности $kl_S \gg 1$); при $\sigma_s \gg 1$ функция $\Gamma_0(\rho_{\perp}) \approx \exp(-\sigma_s^2 \rho_{\perp}^2/2l_S^2)$, $l_{\perp} = l_S/\sigma_s$, $l_{\parallel} = l_S^2 k/\sigma_s^2$ (условие крупномасштабности $kl_S/\sigma_s \gg 1$).

7.2.6. Если точка наблюдения находится на расстоянии z от фазового экрана, то площадь первой зоны Френеля равна $(\pi\sqrt{\lambda z})^2 = 2\pi^2 z/k$. Отношение этой площади к "площади" одной неоднородности (порядка πl_S^2) называется волновым параметром $D = 2z/kl_S^2$ и характеризует, сколько неоднородностей умещается в одной зоне Френеля. Найти вероятностное распределение интенсивности волны $I = \rho\rho^*$ и значение индекса мерцаний $\beta = \sigma_J^2/\langle I \rangle^2$ в зоне Фраунгофера $D \gg 1$. Считать флуктуации фазы сильными и крупномасштабными.

Решение. В силу центральной предельной теоремы поле в точке при $D \gg 1$ формируется большим количеством независимых областей фазового экрана, и поэтому $p(\mathbf{r}_{\perp}, z)$ будет иметь нормальное распределение. Для сильных флуктуаций фазы среднее поле равно нулю. Учитывая, что средняя интенсивность волны за фазовым экраном сохраняется ($\langle I \rangle = \Gamma_{\perp}(0, z) = 1$), для интенсивности имеем экспоненциальное распределение (см.(1.8.2))

$$W(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left[-\frac{I}{\langle I \rangle}\right]. \quad (1)$$

Для индекса мерцаний получаем $\beta = (\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2)/\langle I \rangle^2 = 1$.

7.2.7. Случайное поле в плоскости $z = 0$ представляет собой статистически однородное поле с масштабом корреляции ρ_0 , модулированное по интенсивности с характерным масштабом a . При $a \gg \rho_0$ поле статистически квазиоднородно в масштабах

$\rho_0 \ll a$, и при этом корреляционная функция входного поля записывается в виде

$$\Gamma_0(\mathbf{R}, \vec{\rho}) = \langle \rho_0(\mathbf{R} + \vec{\rho}/2) \rho_0(\mathbf{R} - \vec{\rho}/2) \rangle = I_0(\mathbf{R}) B_0(\vec{\rho}), \quad (1)$$

где $I_0(\mathbf{R})$ — интенсивность волны, $B_0(\vec{\rho})$ — нормированная корреляционная функция статистически однородного шума ($B_0(0) = 1$). Найти, как меняются корреляционная функция, масштабы корреляции $\rho_\perp(z)$ и модуляции $a(z)$ в случае крупномасштабных неоднородностей ($k\rho_0 \gg 1$).

Решение. В случае крупномасштабных неоднородностей поле в сечении z связано с полем на входе ρ_0 соотношением

$$\rho(r_\perp, z) = \frac{k}{2\pi i z} \exp(ikz) \int \rho_0(\mathbf{r}'_\perp) \exp \frac{ik(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)^2}{2z} d^2 \mathbf{r}'_\perp. \quad (2)$$

Характерная угловая расходимость поля определяется наименьшим масштабом ρ_0 , и $1/k\rho_0 \ll 1$. При $z \ll k\rho_0 a$ поперечный пространственный масштаб расходимости $z/k\rho_0$ много меньше масштаба модуляции a , и корреляционная функция поля в сечении z повторяет входную корреляционную функцию. Пусть входное поле представляет собой пучок шириной a и радиусом корреляции $\rho_0 \ll a$. Тогда, умножая соотношение (2) на комплексно сопряженную величину и переходя при интегрировании к разностной $\vec{\xi}$ и средней $\vec{\eta}$ координатам при $z \gg k\rho_0 a$, имеем

$$\Gamma(\mathbf{R}, \vec{\rho}, z) = I(\mathbf{R}, \vec{\rho}, z) B(\vec{\rho}, z). \quad (3)$$

Интенсивность пучка I и коэффициент корреляции B имеют вид

$$I(\mathbf{R}, \vec{\rho}, z) = \left[\frac{k}{2\pi z} \right]^2 S \exp \frac{ik\vec{\rho}\mathbf{R}}{z} \int B_0(\vec{\xi}) \exp \left[-\frac{ik\vec{\xi}\mathbf{R}}{z} \right] d\vec{\xi}, \quad S = \int I_0(\vec{\eta}) d\vec{\eta}, \quad (4)$$

$$B(\vec{\rho}, z) = \frac{1}{S} \int I_0(\vec{\eta}) \exp \left[-\frac{ik\vec{\eta}\vec{\rho}}{z} \right] d\vec{\eta}. \quad (5)$$

Экспоненциальный сомножитель перед интегралом в (4) отражает сферическую расходимость пучка. Из (5) следует, что коэффициент корреляции B связан фурье-преобразованием с распределением интенсивности I падающей волны. При этом рост поперечного радиуса корреляции определяется "диаметром" пучка: $\rho_\perp(z) \approx z/(ka)$. Соотношение (5) известно как теорема Ван-Циттерта—Цернике. Из (4) видно, что огибающая пучка I связана фурье-преобразованием с корреляционной функцией B_0 , и для ширины пучка имеем $a(z) \approx z/(k\rho_0)$. Таким образом, поле остается статистически квазиоднородным: $a_\perp(z) \gg \rho_\perp(z)$.

7.2.8. Пусть корреляционная функция случайного поля при $z = 0$ имеет вид $\Gamma_0(\mathbf{R}, \vec{\rho}) = \exp(-R^2/2a^2) \exp(-\rho^2/2\rho_0^2)$, причем $a \gg \rho_0$ и $k\rho_0 \gg 1$. Найти интенсивность $I(\mathbf{R}, 0, z)$ и корреляционную функцию продифрагированного поля при $z \gg k\rho_0$.

Ответ. $I(\mathbf{R}, 0, z) = \frac{k^2 a^2 \rho_0^2}{z^2} \exp\left[-\frac{k^2 R^2 a^2}{2 z^2}\right]$, $B_0(\vec{\rho}, z) = \exp\left[-\frac{k^2 \rho^2 a^2}{2 z^2}\right]$.

7.2.9. Найти связь корреляционной функции поля некогерентных удаленных источников с угловым распределением яркости этих источников (одна из форм теоремы Ван-Циттерта–Цернике).

Решение. Если $f(\mathbf{r})$ — пространственное распределение источников, то поле $p(\mathbf{y})$, являющееся решением неоднородного уравнения Гельмгольца, записывается как

$$p(\mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{y}|} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (1)$$

Корреляционная функция некогерентных источников имеет вид

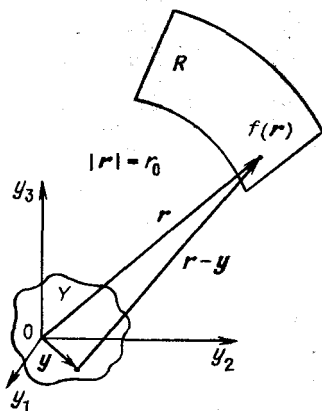
$$\langle f(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}) \rangle = S(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \quad (2)$$

где $S(\mathbf{r})$ — пространственное распределение яркости. Как правило, при анализе корреляционной функции можно пренебречь изменением амплитудного множителя для разных точек наблюдения, предполагая, что измерения проводятся в области Y , удаленной от области источников R (см. рисунок). Для корреляционной функции $\Gamma(\mathbf{y}', \mathbf{y}'') = \langle p_0(\mathbf{y}') p_0(\mathbf{y}'') \rangle$ из (1), (2) имеем

$$\Gamma(\mathbf{y}', \mathbf{y}'') = (4\pi)^{-2} \int_V S(\mathbf{r}) r^{-2} \times \\ \times \exp[ik(|\mathbf{y}-\mathbf{y}'| - |\mathbf{r}-\mathbf{y}''|)] d\mathbf{r}. \quad (3)$$

Считая, что $|\mathbf{r}| = r \gg |\mathbf{y}|$ и $r \gg k|\mathbf{y}|^2$, в экспоненте интеграла можно ограничиться линейными членами по малому параметру $|\mathbf{y}|/r$: $|\mathbf{r}-\mathbf{y}| \approx r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{y}/r$. Будем считать, что источники расположены в узком сферическом слое, расположенном на расстоянии r_0 от области измерения, т.е. $S(\mathbf{r}) = \delta(r-r_0) F(\mathbf{n})$, где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r_0$ — единичный вектор, $F(\mathbf{n})$ — угловое распределение яркости источников. Тогда из (3) получаем

$$\Gamma(\mathbf{y}'' - \mathbf{y}') = (4\pi)^{-2} \int F(\mathbf{n}) \exp[ik\mathbf{n}(\mathbf{y}'' - \mathbf{y}')] d\mathbf{n}, \quad (4)$$



К задаче 7.2.9

где интегрирование ведется по поверхности единичной сферы. Соотношение (4) носит также название теоремы Ван-Циттерта-Цернике и показывает, что корреляционная функция поля Γ зависит только от разности координат точек наблюдения и связана с угловым распределением F фурье-преобразованием.

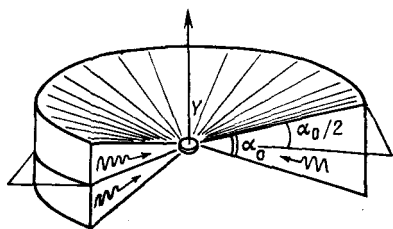
7.2.10. Найти корреляционную функцию изотропного (сферически-симметричного) шума.

Решение. Для сферически-симметричного шума яркость не зависит от угла: $F = F_0 = \text{const}$. Переходя при интегрировании в (9.4) к сферической системе координат θ, φ и выбирая ось совпадающей с направлением вектора $\vec{\rho} = y_2 - y_1$, имеем

$$\Gamma(\vec{\rho}) = \frac{F_0}{(4\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta \exp(-ik\rho \cos\theta) d\theta = \frac{F_0 \sin(k\rho)}{4\pi k\rho}. \quad (1)$$

Таким образом, при $F = \text{const}$ корреляционная функция шума изотропна, а радиус корреляции, определенный по первому нулю $\Gamma(\rho)$, равен $l = \pi/k = \lambda/2$, где λ — длина волны излучения.

7.2.11. Приемник расположен на оси подводного звукового канала. Угловая яркость шума равномерно распределена по азимутальному углу φ . По углу скольжения χ (угол относительно горизонта) шум равномерно распределен в диапазоне малых углов $(-\alpha_0/2, \alpha_0/2)$ и отсутствует при больших абсолютных значениях угла (см. рисунок).



К задаче 7.2.11

Найти корреляционную функцию шума $\Gamma(\rho_{\parallel}, \vec{\rho}_{\perp})$ ($\rho_{\parallel}$ и $\vec{\rho}_{\perp}$ — верти-

кальное и горизонтальное разнесения точек наблюдения корреляционной функции), вертикальный $l_{\parallel}$ и горизонтальный $l_{\perp}$ масштабы корреляции.

Решение. При интегрировании в (9.4) используем сферическую систему координат φ, θ с вертикальной осью и перейдем от угла θ к углу скольжения $\chi = \pi/2 - \theta$. Вводя компоненты $\rho_{\perp} \cos\psi$ и $\rho_{\perp} \sin\psi$ вектора $\vec{\rho}_{\perp}$ для корреляционной функции, имеем

$$\Gamma(\rho_{\parallel}, \vec{\rho}_{\perp}) = \frac{F_0}{(4\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\psi \exp\left[ik\rho_{\perp} \cos\chi (\cos\varphi \cdot \cos\psi + \sin\varphi \cdot \sin\psi)\right] d\varphi \times \\ \times \int_{-\alpha_0/2}^{\alpha_0/2} \cos\chi \exp(ik\rho_{\parallel} \sin\chi) d\chi. \quad (1)$$

Проинтегрировав (1) по азимутальному углу φ и переходя к новой переменной $t = \sin \chi$, получаем

$$\Gamma(\rho_{\parallel}, \rho_{\perp}) = \frac{F_0}{8\pi} \int_{-\sin(\alpha_0/2)}^{\sin(\alpha_0/2)} J_0(k\rho_{\perp}(1-t^2)^{1/2}) \exp(ik\rho_{\parallel}t) dt. \quad (2)$$

Здесь $J_0(z)$ — функция Бесселя. Таким образом, шум изотропен в горизонтальной плоскости. Учитывая, что $\alpha_0 \ll 1$, получаем, что корреляционная функция Γ распадается на произведение "вертикальной" и "горизонтальной" функций корреляции:

$$\Gamma(\rho_{\parallel}, \rho_{\perp}) = \frac{F_0 \alpha_0 \sin(k\rho_{\parallel} \alpha_0/2)}{8\pi \frac{k\rho_{\parallel} \alpha_0/2}{J_0(k\rho_{\perp})}} J_0(k\rho_{\perp}). \quad (3)$$

Горизонтальный масштаб функции корреляции при этом порядке длины волны $l_{\perp} \approx 2,4/k \approx 0,61\lambda$, а вертикальный масштаб $l_{\parallel}$ существенно больше длины волны ($l_{\parallel} = 2\pi/k\alpha_0 = \lambda/\alpha_0$).

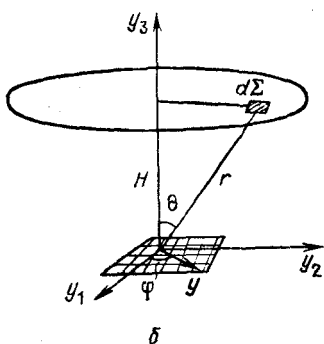
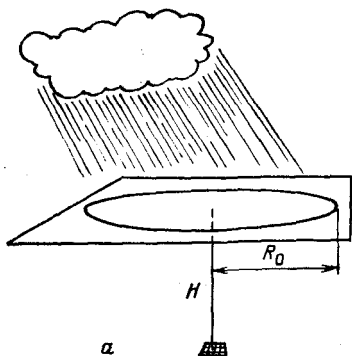
7.2.12. Приемная аппаратура, находящаяся на оси подводного звукового канала, подвергается воздействию шума равномерного по азимутальному углу. Каков вид пространственной корреляции функции шума в случае: а) равномерного, но не симметричного распределения источников по углу $\chi \in (\chi_1, \chi_2)$, χ_1, χ_2 малы и $\alpha_0 = \chi_2 - \chi_1$; б) симметричного, но не равномерного распределения источников по углу скольжения χ , описываемого приближенно узкой гауссоидой $F(\chi) = F_0 \exp(-\chi^2/2\sigma^2)$.

Ответ. Функция корреляции по-прежнему распадается на произведение вертикальной и горизонтальной функций корреляции. При этом $\Gamma(\rho_{\perp})$ остается такой же, как и в задаче 7.2.10. Для вертикальной функции корреляции $\Gamma(\rho_{\parallel})$ в случае а) появляется множитель $\exp[(-ik\rho_{\parallel}(\chi_2 + \chi_1)/2)]$; в случае б) имеем $\Gamma(\rho_{\parallel}) = F_0(2\pi)^{1/2}\sigma \exp(-\rho_{\parallel}^2\sigma^2 k^2/2)$.

7.2.13. Антенна расположена на абсолютно поглощающем дне. Шум воздействует на антенну равномерно со всех направлений верхнего полупространства. Найти корреляционную функцию акустического поля в плоскости дна $\Gamma(\vec{\rho}_{\perp})$ и вертикальном направлении $\Gamma(\rho_{\parallel})$. Факторизуется ли при этом функция $\Gamma(\rho_{\parallel}, \vec{\rho}_{\perp})$?

Ответ. $\Gamma(\vec{\rho}_{\perp}) = \Gamma(\rho_{\perp}) = \frac{F_0}{4\pi} \frac{\sin k\rho_{\perp}}{k\rho_{\perp}}$, $\Gamma(\rho_{\parallel}) = \frac{1}{4\pi} \exp\left[-\frac{k\rho_{\parallel}}{2}\right] \frac{\sin(k\rho_{\parallel}/2)}{k\rho_{\parallel}/2}$, $\Gamma(\rho_{\parallel}, \vec{\rho}_{\perp}) \neq \Gamma(\rho_{\parallel}) \Gamma(\vec{\rho}_{\perp})$.

7.2.14. Дождь создает на поверхности океана шумовое пятно радиусом R_0 (см. рисунок а). Вычислить среднюю энергию шумового поля $\langle \rho^2 \rangle = \Gamma(0)$ под центром шумового круга, считая



К задаче 7.2.14

источники шума некогерентными с равномерной поверхностной яркостью внутри круга.

Решение. Если F_0 — поверхностная яркость источников, то из выражения (9.3) для средней энергии шумового поля имеем

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_R r^{-2} F_0 d\Sigma, \quad (1)$$

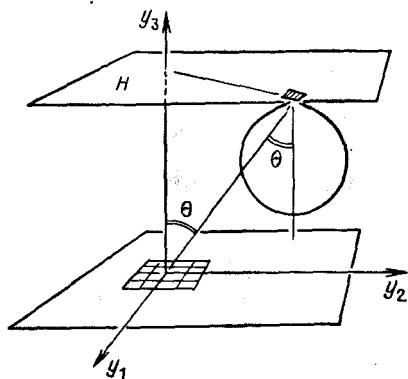
где интегрирование ведется по кругу шумового пятна радиусом R_0 (см. рисунок б). Переходя к интегрированию в сферической системе координат θ, φ и учитывая, что $r = H/\cos\theta$, $d\Sigma = H^2 \times \times \operatorname{tg}\theta d\varphi d\theta/\cos^2\theta$, имеем

$$\langle p^2 \rangle = \frac{F_0}{8\pi} \int_0^{\theta_*} \operatorname{tg}\theta d\theta = \frac{F_0}{16\pi} \ln \left[1 + \left(\frac{R_0}{H} \right)^2 \right]. \quad (2)$$

Здесь θ_* — угол, под которым виден из точки наблюдения край шумового пятна ($\cos\theta_* = H/(H^2 + R_0^2)^{1/2}$). При $R_0 \rightarrow \infty$ средняя

энергия шумового поля стремится к бесконечности из-за вклада далеких областей. Расходимость связана с характером источников шума.

7.2.15. Найти среднюю интенсивность шумового поля под центром шумового круга, считая, что в отличие от задачи 7.2.14 шумовые источники имеют дипольный характер и их диаграмма направленности пропорциональна $\cos\theta$ (см. рисунок).



К задаче 7.2.15

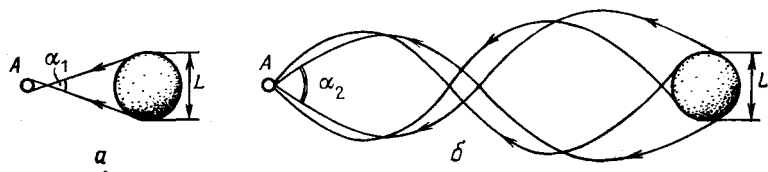
Решение. Учитывая дипольный характер излучения для средней энергии шумового поля, имеем

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_R^{-2} F_0 \cos\theta d\Sigma = \frac{1}{8\pi} F_0 \left[1 - \frac{H}{(H^2 + R_0^2)^{1/2}} \right].$$

При увеличении радиуса шумовой области R_0 средняя энергия стремится к постоянному значению. Данная модель шума более реалистична, чем монополярная, так как из-за мягкой границы поверхностный (приповерхностный) шум имеет дипольный характер.

7.2.16. Шумы удаленных источников, захваченные подводным звуковым каналом, воздействуют на пространственную антенную решетку, находящуюся на оси канала. Можно ли по виду корреляционной функции судить об удаленности шумовых источников.

Решение. Пусть линейный размер источника равен L и все его точки излучают некоррелированно. Если искривлением лучей в канале можно пренебречь, то видимый угловой размер источ-



К задаче 7.2.16

ника шума равен $\alpha_1 \approx L/R$ (см. рисунок а), где R — расстояние от антенны до источника. Из решения задач 7.2.7, 7.2.10 следует, что поперечный радиус корреляции $l_{\perp} \approx \lambda/\alpha_1 = \lambda R/L$. Таким образом, с увеличением расстояния поперечный масштаб корреляционной функции растет, что позволяет при известном размере L оценить расстояние до источника шума. Однако в подводном звуковом канале на достаточно больших расстояниях лучевые траектории успевают существенно искривиться (см. рисунок б), отчего диапазон углов прихода шума α_2 увеличивается. Это будет приводить к уменьшению поперечного радиуса корреляции шумового поля $l_{\perp} \sim \lambda/\alpha_2$. В общем же случае зависимость $l_{\perp}$ от R может быть осциллирующей, что не позволяет однозначно определить размер источника шума по масштабу корреляции $l_{\perp}$.

7.3. Рассеяние звука случайными неоднородностями и неровными границами

7.3.1. Структурная функция $D_{\Pi}(\rho)$ показателя преломления $n(\mathbf{r}) = c_0/c(\mathbf{r})$ полностью определяется структурной постоянной

C_n , внешним L_0 и внутренним l_0 масштабами. Экспериментально измеренная функция корреляции аппроксимирована следующим образом:

$$D_n(\rho) = \begin{cases} a\rho^2, & \rho < l_0, \\ b\rho^{2/3}, & l_0 < \rho < L_0, \\ d, & \rho > L_0 \end{cases} \quad (1)$$

Определить l_0 , L_0 , C_n^2 и дисперсию флуктуаций показателя преломления σ_n^2 по измеренным параметрам a , b , d . Сделать расчет этих величин для $a = 3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-2}$, $b = 3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-2/3}$, $d = 1,2 \cdot 10^{-8}$.

Решение. Структурная функция записывается через структурную постоянную, внешний и внутренний масштабы в виде

$$D_n(\rho) = \begin{cases} C_n^2 l_0^{-4/3} \rho^2 & r < l_0, \\ C_n^2 \rho^{2/3}, & l_0 < r < L_0, \\ C_n^2 L_0^{2/3} = 2\sigma_n^2, & r > L_0. \end{cases} \quad (2)$$

Отсюда имеем $C_n^2 = b$, $\sigma_n^2 = d/2$, $l_0 = (C_n^2/a)^{3/4}$, $L_0 = (d/C_n^2)^{3/2}$. Подставляя числовые значения, находим $C_n^2 = 3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-2/3}$, $\sigma_n^2 = 6 \cdot 10^{-9}$, $l_0 = 1 \text{ м}$, $L_0 = 8 \text{ м}$.

7.3.2. Найти в приближении однократного рассеяния (борновском приближении) интенсивность сигнала, рассеянного случайными неоднородностями, локализованными в области V , находящейся вдали как от излучателя, так и от приемника.

Решение. Пусть скорость звука $c(r)$ наряду с регулярными изменениями испытывает и флуктуации. Представляя показатель преломления $n(r) = c_0/c(r)$ в виде суммы регулярной и флуктуационной компонент:

$$n(r) = n_0(r) + \mu(r), \quad \langle \mu \rangle = 0, \quad (1)$$

будем искать решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta p + k_0^2 n^2(r) p = 0, \quad k_0 = \omega/c_0, \quad (2)$$

в виде

$$p = p_0 + p_s, \quad (3)$$

где $p_0(r)$ — первичное поле (решение уравнения (1) при $\mu = 0$), p_s — рассеянное поле. Будем считать, что рассеянное поле мало ($|p_s| \ll |p_0|$). Тогда для рассеянной компоненты будем иметь неоднородное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta p_s + k_0^2 n_0^2(r) p_s = -2k_0^2 n(r) \mu(r) p_0(r). \quad (4)$$

Источники в правой части (4) описывают рассеяние первичного поля $p_0(r)$ на случайных неоднородностях $\mu(r)$. Если ввести

функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ (решение уравнения (2) с правой частью в виде δ -функции $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ при $\mu = 0$), то общее решение (4) записывается в виде

$$p_s(\mathbf{r}) = -2k_0^2 \int_V n_0(\mathbf{r}') \mu(\mathbf{r}') p(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (5)$$

где интегрирование ведется по области V , занятой неоднородностями. Рассеянное поле в приближении однократного рассеяния является линейным функционалом от μ , и, следовательно, $\langle p_s \rangle = 0$, а средняя интенсивность $I_s = \langle p_s^2 \rangle$ выражается через корреляционную функцию показателя преломления. Но для того чтобы получить наглядный результат, сделаем ряд упрощений:

а) будем считать, что среда в среднем однородна, т.е. $n \equiv 1$, и, следовательно, функция Грина

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \exp(ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|); \quad (6)$$

б) падающее поле представим в виде

$$p_0(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(i\varphi(\mathbf{r})), \quad (7)$$

где A — амплитуда, φ — фаза, причем амплитуда и локальный волновой вектор $\mathbf{k} = \nabla\varphi$ практически не меняются в масштабе характерного размера неоднородностей;

в) в пределах объема рассеяния неоднородности статистически однородны:

$$\langle \mu(\mathbf{r}') \mu(\mathbf{r}'') \rangle = B_\mu(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \quad (8)$$

и характеризуются пространственным спектром

$$G_\mu(\vec{k}) = (1/8\pi^3) \int B_\mu(\vec{\rho}) e^{i\vec{k}\vec{\rho}} d\vec{\rho}; \quad (9)$$

г) неоднородности занимают конечный объем V , причем в нем содержится много неоднородностей ($V \gg l_\mu^3$), а сам он расположен "достаточно далеко" от точки приема. Это условие подробно обсудим ниже.

Для средней интенсивности имеем

$$I = \frac{k_0^4}{(2\pi)^2} \int \frac{B_\mu(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') A(\mathbf{r}') A(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| |\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} e^{iW} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'', \quad (10)$$

$$W = \varphi(\mathbf{r}') - \varphi(\mathbf{r}'') + k_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}''|). \quad (11)$$

Перейдем в (10) к интегрированию по разностной координате $\vec{\rho} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}''$ и координате "центра рассеяния" $\mathbf{R} = (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')/2$. Характерный масштаб интегрирования по $\vec{\rho}$ порядка радиуса корреляции неоднородностей l_μ . Ограничиваясь линейными членами в разложении W по $\vec{\rho}$ и вводя локальный волновой вектор

$k_i(R) = \nabla\varphi$ падающей волны для W , получаем

$$W = (k_i(R) - k_s(R)) \vec{\rho} = k_0(n_i - n_s) \vec{\rho}, \quad (12)$$

$$k_s(R) = k_0 n_s, \quad n_s = (r-R)/|r-R|. \quad (13)$$

Здесь n_s — единичный вектор, направленный из "точки рассеяния" R в точку приема r ; n_i — единичный вектор, показывающий направление распространения падающей волны в этой точке. Считая, что на характерном размере неоднородностей l_μ амплитудные множители падающей волны и функции Грина не меняются, из (10)–(12) получаем

$$I = 2\pi k_0^4 \int G_\mu(\vec{k}(R)) \frac{J_0(R)}{|r-R|^2} d^3R, \quad (14)$$

$$\vec{k} = k_s - k_i = k_0(n_s - n_i). \quad (15)$$

Вектор $\vec{k}$ называется вектором рассеяния. Из (14), (15) видно, что рассеяние носит резонансный (селективный) характер. Пространственный спектр флуктуаций μ содержит набор различных пространственных гармоник с волновыми векторами $\vec{k}$, а интенсивность каждой гармоники пропорциональна $G_\mu(\vec{k})$. Переписывая (15) в виде $k_s = k_i + \vec{k}$, видим, что компоненты появляются в результате "взаимодействия" падающей волны (волновой вектор k_i) с пространственной гармоникой $\vec{k}$.

7.3.3. Коэффициентом объемного рассеяния m_V называется отношение акустической мощности, рассеянной единичным объемом в единичный телесный угол, к интенсивности падающей волны. Определить из выражения (2.14) m_V и получить выражение для интенсивности рассеянной волны. Считать, что на рассеивающий объем V падает сферическая волна, а в пределах объема можно пренебречь в (2.14) как изменением направления вектора рассеяния $\vec{k}(R)$, так и изменением амплитудных множителей.

Ответ. Коэффициент объемного рассеяния равен

$$m_V = 2\pi k_0^4 G_\mu(\vec{k}), \quad \vec{k} = k_0(n_s - n_i). \quad (1)$$

Если рассеивающий объем находится на расстоянии R_i от сферического излучателя, а точка наблюдения на расстоянии R_s от объема, то для интенсивности рассеянной волны имеем

$$I = m_V V R_i^{-2} R_s^{-2}, \quad (2)$$

а в векторе рассеяния $\vec{k}$ (см.(1)) n_i — единичный вектор, направленный на объем из точки излучения, n_s — из рассеивающего объема в точку наблюдения.

7.3.4. Пусть угол между падающей и рассеянной волнами равен θ , а длина волны излучения равна λ . Найти из условия (2.5) длину волны пространственной гармоники Λ_k , на которой происходит рассеяние под данным углом. Рассмотреть случаи $\theta = 0, \pi/2, \pi$.

Ответ. Период пространственной решетки, на которой происходит рассеяние, равен

$$\Lambda_k = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta/2)}. \quad (1)$$

Формула (1) есть известное условие Вульфа-Брегга, определяющее период решетки, на которой происходит дифракция под углом θ . Соответственно для трех углов $\Lambda_k = \infty, \lambda/\sqrt{2}, \lambda/2$.

7.3.5. Найти коэффициент объемного рассеяния m_V , считая, что флуктуации показателя преломления изотропны и характеризуются корреляционной функцией

$$B_\mu(\rho) = \sigma_\mu^2 \exp(-\rho^2/a^2). \quad (1)$$

Определить, как зависит диаграмма рассеяния от угла при $ka \ll 1$ и $ka \gg 1$. Определить, на какой частоте коэффициент объемного рассеяния максимален.

Ответ.

$$m_V = \frac{k^4 a^3 \sigma_\mu^2}{4\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left[ka \sin \frac{\theta}{2}\right]^2\right]. \quad (2)$$

При мелкомасштабных неоднородностях $ka \ll 1$ рассеяние изотропно, при $ka \gg 1$ рассеяние происходит в узком угле $\theta \lesssim \theta_0$,

$$\theta_0 \approx 1/(ka), \quad (3)$$

в направлении распространения волны. Коэффициент рассеяния максимален при $k = \sqrt{2}/[a \sin(\theta/2)]$.

7.3.6. Флуктуации показателя преломления в воде описываются функцией (5.1), а масштаб корреляции $a = 60$ см. Найти ширину диаграммы направленности для частот f , равных 100, 10, 100 кГц. Скорость звука $c = 1500$ м/с.

Ответ. Для частоты $f_1 = 100$ Гц $ka = 0,24$, т.е. флуктуации мелкомасштабны и рассеянное поле изотропно. Для f_2 и f_3 флуктуации крупномасштабны и углы θ_0 равны $2,3^\circ$ и $0,23^\circ$.

7.3.7. Найти частоту излучения первичной волны, если радиус корреляции в (5.1) $a = 100$ см, а $\theta_0 = 3^\circ$ (см.(5.3)).

Ответ. $f \approx 4,6$ кГц.

7.3.8. В инерционном интервале флуктуации показателя преломления в океане описываются степенной структурной функ-

цией (1.2), которой соответствует спектральная плотность

$$G_{\mu}(\kappa) = 0,03 C_{\pi}^2 \kappa^{-11/3}. \quad (1)$$

Найти коэффициент объемного рассеяния и исследовать его поведение при $\theta \rightarrow 0$.

Ответ.

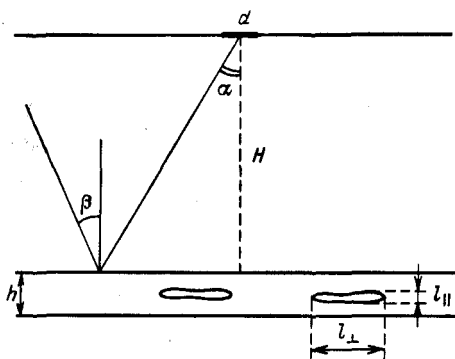
$$m_V = 0,03 C_{\pi}^2 (f/c)^{1/3} [\sin(\theta/2)]^{-11/3}, \quad (2)$$

где f — частота звука, c — скорость звука. Коэффициент расходуется при малых углах рассеяния. Это связано с тем, что выражение (1) несправедливо в области больших волновых чисел.

7.3.9. Флуктуации показателя преломления в океане существенно анизотропны, их горизонтальный масштаб $l_{\perp}$ много больше вертикального $l_{\parallel}$. Считая, что корреляционная функция показателя преломления

$$B_{\mu}(\vec{\rho}) = \sigma_{\mu}^2 \exp \left[-\frac{\rho_{\parallel}^2}{l_{\parallel}^2} - \frac{\rho_{\perp}^2}{l_{\perp}^2} \right], \quad (1)$$

найти коэффициент объемного рассеяния в зависимости от угла β , отсчитываемого от вертикали, считая, что волна падает под углом α к вертикали ($\beta = -\alpha$ соответствует обратному рассеянию; см. рисунок). Рассмотреть слу-



К задаче 7.3.9

чай, когда по вертикали неоднородности мелкомасштабны ($l_{\parallel} k_0 \ll 1$), а по горизонтали крупномасштабны ($l_{\perp} k_0 \gg 1$).

Ответ. Согласно выражениям (2.9), (3.1) коэффициент объемного рассеяния равен

$$m_V = \frac{k^4 l_{\parallel} l_{\perp}^2 \sigma_{\mu}^2}{4\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{\kappa_{\parallel}^2 l_{\parallel}^2}{4} - \frac{\kappa_{\perp}^2 l_{\perp}^2}{4} \right], \quad (2)$$

где $\kappa_{\parallel} = k_0(\cos \alpha + \cos \beta)$, $\kappa_{\perp} = k_0(\sin \alpha - \sin \beta)$. В случае $l_{\parallel} k_0 \ll 1$ и $l_{\perp} k_0 \gg 1$ из (2) имеем

$$m_V \approx \frac{k^4 l_{\parallel} l_{\perp}^2 \sigma_{\mu}^2}{4\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{k_0^2 l_{\perp}^2 \Delta^2 \cos^2 \alpha}{4} \right], \quad (3)$$

где $\Delta = \beta - \alpha$. Таким образом, диаграмма рассеяния сосредоточена в малом угле $\Delta_* = 2/(k_0 l_{\perp} \cos \alpha)$ вблизи угла зеркального отражения $\beta = \alpha$.

7.3.10. Анизотропные неоднородности показателя преломления сосредоточены в слое толщиной h , расположенном на глубине H от поверхности океана ($h \ll H$). Падающий сигнал излучается направленной антенной и имеет гауссову направленность:

$$J_0(R) = R^{-2} \exp(-\alpha^2 k_0^2 d^2), \quad (1)$$

где α — угол, отсчитываемый от вертикали, а d — эффективный размер антенны. Найти интенсивность обратного рассеяния в случае, если $k_0 l_{\parallel} \ll 1$, а $k_0 l_{\perp} \gg 1$. Исследовать зависимость интенсивности от отношения апертуры антенны d и горизонтального размера неоднородностей $l_{\perp}$. Выяснить условия, когда можно вводить понятие эффективного рассеивающего объема V и когда интенсивность описывается выражением типа (3.2).

Решение. Так как $h \ll H$, а диаграммы направленности излучателя и рассеивателя узкие, то в (2.14) после интегрирования по вертикальной координате с учетом (1), (9.3), $\alpha = -\beta$, $|\rho_{\perp}|/H \ll 1$ ($\rho_{\perp}$ — поперечная координата) имеем для интенсивности обратного рассеяния

$$J = \frac{k^4 l_{\parallel} l_{\perp}^2 \sigma^2 h}{4\sqrt{\pi} H^4} \iint \exp(-\rho_{\perp}^2 k_0^2 d^2 / H^2) \exp(-\rho_{\perp}^2 k_0^2 l_{\perp}^2 / H^2) d^2 \rho_{\perp}, \quad (2)$$

$$J = \frac{m_V}{H^4} \frac{2\pi H^2 h}{k_0^2 (d^2 + l_{\perp}^2)}, \quad m_V = \frac{k^4 l_{\parallel} l_{\perp}^2 \sigma^2 \mu}{4\sqrt{\pi}}. \quad (3)$$

Здесь m_V — коэффициент объемного рассеяния в обратном направлении для нормального падения на слой. Первый сомножитель в (2) определяет поперечный размер облученной области, и эффективный объем рассеяния $V = 2\pi H^2 h / k_0^2 d^2$. Вторым сомножителем отражает тот факт, что на резко анизотропных неоднородностях отражение близко к зеркальному, и поэтому в точку приема попадает компонента рассеянного излучения, лежащая внутри угла $\theta_* \sim 1/k_0 l_{\perp}$. Эффективный объем рассеяния можно ввести только при $d \gg l_{\perp}$. Если же $l_{\perp} \gg d$, в формировании обратного рассеянного сигнала участвует лишь часть облученной области.

7.3.11. В условиях задачи 7.3.10 зондирование ведется антенной, излучающей поле под углом β к вертикали. Как зависит интенсивность J обратного рассеяния от угла зондирования β , и при каких условиях по этой зависимости можно оценить $l_{\perp}$?

Ответ. Интенсивность описывается выражением (10.2), где $\exp(-\rho_1^2 k_0^2 d^2 / H^2) \exp[-(\rho_2 - \beta H)^2 k_0^2 d^2 / H^2]$ — сомножитель, отвечающий за диаграмму направленности, ρ_1, ρ_2 — компоненты вектора $\rho_{\perp}$,

и ось антенны отклонена от оси ρ_2 на угол β . Интеграл берется аналитически. По зависимости $I(\beta)$ можно оценить $l_{\perp}$, если $l_{\perp} \ll d$, т.е. когда диаграмма направленности излучателя уже диаграммы направленности рассеивателей.

7.3.12. Исходя из уравнения эйконала

$$(\nabla w)^2 = n^2, \quad (1)$$

получить в малоугловом приближении уравнение для возмущений эйконала первоначально плоской волны, распространяющейся в среде с малыми крупномасштабными флуктуациями показателя преломления: $n = 1 + \mu$; $|\mu| \ll 1$, $\langle \mu \rangle = 0$.

Решение. Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси z эйконал равен $w_0 = z$. Ищем решение уравнения (1) в виде $w = w_0 + \tilde{w}$ и, пренебрегая членами порядка μ^2 , получаем для $\tilde{w}$

$$2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + (\nabla_{\perp} \tilde{w})^2 = 2\mu, \quad (2)$$

где нелинейное слагаемое описывает изменение фазы, связанное с искривлением луча. На начальном участке можно пренебречь этими искажениями, тогда из (2) для возмущений эйконала и, соответственно, для возмущений фазы $\varphi \approx k_0 w$, имеем

$$\tilde{w}(z, \vec{\rho}_{\perp}) = \int_0^z \mu(z', \vec{\rho}_{\perp}) dz', \quad \varphi(z, \vec{\rho}_{\perp}) = k_0 \int_0^z \mu(z', \vec{\rho}_{\perp}) dz'. \quad (3)$$

Здесь $\rho_{\perp}$ — поперечная по отношению к направлению распространения волны координата.

7.3.13. Выразить дисперсию флуктуаций фазы σ_{φ}^2 через корреляционную функцию (2.8) флуктуаций показателя преломления, считая, что длина трассы z много больше эффективного продольного радиуса корреляции

$$l_{\text{эф}} = \int_0^{\infty} B_{\mu}(\rho_{\parallel}, \vec{\rho}_{\perp} = 0) d\rho_{\parallel} / \sigma_{\mu}^2, \quad \sigma_{\mu}^2 = B_{\mu}(0, 0). \quad (1)$$

Решение. Считая флуктуации показателя преломления статистически однородными (см. (2.8)), для дисперсии возмущений эйконала имеем

$$\sigma_w^2(z) = \int_0^z \int_0^z B_{\mu}(z' - z'', \vec{\rho}_{\perp} = 0) dz' dz''. \quad (2)$$

Переходя в (2) к интегрированию по переменным $\rho_{\parallel} = z' - z''$, $z = z'$, из (2) находим

$$\sigma_w^2(z) = z \int_{-z}^z \left[1 - \frac{\rho_{\parallel}}{z} \right] B_{\mu}(\rho_{\parallel}, 0) d\rho_{\parallel}. \quad (3)$$

В зависимости от соотношения между длиной трассы z и радиусом корреляции $l_{\text{эф}}$ получаем из (3)

$$\sigma_w^2 \approx \begin{cases} \sigma_\mu^2 z^2, & z \ll l_{\text{эф}}, \\ 2\sigma_\mu^2 l_{\text{эф}} z, & z \gg l_{\text{эф}}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь эффективный масштаб $l_{\text{эф}}$ выражается через корреляционную функцию показателя преломления с помощью соотношения (1). Для дисперсии фазы из (12.4) имеем

$$\sigma_\varphi^2(z) = k_0^2 \sigma_w^2 \approx 2k_0^2 \sigma_\mu^2 l_{\text{эф}} z. \quad (5)$$

7.3.14. Найти дисперсии фазы, считая, что флуктуации фазы изотропны и описываются: а) гауссовой корреляционной функцией (см.(5.1)); б) экспоненциальной корреляционной функцией $B_\mu(\rho) = \sigma_\mu^2 \exp(-|\rho|/b)$.

Ответ. Дисперсия флуктуации фазы описывается (13.5), где $l_{\text{эф}} = \pi l^{1/2}/2$ для случая а) и $l_{\text{эф}} = b$ для случая б).

7.3.15. Флуктуации показателя преломления в океане резко анизотропны и описываются корреляционной функцией (9.1) ($l_{\parallel} \ll l_{\perp}$). Акустическая волна проходит расстояние z один раз по горизонтали, другой раз по вертикали. Найти отношение дисперсий $\sigma_{\varphi\perp}^2/\sigma_{\varphi\parallel}^2$ флуктуаций фазы для этих трасс.

Ответ. Для горизонтальной трассы флуктуации существенно больше, чем для вертикальной: $\sigma_{\varphi\perp}^2/\sigma_{\varphi\parallel}^2 = l_{\perp}/l_{\parallel} \gg 1$.

7.3.16. Найти поперечную корреляционную функцию

$$B_\varphi(\rho_{\perp}, z) = \langle \varphi(\mathbf{r}_{\perp} + \vec{\rho}_{\perp}, z) \varphi(\mathbf{r}_{\perp}, z) \rangle \quad (1)$$

и структурную функцию флуктуаций фазы

$$D_\varphi(\rho_{\perp}, z) = \langle [\varphi(\mathbf{r}_{\perp} + \vec{\rho}_{\perp}, z) - \varphi(\mathbf{r}_{\perp}, z)]^2 \rangle, \quad (2)$$

если флуктуации показателя преломления описываются (5.1).

Ответ. Для корреляционной и структурной функций имеем

$$B_\varphi(\rho_{\perp}, z) = 2zk_0^2 \int_0^\infty B_\mu(\rho_{\parallel}, \vec{\rho}_{\perp}) d\rho_{\parallel}. \quad (3)$$

$$D_\varphi(\rho_{\perp}, z) = zk_0^2 \int_0^\infty [D_\mu(\rho_{\parallel}, \rho_{\perp}) - D_\mu(\rho_{\parallel}, 0)] d\rho_{\parallel}. \quad (4)$$

Здесь D_μ — структурная функция показателя преломления. Для гауссовой корреляционной функции (5.1) из (3) находим

$$B_\varphi(\rho_{\perp}, z) = \sigma_\varphi^2(z) \exp(-\rho_{\perp}^2/a^2), \quad (5)$$

где $\sigma_\varphi^2(z)$ — дисперсия флуктуаций показателя преломления, описываемая (13.5), $l_{\text{эф}} = \pi l^{1/2}/2$.

7.3.17. Найти в приближении геометрической акустики флуктуации времени пробега импульса в случайно неоднородной среде.

Решение. Время пробега определяется выражением

$$T = \int_0^z \frac{dz'}{c(z', \vec{\rho}_\perp)} - \frac{1}{c_0} \int_0^z n(z', \vec{\rho}_\perp) dz', \quad (1)$$

и, следовательно, для флуктуаций времени пробега имеем

$$\Delta T = \frac{1}{c_0} \int_0^z \mu(z, \vec{\rho}_\perp) dz'. \quad (2)$$

Сравнивая (2) с (12.3), получаем, что дисперсия времени пробега выражается через дисперсию эйконала

$$\sigma_T^2 = \sigma_w^2 / c_0^2 = 2\sigma_{\mu}^2 l_{\text{эф}} z / c_0^2. \quad (3)$$

7.3.18. Найти функцию корреляции флуктуаций эйконала в разнесенных по трассе точках z_1 и z_2 . Найти продольный коэффициент корреляции.

Ответ. Функция корреляции флуктуаций эйконала вычисляется аналогично процедуре задачи 7.3.13:

$$B_w(\rho_\perp, z_1, z_2) = 2z_{\min} \int_0^\infty B_\mu(\rho_\parallel, \vec{\rho}_\perp) d\rho_\parallel, \quad (1)$$

где $z_{\min} = \min(z_1, z_2)$. Продольный коэффициент корреляции

$$r_\parallel = \frac{B_w(0, z_1, z_2)}{\sigma_w(z_1)\sigma_w(z_2)} = \begin{cases} \sqrt{z_2/z_1}, & z_2 < z_1, \\ \sqrt{z_1/z_2}, & z_1 < z_2. \end{cases}$$

7.3.19. Исходя из уравнения переноса

$$2\nabla w \nabla A + A \Delta w = 0, \quad (1)$$

получить уравнение первого приближения для флуктуаций уровня амплитуды $\chi = \ln(A/A_0)$ первоначально плоской волны. Для "двумерных" неоднородностей показателя преломления $\mu(\mathbf{r}) = \mu(r_\parallel, r_\perp)$ найти дисперсию уровня.

Решение. Переходя в (1) к уровню амплитуды и учитывая, что для первоначально плоской волны $w = z + \tilde{w} + \dots$, для возмущений уровня имеем

$$2 \frac{d\chi}{dz} = - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} - \Delta_\perp \tilde{w}. \quad (2)$$

Оценивая $\partial^2 \tilde{w} / \partial z^2 \sim \sigma_\mu / l_\parallel$, $\Delta_\perp \tilde{w} \sim \sigma_\mu (z/l_\parallel)^{1/2} / l_\perp^2$, получаем, что на достаточно больших расстояниях первым слагаемым в правой части уравнения (2) можно пренебречь. Таким образом,

$$\chi(z, \vec{\rho}_\perp) = - \frac{1}{2} \int_0^z \Delta_\perp \tilde{w}(z', \vec{\rho}_\perp) dz'. \quad (3)$$

После усреднения (3) с учетом выражения для корреляционной функции эйконала (8.1) имеем для дисперсии уровня в двумерном случае

$$\sigma_{\chi}^2 = \frac{1}{2} \int_0^z \int_0^z z_{\min} dz' dz'' \int_0^z \frac{\partial^4 B_{\mu}(\rho_{\parallel}, \rho_{\perp}=0)}{\partial \rho_{\perp}^4} d\rho_{\parallel}. \quad (4)$$

После вычисления двойного интеграла для дисперсии флуктуаций уровня плоской волны имеем

$$\sigma_{\chi}^2 = \frac{z^3}{6} \int_0^z \frac{\partial^4 B_{\mu}(\rho_{\parallel}, \rho_{\perp}=0)}{\partial \rho_{\perp}^4} d\rho_{\parallel}.$$

Таким образом, флуктуации уровня растут пропорционально z^3 , т.е. медленнее, чем флуктуации фазы (13.4).

7.3.20. Найти дисперсию флуктуаций уровня, считая, что флуктуации показателя преломления характеризуются корреляционной функцией (5.1).

Ответ. $\sigma_{\chi}^2 = 2\sqrt{\pi} \sigma_{\mu}^2 (z/a)^3$.

7.3.21. Найти дисперсию флуктуаций уровня $\sigma_{\chi_{\parallel}}^2$ для вертикальной трассы в океане, считая, что неоднородности "двумерны" и описываются выражением (9.1). Как изменится величина флуктуаций $\sigma_{\chi_{\parallel}}^2$ для горизонтальной трассы такой же длины?

Ответ. Для вертикальной трассы длины z $\sigma_{\chi_{\parallel}}^2 = 2\sqrt{\pi} \sigma_{\mu}^2 l_{\parallel} z^3 / l_{\perp}^4$, для горизонтальной трассы той же длины $\sigma_{\chi_{\perp}}^2 = 2\sqrt{\pi} \sigma_{\mu}^2 l_{\perp} z^3 / l_{\parallel}^4 = \sigma_{\chi_{\parallel}}^2 l_{\perp} / l_{\parallel}$ и $\sigma_{\chi_{\perp}}^2 \gg \sigma_{\chi_{\parallel}}^2$. Для горизонтальной трассы флуктуации уровня существенно больше, так как флуктуации амплитуды определяются кривизной фазового фронта волн и тем больше, чем меньше поперечный масштаб неоднородностей показателя преломления.

7.3.22. Пренебрегая флуктуациями уровня, найти среднее поле и конечную корреляционную функцию поля $p = \exp(-i\varphi)$, распространяющегося в среде с гауссовыми флуктуациями показателя преломления, имеющими корреляционную функцию (5.1).

Ответ. Учитывая гауссовый характер флуктуации фазы и решение задачи 7.3.15, имеем

$$\langle p \rangle = \langle \exp(i\varphi) \rangle = \exp(i\langle \varphi \rangle - \sigma_{\varphi}^2/2), \quad (1)$$

$$\Gamma(\vec{\rho}_1, z) = \langle pp^* \rangle = \exp\left[-\frac{d_{\varphi}(\vec{\rho}_1, z)}{2}\right] = \exp\left\{-\sigma_{\varphi}^2 \left[1 - \exp\left[-\frac{\rho_1^2}{a^2}\right]\right]\right\}, \quad (2)$$

$$\langle \varphi \rangle = k_0 z, \quad \sigma_{\varphi}^2 = 2k_0^2 \sigma_{\mu}^2 l_{\text{эф}} z, \quad l_{\text{эф}} = a\sqrt{\pi}/2. \quad (3)$$

7.3.23. Считая, что справедливо приближение геометрической акустики, найти среднеквадратичное отклонение флуктуаций

эйконала σ_w , фазы σ_φ , времени пробега σ_T , коэффициент ослабления среднего поля K и оценить поперечный радиус корреляции поля $\rho_\perp^*$. Считать, что плоская волна распространяется в среде с гауссовыми флуктуациями показателя преломления, имеющими корреляционную функцию вида (5.1) с $\sigma_\mu^2 = 10^{-8}$, $a = 1$ м. Длина трассы $z = 1$ км, падающее излучение имеет частоту 10 (а) и 100 кГц (б).

Ответ. а) $\sigma_w = 4,2 \cdot 10^{-3}$ м, $\sigma_\varphi = 1,76 \cdot 10^{-1}$, $\sigma_T = 2,8 \cdot 10^{-6}$ с, $K = 0,98$, $\rho_\perp^* \approx a = 1$ м; б) $\sigma_w = 4,2 \cdot 10^{-3}$ м, $\sigma_\varphi = 1,76$, $\sigma_T = 2,8 \cdot 10^{-6}$ с; $C = 0,21$, $\rho_\perp^* \approx a/\sigma_\varphi = 0,57$ м.

7.3.24. Считая, что отклонения поверхности $z = \xi(\vec{\rho})$ малы по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi/k_0$, найти в приближении метода малых возмущений поле p_s , рассеянное при отражении плоской волны p_0 от абсолютно мягкой поверхности.

Решение. Для абсолютно мягкой поверхности давление на границе $p(\vec{\rho}, \xi(\vec{\rho})) = 0$. Представляя поле при $z = 0$ в виде суммы невозмущенного p и рассеянного p_s поля и разлагая граничное условие в ряд по степеням ξ/λ , получаем граничное условие для рассеянной компоненты:

$$p_s = -\xi \frac{\partial p_0}{\partial z}. \quad (1)$$

Для плоской волны единичной амплитуды, падающей под углом на мягкую границу, решение уравнения Гельмгольца имеет вид

$$p_0(\mathbf{r}_\perp, z) = \exp(i\vec{k}_0 \mathbf{r}_\perp) \left[\exp(-ik_{0\parallel} z) - \exp(ik_{0\parallel} z) \right], \quad (2)$$

$$k_0 = k \sin \theta_0, \quad k_{0\parallel} = k \cos \theta_0, \quad k = \omega/c_0. \quad (3)$$

Таким образом, для рассеянного поля, также удовлетворяющего уравнению Гельмгольца, имеем следующие граничные условия:

$$p_s(\mathbf{r}_\perp, z = 0) = 2ik_{0\parallel} \exp(i\vec{k}_0 \mathbf{r}_\perp) \xi(\mathbf{r}_\perp). \quad (4)$$

Условие применимости метода малых возмущений имеет вид

$$P = 2k\sigma_0 \cos \theta_0 \ll 1, \quad (5)$$

где $\sigma_0^2 = \langle \xi^2 \rangle$ — дисперсия возвышений, а P носит название параметра Рэлея. Пусть $C_\xi(\vec{k}_\perp)$ — пространственный спектр возмущений поверхности,

$$\xi(\mathbf{r}_\perp) = \int C_\xi(\vec{k}_\perp) \exp(i\vec{k}_\perp \mathbf{r}_\perp) d^2 \vec{k}_\perp. \quad (6)$$

Тогда из (4) следует, что пространственный спектр рассеянного поля

$$V(\vec{k}_\perp) = 2ik_{0\parallel} C_\xi(\vec{k}_\perp - \vec{k}_0). \quad (7)$$

Каждая из пространственных компонент возбуждает плоскую волну $\exp(i\vec{k}_\perp \mathbf{r}_\perp + i k_\parallel z)$, $k_\parallel = (k^2 - k_\perp^2)^{1/2}$, и, следовательно, рассеянное поле при $z > 0$ имеет вид

$$p_s(\mathbf{r}_\perp, z) = 2ik_{0\parallel} \int C_\xi(\vec{k}_\perp - \vec{k}_0) \exp(i\vec{k}_\perp \mathbf{r}_\perp + i k_\parallel z) d^2 \vec{k}_\perp. \quad (8)$$

Таким образом, в приближении метода плавных возмущений задача об отражении от границы свелась к задаче о дифракции плоской волны за случайным экраном (см. задачу 7.2.1).

7.3.25. Считая известным корреляционную функцию $\Gamma_\xi(\vec{\rho}_\perp) = \langle \xi(\mathbf{r}_\perp + \vec{\rho}_\perp) \xi(\mathbf{r}_\perp) \rangle$ и спектральную плотность $A_\xi(\vec{k}_\perp)$ возмущений поверхности $\xi(\mathbf{r}_\perp)$, найти поперечную корреляционную функцию $\Gamma_\perp(\vec{\rho}_\perp)$ рассеянного поля. Для гауссовой корреляционной функции вида (2.2.1) найти интенсивность рассеянного поля в случае мелкомасштабных ($kl_0 \ll 1$) и крупномасштабных ($kl_0 \gg 1$) неоднородностей.

Ответ. Используя решение задачи 7.2.1, получаем

$$\Gamma_\perp(\vec{\rho}_\perp) = 4k_{0\parallel}^2 \int_{|\vec{k}_\perp| < k_0} A_\xi(\vec{k}_\perp - \vec{k}_0) \exp(i\vec{k}_\perp \vec{\rho}_\perp) d^2 \vec{k}_\perp. \quad (1)$$

В случае мелкомасштабных неоднородностей поперечная корреляционная функция описывается выражением (2.2.4), где $F_0 = (2/\pi)(\sigma_0 l_0 k \cos \theta)^2$, поперечный масштаб корреляции порядка длины волны, а интенсивность рассеянного излучения

$$I = \langle p_s^2 \rangle = 4\sigma_0^2 k^2 \cos^2 \theta (kl_0)^2 / 2 = P^2 (kl_0)^2 / 2. \quad (2)$$

Для крупномасштабных неоднородностей поперечная корреляционная функция

$$\Gamma_\perp(\vec{\rho}_\perp) = 4k^2 \cos^2 \theta_0 \Gamma_\xi(\vec{\rho}_\perp) \exp(i\vec{k}_0 \vec{\rho}_\perp), \quad (3)$$

а интенсивность рассеянного поля $I = 4\sigma_0^2 k^2 \cos^2 \theta_0 = P^2$.

7.3.26. Определить ширину углового спектра рассеянного поля для мелкомасштабных и крупномасштабных неоднородностей.

Решение. Из задачи 7.3.25 следует, что спектральная плотность рассеянного поля $F_0(\vec{k}_\perp)$ связана со спектральной плотностью возмущений поверхности $A_\xi(\vec{k}_\perp)$ соотношением

$$F_0(\vec{k}_\perp) = 4k^2 \cos^2 \theta_0 A_\xi(\vec{k}_\perp - \vec{k}_0), \quad (1)$$

причем распространяющимися являются волны, поперечный волновой вектор которых удовлетворяет условию $|\vec{k}_\perp| < k = \omega/c_0$. Формула (1) определяет селективный характер рассеяния на неровной поверхности: фурье-компонента возмущений поверхности

с волновым числом K дает рассеянную волну с поперечным волновым числом

$$\vec{k}_\perp = \vec{k}_0 + K, \quad |\vec{k}_\perp| < k. \quad (2)$$

Для поперечной компоненты $n_\perp$ единичного вектора распространения рассеянной волны условие (2) записывается в виде

$$kn_\perp = kn_0 + K, \quad |n_\perp| < 1. \quad (3)$$

Для мелкомасштабных неоднородностей, когда характерная ширина спектра $K_0 \approx 1/l_0 \gg k$, рассеяние изотропно по углам. Для крупномасштабных неоднородностей ($K_0 \ll k$) рассеянная компонента сосредоточена в узком конусе вблизи угла зеркального отражения. Угловые ширины $\theta_\parallel$ и $\theta_\perp$ в плоскостях параллельной и перпендикулярной плоскости падения соответственно равны

$$\theta_\parallel \approx K_0/(k \cos \theta_0), \quad \theta_\perp = K_0/k. \quad (4)$$

7.3.27. Плоская волна единичной амплитуды падает нормально на взволнованную поверхность. Корреляционная функция возмущений описывается функцией вида (2.1), где среднеквадратичное отклонение поверхности $\sigma_0 = 0,1$ м, поперечный масштаб $l_0 = 1/K_0 = 1$ м. Найти угол рассеяния θ_s , параметр Рэлея P (см. задачу 7.3.26), интенсивность рассеянной волны для следующих частот падающего излучения: $f_1 = 50$ Гц, $f_2 = 100$ Гц, $f_3 = 500$ Гц, $f_4 = 1000$ Гц.

Ответ. Для частот f_1 и f_2 неоднородности являются мелкомасштабными ($kl_0 = 0,21$ и $0,42$). При этом $P_1 = 4,2 \cdot 10^{-2}$, $J_1 = 3,8 \cdot 10^{-5}$; $P_2 = 8,4 \cdot 10^{-2} = 2P_1$, $J_2 = 6 \cdot 10^{-4} = 16J_1$. Для частот f_3 и f_4 неоднородности крупномасштабны ($kl_0 = 2,1$ и $4,2$). Соответственно, $\theta_{s3} = \arcsin(1/kl_0) = 28^\circ$, $P_3 = 0,41$, $J_3 = 0,175$, $\theta_{s4} = 13^\circ \approx \theta_{s3}/2$, $P_4 = 0,84 = 2P_3$, $J_4 = 0,7 = 4J_3$. Для частоты $f_4 = 1000$ Гц условие применимости метода плавных возмущений при нормальном падении нарушается.

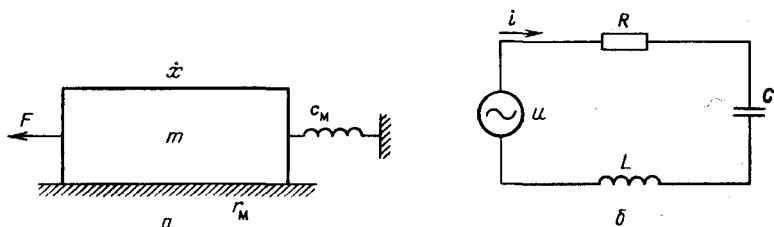
8. ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

8.1. Механические колебательные системы.

Электромеханические аналоги

8.1.1. Установить аналогию, существующую между уравнениями, описывающими колебания в электрических цепях и механических системах. Рассмотрение провести на примере линейных колебательных систем: механической с одной степенью свободы и одиночного электрического контура.

Решение. Рассмотрим механическую колебательную систему, состоящую из груза массой m на пружине, упругость которой s



К задаче 8.1.1

(см. рисунок *a*). Приложим к грузу силу F . Смещение груза из положения равновесия обозначим через x . Воспользовавшись вторым законом Ньютона, запишем уравнение движения в виде

$$m\ddot{x} + r_m \dot{x} + sx = F, \quad (1)$$

где $r_m \dot{x}$ — сила трения, r_m — механическое сопротивление системы, sx — сила упругого противодействия пружины. Линейность уравнения (1) является следствием двух предположений: 1) деформации невелики и упругая сила следует линейному закону (система подчиняется закону Гука) и 2) сила трения есть линейная функция скорости $v = \dot{x}$. Заменяв упругость пружины ее гибкостью $c_m = 1/s$, перепишем уравнение (1) в виде

$$m \frac{dv}{dt} + r_m v + \frac{1}{c_m} \int v dt = F. \quad (2)$$

Запишем теперь уравнение, описывающее колебательный процесс в электрическом контуре, к которому приложена внешняя

электродвижущая сила u (см. рисунок б). Согласно второму закону Кирхгофа сумма падений напряжений на всех элементах должна равняться u :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = u. \quad (3)$$

Если вместо тока i ввести заряд q , то (3) запишется в виде

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = u. \quad (4)$$

Сравнивая уравнения, которыми описываются колебания в механической системе (см. (1) или (2)) и электрической цепи (см. (4) или (3)), видим их полную аналогию. Она имеет практическое значение, так как позволяет сопоставить сложным механическим системам их электрические аналоги и использовать эффективные методы расчета электрических цепей.

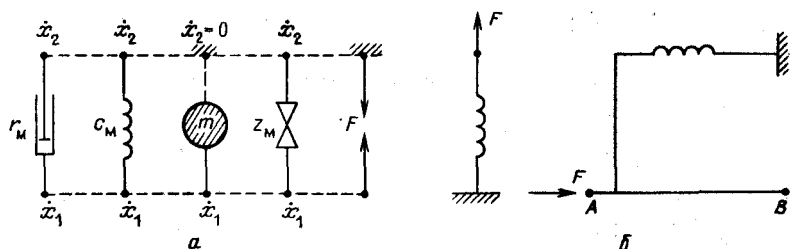
8.1.2. Составить таблицу соответствия механических и электрических величин.

Решение. Воспользуемся решением задачи 8.1.1. Сравнение (1) и (4), (2) и (3) позволяет составить таблицу аналогов механических величин электрическим. Здесь и ниже мы считаем, что при гармонических колебаниях все величины со временем изменяются как $\exp(j\omega t)$, где j — мнимая единица.

Таблица к задаче 8.1.2

Механическая величина	Электрическая величина
x — смещение	q — заряд
$v = \dot{x}$ — колебательная скорость	$i = \dot{q}$ — ток
F — сила	u — электродвижущая сила
m — масса	L — индуктивность
c_m — гибкость	C — емкость
r_m — активное механическое сопротивление	R — активное электрическое сопротивление
$\ddot{x}$ — ускорение	$\partial i / \partial t$ — скорость изменения тока
$Z_m = F/v$ — полное механическое сопротивление	$Z = u/i$ — полное электрическое сопротивление
$Z_m = r_m + j\omega m + 1/(j\omega c_m)$	$Z = R + j\omega L + 1/(j\omega C)$
$j\omega m$ — инерциальное сопротивление	$j\omega L$ — индуктивное сопротивление
$1/(j\omega c_m)$ — упругое сопротивление	$1/(j\omega C)$ — емкостное сопротивление
$\omega_0 = (mc_m)^{-1/2}$ — собственная частота механической системы	$\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ — собственная частота электрической системы

Для изображения механических систем можно ввести идеализированные элементы: массу, гибкость (пружину нулевой массы), активное сопротивление (пропорциональное скорости), и по аналогии с индуктивностью, емкостью и сопротивлением в электрических цепях представить их в виде двухполюсников



К задаче 8.1.2

(см. рисунок а). Тогда под переменными x , v в таблице понимается относительное смещение $x = x_1 - x_2$ и скорость $v = v_1 - v_2$ концов элемента упругости или элемента трения. Аналогом напряжения при этом является сила, приложенная к одному из полюсов механического элемента, причем предполагается, что к другому полюсу (концу) приложена такая же по модулю, но противоположная по направлению сила (так как эти идеальные элементы имеют нулевую массу). Изображение механического элемента в том случае, если один из его концов закреплен, приведено на рисунке б, где AB — жесткий стержень. Поэтому скорости его концов одинаковы и в силу третьего закона Ньютона сила реакции опоры равна действующей силе.

Для элемента массы естественной точкой отсчета является неподвижная (инерциальная) система координат, и поэтому ее можно считать вторым "полюсом" и изображать штриховой линией (см. рисунок а), а первый полюс есть сама масса. Формальное закрепление второго полюса элемента массы отражает тот факт, что законы движения записаны в инерциальной системе координат.

8.1.3. Показать, что аналогии между электрическими и механическими величинами, установленные в задачах 8.1.1, 8.1.2, сохраняются и в энергетических соотношениях.

Решение. Сравним энергетические соотношения для одноэлементных двухполюсников (индуктивности, емкости и сопротивления) и для механических элементов в виде массы, гибкости и сопротивления.

Работа, затрачиваемая внешним источником при увеличении силы тока от 0 до i , равна кинетической энергии магнитного поля электрического тока проводника с индуктивностью L :

$$A = W_m = Li^2/2. \quad (1)$$

Аналогично в случае поступательного движения тела работа внешних сил, вызывающих увеличение скорости от 0 до v , равна кинетической энергии тела

$$A = W_k = mv^2/2, \quad (2)$$

где m — масса. Работа внешних источников, идущая на преодоление сил электрического поля при увеличении заряда от 0 до q , равна потенциальной энергии электрического поля двухполюсника, содержащего емкость:

$$A = W_e = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{Cu^2}{2}. \quad (3)$$

Потенциальная энергия, запасаемая механической системой (упругим элементом), равна

$$W_n = x^2/2c_m = c_m F^2/2. \quad (4)$$

Следовательно, кинетическая энергия магнитного поля соответствует кинетической энергии механической системы, а потенциальная энергия электрического поля — потенциальной энергии механической системы. На сопротивлении как в электрической, так и в механической системе происходит необратимое рассеяние энергии и превращение ее в тепло. Электромагнитная энергия, превращающаяся в тепло, равна

$$W_r = Ri^2. \quad (5)$$

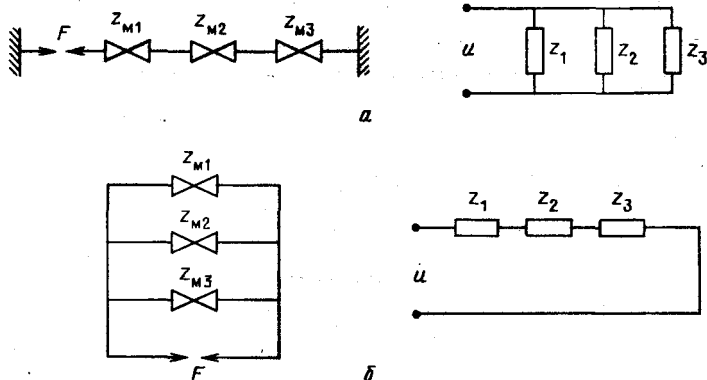
Аналогично выражается механическая энергия поступательно движущегося тела, превращающаяся в тепло:

$$W_r = F_{тр} v = r_m v^2. \quad (6)$$

8.1.4. Установить аналогии в способах соединения механических и электрических элементов.

Решение. Способы соединения механических элементов определяются характером распределения сил и перемещений. Основными являются два способа: соединение цепочкой (см. рисунок а) и соединение в узел (см. рисунок б).

При соединении цепочкой относительная скорость концов всей системы равна сумме относительных скоростей концов отдельных



К задаче 8.14

двухполюсников:

$$(\dot{x}_0 - \dot{x}_1) + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \dots + (\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_n) = \dot{x}_0 - \dot{x}_n,$$

или

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n, \quad (1)$$

и через все элементы передается одна и та же сила (на основании закона равенства действия и противодействия)

$$F = F_1 = F_2 = \dots = F_n. \quad (2)$$

Так как электрическим аналогом скорости является ток, а силы аналогичны напряжению, то соотношения (1), (2) показывают, что электрическим аналогом цепочки является параллельное соединение электрических двухполюсников, при котором

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n, \quad u = u_1 = u_2 = \dots = u_n.$$

При соединении механических двухполюсников в узел все они имеют одинаковые относительные скорости концов:

$$v = v_1 = v_2 = \dots = v_n, \quad (3)$$

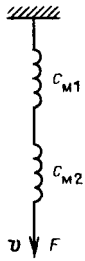
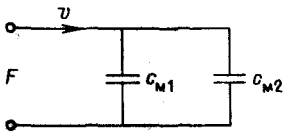
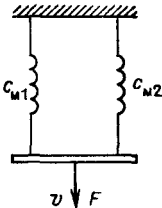
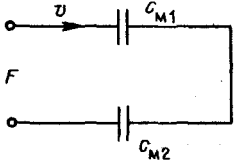
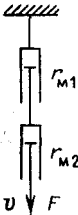
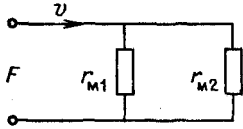
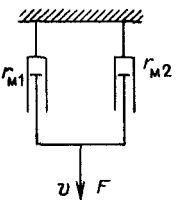
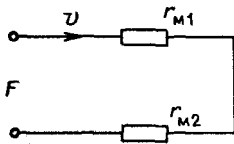
а сила, приложенная ко всей системе, равна сумме сил, приложенных к каждому элементу,

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n. \quad (4)$$

Очевидно, что электрическим аналогом узла является последовательное соединение электрических двухполюсников, при котором

$$i = i_1 = i_2 = \dots = i_n, \quad u = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Таким образом, при составлении аналоговой схемы пользуются следующими правилами: элементы, образующие узел, соединяются в электрической схеме параллельно; элементы, образующие цепочку, соединяются в электрической схеме последовательно.

Механическая система	Электрический аналог	Формула
		$c_M = c_{M1} + c_{M2}$
		$\frac{1}{c_M} = \frac{1}{c_{M1}} + \frac{1}{c_{M2}} = S$ $S = S_1 + S_2$
		$\frac{1}{r_M} = \frac{1}{r_{M1}} + \frac{1}{r_{M2}}$
		$r_M = r_{M1} + r_{M2}$

В таблице сопоставлены некоторые механические системы с их электрическими аналогами. На электрических схемах здесь и далее приводятся обозначения с использованием символов механических величин.

8.1.5. Даны две последовательно соединенные пружины, имеющие гибкости c_{M1} и c_{M2} , смещение которых от положения рав-

новесия под действием общей силы равно соответственно x_1 и x_2 , а также два конденсатора, соединенные параллельно, с электрической емкостью C_1 и C_2 и зарядами q_1 и q_2 , полученными от общего источника напряжения. Показать аналогию между этими двумя системами, рассчитав накопленную энергию.

Ответ. Потенциальная энергия механической системы равна

$$W_{\text{м}} = \frac{x_1^2}{2c_{\text{м}1}} + \frac{x_2^2}{2c_{\text{м}2}}, \quad (1)$$

а энергия, запасенная электрической системой, равна

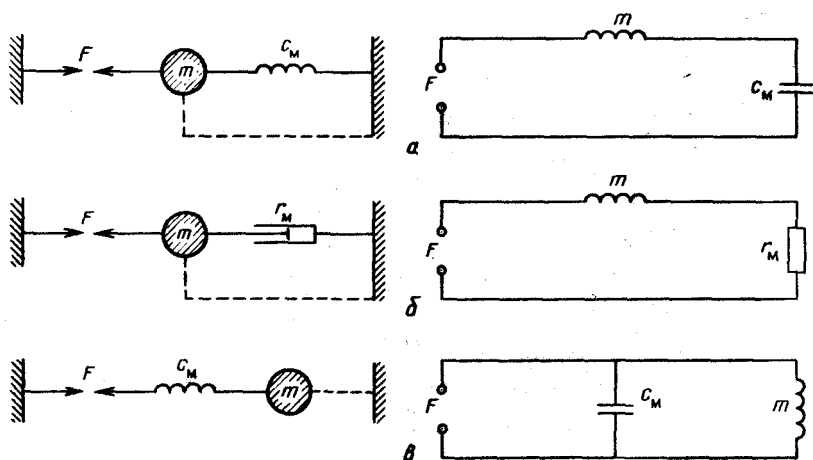
$$W_{\text{э}} = \frac{q_1^2}{2C_1^2} + \frac{q_2^2}{2C_2^2}. \quad (2)$$

Из сравнения выражений (1) и (2) видна аналогия между этими системами:

$$x_1 \rightarrow q_1, \quad x_2 \rightarrow q_2, \quad c_{\text{м}1} \rightarrow C_1, \quad c_{\text{м}2} \rightarrow C_2$$

(см. таблицу к задаче 8.1.2).

8.1.6. Для механических систем, изображенных в левой части рисунка, определить полное сопротивление и построить схему электрического аналога.



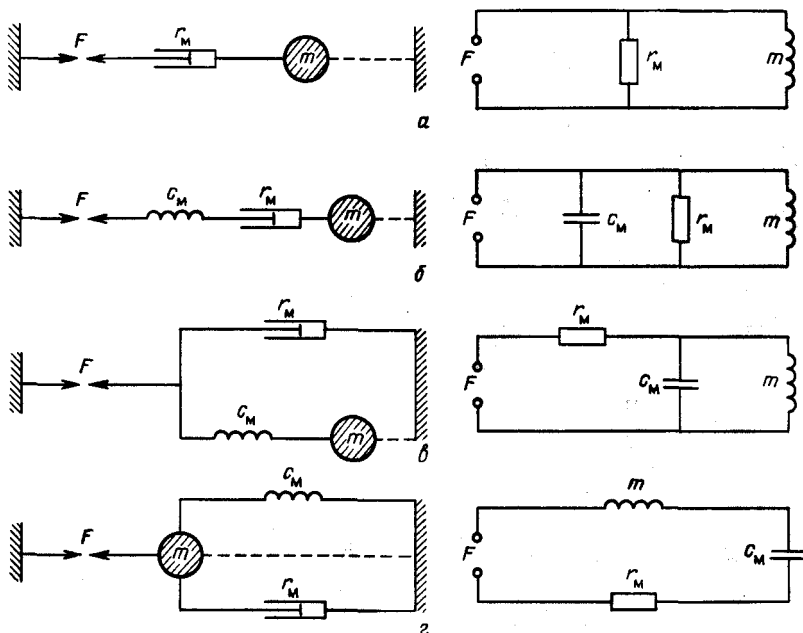
К задаче 8.1.6

Решение. Механические элементы на рисунках *а* и *б* соединены в узел, следовательно, их аналоги в электрической схеме (правая часть рисунка) соединяются последовательно. На рисунке *в* механические элементы соединены в цепочку. В схеме аналога элементы $c_{\text{м}}$ и m соединены параллельно. Полные сопро-

тивления систем *а, б, в* равны соответственно

$$Z = j \frac{\omega^2 / \omega_0^2 - 1}{\omega c_m}, \quad Z = j\omega m + r_m, \quad Z = j \frac{\omega m}{1 - \omega^2 / \omega_0^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{m c_m}.$$

8.1.7. Для систем, изображенных в левой части рисунка, привести схемы электрического аналога.

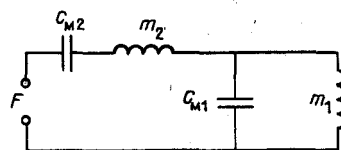
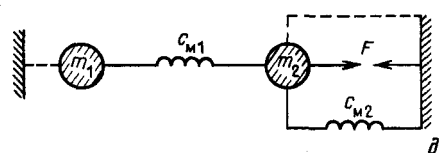
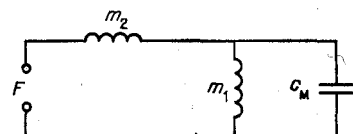
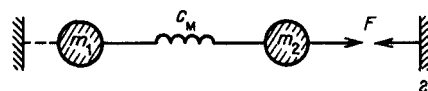
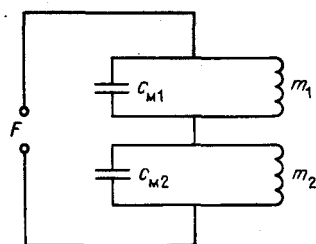
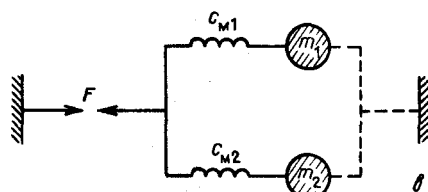
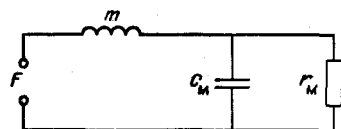
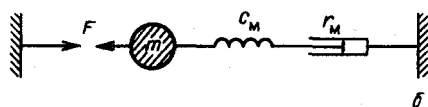
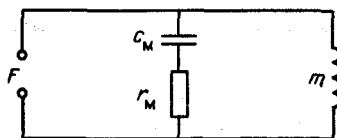
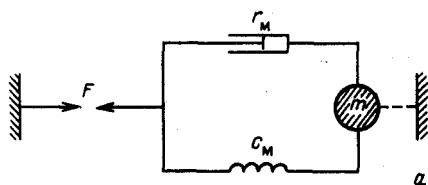


К задаче 8.1.7

Решение. Механические элементы систем на рисунках *а* и *б* соединены в цепочку. На все элементы каждой из систем действует одинаковая сила F . В схеме аналога электрические элементы соединены параллельно. На рисунке *в* — смешанное соединение механических элементов: элементы c_m , m между собой соединены в цепочку, а с остальной частью схемы — в узел. На рисунке *г* все механические элементы соединены в узел и движутся с одинаковыми скоростями, соответственно электрические элементы соединены последовательно.

8.1.8. Для каждой из механических систем, изображенных на рисунке, построить схему электрического аналога и определить ее импеданс.

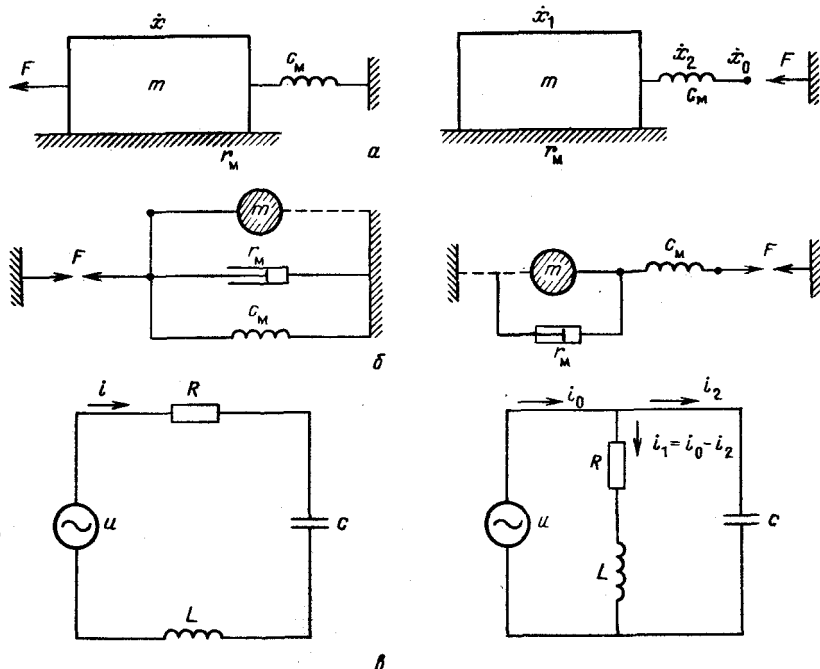
Ответ. Для построения схемы аналога использовать правило замены механических элементов электрическими и правилом сое-



К задаче 8.1.8

динения их. При нахождении импеданса системы применить правила для электрических цепей.

8.1.9. Изобразить механическую систему, показанную на рисунке а, в виде механических символов и нарисовать электрический эквивалент в случае, если: а) сила действует на массу, а один конец пружины закреплен; б) сила действует на свободный конец пружины. Найти полное механическое сопротивление системы, если действующая внешняя сила гармоническая. Описать поведение системы на низких, высоких и резонансной частотах.



К задаче 8.19

Решение. Возможны различные способы внешнего воздействия на колебательную систему. В связи с этим различают последовательный и параллельный механические контуры. В последовательном контуре сила возбуждает массу, а в параллельном сила приложена к пружине. Электрические аналоги и изображение этих систем посредством механических символов приведены на рисунках *в* и *б*. Для нахождения полного механического сопротивления этих систем используем электромеханические аналогии. Механический импеданс Z последовательного контура определяется выражением

$$Z = r_M + j\omega m + \frac{1}{j\omega c_M} = r_M + j\omega_0 m v(\omega), \quad (1)$$

где $v(\omega) = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$, $\omega_0 = (mc_M)^{-1/2}$ — резонансная частота; r_M — активное, $j\omega m$ — инерциальное и $1/(j\omega c_M)$ — упругое сопротивление.

Исследуем зависимость Z от ω , предполагая, что r_M мал вне резонансной области по сравнению с $\omega_0 m v$. Тогда на низких ($\omega \ll \omega_0$) частотах $v \approx -\omega_0/\omega$ и $Z \approx 1/(j\omega c_M)$. Следовательно, импеданс системы и ее поведение полностью определяются упру-

гим сопротивлением. На высоких ($\omega \gg \omega_0$) частотах $\nu \approx \omega/\omega_0$ и выражение (1) принимает вид $Z \approx j\omega m$, т.е. система "управляется" массой. На резонансной частоте $\nu = 0$ и $Z = r_m$, т.е. в области резонанса роль активного механического сопротивления очень существенна. В параллельном контуре две ветви соединены параллельно, полные проводимости их складываются:

$$Y = \frac{1}{r_m + j\omega m} + j\omega c_m,$$

отсюда полное сопротивление равно

$$Z = \frac{r_m + j\omega m}{1 + j\omega c_m(r_m + j\omega m)} = r_m \frac{1 + j\chi Q}{1 - \chi^2 + j\chi/Q},$$

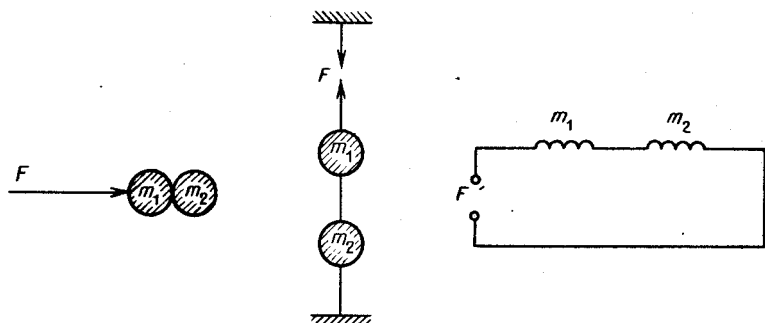
где $Q = m\omega/r_m$ — добротность системы, $\chi = \omega/\omega_0$. Выражение Z более сложное, чем для последовательного контура. Для выявления физического различия между параллельным и последовательным контурами рассмотрим задачу в отсутствие трения. Тогда

$$Z = \frac{j\omega m}{1 - \omega^2 m c_m} = \frac{1}{j\omega c_m} \frac{\chi^2}{\chi^2 - 1} = \frac{\chi}{j\omega c_m}, \quad r_m = 0,$$

где $\chi = \chi^2/(\chi^2 - 1)$ зависит только от отношения частот $\chi = \omega/\omega_0$, $\omega_0 = (m c_m)^{-1/2}$. На низких частотах ($\chi \rightarrow 0$) $Z \approx j\omega m$; на высоких частотах ($\chi \rightarrow \infty$) $Z \approx 1/(j\omega c_m)$, т.е. полное сопротивление контура равно упругому сопротивлению. При $\chi = 1$ $\omega = \omega_0$ и импеданс контура $Z \rightarrow \infty$. Здесь ω_0 — антирезонансная частота контура. Она определяется как частота, на которой ток, проходящий через параллельный контур, принимает минимальное значение. В этом случае токи в индуктивности и емкости взаимно компенсируются

$$i_C + i_L = \frac{u}{1/(j\omega C)} + \frac{u}{j\omega L} = j\omega \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right] = 0,$$

отсюда $\omega_0^2 = 1/(LC)$, т.е. антирезонансная частота выражается так же, как и резонансная частота последовательного контура.

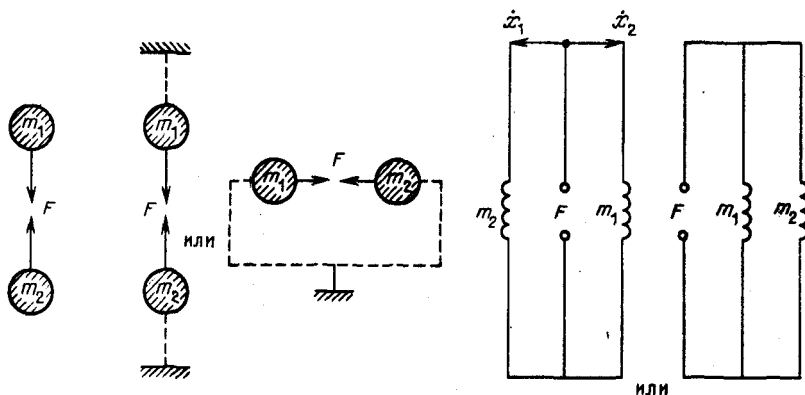


К задаче 8.1.10

8.1.10. Две массы m_1 и m_2 жестко связаны друг с другом (см. рисунок) и движутся вместе под действием силы F . Изобразить схему соединения механических элементов, построить схему электрического аналога и определить импеданс системы.

Ответ. Две массы, жестко связанные друг с другом, представляют собой механическое соединение в узел, $Z = j\omega(m_1 + m_2)$.

8.1.11. Задана система из двух масс m_1 и m_2 и силы F , действующей между ними (см. рисунок). Изобразить схему соеди-

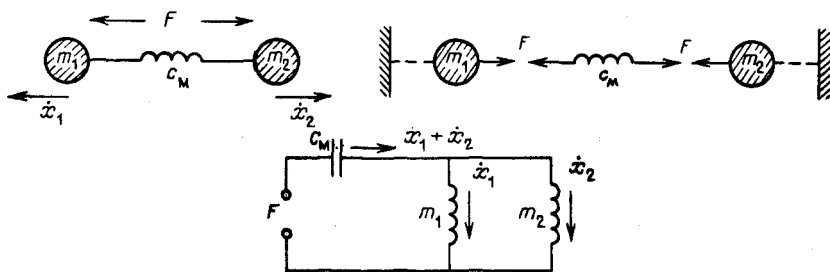


К задаче 8.1.11

нения механических элементов, построить схему электрического аналога и найти импеданс системы.

Ответ. Система представляет собой соединение цепочкой двух масс и силы. Особенность системы в том, что второй конец силы приложен к одному из элементов системы, а не к неподвижной опоре, условное изображение механической системы и ее электрический аналог даны на рисунке, $Z = j\omega m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$.

8.1.12. В качестве излучателя звука часто применяется устройство, которое можно представить в виде масс m_1 и m_2 ,



К задаче 8.1.12

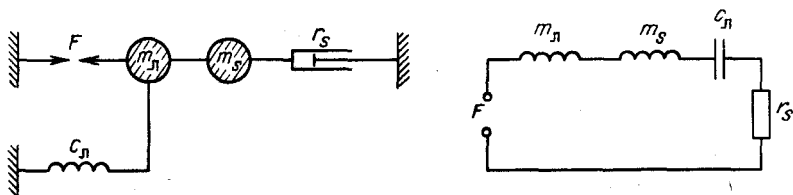
соединенных пружиной (см. рисунок). Например, излучатель Ланжевена: массы — два металлических диска или две диафрагмы, упругость — тонкий кварцевый диск, который служит для возбуждения обоих наклеенных на него металлических дисков. Изобразить систему в виде схемы соединения механических элементов, построить схему электрического аналога и определить импеданс системы и резонансную частоту.

Решение. Массы m_1 и m_2 имеют разные скорости. На оба внешних конца масс силы не действуют, а на оба внутренних конца действует одна и та же сила. Следовательно, механические элементы m_1 , m_2 соединены цепочкой. В электрическом аналоге соответствующие элементы соединены параллельно. Так как часть силы используется на сжатие пружины, а остальная производит ускорение масс, то сила и гибкость пружины соединены в узел, а в схеме электрического аналога — последовательно:

$$Z = \frac{1}{j\omega c_m} + j \frac{\omega m_1 m_2}{m_1 + m_2} = j \left[\frac{\omega m_1 m_2}{m_1 + m_2} - \frac{1}{\omega c_m} \right], \quad \omega_0 = \left[\frac{m_1 + m_2}{c_m m_1 m_2} \right]^{1/2}$$

8.1.13. Составить механическую схему подвижной системы ленточного электродинамического микрофона, построить схему ее электрического аналога и найти ее механическое сопротивление:

Решение. На низких частотах ленточку можно представить системой сосредоточенных параметров: масса m_l и гибкость c_l . Колеблясь под действием падающей на нее звуковой волны (т.е. силы F), ленточка сама излучает звуковые волны. Поэтому в эквивалентную механическую схему (см. рисунок) следует вклю-



К задаче 8.1.13

чить соколеблющуюся массу m_s и активное сопротивление излучения r_s . Сила F приложена к ленточке, колеблющейся вместе с массой m_s . Все элементы системы соединены в узел, поэтому в схеме электрического аналога элементы соединены последовательно. Полное механическое сопротивление подвижной системы:

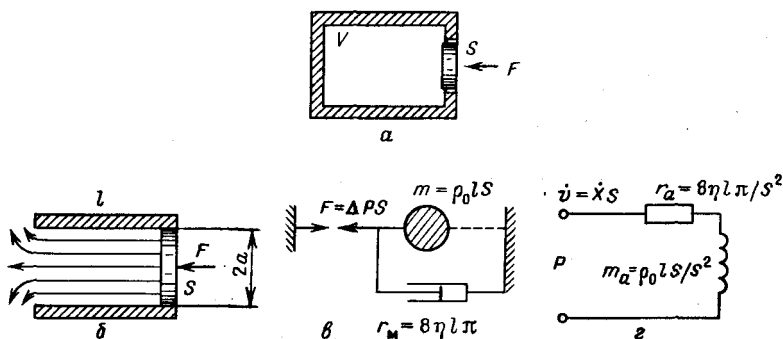
$$Z_m = j\omega(m_l + m_s) + \frac{1}{j\omega c_l} + r_s, \quad |Z_m| = \left[r_s^2 + \left[\omega(m_l + m_s) - \frac{1}{\omega c_l} \right]^2 \right]^{1/2}$$

8.2. Акустические системы и электроакустические аналоги

8.2.1. Показать, что замкнутый воздушный объем подобен пружине, а движущиеся воздушные потоки в открытой трубе — массе. Указать электрические аналоги данных элементов.

Решение. Акустические системы представляют собой системы с распределенными параметрами. Однако на низких частотах их приближенно можно рассматривать как сосредоточенные системы.

Рассмотрим характер реакции, создаваемой воздухом, заключенным в объеме V , при колебаниях невесомого поршня площадью S (см. рисунок а). Атмосферное давление p_0 . Смещение поршня



К задаче 8.2.1

на расстояние x в сторону полости вызывает изменение объема на $V' = -Sx$ и, следовательно, изменение давления в полости на величину p' .

При адиабатическом процессе $(p_0 + p')(V + V')^\gamma = p_0 V^\gamma$ ($\gamma = c_p/c_v$ — отношение удельных теплоемкостей). Отсюда в случае малых колебаний ($V'/V \ll 1$) имеем $p' = -(\gamma p_0/V)V' = -(\gamma p_0 S/V)x$ — избыточное или звуковое давление. Тогда возвращающая сила или реакция воздуха, заключенного в полости,

$$F' = p'S = \frac{\gamma p_0 S^2}{V} x. \quad (1)$$

Пропорциональность между F и x говорит об упругом характере реакции внутри полости. Гибкость воздушного объема определяется как отношение смещения к возвращающей упругой силе $p'S$:

$$c_m = \frac{V}{\gamma p_0 S^2} = \frac{V}{\rho_0 c_0^2 S^2}, \quad (2)$$

где ρ_0 , c_0 — плотность и скорость звука в воздухе.

Другой случай—это колебание воздуха в открытой трубе длиной l и внутренним диаметром $2a$ (см. рисунок б). В отличие от предыдущего случая воздух в трубе не будет деформироваться. "Столб" воздуха смещается как единое целое вместе с поршнем. Характер возникающей при этом реакции обусловлен инерцией воздуха, смещаемого поршнем. Поэтому при вычислении этой реакции следует учесть массу воздуха в трубке

$$m = \rho_0 l S, \quad S = \pi a^2. \quad (3)$$

Кроме того, в колебаниях будет принимать участие воздух, непосредственно примыкающий к открытому концу трубы. Его инерция может быть учтена путем добавления к массе воздуха в трубке так называемой массы соколеблющегося воздуха m_s , которую можно оценить по формуле

$$m_s \approx 2\rho_0 a^3. \quad (4)$$

Следовательно, общая масса воздуха, смещаемого поршнем,

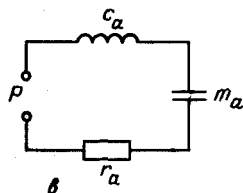
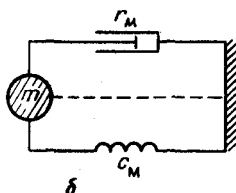
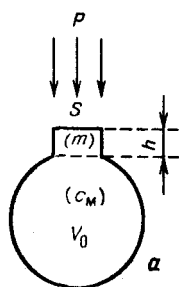
$$m' = m + m_s = \rho_0 l S + 2\rho_0 a^3. \quad (5)$$

В случаях, когда длина трубки больше ее диаметра ($l > 2a$), влиянием массы m_s можно пренебречь: $m_s/m = 2a/\pi l < 1$.

Таким образом, акустические системы можно изображать в виде механических схем с сосредоточенными параметрами и пользоваться для их расчета электромеханическими аналогами. При этом согласно задаче 8.1.1 электрическим аналогом замкнутого воздушного объема является емкость, а движущегося потока воздуха в открытой трубе—индуктивность.

8.2.2. Показать аналогию дифференциальных уравнений, описывающих колебательные процессы в акустических и электрических системах, на примере резонатора Гельмгольца и простого электрического контура.

Решение. Акустические колебательные системы являются частными случаями систем механических. Обычно состояние механической системы характеризуется смещением и колебательной скоростью отдельных материальных точек. Воздействие характеризуется силами, действующими на систему. Акустические же системы удобнее описывать, пользуясь объемными смещениями и объемными скоростями, а внешнее воздействие—давлениями. Покажем это на примере резонатора Гельмгольца, который представляет собой сосуд с коротким горлом, заполненный воздухом (см. рисунок а). Как показано в задаче 8.2.1, при возбуждении



К задаче 8.2.2

резонатора звуковой волной воздух в горле колеблется, как поршень, а объем воздуха в сосуде создает необходимую упругость и обеспечивает возвращающую силу. Таким образом, если размеры резонатора невелики по сравнению с длиной падающей волны, то можно считать, что вся кинетическая энергия сосредоточена в слое воздуха, который движется в горле резонатора, а потенциальная энергия связана с упругой деформацией воздушного объема полости. В этом предположении резонатор является колебательной системой с одной степенью свободы, состоящей из сосредоточенных параметров массой m и упругостью c_M , определяемых формулами (1.2), (1.3), а также активного сопротивления r_M , обусловленного трением воздуха о стенки трубы и потерями колебательной энергии, возникающими вследствие излучения звука открытым концом. Активное сопротивление пристеночного вязкого слоя приблизительно равно сопротивлению Стокса (см. (3.2)).

На рисунке б дано схематическое изображение механической модели резонатора Гельмгольца. Пусть на резонатор действует периодическое внешнее давление

$$p = p_m \exp(j\omega t).$$

В качестве координаты, характеризующей состояние системы, выберем смещение воздуха в горле резонатора x ; тогда уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + r_M\dot{x} + x/c_M = pS.$$

Раскроем значения параметров:

$$\rho_0 S h \ddot{x} + r_M \dot{x} + \gamma \rho_0 S^2 / V_0 = p S.$$

Введем в это уравнение объемные смещение, скорость и ускорение: $v = Sx$, $\dot{v} = S\dot{x}$, $\ddot{v} = S\ddot{x}$. Подставляя в уравнение объемные

переменные v , $\dot{v}$, $\ddot{v}$, имеем (разделив обе части на S)

$$m_a \ddot{v} + r_a \dot{v} + v/c_a = p. \quad (1)$$

Коэффициенты этого уравнения — акустические масса, гибкость и сопротивление:

$$m_a = \frac{\rho_0 h}{S} = \frac{m}{S^2} [\text{кг/м}^4], \quad c_a = \frac{V_0}{\gamma p_0} = c_m S^2 [\text{м}^5/\text{Н}], \quad r_a = \frac{r_m}{S^2} [(\text{Н} \cdot \text{с})/\text{м}^5]. \quad (2)$$

Уравнение (1) аналогично уравнению, описывающему колебательные процессы в электрическом контуре:

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + q/C = u. \quad (3)$$

Вытекающая из сравнения уравнений (1) и (3) аналогия между акустическими и электрическими величинами, приведена в таблице. Таким образом, аналогом резонатора Гельмгольца является электрический контур с последовательно соединенными параметрами m_a , c_a , r_a . Установленная связь позволяет применять метод аналогий для анализа и синтеза сложных акустических систем.

Таблица к задаче 8.2.2

Акустическая величина

Электрическая величина

$v = xS$ — объемное смещение
 $\dot{v} = \dot{x}S$ — объемная скорость
 $\ddot{v} = \ddot{x}S$ — объемное ускорение

p — давление

$m_a = m/S^2$ — акустическая масса

$c_a = c_m S^2$ — акустическая гибкость

$r_a = r_m/S^2$ — акустическое сопротивление

$Z_a = r_a + j\omega m_a + 1/(j\omega c_a)$ — полное акустическое сопротивление

$j\omega m_a$ — инерциальное

акустическое сопротивление

$1/(j\omega c_a)$ — упругое

акустическое сопротивление

q — заряд

$i = \dot{q}$ — ток

di/dt — скорость изменения тока

u — напряжение

L — индуктивность

C — емкость

R — активное электрическое сопротивление

$Z = R + j\omega L + 1/(j\omega C)$ — полное электрическое сопротивление

$j\omega L$ — индуктивное сопротивление

$1/(j\omega C)$ — емкостное сопротивление

8.2.3. Найти механический и электрический аналоги короткой узкой трубки. Для потока газа через трубку выполняется закон Пуазейля.

Решение. Если выполняется закон Пуазейля, то

$$\Delta p = \frac{8\eta l \pi}{S^2} \dot{v}, \quad (1)$$

где η — вязкость газа, l — длина трубки, S — площадь поперечного сечения; $\dot{v}$ — объемная скорость газа. Формула (1) подобна закону Ома для участка электрической цепи, содержащего активное сопротивление R : $u = Ri$. Отсюда следует, что электрическим аналогом величины $8\eta l \pi / S^2$ является активное сопротивление R , и согласно задаче 8.2.2 она является акустическим сопротивлением трубки, которое обусловлено сопротивлением пристеночного вязкого слоя. Механическое же сопротивление трубки легко определяется (см. (2.2)):

$$r_m = r_a S^2 = 8\eta l \pi. \quad (2)$$

Если в трубке под действием звукового давления образуется ускоренный поток газа, то согласно второму закону Ньютона

$$\Delta p = \frac{\rho_0 l S}{S^2} \frac{d\dot{v}}{dt}, \quad (3)$$

где $d\dot{v}/dt$ — акустическое ускорение, ρ_0 — плотность газа, $\rho_0 l S / S^2 = m_a$ — акустическая масса. Выражение (3) сходно с формулой для закона Фарадея

$$u = L \frac{di}{dt}. \quad (4)$$

Поэтому величина $\rho_0 l S / S^2 = m_a$ является акустическим аналогом индуктивности. А механическое инерциальное сопротивление трубки определяется массой $m = m_a S^2 = \rho_0 l S$. Таким образом, механический аналог потока газа через короткую узкую трубку можно представить в виде соединения сосредоточенных параметров m и r_m в узел (см. рисунок в к задаче 8.2.1), а электрический аналог — в виде последовательного соединения элементов r_a и m_a (см. рисунок г к задаче 8.2.1). В общем случае при излучении звука частотой ω открытым концом помимо инерции воздуха в трубке и активного сопротивления трения необходимо учитывать соколеблющуюся массу (см. (1.4)) и сопротивление излучения r_s . На низких частотах r_s можно вычислить по формуле (c — скорость звука в газе)

$$r_s = \frac{\rho_0}{4\pi c_0} \omega^2 S^2 = \frac{\pi \rho_0 c_0 S^2}{\lambda^2}. \quad (5)$$

8.2.4. Рассчитать коэффициент гибкости замкнутого воздушного объема, заключенного в цилиндрической трубе сечением $7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, длиной $7 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Ответ. Гибкость воздушного объема в трубе $c_M = 6,7 \cdot 10^{-4} \text{ м/Н}$.

8.2.5. Воздух в открытой короткой трубе возбуждается поршнем. Рассчитать массу соколеблющегося воздуха, если длина трубы $l = 0,20 \text{ м}$, внутренний диаметр $2a = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Сравнить соколеблющуюся массу с массой воздуха в трубе. Плотность воздуха $\rho_0 = 1,3 \text{ кг/м}^3$.

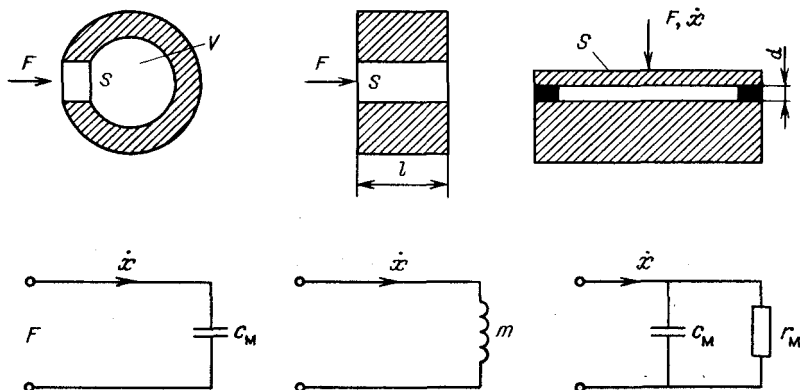
Ответ. Масса соколеблющегося воздуха $m_s \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ кг}$. Масса воздуха в трубе больше соколеблющейся массы в 15,7 раза.

8.2.6. Определить активное сопротивление воздуха в трубе, описанной в задаче 8.2.5, на частоте $f = 1000 \text{ Гц}$. Считать, что сопротивление трения обусловлено вязкими потерями вблизи стенок трубы и выполняется закон Пуазейля. Вязкость $\eta = 0,19 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$, скорость звука $c_0 = 340 \text{ м/с}$, плотность $\rho_0 = 1,3 \text{ кг/м}^3$.

Ответ. $r_M = 8\eta/\pi + \frac{\rho_0}{4\pi c_0} \omega^2 S^2 = 0,019 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$.

8.2.7. Найти полное акустическое сопротивление воздуха в короткой открытой цилиндрической трубке на частоте 500 Гц. Длина трубки $l = 0,10 \text{ м}$, внутренний радиус $a = 0,01 \text{ м}$. Плотность воздуха $\rho_0 = 1,3 \text{ кг/м}^3$, вязкость $\eta = 0,19 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$, скорость звука $c_0 = 340 \text{ м/с}$.

Ответ. Полное акустическое сопротивление воздуха в трубе $|Z_a| = |Z_M|/S^2 = 1,4 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{с/м}^5$.



К задаче 8.2.8

8.2.8. Определить механические, акустические импедансы и нарисовать электрические аналоговые схемы акустических элементов, приведенных в верхней части рисунка: 1) замкнутый объем V с горлом площадью $S = \pi r^2$ без учета сопротивления излучения; 2) труба с поперечным сечением $S = \pi r^2$ и длиной $l \ll \lambda$ в толстой и широкой стене без учета потерь; 3) слой воздуха между двумя параллельными жесткими дисками площадью S . Один диск колеблется по своей оси под действием силы F . Толщина слоя $d < \lambda$. Радиальное движение воздуха отсутствует.

Ответ. Аналоговые схемы акустических элементов приведены в нижней части рисунка. Их импедансы равны

$$1) Z_M = \frac{1}{j\omega c_M} = \frac{\rho_0 c_0^2 S^2}{j\omega V}, \quad Z_\alpha = \frac{\rho_0 c_0^2}{j\omega V};$$

$$2) Z_M = j\omega m = j\omega \pi \rho_0 r^2 l, \quad Z_\alpha = \frac{j\omega \rho_0 l}{\pi r^2};$$

$$3) Z_M = \frac{1}{j\omega c_M} = \frac{\rho_0 c_0^2 S}{j\omega d}, \quad Z_\alpha = \frac{\rho_0 c_0^2}{j\omega V}.$$

Для жестких дисков $r_M = \infty$.

8.2.9. На рисунке б к задаче 8.2.2 дано схематическое изображение резонатора Гельмгольца. Построить схему электрического аналога и определить собственную частоту колебаний резонатора, заполненного воздухом. Объем сосуда $V_0 = 10^{-4} \text{ м}^3$, высота горла $h = 0,02 \text{ м}$, площадь поперечного сечения горла $S = 0,0012 \text{ м}^2$. Скорость звука $c_0 = 340 \text{ м/с}$ для температуры воздуха 15°С и давления 10^5 Па .

Ответ. Схематическое изображение модели резонатора приведено на рисунке б к задаче 8.2.2. Элементы системы соединены в узел, а в электрическом аналоге — последовательно (см. рисунок в). Резонансная частота $f_0 = (c_0/2\pi)(S/hV_0)^{1/2} \approx 1,3 \text{ кГц}$.

8.2.10. Определить скорость колебаний воздуха в горле резонатора Гельмгольца, если на него действует внешнее давление падающей звуковой волны $p = p_m \exp(j\omega t)$ с частотой, равной резонансной частоте резонатора. Амплитуда давления $p_m = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Па}$, длина горла резонатора $0,07 \text{ м}$, радиус его $0,005 \text{ м}$, объем сосуда 10^{-4} м^3 . Скорость звука $c_0 = 340 \text{ м/с}$, вязкость $\eta = 1,19 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$, плотность $\rho_0 = 1,3 \text{ кг/м}^3$.

Решение. Скорость колебаний воздуха в горле

$$\dot{x} = \frac{F}{|Z_M|} = \frac{p_m S}{[r_M^2 + (\omega m - 1/\omega c)^2]^{1/2}}.$$

На резонансной частоте $\omega m - 1/(\omega c) = 0$ и

$$\dot{x} = \frac{p_m S}{r_m} = \frac{p_m S}{r_\tau + r_s} = \frac{p_m S}{8\pi\eta h + (\rho_0/4\pi c_0)\omega^2 S^2},$$

но $\omega = \omega_0 = c_0(S/V_0 h)^{1/2}$, следовательно,

$$\dot{x} = \frac{p_m S}{8\pi\eta h + (\rho_0 c_0/4\pi) S^3/V_0 h} = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ м/с.}$$

8.2.11. Определить резонансную частоту резонатора Гельмгольца и коэффициент усиления его на резонансной частоте, если резонатор заполнен водой. Скорость звука в воде $c_0 = 1430$ м/с, плотность $\rho_0 = 1000$ кг/м³, вязкость $\eta = 1,1 \times 10^{-3}$ Па·с. Высота горла $h = 0,04$ м, площадь поперечного сечения горла $S = 0,0012$ м², объем сосуда $V_0 = 0,45 \cdot 10^{-3}$ м³. Считать, что активное сопротивление r_a воды в горле резонатора обусловлено вязким трением.

Решение. Усиление резонатора характеризуется отношением максимального звукового давления в полости p'_m к максимальному значению давления в падающей на него звуковой волне p_m :

$$M = \frac{p'_m}{p_m} = \frac{F'/S}{p_m}. \quad (1)$$

Учитывая (1.1), (1.2), получаем

$$M = v_m/p_m c_a, \quad (2)$$

где $c_a = V_0/(\rho_0 c_0^2)$ — акустическая гибкость полости резонатора,

$$v_m = \dot{v}_m/\omega = p_m/(\omega Z_a), \quad (3)$$

где v_m , $\dot{v}_m$ — объемное смещение, объемная скорость, Z_a — акустический импеданс:

$$Z_a = r_a + j(\omega m_a - 1/\omega c_a), \quad (4)$$

r_a — активное акустическое сопротивление в горле резонатора, обусловленное вязким трением (3.2), $m_a = \rho_0 h/S$ — его акустическая масса. Подставляем (3) и (4) в (2) и введем обозначение $\delta = r_a/(2m_a)$ — коэффициент затухания собственных колебаний системы. Теперь (2) можно записать в виде

$$M = \left[(2\delta\omega/\omega_0^2)^2 + (1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 \right]^{-1/2}, \quad (5)$$

где $\omega_0 = (m_a c_a)^{-1/2}$ — собственная частота резонатора, $f_0 \approx 1,9$ кГц. Из (5) следует, что на резонансной частоте $\omega = \omega_0$ усиление максимально и равно $M = \omega_0/2\delta = f_0 \rho_0 S/4\eta = 5 \cdot 10^5$.

8.2.12. Во сколько раз максимальное давление в полости резонатора больше максимального (амплитудного) значения давления в падающей на него звуковой волне, если резонатор,

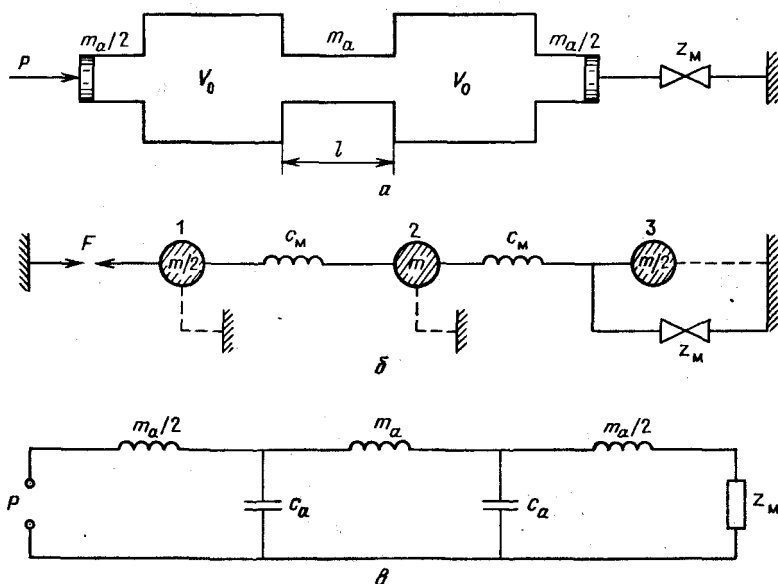
описанный в задаче 8.2.11, заполнен воздухом? Частота падающей волны совпадает с резонансной частотой резонатора. Сравнить резонансные частоты и добротности в случае заполнения его водой и воздухом. Скорость звука в воздухе $c_0 = 340$ м/с, плотность $\rho_0 = 1,3$ кг/м³, вязкость $\eta = 1,9 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

Ответ. Давление в полости резонатора превосходит звуковое давление в падающей волне в $9 \cdot 10^3$ раз. Резонансная частота колебаний в воде в 4,2 раза больше, чем в воздухе, а добротность резонатора с водой в 56 раз превосходит добротность резонатора, заполненного воздухом.

8.2.13. Рассчитать модуль входного акустического импеданса резонатора Гельмгольца на частоте $f = 800$ Гц и на резонансной частоте. Акустическое сопротивление в горле резонатора $r_a = 0,03$ кг/(м⁴·с), плотность газа $\rho_0 = 1,2$ кг/м³. Объем сосуда $V_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ м³, радиус цилиндрического горла резонатора $a = 0,01$ м, длина $h = 0,015$ м. Скорость звука $c_0 = 340$ м/с.

Ответ. Резонансная частота $f_0 = 553$ Гц, входной акустический импеданс $|Z_a| = 3 \cdot 10^{-2}$ кг/(м⁴·с) на резонансной частоте и $|Z_a| = 1,5 \cdot 10^5$ кг/(м⁴·с) на частоте $f = 800$ Гц.

8.2.14. Найти граничные частоты и характеристическое сопротивление акустического фильтра, показанного на рисунке а.



К задаче 8.2.14

Объем воздушной полости $V_0 = 10^{-4} \text{ м}^3$, длина и площадь поперечного сечения ответвлений $l = 0,015 \text{ м}$ и $S = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. Построить схему электрического аналога. Как изменится граничная частота фильтра при увеличении объема V_0 в 10 раз?

Решение. Фильтрами называются системы, обладающие свойством пропускать сигналы одних частот (или в некоторой полосе частот) и задерживать колебания других. Теория электрических фильтров хорошо разработана. Поэтому для изучения механических и акустических систем, обладающих сходными свойствами, используется метод электромеханических и электроакустических аналогий.

Механическое изображение фильтра показано на рисунке б. Сделаем оценку поведения системы в предельных случаях. Пусть частота внешней силы F низкая, так что $\omega t \ll 1/(\omega c_m)$. Тогда инерционным сопротивлением масс можно пренебречь, а цепочка пружин, незначительно деформированных, образует один жесткий стержень, хорошо передающий колебания из узла 1 в узел 3. В области высоких частот, когда $\omega t \gg 1/(\omega c_m)$, большое инерционное сопротивление масс как бы "придерживает" соответствующий полюс пружины, в результате чего пружина деформируется и колебания из узла 1 в узел 3 передаются существенно ослабленными. Таким образом, система ведет себя как фильтр нижних частот. Электрический аналог этой системы представлен на рисунке в. Он представляет собой двухзвенный Т-образный фильтр. Последовательный и параллельный импедансы акустического фильтра равны

$$Z_1 = j\omega m_a, \quad Z_2 = 1/(j\omega c_a). \quad (1)$$

В теории электрических фильтров показано, что для фильтра полоса пропускания определяется следующим условием:

$$0 \geq Z_1/Z_2 \geq -4, \quad (2)$$

где Z_1 — импеданс в последовательной ветви, Z_2 — в параллельной. Для определения граничных частот полосы пропускания фильтра запишем условие (2) в виде двух уравнений:

$$Z_1(\omega) = 0, \quad Z_1(\omega) + 4 Z_2(\omega) = 0. \quad (3)$$

Применяя условие (3) к заданному фильтру, получим

$$Z_1(\omega) = j\omega m_a = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad j\omega m_a + \frac{4}{j\omega c_a} = 0, \quad \omega_2 = 2(m_a c_a)^{-1/2} = 2\omega_0, \quad (4)$$

следовательно, $\omega_2 = 2c_0(S/V_0)^{1/2}$, $f_2 = 1,53$ кГц. Таким образом, граничные частоты акустического фильтра $f_1 = 0$, $f_2 = 1,53$ кГц. Из (4) видно, что при увеличении объема граничная частота f_2 уменьшается как $V_0^{-1/2}$. При увеличении V_0 в 10 раз $f_2 = 0,48$ кГц.

Характеристическим сопротивлением фильтра называется сопротивление Z_0 , при включении которого на выход фильтра входное сопротивление последнего также равно Z_0 . Для фильтра, составленного из Т-образных звеньев, сопротивление определяется выражением

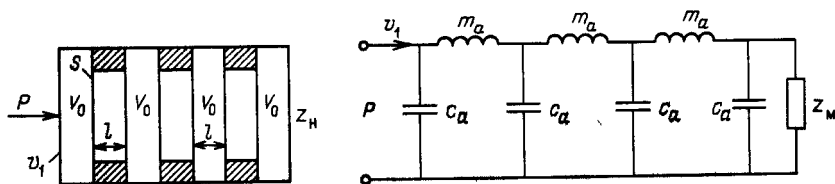
$$Z_0^2 = Z_1 Z_2 (1 + Z_1/4Z_2). \quad (5)$$

Подставив в (5) значения Z_1 и Z_2 из (1) с учетом (4), получим

$$Z_0 = \left[\frac{m_a}{c_a} \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \right] \right]^{1/2}.$$

В большей части полосы прозрачности, пока $\omega < \omega_2$, характеристическое сопротивление фильтра равно активной величине $r_0 = (m_a/c_a)^{1/2}$, совпадающей с сопротивлением простой колебательной системы, составленной из m_a и c_a . На граничной частоте $\omega = \omega_2$ сопротивление обращается в нуль.

8.2.15. Акустический фильтр образован из отрезков широких и узких трубок, соединенных между собой последовательно (см. рисунок). Определить массу и гибкость воздуха в трубах и



К задаче 8.2.15

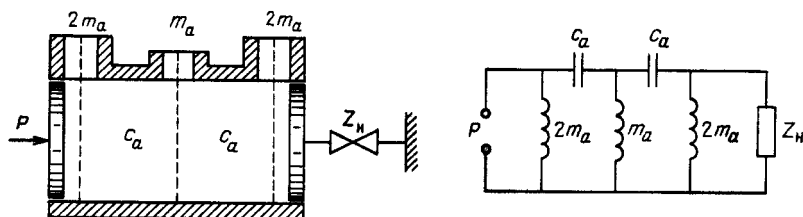
рассчитать граничные частоты фильтра. Нарисовать схему электрического аналога. Задаются размеры трубок: $V_0 = 1$ м³, $l = 25$ см, $S = 900$ см². Скорость звука $c_0 = 344$ м/с.

Ответ. Фильтр состоит из трех Т-образных звеньев. Масса сосредоточена в узких трубках и равна $m = 29,2$ г. Гибкость реализуется в замкнутом объеме V_0 и равна $c_m = 8 \cdot 10^{-4}$ м/Н. Так как воздух сжимаем, колебательная скорость частиц v_1 вблизи поршня будет отличаться от скорости частиц в узкой трубке, следовательно, гибкость воздушных объемов в схеме

аналога подключаем параллельно (см. рисунок). Граничные частоты определяются уравнениями (14.3): $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 2\omega_0$, т.е. заданный акустический фильтр — фильтр нижних частот:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = \frac{c_0}{\pi} \left[\frac{S}{4V_0} \right]^{1/2} = 65,7 \text{ Гц.}$$

8.2.16. На рисунке приведена схема акустического фильтра, представляющего собой трубу с ответвлениями в виде трубок с открытыми концами. Построить схему электрического аналога, определить граничные частоты и характеристическое сопротив-



К задаче 8 2 16

ление фильтра, если труба заполнена водой (скорость звука $c = 1430$ м/с). Длина и площадь поперечного сечения ответвления равны $l = 1$ см и $S = 10$ см², объем каждой полости, на которые разделяется труба, $V_0 = 100$ см³. Как изменятся граничные частоты фильтра, если трубу заполнить воздухом ($c_0 = 330$ м/с)?

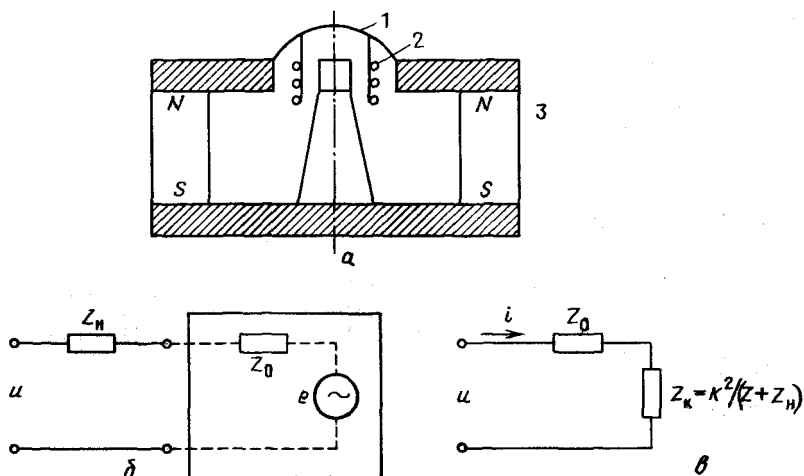
Решение. Рассмотрим поведение системы на предельных частотах. В области низких частот колебаний излучающего поршня инерционное сопротивление масс в ответвлениях ωm_a мало и большая часть потока жидкости (воздуха), вытесняемой излучающим поршнем, выходит наружу через боковые отводы. При этом среда вблизи приемного поршня не деформируется. При высокочастотных колебаниях, когда $\omega m_a \gg 1/\omega c_a$, боковые отводы оказываются "закупоренными" и весь поток устремляется к приемному поршню, создавая перед ним сжатие или разрежение среды. Таким образом, устройство, изображенное на рисунке, обладает свойством фильтра верхних частот. Электрический аналог его представляет собой П-образный фильтр из двух звеньев (см. рисунок), у которого $Z_1 = 1/(j\omega c_a)$, $Z_2 = j\omega m_a$. Используя (14.3), определяем граничные частоты акустического фильтра:

$$\omega_n = \frac{1}{2} (m_a c_a)^{-1/2} = \frac{\omega_0}{2} = \frac{c_0}{2} \left[\frac{S}{4V_0} \right]^{1/2}, \quad f_n = 3,6 \text{ кГц}, \quad f_v = \infty,$$

Если трубу заполнить воздухом, то изменится только нижняя граничная частота: $f_n = 837$ Гц. Известно, что характеристическое сопротивление для П-образного фильтра определяется выражением $Z_0 = [Z_1 Z_2 / (1 + Z_1 / Z_2)]^{1/2}$ и равно для заданного фильтра $Z_0 = [(m_a / c_a) / (1 - \omega_n^2 / \omega^2)]^{1/2}$. При $\omega = \omega_n$ сопротивление принимает бесконечное значение.

8.3. Электроакустические преобразователи

8.3.1. Построить схему электрического аналога электродинамического преобразователя. Схематически его устройство изображено на рисунке а. Подвижная система состоит из диафрагмы 1 и звуковой катушки 2. Магнитная система 3 создает равномерное радиальное поле в зазоре.



К задаче 8.3.1

Решение. Электродинамические преобразователи предназначены для излучения и приема сигналов. Они выполняют преобразование акустической энергии в электрическую (приемники) и электрической энергии в акустическую (излучатели). Можно рассматривать подвижную часть преобразователя как механическую систему с сосредоточенными параметрами: r — сопротивление диссипативных потерь в системе подвеса и в конусе (сопротивление излучения сюда не входит), m — масса, учитывающая инерционные свойства всей подвижной системы (не включает в себя присоединенную соколеблющуюся массу), c_m — гибкость системы (относится ко всей системе).

Построим схему-аналог преобразователя. Составим уравнения для электрической и механической сторон. Пусть внешняя электрическая цепь (см. рисунок б) состоит из источника напряжения u и сопротивления Z_n . Электрическое сопротивление катушки в отсутствие постоянного поля магнита равно Z_0 . Однако при движении катушки в магнитном поле в ней индуцируется ЭДС, препятствующая прохождению тока: $e = -Blv = -Kv$, где B — индукция магнитного поля, l — длина проводника катушки, v — скорость движения катушки. Здесь

$$K = (e/v)_{i=0} = Bl \quad (1)$$

— коэффициент электромеханической связи. Следовательно, уравнение для напряжений в электрической части преобразователя с учетом противоэлектродвижущей силы имеет вид

$$u = (Z_n + Z_0)i - Kv = Z_3 i - Kv, \quad (2)$$

где i — сила тока. Напишем теперь уравнение равновесия сил на механической стороне преобразователя. Если на катушку подано напряжение, то благодаря наличию магнитного поля, которое взаимодействует с токами, протекающими по катушке, на нее действует сила $F' = Bli = Ki$. Допустим, что к катушке также приложена извне сторонняя сила F . Подвижная система преобразователя, находясь под действием сил F' и F , будет колебаться с некоторой скоростью v . Сторонняя сила уравнивается силой F' и силами, возникающими благодаря сопротивлению подвижной системы z и z_n механической нагрузки. Поэтому для механической части преобразователя можно написать уравнение

$$F = Ki + (z + z_n)v = Ki + z_0 v, \quad (3)$$

где $z_0 = z + z_n$. Уравнения (2), (3) связывают механические величины F и v , действующие на механической стороне преобразователя, с электрическими i и u , действующими на его электрической стороне. Если преобразователь работает в качестве двигателя (излучателя), преобразующего электрическую энергию в механическую, то внешняя сила $F = 0$ и

$$u = Z_3 i - Kv, \quad 0 = Ki + z_0 v. \quad (4)$$

Из (4), исключая v , находим полное электрическое сопротивление преобразователя:

$$Z = u/i = Z_3 + K^2/z_0 = Z_3 + Z_k. \quad (5)$$

Из (5) видно, что полное сопротивление состоит из двух частей: электрического сопротивления внешней цепи в сумме с собственным сопротивлением обмотки Z_3 и некоторого дополнительного сопротивления, называемого внесенным: $Z_3 = K^2/z_0 = = K^2/(z+z_n)$. Последнее появляется в результате реакции механической стороны преобразователя на его электрическую сторону. При $z_n = \infty$ $Z_k = 0$ и нет преобразования энергии. Из (5) ясно, что электрическая схема аналога проста (см. рисунок в) и состоит из двух последовательно соединенных сопротивлений.

Аналогичным образом можно определить эквивалентную схему преобразователя-генератора (приемника). Так как на механической стороне приложена сила F , а на электрической стороне замкнуты зажимы источника напряжения, т.е. $u = 0$, то

$$z_m = F/v = (z+z_n) + K^2/Z_3. \quad (6)$$

Выражение (6) аналогично (5). Здесь

$$z_k = K^2/Z_3 \quad (7)$$

— добавочное механическое сопротивление, возникающее в результате воздействия электрической стороны на механическую. Если зажимы замкнуты накоротко, то Z_3 равно Z_0 (собственному электрическому сопротивлению преобразователя) и

$$z_k = K^2/Z_0. \quad (8)$$

8.3.2. Составить схему электрического эквивалента диффузорного электродинамического излучателя.

Решение. В диффузорном громкоговорителе (называемом также громкоговорителем непосредственного излучения) колебания подвижной системы излучаются непосредственно в окружающую среду. Преобразователь, работающий в режиме излучения, является преобразователем-двигателем, для которого электрический эквивалент имеет вид, представленный на рисунке в к задаче

8.3.1. Для него имеем

$$u = i(Z_0 + Z_k) = i[Z_0 + K^2/(z+z_n)], \quad (1)$$

где u — напряжение, подаваемое на звуковую катушку, i — ток, протекающий по звуковой катушке, z — собственное механическое сопротивление системы, z_n — механическое сопротивление нагрузки преобразователя, Z_0 — собственное электрическое сопротивление заторможенного преобразователя (т.е. в режиме тор-

можения механической стороны, когда скорость ее $v = 0$),

$$Z_0 = R + j\omega L, \quad (2)$$

где R и L — собственное активное сопротивление и индуктивность катушки,

$$z = j\omega m + 1/(j\omega c_m), \quad (3)$$

где m — масса подвижной системы, c_m — результирующая гибкость подвеса подвижной системы (активным сопротивлением потерь на трение пренебрегаем), z_H в случае излучателя есть сопротивление излучения:

$$z_H = z_s = r_s + j\omega m_s, \quad (4)$$

где r_s и m_s — сопротивление излучения и присоединенная

масса, для преобразователя индуктивного типа K определяется соотношением (1.1.1). Внесенное сопротивление

$$Z_K = \frac{K^2}{z + z_H} = \frac{(Bl)^2}{r_s + j\omega(m + m_s) + 1/(j\omega c_m)}. \quad (5)$$

Для составления электрического аналога определим полное электрическое сопротивление работающего преобразователя:

$$Z' = R + j\omega L + \frac{(Bl)^2}{r_s + j\omega(m + m_s) + 1/(j\omega c_m)}. \quad (6)$$

Для наглядности запишем не внесенное сопротивление, а внесенную проводимость

$$X_K = \frac{1}{Z_K} = \frac{r_s}{(Bl)^2} + j\omega \frac{m + m_s}{(Bl)^2} + \frac{1}{j\omega c_m (Bl)^2} = \frac{1}{R'} + j\omega C' + \frac{1}{j\omega L'}, \quad (7)$$

где

$$R' = \frac{(Bl)^2}{r_s}, \quad C' = \frac{m + m_s}{(Bl)^2}, \quad L' = (Bl)^2 c_m. \quad (8)$$

Таким образом, внесенная проводимость представляет собой сумму трех проводимостей, т.е. схематически X_K можно представить как параллельное соединение трех элементов — R' , C' и L' . Следовательно, электрическая схема имеет вид, представленный на рисунке.

8.3.3. Найти входное сопротивление Z' работающего электродинамического громкоговорителя непосредственного излучения. Нарисовать зависимость $Z'(\omega)$ и объяснить ход кривой.

Решение. Полное электрическое сопротивление работающего преобразователя определяется выражением (2.6). Введем сле-

дующие параметры:

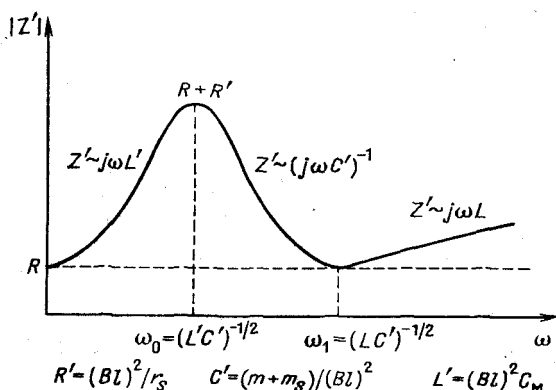
$$\omega_0^2 = \frac{1}{L' C'} = \frac{1}{m c_m}, \quad (1)$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{C'} \left[\frac{1}{L'} + \frac{1}{L} \right] = \omega_0^2 + \frac{1}{L C'}, \quad \omega_1^2 = \frac{1}{L C'}. \quad (2)$$

Тогда, выделяя действительную и мнимую части, получим

$$Z' = R + \frac{R'}{1 + (\omega C' R')^2 (1 - \omega_0^2 / \omega^2)^2} + j\omega L \frac{1 + (\omega C' R')^2 (1 - \omega_0^2 / \omega^2) (1 - \omega_2^2 / \omega^2)}{1 + (\omega C' R')^2 (1 - \omega_0^2 / \omega^2)^2} = X + jY. \quad (3)$$

Исследуем частотную зависимость модуля входного сопротивления $|Z'| = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ (см. рисунок). На постоянном токе ($f = 0$) преобразования энергии нет, $Z' = R$. При $\omega = \omega_0$ наступа-



К задаче 8.3.3

ет резонанс параллельного контура, составленного из L' и C' (см. рисунок к задаче 8.3.2); ω_0 называется частотой механического резонанса), и

$$|Z'|_{\max} = [(R + R')^2 + (\omega_0 L)^2]^{1/2} \approx R + R',$$

так как $\omega_0 L \ll R + R'$. При $\omega < \omega_0$ система управляется гибкостью подвеса.

Величина $|Z'|$ определяется в основном внесенной индуктивностью $L' = (BL)^2 c_m$, но $Z' \sim j\omega L'$, т.е. Z' увеличивается с ростом частоты. Когда $\omega = \omega_1$, наступает второй резонанс системы. На частоте $\omega = \omega_1$, называемой частотой электромеханического резонанса,

$$|Z'|_{\min} \approx R + R' / [1 + (\omega_1 C' R')^2 (1 - \omega_0^2 / \omega_1^2)^2] \approx R.$$

При $\omega_0 < \omega < \omega_1$ реактивное сопротивление имеет емкостный характер:

$$Z' \sim 1/(j\omega C'), \quad (4)$$

Z' уменьшается с частотой. В области $\omega > \omega_1$ реактивное сопротивление снова приобретает индуктивный характер: $Z' \sim j\omega L$, Z' растет с частотой.

8.3.4. Определить чувствительность электродинамического громкоговорителя непосредственного излучения в той области частот, где она частотнонезависима, при следующих данных: магнитная индукция в зазоре $B = 1 \text{ Вб/м}^2$, длина провода звуковой катушки $l = 10 \text{ м}$, масса диафрагмы и масса звуковой катушки $m = 12 \text{ г}$, диаметр конуса $2a = 30 \text{ см}$, гибкость системы подвеса $c_m = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м/Н}$, скорость звука в воздухе $c_0 = 330 \text{ м/с}$, плотность $\rho_0 = 1,3 \text{ кг/м}^3$. Оценить диапазон частот, в котором чувствительность от частоты не зависит.

Решение. Под чувствительностью излучателя понимают отношение развиваемого им на расстоянии $r_0 = 1 \text{ м}$ по его оси звукового давления p к подводимому к нему току или напряжению:

$$S_u = |p/i|_{r_0} = 1 \text{ м}. \quad (1)$$

Звуковое давление на оси излучателя на расстоянии r_0 в дальней зоне в случае малых размеров излучателя по сравнению с длиной волны может быть определено как

$$p^2 = v^2 r_s \rho_0 c_0 / (4\pi r_0^2), \quad (2)$$

где v — колебательная скорость излучающей поверхности, ρ_0 и c_0 — плотность воздуха и скорость звука в нем, r_s — сопротивление излучения. Подставив (2) в (1) и учтя значение отношения v/i , согласно (1.1), (1.3), (1.4) получим

$$|S_u| = \frac{Bl}{|z + z_n|} \left[\frac{r_s \rho_0 c_0}{4\pi r_0^2} \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Из всех величин, входящих в (3), от частоты зависят только $|z + z_n|$ и r_s . Если $2a < \lambda$ и излучатель помещен в "бесконечный" экран (или ящик), то r_s можно оценить как активное сопротивление круглого поршневого излучателя:

$$r_s = (2\pi \rho_0 c_0 S^2) / \lambda^2, \quad (4)$$

где a — характерный размер диффузора (по величине порядка радиуса его основания), S — излучающая площадь диффузора. В

дальнейшем считаем ее равной площади его основания. Следовательно, $r_s \sim \omega^2$. Если громкоговоритель излучает обеими сторонами, то активное сопротивление излучения аналогично активному сопротивлению круглой поршневой дипольной антенны и $r_s \sim \omega^4$. Из (2.3), (2.4) следует, что

$$z + z_n = j\omega(m + m_s) + 1/(j\omega c_m) + r_s, \quad (5)$$

m_s — соколеблющаяся масса. Величина r_s мала по сравнению с ωm_s (оценку r_s и ωm_s см. в задаче 8.3.6), и лишь вблизи резонанса ($\omega \approx \omega_0$) она влияет на $|z + z_n|$ в знаменателе (3). Поэтому на частотах $\omega > \omega_0$ $|z + z_n| \sim \omega$, а при $\omega < \omega_0$ $|z + z_n| \sim 1/\omega$. Следовательно, чтобы чувствительность S_u не зависела от частоты, громкоговоритель должен быть помещен в "бесконечный экран" или закрытый ящик и работать в области частот выше механического резонанса диффузора. Тогда при $\omega > \omega_0$

$$|z + z_n| \approx \omega(m + m_s). \quad (6)$$

Подставляя (4) и (6) в (3), получим

$$S_u \approx \rho_0 SBl [4\pi r_0(m + m_s)]^{-1}. \quad (7)$$

В области низких частот соколеблющуюся массу можно приближенно рассчитать по формуле

$$m_s \approx (8/3)\rho_0 a^3 = 2,67 \rho_0 a^3, \quad (8)$$

как для круглого поршневого излучателя, излучающего в полупространство. Учитывая значения величин, входящих в (7), из условия задачи и полагая $r_0 = 1$ м, получим: $S_u = 3$ Па/А при частотах $f > f_0$, где $f_0 = (1/2\pi)[(m + m_s)c_m]^{-1/2} = 145$ Гц. Однако формула (7) справедлива лишь для частот, начиная с которых диффузор перестает колебаться как целое (приблизительно до частот f_1 , при которых $2a \approx \lambda$, $f_1 \approx 1100$ Гц).

8.3.5. В области низких частот сравнить чувствительность в воде и в воздухе для электродинамического излучателя, описанного в задаче 8.3.4. Как при этом изменяется резонансная частота излучателя?

Ответ. Чувствительность определяется выражением (4.7). В воздухе $S_u = 3$ Па/А, $f_0 = 145$ Гц; в воде $S_u = 6,2$ Па/А, $f_0 = 7,5$ Гц.

8.3.6. Найти и сравнить значения внесенного сопротивления на частотах механического резонанса и $f = 25$ Гц для электро-

динамического громкоговорителя, параметры которого приведены в задаче 8.3.4.

Решение. Внесенное сопротивление Z_k определяется (2.5). Следовательно, модуль внесенного сопротивления

$$|Z_k| = B^2 l^2 [r_s^2 + \omega^2 (m + m_s)^2 (1 - \omega_0^2 / \omega^2)^2]^{-1/2}. \quad (1)$$

Для частот, при которых

$$2a \ll \lambda, \quad (2)$$

r_s и m_s определяются формулами (4.4) и (4.8) соответственно. На частоте $f = 25$ Гц $\lambda = 13,2$ м, и условие (2) выполняется. Тогда $r_s = 0,07$ Н·с/м, $\omega m_s \approx 2,16$ Н·с/м, $\omega m_s / r_s \approx 30$. Реактивное сопротивление больше активного и поэтому на частоте 25 Гц импеданс излучения обусловлен главным образом соколеблющейся массой $|z_n| \approx \omega m_s = \omega(8/3)\rho_0 a^3$. Однако на резонансной частоте необходимо учитывать активное сопротивление r_s . Резонансная частота громкоговорителя определена в задаче 8.3.4, $f_0 = 145$ Гц. На этой частоте

$$|Z_k| = B^2 l^2 / r_s = B^2 l^2 \lambda^2 / (2\pi \rho_0 c_0 S^2) = 38,6 \text{ Вб}^2 / (\text{Н} \cdot \text{см}).$$

На частоте $f = 25$ Гц

$$|Z_k| = \left| B^2 l^2 \left[\omega [m + (8/3)\rho_0 a^3] (1 - \omega_0^2 / \omega^2) \right]^{-1} \right| = 0,8 \text{ Вб}^2 / (\text{Н} \cdot \text{см}).$$

Таким образом, внесенное сопротивление на резонансной частоте больше, чем на $f = 25$ Гц, в 48 раз.

8.3.7. Для диффузорного электродинамического громкоговорителя определить частоту механического резонанса и индуктивность звуковой катушки, если масса подвижной системы $m = 10$ г, присоединенная масса $m_s = 5,3$ г, гибкость системы подвеса $c_m = 10^{-6}$ см/дин, частота электромеханического резонанса $f_1 = 300$ Гц, индукция в зазоре 9000 Гс, длина провода звуковой катушки 12 м.

Ответ. Частота механического резонанса определяется формулой (3.1) и равна $f_0 = 40,7$ Гц. Индуктивность звуковой катушки находим из выражения для частоты электромеханического резонанса громкоговорителя (см. (3.2)), в котором C' определяется (см. (2.9)):

$$L = (Bl)^2 / [4\pi^2 f_1^2 (m + m_s)] = 2,1 \text{ мГн}.$$

8.3.8. Гидроакустический электродинамический излучатель работает на резонансной частоте $f_0 = 3$ кГц. Латунная диафрагма его имеет диаметр $d = 25$ см, толщину $h = 25$ мм. Поле

постоянного магнита в зазоре $B = 1 \text{ Вб/м}^2$. Катушка — из медного провода, его длина $l = 150 \text{ м}$, сечение $S_{\text{пр}} = 4 \text{ мм}^2$, индуктивность $L = 15 \text{ мГн}$. Плотность латуни $\rho_{\text{л}} = 8500 \text{ кг/м}^3$, плотность меди $\rho_{\text{м}} = 8900 \text{ кг/м}^3$, удельное электрическое сопротивление меди $\rho_{\text{эм}} = 0,017 \text{ мкОм}\cdot\text{м}$. Рассчитать площадь и массу диафрагмы $m_{\text{д}}$, омическое и индуктивное сопротивления неподвижной катушки, коэффициент электромеханического преобразования, сопротивление излучения при резонансе, соколеблющуюся массу $m_{\text{с}}$, упругость подвеса подвижной системы, обеспечивающую заданную частоту и поршневые колебания диафрагмы. Скорость звука в воде $c_0 = 1500 \text{ м/с}$.

Ответ. Площадь диафрагмы $S = \pi(d/2)^2 = 0,049 \text{ м}^2$, масса диафрагмы $m_{\text{д}} = V\rho_{\text{л}} = 10,4 \text{ кг}$. Сопротивление неподвижной катушки согласно (2.2)

$$Z_0 = R + jX = \rho_{\text{эм}} l / S_{\text{пр}} + j\omega_0 L = 0,64 + j \cdot 283,$$

$R = 0,640 \text{ Ом}$, $X = \omega_0 L = 283 \text{ Ом}$. Коэффициент электромеханического преобразования в соответствии с (1.1) $K = 150 \text{ Н/А}$. В предположении работы излучателя как поршня, излучающего одной стороной, сопротивление излучения

$$r_{\text{с}} = \rho_0 c_0 S \alpha, \quad (1)$$

а соколеблющаяся масса

$$m_{\text{с}} = (8/3)\rho_0(d/2)^3\beta. \quad (2)$$

Для $k(d/2) = 1,57$, где k — волновое число на резонансной частоте $f_0 = 3 \text{ кГц}$, коэффициенты $\alpha = 0,75$, $\beta = 0,5$, тогда

$$z_{\text{с}} = r_{\text{с}} + j\omega m_{\text{с}} = 5,5 \cdot 10^4 + j \cdot (4,9 \cdot 10^4).$$

Упругость подвеса подвижной системы определим из формулы для резонансной частоты (см. (3.1)): $k = c_{\text{м}}^{-1} = \omega_0^2 M = 6,5 \cdot 10^9 \text{ Н/м}$, где $M = m_{\text{д}} + m_{\text{к}} + m_{\text{с}}$, $m_{\text{к}} = \rho_{\text{м}} l S_{\text{пр}}$ — масса катушки.

8.3.9. Определить ширину полосы пропускания и чувствительность на частоте резонанса электродинамического излучателя по данным задачи 8.3.8, если активное механическое сопротивление $r = 6,3 \cdot 10^4 \text{ кг/с}$.

Решение. Ширина полосы пропускания $2\Delta f = f_0/Q$, где

$$Q = \omega_0 M / r \quad (1)$$

— добротность механической колебательной системы. Следовательно, $2\Delta f = r/(2\pi M) = r/[2\pi(m_{\text{д}} + m_{\text{к}} + m_{\text{с}})] = 548 \text{ Гц}$. Чувствительность электродинамического излучателя определяется фор-

мулой (4.3), где

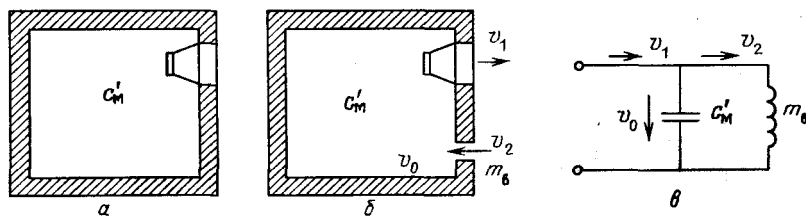
$$z + z_{\text{н}} = (r_s + r) + j\omega M + 1/(j\omega C) = (r_s + r) + j\omega M (1 - \omega_0^2/\omega^2).$$

На резонансе $z + z_{\text{н}} = r_s + r$. Следовательно,

$$S_u = \frac{Bl}{r_s + r} \left[\frac{r_s \rho c}{4\pi} \right]^{1/2} = 103 \text{ Па/А.}$$

8.3.10. Для обеспечения воспроизведения громкоговорителем области низких частот используется внешнее оформление. Найти: 1) частоту основного резонанса громкоговорителя, смонтированного в закрытом ящике $60 \times 45 \times 30$ см; 2) собственную частоту и объемную скорость колебаний воздуха в отверстии фазоинвертора того же объема, что и закрытый ящик с толщиной краев отверстия (длиной прохода) $l = 2$ см и площадью отверстия S , равной половине площади диффузора громкоговорителя. Основная частота громкоговорителя без внешнего оформления равна 61 Гц, диаметр диффузора $S_d = 20$ см, масса подвижной системы $m = 25$ г.

Решение. 1) В случае расположения громкоговорителя в закрытом ящике (см. рисунок а) упругость находящегося в нем



К задаче 8.3.10

объема воздуха складывается с упругостью подвижной системы громкоговорителя. Вследствие этого частота основного резонанса

$$f'_0 = \frac{1}{2\pi} (m + m_s)^{-1/2} \left[\frac{1}{c'_m} + \frac{1}{c'_m} \right]^{1/2} = f_0 \left[1 + \frac{c'_m}{c'_m} \right]^{1/2}, \quad (1)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} [(m + m_s) c'_m]^{-1/2} \quad (2)$$

— резонансная частота подвижной системы громкоговорителя, c'_m — гибкость закрепления подвижной системы громкоговорителя, m_s — соколеблющаяся масса ($m_s = 3,5$ г), рассчитываемая по (4.8), c'_m — гибкость воздуха в закрытом объеме ящика ($c'_m = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ с}^2/\text{кг}$), определяемая (1.2). Гибкость c'_m находим из формулы (2): $c'_m = [4\pi^2 f_0^2 (m + m_s)]^{-1} = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ с}^2/\text{кг}$. Подставляя значения c'_m и c'_m в (1), получаем $f'_0 = 70$ Гц.

2) Если громкоговоритель помещен в фазоинвертор (см. рисунок б), то гибкость воздушного объема ящика c'_m и массы воздуха в отверстии фазоинвертора m_b и соколеблющаяся масса воздушной среды m'_s образуют резонансную систему (резонатора Гельмгольца), частота которой равна $f_\phi = (1/2\pi)(c'_m m'_\phi)^{-1/2} = 158$ Гц, где $m'_\phi = m_b + m'_s = 0,5\rho_0 l S_d + 2\rho_0 (a')^3 = 1,3$ г (a' определяем из условия $S' = S/2$). Пусть при движении в заданном направлении диффузор громкоговорителя создает объемную скорость v_1 . При этом в открытое отверстие втекает воздух с объемной скоростью разрежения и сжатия воздуха v_2 в направлении, противоположном вектору v_1 . Из-за инерции массы воздуха в отверстии $v_1 \neq v_2$. Вследствие этого объемная скорость колебаний воздуха v_0 в объеме ящика равна

$$v_0 = v_1 - v_2. \quad (1)$$

Связь между v_0 и v_2 можно рассчитать с помощью эквивалентной схемы заданной системы (см. рисунок в):

$$\frac{v_0}{v_2} = \frac{j\omega m_b}{1/j\omega c'_m} = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}. \quad (2)$$

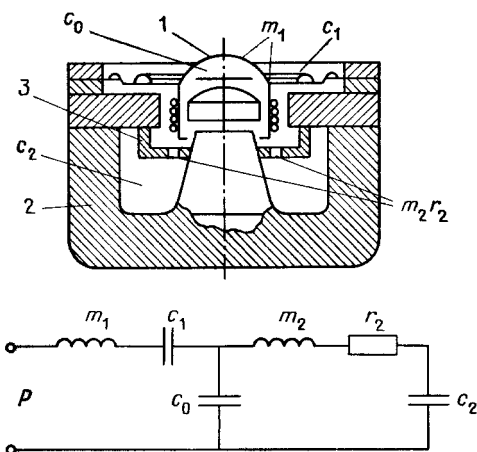
Из соотношений (1), (2) находим

$$v_2 = v_1 (1 - \omega^2/\omega_0^2)^{-1}. \quad (3)$$

Как видно, v_2 возрастает при приближении частоты ω к резонансной частоте фазоинвертора и при переходе через резонанс меняет фазу на π . В связи с этим на частотах выше резонанса объемная скорость диффузора v_1 и воздуха v_2 в отверстии совпадает по фазе. Вследствие этого излучение, создаваемое отверстием в окружающей среде, становится синфазным с излучением передней стороны диффузора, что увеличивает эффективность излучения громкоговорителя.

8.3.11. Определить коэффициент электромеханической связи K , внесенное из электрической части преобразователя механическое сопротивление z_k , чувствительность в режиме холостого хода $s_{пр}$ электродинамического микрофона с подвижной катушкой сопротивлением $Z_0 = 10$ Ом при длине проводника $l = 2$ м. Полное механическое сопротивление системы равно $z_m = 5$ Н·с/м. Диаметр мембраны $2a = 5$ см. Магнитная индукция в зазоре $B = 8500$ Гс (считать, что действующая поверхность диафрагмы равна πa^2). Определить область частот, где чувствительность частотнонезависима.

Решение. Электродинамический микрофон с подвижной катушкой является обращенной головкой электродинамического громкоговорителя. На рисунке: 1 — диафрагма с катушкой, 2 — магнит, 3 — немагнитный диск с отверстиями; m_1 , c_1 — масса и гибкость диафрагмы с катушкой; r_2 , m_2 — сопротивление трения и



К задаче 8311

масса воздуха, протекающего через отверстия диска; c_0 , c_2 — гибкость воздуха под диафрагмой и в полости магнита. На механической стороне микрофона приложена сила F , определяемая уравнением (1.3) при механической нагрузке $z_n = 0$:

$$F = pS = Ki + zv, \quad (1)$$

где z — механическое сопротивление подвижной системы, v — ее скорость, K — коэффициент электромеханической связи, определяемый формулой (1.1) и равный для заданных условий $K = Bl = 1,7 \text{ Вб/м}$, S — площадь диафрагмы микрофона, i — сила тока. На электрической стороне напряжение внешнего источника $u = 0$ и уравнение для этой стороны преобразователя (см. (1.2)) запишется в виде

$$(Z_0 + Z_n)i - Kv = 0, \quad (2)$$

где Z_0 — собственное электрическое сопротивление микрофона, Z_n — электрическая нагрузка на его выходе. Чувствительность микрофона представляет собой отношение развиваемого микрофоном напряжения к давлению в свободном поле:

$$s_{\text{пр}} = |u_1/p| \quad (3)$$

Напряжение, развиваемое микрофоном на нагрузке Z_n , $u_1 = iZ_n$, где $i = Kv/(Z_0 + Z_n)$ в соответствии с уравнением (2). Определяя скорость v из (1) и учитывая, что $K^2/(Z_0 + Z_n) = z_k$ — внешнее механическое сопротивление (см. (1.7)), получим

$$u_1 = \frac{KZ_n S}{(Z_0 + Z_n)(z + z_k)} p, \quad \text{т.е.} \quad s_{\text{пр}} = \left. \frac{KZ_n S}{(Z_0 + Z_n)(z + z_k)} \right| \quad (4)$$

Отсюда чувствительность микрофона в режиме холостого хода

$$s_{\text{пр}} = KS/|z_{\text{м}}|, \quad z_{\text{м}} = z + z_{\text{к}} \quad (Z_{\text{н}} = \infty). \quad (5)$$

Рассмотрим, когда $s_{\text{пр}}$ будет частотнонезависима. От частоты зависит только $|z_{\text{м}}|$. Входное механическое сопротивление $|z_{\text{м}}|$ определим по эквивалентной схеме механоакустической системы микрофона (см. рисунок), где акустические параметры пересчитаны к механическим, соответствующим площади диафрагмы:

$$c_0 = V_1/(\gamma p_0 S^2), \quad c_2 = V_2/(\gamma p_0 S^2), \quad m_2 = m'_2 S^2, \quad r_2 = r'_2 S^2.$$

Здесь V_1 и V_2 — воздушные объемы под диафрагмой и в полости магнита соответственно, $m'_2 = \rho_0 l / S_1$ — акустическая масса воздуха в щели сечением S_1 и длиной l , r'_2 — акустическое сопротивление вязкого трения в той же щели, p_0 — атмосферное давление, $\gamma = 1,4$. В области низких и средних частот сопротивление $1/(j\omega c_0)$ велико и эквивалентная схема превращается в простой колебательный контур, резонансная частота которого $\omega_0 \approx (m_1 c_1)^{-1/2}$. При $\omega < \omega_0$ $|z_{\text{м}}| \sim 1/(\omega c_1)$ возрастет, а чувствительность падает с уменьшением частоты. На высоких частотах сказывается шунтирующее действие гибкости c_0 . В системе появляется второй резонанс, благодаря этой гибкости

$$\omega_1^2 = (m_1 c_1)^{-1} + 4(m_1 c_0)^{-1} = \omega_0^2 (1 + 4c_1/c_0). \quad (6)$$

При $\omega > \omega_1$ $|Z| \approx j\omega m_1$ и растет из-за реактивного сопротивления с частотой. Однако в области частот $\omega_0 < \omega < \omega_1$

$$|z_{\text{м}}| \approx \omega_1 m_1 / 2. \quad (7)$$

Тогда чувствительность холостого хода катушечного микрофона (5) в этой области частот с учетом (7) частотнонезависима:

$$s_{\text{пр}} \approx 2BIS/(\omega_1 m_1) = 0,67 \text{ мВ/Па}. \quad (8)$$

Внесенное из электрической части преобразователя сопротивление определяется формулой (1.7): $z_{\text{к}} = K^2/Z_0 = 0,29 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$.

8.3.12. Найти чувствительность электродинамического микрофона в области частот, где она частотнонезависима, в режиме холостого хода, если: площадь диафрагмы $S = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, длина провода звуковой катушки $l = 1,5 \text{ м}$, магнитная индукция в рабочем зазоре $B = 8500 \text{ Гс}$. Частота основного механического резонанса $f_0 = 300 \text{ Гц}$, масса подвижной системы $m = 0,2 \times 10^{-3} \text{ кг}$. Объем камеры под диафрагмой $V = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$.

Ответ. Чувствительность микрофона $s_{\text{пр}} = 0,4 \text{ мВ/Па}$ (см. (11.9)).

9. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

9.1. Функция Грина и обращение дифференциальных операторов задач скалярной акустики

9.1.1. Поля акустического давления и колебательной скорости связаны уравнениями непрерывности и движения

$$\beta_0 \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} = \mathbf{s}_0, \quad \nabla p + \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{f}_0, \quad (1)$$

где $\beta_0 = (c_0^2 \rho_0)^{-1}$ и ρ_0 — сжимаемость и плотность среды, s_0 и f_0 — плотности источников массы и объемных сил (см. задачу 1.1.1). Получить волновое уравнение для p и функцию Грина, предполагая зависимость источников от времени гармонической, а пространство трехмерным.

Решение. Волновое уравнение:

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = F_0(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

где $F_0 = \nabla f_0 - \rho_0 \partial s_0 / \partial t$. Функция Грина есть решение (2) для точечного источника:

$$F_0 = \delta(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t), \quad p = p(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), приходим к уравнению Гельмгольца

$$\Delta p(\mathbf{r}) + k_0^2 p(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}), \quad k_0 = \omega_0 / c_0. \quad (4)$$

Решаем (4) методом преобразования Фурье, полагая

$$p(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int \tilde{p}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad \delta = (2\pi)^{-3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}.$$

Находим фурье-образ $\tilde{p}(\mathbf{k})$ и затем, совершая обратное преобразование Фурье, функцию $p(\mathbf{r})$:

$$\tilde{p}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k_0^2 - k^2}, \quad p = - \frac{\exp(i k_0 |\mathbf{r}|)}{4\pi |\mathbf{r}|}.$$

Таким образом, функция Грина имеет вид

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = - \frac{\exp(i k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \exp(-i\omega_0 t). \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{r}_0$ задает положение источника, $\mathbf{r}$ — точки наблюдения. Решение волнового уравнения (2) для гармонического во времени источника $F_0(\mathbf{r}, t) = F_0(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t)$ с произвольным про-

странственным распределением $F_0(\mathbf{r})$ имеет вид

$$p(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\omega_0 t) \int G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) F_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (6)$$

9.1.2. Получить функцию Грина для двухмерного пространства, полагая, что в системе (1.1) $\mathbf{r} = (x, y)$.

Ответ. В отличие от задачи 9.1.1 при совершении обратного преобразования Фурье выражения $\tilde{p}(\mathbf{k})$ здесь нужно учесть, что вектор $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ тоже двухмерный. Это приводит к формуле

$$G = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \exp(-i\omega_0 t), \quad (1)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля 1-го рода.

9.1.3. Решить задачу 9.1.2 для одномерного пространства.

Ответ. Заменим $\mathbf{r}$ на x , а в импульсном пространстве $\mathbf{k}$ на k :

$$\tilde{p}(k) = \frac{1}{k_0^2 - k^2}, \quad G = \frac{1}{2ik_0} \exp(ik_0 |x - x_0|) \exp(-i\omega_0 t). \quad (1)$$

9.1.4. Проверить непосредственной подстановкой, что функция Грина G (см. (3.1)) есть решение уравнения

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + k_0^2 G = \delta(x - x_0) \exp(-i\omega_0 t). \quad (1)$$

Решение. При дифференцировании учтем, что производная $|x|' = 2\Theta(x) - 1$ (где Θ — функция Хевисайда, равная 1 при $x > 0$ и 0 при $x < 0$). Производная $\Theta'(x) = \delta(x)$. Поэтому

$$\frac{d^2 G}{dx^2} = \frac{d}{dx} ik_0 (2\Theta(x - x_0) - 1) G = -k_0^2 G + \delta(x - x_0) \exp(-i\omega_0 t),$$

откуда следует справедливость (1).

9.1.5. Получить решение волнового уравнения (1.2) для произвольной зависимости источников от времени. Исследовать случай точечного мгновенного "щелчка" $F_0 = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0)$.

Решение. Пользуясь преобразованием Фурье по времени:

$$p(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad F_0(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

сведем волновое уравнение для каждой из частотных компонент $p(\mathbf{r}, \omega)$ к уравнению Гельмгольца (см. (1.4)). Его решение имеет вид (1.6). Интегрируя по всем частотам, найдем

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(\mathbf{r}', \omega) \exp\left[-i\omega(t - c_0^{-1} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\right] d\omega = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int F_0(\mathbf{r}', t - c_0^{-1} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \quad (1)$$

Поле давления (1) есть сумма сигналов, излученных объемными элементами $d\mathbf{r}'$ и пришедших в точку приема $\mathbf{r}$ с различными за-

паздываниями. Для δ -шелчка из (1) получаем

$$\rho = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \delta\left[t - (t_0 + c_0^{-1}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\right]. \quad (2)$$

Видно, что расстояние $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$ между точками излучения и приема импульс пробегает за время $t-t_0$, двигаясь со скоростью $c_0 = (\beta_0 \rho_0)^{-1/2}$. Множитель $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$ в (2) описывает убывание сигнала вследствие сферической расходимости.

9.1.6. Решить предыдущую задачу в одномерной постановке.

Ответ. Решение (аналог (5.1)) имеет вид

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{c_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F_0\left[x', t - c_0^{-1}|x - x'| \right] dx'. \quad (1)$$

Для точечного мгновенного "шелчка" $F_0 = \delta(x - x_0) \delta(t - t_0)$ имеем

$$\rho(x, t) = -\frac{c_0}{2} \Theta(t - t_0 - c_0^{-1}|x - x'|). \quad (2)$$

При $x > x_0$ возникает ступенеобразный импульс, бегущий вдоль x вправо, а при $x < x_0$ такой же импульс бежит влево.

9.1.7. Показать, опираясь на задачи 9.1.1–9.1.3 и 9.1.5, 9.1.6, что функция Грина является ядром интегрального оператора, обратного дифференциальному оператору, производящему исходное уравнение. Так, обратным гельмгольциану $(\Delta + k_0^2)(\cdot)$ будет $\int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d\mathbf{r}'(\cdot)$. Какой вид имеет оператор, обратный даламберциану $\square(\cdot) = (\Delta - c_0^{-2} \partial^2 / \partial t^2)(\cdot)$?

Решение. Из определения функции Грина следует

$$(\Delta + k_0^2) \int d\mathbf{r}' G(\cdot) = \int d\mathbf{r}' \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\cdot) = 1(\cdot),$$

т.е. произведение прямого и обратного операторов Гельмгольца есть единичный оператор. Аналогично показывается, что обратным даламберциану будет оператор

$$\square^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega(t-t')} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\cdot) d\mathbf{r}' d\omega dt', \quad (1)$$

поскольку $\square \cdot \square^{-1} = 1$. Например, для трехмерного пространства

$$\square^{-1} = -\frac{1}{4\pi} \int \delta(t - t' - c_0^{-1}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)(\cdot) \frac{d\mathbf{r}' dt'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (2)$$

9.1.8. Показать путем непосредственной проверки, что для обратного оператора (см. (7.2)) справедливо $\square \cdot \square^{-1} = 1$.

Решение. Обозначим в (7.2) для краткости аргумент δ -функции буквой τ . Дифференцируя, убеждаемся в справедливости

$$\square \left[\delta(\tau) |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1} \right] = -4\pi \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \delta(\tau).$$

Поэтому

$$\square \cdot \square^{-1}(\cdot) = \int \delta(\tau) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\cdot) d\mathbf{r}' d\tau. \quad (1)$$

Применяя оператор (1) к произвольной функции $f(\mathbf{r}, t)$, убеждаемся в том, что

$$\int \delta(\tau) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') f(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' = \int \delta(t-t') f(\mathbf{r}, t') dt' = f(\mathbf{r}, t).$$

9.1.9. Систему акустических уравнений (1.1) можно записать в матричной форме:

$$\hat{A} \begin{bmatrix} p \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ \mathbf{f}_0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} \beta_0 \frac{\partial}{\partial t} & \nabla \\ \nabla & \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Найти оператор $\hat{A}^{-1}$, обратный данному.

Решение. Считая, что переменные p и $\mathbf{v}$ изменяются как $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, т.е. рассматривая один компонент пространственно-временного спектра поля, приведем дифференциально-матричный оператор $\hat{A}$ системы (1) к обыкновенной матрице. Ее можно обратить по известному правилу:

$$\begin{bmatrix} -i\omega\beta_0 & i\mathbf{k} \\ i\mathbf{k} & -i\omega\rho_0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{k_0^2 - k^2} \begin{bmatrix} i\omega\rho_0 & i\mathbf{k} \\ i\mathbf{k} & i\omega\beta_0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Здесь $k_0^2 = \beta_0\rho_0\omega^2$. Применяя к обращенному оператору (2) пространственное преобразование Фурье, находим матричную функцию Грина:

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} i\omega\rho_0 G & \nabla G \\ \nabla G & i\omega\beta_0 G \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $G = G(\omega, \mathbf{r}-\mathbf{r}')$ — функция Грина уравнения Гельмгольца, которая для пространств одного, двух и трех измерений найдена в задачах 9.1.3, 9.1.2, 9.1.1. Таким образом, в результате обращения матричного оператора $\hat{A}$ (1) получаем

$$\hat{A}^{-1}(\cdot) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega(t-t')} \hat{G}(\omega, \mathbf{r}-\mathbf{r}')(\cdot) d\mathbf{r}' d\omega dt'. \quad (4)$$

Результат (4) есть матричное обобщение формулы (7.1).

9.1.10. Действуя по аналогии с задачей 9.1.8, показать, что интегральный матричный оператор $\hat{A}^{-1}$ предыдущей задачи является правым обратным дифференциальному матричному оператору $\hat{A}$, т.е. $\hat{A}\hat{A}^{-1} = 1$, где 1 — единичная матрица.

9.1.11. Найти функцию Грина системы (9.1) для случая стратифицированной (слоистой) среды. Стратификация задана функциями $\beta = \beta(z)$, $\rho = \rho(z)$. Переменные p и $\mathbf{v}$ изменяются по гармоническому закону $\exp(-i\omega_0 t)$.

Решение. Примерами таких сред служат плоскостойкие модели атмосферы и океана (z — вертикальная координата), многослойные полимерно-клеевые покрытия. Поиск обратного оператора

ра ведется способом, аналогичным использованному в задаче 9.1.9, и приводит к выражению

$$\hat{A}^{-1}(\cdot) = \frac{1}{4\pi^2} \int \exp[ik_x(x-x') + ik_y(y-y')] \hat{G}(\cdot) dk_x dk_y. \quad (1)$$

Здесь

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} i\omega_0 \rho(z)g & (ik_x g, ik_y g, dg/dz) \\ (ik_x g, ik_y g, dg/dz) & i\omega_0 \beta(z)g \end{bmatrix}, \quad (2)$$

а функция g является решением одномерного уравнения

$$\frac{d^2 g}{dz^2} + \left[\omega_0^2 \beta(z) \rho(z) - (k_x^2 + k_y^2) \right] g = \delta(z - z').$$

Полезно убедиться в том, что выражение (1) является правым обратным оператором по отношению к исходному дифференциально-матричному (по схеме задачи 9.1.10).

9.2. Обратные задачи излучения

9.2.1. Источник плоских волн (см. (1.1.2)) имеет вид $F_0(x, t) = \exp(-i\omega_0 t)$ при $|x| < d$ и $F_0 \equiv 0$ при $|x| > d$. Как зависит поле давления от d ? Прокомментируйте результат с точки зрения решения обратной задачи излучения.

Решение. Обратная задача излучения состоит в определении источника по излученному им полю, измеренному на удалении от источника (за его пределами). Используя функцию Грина одномерного уравнения Гельмгольца, в области $x < -d$ найдем

$$\rho \exp(i\omega_0 t - ik_0 x) = \frac{1}{2ik_0} \int_{-d}^d \exp(ik_0 x) dx = -\frac{i}{k_0^2} \sin k_0 d. \quad (1)$$

Поле в области $x < -d$ есть плоская волна, бегущая в сторону уменьшения значений x и имеющая амплитуду $|\sin k_0 d|/k_0^2$. Точно так же показывается, что при $x > d$ существует плоская волна равной амплитуды, бегущая в сторону возрастающих x . Внутри излучателя ($|x| < d$) поле

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2ik_0} e^{-i\omega_0 t} \left[e^{-ik_0 x} \int_{-d}^x e^{-ik_0 y} dy + e^{-ik_0 x} \int_x^d e^{ik_0 y} dy \right] = \\ &= k_0^{-2} e^{ik_0 d} (1 - \cos k_0 x) e^{-i\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Видно, что при $k_0 d = 2\pi n$ амплитуда поля вне излучателя (1) обращается в нуль. Внутреннее поле (2) при этом не есть тождественный нуль, но обращается в нуль на границе $x = d$. Таким образом, существует множество ($n = 1, 2, 3, \dots$) источников, не излучающих за свои пределы, но создающих сколь

угодно сильные поля в области своей локализации. Наличие "неизлучающих излучателей" доказывает, что обратные задачи излучения не имеют единственного решения. Действительно, к любому источнику, излучающему поле вовне, можно приплюсовать комбинацию неизлучающих источников. В результате получится источник, описываемый совершенно иной функцией F_0 , однако внешнее поле $p(x, t)$ не изменится.

9.2.2. Пара излучающих плоскостей задана выражением

$$F_0 = \exp(-i\omega_0 t) [\delta(x-x_0) + \delta(x+x_0)]. \quad (1)$$

При каком значении x_0 источник (1) будет неизлучающим?

Решение. По аналогии с задачей 9.2.1 находим

$$p(x, t) = -\frac{i}{k_0} \cos(k_0 x_0) \exp(-i\omega_0 t \pm ik_0 x). \quad (2)$$

Знак плюс отвечает волне, бегущей при $x > x_0$ вправо, минус — при $x < -x_0$ влево. Поле между плоскостями

$$p(x, t) = -\frac{i}{k_0} e^{ik_0 x_0} \cos(k_0 x) e^{-i\omega_0 t}, \quad -x_0 < x < x_0 \quad (3)$$

ни при каком x_0 тождественно в нуль не обращается; здесь возникает стоячая волна с амплитудой k_0^{-1} . Во внешней области $|x| > x_0$ давление (2) обращается в нуль тождественно при $k_0 x_0 = \pi(n-1/2)$. Итак, хотя каждая из пластин создает ненулевое поле, эти поля за счет интерференции могут друг друга гасить. На этом основана идея активного гашения звука, используемая во многих устройствах.

9.2.3. Показать в общем виде, что одномерная обратная задача излучения единственного решения не имеет.

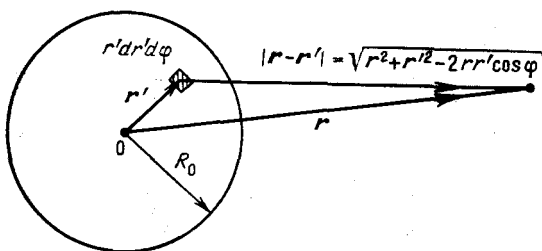
Решение. Излучение плоских волн описывается неоднородным волновым уравнением Даламбера

$$\square_1 p(x, t) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - c_0^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p = F_0(x, t). \quad (1)$$

Пусть (для простоты рассуждений) $F_0 \equiv 0$ при всех x за пределами области R . Возьмем произвольную гладкую функцию $q(x, t)$, которая также равна нулю вне R . Вычислим $\square_1 q = F_1$, найдя тем самым новый источник $F_1(x, t)$. Теперь рассмотрим уравнение

$$\square_1 p = F_0 + F_1. \quad (2)$$

Понятно, что решения (1) и (2) совпадают вне R . Следовательно, внешнее поле не определяет излучатель единственным образом. Эти рассуждения дают алгоритм построения "неизлучающего излучателя" из любой дважды дифференцируемой функции q .



К задаче 9.2.4

9.2.4. Гармонические во времени источники в двумерном пространстве распределены равномерно внутри круга радиусом R_0 . Рассчитать поле, проанализировать результат с точки зрения возможностей решения обратной задачи излучения.

Решение. Воспользуемся двумерной функцией Грина (1.2.1). Для расчёта поля (см. рисунок) нужно взять интеграл

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_0} H_0^{(1)} \left[k_0 (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi)^{1/2} \right] r' dr'. \quad (1)$$

Учитывая, что функция Ганкеля выражается через функции Бесселя и Неймана ($H_0^{(1)} = J_0 + iN$), и пользуясь формулами

$$\int_0^\pi \left[\begin{matrix} J_0 \\ N_0 \end{matrix} (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \varphi)^{1/2} \right] d\varphi = \pi \begin{bmatrix} J_0(\beta) \\ N_0(\beta) \end{bmatrix}, \quad |\alpha| < |\beta|,$$

приходим к выводу, что интеграл (1) распадается на два — для случая $r < R_0$ (точка наблюдения находится внутри круга) и для $r > R_0$ (точка вне излучающего круга). Далее, пользуясь формулами интегрирования бесселевых функций и соотношением

$$J_0(z) H_1^{(1)}(z) - J_1(z) H_0^{(1)}(z) = 2/(i\pi z),$$

получим выражения для внутреннего поля ($r < R_0$)

$$p = k_0^{-2} \left[1 - (i\pi/2) k_0 R_0 H_1^{(1)}(k_0 R_0) J_0(k_0 r) \right] e^{-i\omega_0 t} \quad (2)$$

и внешнего поля ($r > R_0$) кругового излучателя

$$p = -(i\pi/2) (R_0/k_0) J_1(k_0 R_0) H_0^{(1)}(k_0 r) e^{-i\omega_0 t}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что для значений аргумента $k_0 R_0$, при которых $J_1 = 0$, $p \equiv 0$ — круг превращается в "неизлучающий излучатель". Вместе с тем внутреннее поле (2) никогда в нуль не обращается.

9.2.5. Уравнение Даламбера $\square p(\mathbf{r}, t) = 0$ в трехмерном пространстве описывает поле заданных источников единственным образом (предполагается, что выполнено условие излучения).

Следуя логике задачи 9.2.3, указать способ построения "неизлучающего излучателя", локализованного в ограниченном трехмерном объеме.

9.2.6. В области ненулевого объема (на приемной апертуре), удаленной от области распределенных источников, акустическое поле измерено с идеальной точностью (отсутствуют как шумы, так и ошибки измерения). Можно ли создать алгоритм, инвертирующий измеренное поле, т.е. осуществляющий сколь угодно точное его продление: а) за пределы приемной апертуры, б) в области локализации источников?

Ответ. а) Да. В точке, не принадлежащей области локализации источников, поле описывается однородным уравнением Даламбера. Зная поле внутри приемной апертуры, его можно продолжить за ее пределы, например, с помощью разложения в степенной ряд.

б) Нет. Если бы такое продление было возможным, то, применив к полю внутри области источников оператор $\square$, можно было бы однозначно восстановить источник. А это, как следует из задач 9.2.1–9.2.5, невозможно. Дело в том, что на приемной апертуре и в области источников поле описывается двумя разными уравнениями (однородным и неоднородным). Переходя границу раздела, поле теряет свойство аналитичности — производные терпят разрыв.

9.2.7. Для решения обратной задачи излучения было осуществлено аналитическое продление измеренного поля на все пространство. Затем в области, где, по предположению, должен находиться излучатель, к продленному полю применен оператор Даламбера. Тем самым был определен источник $F_0 = \square p$. Как соотносится F_0 с истинным источником измеренного поля?

Ответ. Никак. Аналитическое продолжение поля подчиняется всюду однородному уравнению Даламбера. Следовательно, $F_0 \equiv 0$, а все отличия от нуля связаны с ошибками измерения и обработки результатов.

9.2.8. Пусть $F_0(\mathbf{r}, t)$ — "неизлучающий излучатель", локализованный в области R . Показать, что поле внутри R тождественно обращается в нуль, только если $F_0 \equiv 0$.

Ответ. Если бы существовал источник $F_0 \neq 0$, создающий нулевое поле $p \equiv 0$ в области R своей локализации, то в области R было бы невозможно удовлетворить уравнению $\square p = F_0$.

9.2.9. Показать, что следствием интегральной формулы

$$p(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[p(\mathbf{r}', \omega) \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial}{\partial n} p(\mathbf{r}', \omega) \right] dS' \quad (1)$$

Кирхгофа для уравнения Гельмгольца является неединственность решения обратной задачи излучения (S — поверхность, охватывающая источники и отделяющая их от точки наблюдения $\mathbf{r}$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности, $G(\omega, \mathbf{r}-\mathbf{r}')$ — функция Грина).

Ответ. Смысл формулы (1): если на поверхности S разместить монопольные источники с плотностью $\partial p / \partial n$ и дипольные источники с плотностью p , то поле в точке $\mathbf{r}$ совпадет с полем истинных источников. Таким образом, комбинация (1) монопольных и дипольных излучателей создает внешнее поле, неотличимое от поля истинного источника.

9.2.10. Можно ли сделать излучающую систему, которая создает монохроматическое поле во всем пространстве, за исключением области Y конечного объема, в которой $p \equiv 0$?

Ответ. Можно. В соответствии с задачей 9.2.9 система может состоять из объемного излучателя, а также поверхности S , охватывающей ту область Y пространства, в которой следует обнулить поле. Взяв в формуле (9.1) обратный знак, получим гашение поля всюду внутри S . Таким образом, для гашения потребовалось окружить область Y источниками. Примером такой ситуации в одномерном случае служит задача 9.2.2.

9.2.11. Имеются две области конечного объема: R (в которой локализованы источники) и Y (непрерывная приемная апертура). Можно ли в R создать распределение источников, создающих ненулевое поле во всем пространстве, за исключением области Y , где $p \equiv 0$?

Ответ. Нет. Поле внутри Y подчиняется однородному уравнению Даламбера и, следовательно, аналитично. Если скоро $p \equiv 0$ в конечной области Y , оно должно быть тождественным нулем во всем пространстве (за исключением области R , на границе которой аналитичность нарушается). Отсюда важное следствие: нельзя создать излучатель, зондирующий избранные области среды и не облучающий иные, не интересующие нас участки пространства.

9.2.12. Существуют ли излучатели, создающие поле в трехмерном пространстве, за исключением двумерных поверхностей, поле на которых обнуляется?

Ответ. Да: диполь, поле которого на плоскости, перпендикулярной оси диполя и проходящей через его центр, равно нулю.

9.2.13. Объяснить, почему похожие задачи 9.2.11 и 9.2.12 имеют противоположные по смыслу ответы.

Ответ. Обнуление поля в области Y ненулевого объема фактически означает, что в любой точке внутри Y в нуль обращается не только поле, но и все его производные. В задаче 9.2.12 требование менее жестко: поле может равняться нулю на поверхности, обладая на ней ненулевыми производными, что позволяет продолжить его на остальное пространство.

9.2.14. Показать, что в пространственном спектре "неизлучающего излучателя" отсутствуют плоские волны с волновыми векторами k , модуль которых $k = k_0 = \omega_0/c_0$.

Решение. Исходя из задачи 9.2.3 легко показать, что любой неизлучающий источник можно представить как $F_0 = \nabla \rho$, где ρ — гладкая локализованная в области R функция. Имея это ввиду и переходя в волновом уравнении (1.1.2) к спектру по плоским волнам

$$\begin{bmatrix} p(r, t) \\ F_0(r, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \begin{bmatrix} \tilde{p}(k, \omega) \\ \tilde{F}_0(k, \omega) \end{bmatrix} \exp(-i\omega t + ikr) d\omega dk,$$

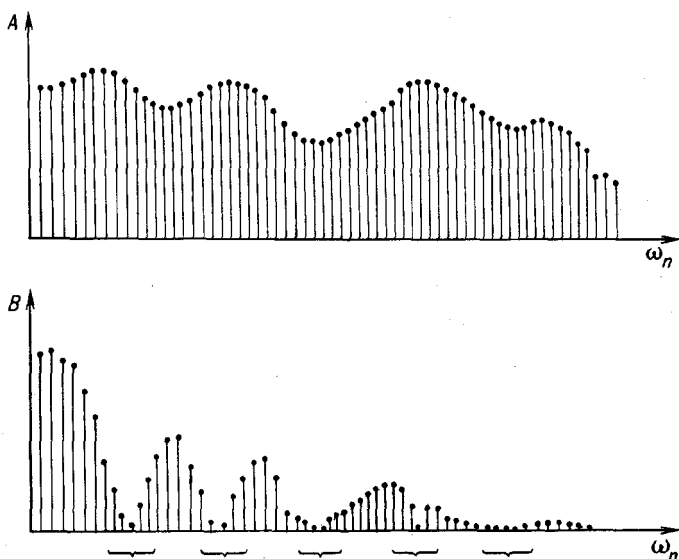
получим $\tilde{F}_0 = (k_0^2 - k^2) \tilde{p}$. Отсюда следует, что $\tilde{F}_0 = 0$ при $k = k_0$. Поведение спектров источников и полей на "сфере Эвальда" $k = k_0$ в k -пространстве играет очень важную роль в задачах излучения и рассеяния волн. Оно связано с такими понятиями, как диаграмма направленности, дальняя или волновая зона.

9.2.15. В разделе 9.1 найден ряд интегральных операторов, обратных дифференциальным волновым: гельмгольциану, даламберриану, дифференциально-матричному оператору уравнений линейной акустики. По построению эти операции эквивалентны: дифференциальные операторы переводят поля в источники, интегральные — источники в поля. Взаимнооднозначны ли эти преобразования? Как понимать неединственность решения обратной задачи излучения в терминах операторных преобразований "поля-источники" и "источники-поля"?

Решение. Если поле известно во всем пространстве, для определения источников (единственным образом) к полю нужно применить дифференциальный оператор. Справедливо и обратное. Если заданы источники, для вычисления поля к ним нужно при-

менить соответствующий интегральный оператор. При этом условия излучения выполняются автоматически введением функции Грина с волновым числом, обладающим малой положительной мнимой частью, отвечающей слабому затуханию волн в среде. Преобразования полей в источники и обратно взаимно однозначны. Неоднозначность решения обратной задачи излучения возникает из-за того, что поле измеряется не во всем пространстве, а лишь на ограниченной приемной апертуре, удаленной от области локализации источников (см. задачи 9.2.3, 9.2.5–9.2.13).

9.2.16. Излучающая пластина толщиной d , рассмотренная в задаче 9.2.1, возбуждает гармонические сигналы многих частот $\omega_n = n\omega_0$ с неизвестными амплитудами $A(\omega_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (см. рисунок). Предполагается, что спектральные линии распо-



К задаче 9.2.16

ложены близко друг от друга и $\omega_0 \ll \pi c_0/d$. Можно ли определить толщину пластины и амплитуды гармоник по измерениям излучаемого поля?

Решение. Эта задача — простой пример диагностики механизмов, работа которых сопровождается излучением звука. Как следует из формулы (1.1), амплитудно-частотная характеристика излученного поля $B(\omega_n)$ есть амплитудно-частотная характеристика источников $A(\omega_n)$, промодулированная функцией

$|\sin(n\omega_0 d/c_0)|/(n\omega_0/c_0)^2$. Поэтому амплитудно-частотная характеристика поля, измеренного за пределами пластины, содержит провалы в окрестностях частот $n\pi c_0/d$ (отмечены скобками на рисунке). Интервал между провалами связан с толщиной пластины d и может быть оценен в результате статистической обработки амплитудно-частотной характеристики $B(\omega_n)$. Определив d , можно оценить и $A(\omega_n)$ для любой ω_n , не совпадающей ни с одной из частот провала.

Единственность решения данной задачи обеспечивается априорной информацией (заведомо известно, что излучатель—пластина) и тем фактом, что излучается множество частот. Интересно, что именно наличие "неизлучающих излучателей", ответственных за провалы в амплитудно-частотной характеристике, позволяет оценить d .

9.2.17. Лазерный импульс падает из воздуха на водную поверхность, вблизи которой сосредоточены плоскопараллельные слои примесей, поглощающих свет. Тепловое расширение слоев возбуждает акустический импульс. Процесс его распространения описывается одномерным уравнением Даламбера (см. (1.1.2)) с граничным условием $p(x=0, t) = 0$ (свободная поверхность воды). Правая часть $F_0(x, t) = X'(x)T(t)$, где T —форма лазерного импульса, а X' —распределение источников по глубине. Изучить возможность реконструкции $X'(x)$ по измерению формы акустического импульса (X' есть производная $X(x)$ —зависимости коэффициента поглощения света от глубины, которой характеризуют, например, загрязненность верхних слоев акватории).

Решение. Задачу со свободной границей можно свести к задаче в безграничной среде, продолжив $X'(x)$ на область $x < 0$ нечетным образом. С учетом мнимых источников, излучающих в противофазе с действительными, пространственное распределение $F'(x) = (2\Theta(x)-1)X'(x)$, где Θ —единичная "ступенька" Хевисайда. Далее совершим преобразование Фурье по времени и перейдем от (1.1.2) к одномерному уравнению Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2} \tilde{p}(x, \omega) + k^2 \tilde{p}(x, \omega) = \tilde{T}(\omega) F'(x). \quad (1)$$

Здесь $\tilde{p}$, $\tilde{T}$ —спектральные амплитуды функций p , T ; $k = \omega/c_0$. Решение (1) можно записать с использованием функции Грина:

$$\tilde{p} = \tilde{T} \int_{-d}^d \frac{\exp(ik|x-x'|)}{2ik} F'(x') dx', \quad (2)$$

где d — суммарная толщина излучающих приповерхностных слоев; при $x > d$ функции $F'(x)$ и $F(x)$ обращается в нуль (см. (1.2.1)). В области $x > d$ решение (2) приобретает вид

$$\tilde{p} = \frac{\tilde{T}}{2ik} e^{ikx} \int_{-d}^d e^{-ikx'} dF(x') = \frac{\tilde{T}}{2} e^{ikx} \int_{-d}^d F(x') e^{-ikx'} dx'.$$

Последний интеграл, полученный интегрированием по частям, представляет собой $2\pi F(k)$ — фурье-образ функции $F(x)$. Итак, найдена спектральная амплитуда давления за пределами излучающих слоев: $\tilde{p} = \pi \tilde{T}(\omega) \tilde{F}(k) \exp(ikx)$. Выполняя теперь обратное преобразование Фурье, получим

$$p(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}(\omega) \tilde{F}\left[\frac{\omega}{c_0}\right] \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{x}{c_0}\right)\right] d\omega = \\ = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T(t') F\left[c_0(t - t' - \frac{x}{c_0})\right] dt'. \quad (3)$$

Результат (3) принимает наиболее простой вид, когда лазерный импульс имеет очень малую длительность. Действительно, если $T = \delta(t)$, то $2p(x, t) = F(c_0 t - x)$. Следовательно, в произвольной точке $x > d$ в интервале времени $(x-d)/c_0 < t < (x+d)/c_0$ акустический импульс (как функция t) будет воспроизводить вид функции $F(x)$.

9.2.18. Источником двумерного акустического поля является круг, излучающий широкополосный шум с неизвестной плотностью спектральной мощности. Можно ли по измерениям дальнего шумового поля определить радиус круга и спектр источников?

Решение. Можно. По аналогии с задачей 9.2.16 приходим к выводу, что амплитудно-частотная характеристика шумового поля за пределами круга пропорциональна (см. (4.3)) выражению

$$|J_1(\omega R_0/c_0) H_0^{(1)}(\omega r/c_0)|. \quad (1)$$

Значения частот, при которых (1) обращается в нуль для всех r , дают информацию о радиусе круга R_0 . Далее, зная расстояние r от центра круга до точки наблюдения, определяем зависимость от частоты аргумента функции Ганкеля $H_0^{(1)}$. После этого можно рассчитать плотность спектральной мощности.

9.2.19. Излучателем монохроматического поля является транспарант — плоскость xy , распределение источников на которой описывается функцией f ; правая часть уравнения (см. (1.1.2)) при этом равна $F_0 = f(x, y) \delta(z) \exp(-i\omega_0 t)$. Функция

$f \neq 0$ лишь в пределах ограниченного участка плоскости. Поле измеряется удаленной приемной апертурой конечного объема. Показать, что решение задачи определения источников по излученному ими полю единственно.

Решение. Если два разных излучателя F_1 и F_2 создают одинаковые внешние поля, то $F_1 - F_2$ есть "неизлучающий излучатель". Существование последнего является необходимым и достаточным условием неединственности решения обратной задачи излучения. Покажем, что рассматриваемый транспарант не может быть неизлучающим. Пространственный спектр этого источника

$$\int f \delta e^{ikr} dr = \int f(x, y) \exp(-ik_x x - ik_y y) dx dy = \tilde{f}(k_x, k_y).$$

Поскольку $f(x, y)$ отлична от нуля в ограниченной области, пространственный спектр $\tilde{f}(k_x, k_y)$, напротив, не обращается в нуль ни на какой области переменных k_x, k_y ненулевой площади. Кроме того, спектр $\tilde{f}$ не зависит от k_z . Отсюда следует, что $\tilde{f}$ не может обратиться в нуль на всей поверхности сферы Эвальда (см. задачу 9.2.14), т.е. транспарант не может быть "неизлучающим излучателем".

9.2.20. Монохроматический источник в трехмерном пространстве имеет форму цилиндра, $F_0 = f(x, y) \exp(-i\omega_0 t)$. Можно ли, измерив поле на удалении от источника, определить функцию f единственным образом?

Решение. По аналогии с задачей 9.2.19 ищем пространственный спектр:

$$\int f(x, y) \exp(-ikr) dr = 2\pi \delta(k_z) \tilde{f}(k_x, k_y).$$

Отсюда следует: для таких f , спектр которых $\tilde{f} \neq 0$ в сечении сферы Эвальда $k_x^2 + k_y^2 = \omega_0^2/c_0^2$, обратная задача имеет единственное решение. В общем же случае это не так. В частности, излучатель в виде круглого цилиндра радиуса R_0 : ($f(x, y, z) = 1$ для $x^2 + y^2 < R_0$ и $f = 0$ для $x^2 + y^2 > R_0$) имеет пространственный спектр

$$\tilde{f}(k) = R_0 \delta(k_z) J_1(k_\perp R_0)/k_\perp, \quad k_\perp = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}.$$

Если $R_0 \omega_0/c_0$ есть один из корней функции Бесселя J_1 , то цилиндр радиусом R_0 на частоте ω_0 будет неизлучающим.

9.2.21. Единственно ли решение трехмерной обратной задачи в классе плоскостойких монохроматических источников $F_0 = f(z) \exp(-i\omega_0 t)$?

Решение. Пространственный спектр источника:

$$\int f(z) \exp(-ikr) d\mathbf{r} = 4\pi^2 \delta(k_x) \delta(k_y) \tilde{f}(k_z).$$

Обратная задача излучения имеет единственное решение в классе излучателей, для которых $\tilde{f}(k_z) \neq 0$ в точках $k_x = \pm\omega_0/c_0$ на сфере Эвальда.

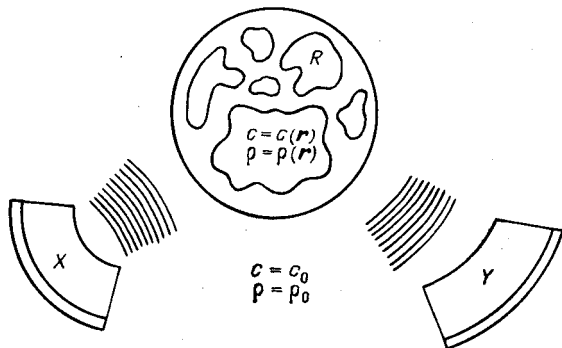
9.2.22. Требуется создать энергетически наиболее экономный излучатель в области R , формирующий заданное поле $p(\mathbf{r}, t)$ в области Y . Единственно ли решение этой задачи?

Ответ. Да. Минимизация энергетических затрат автоматически отсекает класс "неизлучающих излучателей", которые не вносят вклад в поле p в удаленной области Y , но потребляют энергию для создания внутренних полей в R . Такая задача связана с конструированием сложных антенн, распределенных фазированных апертур и других излучающих систем, создающих требуемое поле в заданной области (например, в окрестности фокуса). Она имеет единственное решение благодаря естественному требованию минимизации энергозатрат.

9.3. Обратные задачи рассеяния:

альтернативные постановки

9.3.1. В области R локализована неоднородность скорости звука $c(\mathbf{r})$, принимающая за пределами R фоновое значение c_0 . Источники лоцирующего монохроматического поля распределены в области X . Рассеянный сигнал регистрируется на приемной апертуре Y . Области X , Y , R обладают ненулевыми объемами и удалены друг от друга (см. рисунок). Обратная задача рассеяния состоит в локационном определении неоднородности $c(\mathbf{r})$. Как сформулировать эту задачу математически?



К задаче 9.3.1

Решение. Для измеряемой характеристики — монохроматического (на частоте ω_0) поля акустического давления — воспользуемся уравнением Гельмгольца

$$\Delta p(\mathbf{r}, \omega_0) + \frac{\omega_0^2}{c^2(\mathbf{r})} p(\mathbf{r}, \omega_0) = f_0(\mathbf{r}, \omega_0). \quad (1)$$

Здесь p, f — спектральные амплитуды поля и источника. В области источников X в уравнении (1) $c(\mathbf{r}) = c_0$. В рассеивающей области R в (1) $f_0 \equiv 0$. Наконец, на приемной апертуре Y в (1) следует положить $c \equiv c_0, f \equiv 0$. Фактически мы имеем дело с тремя различными уравнениями. Если амплитуда поля p была бы найдена в рассеивающей области R , то задача определения $c(\mathbf{r})$ решалась бы тривиально: $c^2(\mathbf{r}) = -\omega_0^2 p / \Delta p$. Однако амплитуда p в R неизвестна заведомо и не измеряется в процессе лоцирования. Поэтому задача формулируется так: найти функцию $c(\mathbf{r})$ такую, что решение всех трех уравнений (1) (в X, R, Y) будет сшиваться на границе области R при продлении $p(\mathbf{r}, \omega_0)$ из областей X (где функция p известна) и Y (где p измерена). Сшитое решение должно удовлетворять условию излучения на бесконечности.

Задача может быть сформулирована относительно интегрального уравнения, соответствующего (1). Выделим в левой части (1) гельмгольциан:

$$\Delta p + \frac{\omega_0^2}{c_0^2} p = \left[\frac{\omega_0^2}{c_0^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2(\mathbf{r})} \right] p + f_0. \quad (2)$$

В правой части (2) наряду с источником лоцирующего поля появился член $(k_0^2 - k^2(\mathbf{r})) p$ — “источник” рассеянного поля, возникший из-за того, что $c \neq c_0$. Применим к (2) интегральный оператор, обратный гельмгольциану (см. задачи 9.1.1, 9.1.7):

$$p = -\frac{1}{4\pi} \int_R \frac{\exp(i k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (k_0^2 - k^2(\mathbf{r}')) p(\mathbf{r}', \omega_0) d\mathbf{r}' + p_0.$$

Здесь $p_0(\mathbf{r}, \omega_0)$ — зондирующее, а $p(\mathbf{r}', \omega_0)$ — полное акустическое поле. Это — уравнение типа

$$p(\mathbf{r}) - p_0(\mathbf{r}) = \int_R G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \xi(\mathbf{r}') p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (3)$$

его называют уравнением Липпмана — Швингера. Интегральная постановка обратной задачи рассеяния основана на двукратной записи уравнения (3): в области приема ($\mathbf{r} \in Y$) и в рассеивающей области ($\mathbf{r} \in R$). В системе двух уравнений присутствуют две неизвестные функции ξ и p , локализованные в R . Первое из

уравнений (3) связывает неизвестные ξ , p с функцией $p - p_0$, измеряемой на приемной апертуре Y в результате локационного эксперимента. Второе из уравнений (3) можно рассматривать как связь, накладываемую на неизвестные ξ , p .

Отметим, что для решения обратной задачи (восстановления $\xi(r)$) требуется определить "ненужную" функцию p — поле внутри рассеивающей области R . Интегральная постановка обратной задачи проще и наглядней, чем дифференциальная; здесь автоматически учитывается требование непрерывности поля и условия излучения.

9.3.2. Решить задачу 9.3.1, предположив, что зондирование неоднородности ведется сигналом конечной длительности $f_0(r, t)$.

Решение. Для получения уравнения типа (1.3) нужно воспользоваться оператором, обратным даламбертиану. Интегральное уравнение получается таким:

$$p - p_0 = \int_R \int_{-\infty}^{\infty} G(r - r', t - t') \xi(r') p(r', t') dt'. \quad (1)$$

Как и в задаче 9.3.1 для монохроматического поля, здесь следует решать пару уравнений (1): на приемной апертуре ($r \in Y$) и в рассеивающей области ($r \in R$). В этой системе функции $\xi = c_0^{-2} - c^{-2}(r)$ и p внутри R являются неизвестными. Функция Грина дается выражением (см. задачи 9.1.7, 9.1.8)

$$G(r, t) = - \frac{\delta''(t - |r|/c_0)}{(4\pi|r|)}, \quad (2)$$

а первичное (облучающее) поле вычисляется по источникам f_0 :

$$p_0 = - \frac{1}{4\pi} \int_X \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t - t' - |r - x|/c_0)}{|r - x|/c_0} f_0(x, t') dt'.$$

Из (1), (2) следует, что поле в неоднородной среде есть суперпозиция "запаздывающих" полей, вычисляемых по формулам, справедливым для однородной среды.

9.3.3. Получить уравнение рассеяния и исследовать постановку обратной задачи 9.3.1 в предположении о том, что наряду с неоднородностью скорости звука в области R присутствует неоднородность плотности $\rho(r)$, принимающая вне R фоновое значение ρ_0 .

Решение. Рассмотрим уравнения непрерывности и движения (см. (1.1.1)), считая в них сжимаемость $\beta_0 = \beta(r)$ и плотность $\rho_0 = \rho(r)$. Полагая изменение источников и полей во времени

пропорциональным $\exp(-i\omega_0 t)$, сведем систему к уравнению

$$\Delta p + k_0^2 p = (k_0^2 - k^2) p + \nabla p \nabla \ln \rho + F_0. \quad (1)$$

$$k^2 = \omega_0^2 \beta(r) \rho(r) = \omega_0^2 / c^2(r), \quad F_0 = i\omega \rho_0 s_0(r, \omega_0) + \nabla f_0(r, \omega_0)$$

— функция, описывающая источники первичного (лоцирующего) поля. Два других члена в правой части (1) ответственны за рассеяние, возникающее при взаимодействии поля p с неоднородностями скорости $c(r)$ и плотности $\rho(r)$. Применяя к (1) оператор, обратный гельмгольциану, получаем

$$p - p_0 = \int_R G(r-r') (k_0^2 - k^2) p \, dr' + \int_R G(r-r') \nabla \ln \rho \nabla p \, dr'. \quad (2)$$

Введение неизвестной $\rho(r)$ усложняет обратную задачу. Наряду с неизвестным полем p в (2) фигурирует его градиент ∇p ; (2) не является уравнением типа Липпмана—Швингера (см. (1.1.3)).

9.3.4. Доказать, что если спектральная амплитуда давления $p(r, \omega_0)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца в неоднородной среде (3.1), а области локализации функций $\rho(r) - \rho_0$ (область R) и F_0 (область X) не перекрываются, то в любой точке пространства справедливо тождество

$$\left[\frac{\rho_0}{\rho} \right]^{1/2} p = p_0 + \int_R \left[\left[\frac{\rho_0}{\rho} \right]^{1/2} (k_0^2 - k^2) + \Delta \left[\frac{\rho_0}{\rho} \right]^{1/2} \right] G(r-r') p(r) \, dr',$$

называемое уравнением Бергманна.

9.3.5. Показать, что с помощью уравнения Бергманна обратная задача рассеяния в среде, содержащей неоднородности скорости звука и плотности, сводится к уравнению Липпмана—Швингера.

Решение. Следствием уравнения Гельмгольца (3.1) является уравнение Бергманна (см. задачу 9.3.4). Вводя обозначения

$$q(r) = p(r) \left[\frac{\rho_0}{\rho(r)} \right]^{1/2}, \quad \xi = k_0^2 - k^2(r) + \left[\frac{\rho}{\rho_0} \right]^{1/2} \Delta \left[\frac{\rho_0}{\rho} \right]^{1/2},$$

приведем это уравнение к виду, совпадающему с (1.3):

$$q(r) - p_0(r) = \int_R G(r-r') \xi(r') q(r') \, dr'. \quad (1)$$

9.3.6. Исходя из задач 9.3.3, 9.3.5, показать, что вклады в рассеянное поле от неоднородностей скорости звука и плотности можно разделить, лоцируя объект на частотах ω_0 и ω_1 .

Решение. Эффективный рассеиватель ξ (см. (5.1)) зависит от частоты: $\xi(r, \omega_0) = \omega_0^2 n_c(r) + n_\rho(r)$, где

$$n_c = c_0^{-2} - c^{-2}(r), \quad n_\rho = \left[\frac{\rho(r)}{\rho_0} \right]^{1/2} \Delta \left[\frac{\rho_0}{\rho(r)} \right]^{1/2}. \quad (1)$$

Определив в результате решения двух обратных задач рассеяния эффективные рассеиватели на двух частотах:

$$\xi(\mathbf{r}, \omega_0) \equiv \xi_0 = \omega_0^2 n_c + n_\rho, \quad \xi(\mathbf{r}, \omega_1) \equiv \xi_1 = \omega_1^2 n_c + n_\rho,$$

найдем

$$n_c(\mathbf{r}) = (\xi_0 - \xi_1) / (\omega_0^2 - \omega_1^2), \quad n_\rho(\mathbf{r}) = (\omega_0^2 \xi_1 - \omega_1^2 \xi_0) / (\omega_0^2 - \omega_1^2). \quad (2)$$

9.3.7. В результате решения обратных задач рассеяния на неоднородностях скорости звука и плотности среды удалось определить функции n_c , n_ρ (см. (6.1)). Можно ли по этим данным однозначно восстановить c , ρ ?

Решение. По известной n_c скорость звука находится из первой формулы (6.1):

$$c(\mathbf{r}) = c_0 [1 - n_c(\mathbf{r}) c_0^2]^{-1/2}. \quad (1)$$

Для определения $\rho(\mathbf{r})$ нужно решить уравнение типа Шредингера

$$\Delta \Psi - n_\rho(\mathbf{r}) \Psi = 0, \quad \Psi = [\rho_0 / \rho(\mathbf{r})]^{1/2}. \quad (2)$$

Известно, что уравнение (2) имеет единственное решение, которое, в отличие от (1), находится численными методами.

9.3.8. Доказать, что обратная задача рассеяния на неоднородностях скорости звука и плотности при зондировании рассеивателя на одной частоте имеет бесчисленно много решений.

Решение. Возьмем 3 любые гладкие функции, локализованные в R : k_1 , ρ_1 , ρ_2 . Определим четвертую функцию по правилу

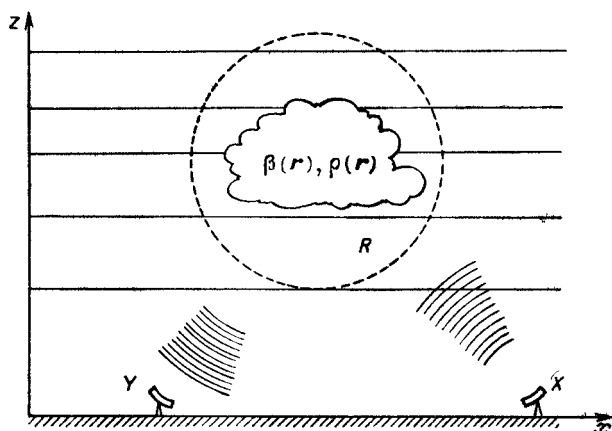
$$k_2^2 = k_1^2 - \left[\frac{\rho_1}{\rho_0} \right]^{1/2} \Delta \left[\frac{\rho_0}{\rho_1} \right]^{1/2} + \left[\frac{\rho_2}{\rho_0} \right]^{1/2} \Delta \left[\frac{\rho_0}{\rho_2} \right]^{1/2}.$$

Таким образом, имеем две пары функций k_1 , ρ_1 и k_2 , ρ_2 , образующих одинаковую неоднородность $\xi(\mathbf{r})$ (см. (5.1)). Следовательно, внешние поля этих рассеивателей тождественны.

9.3.9. Нижние слои атмосферы зондируются двумя сонарами (см. рисунок). Стратификация невозмущенной атмосферы (толщины слоев и их характеристики) известны. Цель эксперимента — определение акустических характеристик возмущения — неоднородности. Лоцирование ведется монохроматическим полем. Получить интегральные уравнения рассеяния как для давления, так и для колебательной скорости.

Решение. По аналогии с задачей 9.3.1 эта задача приводит к паре уравнений Липпмана–Швингера (в области R и Y), но в матричной форме

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) + \int_R \hat{A}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \xi(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (1)$$



К задаче 9.3.9

где в качестве полного и зондирующего полей выступают векторы

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} p(\mathbf{r}, \omega_0) \\ v(\mathbf{r}, \omega_0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} p_0(\mathbf{r}, \omega_0) \\ v_0(\mathbf{r}, \omega_0) \end{bmatrix}.$$

Матричный оператор $\hat{A}$ определяется (1.11.1), (1.11.2), а искомым рассеиватель — диагональной матрицей

$$\xi = \begin{bmatrix} -i\omega_0(\beta(z) - \beta(r)) & 0 \\ 0 & -i\omega_0(\rho(z) - \rho(r)) \end{bmatrix},$$

в которой $\beta(z)$ и $\rho(z)$ — известные функции, описывающие стратификацию неоднородной атмосферы, а $\beta(r)$ и $\rho(r)$ — искомые трехмерные возмущения этой стратификации.

9.3.10. Идеально мягкий граничный рассеиватель характеризуется функцией $\chi(r)$, равной единице внутри рассеивателя ($r \in R$) и равной нулю вне R . Доказать, что поле давления (при зондировании на частоте ω_0) удовлетворяет уравнению Гельмгольца для неоднородной среды

$$\Delta p + k_0^2 p = -p \Delta \chi + f_0. \quad (1)$$

Решение. Воспользуемся интегральной формулой Кирхгофа (2.9.1), выражающей рассеянное поле $p - p_0$ через интеграл по поверхности рассеивателя S :

$$p - p_0 = \int_S \left[p(r') \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial p(r')}{\partial n} \right] dS'. \quad (2)$$

На поверхности идеально мягкого рассеивателя $p(r') = 0$, поэтому равен нулю первый подынтегральный член (2). Сменим знак при нулевом члене (2) и преобразуем подынтегральное

выражение:

$$-p \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}(pG) = -\nabla(pG) \cdot \mathbf{n}.$$

Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, перейдем от поверхностного интеграла к объемному:

$$p - p_0 = - \int_V \Delta(pG) d\mathbf{r}' = - \int_{\infty} \chi(\mathbf{r}') \Delta(pG) d\mathbf{r}' = - \int_{\infty} pG \Delta \chi d\mathbf{r}'.$$

Здесь мы перешли от интегрирования по объему V области R к интегрированию по всему пространству, а затем воспользовались интегрированием по частям. Применив к полученному равенству гельмгольциан, придем к доказываемому утверждению (1).

9.3.11. Какому уравнению удовлетворяет полное поле давления в случае монохроматического зондирования идеально жесткого граничного рассеивателя?

Ответ. Действуя по аналогии с предыдущей задачей и замечая, что на поверхности рассеивателя $\partial p / \partial n = 0$, приходим к уравнению типа (10.1). Отличие в том, что первый член правой части имеет противоположный знак — плюс.

9.3.12. Можно ли в результате дистанционного зондирования идеального граничного рассеивателя определить его тип (жесткий или мягкий), размер, форму?

Ответ. Да. Допустим, рассеиватель мягкий. Определим на базе уравнения Липпмана-Швингера, отвечающего (10.1), эффективный рассеиватель $\xi = \Delta \chi$. Форма границы (следовательно, размеры) рассеивателя можно найти, применив к рассчитанной функции ξ обратный оператор Лапласа Δ^{-1} (в трехмерном случае это ньютонов потенциал). Если реконструированная характеристическая функция χ оказалась положительной, следовательно, тип рассеивателя угадан правильно — он акустически мягкий. В противном случае χ получится отрицательной.

9.3.13. Монохроматическая волна нормально падает на плоский рассеиватель рефракционного типа ($k = k(x)$, $\rho = \text{const}$). Спектральная амплитуда в рассеивающей области R

$$p(x, \omega_0) = (2ik_0 - 1)^{-1} \exp(ik_0|x|) + \exp(ik_0x). \quad (1)$$

Определить рассеивающую неоднородность и спектральную амплитуду $p_0(x, \omega_0)$ зондирующего поля.

Решение. Вычислим источники рассеянного поля, совпадающие в R с гельмгольцианом $p(x, \omega_0)$:

$$d^2 p / dx^2 + k_0^2 p = 2ik_0 (2ik_0 - 1)^{-1} \delta(x). \quad (2)$$

Применив к обеим частям (2) оператор, обратный оператору Гельмгольца, найдем рассеянное поле:

$$p - p_0 = \int \frac{\exp(ik_0|x-x'|)}{2ik_0} \frac{2ik_0}{2ik_0-1} \delta(x') dx' = \frac{\exp(ik_0|x|)}{2ik_0-1}. \quad (3)$$

Так как полное поле (1) известно, находим зондирующее поле $p_0 = \exp(ik_0x)$. Запишем уравнение Липпмана-Швингера:

$$p - p_0 = \int \frac{\exp(ik_0|x-x'|)}{2ik_0} \xi(x') p(x', \omega_0) dx'. \quad (4)$$

Сравнивая (4) и (3) и учитывая, что согласно (1)

$$\frac{2ik_0}{2ik_0-1} \delta(x') = p(0, \omega_0) \delta(x') = p(x', \omega_0) \delta(x'),$$

находим неоднородность $\xi = \delta(x)$.

9.3.14. Решить предыдущую задачу при условии, что в области R поле

$$p(x, \omega_0) = -(2ik_0-1)^{-1} \exp(ik_0|x|) + \exp(ik_0x). \quad (1)$$

Ответ. Аналогично решению предыдущей задачи получаем

$$k^2(x) = k_0^2 - \frac{ik_0}{1-ik_0} \delta(x), \quad p_0 = \exp(ik_0x).$$

Интересно, что смена знака при рассеянном поле (ср. (1) и (13.1)) не эквивалентна смене знака при характеристике рассеивателя.

9.3.15. Решить задачу 9.3.13 при условии, что полное поле имеет вид

$$p(x, \omega_0) = -\frac{2ik_0}{2ik_0+1} \exp(ik_0|x|) + \exp(ik_0x). \quad (1)$$

Ответ. $k^2(x) = k_0^2 + \delta(x)$, т.е. $\xi = -\delta(x)$. Отсюда следует, что и смена знака при характеристике рассеивателя не приводит к смене знака поля (ср. (1) и (13.1)). Это естественно, так как уравнение Липпмана-Швингера не является симметричным относительно этих функций.

9.4. Линеаризованные обратные задачи дифракции: приближения Борна и Рытова

9.4.1. Разложить уравнение Липпмана-Швингера (3.1.3) в ряд по итерированным ядрам. При каком условии применимо борновское приближение однократного рассеяния?

Решение. Запишем (3.1.3) в виде

$$p = p_0 + \hat{G}\xi p. \quad (1)$$

Здесь p , p_0 — полное и зондирующее поля, ξ — функция, характеризующая рассеиватель, $\hat{G}$ — интегральный оператор с соответствующей функцией Грина. Заменим p под знаком оператора $\hat{G}$ всей правой частью (1):

$$p = p_0 + \hat{G}\xi(p_0 + \hat{G}\xi p) = p_0 + \hat{G}\xi p_0 + \hat{G}\xi \hat{G}\xi p.$$

Повторяя эту процедуру N раз, получим

$$p = p_0 \sum_{n=1}^N (\hat{G}\xi)^N p_0 + (\hat{G}\xi)^{N+1} p \quad (2)$$

— разложение (1) по итерированным ядрам. Если норма $||\hat{G}\xi|| < 1$, то при $N \rightarrow \infty$ последний член в (2) исчезает и рассеянное поле выражается через зондирующее p суммой, носящей название ряда Борна–Неймана. Если $||\hat{G}\xi|| \ll 1$, главным становится первый член ряда, и мы приходим к борновскому приближению:

$$p = p_0 + \hat{G}\xi p_0. \quad (3)$$

отвечающему однократному рассеянию зондирующей волны на неоднородности.

9.4.2. Одномерная рассеивающая неоднородность (слой) сосредоточена в области $0 < x < L$, где $c = c(x)$. Вне слоя скорость звука $c \equiv c_0$, а плотность равна ρ_0 во всем пространстве. На слой из области $x < 0$ нормально падает плоская волна, давление в которой $p_0(x, t)$ — произвольная, финитная по времени функция.

Считая, что неоднородность слабая: $\max |c_0^{-2} - c^2(x)| \ll c_0^{-2}$, и справедливо борновское приближение, получить выражение для давления в прошедшей и отраженной волнах. Найти функцию отклика — реакцию слоя на воздействие δ -импульсом. Можно ли определить $c(x)$ по измерениям поля прошедшей волны? Отраженной волны?

Решение. Запишем исходное уравнение, выделив в левой части даламбериан:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - c_0^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p = -\xi(x) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + f_0, \quad \xi = c_0^{-2} - c^{-2}(x).$$

Обратный оператор (см. задачу 9.1.6) имеет вид

$$-\frac{c_0}{2} \int \Theta \left[t - t' - \frac{|x - x'|}{c_0} \right] (\cdot) dx' dt',$$

где Θ — единичная ступень Хевисайда. Применяя этот оператор к уравнению Даламбера, перейдем к интегральному уравнению Липмана–Швингера

$$p_{\text{рас}} = p - p_0 = \frac{c_0}{2} \int \Theta \left[t - t' - \frac{|x - x'|}{c_0} \right] \xi(x') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} p dx' dt'.$$

Интегрируя дважды по частям, "перебросим" вторую производную с p на функцию Хевисайда:

$$p_{\text{рас}} = -\frac{c_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \delta \left[t - t' - \frac{|x - x'|}{c_0} \right] \xi(x') p(x', t') dx' dt'. \quad (1)$$

Для слабых рассеивателей выражение (1) допустимо использовать в борновском приближении. В этом случае под интегралом (1) следует заменить p на поле падающей на слой волны p_0 . Для поля, прошедшего через слой ($x > L$),

$$p_{\text{пр}} = -\frac{c_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \xi(x') p_0 \left[x', t - \frac{x - x'}{c_0} \right] dx'. \quad (2)$$

Поле, отраженное от слоя, представляется иначе ($x < 0 < x'$):

$$p_{\text{отр}} = -\frac{c_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \xi(x') p_0 \left[x', t + \frac{x - x'}{c_0} \right] dx'. \quad (3)$$

Найдем реакцию слоя на δ -импульс $p_0(x, t) = P_0 \delta(t - x/c_0)$:

$$p_{\text{пр}} = -\frac{c_0 P_0}{2} \delta' \left[t - \frac{x}{c_0} \right] \int_0^L \xi(x') dx', \quad p_{\text{отр}} = -\frac{c_0 P_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \xi \left[\frac{x + c_0 t}{2} \right]. \quad (4)$$

Из (4) следует, что рассеянная вперед волна несет информацию лишь об интегральной характеристике $\int_0^L \xi(x') dx'$. С помощью лоцирования "напросвет" иной информации о рассеивателе $\xi(x)$ получить не удастся. В случае же лоцирования слоя "на отражение" картина иная: $p_{\text{отр}}$ как функция времени (при фиксированном x) повторяет по форме ξ' (как функцию координат).

9.4.3. Рассмотрим задачу 9.4.2 при условии, что зондирование слоя производится плоской монохроматической волной $p_0 = P_0 \exp(-i\omega_0 t + ik_0 x)$. Получить выражения для коэффициентов отражения и прохождения.

Решение. Опуская временную зависимость, запишем уравнение Липпмана-Швингера для спектральных амплитуд

$$p_{\text{рас}} = \frac{\omega_0 c_0}{2i} \int_0^L \exp(ik_0 |x - x'|) \xi(x') p(x') dx'.$$

В приближении Борна ($p = p_0$) для прошедшей и отраженной волн:

$$p_{\text{пр}} = \frac{1}{2i} \omega_0 c_0 P_0 \exp(ik_0 x) \int_0^L \xi(x') dx'. \quad (1)$$

$$p_{\text{отр}} = \frac{1}{2i} \omega_0 c_0 P_0 \tilde{\xi}(2k_0), \quad \tilde{\xi}(k) = \int_0^L \xi(x) e^{ikx} dx. \quad (2)$$

Из выражения (1) для прошедшей волны следует, что, измеряя ее амплитуду, можно восстановить только интегральную харак-

теристика неоднородности (см. задачу 9.4.2). Сама же $\xi(x)$ не восстановима. Иное дело — измерение отраженных слоев гармоник. Облучая слой волнами многих частот и всякий раз измеряя амплитуды отраженных сигналов, можно получить фурье-компоненты $\xi(2k_0)$ для любого значения $k = 2k_0 = 2\omega_0/c_0$. Совершив затем обратное преобразование Фурье, можно восстановить $\xi(x)$. Таким образом, неоднородность нужно лоцировать волнами многих частот (или широкополосными импульсами, как в задаче 9.4.2).

Коэффициенты прохождения и отражения равны

$$W = \frac{p_{\text{пр}}}{P_0} = \frac{\omega_0 c_0}{2i} \int_0^L \xi(x) dx, \quad V = \frac{p_{\text{отр}}}{P_0} = \frac{\omega_0 c_0}{2i} \tilde{\xi}(2k_0). \quad (3)$$

9.4.4. Найти, какой компонент пространственного спектра плоского рассеивателя, описанного в задаче 9.4.2, ответствен за рассеяние назад плоской нормально падающей волны.

Решение. Ответ на вопрос содержится в (3.3): за рассеяние назад ответствен компонент $\tilde{\xi}(2k_0)$. Этот результат непосредственно следует из волнового уравнения (см. задачу 9.4.2), где источником рассеянного поля является член $-\xi(x) \partial^2 p / \partial t^2$.

Полагая в этом выражении

$$p = p_0 = P_0 \exp(-i\omega_0 t + ik_0 x), \quad \xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(K) e^{-iKx} dK,$$

получаем

$$-\xi \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \omega_0^2 P_0 \exp(-i\omega_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(K) \exp[-i(k_0 - K)x] dK.$$

Отсюда видно, что необходимая фаза рассеянной назад волны $\exp(-i\omega_0 t - ik_0 x)$ создается тем компонентом пространственного спектра, для которого $K - k_0 = k_0$, т.е. $K = 2k_0$.

9.4.5. В задаче 9.4.4 показано, что за рассеяние назад ответствен спектральный компонент неоднородности $\tilde{\xi}(2k)$, где $k = \omega/c_0$ — волновое число падающей волны. Если в среде имеется слабая периодическая неоднородность $\xi(x) = \xi_0 \cos(2kx)$, слабые отраженные возмущения от каждого из слоев складываются в фазе и волна, рассеянная от всей "резонансной" неоднородности, может иметь значительную амплитуду. Иначе говоря, две волны, бегущие в положительном и отрицательном направлениях оси x , из-за многократных переотражений в слоях связаны между собой. Получить уравнения для комплексных амплитуд связанных волн.

Решение. В условиях этой задачи уравнение Гельмгольца запишется так:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + k^2 p = \frac{1}{2} \xi_0 \omega^2 \left(e^{i \cdot 2kx} + e^{-i \cdot 2kx} \right) p. \quad (1)$$

Ищем решение в виде суммы двух встречных волн:

$$p = P_+(x_1 = \mu x) e^{ikx} + P_-(x_1 = \mu x) e^{-ikx}, \quad (2)$$

где P_+ , P_- — амплитуды прямой (падающей) и обратной (рассеянной назад) волн, медленно изменяющиеся на расстояниях порядка длины волны $\lambda = 2\pi k$. Наличие малого параметра $\mu \ll 1$, учитывающего медленность, связано с тем, что неоднородность предполагается слабой. Подставляя (2) в (1), пренебрежем членами $\sim \mu^2$; собирая после этого члены при двух экспонентах $\exp(\pm ikx)$, получаем искомую пару уравнений:

$$\frac{dP_+}{dx} = \frac{i}{4} c_0^2 k \xi_0 P_-, \quad \frac{dP_-}{dx} = -\frac{i}{4} c_0^2 k \xi_0 P_+. \quad (3)$$

Заметим, что в (3) величина ξ_0 может предполагаться медленно зависящей от x ; этот случай соответствует квазипериодической, локализованной в пространстве неоднородности.

9.4.6. Используя уравнение (5.3) для амплитуд связанных волн, найти коэффициенты отражения волны от периодически слоистой среды толщиной L . Затем провести сравнение полученного результата с решением этой задачи в борновском приближении. Можно ли решить обратную задачу — определить L по измеренному коэффициенту отражения?

Решение. Система (5.3) сводится к одному уравнению

$$d^2 P_- / dx^2 - \alpha^2 P_- = 0, \quad \alpha = \frac{1}{4} c_0^2 k \xi_0. \quad (1)$$

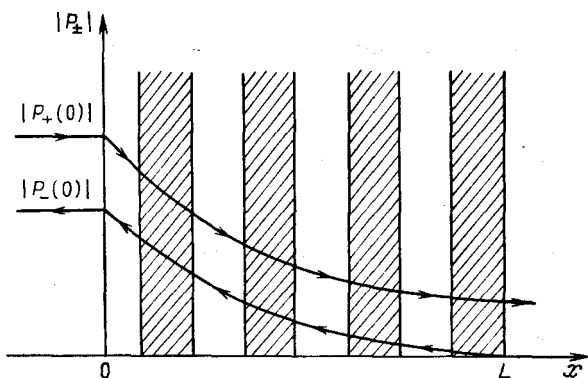
Отсюда находим P_- . Подставляя полученное решение в исходную систему, определим P_+ . Выражения для комплексных амплитуд:

$$P_- = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}, \quad P_+ = iC_1 e^{\alpha x} - iC_2 e^{-\alpha x}. \quad (2)$$

Пусть участок неоднородной среды расположен между $x = 0$ и $x = L$ (см. рисунок). Поставим граничные условия:

$P_+(x=0) = P_+(0)$ (задана амплитуда падающей волны) и $P_-(x=L) = 0$ (отраженная волна начинает формироваться только в неоднородной среде). Этих условий достаточно для определения констант C_1 , C_2 . Поведение амплитуд встречных волн, описываемое решением

$$P_- = iP_+(0) \frac{\operatorname{sh}[\alpha(L-x)]}{\operatorname{ch}(\alpha L)}, \quad P_+ = P_+(0) \frac{\operatorname{ch}[\alpha(L-x)]}{\operatorname{ch}(\alpha L)}, \quad (3)$$



К задаче 9.4.6

показано на рисунке. Коэффициент отражения

$$V = |P_-/P_+|_{x=0} = \operatorname{th} \left[\frac{1}{4} c_0^2 k \xi_0 L \right]. \quad (4)$$

По измеренному V толщину L периодически слоистого участка можно определить, если известна ξ_0 — глубина модуляции неоднородности среды.

Для решения задачи в борновском приближении подставим в правую часть (см. (5.1)) поле падающей волны $P_+(0) \exp(ikx)$. Отраженная волна найдется в этом случае из уравнения второго приближения

$$\frac{d^2 p^{(2)}}{dx^2} + k^2 p^{(2)} = \frac{1}{2} \xi_0 \omega^2 P_+(0) e^{-ikx}.$$

Решение уравнения, отвечающее граничному условию $p^{(2)}(x=L) = 0$, имеет вид

$$p^{(2)} = P_-(x) = -i\alpha P_+(0) (L-x) e^{-ikx}.$$

Коэффициент отражения в борновском приближении однократного рассеяния равен

$$V = |P_-/P_+|_{x=0} = \frac{1}{4} c_0^2 k \xi_0 L. \quad (5)$$

Сравнивая (5) с результатом (4), учитывающим многократное рассеяние в слоистой неоднородности, видим, что борновское приближение справедливо при $V \ll 1$. В частности, при $L \rightarrow \infty$ из (5) следует неограниченный рост коэффициента отражения, хотя очевидно, что $V \leq 1$. Этого недостатка лишен результат (4), для которого $V(L \rightarrow \infty) \rightarrow 1$.

9.4.7. Рассеиватель — периодическая неоднородность скорости звука $\xi = c_0^{-2} - c^{-2}(x) = \xi_0 \cos(Kx)$, локализованная при

$-L < x < L$. Он облучается монохроматической нормально падающей волной $p_0 = P_0 \exp(-i\omega_0 t + ik_0 x)$. Применяв к уравнению Липпмана-Швингера преобразование Фурье, исследовать поведение пространственного спектра поля внутри рассеивателя (при $L \rightarrow \infty$) в двух случаях: а) точного решения уравнения рассеяния; б) решения в борновском приближении.

Решение. Исходное уравнение имеет вид

$$p(x) = p_0(x) + \int_{-L}^L \frac{\exp(ik_0|x-x'|)}{2ik_0} \varepsilon(x') p(x') dx', \quad (1)$$

где $\varepsilon = \omega_0^2 \xi$. Устремляя L к бесконечности и применяя к (1) преобразование Фурье, получаем

$$\tilde{p}(k) = \tilde{p}_0(k) + (k_0^2 - k^2)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varepsilon}(k-k') \tilde{p}(k') dk'. \quad (2)$$

Здесь использовано выражение (1.3.1) $(k_0^2 - k^2)^{-1}$ для фурье-образа функции Грина. Подставляя в (2) значения

$$\tilde{p} = 2\pi \delta(k+k_0), \quad \tilde{\varepsilon} = \pi\omega_0^2 \xi_0 [\delta(k+K) + \delta(k-K)],$$

приведем уравнение к виду

$$\tilde{p} = 2\pi \delta(k+k_0) + \frac{\pi\omega_0^2 \xi_0}{k_0^2 - k^2} [\tilde{p}(k+K) + \tilde{p}(k-K)]. \quad (3)$$

В борновском приближении

$$\tilde{p} = 2\pi \delta(k+k_0) + \frac{2\pi^2 \omega_0^2 \xi_0}{k_0^2 - k^2} [\delta(k+k_0+K) + \delta(k-k_0-K)]. \quad (4)$$

Проинтегрировав (4) по малой окрестности точек $\pm k_0$, получим выражения для амплитуд плоских волн частотой ω_0 , бегущих в прямом и обратном направлениях внутри рассеивателя.

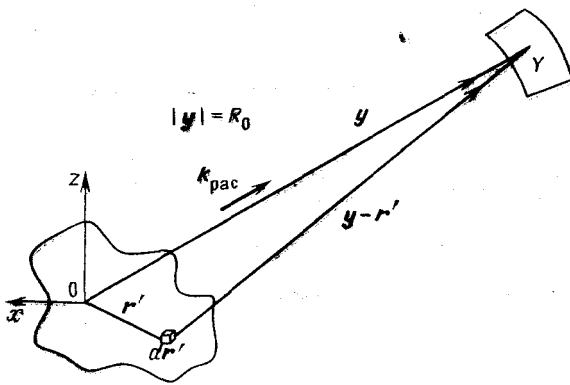
9.4.8. Борновский рассеиватель представляет собой слабое возмущение скорости звука, $\varepsilon(\mathbf{r}) = \omega_0^2 [c_0^{-2} - c^{-2}(\mathbf{r})]$. Показать, что при облучении его плоской волной

$$p_0 = P_0 \exp(-i\omega_0 t + ik_{\text{пад}} \mathbf{r}), \quad |k_{\text{пад}}| = \omega_0/c_0,$$

рассеянное поле в дальней зоне пропорционально фурье-образу $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}_{\text{рас}} - \mathbf{k}_{\text{пад}})$, где $\mathbf{k}_{\text{рас}}$ — волновой вектор рассеянной плоской волны.

Решение. Пусть R_0 — расстояние между началом координат, расположенным внутри рассеивателя, и удаленной приемной апертурой Y (см. рисунок). В дальней зоне расстояние между текущей точкой объема и точкой наблюдения

$$|\mathbf{y} - \mathbf{r}'| \approx |\mathbf{y}| - \mathbf{y}\mathbf{r}'/|\mathbf{y}| = R_0 - \mathbf{r}'\mathbf{k}_{\text{рас}}/k_0.$$



К задаче 9.4.8

Функция Грина при этом имеет вид

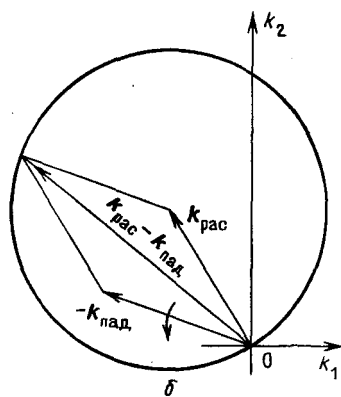
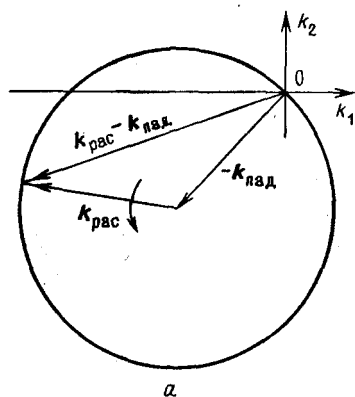
$$-\frac{\exp(ik_0|y-r'|)}{4\pi|y-r'|} \approx \frac{\exp(ik_0R_0)}{4\pi R_0} \exp(-ik_{\text{рас}}r').$$

Для рассеянного поля в дальней зоне получим

$$p(y, \omega_0) - p_0(y, \omega_0) \sim \int \exp(-ik_{\text{рас}}r') \epsilon(r') \exp(ik_{\text{пад}}r') dr' = \tilde{\epsilon}(k_{\text{рас}} - k_{\text{пад}}). \quad (1)$$

9.4.9. Рассмотреть двумерный вариант предыдущей задачи при следующих схемах интроскопического эксперимента: 1) облучение производится единственной плоской волной, а рассеянные волны регистрируются в дальней зоне по всем направлениям (волновые векторы описывают окружность радиусом $|k_{\text{рас}}| = \omega_0/c_0$); 2) облучение производится волнами со всех направлений (векторы падающих волн описывают окружность радиусом $|k_{\text{пад}}| = \omega_0/c_0$), а рассеянное поле измеряется только по одному направлению. Какова информация о рассеивателе, получаемая в обоих случаях?

Решение. Несложно показать, что связь (8.1) между рассеянным полем и пространственным спектром неоднородности справедлива и в двумерном случае. В результате экспериментов первого типа удастся получить информацию о пространственном спектре рассеивателя $\tilde{\epsilon}(k)$ на окружности радиусом ω_0/c_0 , сдвинутой на $-k_{\text{пад}}$ относительно начала координат в импульсном пространстве (см. рисунок а). В экспериментах второго типа, "закрепив" вектор $k_{\text{рас}}$ и вращая вектор облучающего поля $k_{\text{пад}}$, получаем информацию об $\tilde{\epsilon}(k)$ на окружности такого же радиуса, но сдвинутой на $k_{\text{рас}}$ относительно начала координат



К задаче 9.4.9

(см. рисунок б). Эти окружности совпадают в двух точках, одна из которых — начало координат.

9.4.10. Облучение борновского рассеивателя производится плоскими волнами фиксированной частоты со всевозможных направлений. Дальнее рассеянное поле также фиксируется по всем направлениям. Какую информацию о пространственном спектре рассеивателя можно получить в таком эксперименте? Какова степень избыточности этой информации?

Решение. Из задачи 9.4.9 следует, что при фиксированном $k_{\text{пад}}$ и всевозможных направлениях $k_{\text{рас}}$ спектр реконструируется на окружности (см. рисунок а к задаче 9.4.9). Варьируя затем направление волнового вектора $k_{\text{пад}}$ зондирующей волны, получим круг удвоенного радиуса $|k| \leq 2\omega_0/c_0$. Для всех k внутри круга избыточность информации двукратная; избыточность отсутствует для значений $|k| = 2\omega_0/c_0$ и равна бесконечности для $|k| = 0$.

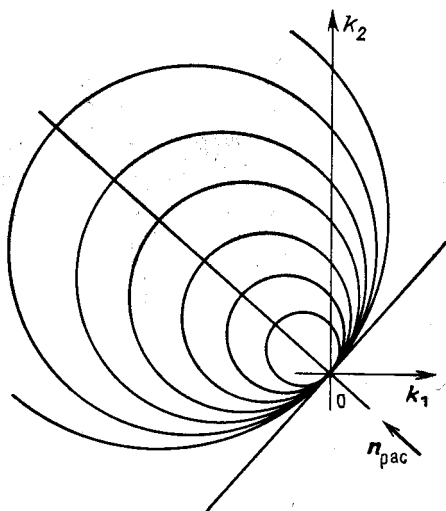
9.4.11. Рассмотреть интроскопический эксперимент задачи 9.4.10. Оценить возможность восстановления рассеивателя при отсутствии ошибок измерения и шумов и с учетом их влияния.

Решение. В идеальном варианте (шумы и помехи отсутствуют) получается точная информация о спектре рассеивателя во всех точках круга $|k| \leq 2\omega_0/c_0$. Функция $\tilde{\epsilon}(k)$ аналитична и может быть однозначно продлена за пределы этого круга (см. задачи 9.2.11–9.2.13). Определив спектр рассеивателя на всем двумерном импульсном пространстве, с помощью обратного преобразования Фурье можно реконструировать сам рассеиватель. При наличии ошибок и шумов реконструкция будет грубой; процедура

аналитического продления — операция очень неустойчивая, чувствительная к помехам.

9.4.12. Борновский рассеиватель облучается плоскими волнами всевозможных частот и направлений. Рассеянное поле регистрируется с направления, задаваемого единичным вектором $\mathbf{n}_{\text{рас}}$. Какова информация, получаемая в результате лоцирования? Какую априорную информацию о рассеивателе нужно иметь, чтобы восстановить его без использования неустойчивой процедуры продления спектра $\tilde{\epsilon}(\mathbf{k})$ за пределы области наблюдения?

Решение. Спектр рассеивателя $\tilde{\epsilon}$ измеряется на семействе окружностей (см. рисунок), проходящих через начало координат с центрами на прямой, задаваемой $\mathbf{n}_{\text{рас}}$ (см. рисунок б к задаче 9.4.9). Итак, $\tilde{\epsilon}$ измеряется для всех точек импульсного полупространства $\mathbf{k}\mathbf{n}_{\text{рас}} \geq 0$. Каждая из окружностей отвечает фиксированной частоте и всевозможным ракурсам облучения. Для реконструкции рассеивателя вид $\tilde{\epsilon}$ при $\mathbf{k}\mathbf{n}_{\text{рас}} < 0$ должен автоматически определяться значениями $\tilde{\epsilon}$ в полупространстве измерений. В качестве априорной информации могут служить, например, соображения симметрии (четность или нечетность $\tilde{\epsilon}$ относительно $\mathbf{k}\mathbf{n}_{\text{рас}} = 0$).



К задаче 9.4.12

В качестве априорной информации могут служить, например, соображения симметрии (четность или нечетность $\tilde{\epsilon}$ относительно $\mathbf{k}\mathbf{n}_{\text{рас}} = 0$).

9.4.13. Обратные задачи излучения и рассеяния в борновском приближении сводятся к решению уравнения Фредгольма 1-го рода, относительно источников f или рассеивающей неоднородности ϵ . Объяснить, почему, вообще говоря, решение обратной задачи рассеяния единственно, а задача восстановления излучателя f не имеет единственного решения?

Ответ. Задачи не эквивалентны. При решении обратной задачи рассеяния можно варьировать облучающее поле, что меняет вид ядра уравнения Фредгольма; речь идет о континуальной совокупности уравнений с одной и той же неизвестной функцией ϵ . В случае обратной задачи мы имеем дело с одним уравнением.

9.4.14. Борновский рассеиватель представляет собой слабое возмущение плотности ρ и сжимаемости β , локализованное в ограниченной области R . Получить уравнения рассеяния для давления и колебательной скорости.

Решение. Пользуясь решением задачи 9.4.9 и поступая по аналогии с задачей 9.3.1, придем к уравнениям

$$\begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \omega_0^2 \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \begin{pmatrix} \beta_0 - \beta(\mathbf{r}') \\ \rho_0 - \rho(\mathbf{r}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(\mathbf{r}') \\ v(\mathbf{r}') \end{pmatrix} d\mathbf{r}' - \\ - i\omega_0 \int \nabla G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \begin{pmatrix} \rho_0 - \rho(\mathbf{r}') \\ \beta_0 - \beta(\mathbf{r}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(\mathbf{r}') \\ p(\mathbf{r}') \end{pmatrix} d\mathbf{r}'. \quad (1)$$

Введем обозначения: $\varepsilon_\beta = \beta_0 - \beta$, $\varepsilon_\rho = \rho_0 - \rho$, рассмотрим первое (верхнее) уравнение системы (1), заменив полные поля p и v под интегралами на первичные (зондирующие) поля p_0 и v_0 . Предположим, что на рассеиватель падает плоская волна

$$p_0 = P_0 \exp(ik_{\text{пад}} \mathbf{r}), \quad v_0 = V_0 \exp(ik_{\text{пад}} \mathbf{r}), \quad P_0 = \rho_0 c_0 V_0, \quad (2)$$

где $V_0 = |V_0|$, $|k_{\text{пад}}| = k_0 = \omega_0/c_0$. Для рассеянного поля

$$p - p_0 = -\omega_0^2 \rho_0 \int \frac{\exp(ik_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \varepsilon_\beta P_0 \exp(ik_{\text{пад}} \mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \\ + \omega_0^2 \rho_0 \int \frac{\exp(ik_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left[ik_0 - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \varepsilon_\rho V_0 \exp(ik_{\text{пад}} \mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Предполагая, что $|ik_0| \gg 1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$, приходим к приближению дальней зоны

$$p - p_0 \sim \omega_0^2 P_0 [\rho_0 \tilde{\varepsilon}_\beta (\mathbf{k}_{\text{рас}} - \mathbf{k}_{\text{пад}}) + \beta_0 \tilde{\varepsilon}_\rho (\mathbf{k}_{\text{рас}} - \mathbf{k}_{\text{пад}}) n_{\text{рас}} n_{\text{пад}}], \quad (3)$$

где $n_{\text{рас}} = \mathbf{k}_{\text{рас}}/k_0$, $n_{\text{пад}} = \mathbf{k}_{\text{пад}}/k_0$. Как и в (8.1), здесь опущен множитель $\exp(ik_0 R_0) \cdot 4\pi R_0$. Произведя аналогичные преобразования со вторым (нижним) уравнением системы (1), получим

$$v - v_0 \sim \omega_0^2 V_0 [\rho_0 \tilde{\varepsilon}_\beta (\mathbf{k}_{\text{рас}} - \mathbf{k}_{\text{пад}}) n_{\text{рас}} + \beta_0 \tilde{\varepsilon}_\rho (\mathbf{k}_{\text{рас}} - \mathbf{k}_{\text{пад}}) n_{\text{пад}}]. \quad (4)$$

9.4.15. Исходя из (14.3), исследовать поведение диаграммы направленности рассеянного поля. Можно ли, используя диаграмму, решить задачу сепарации неоднородностей ε_β и ε_ρ ?

Ответ. Диаграмма направленности поля давления, дифрагированного на ρ -неоднородности, имеет дипольный характер за счет сомножителя $n_{\text{рас}} n_{\text{пад}}$, в то время как рассеяние на β -неоднородности равномерно по всем направлениям. Поэтому в направлении, ортогональном волновому вектору зондирующей волны, регистрируется только поле, рассеянное β -неоднородностью.

9.4.16. Исходя из (14.4), проанализировать поведение компонент вектора колебательной скорости рассеянного поля. Мо-

жет ли раздельная регистрация проекций этого вектора на направления зондирования и визирования облегчить задачу сепарации рассеивающих неоднородностей β - и ρ -типа?

Ответ. Выражение (14.4) является разложением колебательной скорости по направлениям визирования ($\mathbf{p}_{\text{рас}}$) и зондирования ($\mathbf{p}_{\text{пад}}$). Первая проекция вектора определяется только рассеянием на дефекте β -типа, вторая — ρ -типа. Метод не применим, если $\mathbf{p}_{\text{рас}}$ и $\mathbf{p}_{\text{пад}}$ коллинеарны, т.е. при лоцировании неоднородностей только на просвет либо только на отражение.

9.4.17. Пусть ограниченная область R , в которой локализована неоднородность скорости звука $\xi = \omega_0^2(c_0^{-2} - c^{-2}(\mathbf{r}))$, облучается полем $p_0(\mathbf{r}, \omega_0)$ удаленных монохроматических источников. Показать, что уравнение Гельмгольца преобразуется к виду

$$\Delta \left[p_0 \ln \frac{p}{p_0} \right] + k_0^2 \left[p_0 \ln \frac{p}{p_0} \right] = \xi p_0 - p_0 \left[\nabla \ln \frac{p}{p_0} \right]^2. \quad (1)$$

9.4.18. Широко используемое во многих задачах приближение Рытова состоит в приведении уравнения Гельмгольца для внутренних точек лоцируемой неоднородности к виду (17.1) с опусканием второго члена в правой части. 1. В чем состоит преимущество, достигаемое в результате этого приближения? 2. Какова область применимости приближения Рытова? 3. В чем сходство и различие приближений Борна и Рытова?

Ответ. 1. Уравнение линеаризуется относительно неизвестной $\xi(\mathbf{r})$; исчезает мультипликативный член ξp , содержащий произведение неизвестных функций и ответственный за нелинейную связь рассеивателя с полем. 2. Область применимости — плавные неоднородности. Характеристики среды должны меняться незначительно на длине волны. При этом член $\nabla \ln(p/p_0)$ мал и им можно пренебречь. 3. Оба приближения дают уравнения, линейные по ξ . Однако приближение Борна приводит к "истинно линейному" уравнению, а Рытова — к линейному относительно функции $\ln(p/p_0)$, нелинейно зависящей от поля. Таким образом, рытовское приближение сохраняет нелинейность связи характеристики неоднородности и рассеянного поля, но в "завуалированном" виде. С физической точки зрения разница ясна: борновское приближение требует слабости рассеивателя, а рытовское — его гладкости.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Задачники и учебные пособия

1. *Ржевкин С.Н.* Задачи по теории звука. — М.: Изд-во МГУ, 1976.
2. *Бархатов А.Н., Горская Н.В.* Задачи по акустике. — Горький: Изд-во ГГУ, 1983.
3. *Гурбатов С.Н., Руденко О.В.* Нелинейная акустика в задачах. — М.: Изд-во МГУ, 1990.
4. *Ржевкин С.Н.* Курс лекций по теории звука. — М.: Изд-во МГУ, 1960.
5. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. 2-е изд. — М.: Наука, 1990.
6. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. — М.: Наука, 1984.
7. *Шутилов В.А.* Основы физики ультразвука. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
9. *Лепендин Л.Ф.* Акустика. — М.: Высшая школа, 1978.
10. *Исакович М.А.* Общая акустика. — М.: Наука, 1973.
11. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. — Л.: Гидрометеиздат, 1982.
12. *Клещев А.А., Клюкин И.И.* Основы гидроакустики. — Л.: Судостроение, 1987.
13. *Тюлин В.Н.* Введение в теорию излучения и рассеяния звука. — М.: Наука, 1976.
14. *Крылов В.В.* Основы теории излучения и рассеяния звука. — М.: Изд-во МГУ, 1989.
15. *Рожин Ф.В., Тонаканов О.С.* Общая гидроакустика. — М.: Изд-во МГУ, 1988.
16. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.

Монографии

17. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. 2-е изд. — М.: Наука, 1973.
18. *Лэмб Г.* Динамическая теория звука / Пер. с англ.; под ред. М.А.Исаковича. — М.: Физматгиз, 1960.

19. Морз Ф. Колебания и звук. / Пер. с англ.; под ред. С.Н.Ржевкина. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
20. Камп Л. Подводная акустика. / Пер. с англ.; под ред. С.Н.Ржевкина. — М.: Мир, 1972.
21. Скучик Е. Основы акустики. / Пер. с англ.; под ред. Л.М.Лямшева. — М.: Мир, 1976.
22. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. — Л.: Судостроение, 1972.
23. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975.
24. Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика. — М.: Судостроение, 1981.
25. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. — М.: Наука, 1990.
26. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. — М.: Наука, 1981.
27. Кайно Г. Акустические волны. / Пер. с англ.; под ред. О.В.Руденко. — М.: Мир, 1990.
28. Римский-Корсаков А.В. Электроакустика. — М.: Связь, 1973.
29. Сапожков М.А. Электроакустика. — М.: Связь, 1978.
30. Горюнов А.А., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. — М.: Изд-во МГУ, 1989.
31. Гусев В.Э., Карабутов А.А. Лазерная оптоакустика. — М.: Наука, 1991.
32. Васильева О.А., Карабутов А.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
33. Наугольных К.А., Островский Л.А. Нелинейные волновые процессы в акустике. — М.: Наука, 1990.