OPTICAL COHERENCE AND QUANTUM OPTICS

LEONARD MANDEL

Lee DuBridge Professor of Physics and Optics
University of Rochester, Rochester, N.Y., USA

AND

EMIL WOLF

Wilson Professor of Optical Physics
University of Rochester, Rochester, N.Y., USA

Cambridge University Press
1995

Л. МАНДЕЛЬ, Э. ВОЛЬФ

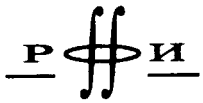
ОПТИЧЕСКАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

Перевод с английского
С.Н. АНДРИАНОВА, А.А. КАЛАЧЁВА, В.Н. ЛИСИНА, Т.Г. МИТРОФАНОВОЙ, М.И. НОСКОВА, В.В. САМАРЦЕВА, С.С. ХАРИНЦЕВА

Под редакцией
профессора В.В. САМАРЦЕВА

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2000

ББК 22.343
М23
УДК 535



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проектам №99-02-30038 и №00-02-30000

Л. Мандель, Э. Вольф. Оптическая когерентность и квантовая оптика: Пер. с англ./Под ред. В.В. Самарцева — М.: Наука. Физматлит, 2000. — 896 с., ил. — ISBN 5–9221–0073–4

Книга посвящена систематическому изложению основ новой области современной оптической физики, имеющей дело с проблемами когерентности и флуктуаций света. Авторы являются широко известными учеными, внесшими основополагающий вклад в решение многих проблем когерентной и квантовой оптики. С единых позиций излагаются теория оптической когерентности, фотоэлектрического детектирования света, эффекты резонансного взаимодействия квантовых систем с электромагнитным полем и ряд квантовых эффектов нелинейной оптики. Большая часть книги основана на различных учебных курсах, читаемых авторами в течение многих лет.

Книга представляет интерес для широкого круга исследователей, работающих в области современной оптики, а также для преподавателей, аспирантов и студентов соответсвующих специальностей.

Табл. 3. Ил. 300. Библиогр.: 900 назв.

ISBN 5–9221–0073–4 (русск.)
ISBN 0–521–41711–2 (англ.)

© Cambridge University Press, 1995
© ФИЗМАТЛИТ, 2000 (русск.)

Посвящается нашим женам
Джин и Марлис
в знак признательности
за их терпение, понимание и помощь

ПРЕДИСЛОВИЕ

До появления первых лазеров в начале шестидесятых годов оптическая когерентность не была предметом, с которым был хорошо знаком широкий круг ученых, несмотря на то, что на ранней стадии существенный вклад в появление оптической когерентности был сделан рядом выдающихся физиков, включая Макса фон Лауэ, Эрвина Шредингера и Фрица Цернике. Однако, ситуация изменилась после того, как было установлено, что замечательные свойства лазерного излучения зависят от его когерентности. Среди ранних работ, также вызвавших интерес к оптической когерентности, следует отметить серию важных экспериментов, проведенных в пятидесятых годах Хэнбери Брауном и Твиссом, показавших, что корреляции между флуктуациями взаимно когерентных пучков теплового излучения могут быть измерены с помощью экспериментов по фотоэлектрической корреляции и подсчету двухфотонных совпадений. Интерпретация этих экспериментов была, однако, сопряжена со спорами, что, в свою очередь, усиливало необходимость понимания когерентных свойств света и их влияния на взаимодействие между светом и веществом.

Несомненно именно осознание того, что предмет оптической когерентности еще не вполне понят, побудило доктора Е.У. Кондона предложить нам более чем три десятилетия назад подготовить обзорную статью, посвященную когерентности и флуктуациям света, для публикации в Review of Modern Physics, редактором которого он тогда являлся. Статья была хорошо принята и часто цитируема, и это побудило нас к расширению материала статьи до размеров книги. Мы и не подозревали тогда, насколько быстро этот предмет будет развиваться и что он станет краеугольным камнем принципиально новой области, называемой ныне квантовой оптикой. Кроме того, в 1970-х годах появились первые эксперименты, связанные с неклассическими состояниями света, которые дали толчок новым квантово-механическим исследованиям. На перспективу роста таких исследований указывал и тот факт, что книга «Принципы оптики», написанная М. Борном и Э. Вольфом и опубликованная в 1959 году, за год до появления лазера, содержала главу, состоящую из более чем 60 страниц, посвященную частично когерентному свету и включавшую в себя большую часть того, что тогда было известно об этом предмете. Она полностью основывалась на классической волновой теории, так как квантовая оптика едва существовала в то время. Напротив, в представляемой книге, квантовым явлениям уделено более чем в два раза больше места, чем классическим. Возможно, она покажется несколько необычной из-за изложения в ней как классической, так и квантовой теории флуктуирующих электромагнитных полей.

Несмотря на размер книги, мы не претендуем на полноту изложения, особенно в части квантово-механических разделов, некоторые темы изложены неполно или вообще отсутствуют. Например, только короткий раздел посвящен проблеме лазерного охлаждения и захвата атомов в ловушки, которая заслуживает отдельной книги, а новая важная область атомной интерферометрии не обсуждается вовсе.

Хотя сначала мы пытались быть последовательными в использовании единых обозначений по всей книге, позднее мы отбросили эту попытку, частично из-за того, что значительный размер книги сделал такую попытку практически неосуществимой, а частично потому, что в некоторых подразделах когерентной оптики уже сложились свои обозначения и они не коррелируют с обозначениями других подразделов. Что касается наиболее спорного вопроса о выборе системы единиц при описании электромагнитных величин, мы продемонстрировали широту взглядов, использовав как гауссовы так и СИ единицы. Однако, при обсуждении экспериментов всегда используются единицы системы СИ.

Большая часть книги базируется на лекционных курсах, которые мы оба читаем на протяжении более чем 30 лет в Университете Рочестера (Нью-Йорк) и других университетах. В частности, раздел 3.2, посвященный угловому спектральному представлению волновых полей, основан на лекциях, впервые прочитанных одним из нас (Эмилем Вольфом) в бывшем Национальном Бюро Стандартов в Гейзерсбурге, штат Мэриленд, в 1979 и 1980 годах. Часть текста была написана им во время отпусков, когда он работал

при Университете Калифорнии в Беркли и в исследовательской лаборатории Шлумбергера-Долла в Ридгефилде, Коннектикут, и профессор Эмиль Вольф хотел бы выразить свою признательность профессору Саммеру П. Девису и доктору Роберту П. Портеру за предоставление благоприятных условий для работы.

Мы выражаем благодарность мистеру К.Дж. Харперу и миссис П.Т. Суллоуф, прежнему и настоящему главам библиотеки Физики, библиотеки Оптики и Астрономии при Университете Рочестера за их помощь в поиске и проверке некоторых из почти недоступных ссылок.

Авторы из академии часто имеют счастливую возможность обратиться за помощью к своим настоящим и прошлым аспирантам, и мы благодарим за помощь, которую мы получили от нескольких поколений своих студентов в проверке различных разделов рукописи и высказывании многих ценных предложений для ее усовершенствования. Мы особенно обязаны Г.С. Агарвалу, С. Бали, Д. Бреннингу, Б. Каирнсу, Ф.К. Чеггу, В.Г. Фишеру, А. Фоугересcу, А. Гембелу, Т.П. Грейсону, Д.Ф.В. Джеймсу, М. Коварзу, П.Д. Летту, Ф.А. Нардасси, Дж.В. Ноху, Дж.Р. Торгерсону, Л.Дж. Вэнгу и К.У. Зоу за их помощь. Мы также благодарны мистеру Фишеру за подготовку предметного указателя и доктору В. Вэнгу за изготовление некоторых рисунков и за проверку многих ссылок.

Мы также многим обязаны нашим прошлым и нынешнему секретарям, миссис Р. Эндрюс и миссис Элен Калкинс, мисс Лауре Гиффорд и миссис Дженифер Ван Реммен, которые терпеливо печатали и перепечатывали большую часть рукописи, а также миссис Калкинс — за подготовку индекса авторов.

Мы с благодарностью отмечаем отличное сотрудничество с персоналом Кэмбридж Юниверсити Пресс на всех стадиях печати книги. В частности, мы хотим выразить наше уважение миссис Сьюзан Боуринг — редактору копий и мистеру Тони Томминсону — производственному менеджеру, за искусство, с которым они превратили несовершенную рукопись в прекрасно выглядящую книгу. И, наконец, мы хотели бы поблагодарить доктора Симона Капелина — издательского директора по физическим наукам Кэмбридж Юниверсити Пресс, за то, что он шел нам навстречу, чтобы учесть все наши многочисленные пожелания в течение длинного периода от начального обсуждения до окончательного завершения проекта.

Университет Рочестера,
Рочестер, Нью Йорк,
Май 1995

Леонард Мандель и Эмиль Вольф

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Определения

Понятие вероятности является важным для оптики, как и для любой другой области, где результат данного опыта или измерения не является однозначным. В этих условиях желательно ввести некоторую меру, характеризующую степень правдоподобия возможной реализации какого-либо результата или события. Такая мера называется *вероятностью* события[1].

В прошлом существовали различные определения вероятности. Классическое определение основано на исчерпывающем перечислении возможных результатов эксперимента или испытания. Если испытание имеет N различных взаимоисключающих результатов, появление которых равновероятно, и если n из этих возможных N результатов мы рассматриваем как «успех», тогда вероятность успеха в любом одиночном испытании определяется отношением n/N. Например, если мы бросаем игральную кость, и если каждая из шести цифр имеет равную возможность оказаться наверху, когда кость остановится, то имеется $N = 6$ различных исходов. Если успехом мы считаем появление, например, четного числа, то, поскольку есть три различных варианта достижения этого успеха, его вероятность при выбрасывании кости определяется как $3/6 = 1/2$. К сожалению, исчерпывающее перечисление всех возможных результатов не всегда осуществимо.

Другое общее определение вероятности основано на понятии относительной частоты успеха. Если в большом числе из N независимых испытаний успешный результат появляется n раз, то тогда относительная частота успеха равна n/N. Когда N становится очень большим, мы называем это отношение *вероятностью успеха* в любом одиночном испытании. Однако в математическом смысле n/N не имеет предела при $N \to \infty$.

Напротив, понятие вероятности может быть введено аксиоматическим путем, при котором мы просто связываем меры $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, ..., называемые вероятностями, со всеми возможными результатами или событиями A, B, C, ... в испытании. Если полное пространство событий обозначить как Ω, то тогда $A \in \Omega$, $B \in \Omega$ и т.д. Удобно ввести следующие обозначения, которые иллюстрируются диаграммами Венна на рис. 1.1:

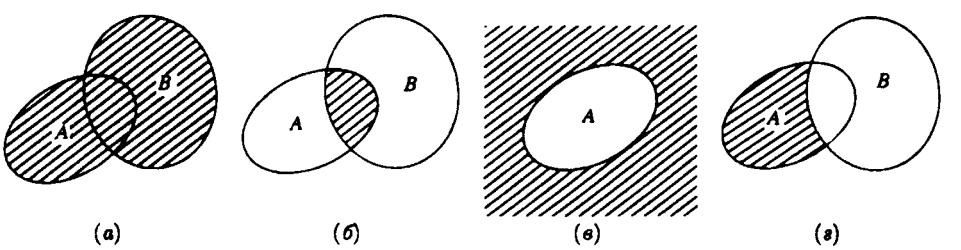


Рис. 1.1. Диаграммы Венна для определенных комбинаций событий A и B. Заштрихованная область означает: *а* — A или B или оба; *б* — как A, так и B; *в* — не A; *г* — A, но не B

[1]Со многими понятиями этой главы можно ознакомиться, например, в книге (*Вентцель, 1962) — *ред. пер.*

$$A \cup B \to A + B$$

означает *комбинацию* или *объединение* двух событий A и B, под которым подразумевается A или B или оба события (см. рис. 1.1*а*);

$$A \cap B \to A, B$$

означает *пересечение* двух событий A и B, которое подразумевает как A, так и B (см. рис. 1.1*б*);

$$\widetilde{A} \to -A$$

означает *дополнение* события A, которое подразумевает отсутствие A (см. рис. 1.1*в*);

$$A \cap \widetilde{B} \to A - B$$

означает пересечение события A с дополнением события B, под которым подразумевается наличие события A, но не B (см. рис. 1.1*г*). Не существующее событие $\varnothing$ является дополнением множества Ω. Во всех случаях обозначение справа является привычным в теории вероятностей, а обозначение слева является обычным в теории множеств. Рис. 1.1*а-г* иллюстрируют понятия объединения двух событий, пересечение двух событий и т.д. геометрически. Два события A и B являются *несовместимыми* и *взаимоисключающими*, если они не перекрываются вообще или пересечением этих двух событий является несуществующее событие $\varnothing$. Следующие три аксиомы используются для определения свойств вероятности $p(A)$ данного события:

(а) $p(A) \geqslant 0$, (1.1.1)

(б) $p(\Omega) = 1$, (1.1.2)

(в) если $A_1, A_2, A_3, \ldots$ являются взаимоисключающими событиями, тогда

$$p(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \ldots . \quad (1.1.3)$$

Выражение (1.1.2) может быть интерпретировано в том смысле, что вероятность достоверного результата равна 1. Так как $A + \widetilde{A} = \Omega$ и A и $\widetilde{A}$ являются взаимоисключающими, то из выражения (1.1.3) следует, что $p(A) + p(\widetilde{A}) = p(A + \widetilde{A}) = p(\Omega)$, и из выражений (1.1.1) и (1.1.2) следует, что

$$0 \leqslant p(A) \leqslant 1. \quad (1.1.4)$$

Таким образом, любая вероятность принимает значения в области от нуля до единицы.

1.2. Свойства вероятностей

Непосредственно из этих соотношений вытекает ряд важных следствий. Если события A_1, A_2, ..., A_N являются взаимоисключающими и представляют набор всех возможных исходов, так что $A_1 + A_2 + \cdots + A_N = \Omega$, то из (1.1.2) и (1.1.3) следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} p(A_i) = p\left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right) = p(\Omega) = 1. \quad (1.2.1)$$

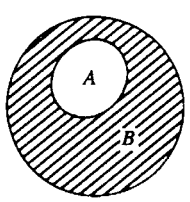


Рис. 1.2. Иллюстрация множества A как подмножества B

Так же, если A является подмножеством B, или $A \subset B$, как продемонстрировано диаграммой Венна на рис. 1.2, то тогда A и $B - A$ являются взаимоисключающими, и их объединение равно B, так что с помощью выражения (1.1.3) имеем $p(A)+p(B-A) = p(B)$ или

$$p(A) \leqslant p(B), \quad \text{когда } A \subset B. \quad (1.2.2)$$

И, наконец, отметим, что событие, которое не может иметь места, имеет нулевую вероятность, потому что $\varnothing + \Omega = \Omega$, так что $p(\varnothing) + p(\Omega) = p(\Omega)$, и

$$p(\varnothing) = 0. \quad (1.2.3)$$

Таким образом, если A и B являются взаимоисключающими, то вероятность того, что произойдут оба события A и B, $p(A, B) = 0$.

1.2.1. Совместные вероятности

События, которые получены путем объединения с другими событиями, известны как совместные события, а соответствующие вероятности — совместные вероятности. Таким образом, $p(A,B)$ является *совместной вероятностью* обоих событий A и B, или вероятностью пересечения A с B. Порядок, в котором перечислены A и B, является несущественным. Так как совместное событие A,B является подмножеством события A (см. рис. 1.1*б*), то из выражения (1.2.2) следует, что

$$p(A,B) \leqslant p(A), \quad \text{и, аналогично,} \quad p(A,B) \leqslant p(B). \tag{1.2.4}$$

Следовательно, совместная вероятность для двух событий всегда меньше (или равна) вероятности каждого из событий.

Если $B_1, B_2, \ldots, B_M$ является набором всех возможных взаимоисключающих событий, то тогда

$$\sum_{i=1}^{M} p(A,B_i) = p(A,\Omega) = p(A). \tag{1.2.5}$$

Этот результат следует непосредственно из того факта, что A,B_1 A,B_2 ... также является набором взаимоисключающих событий, покрывающих все пространство [см. (1.1.3)]. В более общем случае совместная вероятность может включать в себя более двух событий. Если C_1, C_2, ..., C_N является полным набором взаимоисключающих событий, то тогда

$$\sum_{k=1}^{N} p(A,B,C_k,D,\ldots) = p(A,B,D,\ldots). \tag{1.2.6}$$

Теперь рассмотрим ситуацию, в которой два события A и B не являются обязательно взаимоисключающими (см. рис. 1.1*а*), и рассчитаем вероятность $p(A+B)$ объединения $A+B$. Мы не сможем применить закон суммирования (1.2.6) к A и B непосредственно. Однако, заметим, что два события A и $B-A$ (рис. 1.1) являются взаимоисключающими, а их объединение равно $A+B$. Тогда, согласно (1.1.3),

$$p(A) + p(B-A) = p(A+B). \tag{1.2.7}$$

Также, $B-A$ и A,B являются взаимоисключающими с объединением B, так что

$$p(B) = p(B-A) + p(A,B).$$

Если мы подставим $p(B-A)$ в выражение (1.2.7), то сразу получим

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A,B), \tag{1.2.8}$$

так что

$$p(A+B) \leqslant p(A) + p(B). \tag{1.2.9}$$

Выражение (1.2.8) известно как *закон сложения* для двух событий, которые не являются обязательно взаимоисключающими. Соотношение легко обобщается на N событий: A_1, A_2, ..., A_N, для которых оно может быть доказано методом индукции, так что

$$p(A_1 + A_2 + \cdots + A_N) = \sum_{i=1}^{N} p(A_i) - \underbrace{\sum_{i\neq j}^{N}\sum^{N} p(A_i,A_j)}_{\text{по } \binom{N}{2} \text{ парам}} + \underbrace{\sum_{\substack{i\neq j\neq k\\ i\neq k}}^{N}\sum^{N}\sum^{N} p(A_i,A_j,A_k)}_{\text{по } \binom{N}{3} \text{ тройкам}} - \cdots + (-1)^{N-1} p(A_1,A_2,\ldots,A_N). \tag{1.2.10}$$

Также, повторным применением неравенства (1.2.9) мы легко найдем, что

$$\begin{aligned} p(A_1 + A_2 + \cdots + A_N) &\leqslant p(A_1 + A_2 + \cdots + A_{N-1}) + p(A_N) \leqslant \\ &\leqslant p(A_1 + A_2 + \cdots + A_{N-2}) + p(A_{N-1}) + p(A_N) \leqslant \\ &\leqslant p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_N), \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

где знак равенства имеет место в случае взаимоисключающих событий.

1.2.2. Условные вероятности

Вероятность некоторого события A, обусловленного некоторым другим событием B, известна как *условная вероятность A относительно события B*, и она часто обозначается как $\mathscr{P}(A \mid B)$. Она задается отношением

$$\mathscr{P}(A \mid B) = p(A, B)/p(B) \tag{1.2.12}$$

и определена, разумеется, только когда B не является нулевым событием. Из (1.2.4) непосредственно следует, что

$$0 \leqslant \mathscr{P}(A \mid B) \leqslant 1, \tag{1.2.13}$$

так что условная вероятность является истинной вероятностью со всеми свойствами, определенными ранее. Если $A_1, A_2, \ldots, A_N$ — полный набор взаимоисключающих возможных результатов, то, благодаря свойству (1.2.5), имеем

$$\sum_{i=1}^{N} \mathscr{P}(A_i \mid B) = 1. \tag{1.2.14}$$

Если условная вероятность события A относительно события B равна безусловной вероятности события A, или

$$\mathscr{P}(A \mid B) = p(A), \tag{1.2.15}$$

то, очевидно, неважно, происходит B или нет, поскольку это не касается A. События A и B тогда описываются как *статистически независимые*. Из (1.2.15) и (1.2.12) мы видим, что

$$p(A, B) = p(A)p(B) \tag{1.2.16}$$

всякий раз, как A и B статистически независимы, и это иногда принимается в качестве определяющего соотношения для статистической независимости. С более общей точки зрения, необходимое и достаточное условие статистической независимости для N событий A_1, A_2, ..., A_N состоит в том, что совместная вероятность факторизируется в виде

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_N) = p(A_1)p(A_2)\ldots p(A_N). \tag{1.2.17}$$

Аналогичное выражение сохраняется для любого подмножества из N событий. Очевидно, что события, которые являются взаимоисключающими, не могут быть статистически зависимыми, потому что совместная вероятность для взаимоисключающих событий равна нулю (кроме тривиального случая, в котором одно или более событий не могут случиться вообще).

Следующий простой пример может оказаться полезным. Предположим, что подбрасывается игральная кость и фиксируется число на верхней ее грани. Рассмотрим событие A, в котором число делится на 2, событие B, в котором число делится на 3, и событие C, в котором число является неделимым (т.е. простым). Эти события описываются следующими наборами цифр с вероятностями:

$$\begin{aligned} A &= (2,4,6), \quad p(A) = 1/2, \\ B &= (3,6), \quad\;\; p(B) = 1/3, \\ C &= (2,3,5), \quad p(C) = 1/2. \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

Пересечения среди этих наборов задаются следующими выражениями

$$\begin{aligned} (A,B) &= (6), \quad p(A,B) = 1/6, \\ (A,C) &= (2), \quad p(A,C) = 1/6, \\ (B,C) &= (3), \quad p(B,C) = 1/6. \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} p(A,B) &= p(A)p(B), \\ p(A,C) &\neq p(A)p(C), \\ p(B,C) &= p(B)p(C), \end{aligned} \tag{1.2.20}$$

так что A и B являются статистически так же независимыми, как B и C, но A и C не являются статистически независимыми.

1.2.3. Теорема Байеса для апостериорных вероятностей

Из определения (1.2.12) для условной вероятности вытекают следующие два выражения

$$p(A,B) = \mathscr{P}'(A \mid B)p(B), \quad p(A,B) = \mathscr{P}(B \mid A)p(A).$$

Приравнивая друг к другу оба выражения для $p(A,B)$, мы получим следующее соотношение для взаимоисключающих событий A и B:

$$\mathscr{P}'(A \mid B) = \frac{\mathscr{P}(B \mid A)p(A)}{p(B)} = \frac{\mathscr{P}(B \mid A)p(A)}{\sum\limits_{\text{по всем } A} \mathscr{P}(B \mid A)p(A)}, \tag{1.2.21}$$

где в последнем выражении использована формула (1.2.5). Это соотношение известно как *теорема Байеса*. Если мы называем $\mathscr{P}(B \mid A)$ условной вероятностью события B относительно события A, то мы можем рассматривать $\mathscr{P}'(A \mid B)$ в качестве апостериорной вероятности события A относительно события B. Тогда, согласно теореме Байеса, апостериорная вероятность определяется из прямой условной вероятности вместе с вероятностью $p(A)$. На практике эта теорема часто применяется к таким экспериментам, в которых событие A должно быть определено из измерений B, но при этом мало или ничего не известно об априорной вероятности $p(A)$. Тогда некоторые предположения об априорных характеристиках $p(A)$ должны быть сделаны до использования (1.2.21), и это привносит некоторый произвол в вычисления.

Проиллюстрируем проблему на простом примере. В сосуде содержится N шаров, либо черных, либо белых, в неизвестной пропорции. Шар выбирается случайным образом и, допустим, он оказывается белым. Мы хотим определить апостериорную вероятность того, что сосуд содержал n ($0 \leqslant n \leqslant N$) белых шаров изначально, в свете проведенного эксперимента. Пусть $\mathscr{P}(1 \mid n)$ будет условной вероятностью того, что выбирается белый шар из сосуда, в котором n белых шаров ($n = 0, 1, \ldots, N$). Из постановки задачи очевидно, что $\mathscr{P}(1 \mid n) = n/N$. Тогда из (1.2.21) следует, что апостериорная вероятность $\mathscr{P}'(n \mid 1)$ того, что сосуд первоначально содержал n белых шаров при условии, что выбран именно белый шар, определяется выражением

$$\mathscr{P}'(n \mid 1) = \frac{\mathscr{P}(1 \mid n)p(n)}{\sum_{n=0}^{N} \mathscr{P}(1 \mid n)p(n)} = \frac{(n/N)p(n)}{\sum_{n=0}^{N}(n/N)p(n)}, \tag{1.2.22}$$

где $p(n)$ является априорной вероятностью того, что сосуд содержит n белых шаров. К сожалению, ничего не известно о $p(n)$, так что, строго говоря, выражение (1.2.22) не может быть использовано. Однако, в отсутствие дополнительной информации, если мы априори произвольно придадим равные веса всем значениям n от 0 до N, то $p(n) = 1/(N+1)$, и выражение (1.2.22) приводит к следующему решению:

$$\mathscr{P}'(1 \mid n) = \frac{n}{\sum_{n=0}^{N} n} = \frac{n}{\frac{1}{2}N(N+1)}. \tag{1.2.23}$$

Сделав некоторые предположения об априорных вероятностях $p(n)$, мы смогли вычислить апостериорные вероятности $\mathscr{P}'(n \mid 1)$. И хотя нельзя найти формального обоснования для этой процедуры, тем не менее она приводит к количественным оценкам, которые часто оказываются ценными.

1.3. Случайные переменные и распределение вероятностей

Когда возможными исходами A опыта или эксперимента являются числа, то эти результаты автоматически становятся взаимоисключающими. Удобно рассматривать эти числа как значения некоторой переменной x, которая называется *случайной переменной*. Если возможные значения x составляют счетное множество чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$, то x известна как *дискретная случайная переменная*. Если же возможными значениями x являются любые числа в некотором интервале (a,b) (который может быть бесконечным), то x называется *непрерывной случайной переменной*. Набор всех возможных исходов известен как *ансамбль* чисел x. Обычно принимается, что случайная переменная является действительной, но и комплексные случайные переменные $z = x + iy$, содержащие реальную x и мнимую y части, являющиеся случайными величинами, также будут встречаться.

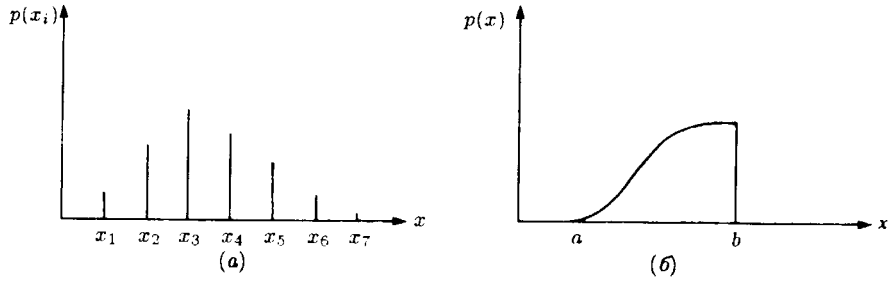


Рис. 1.3. Дискретное *а* и непрерывное *б* распределения вероятности

С каждым возможным результатом или значением x_1, x_2, ... дискретной переменной мы можем связать вероятность p_i $(i = 1, 2, \ldots)$ и, так как различные значения являются взаимоисключающими, соответствующие вероятности в силу (1.2.1) должны давать в сумме единицу

$$\sum_{\text{по всем } i} p_i = 1. \tag{1.3.1}$$

График вероятности p_i как функции x_i на рис. 1.3*а* содержит серию точек, или линий, и иллюстрирует распределение вероятности по интервалу. В том случае, если некоторое значение x_0 является определенным, и никаких других значений x_1, x_2, ... не существует, вероятность p_i имеет вид

$$p_i = \delta_{i0}, \tag{1.3.2}$$

где δ_{ij} — дельта символ Кронекера, т.е. $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$ в других случаях.

Если x является непрерывной случайной переменной в интервале (a, b), то удобно ввести для ансамбля x понятие ***плотности вероятности*** $p(x)$, так что $p(x)\,dx$ есть вероятность того, что x находится в бесконечно малом интервале от x до $x + dx$. Тогда согласно (1.3.1) мы получаем условие нормировки

$$\int_a^b p(x)\,dx = 1. \tag{1.3.3}$$

Форма $p(x)$ дает распределение вероятности случайной переменной x (см. рис. 1.3*б*). Вероятность $P(x \leqslant X)$ того, что x равно или меньше некоторого значения X $(a \leqslant X \leqslant b)$, определяется интегралом

$$P(x \leqslant X) = \int_a^X p(x)\,dx. \tag{1.3.4}$$

В соответствии с выражением (1.2.2) мы имеем неравенство

$$P(x \leqslant X_1) \leqslant P(x \leqslant X_2), \quad \text{когда } X_1 \leqslant X_2. \tag{1.3.5}$$

Следовательно, $P(x \leqslant X)$ является возрастающей функцией от X, ограниченной единицей, а ее производная является плотностью вероятности

$$\frac{dP(x \leqslant X)}{dX} = p(X). \tag{1.3.6}$$

Плотность вероятности $p(X)$ может не существовать в смысле обычных функций, когда $P(x \leqslant X)$ терпит разрыв, но она не может быть более сингулярной, чем дельта-функция Дирака. Если непрерывная случайная переменная x однозначно принимает значение x_0, то $p(x)$ имеет следующий вид:

$$p(x) = \delta(x - x_0), \tag{1.3.7}$$

который может быть сопоставлен с выражением (1.3.2) для дискретной случайной переменной. Необходимость использования дельта-функций для описания плотностей вероятности может быть обойдена путем использования интегралов Стилтьеса (Yaglom, 1962, гл. 2, разд. 9), но здесь мы будем без колебаний использовать дельта-функции. В самом деле, путем использования дельта-функций мы можем объединить рассмотрение дискретных случайных переменных с рассмотрением непрерывных случайных переменных. Если дискретная переменная принимает значения x_1, x_2, ... с вероятностями p_1, p_2, ..., то можно формально описать эту ситуацию с помощью непрерывной переменной x, имеющей следующую плотность вероятности $p(x)$:

$$p(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i). \tag{1.3.8}$$

По этой причине (и чтобы избежать повторения) отныне формально мы будем считать x непрерывной переменной.

Имеет смысл сделать одно предостерегающее замечание, касающееся обозначений. Если x и y являются двумя различными случайными переменными, то их плотности вероятностей иногда обозначаются как $p(x)$ и $p(y)$, соответственно, без неявного предположения о том, что формы двух распределений вероятности равны. Однако, предпочтительнее использовать различные обозначения, например $p(x)$ и $P(y)$ для двух плотностей вероятности, которые не обязательно равны.

1.3.1. Преобразования случайных переменных

Пусть x — случайная переменная, определенная на интервале (a, b) с плотностью вероятности $p(x)$. Иногда возникает необходимость совершить переход от x к новой переменной y, где

$$y = f(x), \quad A \leqslant y \leqslant B, \tag{1.3.9}$$

и мы хотим найти плотность вероятности $P(y)$ для y. Во-первых, предположим, что преобразование (1.3.9) имеет однозначную обратную функцию

$$x = g(y). \tag{1.3.10}$$

Тогда, если x и y соответствуют друг другу, и интервал dx соответствует интервалу dy, очевидно, имеем

$$P(y)|dy| = p(x)|dx|,$$

так что

$$P(y) = p(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = p[g(y)]|g'(y)| = \frac{p[g(y)]}{|f'[g(y)]|}. \tag{1.3.11}$$

В более общем случае, если обратная функция многозначна, заданному y соответствуют различные x, т.е.

$$x_1 = g_1(y), \quad x_2 = g_2(y), \quad \ldots, \tag{1.3.12}$$

то следует добавить вероятности, связанные с этими различными, взаимоисключающими x, и мы имеем вместо выражения (1.3.11) следующее

$$P(y) = \sum_i p(x_i)\left|\frac{dx}{dy}\right|_{x=x_i} = \sum_i p[g_i(y)]|g_i'(y)| = \sum_i \frac{p[g_i(y)]}{|f'[g_i(y)]|}. \tag{1.3.13}$$

Тот же результат может быть формально выражен в более компактной форме

$$P(y) = \int p(x)\delta[y - f(x)]\,dx, \tag{1.3.14}$$

если мы разложим дельта-функцию обычным способом через ее нули

$$\delta[y - f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}. \tag{1.3.15}$$

Выражение (1.3.14) может быть интерпретировано в том смысле, что плотность вероятности для y получается путем интегрирования плотности вероятности $p(x)$ по всем значениям x, которые соответствуют y, т.е. по таким значениям, которые ограничены условием $y = f(x)$.

В качестве примера рассмотрим изменение вероятности при преобразовании $y = x^2$, которое имеет двузначную обратную функцию

$$x = \pm\sqrt{y}, \quad \frac{dx}{dy} = \pm\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

В этом случае выражение (1.3.14) приводит к формуле

$$P(y) = \frac{p(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{p(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \quad 0 \leqslant y. \tag{1.3.16}$$

Далее мы рассмотрим более общую ситуацию, в которой имеется набор из N переменных x_1, x_2, ..., x_N с совместной плотностью вероятности $p(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Перейдем к новому набору переменных y_1, y_2, ..., y_N с плотностью вероятности $P(y_1, y_2, \ldots, y_N)$. Если преобразование

$$y_r = f_r(x_1, x_2, \ldots, x_N), \quad (r = 1, 2, \ldots, N)$$

имеет однозначную обратную функцию

$$x_r = g_r(y_1, y_2, \ldots, y_N), \quad (r = 1, 2, \ldots, N),$$

то

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_N)|dy_1\, dy_2 \ldots dy_N| = p(x_1, x_2, \ldots, x_N)|dx_1\, dx_2 \ldots dx_N|, \tag{1.3.17а}$$

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_N) = |J| p(x_1, x_2, \ldots, x_N), \tag{1.3.17б}$$

где J — Якобиан преобразования

$$|J| = \left| \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_N)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_N)} \right|.$$

И снова можно выразить преобразование вероятности с помощью дельта-функций в более компактной форме

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_N) = \int p(x_1, x_2, \ldots, x_N) \delta(y_1 - f_1) \delta(y_2 - f_2) \ldots \delta(y_N - f_N)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_N, \tag{1.3.18}$$

которая справедлива, когда обратная функция является многозначной.

Если случайная переменная z является комплексной, причем $z = x + iy$, то фактически мы имеем дело с двумя переменными x, y. Плотность вероятности $P(z)$ переменной z тогда является попросту совместной плотностью вероятности x и y, и условие нормировки на $P(z)$ принимает вид

$$\int P(z)\, d^2 z = 1, \tag{1.3.19}$$

где $d^2 z$ является сокращенным обозначением для $dx\, dy$. Плотности вероятности комплексных случайных переменных могут рассматриваться как естественное обобщение вышеизложенной теории реальных случайных переменных.

1.3.2. Математические ожидания и моменты

Возможно, наиболее важной величиной, связанной со случайной переменной x, является ее *среднее значение*, или *среднее*, или *математическое ожидание*, которое будет обозначаться как $\langle x \rangle$. Среднее значение получается путем взвешивания каждой величины x, связанной с ней вероятностью $p(x)\, dx$, и путем интегрирования по области значений x. Таким образом,

$$\langle x \rangle = \int x p(x)\, dx, \tag{1.3.20}$$

при условии, что интеграл существует. В более общем случае, если x является случайной переменной, любая функция $f(x)$ от x является сама по себе случайной переменной, и тогда среднее значение, если оно существует, определяется выражением

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x) p(x)\, dx. \tag{1.3.21}$$

Среди функций от x, представляющих особый интерес, — степенные функции x^r ($r = 1, 2, \ldots$), для которых

$$\nu_r \equiv \langle x^r \rangle = \int x^r p(x)\, dx. \tag{1.3.22}$$

где ν_r или $\langle x^r \rangle$ известны как *r-тый момент* x. Среднее $\langle x \rangle$, которое, конечно же, является первым моментом ν_1, часто оказывается наиболее важным моментом, в то время как высшие моменты в общем случае менее важны. Целесообразно заметить, что если $p(x)$ не уменьшается слишком быстро с ростом x при больших x, то некоторые из моментов могут вообще не существовать. Примером служит плотность вероятности Коши

$$p(x) = \frac{a/\pi}{a^2 + (x - x_0)^2}, \quad (a > 0, -\infty < x < \infty), \tag{1.3.23}$$

все моменты которой расходятся.

Когда случайная переменная принимает только целые значения $n = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями p_0, p_1, p_2, ..., можно определить моменты с помощью формулы

$$\nu_r \equiv \langle n^r \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^r p_n. \tag{1.3.24}$$

Однако другой тип момента, определяемый с помощью выражения

$$\langle n^{(r)} \rangle \equiv \langle n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)p_n, \tag{1.3.25}$$

и известный как *r-ый факториальный момент величины* n, иногда бывает проще для целых переменных. В последующих определениях мы ограничимся непрерывными переменными для того, чтобы избежать повторения.

Выражение (1.3.22) определяет моменты от x в окрестности начала координат $x = 0$, но часто более полезно иметь дело с моментами в окрестности другого значения, такого, как среднее $\langle x \rangle$. В таком случае они называются *центральными моментами*, и мы будем обозначать их как μ_r,

$$\mu_r \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^r \rangle = \int (x - \langle x \rangle)^r p(x)\, dx. \tag{1.3.26}$$

Разница между x и его средним значением $\langle x \rangle$ известна как *отклонение*

$$\Delta x \equiv x - \langle x \rangle,$$

так что можно записать $\mu_r = \langle (\Delta x)^r \rangle$. На основе определения для первого центрального момента имеем $\mu_1 = \langle \Delta x \rangle$, но высшие центральные моменты являются в общем случае ненулевыми, хотя плотность вероятности $p(x)$, которая симметрична относительно его среднего, будет иметь нулевые нечетные центральные моменты. Второй центральный момент μ_2 известен как *дисперсия*. Она нужна для того, чтобы определить эффективную ширину плотности вероятности $p(x)$. Дисперсия μ_2 всегда является неотрицательной и обращается в нуль только в особом случае, когда $p(x)$ является дельта-функцией, т.е. когда исход x полностью определен. Квадратный корень от дисперсии известен как *среднеквадратичное отклонение* или *стандартное отклонение* σ и, подобно дисперсии, оно является мерой разброса, имеющей ту же размерность, что и среднее $\langle x \rangle$. Стандартное отклонение иногда используется для нормировки высших моментов x. Например, отношение

$$\alpha_3 \equiv \mu_3/\sigma^3, \tag{1.3.27}$$

которое может быть как положительным, так и отрицательным, известно как *коэффициент асимметрии*; оно характеризует безразмерную меру асимметрии плотности вероятности $p(x)$ и является безразмерным (см. рис. 1.4). Подобно этому, безразмерное отношение

$$\alpha_4 \equiv \mu_4/\sigma^4, \tag{1.3.28}$$

которое известно как *эксцесс*, удобно для определения различия в распределениях вероятности; например, вытянутого и узкого распределения от низкого и широкого (см. рис. 1.5). Это отношение, как мы еще увидим, имеет значение 3 для гауссовского распределения, играющего центральную роль в теории вероятностей.

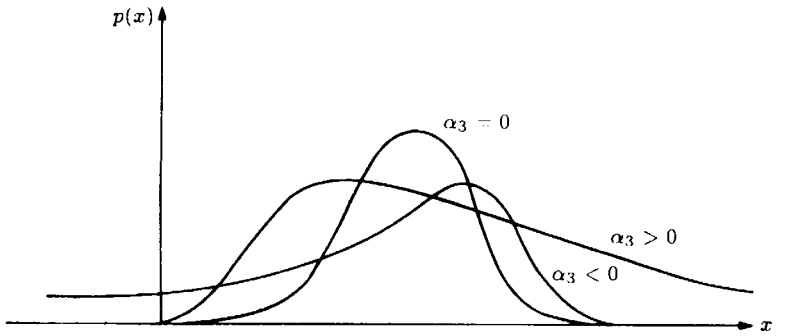


Рис. 1.4. Распределения вероятности с положительной, нулевой и отрицательной асимметриями

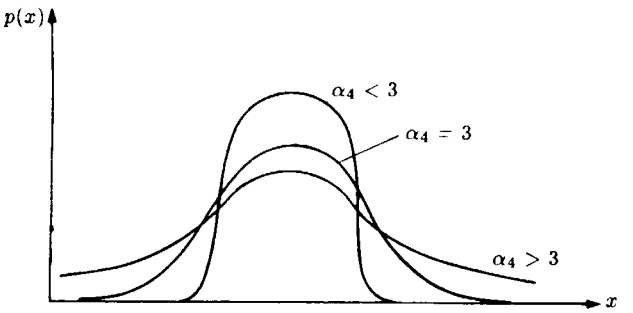


Рис. 1.5. Распределения вероятности с эксцессом, большим или меньшем, чем три, или равным трем

Выполняя биноминальное разложение под знаком интеграла в выражении (1.3.26) и интегрируя почленно, получим следующее соотношение между обычными и центральными моментами

$$\mu_r = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \nu_s (-\nu_1)^{r-s}, \qquad (1.3.29)$$

где $\nu_0 = 1$. В частности, дисперсия определяется выражением

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2. \qquad (1.3.30)$$

Первый и второй моменты характеризуют наиболее важные особенности распределения вероятности. Иногда удобно перейти от переменной x к новой переменной y

$$y \equiv (x - \langle x \rangle)/\sigma, \qquad (1.3.31)$$

которая обладает таким свойством, что ее среднее равно нулю, а ее среднее квадратичное отклонение равно единице. Говорят, что новая случайная переменная y находится в ***стандартной форме***, и расчеты зачастую упрощаются с помощью этого преобразования.

Моменты также могут быть определены совместно для различных случайных переменных $x, y, z, \ldots$. Если $p(x, y, z, \ldots)$ является совместной плотностью вероятности для $x, y, z, \ldots$, то центральный момент порядка $l, m, n, \ldots$ определяется математическим ожиданием

$$\mu_{lmn\ldots} \equiv \langle (\Delta x)^l (\Delta y)^m (\Delta z)^n \ldots \rangle. \qquad (1.3.32)$$

В частности, для двух случайных переменных имеются три различные дисперсии: $\mu_{20} = \langle (\Delta x)^2 \rangle$; $\mu_{02} = \langle (\Delta y)^2 \rangle$; $\mu_{11} = \langle \Delta x \Delta y \rangle$; последняя известна как ***ковариация***. В качестве альтернативного обозначения, обычно используемого для того, чтобы различать случайные переменные, выступает индексация. Тогда случайные переменные имеют вид $x_1, x_2, \ldots, x_N$, а ковариантность между x_i и x_j записывается в виде

$$\mu_{ij} \equiv \langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle. \qquad (1.3.33)$$

Ковариации μ_{ij} можно рассматривать как элементы симметричной $N \times N$-матрицы, известной как матрица ковариантности, диагональные элементы которой являются дисперсиями $\langle (\Delta x_1)^2 \rangle, \langle (\Delta x_2)^2 \rangle, \ldots, \langle (\Delta x_N)^2 \rangle$.

Из неравенства Шварца видно, что

$$|\mu_{ij}|^2 \leqslant \mu_{ii}\mu_{jj} = \sigma_i^2 \sigma_j^2, \qquad (1.3.34)$$

где мы записали $\sigma_i = \langle (\Delta x_i)^2 \rangle^{1/2}$ и т.д. для стандартного отклонения x_i. Нормированная величина

$$\rho_{ij} \equiv \mu_{ij}/\sigma_i \sigma_j \qquad (1.3.35)$$

известна как ***коэффициент корреляции***; она ограничена значениями -1 и $+1$. Говорят, что две случайные переменные, корреляционные коэффициенты которых равны $+1$ или -1, будут или полностью коррелированными, или полностью антикоррелированными, соответственно. Например, если $x_2 = ax_1 + b$, где a и b — реальные числа, то ясно, что x_2 и x_1 флуктуируют вверх и вниз вместе, когда число a положительно, и флуктуируют в противофазе, когда a отрицательно. При $\Delta x_2 = a \Delta x_1$ коэффициент корреляции легко

находится по формуле $\rho_{12} = a/|a|$ и равен $+1$ или -1, так что в этом случае x_1 и x_2 являются полностью коррелированными или антикоррелированными. В противоположность этому заметим, что $\rho_{12} = 0$, если x_1 и x_2 являются статистически независимыми, поскольку

$$\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = \int \Delta x_1 \Delta x_2 p(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int \Delta x_1 p(x_1)\, dx_1 \int \Delta x_2 p(x_2)\, dx_2 = 0.$$

Путем обобщения этого же аргумента можно легко показать, что если $x_1, x_2, \ldots$ являются статистически независимыми случайными переменными, то

$$\langle \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k \ldots \rangle = 0, \quad \text{если } i, j, k, \ldots \text{ все разные.} \tag{1.3.36}$$

В этом случае матрица ковариантности μ_{ij} является диагональной.

На практике часто встречаются линейные комбинации статистически независимых случайных переменных x_1, x_2, ... Пусть y — новая случайная переменная, определяемая как

$$y = \sum_i a_i x_i, \tag{1.3.37}$$

где коэффициенты a_1, a_2, ... представляют собой произвольные действительные числа, а x_1, x_2, ... являются независимыми. Тогда из определения

$$\langle y \rangle = \sum_i a_i \langle x_i \rangle \tag{1.3.38}$$

и из выражения (1.3.36) вытекает, что

$$\langle (\Delta y)^2 \rangle = \sum_i \sum_j a_i a_j \langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle = \sum_i a_i^2 \sigma_i^2. \tag{1.3.39}$$

И, наконец, мы отметим, что средние и моменты могут быть также введены для комплексных случайных переменных путем очевидного обобщения выражений (1.3.21) и (1.3.22). Если z_1, z_2, ... являются комплексными случайными переменными, матрица ковариантности является эрмитовой и определяется формулой

$$\mu_{ij} \equiv \langle \Delta z_i \Delta z_j^* \rangle. \tag{1.3.40}$$

Тогда коэффициент корреляции ρ_{ij}, определяемый выражением (1.3.35), является комплексным, но стандартные отклонения $\sigma_i = \langle |\Delta z_i|^2 \rangle^{1/2}$ являются по-прежнему действительными; причем модуль $|\rho_{ij}|$ ограничен единицей.

1.3.3. Неравенство Чебышева

Иногда требуется узнать вероятность того, что некоторая, случайно флуктуирующая величина превысит определенное пороговое значение. Неравенство Чебышева показывает, как оценить верхнюю границу для этой вероятности без детального знания действительного распределения вероятности.

Пусть $p(x)$ есть плотность вероятности некоторой действительной случайной переменной x и пусть $g(x)$ есть неотрицательная действительная функция от x. Предположим, что $g(x) \geqslant K$, где K — некоторое положительное число, в то время как x лежит в области D. Тогда вероятность $P[g(x) \geqslant K]$ того, что $g(x)$ превышает K, является, очевидно, вероятностью того, что x лежит внутри D, и определяется выражением

$$P[g(x) \geqslant K] = \int_D p(x)\, dx. \tag{1.3.41}$$

Вычислим среднее значение $g(x)$. Благодаря неотрицательности $g(x)$ и $p(x)$, мы имеем

$$\langle g(x) \rangle = \int g(x) p(x)\, dx \geqslant \int_D g(x) p(x)\, dx \geqslant K \int_D p(x)\, dx = K P[g(x) \geqslant K],$$

так что

$$P[g(x) \geqslant K] \leqslant \langle g(x)\rangle / K. \tag{1.3.42}$$

Эта формула известна как *неравенство Чебышева*. Заметим, что его достаточно для нахождения ожидания $\langle g(x)\rangle$ с целью определения верхней границы $P[g(x) \geqslant K]$, хотя эта граница зачастую малозаметна.

В качестве примера рассчитаем вероятность того, что значение x отклоняется от своего среднего $\langle x\rangle$ больше, чем на η стандартных отклонений σ. Пусть $g(x) = (\Delta x)^2$. Тогда требуемая вероятность есть $P[g(x) \geqslant \eta^2\sigma^2]$. В этом случае $\langle g(x)\rangle = \langle (\Delta x)^2\rangle = \sigma^2$, так что из выражения (1.3.42) при $K = \eta^2\sigma^2$ следует, что

$$P[|\Delta x| \geqslant \eta\sigma] \leqslant \frac{1}{\eta^2}. \tag{1.3.43}$$

Это неравенство известно как *неравенство Беньяме — Чебышева*. Таким образом, если $\eta = 3$, то это свидетельствует о том, что вероятность отклонения от среднего на величину, бо́льшую чем в три стандартных отклонения, меньше $1/9$. Фактически, если бы x была гауссовой случайной переменной, то вероятность $P[|\Delta x| \geqslant 3\sigma]$ была бы меньше 0.003, так что неравенство Беньяме — Чебышева обеспечивает лишь слабую верхнюю границу.

1.4. Производящие функции

1.4.1. Производящая функция моментов

Иногда можно определить моменты более просто и удобно с помощью другой функции, известной как *производящая функция*, а не вычислять их непосредственно. Например, функция, определенная для действительного ξ с помощью формулы

$$M(\xi) \equiv \langle \mathrm{e}^{x\xi}\rangle = \int \mathrm{e}^{x\xi} p(x)\, dx, \tag{1.4.1}$$

известна как *производящая функция моментов*, при условии, что она существует. Разлагая экспоненту в ряд и интегрируя почленно, находим, что

$$M(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\nu_r \xi^r}{r!}, \tag{1.4.2}$$

так что момент ν_r может быть получен из $M(\xi)$ или путем разложения в степенной ряд по ξ, или путем дифференцирования; в этом случае мы получим

$$\nu_r = \left[\frac{d^r M(\xi)}{d\xi^r}\right]_{\xi=0}. \tag{1.4.3}$$

Для дискретной случайной переменной, такой, как случайное целое число n, мы попросту заменяем интеграл в выражении (1.4.1) суммой по n и записываем

$$M(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{n\xi} p(n). \tag{1.4.4}$$

Как и прежде, это выражение определяет моменты для n. Возможно также определить факториальные моменты $\langle n^{(r)}\rangle$ аналогичным способом. Для этого мы вводим *производящую функцию факториальных моментов* $F(\xi)$ в виде:

$$F(\xi) \equiv \langle (1+\xi)^n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}\xi^r p(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\langle n^{(r)}\rangle}{r!}\xi^r, \tag{1.4.5}$$

которая при разложении в ряд позволяет получить факториальные моменты. Следует отметить, что ряд является бесконечным, если отсутствует верхняя граница для n. Чтобы избежать повторения, далее мы ограничимся, в основном непрерывной случайной переменной.

1.4.2. Характеристическая функция

Производящая функция моментов может не существовать для любого ξ. Однако, другая производящая функция

$$C(\xi) \equiv \langle e^{ix\xi} \rangle = \int e^{ix\xi} p(x)\, dx, \tag{1.4.6}$$

известная как *характеристическая функция*, всегда существует как обычная функция, потому что она является попросту фурье-преобразованием абсолютно интегрируемой функции (Goldberg, 1961, гл. 2). В общем случае $C(\xi)$ является комплексной функцией. Если $p(x)$ квадратично интегрируема, то выражение, обратное (1.4.6), может быть использовано для определения плотности вероятности

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int C(\xi)\, e^{-ix\xi}\, dx, \tag{1.4.7}$$

так что даже когда $p(x)$ содержит вклады дельта-функций, выражения (1.4.6) и (1.4.7) остаются справедливыми в рамках теории обобщенных функций. Ясно, что моменты, если они существуют, могут быть получены сразу и просто путем дифференцирования $C(\xi)$, как и $M(\xi)$ выше. Однако, стоит отметить, что характеристическая функция $C(\xi)$ существует даже тогда, когда моментов нет. Например, снова рассмотрим распределение Коши (1.3.23), не имеющее моментов, для которого

$$C(\xi) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}\, dx}{a^2 + (x - x_0)^2} = e^{-a|\xi|}\, e^{ix_0\xi}. \tag{1.4.8}$$

Правая часть этой формулы не дифференцируема по ξ при $\xi = 0$ и, следовательно, не может производить моментов. Даже когда моменты существуют, плотность вероятности не всегда однозначно определена его моментами, хотя противоположные примеры приводят к патологии и нефизичности (Kendall, 1952, гл. 4).

Характеристические функции обладают очень разнообразными математическими свойствами и им посвящены целые книги (Lukacs, 1960). Несколько следующих свойств являются наиболее полезными:

(а) $$C(0) = 1, \tag{1.4.9}$$

что, очевидно, следует из определения.

(б) $$|C(\xi)| \leqslant C(0), \tag{1.4.10}$$

что следует из

$$|C(\xi)| \leqslant \int |e^{ix\xi} p(x)|\, dx = \int p(x)\, dx = 1.$$

Поэтому характеристическая функция никогда не превышает ее значения при $\xi = 0$.

(в) $C(\xi)$ непрерывна на действительной оси, даже если $p(x)$ имеет разрывы непрерывности. Это можно видеть из неравенства

$$|C(\xi + h) - C(\xi)| \leqslant \int |e^{ix(\xi+h)} - e^{ix\xi}| p(x)\, dx = 2 \int |\sin(\tfrac{1}{2}xh)| p(x)\, dx, \tag{1.4.11}$$

поскольку правая часть стремится к нулю при $h \to 0$ для всех ξ.

(г) $$C(-\xi) = C^*(\xi), \tag{1.4.12}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Это следует непосредственно из определения $C(\xi)$, благодаря тому, что $p(x)$ является действительной величиной.

(д) $C(\xi)$ является неотрицательной. Это означает, что для произвольного набора N действительных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ и N произвольных комплексных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_N$ имеем

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_i^* a_j C(\xi_j - \xi_i) \geqslant 0. \tag{1.4.13}$$

Этот результат следует из неравенства

$$\left\langle \left| \sum_{j=1}^{N} a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi_j} \right|^2 \right\rangle \geqslant 0,$$

когда среднее слева записано в виде интеграла. Тогда мы имеем:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \int a_i^* a_j \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(\xi_j - \xi_i)} p(x)\, dx \geqslant 0,$$

которое с помощью выражения (1.4.6) приводит к неравенству (1.4.13).

Существует важная теорема, полученная Бошнером (Bochner, 1959, с. 325–328; см. также Goldberg, 1961, гл. 5), которая в своей элементарной форме утверждает, что каждая неотрицательно определенная из широкого класса функция имеет неотрицательное фурье-преобразование и, наоборот, — фурье-преобразование каждой неотрицательной функции широкого класса является неотрицательно определенной функцией. Этот класс включает в себя функции, которые спадают достаточно быстро на бесконечности с тем, чтобы обеспечить условие, при котором их фурье-преобразования являются непрерывными функциями. Абсолютно интегрируемые функции относятся к такому роду функций. Отсюда следует, что комплексная функция $C(\xi)$, которая удовлетворяет условиям (1.4.13) и $C(0) = 1$, является характеристической функцией.

Из определений очевидно, что три производящие функции $M(\xi)$, $F(\xi)$, $C(\xi)$, если они существуют, связаны следующим образом:

$$M(i\xi) = C(\xi), \quad F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} - 1) = C(\xi), \quad F(\xi) = M[\ln(1+\xi)]. \tag{1.4.14}$$

И, наконец, если $z = x + iy$ является комплексной случайной переменной с плотностью вероятности $p(z)$, так что $\int p(z)\, d^2z = 1$, $(d^2z \equiv dx\, dy)$, то характеристическая функция $C(u)$ представляет собой двухмерный фурье-образ от $p(z)$. Его можно записать в виде

$$C(u) = \int \mathrm{e}^{u^* z - u z^*} p(z)\, d^2 z, \tag{1.4.15}$$

где u является комплексным параметром и $\mathrm{e}^{u^* z - u z^*}$ является двухмерным фурье-ядром для x и y.

1.4.3. Кумулянты

Другой производящей функцией, которая иногда оказывается полезной, является логарифм производящей функции моментов

$$K(\xi) \equiv \ln[M(\xi)], \tag{1.4.16}$$

известный как ***производящая функция кумулянтов***. Она может задаваться степенным рядом по ξ с коэффициентами, известными как ***кумулянты*** κ_r

$$K(\xi) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\kappa_r \xi^r}{r!}. \tag{1.4.17}$$

В этом разложении в ряд нет постоянного члена, потому что $M(0) = 1$ и $K(0) = 0$. Можно показать, что ряд является либо бесконечным, либо ограничивается вторым членом. Этот результат является прямым следствием теоремы Марцинкевича (см. Lukacs, 1970, с. 213).

Кумулянты обладают множеством интересных инвариантных свойств и они особенно удобны тогда, когда мы имеем дело с комбинациями статистически независимых случайных переменных. Пусть x_1, x_2, ..., x_N являются статистически независимыми, и

$$y = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i, \tag{1.4.18}$$

где коэффициенты c_i являются постоянными. Во-первых, проверим соотношение между производящими функциями моментов $M_y(\xi)$ и $M_{x_i}(\xi)$ для y и x_i, соответственно. По определению имеем:

$$M_y(\xi) = \langle \mathrm{e}^{y\xi} \rangle = \left\langle \exp \sum_{i=1}^{N} c_i x_i \xi \right\rangle = \left\langle \prod_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{c_i x_i \xi} \right\rangle = \prod_{i=1}^{N} \langle \mathrm{e}^{c_i x_i \xi} \rangle = \prod_{i=1}^{N} M_{x_i}(c_i \xi), \tag{1.4.19}$$

где последний шаг является следствием предположенной статистической независимости x_i. Как следует из выражения (1.4.16), соответствующее соотношение между производящими функциями кумулянтов имеет вид

$$K_y(\xi) = \sum_{i=1}^{N} K_{x_i}(c_i \xi), \tag{1.4.20}$$

а для r-того кумулянта имеем

$$\kappa_r^{(y)} = \sum_{i=1}^{N} \kappa_r^{(x_i)} c_i^r. \tag{1.4.21}$$

В частности, если все константы c_i равны единице, то r-тый кумулянт для y является суммой r-тых кумулянт для x_i.

Кумулянты ведут себя особенно просто при преобразовании случайной переменной x. Рассмотрим линейное преобразование от x к y.

$$y = \lambda(x - a), \quad (\lambda > 0), \tag{1.4.22}$$

которое представляет собой трансляцию на a и изменяет шкалу λ. Из выражения (1.3.11) следует, что плотности вероятности $p(x)$ для x и $P(y)$ для y связываются с помощью формулы

$$P(y) = \frac{1}{\lambda} p\left(\frac{y}{\lambda} + a\right). \tag{1.4.23}$$

Следовательно, мы имеем для соответствующей производящей функции моментов следующее выражение:

$$M_y(\xi) = \int \mathrm{e}^{y\xi} P(y)\, dy = \int \mathrm{e}^{\lambda(x-a)\xi} P(x)\, dx = \mathrm{e}^{-\lambda a \xi} M_x(\lambda \xi). \tag{1.4.24}$$

Видно, что влияние трансляции на моменты является более сложным, чем влияние изменения шкалы. Если $a = 0$, то моменты связаны очень простым соотношением

$$\langle y^r \rangle = \lambda^r \langle x^r \rangle, \tag{1.4.25}$$

но если $\lambda = 1$ и $a \neq 0$, то не существует простого соотношения между $\langle y^r \rangle$ и $\langle x^r \rangle$. Однако, из выражения (1.4.24) при логарифмировании мы имеем:

$$K_y(\xi) = -\lambda a \xi + K_x(\lambda \xi), \tag{1.4.26}$$

так что кумулянты связаны соотношениями

$$\kappa_1^{(y)} = \lambda \kappa_1^{(x)} - \lambda a, \quad \kappa_r^{(y)} = \lambda^r \kappa_r^{(x)}, \quad (r \geqslant 2). \tag{1.4.27}$$

В частности, если нет изменения шкалы, так что $\lambda = 1$, все кумулянты, кроме первого, остаются полностью неизменными. Поэтому кумулянты (кроме первого) являются инвариантами при трансляции.

В частном случае, когда $a = \langle x \rangle$ и $\lambda = 1$, преобразование (1.4.22) представляет собой трансляцию на величину среднего, так что $y = \Delta x$ и моменты для y являются центральными моментами для x. Тогда из выражения (1.4.26) получим

$$K_{\Delta x}(\xi) = -\langle x \rangle \xi + K_x(\xi). \tag{1.4.28}$$

Мы можем воспользоваться этим соотношением для установления связи между кумулянтами и центральными моментами. Начнем с соотношения

$$K_{\Delta x}(\xi) = \ln[M_{\Delta x}(\xi)]$$

и продифференцируем обе его стороны по ξ. Это приведет к выражению

$$M_{\Delta x}(\xi)\frac{dK_{\Delta x}(\xi)}{d\xi} = \frac{dM_{\Delta x}(\xi)}{d\xi}.$$

Подставляя разложения по степенным рядам (1.4.2) и (1.4.17) для $M_{\Delta x}(\xi)$ и $K_{\Delta x}(\xi)$, используя (1.4.28) и помня, что моменты для Δx являются центральными моментами μ_1, μ_2, ..., получим

$$\left[1+\frac{\mu_2\xi^2}{2!}+\frac{\mu_3\xi^3}{3!}+\ldots\right]\left[-\langle x\rangle+\kappa_1+\frac{\kappa_2\xi}{1!}+\frac{\kappa_3\xi^2}{2!}+\ldots\right]=\left[\mu_2\xi+\frac{\mu_3\xi^2}{2!}+\frac{\mu_4\xi^3}{3!}+\ldots\right]. \tag{1.4.29}$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях ξ, получим следующее соотношение между кумулянтами для x и центральными моментами

$$\kappa_1=\langle x\rangle, \quad \kappa_2=\mu_2, \quad \kappa_3=\mu_3, \quad \kappa_4=\mu_4-3\mu_2^2, \quad \kappa_5=\mu_5-10\mu_2\mu_3, \quad \ldots. \tag{1.4.30}$$

Видно, что первый кумулянт является средним, а все высшие кумулянты не зависят от выбора исходной точки.

1.5. Некоторые примеры распределений вероятности

1.5.1. Распределение Бернулли или биноминальное распределение

Рассмотрим последовательность из N независимых испытаний или наблюдений, в ходе которых сосредоточим внимание на реализации некоторой отличительной особенности («успех»), которая имеет вероятность β по отношению к любому другому испытанию. Мы хотим определить вероятность $p_N(n)$ того, что имеется n удачных попыток из N испытаний ($n \leqslant N$). Так как все испытания независимы, вероятность реализации определенной последовательности n успешных попыток из $N-n$ неудач является произведением соответствующих вероятностей, которое равно $\beta^n(1-\beta)^{N-n}$, независимо от порядка, в котором успешные попытки и неудачи происходят. Но имеется $\binom{N}{n}$ различных комбинаций из n успехов и $N-n$ неудач, каждая из которых имеет одну и ту же вероятность. Полная вероятность $p_N(n)$ является поэтому суммой вероятностей для этих $\binom{N}{n}$ различных комбинаций, или

$$p_N(n)=\binom{N}{n}\beta^n(1-\beta)^{N-n}, \quad (0\leqslant n\leqslant N). \tag{1.5.1}$$

Это распределение вероятности называется *распределением Бернулли* или *биноминальным распределением*; последнее название возникло из-за того, что $p_N(n)$ выражено в биноминальной форме $[\beta+(1-\beta)]^N$. Отметим, что $p_N(n)$ содержит два независимых параметра — N и β, и что

$$\sum_{n=0}^{N}p_N(n)=[\beta+(1-\beta)]^N=1,$$

что и требовалось. Вид распределения вероятности для симметричного случая $\beta=\frac{1}{2}$ проиллюстрирован на рис. 1.6.

Нетрудно рассчитать моменты для n непосредственно из выражения (1.5.1). Кроме того, можно так же легко определить производящую функцию моментов. Из выражения (1.5.1) имеем:

$$M(\xi)=\sum_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{\xi n}p_N(n)=\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}(\beta\,\mathrm{e}^{\xi})^n(1-\beta)^{N-n}=[1+\beta(\mathrm{e}^{\xi}-1)]^N. \tag{1.5.2}$$

С помощью этого выражения моменты вычисляются путем разложения в ряд по ξ.

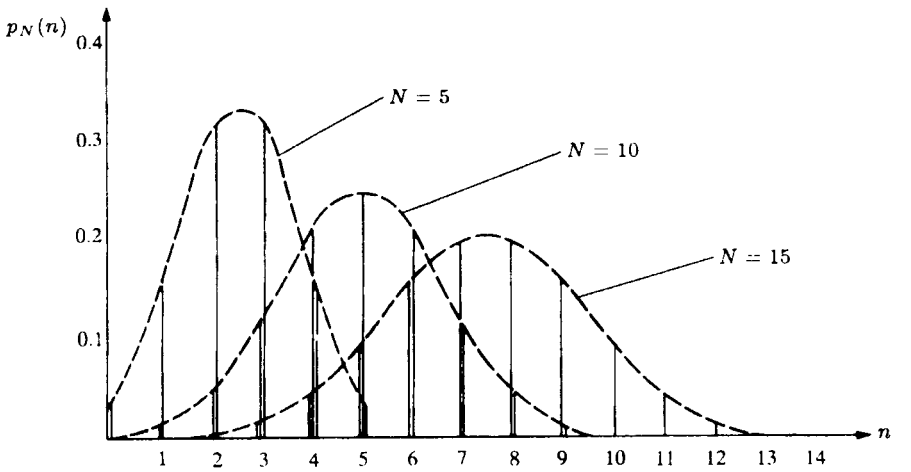


Рис. 1.6. Несколько кривых распределения Бернулли при $\beta = 1/2$

Оказывается факториальные моменты намного проще, чем обычные моменты, и мы получаем для производящей функции формулу

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{N}(1+\xi)^n p_N(n) = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}[\beta(1+\xi)]^n(1-\beta)^{N-n} = (1+\beta\xi)^N = \sum_{r=0}^{N}\binom{N}{r}\beta^r\xi^r. \quad (1.5.3)$$

Факториальный момент $\langle n^{(r)}\rangle$, который является коэффициентом при $\xi^r/r!$, определяется по формуле

$$\langle n^{(r)}\rangle = N(N-1)\dots(N-r+1)\beta^r, \quad (r \leqslant N). \quad (1.5.4)$$

В частности, выбирая $r = 1, 2$, для первых двух моментов получаем выражения:

$$\nu_1 \equiv \langle n\rangle = N\beta, \quad \nu_2 \equiv \langle n^2\rangle = N\beta + N(N-1)\beta^2, \quad \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = N\beta(1-\beta). \quad (1.5.5)$$

Моменты высших порядков получаются, соответственно, более сложными. Дисперсия будет наибольшей, когда $\beta = \frac{1}{2}$ для любого заданного N, т.е. когда распределение является симметричным относительно $n = \frac{1}{2}N$. Хотя ширина среднего квадратичного отклонения $\sigma = [N\beta(1-\beta)]^{1/2}$ растет с увеличением N, заметим, что относительная ширина

$$\frac{\sigma}{\langle n\rangle} = \left(\frac{1-\beta}{N\beta}\right)^{1/2}$$

стремится к нулю, поскольку $N \to \infty$, так что в относительном смысле распределение становится уже при увеличении N. Асимметрия α_3 и эксцесс α_4, определяемые выражениями (1.3.27) и (1.3.28), равны $(1-2\beta)/[N\beta(1-\beta)]^{1/2}$ и $3 - 6/N + 1/[N\beta(1-\beta)]$, соответственно. Первый из них становится равным нулю при $\beta = \frac{1}{2}$ и стремится к нулю при $N \to \infty$ независимо от β, в то время как второй параметр стремится к 3 при $N \to \infty$.

1.5.2. Пуассоновское распределение

Когда число испытаний N стремится к бесконечности, и вероятность успеха в любом одном испытании стремится к нулю, тогда среднее значение $\langle n\rangle = N\beta$ остается постоянным, и распределение Бернулли упрощается. Чтобы увидеть это, запишем

$$p_N(n) = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)\beta^n(1-\beta)^{N-n}}{n!} =$$

$$= \frac{(1-1/N)(1-2/N)\dots(1-(n-1)/N)(\beta N)^n(1-\beta)^{N-n}}{n!}$$

и заменим β отношением $\langle n\rangle/N$, так что

$$p_N(n) = \left[\prod_{r=1}^{n-1}\left(1-\frac{r}{N}\right)\right]\frac{\langle n\rangle^n}{n!}\frac{(1-\langle n\rangle/N)^N}{(1-\langle n\rangle/N)^n}.$$

При $N\to\infty$, пока n остается конечным, член под знаком произведения стремится к единице в соответствии с поведением множителя $(1-\langle n\rangle/N)^n$. Однако множитель $(1-\langle n\rangle/N)^N$ стремится к $\mathrm{e}^{-\langle n\rangle}$, так что имеем:

$$\lim_{N\to\infty} p_N(n) \equiv p(n) = \frac{\langle n\rangle^n\,\mathrm{e}^{-\langle n\rangle}}{n!}. \tag{1.5.6}$$

Это выражение известно как *распределение Пуассона* для n. Оно содержит единственный параметр $\langle n\rangle$ и весьма полезно для описания случайных событий, которые происходят с некоторой известной средней скоростью. В гл. 9 мы увидим, что когда свет от одномодового лазера попадает в фотодетектор, фотоэлектрические импульсы возникают случайно со средней скоростью, пропорциональной средней интенсивности света, и число импульсов, испущенных в пределах данного временно́го интервала, подчиняется пуассоновскому распределению.

Как производящая функция моментов, так и производящая функция факториальных моментов легко находятся с помощью выражения (1.5.6). Таким образом, имеем

$$M(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\xi n}\frac{\langle n\rangle^n\,\mathrm{e}^{-\langle n\rangle}}{n!} = \exp[\langle n\rangle(\mathrm{e}^{\xi}-1)], \tag{1.5.7}$$

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}(1+\xi)^n\frac{\langle n\rangle^n\,\mathrm{e}^{-\langle n\rangle}}{n!} = \mathrm{e}^{\langle n\rangle\xi} = \sum_{r=0}^{n}\frac{\langle n\rangle^r\xi^r}{r!}. \tag{1.5.8}$$

Факториальные моменты могут быть получены путем анализа выражения (1.5.8), и мы имеем формулу

$$\langle n^{(r)}\rangle = \langle n\rangle^r, \tag{1.5.9}$$

из которой следует, что дисперсия равна

$$\mu_2 = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = \langle n\rangle. \tag{1.5.10}$$

Подобно распределению Бернулли, ширина пуассоновского распределения увеличивается с ростом $\langle n\rangle$, но относительная ширина постепенно падает при $\langle n\rangle\to\infty$.

И, наконец, рассчитаем производящую функцию кумулянтов $K(\xi)$, используя выражение (1.5.7):

$$K(\xi) = \ln[M(\xi)] = \langle n\rangle(\mathrm{e}^{\xi}-1) = \langle n\rangle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\xi^r}{r!}. \tag{1.5.11}$$

Поскольку r-ый кумулянт является коэффициентом при $\xi^r/r!$ в этом разложении, сразу же получаем, что

$$\kappa_r = \langle n\rangle, \quad r = 1,2,\ldots \tag{1.5.12}$$

Равенство всех кумулянтов среднему является важной характеристикой пуассоновского распределения. В заключение отметим, что из выражений для третьего и четвертого моментов следует, что асимметрия $\alpha_3 = \mu_3/\sigma^3 = 1/\sqrt{\langle n\rangle}$ является всегда положительной, и что эксцесс равен $\alpha_4 = \mu_4/\sigma^4 = 3 + 1/\langle n\rangle$ и стремится к 3 при $\langle n\rangle\to\infty$.

Иногда встречаются ситуации, в которых случайная переменная n является суммой из N различных, статистически независимых пуассоновских случайных переменных n_1, n_2, ..., n_N. Тогда производящая функция моментов для n определяется по формуле

$$M_n(\xi) = \langle \mathrm{e}^{(n_1+n_2+\cdots+n_N)\xi}\rangle = \prod_{i=1}^{N}\langle \mathrm{e}^{n_i\xi}\rangle = \prod_{i=1}^{N}\exp[\langle n_i\rangle(\mathrm{e}^{\xi}-1)] = \exp\left[\sum_{i=1}^{N}\langle n_i\rangle(\mathrm{e}^{\xi}-1)\right]. \tag{1.5.13}$$

Она описывает другое пуассоновское распределение, параметр которого $\langle n\rangle$ является суммой параметров распределений его компонент. Следовательно, n также является пуассоновской переменной и сумма независимых пуассоновских случайных переменных также является пуассоновской случайной переменной.

1.5.3. Распределение Бозе — Эйнштейна

Когда результаты, вытекающие из определенного выше распределения Бернулли, являются неразличимыми, комбинаторный множитель $\binom{N}{n}$ в уравнении (1.5.1) не появляется, и мы имеем более простое распределение вероятности

$$p_N(n) = K_N \beta^n (1-\beta)^{N-n}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \tag{1.5.14}$$

в котором K_N является нормировочной постоянной. Обозначим $\beta/(1-\beta)$ как η, и пусть $N \to \infty$ в предположении, что $\eta < 1$. Тогда

$$p_N(n) \to p(n) = K\eta^n, \quad 0 \leqslant n,$$

где K является другой нормировочной постоянной. Суммирование по n показывает, что $K = (1-\eta)$, так что

$$p(n) = (1-\eta)\eta^n. \tag{1.5.15}$$

Это распределение известно как *распределение Бозе — Эйнштейна*. Оно описывает, например, распределение вероятности для фотонов в одной из точек фазового пространства, когда оптическое поле находится в тепловом равновесии.

Производящая функция моментов определяется по формуле

$$M(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\eta)\, \mathrm{e}^{\xi n} \eta^n = \frac{1-\eta}{1-\eta\,\mathrm{e}^{\xi}}, \tag{1.5.16}$$

в то время как производящая функция факториальных моментов равна

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+\xi)^n (1-\eta)\eta^n = \frac{1-\eta}{1-\eta(1+\xi)} = \frac{1}{1-\eta\xi/(1-\eta)}. \tag{1.5.17}$$

Разложение в ряд по ξ сразу же приводит к первым двум моментам

$$\langle n \rangle = \frac{\eta}{1-\eta}, \quad \langle n(n-1) \rangle = 2\left(\frac{\eta}{1-\eta}\right)^2, \quad \langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle (1 + \langle n \rangle). \tag{1.5.18}$$

Формулы (1.5.18) показывают, что флуктуации в случае распределения Бозе — Эйнштейна больше, чем в случае распределения Пуассона с тем же средним значением, что можно рассматривать как следствие внутренней неразличимости частиц. Уравнение (1.5.18) дает возможность выразить $p(n)$ через $\langle n \rangle$ путем подстановки $\eta = (1 + 1/\langle n \rangle)^{-1}$ в следующей форме:

$$p(n) = \frac{1}{(1+\langle n \rangle)(1+1/\langle n \rangle)^n}. \tag{1.5.19}$$

1.5.4. Закон больших чисел

Вернемся к распределению Бернулли (1.5.1), для которого вероятность успеха в любом одиночном испытании равна β, и воспользуемся им, чтобы показать, что отношение n/N успехов к числу испытаний стремится к β с единичной вероятностью, когда число испытаний N стремится к бесконечности. Пусть ε является некоторым произвольно малым числом. Тогда вероятность того, что $|n/N - \beta|$ превысит ε, определяется выражением

$$P\left(\left|\frac{n}{N} - \beta\right| \geqslant \varepsilon\right) = P(|n - N\beta| \geqslant N\varepsilon).$$

Заметим, что $n - N\beta = \Delta n$ является отклонением n от его среднего значения. Теперь введем параметр θ, такой, что $N\varepsilon = \theta\sigma$, где $\sigma = [N\beta(1-\beta)]^{1/2}$ является средним квадратичным отклонением. Тогда $\theta = N^{1/2}\varepsilon/[\beta(1-\beta)]^{1/2}$,

$$P\left(\left|\frac{n}{N} - \beta\right| \geqslant \varepsilon\right) = P(|\Delta n| \geqslant \theta\sigma),$$

и с помощью неравенства Беньяме — Чебышева (1.3.43) получаем

$$P\left(\left|\frac{n}{N}-\beta\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\theta^2} = \frac{\beta(1-\beta)}{N\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4N\varepsilon^2}, \tag{1.5.20}$$

поскольку $\beta(1-\beta) \leqslant \frac{1}{4}$. Отсюда следует, что для любого ε, вне зависимости от степени малости, величина $P[|(\frac{n}{N})-\beta| \geqslant \varepsilon]$ может быть сделана сколь угодно малой путем выбора N, которое может быть очень большим, т.е.

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\left|\frac{n}{N}-\beta\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0, \tag{1.5.21а}$$

или

$$P\left(\left|\frac{n}{N}-\beta\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{1.5.21б}$$

Следовательно, поскольку число испытаний стремится к бесконечности, отношение n/N стремится к константе β с единичной вероятностью. Этот результат известен как *закон больших чисел* и обеспечивает правомерность определения вероятности успеха на основе большого числа независимых испытаний. Существует более строгая версия закона больших чисел, которая использует высшие моменты, но здесь мы ее рассматривать не будем.

1.5.5. Нормальное, или гауссовское распределение

Пусть x является непрерывной случайной переменной, определенной на бесконечном интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Переменная x называется *гауссовской случайной переменной*, если ее плотность вероятности $p(x)$ определяется выражением

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\, \mathrm{e}^{-(x-\langle x\rangle)^2/2\sigma^2}. \tag{1.5.22}$$

Распределение вероятности $p(x)$ проиллюстрировано на рис. 1.7. Оно содержит два независимых параметра, которыми являются среднее значение $\langle x\rangle$ и среднее квадратичное отклонение σ. Это распределение нормировано следующим образом

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1.$$

Нормальное, или *гауссовское распределение* вероятности (1.5.22) играет центральную роль в теории вероятности по ряду причин. Оно имеет особенно простую структуру; оно является предельной формой некоторых других распределений вероятности; и, благодаря центральной предельной теореме (см. разд. 1.5.6 ниже), оно является распределением вероятности, которое встречается во множестве различных случаев. Поэтому мы будем изучать свойства гауссовского распределения довольно долго.

Производящая функция моментов $M(\xi)$ может быть легко рассчитана путем дополнения до полного квадрата в показателе экспоненты. Мы получаем

$$M(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{x\xi}\, \mathrm{e}^{-(x-\langle x\rangle)^2/2\sigma^2}\, dx = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, \mathrm{e}^{\xi\langle x\rangle}\, \mathrm{e}^{\sigma^2\xi^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-[x-(\sigma^2\xi+\langle x\rangle)]^2/2\sigma^2}\, dx = \mathrm{e}^{\xi\langle x\rangle}\, \mathrm{e}^{\sigma^2\xi^2/2}. \tag{1.5.23}$$

Характеристическая функция $C(\xi)$ получается сразу, если заменить ξ на $i\xi$ в выражении (1.5.23). С другой стороны, можно отталкиваться от первых принципов, выполняя фурье-преобразование $p(x)$ и получить:

$$C(\xi) = \mathrm{e}^{i\xi\langle x\rangle}\, \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2}. \tag{1.5.24}$$

Ввиду закона преобразования (1.4.24) производящая функция моментов и характеристическая функция для Δx имеют вид:

$$M_{\Delta x}(\xi) = \mathrm{e}^{\sigma^2\xi^2/2}, \quad C_{\Delta x}(\xi) = \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2}. \tag{1.5.25}$$

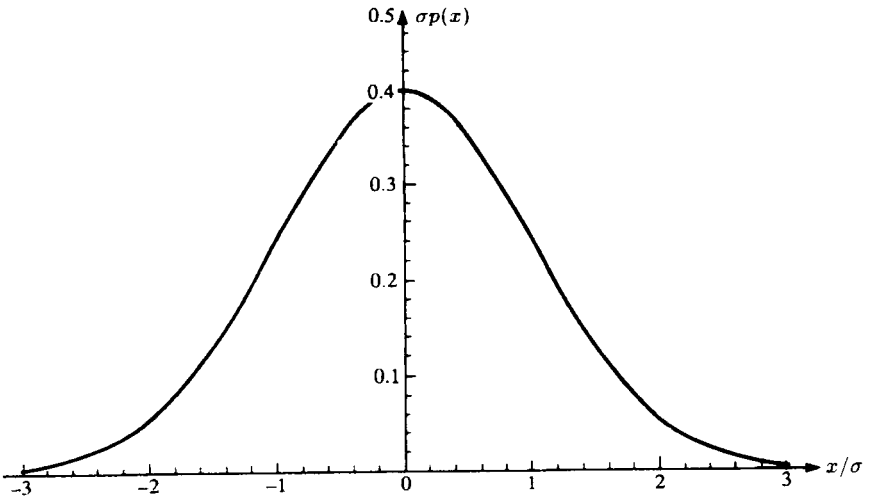


Рис. 1.7. Гауссовское распределение вероятности со средним $\langle x\rangle = 0$

Тогда центральные моменты μ_r вытекают из разложения в ряд по ξ, поскольку μ_r является коэффициентом при $\xi^r/r!$. Мы получаем следующие выражения для центральных моментов

$$\mu_r = 0, \quad \text{если } r \text{ является нечетным;} \tag{1.5.26а}$$

$$\mu_r = \frac{(\frac{1}{2}\sigma^2)^{r/2} r!}{(\frac{1}{2}r)!} = \frac{\sigma^r r!}{r(r-2)(r-4)\ldots 4\cdot 2} =$$
$$= \sigma^r (r-1)(r-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1 =$$
$$= (r-1)!!\,\sigma^r, \quad \text{если } r \text{ является четным,} \tag{1.5.26б}$$

где $(r-1)!! \equiv (r-1)(r-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1$. Дисперсия равна σ^2, асимметрия $\alpha_3 = \mu_3/\sigma^3$ равна нулю, а эксцесс $\alpha_4 = \mu_4/\sigma^4 = 3$.

Производящая функция кумулянтов $K(\xi)$ особенно проста, и мы находим ее сразу из выражения (1.5.23):

$$K(\xi) = \ln[M(\xi)] = \xi\langle x\rangle + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2. \tag{1.5.27}$$

Следовательно, существует только два отличных от нуля кумулянта, — среднее $\kappa_1 = \langle x\rangle$ и дисперсия $\kappa_2 = \sigma^2$. Все высшие кумулянты равны нулю. Верно и обратное: плотность вероятности, у которой кумулянты выше второго порядка исчезают, является гауссовской. Мы не будем доказывать этот результат здесь, но можно показать, что нет другого распределения вероятности, производящая функция кумулянтов которого является полиномом по ξ. Эта теорема по существу является теоремой Марцинкевича, с которой мы уже встречались (разд. 1.4.3).

Когда гауссовское распределение представлено в стандартной форме, с нулевым средним значением и единичной дисперсией, оно упрощается до следующего вида:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}, \tag{1.5.28}$$

и

$$M(\xi) = \mathrm{e}^{\xi^2/2}, \quad C(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}, \quad K(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2. \tag{1.5.29}$$

Многие другие распределения вероятности стремятся к гауссовской форме в определенном пределе. Покажем, например, что пуассоновское распределение стремится к гауссовскому при $\langle n\rangle \to \infty$. Из выражения (1.5.11) производящая функция кумулянтов пуассоновской переменной n описывается формулой

$$K_n(\xi) = \langle n\rangle(\mathrm{e}^{\xi} - 1).$$

Теперь преобразуем κ_n в стандартную форму путем преобразования случайной переменной

$$x \equiv \frac{n - \langle n \rangle}{\sigma} = \frac{n - \langle n \rangle}{\sqrt{\langle n \rangle}},$$

которая может быть рассмотрена как непрерывная случайная переменная для больших $\langle n \rangle$. Из закона преобразования (1.4.26) производящая функция кумулянтов для x определяется выражением

$$K_x(\xi) = -\sqrt{\langle n \rangle}\xi + K_n\left(\frac{\xi}{\sqrt{\langle n \rangle}}\right) =$$

$$= -\sqrt{\langle n \rangle}\xi + \langle n \rangle \left[\frac{\xi}{\sqrt{\langle n \rangle}} + \frac{1}{2!}\frac{\xi^2}{\langle n \rangle} + \frac{1}{3!}\frac{\xi^3}{\langle n \rangle^{3/2}} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle}}\left[\frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^4}{4!\,\langle n \rangle^{1/2}} + \ldots\right]. \quad (1.5.30)$$

Для любого заданного ξ это выражение стремится к $\frac{1}{2}\xi^2$, так как $\langle n \rangle \to \infty$; значение $\frac{1}{2}\xi^2$ совпадает с выражением для $K(\xi)$ из формулы (1.5.29) для производящей функции кумулянтов гауссовской случайной переменной в стандартной форме.

Говорят, что комплексная переменная $z = x + iy$ является гауссовской (с нулевым средним, для простоты), если x и y — статистически независимые гауссовские переменные с нулевым средним и с тем же средним квадратичным отклонением σ. Тогда совместная плотность вероятности $p(x, y)$ имеет вид

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2},$$

и мы можем записать

$$p(z) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-|z|^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\pi\tilde{\sigma}^2}\,\mathrm{e}^{-|z|^2/2\tilde{\sigma}^2}, \quad (1.5.31)$$

где $\tilde{\sigma}^2 \equiv \langle |z|^2 \rangle = 2\sigma^2$ является дисперсией комплексной переменной z. В случае, когда среднее z не равно нулю, z в выражении (1.5.31) можно заменить на Δz.

1.5.6. Центральная предельная теорема

Во многих практических ситуациях, в которых флуктуирующая случайная переменная y является интегрируемой, сами флуктуации содержат вклады от многих независимых возмущений. Центральная предельная теорема утверждает, что при весьма общих условиях y будет стремиться к гауссовской случайной переменной, если число наблюдений становится большим.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N$ является набором из N статистически независимых случайных переменных, имеющих стандартную форму, но произвольные плотности вероятности. Тогда

$$y = \frac{1}{\sqrt{N}}(x_1 + x_2 + \cdots + x_N) \quad (1.5.32)$$

является новой случайной переменной в стандартной форме, поскольку ее среднее также равно нулю, и ее дисперсия

$$\langle y^2 \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\langle x_i^2 \rangle = 1.$$

Поскольку каждый из x_i имеет стандартную форму, соответствующая производящая функция кумулянтов равна

$$K_{x_i}(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + \sum_{r=3}^{\infty}\kappa_r^{(x_i)}\frac{\xi^r}{r!} = \frac{1}{2}\xi^2 + O(\xi^3), \quad (1.5.33)$$

где O является обычным символом порядка малости. С помощью закона композиции (1.4.20), производящая функция кумулянтов для y выражается следующим образом:

$$K_y(\xi) = \sum_{i=1}^{N} K_{x_i}(\xi/\sqrt{N}) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{N} + O\left(\frac{\xi^3}{N^{3/2}}\right)\right] = \frac{1}{2}\xi^2 + \sum_{i=1}^{N} O\left(\frac{\xi^3}{N^{3/2}}\right). \tag{1.5.34}$$

При $N \to \infty$, сумма стремится к нулю из-за множителя $N^{3/2}$ в знаменателе, так что $K_y(\xi) \to \frac{1}{2}\xi^2$. Следовательно, y становится гауссовской, независимо от формы распределений вероятности для x. Центральная предельная теорема является очень важной и сохраняет силу при более общих условиях, чем те условия, которые мы рассматривали здесь.

1.5.7. Гамма-распределение

Гамма-распределение является другим непрерывным однопараметрическим распределением для случайной переменной x, определенной в интервале $0 \leqslant x < \infty$. Если плотность вероятности $p(x)$ задана следующим образом

$$p(x) = \frac{x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(n)}, \quad (n > 0), \tag{1.5.35}$$

то x называется *гамма-случайной переменной параметра* n (n может быть нецелым числом), или $\gamma(n)$-переменной. Если n является целым числом, то $\gamma(n+1)$-переменная имеет следующее распределение вероятности

$$p(x) = \frac{x^n\,\mathrm{e}^{-x}}{n!}. \tag{1.5.36}$$

Его не нужно путать с пуассоновским распределением, которое выглядит так же, но является скорее распределением вероятности для n, нежели для x. Отдельные примеры γ-распределения изображены на рис. 1.8.

Производящая функция моментов существует для $\xi < 1$, и мы имеем

$$M(\xi) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\xi x} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = \frac{1}{(1-\xi)^n} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}(-\xi)^r. \tag{1.5.37}$$

При этом r-тый момент является коэффициентом при $\xi^r/r!$, и мы находим, что

$$\nu_r \equiv \langle x^r\rangle = n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1), \tag{1.5.38}$$

так что среднее является параметром n

$$\langle x\rangle = n, \tag{1.5.39}$$

и дисперсия также равна n

$$\mu_2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = n. \tag{1.5.40}$$

Хотя дисперсия увеличивается с ростом n, относительная ширина $\sigma/\langle x\rangle = 1/\sqrt{n}$ уменьшается с ростом n. Из выражения (1.5.37) производящая функция кумулянтов равна

$$K(\xi) = -n\ln(1-\xi) = n\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\xi^r}{r}. \tag{1.5.41}$$

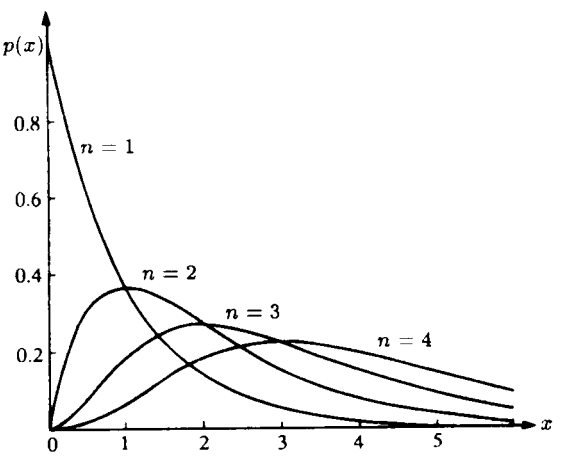


Рис. 1.8. Некоторые примеры γ-распределения для целых значений параметра n

Производящая функция позволяет определить кумулянты следующим образом

$$\kappa_r = n(r-1)!. \tag{1.5.42}$$

С помощью выражения (1.4.30) находим, что асимметрия всегда положительна

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\kappa_3}{\sigma^3} = \frac{2}{\sqrt{n}}, \tag{1.5.43}$$

хотя и стремится к нулю при $n \to \infty$, в то время как эксцесс равен

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{(\kappa_4 + 3\kappa_2^2)}{\sigma^4} = 3 + \frac{6}{n} \tag{1.5.44}$$

и стремится к 3. Это означает, что и γ-распределение стремится к гауссовской форме при $n \to \infty$, что можно показать в явном виде. Если преобразовать x в стандартную форму, положив $y = x - n/\sqrt{n}$, то сразу же найдем с помощью правила преобразования (1.4.26), что

$$K_y(\xi) = \sqrt{n}\xi - n \ln\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^4}{4\sqrt{n}} + \dots\right) \tag{1.5.45}$$

и стремится к $\frac{1}{2}\xi^2$ при $n \to \infty$; это значение является характеристикой производящей функции кумулянтов гауссовской переменной в стандартной форме.

Независимые случайные γ-переменные можно комбинировать для образования других γ-переменных. Чтобы показать это, рассмотрим набор из N независимых случайных γ-переменных x_1, x_2, ..., x_N с параметрами n_1, n_2, ..., n_N, соответственно, и пусть

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_N.$$

Из общего композиционного правила (1.4.20) следует, что производящая функция кумулянтов для y равна

$$K_y = \sum_{i=1}^{N} K_{x_i}(\xi) = -\ln(1-\xi)\sum_{i=1}^{N} n_i = -n\ln(1-\xi), \tag{1.5.46}$$

где $n \equiv \sum_{i=1}^{n} n_i$. Следовательно, y является новой случайной γ-переменной, параметр которой является суммой параметров исходных случайных γ-переменных. Это свойство подобно свойству, встречавшемуся ранее для пуассоновских случайных переменных, и иногда называется *свойством воспроизводимости*.

И, наконец, отметим, что если x является гауссовской случайной переменной со средним $\langle x \rangle$ и средним квадратичным отклонением σ, то

$$y = \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2} \tag{1.5.47}$$

является случайной гамма-полупеременной. Чтобы показать это, воспользуемся общим правилом преобразования (1.3.13) и получим для плотности вероятности переменной y следующую формулу

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-y}\frac{\sigma}{\sqrt{2y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-y}\frac{\sigma}{\sqrt{2y}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}y^{-1/2}\mathrm{e}^{-y} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}y^{-1/2}\mathrm{e}^{-y}, \tag{1.5.48}$$

т.е. $P(y)$ является случайной γ-переменной общей формы (1.5.35) с $n = \frac{1}{2}$. В соответствии с композиционным законом, воплощенным в выражении (1.5.46), получаем, что если x_1, x_2, ..., x_N являются независимыми гауссовскими случайными переменными, то

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \langle x_i \rangle)^2}{2\sigma_i^2}$$

является случайной γ-переменной параметра $\frac{1}{2}N$.

1.6. Многомерное гауссовское распределение

Гауссовские случайные переменные часто встречаются в виде групп и должны рассматриваться совместно. Рассмотрим некоторое множество гауссовских случайных переменных x_1, x_2, ..., x_N со средними квадратичными отклонениями σ_1, σ_2, ..., σ_N, соответственно. Каждая случайная переменная имеет распределение вероятности вида (1.5.22). Если все случайные переменные статистически независимы, то можно сразу записать совместное распределение вероятности $p(x_1, x_2, \ldots, x_N)$:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{(\Delta x_i)^2}{\sigma_i^2}\right]. \tag{1.6.1}$$

Здесь x_i являются совместными гауссовскими случайными переменными, которые, однако, являются независимыми, так что эта формула определенно не описывает случай наиболее общего многомерного гауссовского распределения. Матрица смешанных вторых моментов $\boldsymbol{\mu}$ для x_1, x_2, ..., x_N является диагональной, $\mu_{ij} = \delta_{ij}\sigma_i^2$, и ее определитель равен

$$\det \boldsymbol{\mu} = \sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2 \ldots \sigma_N^2. \tag{1.6.2}$$

Экспонента в выражении (1.6.1) может быть записана в матричной форме. Пусть $\mathbf{x}$ имеет вид матрицы-столбца:

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

и $\mathbf{x}^\dagger$ является сопряженной матрицей-строкой. Аналогично, пусть $\boldsymbol{\Delta x}$ является матрицей-столбцом с элементами Δx_i. Тогда можно выразить $N \times N$-ковариационную матрицу в виде

$$\boldsymbol{\mu} = \langle \boldsymbol{\Delta x} \boldsymbol{\Delta x}^\dagger \rangle, \tag{1.6.3}$$

а сумма в выражении (1.6.1) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{(\Delta x_i)^2}{\sigma_i^2} = \boldsymbol{\Delta x}^\dagger \boldsymbol{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Delta x}, \tag{1.6.4}$$

где $\boldsymbol{\mu}^{-1}$ является обратной ковариационной матрицей; при этом $\mu_{ij}^{-1} = \delta_{ij}/\sigma_i^2$. Это позволяет нам выразить формулу (1.6.1) в более компактном виде

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}(\det \boldsymbol{\mu})^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta x}^\dagger \boldsymbol{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Delta x}). \tag{1.6.5}$$

Мы будем считать это распределение вероятности общим многомерным гауссовским распределением независимо от того, является ли $\boldsymbol{\mu}$-матрица диагональной или нет.

Теперь рассмотрим однородное линейное преобразование от x_1, x_2, ..., x_N к y_1, y_2, ..., y_N и покажем, что оно сохраняет структуру уравнения (1.6.5), хотя в общем случае $\boldsymbol{\mu}$-матрица не будет больше диагональной. Если $\mathbf{y}$ является матрицей-столбцом с элементами y_1, y_2, ..., y_N, то она всегда может быть выражена в форме

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{x}, \tag{1.6.6}$$

где $\mathbf{U}$ является $N \times N$-матрицей преобразования. То же преобразование связывает $\boldsymbol{\Delta y}$ и $\boldsymbol{\Delta x}$. Для простоты мы выберем $\mathbf{U}$ ортогональным (т.е. унитарным с действительными элементами). Тогда якобиан преобразования является единичным, так что $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1} = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}$, и совместная плотность вероятности для $y_1, y_2, \ldots, y_N$ имеет вид [ср. (1.3.17)]:

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_N) = p(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}(\det \boldsymbol{\mu})^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta x}^\dagger \boldsymbol{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Delta x}). \tag{1.6.7}$$

Теперь выразим $\mathbf{x}$ через $\mathbf{y}$. Обращая формулу (1.6.6), получаем $\mathbf{x} = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{y}$, так что

$$\Delta\mathbf{x}^\dagger\boldsymbol{\mu}^{-1}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{y}^\dagger\mathbf{U}\boldsymbol{\mu}^{-1}\mathbf{U}^\dagger\Delta\mathbf{y}. \tag{1.6.8}$$

Матрица $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ для $\mathbf{y}$ задается в виде

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \langle\Delta\mathbf{y}\Delta\mathbf{y}^\dagger\rangle = \mathbf{U}\langle\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{x}^\dagger\rangle\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}\boldsymbol{\mu}\mathbf{U}^\dagger, \tag{1.6.9}$$

и является положительно определенной. В общем, она не является больше диагональной, и ее обратная матрица определяется формулой

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{-1} = \mathbf{U}\boldsymbol{\mu}^{-1}\mathbf{U}^\dagger, \tag{1.6.10}$$

что можно проверить прямым произведением матриц. В результате из выражений (1.6.8) и (1.6.10) имеем

$$\Delta\mathbf{x}^\dagger\boldsymbol{\mu}^{-1}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{y}^\dagger\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{-1}\Delta\mathbf{y}. \tag{1.6.11}$$

Поскольку определитель эрмитовой матрицы $\boldsymbol{\mu}$ не изменяется при унитарном преобразовании, имеем $\det\boldsymbol{\mu} = \det\tilde{\boldsymbol{\mu}}$. Тогда выражение (1.6.7) приобретает вид

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}(\det\tilde{\boldsymbol{\mu}})^{1/2}}\exp(-\frac{1}{2}\Delta\mathbf{y}^\dagger\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{-1}\Delta\mathbf{y}). \tag{1.6.12}$$

Оно имеет точно такую же структуру, как и выражение (1.6.5), за исключением того, что $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$, в отличие от $\boldsymbol{\mu}$, не обязательно является диагональной. Поэтому экспонента имеет не такой простой вид, как в выражении (1.6.1), и вместо того, чтобы быть квадратичной, она имеет билинейную форму.

$$\frac{1}{2}\Delta\mathbf{y}^\dagger\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{-1}\Delta\mathbf{y} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\Delta y_i\tilde{\mu}_{ij}^{-1}\Delta y_j, \tag{1.6.13}$$

которая является характерной для многомерного гауссовского распределения.

Если проинтегрировать $P(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ по $N-1$ случайным переменным, скажем по $y_2, y_3, \ldots, y_N$, то получим выражение

$$P(y_1) = \int P(y_1, y_2, \ldots, y_N)\,dy_2\,dy_3\ldots dy_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y_1}}\exp[-(\Delta y_1)^2/2\sigma_{y_1}^2], \tag{1.6.14}$$

которое является обычной формой гауссовской плотности вероятности для одной случайной переменной. Из уравнения (1.6.12) очевидно, что все моменты высшего порядка и корреляции величин $y_1, y_2, \ldots, y_N$ должны выражаться через моменты μ_{ij} второго порядка, а гауссовские случайные переменные остаются гауссовскими при линейном преобразовании.

Применим эти результаты к специальному случаю гауссовского распределения $p(x_1, x_2)$ для двух переменных, в котором матрица смешанного второго момента $\boldsymbol{\mu}$ не обязательно остается диагональной. С помощью коэффициента корреляции $\rho_{12} = \mu_{12}/\sigma_1\sigma_2$ можно выразить $\boldsymbol{\mu}$-матрицу в виде

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2\\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}, \tag{1.6.15}$$

в то время как обратная матрица имеет вид

$$\boldsymbol{\mu}^{-1} = \frac{1}{(1-\rho_{12}^2)}\begin{bmatrix}1/\sigma_1^2 & -\rho_{12}/\sigma_1\sigma_2\\ -\rho_{12}/\sigma_1\sigma_2 & 1/\sigma_2^2\end{bmatrix}. \tag{1.6.16}$$

Тогда $\det\boldsymbol{\mu} = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho_{12}^2)$, и для гауссовского распределения вероятностей двух случайных переменных получаем следующее выражение

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho_{12}^2)^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)}\left(\frac{\Delta x_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho_{12}\Delta x_1\Delta x_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\Delta x_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right]. \tag{1.6.17}$$

Из этого выражения очевидно, что всякий раз, когда две гауссовские случайные переменные некоррелированы, так что $\rho_{12} = 0$, взаимная плотность вероятности разлагается на произведение плотностей вероятности для двух отдельных случайных переменных. Другими словами, если две гауссовские случайные переменные некоррелированы, то они являются также и статистически независимыми. Однако это неверно для случайных переменных в общем случае.

1.6.1. Теорема о гауссовском моменте

Гауссовские случайные переменные обладают замечательным свойством, состоящим в том, что все корреляции высших порядков между ними могут быть выражены через корреляции второго порядка между парами переменных. Пусть x_1, x_2, ... являются набором гауссовских случайных переменных. Тогда для любого набора из n индексов i_1, i_2, ..., i_n имеем:

$$\langle \Delta x_{i_1} \Delta x_{i_2} \dots \Delta x_{i_n} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ \sum\limits_{\substack{\text{по всем} \\ (n-1)!! \text{ парам}}} \langle \Delta x_{i_1} \Delta x_{i_2} \rangle \langle \Delta x_{i_3} \Delta x_{i_4} \rangle \dots \langle \Delta x_{i_{n-1}} \Delta x_{i_n} \rangle, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases} \tag{1.6.18}$$

Этот результат известен как *теорема о гауссовском моменте* (см., например, Mehta, 1965, прил. A1).

С тем чтобы доказать теорему, начнем с набора независимых гауссовских случайных переменных y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_n} и отметим, что $\langle \Delta y_{i_1} \Delta y_{i_2} \dots \Delta y_{i_n} \rangle$ обращается в нуль, если все нижние индексы различны, или — в более общем виде — если каждый нижний индекс не присутствует четное число раз. Тогда число множителей будет четным и с учетом (1.5.26) корреляция приобретает вид:

$$\langle (\Delta y_{i_1})^{2n_{i_1}} (\Delta y_{i_2})^{2n_{i_2}} \dots \rangle = \langle (\Delta y_{i_1})^{2n_{i_1}} \rangle \langle (\Delta y_{i_2})^{2n_{i_2}} \rangle \dots = \\ = (2n_{i_1} - 1)!! \, \langle (\Delta y_{i_1})^2 \rangle^{n_{i_1}} (2n_{i_2} - 1)!! \, \langle (\Delta y_{i_2})^2 \rangle^{n_{i_2}} \dots \tag{1.6.19}$$

Но это просто сумма по всем неисчезающим парам исходной корреляции, так что формально можно записать для корреляции четного числа независимых гауссовских случайных переменных

$$\langle \Delta y_{i_1} \Delta y_{i_2} \dots \Delta y_{i_n} \rangle = \sum_{\text{по всем парам}} \langle \Delta y_{i_1} \Delta y_{i_2} \rangle \dots \langle \Delta y_{i_{n-1}} \Delta y_{i_n} \rangle. \tag{1.6.20}$$

Теперь перейдем с помощью унитарного преобразования $\mathbf{U}$ от набора случайных y-переменных к набору $x_1, x_2, \dots, x_n$ случайных переменных, которые в общем случае больше не являются независимыми:

$$x_i = U_{ij} y_j, \quad y_i = U^{\dagger}_{ij} x_j. \tag{1.6.21}$$

Тогда имеем

$$\langle \Delta x_{i_1} \Delta x_{i_2} \dots \Delta x_{i_n} \rangle = U_{i_1 j_1} \dots U_{i_n j_n} \langle \Delta y_{i_1} \Delta y_{i_2} \dots \Delta y_{i_n} \rangle,$$

и применение уравнения (1.6.20) немедленно приводит к теореме (1.6.18).

Наконец, рассмотрим два полезных приложения. Если все x_i в выражении (1.6.18) являются равными, то сразу же получаем

$$\langle (\Delta x)^{2n} \rangle = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ (2n-1)!! \text{ парам}}} \langle (\Delta x)^2 \rangle^n = (2n-1)!! \, \sigma^{2n}. \tag{1.6.22}$$

Эта формула просто воспроизводит результаты, полученные с помощью выражения (1.5.26б). В качестве более сложного приложения рассмотрим две коррелированные гауссовские случайные переменные x, y. Тогда

$$\langle (\Delta x)^2 (\Delta y)^2 \rangle = \langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta y)^2 \rangle + \langle \Delta x \Delta y \rangle \langle \Delta x \Delta y \rangle + \langle \Delta x \Delta y \rangle \langle \Delta x \Delta y \rangle = \sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 + 2\rho_{xy}^2), \tag{1.6.23}$$

так что $\langle (\Delta x)^2 (\Delta y)^2 \rangle$ всегда превышает $\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta y)^2 \rangle$. Позже мы увидим (в гл. 8), что эта формула находит применение при объяснении корреляций интенсивности света от тепловых источников.

1.6.2. Производящая функция моментов и характеристическая функция[1]

Рассмотрим многомерное гауссовское распределение $p(x_1, x_2, \dots, x_N)$, в котором случайные величины $x_1, x_2, \dots, x_N$ могут быть коррелированными. Производящая функция моментов определяется выражением

$$M(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \left\langle \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i x_i \right) \right\rangle = \langle e^{\boldsymbol{\xi}^{\dagger} \mathbf{x}} \rangle, \tag{1.6.24}$$

[1] см. также справочник (*Королюк, Потенко, Скороход, Турбин, 1985) — *ред. пер.*

где мы использовали $\boldsymbol{\xi}$ и $\mathbf{x}$ для обозначения матриц-столбцов с элементами ξ_i и x_i, а $\boldsymbol{\xi}^\dagger$ является сопряженной матрицей-строкой. Для того, чтобы определить $M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$, нужно вычислить интеграл

$$M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}(\det \boldsymbol{\mu})^{1/2}} \int \exp(\boldsymbol{\xi}^\dagger \mathbf{x} - \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^\dagger \boldsymbol{\mu}^{-1}\Delta\mathbf{x})\, d^N x. \tag{1.6.25}$$

Для этой цели рассмотрим следующую билинейную форму

$$\frac{1}{2}(\Delta\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\xi})^\dagger \boldsymbol{\mu}^{-1}(\Delta\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^\dagger \boldsymbol{\mu}^{-1}\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\dagger\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^\dagger\Delta\mathbf{x} \tag{1.6.26}$$

и воспользуемся тем, что $\boldsymbol{\mu}^\dagger = \boldsymbol{\mu}$, поскольку $\boldsymbol{\mu}$ является эрмитовым оператором, и что $\boldsymbol{\xi}^\dagger\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{x}^\dagger\boldsymbol{\xi}$. Это позволяет нам переписать экспоненту в выражении (1.6.25) в виде

$$M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{\xi}^\dagger\langle\mathbf{x}\rangle}\, \mathrm{e}^{\boldsymbol{\xi}^\dagger\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\xi}/2} \left[\frac{1}{(2\pi)^{N/2}(\det\boldsymbol{\mu})^{1/2}} \int \exp[-\frac{1}{2}(\Delta\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\xi})^\dagger \boldsymbol{\mu}^{-1}(\Delta\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\xi})]\, d^N x\right].$$

Входящий в это выражение интеграл становится обычным гауссовским интегралом, если заменить среднее $\langle x\rangle$ на $\langle\mathbf{x}\rangle - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\xi}$. Тогда множитель в квадратных скобках становится равным единице, и в результате имеем

$$M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{\xi}^\dagger\langle\mathbf{x}\rangle}\, \mathrm{e}^{\boldsymbol{\xi}^\dagger\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\xi}/2} = \exp\left[\sum_{i=1}^{N} \xi_i\langle x_i\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \xi_i\mu_{ij}\xi_j\right]. \tag{1.6.27}$$

Подобным же образом можно показать, что характеристическая функция многомерного гауссовского распределения определяется выражением

$$C(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) = \langle \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\xi}^\dagger\mathbf{x}}\rangle = \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\xi}^\dagger\langle\mathbf{x}\rangle}\, \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\xi}^\dagger\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\xi}/2}, \tag{1.6.28}$$

а производящая функция кумулянтов следует из выражения (1.6.27)

$$K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) = \sum_{i=1}^{N} \xi_i\langle x_i\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \xi_i\mu_{ij}\xi_j. \tag{1.6.29}$$

Снова отметим, что ряд по ξ является полиномом второго порядка по N случайным переменным ξ_1, ξ_2, ..., ξ_N.

1.6.3. Многократные комплексные гауссовские случайные переменные

Мы уже видели, что комплексная гауссовская случайная величина z с нулевым средним имеет следующую плотность вероятности [см. (1.5.31)]:

$$p(z) = \frac{1}{\pi\mu}\, \mathrm{e}^{-|z|^2/\mu},$$

где $\mu = \langle \Delta z \Delta z^*\rangle$ является дисперсией z. Если z_1, z_2, ..., z_N является набором из N комплексных гауссовских случайных переменных, то общая многомерная гауссова плотность вероятности имеет вид

$$p(z_1, z_2, \ldots, z_N) = \frac{1}{\pi^N \det\boldsymbol{\mu}}\, \mathrm{e}^{-\Delta\mathbf{z}^\dagger\boldsymbol{\mu}^{-1}\Delta\mathbf{z}}, \tag{1.6.30}$$

где $\boldsymbol{\mu} = |\Delta\mathbf{z}\Delta\mathbf{z}^\dagger|$ является матрицей смешанного второго момента; $\Delta\mathbf{z}$ является матрицей-столбцом с элементами $z_i - \langle z_i\rangle$, а $\Delta\mathbf{z}^\dagger$ является эрмитово-сопряженным значением. Так как каждая комплексная случайная величина включает в себя две действительные случайные величины, $p(z_1, z_2, \ldots, z_N)$ имеет структуру, которая напоминает квадрат от $p(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Точно так же, как для действительной случайной величины $\mathbf{x}$, матрица $\boldsymbol{\mu}$ является положительно определенной.

Характеристическая функция может быть получена путем выполнения $2N$-мерного фурье-преобразования $p(z_1, z_2, \ldots, z_N)$. Введем набор комплексных параметров u_1, u_2, ..., u_N в виде матрицы-столбца $\mathbf{u}$. Тогда матричное произведение $\mathbf{u}^\dagger\mathbf{z} - \mathbf{z}^\dagger\mathbf{u}$ является чисто мнимым, и $\mathrm{e}^{\mathbf{u}^\dagger\mathbf{z}-\mathbf{z}^\dagger\mathbf{u}}$ является $2N$-мерным фурье-ядром. В результате характеристическую функцию можно написать в компактной форме

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_N) = \int \mathrm{e}^{\mathbf{u}^\dagger\mathbf{z}-\mathbf{z}^\dagger\mathbf{u}} p(z)\, d^{2N}z, \tag{1.6.31}$$

Анализ, подобный тому, что был использован ранее для вывода производящей функции моментов, приводит к формуле

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_N) = \mathrm{e}^{\mathbf{u}^\dagger\langle\mathbf{z}\rangle - \langle\mathbf{z}\rangle^\dagger\mathbf{u}}\, \mathrm{e}^{-\mathbf{u}^\dagger\boldsymbol{\mu}\mathbf{u}} = \exp\left[\sum_{i=1}^{N}(u_i^*\langle z_i\rangle - \langle z_i\rangle^* u_i) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(u_i^*\mu_{ij}u_j)\right]. \tag{1.6.32}$$

Следует отметить, что однократная сумма в этой формуле является чисто мнимой, а двойная сумма является действительной, — точно так же, как и для действительных случайных величин.

Теорема о гауссовском моменте имеет эквивалентный вид для случайных комплексных переменных. Можно показать, что (Metha, 1965, Прил. A2)

$$\langle \Delta z_{i_1}^* \Delta z_{i_2}^* \ldots \Delta z_{i_N}^* \Delta z_{j_M} \ldots \Delta z_{j_1}\rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } N \neq M, \\ \sum\limits_{\substack{\text{по всем} \\ N!\ \text{парам}}} \langle \Delta z_{i_1}^* \Delta z_{j_1}\rangle\langle \Delta z_{i_2}^* \Delta z_{j_2}\rangle \ldots \langle \Delta z_{i_N}^* \Delta z_{j_N}\rangle, & \text{если } N = M. \end{cases} \tag{1.6.33}$$

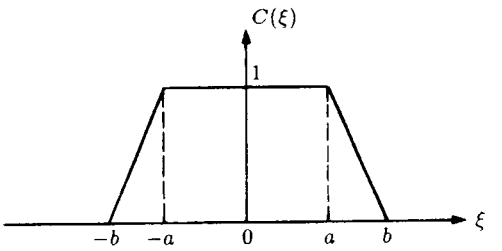
Отсюда следует, например, что если $\langle z_1\rangle = 0 = \langle z_2\rangle$, то

$$\langle |z_1|^2 |z_2|^2\rangle = \langle z_1^* z_1\rangle\langle z_2^* z_2\rangle + \langle z_1^* z_2\rangle\langle z_2^* z_1\rangle = \langle |z_1|^2\rangle\langle |z_2|^2\rangle(1 + |\rho_{12}|^2). \tag{1.6.34}$$

Задачи

1.1 ϕ является случайным фазовым углом, распределенным однородно по кругу от 0 до 2π; a является константой; и $x = a\cos\phi$, $y = a\sin\phi$. Рассчитать: (а) распределение вероятности для x и y; (б) совместное распределение вероятности для x и y; (в) смешанный второй момент для x и y. Являются ли случайные переменные x и y статистически независимыми?

1.2 Изучить вопрос: существует ли случайная переменная x, характеристическая функция $C(\xi)$ которой



является действительной для действительного ξ и имеет форму, показанную на рисунке, а если существует, то для каких значений a и b? Какова соответствующая плотность вероятности? Рассчитать моменты для x.

1.3 Определенный эксперимент выполнен неоднократно и независимо; он имел вероятность α быть удачным в любой момент времени. Какова вероятность $P(m,n)$ получения m неудач и n удач в $m+n$

испытаниях, которые заканчиваются n-ным успехом? Рассчитайте r-тый факториальный момент для m при заданном n.

$$\left[\text{Можно использовать соотношение } \binom{m+n-1}{m} = (-1)^m \binom{-n}{m}.\right]$$

1.4 Линейка единичной длины поделена на две части точкой на ней, выбранной случайно. Рассчитать: (а) среднюю длину каждой части; (б) среднее соотношение короткой и длинной частей; (в) матрицу смешанного второго момента для длин двух частей.

1.5 В лабораторном эксперименте по измерению ускорения тела под действием силы тяжести ($g = 981\,\text{см/с}^2$), допускающем 1%-ную точность, студент намерен получить следующие четыре ответа из четырех независимых измерений: $980\,\text{см/с}^2$, $981\,\text{см/с}^2$, $983\,\text{см/с}^2$, $981\,\text{см/с}^2$. Может ли студент совершить ошибку? Используйте χ^2-тест гипотезы, чтобы достичь достоверности вашего заключения.

1.6 Покажите, что вероятность $P(n)$ того, что любая группа людей, начиная с двух, имеют один и тот же день рождения приблизительно определяется выражением

$$P(n) \approx 1 - \exp\left(\frac{n - n^2}{730}\right)$$

для небольших значений n (где n — число людей в группе). Какова наименьшая группа из n, для которой $P(n) > \frac{1}{2}$? (Возьмите год, имеющий 365 дней. Каждый день равновероятен относительно дня рождения человека).

1.7 Определенная система, имеющая только два возможных состояния A и B, измеряется независимо $2N$ раз. Установлено, что она находилась N раз в состоянии A и N раз в состоянии B. Предполагая, что нам ничего не известно изначально относительно априорной вероятности q нахождения системы в состоянии A, используйте теорему Байеса при расчете распределения вероятности q при $2N$ различных наблюдениях и запишите графу распределения для $N = 0, 2, 4, 6$.

1.8 Пьяница движется в одном направлении, делая шаг вперед или шаг назад случайным образом, с вероятностями α и $1 - \alpha$, соответственно. Он находится на расстоянии n шагов от края утеса. Рассчитайте вероятность того, что он перейдет край утеса, как функцию от n и α. Какое значение α является наименьшим, при котором он упадет независимо от того места, с которого он стартовал? Какова асимптотическая форма этой вероятности при $n \to \infty$? (Рекомендация: используйте закон композиции для построения вероятностей).

1.9 x, y являются двумя вещественными гауссовскими случайными переменными с нулевым средним с совместной плотностью вероятности

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right]$$

где $\sigma_x = \langle x^2\rangle^{1/2}$, $\sigma_y = \langle y^2\rangle^{1/2}$, $\rho = \langle xy\rangle/\sigma_x\sigma_y$. Покажите, что новые действительные случайные переменные u, v, определяемые преобразованием

$$u = x\cos\theta - y\sin\theta,$$
$$v = x\sin\theta + y\cos\theta,$$

также являются двумерными гауссовскими случайными переменными и определите угол θ, для которого u, v являются статистически независимыми.

1.10 Покажите, что любая вещественная характеристическая функция $C(h)$ подчиняется следующему неравенству

$$1 - C(h) \geqslant \frac{1}{4^n}[1 - C(2^n h)] \quad \text{для } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Глава 2

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

2.1. Введение в статистические ансамбли[1]

Концепция случайного или стохастического процесса или функции представляет собой обобщение понятия множества случайных переменных $x_1, x_2, \ldots$, когда множество не является счетным, и переменные формируют континуум. Следовательно, вводится некоторый непрерывный параметр, такой, как время t. Мы называем $x(t)$ ***случайным процессом или случайной функцией от*** t, если x зависит от t случайным образом. Случайные процессы встречаются во многих областях науки, когда имеют место флуктуации. Примерами реальных случайных процессов являются флуктуации напряжения на выходе электрического резистора или координаты частицы, совершающей броуновское движение. Вскоре мы увидим, что оптическое поле, сгенерированное любым световым источником, должно также рассматриваться как случайная функция положения и времени. Безусловно, параметр t может означать любую другую величину, помимо времени, но для простоты мы будем использовать в качестве этого параметра время. В наших приложениях $x(t)$ будет часто представлять собой декартову компоненту вектора электрического или магнитного поля в световом луче. Для начала будем считать $x(t)$ действительным, в то же время будут рассматриваться и комплексные случайные процессы.

2.1.1. Среднее по ансамблю

Поскольку x зависит от t случайным образом, мы можем описывать его значения только статистически при помощи распределения вероятности или плотности вероятности. При каждом значении t $x(t)$ является случайной переменной в некоторой области значений с плотностью вероятности $p[x(t)]$ или $p(x,t)$. При интегрировании по этой области значений мы имеем

$$\int p(x,t)\,dx = 1,$$

что характерно для плотности вероятности. Следует отметить, что в силу зависимости $p(x,t)$ от t распределение вероятности символизирует не одно, а бесконечное семейство распределений вероятностей. Множество всех случайных величин в моменты времени t образуют случайный процесс $x(t)$. Мы можем вычислить среднее значение $x(t)$ в момент времени t, используя плотность вероятности $p(x,t)$,

$$\langle x(t)\rangle = \int xp(x,t)\,dx. \tag{2.1.1a}$$

С другой стороны, можно рассматривать множество всех возможных реализаций или выборочных функций $x(t)$, изображенных на рис. 2.1, как случайный процесс. Счетное множество всех возможных реализаций называют ансамблем $x(t)$. В эксперименте выборочная функция может описывать результат измерения как функцию времени t, но повторный эксперимент в общем случае дает другие выборочные

[1]В качестве дополнительной литературы рекомендуем книги (*Вентцель и Овчаров, 1989; *Левин, 1989) — *ред. пер.*

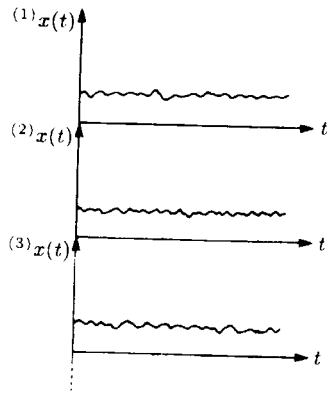


Рис. 2.1. Представление действительного случайного процесса $x(t)$ на основе ансамбля реализаций ${}^{(j)}x(t), (j = 1, 2, 3, \ldots)$

функции или реализации, которые могут быть обозначены последовательно ${}^{(1)}x(t)$, ${}^{(2)}x(t)$, ..., и т.д. Среднее, или математическое ожидание x в момент времени t можно найти усреднением по ансамблю всех реализаций

$$\langle x(t)\rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} {}^{(r)}x(t). \tag{2.1.1б}$$

Выражения (2.1.1а) и (2.1.1б) представляют собой эквивалентные определения *среднего по ансамблю*.

Рассмотренные выше понятия и определения в равной степени применимы к комплексному случайному процессу $z(t)$, для которого случайная переменная, зависящая от определенного t, является комплексной. Записывая $z(t) = x(t) + iy(t)$, мы видим, что комплексный случайный процесс можно рассматривать в виде пары действительных случайных процессов $x(t)$, $y(t)$. Тогда плотность вероятности $p(z,t)$ представляет собой совместную плотность вероятности от x, y в момент времени t. Среднее от $z(t)$ можно вычислить на основе $p(z,t)$, очевидным образом обобщая уравнение (2.1.1а), которое мы можем записать в виде

$$\langle z(t)\rangle = \int z p(z,t)\, d^2z, \tag{2.1.2а}$$

где $d^2z \equiv dx\, dz$. Эта величина эквивалентна среднему по ансамблю реализаций ${}^{(r)}z(t)$,

$$\langle z(t)\rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} {}^{(r)}z(t). \tag{2.1.2б}$$

Для простоты в этом разделе обратимся к действительным случайным процессам.

2.1.2. Совместные вероятности и корреляции

Несмотря на то, что $p(x,t)$ символизирует бесконечное семейство плотностей вероятности, она еще не описывает полностью случайный процесс. Например, она не содержит информации о возможных корреляциях между $x(t_1)$ и $x(t_2)$ в два различных момента времени t_1 и t_2. Такую информацию дает совместная или двукратная плотность вероятности случайных переменных при t_1, t_2, выражаемая следующими равнозначными способами:

$$p_2[x_2(t_2); x_1(t_1)], \quad \text{или} \quad p_2(x_2, t_2; x_1, t_1), \quad \text{или} \quad p_2(x_2, x_1; t_2, t_1),$$

которая зависит от двух случайных переменных x_1, x_2 и двух параметров t_1, t_2. Плотность вероятности $p_2(x_2, t_2; x_1, t_1)$ позволяет нам вычислить двукратные функции корреляции, такие, как:

$$\Gamma(t_2, t_1) \equiv \langle x(t_1); x(t_2)\rangle = \int x_1 x_2\, p_2(x_2, t_2; x_1, t_1)\, dx_1\, dx_2. \tag{2.1.3}$$

Плотность вероятности $p_2(x_2, t_2; x_1, t_1)$ содержит всю информацию, содержащуюся в $p(x,t)$, которую можно записать в виде $p_1(x,t)$ дополнительно к новой информации, поскольку из обычного свойства совместных вероятностей следует

$$\int p_2(x_2, t_2; x_1, t_1)\, dx_2 = p_1(x_1, t_1). \tag{2.1.4}$$

Отметим, что для совместимости, т.е. внутренней согласованности теории, параметр t_2 должен исчезнуть в процессе интегрирования по всем x_2.

Величина $\Gamma(t_1, t_2) \equiv \langle x(t_1); x(t_2)\rangle$ известна как (двухвременна́я) ***автокорреляционная функция*** случайного процесса $x(t)$. После среднего $\langle x(t)\rangle$, это следующая по значению величина при описании случайного процесса, поскольку она дает информацию о том, как далеко корреляции распространяются во

времени. Несмотря на то, что $p_2(x_2,t_2;x_1,t_1)$ содержит больше информации, чем $p_1(x,t)$, она еще не позволяет нам вычислять некоторые значения математического ожидания, например, трехвременну́ю функцию корреляции $\langle x(t_1)x(t_2)x(t_3)\rangle$, для которой требуется трехкратная совместная плотность вероятности $p_3(x_3,t_3;x_2,t_2;x_1,t_1)$. Очевидно, существует *бесконечная иерархия плотностей вероятностей*

$$p_1(x,t),\quad p_2(x_2,t_2;x_1,t_1),\quad p_3(x_3,t_3;x_2,t_2;x_1,t_1),\quad \ldots\quad p_n(x_n,t_n;x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1),$$

каждая из которых содержит больше информации, чем предыдущие вероятности, и каждая из которых включает в себя всю информацию, содержавшуюся в предыдущих плотностях вероятности. Плотность вероятности $p_n(x_n,t_n;x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$ является n-кратной совместной плотностью вероятности, с которой в момент времени t_1 случайная переменная имеет значения между x_1 и x_1+dx_1, а в момент времени t_2, она имеет значение между x_2 и x_2+dx_2 и т.д. Величина $p_n(x_n,t_n;x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1)\times$ $\times\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$ должна удовлетворять условию совместимости

$$\int p_n(x_n,t_n;x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1)\,dx_{k+1}\,dx_{k+2}\ldots dx_n = p_k(x_k,t_k;x_{k-1},t_{k-1};\ldots;x_1,t_1) \tag{2.1.5}$$

для любого целого $k<n$. Таким образом, время t_j, связанное со случайной переменной x_j, исчезает при интегрировании по всем x_j. Аналогично, плотность $p_n(x_n,t_n;x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1)$ также симметрична по случайным переменным, что подразумевает

$$p_n(x_n,t_n;x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1) = p_n\left(\prod[x_n,t_n;x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1]\right), \tag{2.1.6}$$

где $\prod$ означает любую перестановку индексов от 1 до n. Если p_n известна, она может быть использована для вычисления многовременно́й корреляции n-го порядка [или порядка меньшего, чем n с помощью соотношения (2.1.5)]:

$$\langle x(t_1),x(t_2),\ldots,x(t_n)\rangle = \int x_1x_2\ldots x_np_n(x_n,t_n;x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n. \tag{2.1.7}$$

В общем случае функции корреляции высшего порядка случайного процесса содержат значительно больше информации, так же, как p_n содержит больше информации, чем p_{n-1}. Исключение возникает в случае *гауссовского случайного процесса*, для которого $p_n(x_n,t_n;x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1)$ является многомерной гауссовской плотностью вероятности, определяемой уравнением (1.6.5). В этом случае в силу теоремы гауссовского момента [см. (1.6.18)] мы имеем для функции корреляции n-порядка действительного гауссовского случайного процесса $x(t)$ с нулевым средним

$$\langle x(t_1),x(t_2)\ldots x(t_n)\rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \sum\limits_{\substack{\text{по всем}\\ \text{парам}}}^{(n-1)!!} \langle x(t_1)x(t_2)\rangle\langle x(t_3)x(t_4)\rangle\ldots\langle x(t_{n-1})x(t_n)\rangle, & \text{если } n \text{ четно,} \end{cases} \tag{2.1.8}$$

где $(n-1)!!\equiv(n-1)(n-3)\ldots5\cdot3\cdot1$. Таким образом, в этом случае автокорреляционная функция второго порядка уже содержит всю информацию о корреляциях высших порядков.

2.1.3. Функционал вероятности

Несмотря на то, что p_n содержит больше информации, чем p_{n-1}, не существует верхней границы для n при непрерывном параметре t, и никакое p_n не может при конечных n полностью описать случайный процесс. Только совместная плотность вероятности бесконечного порядка при всех t, или *функционал вероятности* $p(\{x(t)\})$, в котором $\{x(t)\}$ означает бесконечное множество всех x при всех t, содержит полное статистическое описание случайного процесса. Однако явная форма функционала $p(\{x(t)\})$ часто неизвестна.

Тем не менее, понятие *функционала вероятности* иногда может быть полезным, например, для описания математического ожидания некоторого функционала $f(\{x(t)\})$ от $\{x(t)\}$. В этом случае пишем

$$\langle f(\{x(t)\})\rangle = \int f(\{x(t)\})p(\{x(t)\})\,d\{x(t)\}, \tag{2.1.9}$$

где $d\{x(t)\}$ — сокращенное обозначение для $\prod_{\text{по всем } t} dx(t)$. По аналогии с характеристической функцией для N случайных переменных, например,

$$C(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N) = \left\langle \exp\left(i\sum_{j=1}^{N} x_j\xi_j\right)\right\rangle,$$

можно связать *характеристический функционал* с функционалом вероятности $p(\{x(t)\})$ следующим образом:

$$C(\{\xi(t)\}) = \left\langle \exp\left[i\int x(t')\xi(t')\,dt'\right]\right\rangle = \int \exp\left[i\int x(t')\xi(t')\,dt'\right] p(\{x(t)\})\,d\{x(t)\}. \tag{2.1.10}$$

В частности, для гауссовского процесса с нулевым средним при очевидном обобщении уравнения (1.6.28) получается характеристический функционал

$$C(\{\xi(t)\}) = \exp\left[-\frac{1}{2}\iint_{-\infty}^{\infty} \xi(t')\xi(t'')\mu(t',t'')\,dt'\,dt''\right], \tag{2.1.11}$$

где $\mu(t',t'') \equiv \Gamma(t',t'') \equiv \langle x(t')x(t'')\rangle$ — ковариационная матрица, которая также является автокорреляционной функцией. В принципе, многомерные моменты или корреляции случайного процесса $x(t)$ могут быть получены из $C(\{\xi(t)\})$ при использовании функционального дифференцирования[1], которого мы не будем здесь применять.

2.2. Стационарность и эргодичность

Случайные функции от времени часто имеют свойство, согласно которому характер флуктуаций не изменяется со временем, даже если любая реализация ансамбля $x(t)$ изменяется непрерывно во времени. Говорят, что такой процесс является *статистически стационарным* (см. пример на рис. 2.2). Более точно мы называем случайный процесс стационарным, если все плотности вероятности p_1, p_2, p_3, ..., описывающие флуктуации, инвариантны при произвольном сдвиге начала отсчета[2], т.е. если

$$p_n(x_n,t_n;x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1) = p_n(x_n,t_n+T;x_{n-1},t_{n-1}+T;\ldots;x_1,t_1+T) \quad \text{для всех } T. \tag{2.2.1}$$

При данных обстоятельствах значение математического ожидания любой функции от $x(t_1), x(t_2), \ldots$ также инвариантно при смещении начала отсчета, т.е.

$$\langle f[x(t_1),x(t_2),\ldots]\rangle = \langle f[x(t_1+T),x(t_2+T),\ldots]\rangle\,. \tag{2.2.2}$$

Из (2.2.1) следует, что для стационарного процесса $p_1(x,t)$ не может зависеть от t. То же самое справедливо и для математического ожидания $\langle x(t)\rangle$. Выбирая $n=1$ и $T=-t$, имеем

$$\begin{aligned} p_1(x,t) &= p_1(x,0),\\ \langle x(t)\rangle &= \int x p_1(x,t)\,dx = \int x p_1(x,0)\,dx. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

[1] Более подробно о методе функционального дифференцирования см., например, в книге (Beran, 1968).

[2] Математические основы теории стационарных случайных процессов изложены, например, в книге (Yaglom, 1962).

Также выбирая $T = -t$, из уравнения (2.2.1) имеем

$$p_n(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}; \ldots; x_1, t_1) = \\ = p_n(x_n, t_n - t_1; x_{n-1}, t_{n-1} - t_1; \ldots; x_1, 0), \quad (2.2.4)$$

так что совместные вероятности p_n можно выразить в виде функций разностей между одной из n временны́х аргументов и остальными $n-1$ аргументами. В частности, для автокорреляционной функции получим

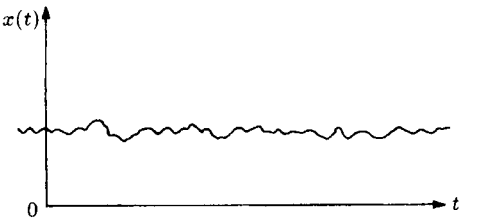


Рис. 2.2. Реализации стационарного случайного процесса $x(t)$

$$\Gamma(t_1, t_2) = \langle x(t_1), x(t_2)\rangle = \int x_1 x_2\, p_2(x_2, t_2; x_1, t_1)\, dx_1\, dx_2 = \\ = \int x_1 x_2\, p_2(x_2, t + t_2 - t_1; x_1\, dx_1\, dx_2 = \langle x(t), x(t + t_2 - t_1)\rangle \quad (2.2.5)$$

для всех значений t, так что она зависит только от разности двух временны́х аргументов. Поэтому $\Gamma(t_1, t_2)$ часто записывают как $\Gamma(t_2 - t_1)$. Заменяя в уравнении (2.2.5) t на $t - t_2 + t_1$, мы видим, что $\Gamma(t_2 - t_1)$ является симметричной, т.е.

$$\Gamma(t_2 - t_1) = \Gamma(t_1 - t_2), \quad (2.2.6)$$

для действительных стационарных процессов. В более общем случае можно показать [рассуждая так же, как при выводе (2.2.5)], что для корреляционной функции N-порядка стационарного случайного процесса

$$\Gamma^{(N)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv \langle x(t_1)x(t_2)\ldots x(t_n)\rangle = \langle x(t_1 + T)x(t_2 + T)\ldots x(t_n + T)\rangle \quad (2.2.7)$$

для всех T. Однако корреляции высших порядков встречаются не так часто.

Когда интерес представляют только среднее $\langle x(t)\rangle$ и корреляционная функция второго порядка $\Gamma(t_1, t_2)$, часто используется более слабая форма стационарности. В случае, когда для $x(t)$ его среднее $\langle x(t)\rangle$ не зависит от времени t, и его автокорреляционная функция $\Gamma(t_1, t_2)$ зависит от t_1 и t_2 только через их разность, говорят, что случайный процесс является *стационарным в широком смысле*.

Если вместо действительного случайного процесса $x(t)$ мы имеем дело с комплексным случайным процессом $z(t)$, автокорреляционная функция $\Gamma(t_1, t_2)$ определяется уравнением

$$\Gamma(t_1, t_2) \equiv \langle z^*(t_1)z(t_2)\rangle \equiv \int z_1^* z_2 p_2(z_2, t_2; z_1, t_1)\, d^2 z_1\, d^2 z_2.$$

В том случае, когда процесс является стационарным, по крайней мере, в широком смысле, $\langle z(t)\rangle$ не зависит от t, $\Gamma(t_1, t_2) = \Gamma(t_2 - t_1)$ и подчиняется условию эрмитовости

$$\Gamma(t_2 - t_1) = \Gamma^*(t_1 - t_2), \quad (2.2.8)$$

вместо условия симметрии (2.2.6).

2.2.1. Среднее по времени стационарного процесса

До сих пор средние, или математические ожидания, вычислялись усреднением по ансамблю всех реализаций. Однако иногда доступна только одна реализация ансамбля, скажем k-я реализация ${}^{(k)}z(t)$, и нужно определить его среднее по определенному временно́му интервалу T или, возможно, по всему временно́му интервалу. Определим конечное среднее по времени k-й реализации стационарного случайного процесса $z(t)$, который может быть комплексным:

$$\left[{}^{(k)}z(t)\right]_T \equiv \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} {}^{(k)}z(t')\, dt'. \quad (2.2.9)$$

Тогда $\left[{}^{(k)}z(t)\right]_T$ представляет собой случайный процесс и можно ожидать, что его флуктуации уменьшаются при увеличении T. При $T \to \infty$ уравнение (2.2.9) дает *среднее по времени* от ${}^{(k)}z(t)$

$$\overline{{}^{(k)}z} \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} {}^{(k)}z(t')\, dt', \tag{2.2.10}$$

которое больше не зависит от t или T, но в общем случае зависит от конкретной реализации k ансамбля, которую мы выбрали. В принципе, может быть столько разных средних по времени, сколько существует элементов ансамбля.

В общем случае, когда нас интересуют многовременные корреляции, например, среднее от $z^*(t)z(t+\tau)$, мы просто образуем новый случайный процесс $Z(t)$ на основе $z(t)$

$${}^{(k)}Z(t) = {}^{(k)}z^*(t)\,{}^{(k)}z(t+\tau)$$

для каждой реализации k. Можно задать те же самые вопросы относительно ${}^{(k)}Z(t)$, которые мы задавали относительно ${}^{(k)}z(t)$. Например, можно вычислить среднее по времени ${}^{(k)}Z(t)$ и сравнить этот результат со средним по ансамблю. Снова находим, что среднее по времени

$$\overline{{}^{(k)}Z} \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} {}^{(k)}Z(t')\, dt'$$

может зависеть от конкретной реализации k.

2.2.2. Эргодичность

На практике часто случается, что каждая реализация ансамбля несет ту же статистическую информацию о стационарном случайном процессе, что и другая реализация. Различные средние по времени $\overline{{}^{(k)}z}$ все равны и совпадают со средним по ансамблю $\langle z\rangle$ стационарного случайного процесса $z(t)$. Тогда говорят, что стационарный случайный процесс $z(t)$ является *эргодическим процессом*.

Нетрудно найти условие, при котором среднее по времени совпадает с средним по ансамблю стационарного случайного процесса $z(t)$. Если усреднить $\left[{}^{(k)}z(t)\right]_T$ по ансамблю, то получим

$$\left\langle \left[{}^{(k)}z(t)\right]_T \right\rangle = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \left\langle {}^{(k)}z(t')\right\rangle dt' = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \langle z\rangle\, dt' = \langle z\rangle, \tag{2.2.11}$$

так что среднее по ансамблю $\left[{}^{(k)}z(t)\right]_T$ совпадает со средним по ансамблю случайного процесса $z(t)$ для всех T. Далее вычислим дисперсию $\left[{}^{(k)}z(t)\right]_T$:

$$\left\langle \left|\Delta\left[{}^{(k)}z(t)\right]_T\right|^2 \right\rangle \equiv \left\langle \left|\left[{}^{(k)}z(t)\right]_T - \langle z\rangle\right|^2 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left|\left[{}^{(k)}z^*(t)\right]_T \left[{}^{(k)}z(t)\right]_T\right| \right\rangle - |\langle z\rangle|^2 = \left\langle \left[\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} {}^{(k)}z^*(t')dt'\right]\left[\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} {}^{(k)}z(t'')dt''\right]\right\rangle - |\langle z\rangle|^2 =$$

$$= \frac{1}{T^2}\iint\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \left[\Gamma(t''-t') - |\langle z\rangle|^2\right] dt'dt'',$$

где мы воспользовались определением $\Gamma(t''-t') = \langle z^*(t')z(t'')\rangle$. Осуществляя замену $t' = t+t_1$, $t'' = t+t_2$, можно сделать пределы интегрирования симметричными, так что

$$\left\langle \left|\Delta\left[{}^{(k)}z(t)\right]_T\right|^2 \right\rangle = \frac{1}{T^2}\iint\limits_{-T/2}^{T/2} \left[\Gamma(t_2-t_1) - |\langle z\rangle|^2\right] dt_1\, dt_2. \tag{2.2.12}$$

Поскольку в правой части уравнения (2.2.12) переменная интегрирования зависит только от разности двух временны́х аргументов t_1 и t_2, двойной интеграл можно преобразовать в одномерный интеграл по переменной $\tau = t_2 - t_1$. Это преобразование можно сделать с помощью простого геометрического рассуждения. Рассмотрим вклад в интеграл полоски длиной l вдоль линии $\tau = t_2 - t_1 =$ константа, которая заштрихована на рис. 2.3. Вдоль этой полоски $\Gamma(\tau)$ постоянна и, следовательно, вклад в интеграл от этой полоски равен $[\Gamma(\tau) - |\langle z\rangle|^2] l\, d\tau/\sqrt{2}$. Из элементарной геометрии следует, что $l = \sqrt{2}(T - |\tau|)$. Таким образом, вклад полоски равен $[\Gamma(\tau) - |\langle z\rangle|^2](T - |\tau|)\, d\tau$. Используя этот результат, получаем формулу

$$\left\langle \left| \Delta \left[{}^{(k)}z(t) \right]_T \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) \left| \Gamma(\tau) - |\langle z\rangle|^2 \right| d\tau \leqslant \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \left| \Gamma(\tau) - |\langle z\rangle|^2 \right| d\tau \qquad (2.2.13а)$$

$$\therefore \left\langle \left| \Delta \left[{}^{(k)}z(t) \right]_T \right|^2 \right\rangle \leqslant \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Gamma(\tau) - |\langle z\rangle|^2 \right| d\tau. \qquad (2.2.13б)$$

Очевидно, при увеличении T дисперсия $\left[{}^{(k)}z(t) \right]_T$ стремится к нулю, тогда как интеграл остается конечным. Но при $T \to \infty$ $\left[{}^{(k)}z(t) \right]_T$ становится средним по времени $\overline{{}^{(k)}z}$. Следовательно, $\overline{{}^{(k)}z}$ совпадает со средним по ансамблю $\langle z\rangle$ всякий раз, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \Gamma(\tau) - |\langle z\rangle|^2 \right| d\tau < \infty. \qquad (2.2.14)$$

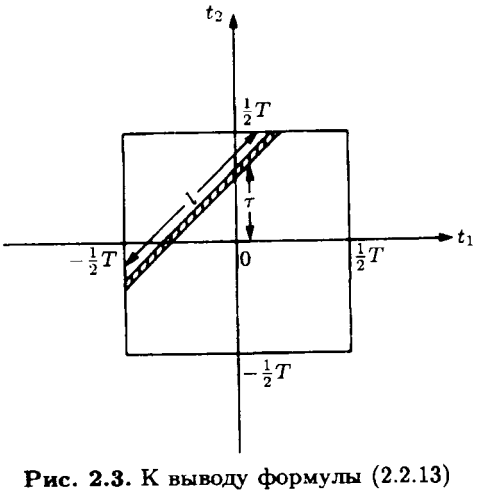


Рис. 2.3. К выводу формулы (2.2.13)

Это условие является достаточным для совпадения двух средних, но не является необходимым; при этом в некоторой степени более слабое, но менее удобное условие можно получить из уравнения (2.2.13а). Однако условие (2.2.14) еще не гарантирует, что процесс $z(t)$ является эргодическим в полном смысле, когда, например, среднее по времени другого процесса $Z(t) \equiv z^*(t)\, z(t+\tau)$, образованного из $z(t)$, равно среднему по ансамблю $Z(t)$. Для этого нам нужно было бы вычислить автокорреляционную функцию от $Z(t)$ и применить то же самое исследование к случайному процессу $Z(t)$. В общем случае требуется бесконечное число разных критериев, чтобы обеспечить полную эргодичность случайного процесса $z(t)$. Однако для специального случая случайного гауссовского процесса $z(t)$, для которого все корреляции высших порядков выражаются на основе корреляций второго порядка (см. разд. 1.6), критерий, определяемый уравнением (2.2.14), является достаточным для полной эргодичности.

Условие (2.2.14) имеет простую физическую интерпретацию. В силу того, что $\Delta z(t) = z(t) - \langle z(t)\rangle$ и $\langle \Delta z^*(t) z(t+\tau)\rangle = \Gamma(\tau) - |\langle z\rangle|^2$, мы видим, что интеграл является конечным, если $\langle \Delta z^*(t) z(t+\tau)\rangle$ стремится к нулю достаточно быстро при $\tau \to \infty$. Другими словами, эргодичность имеет место, если корреляции случайного процесса исчезают достаточно быстро со временем. В этом случае достаточно длинная запись одной реализации ${}^{(k)}z(t)$ случайного процесса может быть разделена на сегменты более короткой длины, которые являются некоррелированными, так что ансамбль может быть построен из одиночной реализации. Тогда среднее по ансамблю равно среднему по времени, поскольку одиночная реализация достаточной длины уже содержит всю информацию об ансамбле. Если процесс стационарный и эргодический, то все реализации случайного процесса выглядят почти одинаково и отличаются только в деталях.

В заключение отметим, что, хотя единственное условие (2.2.14) не гарантирует эргодичности процесса $z(t)$, в общем случае, если интеграл в уравнении (2.2.14) расходится, то процесс $z(t)$ не является эргодическим, даже если не исключается возможность того, что $\overline{{}^{(k)}z(t)} = \langle z(t)\rangle$.

2.2.3. Примеры случайных процессов[1]

Рассмотрим два простых примера случайных процессов, для того чтобы проиллюстрировать понятия стационарности и эргодичности, которые мы только что обсудили.

[1] см. также книги (*Рытов, Кравцов, Татарский, 1978; *Ахманов, Дьяков, Чиркин, 1981) — *ред. пер.*

(а) Рассмотрим ансамбль комплексных функций

$$z(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}, \tag{2.2.15}$$

в котором $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ — фиксированные частоты, а коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_N$ — случайные переменные. Так как каждое множество возможных значений случайных переменных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ определяет случайную реализацию, очевидно, что $z(t)$ представляет собой случайный процесс. На рис. 2.4 показаны примеры возможных реализаций ансамбля. Посмотрим, является ли $z(t)$ стационарным в широком смысле.

Из уравнения (2.2.15) мы находим для математического ожидания

$$\langle z(t) \rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle a_n \rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}, \tag{2.2.16}$$

и для автокорреляционной функции

$$\Gamma(t, t+\tau) = \langle z^*(t)\, z(t+\tau) \rangle = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \langle a_n^* \, a_m \rangle \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_n - \omega_m)t} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_m \tau}. \tag{2.2.17}$$

Для того, чтобы $\langle z(t) \rangle$ и $\Gamma(t, t+\tau)$ были независимы от t, мы требуем

$$\langle a_n \rangle = 0, \quad \langle a_n^* \, a_m \rangle = \langle |a|^2 \rangle \delta_{nm}, \tag{2.2.18}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера, т.е. δ_{nm} принимает значение 1 или 0, если $m = n$ или $m \neq n$, соответственно. Другими словами, если все случайные переменные $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеют нулевое среднее и если все они являются некоррелированными, то случайный процесс $z(t)$ является стационарным в широком смысле.

Предполагая, что этот случай имеет место, посмотрим, является ли процесс $z(t)$ эргодическим. Согласно критерию (2.2.14) нам нужно вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=1} \langle |a_n|^2 \rangle \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n \tau} \right| d\tau,$$

который, очевидно, расходится, потому что корреляции не исчезают. В этом случае средние по времени функций случайного процесса, вычисленные на основе различных реализаций ансамбля, не будут равны среднему по ансамблю, и будут отличаться друг от друга. Следовательно, вместо единственного среднего по времени мы имеем бесконечное их множество. Тем не менее, получается, что $\overline{{}^{(k)}z} = 0 = \langle z \rangle$. Однако можно легко показать, что для случайного процесса $|z(t)|^2$ среднее по времени равно

$$\overline{\left| {}^{(k)}z \right|^2} = \sum_{n} \left| a_n^{(k)} \right|^2$$

и, очевидно, зависит от конкретной реализации k ансамбля. Почему это так, можно понять, взглянув на рис. 2.4: различные реализации ансамбля статистически не эквивалентны и каждая из них дает свой ответ; следовательно, процесс $z(t)$ не является эргодическим.

(б) В качестве второго примера рассмотрим действительный случайный процесс $x(t)$, изображенный на рис. 2.5, который называют *случайным телеграфным сигналом* (Rice, 1944). В этом процессе $x(t)$ может принимать поочередно два фиксированных значения a и $-a$, мгновенно изменяя значение в случайные моменты времени со средней скоростью R.

Из структуры случайного процесса $x(t)$ очевидно, что не существует предпочтительного начала времени, так что $x(t)$ стационарный не только в широком, но и в узком смысле. Более того, если значения a и $-a$ равновероятны, то

$$\langle x(t) \rangle = 0. \tag{2.2.19}$$

Обратимся теперь к вычислению автокорреляционной функции $\Gamma(\tau) = \langle x(t)\, x(t+\tau) \rangle$. Произведение $\langle x(t)\, x(t+\tau) \rangle$ может принимать только значения a^2 и $-a^2$. Если процесс $x(t)$ переключался четное число

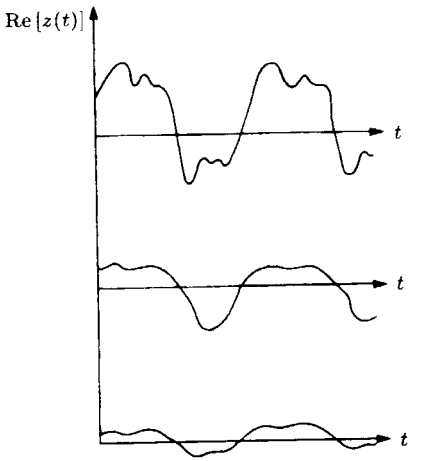


Рис. 2.4. Возможные реализации действительной части случайного процесса $z(t)$. Этот процесс не эргодический

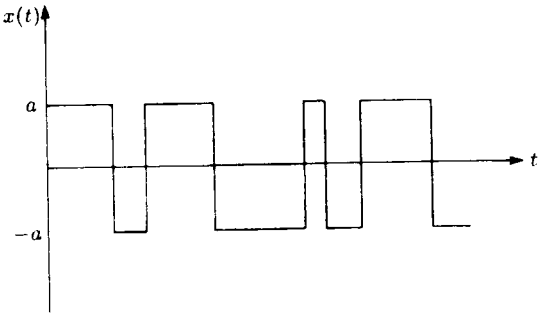


Рис. 2.5. Реализация случайного телеграфного сигнала $x(t)$

раз в интервале от t до $t+\tau$, то $\langle x(t)\, x(t+\tau)\rangle = a^2$, в противном случае, когда он переключался нечетное число раз, это произведение дает $-a^2$. Если $p(n,\tau)$ — вероятность n включений в интервале τ, то

$$\Gamma(\tau) = a^2 \sum_{n=0,2,4,\ldots}^{\infty} p(n,\tau) - a^2 \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} p(n,\tau) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, p(n,\tau). \tag{2.2.20}$$

Так как переключения осуществляются случайным образом со средней скоростью R, $p(n,\tau)$ является пуассоновским распределением с параметром $\langle n\rangle = R\tau$, т.е.

$$p(n,\tau) = \frac{(R\tau)^n\, \mathrm{e}^{-R\tau}}{n!}. \tag{2.2.21}$$

Подстановка этого выражения в уравнение (2.2.20) дает

$$\Gamma(\tau) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-R\tau)^n\, \mathrm{e}^{-R\tau}}{n!} = a^2\, \mathrm{e}^{-2R\tau} \quad (\tau \geqslant 0),$$

и, поскольку $\Gamma(-\tau) = \Gamma(\tau)$,

$$\Gamma(\tau) = a^2\, \mathrm{e}^{-2R|\tau|} \tag{2.2.22}$$

для всех значений τ.

Следовательно, автокорреляция убывает экспоненциально к нулю при увеличении $|\tau|$, а $\Gamma(\tau)$ удовлетворяет критерию эргодичности (2.2.14). Из построения случайного процесса очевидно также, что любая длинная реализация будет статистически подобна любой другой длинной реализации, так что процесс является эргодическим. Наконец, заметим, что несмотря на повторяющиеся разрывы процесса $x(t)$, его автокорреляционная функция $\Gamma(\tau)$ является непрерывной функцией от τ. Как мы покажем в следующем разделе, эта непрерывность представляет собой общее свойство всех автокорреляционных функций.

2.3. Свойства автокорреляционной функции

Учитывая важность автокорреляционной функции $\Gamma(\tau)$ для любого действительного или комплексного стационарного случайного процесса $z(t)$, рассмотрим некоторые ее свойства.

(а)
$$\Gamma(0) \geqslant 0. \tag{2.3.1}$$

Это непосредственно следует из определения $\Gamma(0) = \langle |z(t)|^2 \rangle$. Стоит заметить, что $\Gamma(0)$ может обратиться в нуль только в тривиальном случае, когда случайный процесс $z(t)$ тождественно равен нулю при всех t.

(б)
$$\Gamma(-\tau) = \Gamma^*(\tau). \tag{2.3.2}$$

Это свойство эрмитовости следует из того факта, что $z(t)$ является стационарным, что позволяет нам осуществить произвольное смещение начала отсчета времени. Следовательно,

$$\Gamma(\tau) = \langle z^*(t)\, z(t+\tau) \rangle = \langle z^*(t-\tau)\, z(t) \rangle = \Gamma^*(-\tau).$$

(в)
$$|\Gamma(\tau)| \leqslant \Gamma(0). \tag{2.3.3}$$

Это свойство следует из неравенства Шварца:

$$|\Gamma(\tau)|^2 = |\langle z^*(t) z(t+\tau) \rangle|^2 \leqslant \langle z^*(t)\, z(t) \rangle \langle z^*(t+\tau)\, z(t+\tau) \rangle = \Gamma^2(0),$$

которое означает, что $|\Gamma(\tau)|$ не может превышать его начального значения $\Gamma(0)$, несмотря на то, что она может спадать ниже, чем $\Gamma(0)$, и затем снова возвращаться к $\Gamma(0)$.

(г) $\Gamma(\tau)$ — неотрицательно определенная функция.

Чтобы доказать это свойство, используем тот факт, что для любого положительного целого числа N, любых N временны́х аргументов $t_1, t_2, \ldots, t_N$ и любых N действительных или комплексных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_N$, мы должны иметь

$$\left\langle \left| \sum_{i=1}^{N} a_i z(t_i) \right|^2 \right\rangle \geqslant 0.$$

Это означает, так как $\langle z^*(t_i)\, z(t_j) \rangle = \Gamma(t_i - t_j)$, что

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_i^* a_j \Gamma(t_i - t_j). \tag{2.3.4а}$$

Из этого неравенства видно, что автокорреляционная функция $\Gamma(\tau)$ является неотрицательно определенной. С другой стороны, можно получить интегральную форму свойства неотрицательной определенности на основе очевидного неравенства

$$\left\langle \left| \int_{T_1}^{T_2} f(t)\, z(t) dt \right|^2 \right\rangle \geqslant 0,$$

где $f(t)$ — произвольная функция, а T_1 и T_2 произвольные моменты времени. Затем мы получим тем же способом другую форму для условия неотрицательности,

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_{T_1}^{T_2} f^*(t) f(t') \Gamma(t' - t)\, dt\, dt' \geqslant 0. \tag{2.3.4б}$$

(д) Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_N$ означают N моментов времени и пусть $\Gamma(t_j - t_i) \equiv \Gamma_{ij}$. Тогда

$$\det \Gamma_{ij} \geqslant 0, \tag{2.3.5}$$

где $\det \Gamma_{ij}$ означает детерминант матрицы Γ_{ij} размером $N \times N$. Это неравенство следует из условия неотрицательности (2.3.4а), которое можно записать в матричном виде

$$\mathbf{a}^\dagger \mathbf{\Gamma a} \geqslant 0. \tag{2.3.6}$$

Здесь $\mathbf{a}$ — произвольный вектор-столбец размерности $N \times 1$, а $\mathbf{a}^\dagger$ — сопряженный вектор-строка размерности $1 \times N$. Теперь согласно уравнению (2.3.2) матрица Γ эрмитова и, следовательно, может быть диагонализирована при помощи $N \times N$ унитарного преобразования $\mathbf{U}$ (удовлетворяющего условию $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1} = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}$), т.е.

$$\mathbf{U}\Gamma\mathbf{U}^\dagger \equiv \widetilde{\Gamma}, \tag{2.3.7}$$

где $\widetilde{\Gamma}$ — диагональная матрица. Следовательно, можно переписать неравенство (2.3.6) в виде

$$\mathbf{a}^\dagger\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\Gamma\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\mathbf{a} \geqslant 0$$

или

$$\mathbf{b}^\dagger\widetilde{\Gamma}\mathbf{b} \geqslant 0, \tag{2.3.8}$$

где $\mathbf{b} \equiv \mathbf{U}\mathbf{a}$ — другой вектор-столбец с произвольными элементами. Если положить $b_i = \delta_{ni}$, где δ_{ni} — символ Кронеккера, то уравнение (2.3.8) сводится к

$$\widetilde{\Gamma}_{nn} \geqslant 0, \tag{2.3.9}$$

причем $\widetilde{\Gamma}_{nn}$ есть n-е собственное значение (диагональный элемент) $\widetilde{\Gamma}$. Следовательно, все собственные значения неотрицательны, как и детерминант $\det\widetilde{\Gamma}$, который идентичен детерминанту $\det\Gamma$ исходной матрицы, что очевидно приводит к неравенству (2.3.5).

Когда матрица Γ_{ij} порядка $N = 1$, уравнение (2.3.5) становится тождественным уравнению (2.3.1). Когда Γ_{ij} порядка $N = 2$, уравнение (2.3.5) воспроизводит неравенство (2.3.3). При $N = 2$ и выше можно получить ряд новых неравенств на основе уравнения (2.3.5), которые здесь мы не будем рассматривать.

(е) Если стационарный случайный процесс $z(t)$ является дифференцируемым, то «скорость» $\xi(t) \equiv \dot{z}(t)$ (точка означает дифференцирование по времени) процесса представляет собой стационарный в широком смысле случайный процесс с нулевым средним, и его автокорреляционная функция равна

$$\Gamma_\xi(\tau) = -\ddot{\Gamma}_z(\tau). \tag{2.3.10}$$

Для доказательства этого результата, воспользуемся определением производной, после чего легко найдем, что

$$\langle\xi(t)\rangle = \langle\dot{z}(t)\rangle = \lim_{h\to 0}\frac{\langle z(t+h) - z(t)\rangle}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\langle z\rangle - \langle z\rangle}{h} = 0. \tag{2.3.11}$$

Также

$$\begin{aligned}\Gamma_\xi(\tau) = \langle\dot{z}^*(t)\dot{z}(t+\tau)\rangle = \\ = \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}\left\langle\left[\frac{z^*(t+h_1) - z^*(t)}{h_1}\right]\left[\frac{z(t+\tau+h_2) - z(t+\tau)}{h_2}\right]\right\rangle = \\ = \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}\left[\frac{\Gamma_z(\tau - h_1 + h_2) - \Gamma_z(\tau - h_1)}{h_2} - \frac{\Gamma_z(\tau + h_2) - \Gamma_z(\tau)}{h_2}\right]\frac{1}{h_1} = \\ = \lim_{h_1\to 0}\frac{\dot{\Gamma}_z(\tau - h_1) - \dot{\Gamma}_z(\tau)}{h_1} = -\ddot{\Gamma}_z(\tau).\end{aligned}$$

$\xi(t)$ является, следовательно, стационарным, по крайней мере, в широком смысле.

(ж) Если стационарный случайный процесс дифференцируем, то $z(t)$ и его «скорость» $\xi(t) \equiv \dot{z}(t)$ имеют функцию взаимной корреляции $\dot{\Gamma}_z(\tau)$. Вновь мы исходим из первых принципов:

$$\langle z^*(t)\xi(t+\tau)\rangle = \lim_{h\to 0}\left\langle\frac{z^*(t)[z(t+\tau+h) - z(t+\tau)]}{h}\right\rangle = \lim_{h\to 0}\frac{\Gamma_z(t+h) - \Gamma_z(\tau)}{h} = \dot{\Gamma}_z(\tau). \tag{2.3.12}$$

В качестве следствия, вытекающего из этого уравнения, мы заключаем, что действительный стационарный дифференцируемый случайный процесс $x(t)$ является некоррелированным вместе с его производной за тот же интервал времени. Используя свойство симметрии для действительного случайного процесса $x(t)$, а именно

$$\Gamma(-\tau) = \Gamma(\tau),$$

находим, что $\dot{\Gamma}(-\tau) = \dot{\Gamma}(\tau)$, $\dot{\Gamma}(0) = -\dot{\Gamma}(0)$, и, следовательно,

$$\dot{\Gamma}(0) = 0. \tag{2.3.13}$$

Таким образом, из уравнения (2.3.12) имеем

$$\langle x(t)\dot{x}(t)\rangle = \dot{\Gamma}(0) = 0. \tag{2.3.14}$$

В заключение дискуссии об автокорреляционной функции заметим, что ее нормированный вариант

$$\gamma(\tau) = \Gamma(\tau)/\Gamma(0) \tag{2.3.15}$$

является по своей математической форме эквивалентным характеристической функции. Это так, потому что $\gamma(0) = 1$, и $\gamma(\tau)$, также, как и $\Gamma(\tau)$, является неотрицательно определенной (см. свойство (д) выше) и, следовательно, удовлетворяет требованиям теоремы Бошнера (см. разд. 1.4.2). Следовательно, фурье-образ от $\gamma(\tau)$ обладает всеми свойствами плотности вероятности. Как мы вскоре увидим, фурье-образ ненормированной функции $\Gamma(\tau)$ имеет важное физическое значение.

То, что нормированная автокорреляционная функция $\gamma(\tau)$ имеет математическую структуру характеристической функции, является, возможно, одним из наиболее важных свойств $\Gamma(\tau)$. Это подтверждает правильность результатов, установленных в теории вероятности (см., например, Lukacs, 1970). Свойства (а) — (е), которые мы только что обсудили, являются следствиями этого факта. Другое важное свойство автокорреляционной функции, которое может быть выведено из этой эквивалентности, немедленно следует из уравнения (1.4.11), а именно:

(з) $\Gamma(\tau)$ непрерывно.

Это так даже тогда, когда случайный процесс $z(t)$ имеет скачкообразные разрывы, например, процесс, который изображен на рис. 2.5.

2.4. Спектральные свойства стационарного случайного процесса

2.4.1. Спектральная плотность и теорема Винера — Хинчина

Одним из наиболее важных свойств стационарного случайного процесса $z(t)$ является его спектр. Можно было бы ввести спектр эвристически следующим образом. Представим формально $z(t)$ в виде интеграла Фурье:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\, d\omega, \tag{2.4.1а}$$

и предположим, что интеграл существует и может быть обращен, т.е.

$$\tilde{z}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z(t)\mathrm{e}^{i\omega t}\, dt. \tag{2.4.1б}$$

Далее можно было бы попытаться определить спектр $S(\omega)$ случайного процесса $z(t)$ как среднее значение величины $|\tilde{z}(\omega)|^2$, т.е.

$$S(\omega) = \langle|\tilde{z}(\omega)|^2\rangle, \tag{2.4.2}$$

так что $S(\omega)$ была бы мерой интенсивности флуктуаций, связанной с конкретной фурье-компонентой $z(t)$. Однако простые соображения показывают, что определение (2.4.2) математически необоснованно. В самом деле, если $z(t)$ — стационарный случайный процесс, то он не стремится к нулю при $t \to +\infty$ и $-\infty$, потому

что лежащие в основе плотности вероятности флуктуации $z(t)$ инвариантны относительно переноса начала отсчета [см. (2.2.1)]. Таким образом, в статистическом смысле $z(t)$ не может вести себя произвольно для больших значений $|t|$, в отличие от других значений t. Следовательно, $z(t)$ не является ни квадратично интегрируемой, ни абсолютно интегрируемой, и поэтому, в рамках теории обычных фукнций, интеграл Фурье (2.4.1а) не существует.

Только что отмеченная трудность была преодолена Винером (Wiener, 1930) в классической работе, которая была положена в основу нового направления в математике — *обобщенного гармонического анализа*. Винер рассмотрел широкий класс функций $z(t)$ [измеримых в смысле Лебега — см. (Titchmarsh, 1939, гл. 10; Kestelman, 1960, гл. 3)], для которых интеграл

$$\Gamma(\tau) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} z^*(t) z(t+\tau)\, dt \tag{2.4.3}$$

существует. Очевидно, такие функции не обязательно стремятся к нулю при $T \to \pm\infty$. Винер показал, что величина

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\tau}\, d\tau, \tag{2.4.4}$$

которую он назвал спектром для $z(t)$, также существует. По причинам, которые скоро станут ясными, имеет смысл рассматривать $\sigma(\omega)$ как интегральный спектр. Если $\sigma(\omega)$ является дифференцируемой функцией от ω, и порядок дифференцирования и интегрирования можно менять, то

$$S(\omega) \equiv \frac{d\sigma(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau)\, e^{i\omega t}\, d\tau. \tag{2.4.5}$$

Функция $S(\omega)$ может быть отождествлена со спектром или, что более точно, со *спектральной плотностью*, также называемой *спектром мощности*, от $z(t)$. Несмотря на то, что на первый взгляд уравнение (2.4.5) не имеет сходства с формулой (2.4.2), на основе которой было введено эвристически понятие спектра, мы скоро увидим, что отождествление интеграла в правой части (2.4.5) со спектральной плотностью случайного процесса $z(t)$ вполне уместно. Анализ Винера применим, вообще говоря, к одиночной функции $z(t)$, а не к ансамблю функций, и в своем анализе он не использовал статистических понятий. Однако, когда имеют дело со стационарным и эргодическим ансамблем случайных функций, можно заменить автокорреляционную функцию, определенную как среднее по времени (2.4.3), на автокорреляционную функцию

$$\Gamma(\tau) = \langle z^*(t) z(t+\tau) \rangle\,, \tag{2.4.6}$$

определенную как среднее по ансамблю, так как эти средние равны. Спустя четыре года после выхода в свет классической работы Винера, Хинчин (Khintchine, 1934) показал с помощью теоремы Бошнера (разд. 1.4.2), что функция $\Gamma(\tau)$, которая является автокорреляционной фукнцией непрерывного случайного процесса, должна быть выражена в форме интеграла Фурье — Стилтьесса (Yaglom, 1962, гл. 2, разд. 9)

$$\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\, d\sigma(\omega), \tag{2.4.7}$$

где $\sigma(\omega)$ — действительная, неубывающая, ограниченная функция. При том, что подход Хинчина в целом отличался от подхода Винера, при отождествлении усредненной по времени функции Винера $\Gamma(\tau)$ с автокорреляционнной функцией эргодического процесса можно отождествить интегральный спектр Винера с функцией распределения $\sigma(\omega)$ в представлении Хинчина (2.4.7).

Стоит отметить, что и Винер и Хинчин использовали понятие интегрального спектра, а не спектральной плотности, вероятно потому, что спектральная плотность может стать сингулярной, хотя и не более сингулярной, чем дельта-функция Дирака[1]. Далее в этой книге мы без колебаний используем дельта-функцию Дирака и, следовательно, будем работать со спектральной плотностью. Ее применение можно

[1]Этот факт является очевидным на основе формальной аналогии, отмеченной в конце разд. 2.3, между характеристической функцией и автокорреляционной функцией, которая, в свою очередь, подразумевает аналогию между фурье-преобразованиями этих величин, т.е. между плотностью вероятности и нормированной спектральной плотностью. В частности, как отмечалось в разд. 1.3, плотность вероятности не может быть более сингулярной, чем дельта-функция Дирака и, следовательно, то же самое остается справедливым и для спектральной плотности.

строго обосновать в рамках теории распределений или теории обобщенных функций (Bremerman, 1965; Nussenzveig, 1972, прил. A; Lones, 1982, и ссылки в этих источниках). В действительности, когда имеют дело со статистически стационарным источником и стационарным полем, а не со стационарной случайной функцией, как было показано Вольфом (Wolf, 1981, 1982), в общем случае можно избежать использования сингулярных и обобщенных функций. Мы обсудим эту тему в разд. 4.7.

Теперь посмотрим, почему интеграл в уравнении (2.4.5) можно отождествить со спектральной плотностью. Для этого снова используем соотношения фурье-преобразования (2.4.1а) и (2.4.1б), рассматривая их как символические формулы, которым, как только что было отмечено, в рамках обычной теории функций можно дать точный математичсекий смысл.

Для каждой реализации ${}^{(k)}z(t)$ стационарного случайного процесса, преобразование (2.4.1б) будет приводить к реализации $\tilde{z}(\omega)$ и, следовательно, $\tilde{z}(\omega)$ также представляет собой случайный процесс, в котором параметром является частота, а не время. Рассмотрим математическое ожидание, или среднее по ансамблю произведения $\tilde{z}^*(\omega)\tilde{z}(\omega')$. Из уравнения (2.4.1б) имеем, если поменять местами операции усреднения и интегрирования,

$$\langle \tilde{z}^*(\omega)\tilde{z}(\omega')\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\langle z^*(t)z(t')\rangle e^{i(\omega' t' - \omega t)}\,dt\,dt'. \tag{2.4.8}$$

Поскольку предполагается, что процесс $z(t)$ является стационарным, то

$$\langle z^*(t)z(t')\rangle = \Gamma(t'-t), \tag{2.4.9}$$

где Γ — автокорреляционная функция для $z(t)$. Подставляя (2.4.9) в интеграл (2.4.8) и полагая $t'-t=\tau$, находим

$$\langle \tilde{z}^*(\omega)\tilde{z}(\omega')\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(\omega'-\omega)t}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\Gamma(\tau)\, e^{i(\omega'\tau)},$$

откуда следует, что

$$\langle \tilde{z}^*(\omega)\tilde{z}(\omega')\rangle = \tilde{\Gamma}(\omega)\delta(\omega-\omega'), \tag{2.4.10}$$

где

$$\tilde{\Gamma}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\omega)\, e^{i\omega\tau}\,d\tau. \tag{2.4.11}$$

Формулы (2.4.10) и (2.4.11) представляют собой два очень важных соотношения. Первое соотношение показывает, что (обобщенные) фурье-компоненты стационарного случайного процесса, принадлежащие разным частотам, являются некоррелированными и что $\tilde{\Gamma}(\omega)$ является мерой корреляции флуктуаций фурье-компоненты на частоте ω, т.е. $\tilde{\Gamma}(\omega)$ можно рассматривать как спектральную плотность $S(\omega)$ для $z(t)$:

$$S(\omega) \equiv \tilde{\Gamma}(\omega). \tag{2.4.12}$$

Сингулярность при $\omega' = \omega$ в уравнении (2.4.10) можно удалить, если проинтегрировать обе части по ω' в окрестности ω. Далее, если использовать уравнение (2.4.12), то получим следующее выражение для спектральной плотности

$$S(\omega) = \lim_{\Delta\omega\to 0}\int_{\omega-\Delta\omega/2}^{\omega+\Delta\omega/2}\langle \tilde{z}^*(\omega)\tilde{z}(\omega')\rangle\,d\omega'. \tag{2.4.13}$$

Следует отметить сходство между этим выражением для спектральной плотности и определением (2.4.2). Для того, чтобы понять смысл формул (2.4.10) и (2.4.11), мы заново запишем их через $S(\omega)$, а не $\tilde{\Gamma}(\omega)$, используя (2.4.12):

$$\langle \tilde{z}^*(\omega)\tilde{z}(\omega')\rangle = S(\omega)\delta(\omega-\omega'), \tag{2.4.14}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\tau)\, e^{i\omega t}\,d\tau. \tag{2.4.15}$$

Можно рассматривать формулу (2.4.15) как *определение* спектральной плотности или спектра мощности[1] $S(\omega)$ стационарного случайного процесса $z(t)$. Видно, что выражение (2.4.15) для спектральной плотности находится в соответствии с (не строго интерпретируемой) формулой (2.4.5), основанной на теории Винера, при условии, что функция $z(t)$ в определении Винера (2.4.3) для $\Gamma(\tau)$ рассматривается как реализация стационарного эргодического случайного процесса.

Формула (2.4.15) вместе с обратным для нее преобразованием

$$\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} d\omega \qquad (2.4.16)$$

в общем случае известна как *теорема Винера — Хинчина*. Теорема утверждает, что *автокорреляционная функция стационарного случайного процесса и спектральная плотность (или спектр мощности) процесса связаны прямым и обратным преобразованием Фурье*[2].

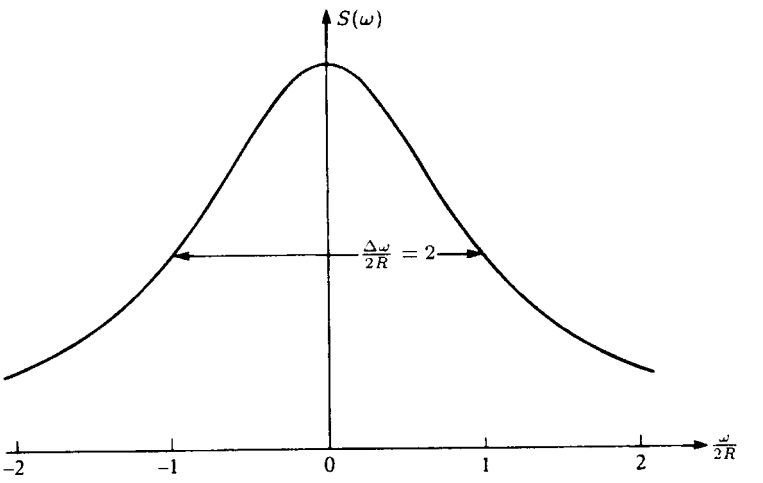


Рис. 2.6. Спектральная плотность лоренцевской формы (2.4.17)

В качестве примера мы заметим, что для случайного телеграфного сигнала (см. разд. 2.2) с автокорреляционной функцией $\Gamma(\tau)$ (2.2.22) $S(\omega)$ есть спектральная плотность типа Лоренца

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{2Ra^2}{2R^2 + \omega^2}. \qquad (2.4.17)$$

Эта функция (рис. 2.6) центрирована на нулевой частоте и имеет ширину на полувысоте

$$\Delta\omega = 4R, \qquad (2.4.18)$$

которая, как видно, приблизительно равна величине, обратной полуширине функции $\Gamma(\tau)$.

Когда случайный процесс $z(t)$ описывает оптическое поле, функция $S(\omega)$ имеет в общем случае выраженный максимум на оптических частотах порядка $\omega = 10^{15}\ \mathrm{c}^{-1}$ и исчезающе мала вне области оптических частот.

2.4.2. Сингулярности спектральной плотности

Спектральная плотность $S(\omega)$ (2.4.14) может содержать сингулярности дельта-функции, если среднее не равно нулю или если $z(t)$ содержит осциллирующие компоненты. Чтобы проиллюстрировать то, как

[1] Другое, иногда используемое определение спектральной плотности, которое не содержит сингулярных функций, обобщенных функций или интегралов Стилтьесса, основано на следующей процедуре усечения. Определим функцию $z_T(t)$ в виде

$$z_T(t) = \begin{cases} z(t), & \text{когда } |t| < T, \\ 0, & \text{когда } |t| > T, \end{cases}$$

и ее преобразование Фурье в виде

$$\tilde{z}(\omega; T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z_T(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\, d\omega.$$

Тогда спектральная плотность принимает вид

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\langle \tilde{z}^*(\omega; T) \tilde{z}(\omega; T) \rangle}{2T}$$

(Goldman, 1953, разд. 8.4; Middleton, 1960, разд. 3.2).

[2] В течение долгого времени после выхода в свет работ Винера и Хинчина не было известно, что существенные аспекты этой теоремы были открыты намного раньше Эйнштейном (Einstein, 1914). Для английского перевода этой работы см. Эйнштейн (Einstein, 1987). Яглом дал интересный комментарий о работе Эйнштейна (Einstein, 1987).

возникают сингулярности, начнем с рассмотрения стационарного эргодического случайного процесса $z_0(t)$ с нулевым средним, который удовлетворяет условию эргодичности (2.2.14). Это условие гарантирует, что автокорреляционная функция $\Gamma_0(\tau)$ для $z_0(t)$ является абсолютно интегрируемой. Следовательно, существует ее фурье-образ $S_0(\omega)$, который является непрерывной функцией от ω. Последнее можно показать следующим образом. Из (2.4.15) имеем

$$|S_0(\omega+\delta\omega)-S_0(\omega))| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_0(\tau)[e^{i(\omega+\delta\omega)\tau}-e^{i\omega\tau}]\,d\tau\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\Gamma_0(\tau)|\,|\sin[\tfrac{1}{2}(\delta\omega)\tau]|\,d\tau, \tag{2.4.19}$$

и правая сторона стремится к нулю при $\delta\omega \to 0$ для всех ω. С другой стороны, если корреляции $z(t)$ постепенно ослабевают, причем так медленно, чтобы $\Gamma(\tau)$ не была абсолютно интегрируемой, то $S(\omega)$ может содержать сингулярные дельта-функции. Чтобы проиллюстрировать эту ситуацию, мы рассмотрим стационарный случайный процесс $z(t)$, который отличается от $z_0(t)$ на постоянную величину, являющуюся, естественно, средним $\langle z\rangle$. Тогда автокорреляционная функция $\Gamma(\tau)$ для $z(t)$ связана с $\Gamma_0(\tau)$ соотношением

$$\Gamma(\tau) = \Gamma_0(\tau) + |\langle z\rangle|^2. \tag{2.4.20}$$

Из абсолютной интегрируемости $\Gamma_0(\tau)$ следует, что $\Gamma(\tau)-|\langle z\rangle|^2$ также является абсолютно интегрируемой и что процесс $z(t)$ является эргодическим. Кроме того, очевидно, что $\Gamma(\tau)$ не является абсолютно интегрируемой. Если выполнить фурье-преобразование обеих частей выражения (2.4.20) и воспользоваться формулой (2.4.15), то получим для спектральной плотности $S(\omega)$ случайного процесса $z(t)$ выражение

$$S(\omega) = S_0(\omega) + |\langle z\rangle|^2\,\delta(\omega), \tag{2.4.21}$$

где $\delta(\omega)$ — дельта-функция Дирака. В силу того, что процесс $z(t)$ имеет ненулевое среднее, его спектральная плотность содержит сингулярную дельта-функцию на нулевой частоте.

В заключение предположим, что случайный процесс содержит также периодические вклады на разных частотах $\omega_1, \omega_2, \ldots$. Тогда его автокорреляционная функция $\Gamma(\tau)$ будет иметь общую форму

$$\Gamma(\tau) = \Gamma_0(\tau) + |\langle z\rangle|^2 + \sum_j A_j\,e^{-i\omega_j\tau}. \tag{2.4.22}$$

Спектральная плотность случайного процесса $z(t)$, полученная при преобразовании Фурье выражения (2.4.22), определяется в виде

$$S(\omega) = S_0(\omega) + |\langle z\rangle|^2\,\delta(\omega) + \sum_j A_j\delta(\omega-\omega_j). \tag{2.4.23}$$

Видно, что она имеет дополнительные сингулярные дельта-функции на каждой частоте $\omega_1, \omega_2, \ldots$.

2.4.3. Нормированные корреляции и нормированные спектральные плотности

Иногда бывает удобно ввести нормированную автокорреляционную функцию $\gamma(\tau)$ и нормированную спектральную плотность $\mathfrak{s}(\omega)$ для случайного процесса $z(t)$ (Davenport and Root, 1958, гл. 4 и 6). При $\langle z\rangle \neq 0$ мы определяем $\gamma(\tau)$ по формуле

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma(\tau)-|\langle z\rangle|^2}{\Gamma(0)-|\langle z\rangle|^2}. \tag{2.4.24}$$

Очевидно, что $\gamma(0)=1$. В силу неравенства (2.3.3) имеем

$$0 \leqslant |\gamma(\tau)| \leqslant 1. \tag{2.4.25}$$

Вычитая в определении $|\langle z\rangle|^2$, мы гарантируем, что $\gamma(\tau)\to 0$ при $\tau\to\infty$, когда случайный процесс $z(t)$ является эргодическим, поскольку $\Gamma(\tau)$ должна стремится к $|\langle z\rangle|^2$ при ослаблении корреляций. Как

было определено, $\gamma(\tau)$ математически эквивалентна характеристической функции, и ее фурье-образ $\mathfrak{s}(\omega)$, известный как нормированная спектральная плотность, имеет свойства настоящей плотности вероятности. Следовательно, имеем

$$\mathfrak{s}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau, \tag{2.4.26}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{s}(\omega)\, d\omega = 1. \tag{2.4.27}$$

Используя в (2.4.26) определение $\gamma(\tau)$ (2.4.24), можно непосредственно связать $\mathfrak{s}(\omega)$ с ненормированной плотностью $S(\omega)$ и найти

$$\mathfrak{s}(\omega) = \frac{S(\omega) - |\langle z\rangle|^2\,\delta(\omega)}{\Gamma(0) - |\langle z\rangle|^2}. \tag{2.4.28}$$

Заметим, что при неравном нулю среднем $\langle z\rangle$ сингулярность в $S(\omega)$ исчезает. Следовательно, $\mathfrak{s}(\omega)$ является непрерывной функцией от ω для эргодического процесса $z(t)$, независимо от того, является ли процесс с нулевым или с ненулевым средним.

Так как $\gamma(0) = 1$ и $\gamma(\tau)$ абсолютно интегрируема для эргодического случайного процесса [см. (2.2.14)], площадь под кривой $|\Gamma(\tau)|^2$ всегда конечна и является удобной мерой области существования корреляций $z(t)$ во времени. Следовательно, можно определить ***время корреляции*** T_c для случайного процесса $z(t)$

$$T_c \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)|^2\, d\tau. \tag{2.4.29}$$

По теореме Парсеваля, связывающей комплексно сопряженные фурье-образы $\gamma(\tau)$ и $\mathfrak{s}(t)$, T_c определяется формулой

$$T_c \equiv 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{s}^2(\omega)\, d\omega. \tag{2.4.30}$$

Величина, обратная T_c, является удобной мерой ширины $\mathfrak{s}(\omega)$.

Можно ввести другие меры времени когерентности и ширины когерентности (например, основанные на временны́х моментах относительно функции корреляции, или на частотных моментах относительно спектральной плотности). Некоторые из них рассматриваются в разд. 4.3.3 в связи со свойствами корреляции оптического поля.

2.4.4. Взаимные корреляции и взаимные спектральные плотности

Функция взаимной корреляции двух действительных случайных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ определяется, по аналогии с определением автокорреляционной функции, как среднее произведения $\langle x_1(t_1)x_2(t_2)\rangle$ в два различных момента времени t_1 и t_2. Если два процесса $z_1(t)$ и $z_2(t)$ являются комплексными, то мы определяем взаимную функцию корреляции по формуле

$$\Gamma_{12}(t, t+\tau) = \langle z_1^*(t) z_2(t+\tau)\rangle. \tag{2.4.31}$$

Если $z_1(t)$ и $z_2(t)$ совместно стационарны, то $\Gamma_{12}(t, t+\tau)$, так же, как и $\Gamma(t, t+\tau)$, является функцией только τ, и можно обозначить эту функцию через $\Gamma_{12}(\tau)$. Она удовлетворяет условию

$$\Gamma_{21}(\tau) = \Gamma_{12}^*(-\tau), \tag{2.4.32}$$

которое можно легко получить из определения Γ_{12} при помощи переноса начала отсчета. Однако для взаимной корреляционной функции $\Gamma_{12}(\tau)$ не характерны многие интересные свойства автокорреляционной функции $\Gamma(\tau)$. Например, в общем случае $\Gamma_{12}(\tau)$ не имеет свойства характеристической функции.

Пусть $z_1(t)$, $z_2(t)$, ..., $z_N(t)$ — множество N различных совместно стационарных случайных процессов. Тогда

$$\Gamma_{ij}(\tau) \equiv \langle z_i^*(t) z_j(t+\tau)\rangle, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, N) \tag{2.4.33}$$

представляет собой $N \times N$-матрицу, известную как ***взаимная корреляционная матрица***. Если все средние $\langle z_i(t)\rangle$ для $i = 1, 2, \ldots, N$ равны нулю, то $\Gamma_{ij}(\tau)$ часто называют ***ковариационной матрицей*** множества случайных процессов. Нетрудно показать, что $\Gamma_{ij}(\tau)$ удовлетворяет условию неотрицательной определенности, которое похоже на условие (2.3.4) для автокорреляционной функции. Для получения этого условия заметим, что для произвольного множества n моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(n \leqslant N)$ и для произвольного множества n комплексных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i z_i(t_i)\right|^2 \geqslant 0.$$

Вычисляя математическое ожидание обеих частей неравенства и используя уравнение (2.4.13), получим

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i^* a_j \Gamma_{ij}(t_j - t_i) \geqslant 0. \tag{2.4.34}$$

По аналогии с определением (2.4.14) для спектральной плотности $S(\omega)$, можно определить так называемую ***взаимную спектральную плотность*** (или взаимный спектр мощности) $W_{ij}(\omega)$ совместно стационарных случайных процессов $z_i(t)$ и $z_j(t)$ по формуле

$$\langle \tilde{z}_i^*(\omega)\tilde{z}_j(\omega')\rangle = W_{ij}(\omega)\delta(\omega - \omega'). \tag{2.4.35}$$

В этой формуле $\tilde{z}_i(\omega)$ — (обобщенный) образ Фурье от $z_i(t)$ [см. (2.4.1б)]. Формула (2.4.35) показывает, что (обобщенные) фурье-компоненты, принадлежащие различным частотам, некоррелированы. Взаимная спектральная плотность $W_{ij}(\omega)$, очевидно, представляет собой меру корреляций между флуктуациями разных компонент на одной и той же частоте. При $j = i$ взаимная спектральная плотность сводится к спектральной плотности, т.е.

$$W_{ij}(\omega) = S_i(\omega), \tag{2.4.36}$$

где $S_i(\omega)$ — спектральная плотность случайного процесса $z_i(t)$.

Используя тот же способ, который был использован при выводе уравнения (2.4.15), можно легко показать, что

$$W_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{ij}(\tau)\, \mathrm{e}^{i\omega\tau}\, d\tau, \tag{2.4.37}$$

т.е. функция взаимной спектральной плотности от $z_i(t)$ и $z_j(t)$ есть фурье-образ от функции их взаимной корреляции. Выражение (2.4.37) вместе с обратным для него преобразованием Фурье

$$\Gamma_{ij}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{ij}(\omega)\, \mathrm{e}^{-i\omega\tau}\, d\tau, \tag{2.4.38}$$

очевидно, можно рассматривать как *обобщенную теорему Винера — Хинчина*.

Отметим некоторые свойства взаимной спектральной плотности. $W_{ij}(\omega)$, также, как и $\Gamma_{ij}(\tau)$, представляет собой элемент $N \times N$-матрицы. Однако в отличие от $\Gamma_{ij}(\tau)$, $W_{ij}(\omega)$ эрмитова, так как из уравненний (2.4.32) и (2.4.37) следует, что

$$W_{ji}(\omega) = W_{ij}^*(\omega). \tag{2.4.39}$$

Несмотря на то, что, в отличие от спектральной плотности, взаимная спектральная плотность в общем случае не является действительной и положительной, можно показать, что имеет место следующее условие неотрицательной определенности для взаимной спектральной плотности,похожее на условие (2.4.34), а именно:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i^* a_j W_{ij}(\omega) \geqslant 0. \tag{2.4.40}$$

Здесь n — положительное целое, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \leqslant N)$ — произвольные комплексные числа. Для доказательства этого неравенства (2.4.40) начнем с очевидного неравенства

$$\left\langle \left| \int_{\omega_0-\varepsilon_1}^{\omega_0+\varepsilon_2} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{z}_i(\omega)\right] d\omega \right|^2 \right\rangle \geqslant 0, \tag{2.4.41}$$

где ω_0 — любая заданная частота и $\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0$ — произвольные числа. Из этого неравенства следует, что

$$\left\langle \left| \int_{\omega_0-\varepsilon_1}^{\omega_0+\varepsilon_2} d\omega \int_{\omega_0-\varepsilon_1}^{\omega_0+\varepsilon_2} d\omega' \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i^* a_j \tilde{z}_i^*(\omega) \tilde{z}_j(\omega') \right] \right| \right\rangle \geqslant 0.$$

Если поменять местами порядок усреднения, интегрирования и суммирования, то это неравенство можно переписать в виде

$$\int_{\omega_0-\varepsilon_1}^{\omega_0+\varepsilon_2} d\omega \int_{\omega_0-\varepsilon_1}^{\omega_0+\varepsilon_2} d\omega' \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i^* a_j \langle \tilde{z}_i^*(\omega) \tilde{z}_j(\omega') \rangle \right] \geqslant 0. \tag{2.4.42}$$

Далее подставим в это неравенство математическое ожидание (2.4.35) и выполним обычное интегрирование по переменной ω'. Тогда получим более простое неравенство

$$\int_{\omega_0-\varepsilon_1}^{\omega_0+\varepsilon_2} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i^* a_j W_{ij}(\omega) \right] d\omega \geqslant 0. \tag{2.4.43}$$

Поскольку ε_1 и ε_2 — произвольные неотрицательные величины при условии, что $W_{ij}(\omega)$ — непрерывные функции от ω, условие неотрицательной определенности (2.4.40) непосредственно следует из этой формулы.

В специальном случае, когда $n = 1$, неравенство (2.4.40) вместе с уравнением (2.4.36) означают, что

$$W_{11}(\omega) \equiv S_1(\omega) \geqslant 0, \tag{2.4.44}$$

т.е., как мы выяснили ранее, спектральная плотность является действительной и неотрицательной. Если взять $n = 2$, то неравенство (2.4.40) и уравнение (2.4.44) означают, что детерминант

$$\begin{vmatrix} S_1(\omega) & W_{12}(\omega) \\ W_{21}(\omega) & S_2(\omega) \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

или, если также учесть эрмитовость $\mathbf{W}$, определяемую уравнением (2.4.39), то

$$|W_{12}(\omega)| \leqslant [S_1(\omega) S_2(\omega)]^{1/2}. \tag{2.4.45}$$

Можно определить нормированную функцию взаимной корреляции $\Gamma_{ij}(\tau)$ по формуле

$$\gamma_{ij}(\tau) \equiv \frac{\Gamma_{ij}(\tau) - \langle z_i^* \rangle \langle z_j \rangle}{\left[\Gamma_{ii}(0) - |\langle z_i \rangle|^2 \right]^{1/2} \left[\Gamma_{jj}(0) - |\langle z_j \rangle|^2 \right]^{1/2}} = \frac{\langle \Delta z_i^*(t) \Delta z_j(t+\tau) \rangle}{\left[\langle |\Delta z_i(t)|^2 \rangle \langle |\Delta z_j(t)|^2 \rangle \right]^{1/2}}, \tag{2.4.46}$$

которая будет иметь смысл коэффициента корреляции между величинами $\Delta z_i(t)$ и $\Delta z_j(t+\tau)$ [см. (1.3.35)]. Этот коэффициент является нормированным, так что

$$0 \leqslant |\gamma_{ij}(\tau)| \leqslant 1. \tag{2.4.47}$$

Верхний предел, равный единице, достигается тогда, когда два процесса $z_i(t)$ и $z_j(t)$ полностью коррелированы. В общем случае $\gamma_{ij}(0) \neq 1$. Обозначим фурье-образ от $\gamma_{ij}(\tau)$ как $w_{ij}(\omega)$:

$$w_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{ij}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \tag{2.4.48}$$

Эту величину иногда называют нормированной взаимной спектральной плотностью, несмотря на то, что она не нормируется естественным образом. Для задач, в которых случайный процесс имеет нулевое среднее, часто бывает полезна другая нормированная функция взаимной спектральной плотности. Она нормируется так же, как корреляционный коэффициент [см. (1.3.35)] и задается (Wolf, 1982, 1986; см. также Carter and Wolf, 1975; Wolf and Carter, 1975, 1976; Mandel and Wolf, 1976, 1981) формулой

$$\mu_{ij}(\omega) = \frac{W_{ij}(\omega)}{[W_{ii}(\omega)]^{1/2} [W_{jj}(\omega)]^{1/2}}, \tag{2.4.49a}$$

или, при помощи выражения (2.4.36),

$$\mu_{ij}(\omega) = \frac{W_{ij}(\omega)}{[S_i(\omega)]^{1/2}[S_j(\omega)]^{1/2}}. \tag{2.4.49б}$$

$\mu_{ij}(\omega)$ измеряет степень корреляции между двумя фурье-компонентами от $z_i(t)$ и $z_j(t)$ на частоте ω. Из неравенства (2.4.45) следует, что

$$0 \leqslant |\mu_{ij}(\omega)| \leqslant 1. \tag{2.4.50}$$

Нормированные функции корреляции и спектральной плотности будут обсуждаться более детально в контексте оптики (см. разд. 4.3 ниже).

2.5. Ортогональное представление случайного процесса

При изучении статистических свойств излучения черного тела Эйнштейн и Хопф (Einstein and Hopf, 1910) предположили, что в любом конечном интервале времени поле можно представить в виде ряда Фурье, коэффициенты которого являются нормально распределенными, независимыми случайными величинами с нулевым средним. Вскоре после этого фон Лауэ (von Laue, 1915a) высказал сомнение в правильности этого предположения, в результате чего последовала дискуссия (Einstein, 1915; von Laue, 1915b), которая не привела к общей точке зрения. Можно показать, что излучение черного тела является стационарным гауссовским процессом (см. разд. 2.1.2), и представление Эйнштейна — Хопфа в дальнейшем использовалось для представления таких процессов, несмотря на существующие разногласия.

Вопрос о разложении случайного процесса в ряд Фурье позже изучался Дависом (Davis, 1953), Рутом и Пичером (Root and Pitcher, 1955). Из этих работ следует, что для того, чтобы представление Эйнштейна — Хопфа было справедливым, процесс должен быть не только гауссовским, но и периодическим с периодом T, т.е. если процесс для всех t удовлетворяет условию $x(t+T) = x(t)$ с вероятностью 1. Очевидно, излучение черного тела не удовлетворяет требованию периодичности, так что согласно фон Лауэ разложение Эйнштейна — Хопфа не может быть строго справедливым. Однако из анализа Рута и Пичера следует, что если в произвольном интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ стационарный гауссовский случайный процесс $x(t)$ представить рядом Фурье со случайными коэффициентами, то корреляция между коэффициентами стремится к нулю при $T \to \infty$. В этом пределе разложение Фурье, конечно, не существует, но результат подразумевает, что если T достаточно велико, предположение о независимости коэффициентов, хотя и не совсем точно, но все же в общем случае представляет собой приемлемое приближение.

В 1947 году Кац и Сигерт ввели новый вид разложения для стационарного гауссовского случайного процесса, в котором коэффициенты разложения строго независимы. Примерно в то же самое время Карунен (Karhunen, 1946) показал, что независимо от того, является ли стационарный процесс стационарным или гауссовским, «ортогональное разложение» в общем случае возможно. Разложения типа Карунена — Луева нашли широкое применение при обработке случайных процессов. Поэтому мы вкратце рассмотрим эти разложения.

2.5.1. Разложение Карунена — Луева

Рассмотрим комплексный случайный процесс $z(t)$, $-T \leqslant t \leqslant T$, который не обязательно является стационарным. Для простоты предполагаем, что

$$\langle z(t) \rangle = 0. \tag{2.5.1}$$

Рассмотрим возможность разложения каждой реализации процесса в виде

$$z(t) = \sum_n c_n \psi_n(t), \tag{2.5.2}$$

где функции $\psi_n(t)$ образуют ортонормальное множество на интервале $-T \leqslant t \leqslant T$, т.е.

$$\int_{-T}^{T} \psi_n^*(t)\psi_m(t)\,dt = \delta_{nm}, \tag{2.5.3}$$

δ_{nm} — символ Кронеккера. Коэффициенты c_n — некоррелированные случайные переменные, т.е.

$$\langle c_n^* c_m \rangle = \lambda_n \delta_{nm}, \tag{2.5.4}$$

λ_n — неотрицательные константы.

Временно предположим, что такое разложение существует и посмотрим, можно ли определить функции $\psi_n(t)$ и константы λ_n. Для этой цели образуем автокорреляционную функцию случайного процесса $\Gamma(t_1, t_2)$. Очевидно, с учетом (2.5.2) и (2.5.4), что

$$\Gamma(t_1, t_2) = \langle z^*(t_1) z(t_2) \rangle = \sum_n \sum_m \langle c_n^* c_m \rangle \psi_n^*(t_1) \psi_m(t_2) = \sum_m \lambda_m \psi_m^*(t_1) \psi_m(t_2). \tag{2.5.5}$$

Если умножить обе стороны уравнения (2.5.5) на $\psi_n(t_1)$, проинтегрировать по t_1 в области $-T \leqslant t_1 \leqslant T$ и воспользоваться условием ортогональности (2.5.3), то получим соотношение

$$\int_{-T}^{T} \Gamma(t_1, t_2) \psi_n(t_1) \mathrm{d}t_1 = \lambda_n \psi_n(t_2). \tag{2.5.6}$$

Уравнение (2.5.6) является однородным интегральным уравнением Фредгольма для ψ_n. Более точно, ψ_n являются собственными функциями интегрального оператора, ядро которого, в предположении его непрерывности, представляет собой автокорреляционную функцию $\Gamma(t_1, t_2)$ случайного процесса и λ_n — соответствующие собственные значения. Ядро $\Gamma(t_1, t_2)$ подчиняется условию эрмитовости $\Gamma(t_2, t_1) = \Gamma^*(t_1, t_2)$ и можно предположить, что оно представляет собой ядро Гильберта — Шмидта, т.е.

$$\int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} |\Gamma(t_1, t_2)|^2 \, dt_1 \, dt_2 < \infty. \tag{2.5.7}$$

При этих условиях можно прийти к следующим выводам относительно собственных функций и собственных значений нашего интегрального уравнения (Riesz and Nagy, 1955, разд. 97; Pogorzelski, 1966, гл. 5; Smithies, 1970, гл. 7):

(а) Интегральное уравнение (2.5.6) имеет по крайней мере одно ненулевое собственное значение.

(б) Каждое собственное значение имеет максимальное конечное вырождение.

(в) Существует (конечная или бесконечная) ортогональная последовательность собственных решений уравнения (2.5.6) с тем свойством, что любую функцию $F(t)$, являющуюся квадратично интегрируемой на интервале $-T \leqslant t \leqslant T$, можно рассматривать в смысле сходимости в среднем[1] в виде

$$F(t) = h(t) + \sum_n f_n \psi_n(t), \tag{2.5.8}$$

где $h(t)$ — функция, такая, что

$$\int_{-T}^{T} \Gamma(t_1, t_2) h(t_1) \, dt_1 = 0, \tag{2.5.9}$$

$$f_n = \int_{-T}^{T} \psi_n^*(t) F(t) \, dt. \tag{2.5.10}$$

(г) Ядро $\Gamma(t_1, t_2)$ интегрального уравнения (2.5.6), т.е. автокорреляционную функцию процесса, можно представить в виде уравнения (2.5.5) с рядом, сходящимся в среднем к $\Gamma(t_1, t_2)$.

[1] Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{N} s_n(t)$ сходится в среднем к $S(t)$, если существует предел

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| S(t) - \sum_{n=1}^{N} s_n(t) \right|^2 dt = 0.$$

Только что полученные результаты справедливы в предположении, что $\Gamma(t_1, t_2)$ является эрмитовым ядром Гильберта — Шмидта, т.е. подчиняется условию (2.5.7) (ср. Riesz and Nagy, 1955, p. 365). Однако можно легко показать, что Γ является также неотрицательно определенной, т.е. что для любого N действительные или комплексные числа $a_1, a_2, \ldots, a_N$ удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i^* a_j \Gamma(t_i, t_j) \geqslant 0. \tag{2.5.11}$$

Это неравенство можно доказать тем же способом, который мы использовали для вывода соответствующего неравенства (2.3.4а) для автокорреляционной функции стационарного случайного процесса. С учетом этого свойства для Γ можно показать, что

(д) Разложение (2.5.5) сходится равномерно (теорема Мерсера).

(е) Собственные значения являются неотрицательными действительными числами.

Окончательно заметим, что если условие неотрицательной определенности для Γ можно заменить на более сильное условие положительной определенности, т.е. когда знак равенства в уравнении (2.5.11) или, более точно, в эквивалентной интегральной форме [см. (2.3.4б)], за исключением тривиального случая, когда $\Gamma(t) \equiv 0$, не может быть достигнут, то собственные функции образуют ***полный набор*** квадратично интегрируемых функций в пространстве Гильберта.

Следовательно, если выборочные функции рассматриваемого случайного процесса $z(t)$ являются квадратично-интегрируемыми на интервале $-T \leqslant t \leqslant T$, и автокорреляционная функция $\Gamma(t_1, t_2)$ процесса удовлетворяет условию сходимости (2.5.7) и является положительно определенной (а не неотрицательно определенной!), то разложение формы (2.5.2) существует и удовлетворяет условиям (2.5.3) и (2.5.4). Это представление известно как *разложение Карунена — Луева* случайного процесса $z(t)$.

2.5.2. Предел $T \to \infty$; другой подход к теореме Винера — Хинчина

Предположим, что случайный процесс $z(t)$ с нулевым средним является стационарным, по крайней мере, в широком смысле, так что его автокорреляционная функция задается в виде

$$\Gamma(t_1, t_2) = \Gamma(t_2 - t_1). \tag{2.5.12}$$

Для этого случая рассмотрим предельную форму разложения Карунена — Луева при $T \to \infty$ и покажем, что она приводит к теореме Винера — Хинчина.

По аналогии со многими задачами на собственные значения, можно ожидать, что в пределе $T \to \infty$ спектр интегрального оператора $\int_{-T}^{T} \Gamma(t_2 - t_1) \ldots dt_1$ будет непрерывным, а не дискретным. Например, задача на собственные значения, связанная с гармоническим осциллятором, на конечном интервале приводит к ряду Фурье, тогда как на бесконечном интервале она приводит к интегралу Фурье. Однако вместо представления в виде ряда (2.5.5), можно ожидать интегральное представление в виде

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\psi(t;\omega)d\omega, \tag{2.5.13}$$

и вместо уравнений (2.5.3) и (2.5.4) будем иметь условия ортогональности вида

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(t;\omega)\psi(t;\omega')\,dt = \delta(\omega - \omega'), \tag{2.5.14}$$

$$\langle c^*(\omega)c(\omega')\rangle = \lambda(\omega)\delta(\omega - \omega'), \tag{2.5.15}$$

где $\delta(\omega)$ — дельта-функция Дирака. Попытаемся определить функции $\psi(t;\omega)$ и $\lambda(\omega)$, которые подчиняются этим условиям.

Продолжая так же, как в случае конечного T, предположим, что представление вида (2.5.13) существует и подчиняется требованиям (2.5.14) и (2.5.15). Тогда

$$\Gamma(t_2 - t_1) = \langle z^*(t_1)z(t_2)\rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \langle c^*(\omega_1)c(\omega_2)\rangle \psi^*(t_1;\omega_1)\psi(t_2;\omega_2)\,d\omega_1\,d\omega_2,$$

и, следовательно, с учетом (2.5.15),

$$\Gamma(t_2 - t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\omega)\psi^*(t_1;\omega)\psi(t_2;\omega)\,d\omega. \tag{2.5.16}$$

Умножим обе части уравнения на $\psi(t_1;\omega')$ и проинтегрируем по t_1 в области от $-\infty$ до ∞. Тогда после перегруппировки членов в правой части, найдем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t_2 - t_1)\psi(t_1;\omega')\,dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega\lambda(\omega)\psi(t_2;\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1\psi^*(t_1;\omega)\psi(t_1;\omega'),$$

Это означает, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t_2 - t_1)\psi(t_1;\omega')\,dt_1 = \lambda(\omega')\psi(t_2;\omega'). \tag{2.5.17}$$

Последнее выражение непосредственно следует из уравнения (2.5.14). Соотношение (2.5.17) соответствует интегральному уравнению (2.5.6), полученному для случая, когда временной интервал является конечным, а процесс не обязательно является стационарным.

Если предположенное представление (2.5.13) справедливо, то функции $\psi(t;\omega)$ должны быть собственными функциями, а $\lambda(\omega)$ — собственными значениями интегрального уравнения (2.5.17). Мы должны, следовательно, рассмотреть вопрос: существует ли нетривиальные решения этого уравнения? Сделаем это при помощи метода преобразования Фурье. Представим автокорреляционную функцию $\Gamma(\tau)$ и собственные функции $\psi(t;\omega)$, если они существуют, в виде интегралов Фурье:

$$\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\eta)\,\mathrm{e}^{i\eta\tau}\,d\eta, \tag{2.5.18}$$

$$\psi(t;\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(\eta;\omega)\,\mathrm{e}^{-i\eta t}\,d\eta. \tag{2.5.19}$$

Тогда, используя теорему свертки для преобразования Фурье, из уравнения (2.5.17) получим соотношение

$$S(\eta)\tilde{\psi}(\eta;\omega) = \lambda(\omega)\tilde{\psi}(\eta;\omega). \tag{2.5.20}$$

Если обе части этого выражения сократить на общий множитель $\tilde{\psi}(\eta;\omega)$ [который не может быть равен тождественно нулю при условии, что нетривиальное собственное решение уравнения (2.5.17) существует], то мы придем к заключению, что $S(\eta) = \lambda(\omega)$, которое является неверным, если $S(\eta)$ не постоянно. Таким образом, заключаем, что уравнение (2.5.20) не допускает решений для $\tilde{\psi}(\eta;\omega)$, которые являются обычными функциями. Однако нетрудно видеть, что уравнение имеет сингулярные решения. Этот результат можно строго доказать на основе теории обобщенных функций. Таким образом, повсюду в этой книге мы избегаем использования теории обобщенных функций и вместо этого формально используем дельта-функцию Дирака. Сингулярные решения уравнения (2.5.20) можно записать в виде

$$\tilde{\psi}(\eta;\omega) = \delta(\eta - \omega), \tag{2.5.21}$$

$$\lambda(\omega) = S(\omega). \tag{2.5.22}$$

Эти решения должны пониматься в том смысле, что подставив их в уравнение (2.5.20), умножив обе части уравнения на произвольную тестовую функцию $F(\eta)$ и проинтегрировав их по η от $-\infty$ до ∞, мы получим непротиворечивый результат.

Рассмотрим теперь смысл таких сингулярных решений. Из (2.5.21) и (2.5.22) следует, что собственные функции интегрального уравнения (2.5.17) являются функциями

$$\psi(t;\omega) = \mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{2.5.23}$$

т.е. являются гармоническими функциями, независимо от природы автокорреляционной функции $\Gamma(\tau)$ случайного процесса. Тогда ортогональное представление (2.5.13) принимает вид

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,d\omega, \tag{2.5.24}$$

что представляет собой интегральное представление фурье-процесса $z(t)$. Из сказанного выше ясно, что это уравнение следует интерпретировать в смысле теории обобщенных функций. Более того, согласно (2.5.15) и (2.5.22)

$$\langle c^*(\omega)c(\omega')\rangle = S(\omega)\delta(\omega-\omega'). \tag{2.5.25}$$

Таким образом, мы фактически нашли предельную форму $T\to\infty$ разложения Карунена — Луева для случайного процесса, который является стационарным, по крайней мере, в широком смысле.

Сравнивая выражения (2.5.24) и (2.5.25) с выражениями (2.4.1а) и (2.4.14), мы видим, что собственное значение $\lambda(\omega) = S(\omega)$ интегрального уравнения (2.5.17) представляет собой спектральную плотность случайного процесса $z(t)$. Более того, из (2.5.18) следует, что $S(\omega)$ суть фурье-преобразование автокорреляционной функции $\Gamma(\tau)$. Такое заключение есть ни что иное, как формулировка теоремы Винера — Хинчина (см. разд. 2.4.1), которая была получена здесь на основе разложения Карунена — Луева стационарного случайного процесса $z(t)$ в пределе $T\to\infty$. Более того, видно, что это разложение на бесконечном интервале представляет собой обобщенное интегральное представление Фурье $z(t)$.

2.6. Временна́я эволюция и классификация случайных процессов[1]

2.6.1. Плотности условной вероятности

Как уже было показано выше, существует целая иерархия совместных плотностей вероятности $p_1(x,t)$, $p_2(x_2,t_2;x_1,t_1)$, ..., в которой высшие порядки p_n содержат, в общем случае, все больше и больше информации о случайном процессе $x(t)$ и о его временно́й эволюции (см. например, Oppenheim, Shuler and Weiss, 1977, гл. 2). Вследствие того, что на будущую временну́ю эволюцию $x(t)$ оказывает влияние его поведение в прошлом, часто удобно ввести *условные плотности вероятности* $\mathscr{P}_{n,k}$, дающие n-кратные совместные плотности вероятности, такие что x имеет значение x_{k+1} в момент времени t_{k+1}, x_{k+2} в момент времени t_{k+2}, ..., и x_{k+n} в момент времени t_{k+n}, которая зависит от значения x_k в момент времени t_k, от x_{k-1} в момент времени t_{k-1}, ..., от x_1 в момент времени t_1. По аналогии с (1.2.12) $\mathscr{P}_{n,k}$ выражается как отношение двух плотностей вероятностей

$$\mathscr{P}_{n,k}(x_{k+n},t_{k+n};\ldots;x_{k+1},t_{k+1}|x_k,t_k;\ldots;x_1,t_1) = \frac{p_{k+n}(x_{k+n},t_{k+n};x_{k+n-1},t_{k+n-1};\ldots;x_1,t_1)}{p_k(x_k,t_k;x_{k-1},t_{k-1};\ldots;x_1,t_1)}, \tag{2.6.1}$$

здесь подразумевается, что моменты времени упорядочены $t_1\leqslant t_2\leqslant t_3\leqslant\ldots$. $\mathscr{P}_{n,k}$ нормирована на единицу при интегрировании по всем x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_{k+n}.

Если умножить обе стороны выражения (2.6.1) на p_k, положить $k=1=n$ и проинтегрировать обе части по x_1, то получим

$$\int p_2(x_2,t_2;x_1,t_1)\,dx_1 = p_1(x_2,t_2) = \int \mathscr{P}_{1,1}(x_2,t_2|x_1,t_1)\,p_1(x_1,t_1)\,dx_1. \tag{2.6.2}$$

Это формула дает распределение вероятности по x в более поздний момент времени, которое получается из распределения в более ранний момент времени, если известна плотность условной вероятности $\mathscr{P}_{1,1}$.

[1] В качестве дополнительной литературы могут быть рекомендованы книги (*Гарднер, 1986; *Кляцкин, 1980) — *ред. пер.*

Однако $\mathscr{P}_{1,1}$ может зависеть от прошлой истории случайного процесса. В специальном случае, когда два момента времени t_1 и t_2 равны, $\mathscr{P}_{1,1}$ переходит в дельта-функцию

$$\mathscr{P}_{1,1}(x_2,t|x_1,t)=\delta(x_2-x_1). \tag{2.6.3}$$

В какой мере значения x в более ранние моменты времени оказывают влияние на $x(t)$ в более поздние моменты t, зависит от динамики случайного процесса. Некоторые случайные процессы эволюционируют таким образом, что их история оказывает на них слабое влияние, в других случаях прошлое оказывает сильное влияние на $x(t)$. Далее мы введем естественную классификацию, основанную на том, как прошлое влияет на динамику случайного процесса в данный момент времени.

2.6.2. Абсолютно случайные или сепарабельные процессы

Это процесс $x(t)$, в котором последующие значения x абсолютно не зависят от прошлых значений. Следовательно, если все моменты времени не равны друг другу, то условная плотность вероятности равна абсолютной плотности вероятности

$$\mathscr{P}_{n,k}(x_{k+n},t_{k+n};\ldots;x_{k+1},t_{k+1}|x_k,t_k;\ldots;x_1,t_1)=p_n(x_{k+n},t_{k+n};\ldots;x_{k+1},t_{k+1}). \tag{2.6.4}$$

Используя (2.6.1) и полагая $k=1$, получаем

$$p_{n+1}(x_{n+1},t_{n+1};\ldots;x_1,t_1)=p_n(x_{n+1},t_{n+1};\ldots;x_2,t_2)\,p_1(x_1,t_1),$$

что представляет собой рекурсивную формулу, позволяющую выразить p_{n+1} через p_n. Повторное применение приводит к результату

$$p_n(x_n,t_n;\ldots x_1,t_1)=p_1(x_n,t_n)\,p_1(x_{n-1},t_{n-1})\ldots p_1(x_1,t_1), \tag{2.6.5}$$

из которого видно, что переменные $x_1,x_2,\ldots,x_n$ в разные моменты времени статистически независимы друг от друга. Случайный процесс $x(t)$ известен как ***сепарабельный процесс***. Примером является белый гауссовский случайный процесс, для которого двухвременна́я функция корреляции $\langle x(t_1)x(t_2)\rangle$ пропорциональна $\delta(t_2-t_1)$, так как отсутствие корреляции случайных переменных в разные моменты времени означает их статистическую независимость.

2.6.3. Марковский процесс первого порядка[1]

После того, как был рассмотрен случайный процесс, который не зависит от своей истории, рассмотрим процесс, который зависит от предыстории только в данный момент времени. Условная плотность вероятности такого процесса удовлетворяет соотношению

$$\mathscr{P}_{n,k}(x_{k+n},t_{k+n};\ldots;x_{k+1},t_{k+1}|x_k,t_k;\ldots;x_1,t_1)= \\ =\mathscr{P}_{n,1}(x_{k+n},t_{k+n};\ldots;x_{k+1},t_{k+1}|x_k,t_k),\quad (t_1\leqslant t_2\leqslant t_3\leqslant\ldots). \tag{2.6.6}$$

Другими словами, временна́я эволюция случайного процесса определяется данным моментом времени. Можно сказать, что будущее $x(t)$ определяется только событиями в настоящий момент времени и не зависит от его предыстории. Такой процесс известен как ***марковский процесс***, или, более точно, как ***марковский процесс первого порядка***, чтобы отличить его от марковсокого процесса высшего порядка, описываемого ниже.

Из (2.6.1) следует, что

$$p_n(x_n,t_n;\ldots;x_1,t_1)=\mathscr{P}_{1,n-1}(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1)\,p_{n-1}(x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1),$$

и, с учетом марковского свойства (2.6.6), имеем

$$p_n(x_n,t_n;\ldots;x_1,t_1)=\mathscr{P}_{1,1}(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})\,p_{n-1}(x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1).$$

[1] см. также книги (*Дынкин, 1969) и (*Лэкс, 1974) — *ред. пер.*

Эта формула представлена в виде рекурсивного соотношения, повторное применение которого приводит к результату

$$p_n(x_n,t_n;\ldots;x_1,t_1) = \\ = \mathscr{P}_{1,1}(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})\,\mathscr{P}_{1,1}(x_{n-1},t_{n-1}|x_{n-2},t_{n-2})\ldots\mathscr{P}_{1,1}(x_2,t_2|x_1,t_1)\,p_1(x_1,t_1). \quad (2.6.7)$$

Для марковского процесса условная плотность вероятности $\mathscr{P}_{1,1}(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})$ известна как *плотность вероятности перехода*. Она определяется динамикой случайного процесса и не зависит от поведения в более ранние, чем t_{n-1}, моменты времени. Тогда совместная плотность вероятности p_n любого порядка n полностью определяется через p_1 и плотность вероятности перехода $\mathscr{P}_{1,1}$, и индексы $(1,1)$, обычно, опускаются. Это делает рассмотрение марковского процесса особенно простым.

Плотность вероятности перехода $\mathscr{P}(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})$ подчиняется простому интегральному соотношению для марковсокого процесса (Smoluchowski, 1906; Chapman, 1916; Kolmogoroff, 1931). Начнем с общего соотношения согласованности при $t_3 \geqslant t_2 \geqslant t_1$

$$p_2(x_3,t_3;x_1,t_1) = \int p_3(x_3,t_3;x_2,t_2;x_1,t_1)\,dx_2,$$

которое справедливо для любого процесса $x(t)$, и воспользуемся (2.6.7), чтобы заменить p_3 под интегралом. Тогда получим

$$p_2(x_3,t_3;x_1,t_1) = \int \mathscr{P}(x_3,t_3|x_2,t_2)\,\mathscr{P}(x_2,t_2|x_1,t_1)\,p_1(x_1,t_1)\,dx_2,$$

и, деля обе части на $p_1(x_1,t_1)$, приходим к интегральному соотношению

$$\mathscr{P}(x_3,t_3|x_1,t_1) = \int \mathscr{P}(x_3,t_3|x_2,t_2)\,\mathscr{P}(x_2,t_2|x_1,t_1)\,dx_2, \quad (t_3 \geqslant t_2 \geqslant t_1), \quad (2.6.8)$$

которое известно как *соотношение Смолуховского — Чапмена — Колмогорова*. Оно является необходимым, но не достаточным условием того, чтобы процесс был марковским процессом первого порядка.

2.6.4. Марковский процесс высшего порядка

Следующий этап в классификации случайных процессов имеет место в случае, когда условная плотность вероятности $\mathscr{P}_{n,k}$ зависит только от двух последних значений x, т.е.

$$\mathscr{P}_{n,k}(x_{k+n},t_{k+n};\ldots;x_{k+1},t_{k+1};x_k,t_k;\ldots;x_1,t_1) = \\ = \mathscr{P}_{n,2}(x_{k+n},t_{k+n};\ldots;x_{k+1},t_{k+1};x_k,t_k;x_{k-1},t_{k-1}). \quad (2.6.9)$$

Такой процесс известен как *марковский процесс второго порядка*. При помощи тех же рассуждений, которые привели к формуле (2.6.7), из (2.6.9) находим

$$p_n(x_n,t_n;\ldots;x_1.t_1) = \mathscr{P}_{1,2}(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1};x_{n-2},t_{n-2})\,\mathscr{P}_{1,2}(x_{n-1},t_{n-1}|x_{n-2},t_{n-2};x_{n-3},t_{n-3})\times \\ \times\ldots\mathscr{P}_{1,2}(x_3,t_3|x_2,t_2;x_1,t_1)\,p_2(x_2,t_2;x-1,t_1), \quad (2.6.10)$$

так что все плотности совместной вероятности высших порядков определяются на основе $\mathscr{P}_{1,2}$ и p_2. Отсюда получаем следующее обобщение соотношения Смолуховского — Чапмана — Колмогорова (2.6.8):

$$\mathscr{P}_{1,2}(x_4,t_4|x_2,t_2;x_1,t_1) = \\ = \int \mathscr{P}_{1,2}(x_4,t_4|x_3,t_3;x_2,t_2)\,\mathscr{P}_{1,2}(x_3,t_3|x_2,t_2;x_1,t_1)\,dx_3, \quad (t_4 \geqslant t_3 \geqslant t_2 \geqslant t_1). \quad (2.6.11)$$

Ясно, что продолжая подобным образом, можно ввести иерархию марковских процессов высших порядков. Марковский процесс третьего порядка был бы процессом, в котором эволюция случайного процесса определяется тремя самыми последними значениями $x(t)$, и все совместные плотности вероятности четвертого

и высших порядков выражаются через $\mathscr{P}_{1,3}$ и p_3 и т. д. Существенным обстоятельством в марковском процессе любого порядка является то, что память о прошлой истории процесса определенно сохраняется, но со временем исчезает.

Наконец, существуют случайные процессы, временна́я эволюция которых зависит от всей их истории. В этом случае плотность вероятности перехода $\mathscr{P}_{n,k}$ ограниченного порядка не может полностью описать эволюцию.

2.7. Основные уравнения в интегро-дифференциальной форме

Воспользуемся общим интегральным соотношением (2.6.2), которое связывает плотность вероятности $p_1(x_2,t_2)$ с плотностью $p_1(x_1,t_1)$ в более ранний момент времени, для получения производной по времени от $p_1(x,t)$. Если в уравнении (2.6.2) положить $t_1 = t$ и $t_2 = t+\delta t$, то получим (для простоты опускаем индекс 1 у $p_1(x,t)$)

$$p(x,t+\delta t) = \int \mathscr{P}_{1,1}(x,t+\delta t|x_1,t)\, p(x_1,t)\, dx_1. \tag{2.7.1}$$

Используя условие нормировки $\mathscr{P}_{1,1}(x_1,t+\delta t|x,t)$ при интегрировании по x_1, можно также записать

$$p(x,t) = \int \mathscr{P}_{1,1}(x,t+\delta t|x,t)\, p(x,t)\, dx_1. \tag{2.7.2}$$

Тогда из первых принципов следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} &= \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}[p(x,t+\delta t)-p(x,t)] = \\ &= \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\int [\mathscr{P}_{1,1}(x,t+\delta t|x_1,t)p(x_1,t) - \mathscr{P}_{1,1}(x,t+\delta t|x,t)p(x,t)]\, dx_1 = \\ &= \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\int \{\, [\mathscr{P}_{1,1}(x,t+\delta t|x_1,t) - \mathscr{P}_{1,1}(x,t|x_1,t)]p_1(x_1,t) - \\ &\qquad - [\mathscr{P}_{1,1}(x_1,t+\delta t|x,t) - \mathscr{P}_{1,1}(x_1,t|x,t)]\, p(x,t)\,\}\, dx_1, \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

где использован результат [ср. (2.6.3)]

$$\mathscr{P}_{1,1}(x,t|x_1,t) = \delta(x-x_1) = \mathscr{P}_{1,1}(x_1,t|x,t).$$

Введем теперь следующее обозначение для скорости изменения $\mathscr{P}_{1,1}$

$$\mathscr{A}(x,x_1,t) \equiv \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}[\mathscr{P}_{1,1}(x,t+\delta t|x_1,t) - \mathscr{P}_{1,1}(x,t|x_1,t)]. \tag{2.7.4}$$

В том случае, когда $\mathscr{P}_{1,1}$ есть плотность вероятности перехода, $\mathscr{A}(x,x_1,t)$ называется *скоростью перехода*. Она удовлетворяет ряду простых соотношений, которые непосредственно вытекают из определения. Первое

$$\mathscr{A}(x,x_1,t) \geqslant 0, \quad \text{если } x \neq x_1, \tag{2.7.5}$$

потому что $\mathscr{P}_{1,1}(x,t|x_1,t)$ равно нулю, тогда как $\mathscr{P}_{1,1}(x,t+\delta t|x_1,t)$ неотрицательна. Также

$$\int \mathscr{A}(x,x_1,t)\, dx = 0, \tag{2.7.6}$$

так как при интегрировании обе условные плотности вероятности в выражении (2.7.4) дают единицу. Однако, как мы увидим ниже, на примере в разд. 2.10, в некоторых случаях $\mathscr{A}(x,x_1,t)$ может быть сильно сингулярной функцией. Используя в уравнении (2.7.3) определение (2.7.4), получим уравнение движения

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \int [\mathscr{A}(x,x_1,t)\, p(x_1,t) - \mathscr{A}(x_1,x,t)\, p(x,t)]\, dx_1. \tag{2.7.7}$$

Это уравнение иногда называют *основным уравнением Паули*, в честь Паули (Pauli, 1928, с. 30), получившего похожее уравнение для квантовой системы на основе предположений, которые здесь не рассматриваются (см. разд. 17.3). Это уравнение имеет характер скоростного уравнения и говорит о том, что $p(x,t)$ увеличивается со скоростью, определяемой скоростями перехода из других значений x_1 в x и уменьшается со скоростью, определяемой скоростями перехода от x в другие значения x_1.

В силу свойства (2.7.6) второй член в уравнении (2.7.7) при интегрировании дает нуль и его можно переписать в виде

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \int \mathscr{A}(x,x_1,t)\, p(x_1,t)\, dx_1, \tag{2.7.8}$$

хотя более симметричная форма (2.7.7) иногда предпочтительнее. В особом случае, когда скорость перехода является симметричной

$$\mathscr{A}(x,x_1,t) = \mathscr{A}(x_1,x,t), \tag{2.7.9}$$

уравнение (2.7.7) упрощается:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \int \mathscr{A}(x,x_1,t)[p(x_1,t) - p(x,t)]\, dx_1. \tag{2.7.10}$$

В заключение заметим, что для случайного процесса, принимающего только дискретные значения x_1, x_2, x_3, ..., основное уравнение принимает форму

$$\frac{\partial p(x_i,t)}{\partial t} = \sum_{j\neq i}[\mathscr{A}(x_i,x_j,t)\, p(x_j,t) - \mathscr{A}(x_j,x_i,t)\, p(x_i,t)]. \tag{2.7.11}$$

В уравнении (2.7.11) $p(x_1,t)$ есть вероятность, а не плотность вероятности.

Несмотря на то, что основное уравнение (master equation), которое мы получили, справедливо, в принципе, для любого случайного процесса $x(t)$ в общем случае оно оказывается полезным только для марковского процесса первого порядка. Это связано с тем, что только в этом случае $\mathscr{P}_{1,1}(x,t+\delta t|x_1,t)$ полностью определяется динамикой процесса и не зависит от всех других вероятностей. То же самое можно сказать и о скорости перехода $\mathscr{A}(x,x_1,t)$. В более общей ситуации $\mathscr{A}(x,x_1,t)$ зависит от вероятностей процесса в более ранние моменты времени. Тогда предпочтительно иметь дело с временно́й эволюцией совместной плотности вероятности p_n, которая включает в себя скорости перехода, обусловленные более ранними значениями случайного процесса (Oppgenheim, Shuler and Weiss, 1977, гл. 3; Srinivas and Wolf, 1977). Здесь мы не будем рассматривать общего случая.

2.8. Основные уравнения в дифференциальной форме

Теперь получим уравнение движения для $p(x,t)$ в форме дифференциального уравнения в частных производных, которое часто оказывается более полезным чем интегро-дифференциальное уравнение (2.7.7).

2.8.1. Дифференциальное уравнение Крамерса — Мояля

Как и прежде, в качестве отправной точки мы воспользуемся уравнением (2.7.1) для $p(x,t+\delta t)$, которое позволит нам выразить скорость изменения $p(x,t)$ в виде

$$\frac{\partial\, p(x_i,t)}{\partial\, t} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}[p(x,t+\delta t) - p(x,t)] = \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\int \mathscr{P}(x,t+\delta t|x_1,t)\, p(x_1,t)\, dx_1 - p(x,t)\right].$$

Мы опустили нижние индексы $1,1$ у $\mathscr{P}_{1,1}$, подразумевая, что это соотношение действительно является полезным только тогда, когда $\mathscr{P}_{1,1}$ есть плотность вероятности перехода. Выполняя замену переменных $x - x_1 \equiv \Delta x$, запишем

$$\frac{\partial\, p(x_i,t)}{\partial\, t} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\int \mathscr{P}(x-\Delta x+\Delta x, t+\delta t|x-\Delta x,t)\, p(x-\Delta x,t)\, d\Delta x - p(x,t)\right]. \tag{2.8.1}$$

Подынтегральное выражение можно рассматривать как функцию $f(y,z)$ двух переменных $y = x - \Delta x$ и $z = \Delta x$. Разложим $f(y,z)$ в ряд Тейлора по переменной y в окрестности точки $y = x$, сохраняя z постоянной

$$f(x-\Delta x, z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} (\Delta x)^r \frac{\partial^r}{\partial x^r} f(x,z). \tag{2.8.2}$$

При подстановке этого разложения в интеграл уравнения (2.8.1), получим уравнение

$$\frac{\partial\, p(x_i,t)}{\partial\, t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\Delta x)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial x^r} \mathscr{P}(x+\Delta x, t+\delta t | x, t)\, p(x,t)\, d\Delta x - p(x,t) \right]. \tag{2.8.3}$$

Теперь поменяем в этом выражении порядок операций суммирования и интегрирования и проинтегрируем почленно. Член с $r = 0$ при интегрировании дает $p(x,t)$ и сокращается с последним слагаемым. Для оставшихся членов определим величины

$$D_r(x,t) \equiv \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t} \int (\Delta x)^r \mathscr{P}(x+\Delta x, t+\delta t | x, t)\, d\Delta x, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{2.8.4а}$$

которые известны как ***моменты перехода*** случайного процесса $x(t)$. Момент перехода $D_r(x,t)$ пропорционален r-му моменту изменения процесса за короткий интервал δt при условии, что начальное значение равно x в момент времени t. Иногда это выражается в виде

$$D_r(x,t) \equiv \lim_{\delta t \to 0} \frac{\langle (\Delta x)^r \rangle_{x,t}}{\delta t}. \tag{2.8.4б}$$

С помощью определения (2.4.8а) уравнение (2.8.3) можно переписать в более компактной форме

$$\frac{\partial\, p(x,t)}{\partial\, t} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial x^r} [D_r(x,t)\, p(x,t)]. \tag{2.8.5}$$

Это уравнение известно как ***дифференциальное уравнение Крамерса — Мояля*** (Kramers, 1940; Moyal, 1949). В общем, оно представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных бесконечного порядка, несмотря на то, что, как мы увидим, в особых случаях порядок может стать конечным.

Влияние первого члена справа, содержащего D_1, на изменение $p(x,t)$ в течение короткого интервала δt определяется как

$$-\delta t \frac{\partial}{\partial x} [D_1(x,t)\, p(x,t)]$$

и иллюстрируется на рис. 2.7*а* для случая, когда D_1 — положительная константа. Градиент $p(x,t)$ определяет изменение $p(x,t)$, и член, содержащий D_1, если он положителен, очевидно, приводит к смещению плотности вероятности вправо. Поэтому $D_1(x,t)$ называют ***коэффициентом дрейфа***. Влияние члена, содержащего D_2, на $p(x,t)$ определяется формулой

$$\frac{1}{2} \delta t \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D_2(x,t)\, p(x,t)]$$

и иллюстрируется на рис. 2.7*б* для случая, когда D_2 — постоянная положительная величина. Очевидно, наличие D_2 приводит к тому, что плотность вероятности уширяется, поэтому D_2 называют ***коэффициентом диффузии***. Высшие моменты перехода не имеют общепринятых названий.

Наконец, снова отметим, что хотя уравнение (2.8.5) было получено без явного использования марковского предположения, ибо уравнение (2.7.1), используемое в качестве отправной точки, справедливо в самом общем случае, результаты оказываются полезными только для марковских процессов первого порядка. Причина этого в том, что только когда $\mathscr{P}(x,t|x_0,t_0)$ представляет собой плотность вероятности перехода, моменты перехода определяются динамикой случайного процесса и не зависят от вероятностей по x в предыдущие моменты времени.

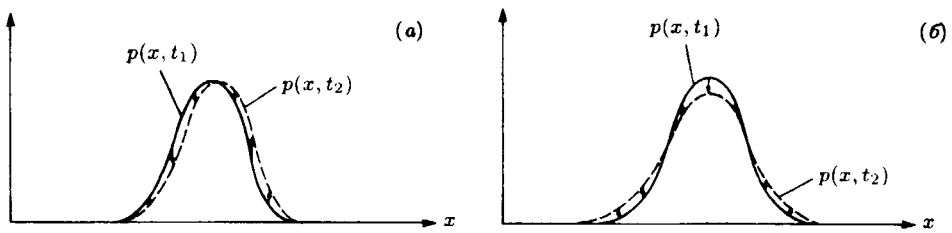


Рис. 2.7. Влияние члена дрейфа a и диффузного члена $б$ на плотность вероятности $p(x,t)$ за короткий интервал времени от t_1 и t_2

Если $x(t)$ есть марковский процесс первого порядка, то нетрудно заметить, что плотность вероятности перехода $\mathscr{P}(x,t|x_0,t_0)$ также должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных, подобному уравнению (2.8.5). Из соотношения Смолуховского — Чепмана — Колмогорова (2.6.8) имеем

$$\mathscr{P}(x,t+\delta t|x_0,t_0)=\int \mathscr{P}(x,t+\delta t|x_1,t_1)\,\mathscr{P}(x_1,t-1|x_0,t_0)\,dx_1,\quad (t+\delta t\geqslant t_1\geqslant t_0). \tag{2.8.6}$$

Это соотношение вполне аналогично (2.7.1), за исключением того, что $p(x,t)$ в обеих частях последнего нужно заменить на условную плотность вероятности или на плотность вероятности перехода $\mathscr{P}(x,t|x_0,t_0)$. Поскольку значение $x_0(t_0)$ не играет роли при дифференцировании или интегрировании, способ, который был использован при выводе уравнения (2.8.5), можно повторить шаг за шагом, и вместо уравнения (2.8.5) мы получим

$$\frac{\partial\mathscr{P}(x,t|x_0,t_0)}{\partial t}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\frac{\partial^r}{\partial x^r}\left[D_r(x,t)\,\mathscr{P}(x,t|x_0,t_0)\right]. \tag{2.8.7}$$

Следовательно, $\mathscr{P}(x,t|x_0,t_0)$ и $p(x,t)$ подчиняются одному и тому же уравнению движения для марковского процесса первого порядка.

2.8.2. Векторный случайный процесс

Иногда приходится иметь дело со случайным процессом, который имеет несколько компонент, и удобно его рассматривать в виде вектора $\mathbf{x}(t)$. Например, комплексный случайный процесс $z(t)$ с действительной и мнимой компонентами $x_1(t)$ и $x_2(t)$ можно рассматривать как действительный двумерный векторный процесс $\mathbf{x}(t)$. Для векторного случайного процесса справедливо уравнение (2.7.1), с той лишь разницей, что интегрирование выполняется по переменной $\mathbf{x}_1$, поэтому записываем

$$p(\mathbf{x},t+\delta t)=\int \mathscr{P}(\mathbf{x},t+\delta t|\mathbf{x}_1,t)\,d\mathbf{x}_1. \tag{2.8.8}$$

Теперь можно повторить процедуру, на основе которой было получено дифференциальное уравнение в частных производных, с некоторыми незначительными изменениями. Ряд Тейлора (2.8.2) принимает форму разложения скалярной функции вектора, и мы имеем

$$f(\mathbf{x}-\mathbf{\Delta x})=f(x)-\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}f(\mathbf{x})+\frac{1}{2!}\Delta x_i\Delta x_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}f(\mathbf{x})-\ldots, \tag{2.8.9}$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Это приводит к следующему дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[D_i(\mathbf{x},t)p(\mathbf{x},t)\right]+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[D_{ij}(\mathbf{x},t)\,p(\mathbf{x},t)\right]-\ldots, \tag{2.8.10}$$

в котором r-й момент перехода есть тензор в декартовых координатах ранга r,

$$D_{ijk\ldots}(\mathbf{x},t)=\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\int \Delta x_i\Delta x_j\Delta x_k\ldots\mathscr{P}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x},t+\delta t|\mathbf{x},t)\,d\Delta\mathbf{x}. \tag{2.8.11}$$

За исключением этой особенности, уравнение движения похоже на уравнение (2.8.5), и можно также получить аналогичное соотношение для $\mathscr{P}(\mathbf{x},t|\mathbf{x}_0,t_0)$ в случае векторного марковского процесса $\mathbf{x}(t)$ первого порядка. Момент первого порядка $D_i(\mathbf{x},t)$ известен как *вектор смещения*, а момент второго порядка $D_{ij}(\mathbf{x},t)$ — как *тензор диффузии*.

2.8.3. Порядок дифференциального уравнения Крамерса — Мояля

Несмотря на то, что дифференциальное уравнение Крамерса — Мояля (2.8.5) формально представляет собой уравнение бесконечного порядка, порядок все же оказывается конечным, если все моменты перехода D_r стремятся к нулю для r, превышающих некоторое число N. Воспользуемся доказательством Лакса (Lax, 1966), чтобы показать, что существуют жесткие ограничения на порядок N.

Из неравенства Шварца для любых целых r_1 и r_2 имеем

$$\left[\int(\Delta x)^{r_1}(\Delta x)^{r_2}\mathscr{P}(x+\Delta x,t+\delta t|x,t)\,d\Delta x\right]^2\leqslant$$
$$\leqslant\int(\Delta x)^{2r_1}\mathscr{P}(x+\Delta x,t+\delta t|x,t)\,d\Delta x\times\int(\Delta x)^{2r_2}\mathscr{P}(x+\Delta x,t+\delta t|x,t)\,d\Delta x,$$

что с помощью определения (2.8.4) момента перехода D_r приводит к неравенству

$$D^2_{r_1+r_2}\leqslant D_{2r_1}D_{2r_2}. \tag{2.8.12}$$

Поскольку это соотношение имеет место для любых целых значений r_1 и r_2, можно, в частности, положить $r_1=1$, $r_2=N-1$. Тогда

$$D_N^2\leqslant D_2D_{2N-2}. \tag{2.8.13}$$

Теперь предположим, что все моменты перехода D_r выше некоторого значения $r=N$ стремятся к нулю. Тогда уравнение Крамерса — Мояля становится дифференциальным уравнением в частных производных N-го порядка. Если $N\geqslant 3$, то $2N-2\geqslant N+1$, так что и $D_{N+1}=0$ и $D_{2N-2}=0$. Но из уравнения (2.8.13) видно, что если $D_{2N-2}=0$, то $D_N=0$. Следовательно, если моменты перехода стремятся к нулю выше порядка N, то они также стремятся к нулю выше порядка $N-1$.

Этот вывод можно повторить рекурсивно, чтобы показать, что все моменты перехода выше $N-2$, $N-3$ и т.д. также стремятся к нулю, поскольку порядок больше двух. Когда $N=2$ или $N=1$, этот вывод становится неверным, потому что тогда больше не выполняется неравенство $2N-2\geqslant N+1$. Следовательно, если дифференциальное уравнение Крамерса — Мояля имеет конечный порядок, то оно должно быть уравнением первого или второго порядка. В этом случае уравнение известно как *уравнение Фоккера — Планка*. Похожий результат, известный как теорема Марцинкевича (см., например, Lukacs, 1970, с. 213), с которым мы сталкивались в разд. 1.4.3, имеет место в теории характеристических функций.

2.9. Уравнение Ланжевена и уравнение Фоккера — Планка

Многие процессы $\mathbf{x}(t)$ в природе описываются уравнением движения в общей форме

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}(\mathbf{x},t)+\mathbf{q}(t), \tag{2.9.1}$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ — детерминированная функция от $\mathbf{x},t$ и $\mathbf{q}(t)$ — случайная функция от t. Например, если $\mathbf{x}(t)$ представляет собой импульс частицы, совершающей броуновское движение, то левая часть есть скорость изменения импульса, а правая часть представляет флуктуирующую силу, действующую на частицу. Эта

сила включает в себя кратковременное среднее $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ и быстро осциллирующую часть $\mathbf{q}(t)$, представляющую собой отклонение от среднего. Так как $\mathbf{q}(t)$ — случайный процесс, то $\mathbf{x}(t)$ в общем случае также случайный процесс, и уравнение движения известно как *стохастическое уравнение.*

Для того, чтобы определить статистические свойства $\mathbf{x}(t)$, мы должны определить статистику $\mathbf{q}(t)$. В качестве $\mathbf{q}(t)$ мы возьмем гауссовский случайный процесс с нулевым средним

$$\langle \mathbf{q}(t) \rangle = 0, \tag{2.9.2}$$

с чрезвычайно быстрыми флуктуациями. Следовательно, мы аппроксимируем двухвременну́ю корреляционную функцию дельта-функцией и запишем

$$\langle q_i(t)\, q_j(t') \rangle = g_{ij}(t)\delta(t-t'). \tag{2.9.3}$$

При этих условиях уравнение (2.9.1) обычно называется *уравнением Ланжевена*[1]. Поскольку случайный процесс $\mathbf{q}(t)$ эволюционирует независимо от $\mathbf{x}(t)$, очевидно, что $\mathbf{x}(t_1)$ не будет коррелировать с $\mathbf{q}(t_2)$ в более поздний момент времени t_2, или

$$\langle x_i(t_1) q_j(t_2) \rangle = 0, \quad t_2 > t_1. \tag{2.9.4}$$

Более того, последующая эволюция $\mathbf{x}(t)$ зависит от настоящего и определяется уравнением (2.9.1), тогда как прошлое случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ не играет роли. Таким образом, $\mathbf{x}(t)$ — марковский процесс первого порядка. Следовательно, статистика $\mathbf{x}(t)$ полностью определеяется плотностью вероятности $p(\mathbf{x},t)$ и плотностью вероятности перехода $\mathscr{P}(\mathbf{x},t|\mathbf{x}_0,t)$, которые, как мы сейчас покажем, подчиняются уравнениям Фоккера — Планка.

2.9.1. Моменты перехода для процесса Ланжевена

Начнем с вычисления момента перехода первого порядка. После интегрирования уравнения (2.9.1) по малому временно́му интервалу δt имеем

$$\Delta x_i(t) \equiv x_i(t+\delta t) - x_i(t) = A_i(\mathbf{x},t)\delta t + \int_t^{t+\delta t} q_i(t')\, dt'. \tag{2.9.5}$$

Хотя δt очень мало, интеграл в уравнении (2.9.5) нельзя заменить на $q_i(t)\delta t$, потому что $q_i(t')$, будучи некоррелированной, может флуктуировать даже в бесконечно малом интервале. Если мы вычислим среднее от обеих сторон этого уравнения, предполагая, что $\mathbf{x}(t)$ имеет некоторое заданное значение, разделим на δt и устремим к пределу $\delta t \to 0$, то получим вектор смещения $D_i(\mathbf{x},t)$ случайного процесса [см. (2.8.46)]. Теперь

$$\langle x_i(t+\delta t) - x_i(t) \rangle_{\mathbf{x},t} = A_i(\mathbf{x},t)\delta t + \int_t^{t+\delta t} \langle q_i(t') \rangle\, dt' = A_i(\mathbf{x},t)\delta t$$

в силу уравнения (2.9.2), так что

$$D_i(\mathbf{x},t) = A_i(\mathbf{x},t). \tag{2.9.6}$$

Таким образом, мы показали, что усредненный ускоряющий член в уравнении Ланжевена есть вектор смещения случайного процесса. Это следует из того факта, что $A_i(\mathbf{x},t)$ — условная средняя скорость от $\mathbf{x}(t)$.

Далее, из уравнения (2.9.5) вычислим тензор диффузии. Для этого усредним произведение $\Delta x_i \Delta x_j$, при условии (которое обозначено нижним индексом $\mathbf{x},t$), что $\mathbf{x}$ имеет данное значение при t. В результате

[1] Более полное обсуждение уравнений Ланжевена и Фоккера — Планка имеется в книге (Risken, 1984).

получим

$$D_{ij}(\mathbf{x},t)=\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left\langle\left[A_i(\mathbf{x},t)\delta t+\int_t^{t+\delta t}q_i(t')\,dt'\right]\left[A_j(\mathbf{x},t)\delta t+\int_t^{t+\delta t}q_j(t')\,dt'\right]\right\rangle_{\mathbf{x},t}=$$

$$=\lim_{\delta t\to 0}\left[A_i(\mathbf{x},t)A_j(\mathbf{x},t)\delta t+\left\langle A_i(\mathbf{x},t)\int_t^{t+\delta t}q_j(t')\right\rangle_{\mathbf{x},t}dt'+\right.$$

$$\left.+\left\langle A_j(\mathbf{x},t)\int_t^{t+\delta t}q_i(t')\right\rangle_{\mathbf{x},t}dt'+\frac{1}{\delta t}\int_t^{t+\delta t}\int_t^{t+\delta t}\langle q_i(t')q_j(t'')\rangle\,dt'\,dt''\right].$$

Первый член справа стремится к нулю в пределе $\delta t\to 0$, а средние второго и третьего членов равны нулю в силу того факта, что $\mathbf{x}(t)$ не зависит от $\mathbf{q}(t')$ в более поздний момент времени t' [см. (2.9.4)]. Для четвертого члена воспользуемся (2.9.3) и получим

$$D_{ij}(\mathbf{x},t)=\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\int_t^{t+\delta t}\int_t^{t+\delta t}g_{ij}(t')\delta(t'-t'')\,dt'\,dt''=g_{ij}(t). \tag{2.9.7}$$

Следовательно, сила шума Ланжевена дает тензор диффузии.

Подобный вывод можно использовать теперь для вычисления момента перехода любого высшего порядка $D_{ijk}(\mathbf{x},t)$ и т.д., в результате чего будет обнаружено, что все моменты перехода высших порядков стремятся к нулю в пределе $\delta t\to 0$. Из уравнения (2.8.10) следует, что $p(\mathbf{x},t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка второго порядка

$$\frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[A_i(\mathbf{x},t)p(\mathbf{x},t)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[g_{ij}(\mathbf{x},t)p(\mathbf{x},t)\right], \tag{2.9.8}$$

и, аналогично, для $\mathscr{P}(\mathbf{x},t|\mathbf{x}_0,t)$. Процесс Ланжевена, удовлетворяющий стохастическому уравнению, есть процесс Фоккера — Планка.

2.9.2. Стационарное решение уравнения Фоккера — Планка

Уравнение Фоккера — Планка (2.9.8) всегда можно формально переписать в виде

$$\frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}j_i(\mathbf{x},t)=0, \tag{2.9.9}$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование), в котором величина

$$j_i(\mathbf{x},t)\equiv A_i(\mathbf{x},t)p(\mathbf{x},t)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[g_{ik}(\mathbf{x},t)p(\mathbf{x},t)\right] \tag{2.9.10}$$

известна как *плотность тока вероятности*. Уравнение (2.9.9) описывает закон сохранения для вероятности. Рассмотрим стационарное решение уравнения (2.9.9) в случае, когда A_i и g_{ij} не зависят от времени, и g_{ij} является диагональной, т.е. когда

$$g_{ij}(\mathbf{x})=\delta_{ij}D(\mathbf{x}). \tag{2.9.11}$$

В стационарном состоянии $\partial p/\partial t=0$, так что на основе уравнения (2.9.9) расходимость плотности тока вероятности $\mathbf{j}$ также стремится к нулю. В одномерном случае под этим подразумевалось бы, что скалярная величина j постоянна и, таким образом, плотность вероятности и его производные стремятся к бесконечности, тогда из уравнения следует, что константа должна быть равна нулю. Однако в многомерном случае совсем не очевидно, что

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{x})=0 \tag{2.9.12}$$

есть самое общее стационарное решение (нижний индекс s означает стационарное состояние), потому что в стационарном состоянии любой вектор плотности тока удовлетворяет уравнению (2.9.9). В дальнейшем в качестве отправной точки для получения стационарного решения уравнения Фоккера — Планка (2.9.9) мы будем использовать уравнение (2.9.12).

Если $p_s(\mathbf{x})$ — решение в стационарном состоянии, то уравнение (2.9.12) означает, что

$$\mathbf{A}p_s - \frac{1}{2}\nabla(Dp_s) = 0,$$

так что

$$\frac{1}{2}D\nabla p_s = p_s\left[\mathbf{A} - \frac{1}{2}\nabla D\right]$$

или

$$\frac{1}{p_s}\nabla p_s = \nabla(\ln p_s) = \frac{2\mathbf{A}}{D} - \frac{1}{D}\nabla D. \tag{2.9.13}$$

Вследствие того, что вектор справа представляет собой градиент от скалярного поля $\ln p_s$, оно должно быть потенциальным и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{2A_j}{D} - \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{2A_i}{D} - \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial x_i}\right) \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{2A_j}{D}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{2A_i}{D}\right).$$

Однако $2\mathbf{A}/D$ тоже является потенциальным и, значит, его можно выразить как градиент от скаляра. Положим

$$\frac{2\mathbf{A}(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} \equiv -\nabla U(\mathbf{x}), \tag{2.9.14}$$

где $U(\mathbf{x})$ — скалярный потенциал, который можно выразить в виде линейного интеграла от некоторой начальной точки $\mathbf{x}_0$ до $\mathbf{x}$ вдоль любого пути

$$U(\mathbf{x}) = -\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \frac{2\mathbf{A}(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} \cdot d\mathbf{x} + \text{const}. \tag{2.9.15}$$

Тогда, комбинируя (2.9.13) с (2.9.14), имеем

$$\nabla U = -\frac{1}{D}\nabla D - \frac{1}{p_s}\nabla p_s = -\frac{1}{Dp_s} + \nabla(Dp_s) = -\nabla \ln(Dp_s).$$

Это уравнение можно сразу проинтегрировать, и мы получим

$$U(\mathbf{x}) = -\ln(D\,p_s) + \text{const}$$

или

$$p_s(\mathbf{x}) = \frac{K}{D(\mathbf{x})}\,\mathrm{e}^{-U(\mathbf{x})}, \tag{2.9.16}$$

где K — нормированная константа. Так как $U(\mathbf{x})$ определена с точностью до константы, то нормировка часто включается в определение потенциала $U(\mathbf{x})$, и константу K можно приравнять единице.

2.9.3. Зависящее от времени решение уравнения Фоккера — Планка

Чтобы получить общее, зависящее от времени решение уравнения (2.9.9) с константами A_i и g_{ij}, мы попытаемся разделить переменные, а именно:

$$p(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})\Theta(t), \tag{2.9.17}$$

после чего подставить в уравнение Фоккера — Планка. Если обозначить через $\mathscr{L}$ дифференциальный оператор

$$\mathscr{L} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} A_i - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} D,$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование), то уравнение примет вид

$$-\frac{1}{\Theta(t)} \frac{d\Theta(t)}{dt} = \frac{1}{f(\mathbf{x})} \mathscr{L} f(\mathbf{x}).$$

Поскольку левая сторона зависит только от t, тогда как правая сторона зависит только от $\mathbf{x}$, каждое выражение должно равняться константе λ. Следовательно, мы приходим к двум дифференциальным уравнениям

$$\mathscr{L} f(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}), \tag{2.9.18}$$

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = -\lambda \Theta(t). \tag{2.9.19}$$

Уравнение (2.9.18) представляет собой уравнение на собственные значения с бесконечным числом собственных решений $f_{\{n\}}(\mathbf{x})$ и собственных значений $\lambda_{\{n\}}$, которые помечены бесконечным множеством целых $\{n\}$. Размерность множества есть размерность случайного процесса $\mathbf{x}(t)$, т.е. в случае трехмерного процесса $\mathbf{x}(t)$, $\{n\}$ означает n_1, n_2, n_3. Уравнение (2.9.19) можно непосредственно проинтегрировать, и общее решение $p(\mathbf{x}, t)$ является линейной комбинацией всех возможных собственных решений, т.е.

$$p(\mathbf{x}, t) = \sum_{\{n\}} C_{\{n\}} f_{\{n\}}(\mathbf{x}) \exp(-\lambda_{\{n\}} t), \tag{2.9.20}$$

где константы $C_{\{n\}}$ определяются начальными условиями и $\lambda_{\{n\}} \geqslant 0$.

Уравнение (2.9.18) можно преобразовать в уравнение Штурма — Лиувилля, используя соответствующее преобразование (см., например, Morse and Feshbach, 1953, с. 719), но здесь мы не будем вникать в детали этой общей процедуры. Метод будет продемонстрирован в гл. 18 и 19 при решении уравнения Фоккера — Планка для лазера.

2.10. Процесс Винера (или одномерное случайное блуждание)

2.10.1. Одномерное случайное блуждание

В качестве показательного примера простого случайного процесса рассмотрим идеализированную модель тела, совершающего одномерное случайное блуждание в решетке. Эта модель обсуждалась Эйнштейном (Einstein, 1906) и часто используется в качестве модели *броуновского движения*. Она известна так же, как модель блужданий пьяного человека.

Рассмотрим частицу (пьяного человека), помещенную в начальный момент времени в начало системы координат, которая совершает последовательные единичные шаги вперед или назад с равной вероятностью. Исходя из сущности задачи, очевидно, что любое положение тела в последующие моменты времени определяется положением в данный момент времени и не зависит от истории предыдущих положений, так что случайный процесс является марковским. Мы хотим определить вероятность $P(n, N)$, с которой частица окажется в положении n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) после N шагов. Пусть n_+ и n_- будут означать число шагов, сделанных вперед и назад, соответственно. Тогда, очевидно, что

$$n_+ + n_- = N, \quad n_+ - n_- = n, \tag{2.10.1}$$

так что

$$n_+ = \frac{1}{2}(N + n), \quad n_- = \frac{1}{2}(N - n). \tag{2.10.2}$$

Из определения очевидно, что N и n должны быть равны по модулю, потому что четное положение может быть достигнуто после четного числа шагов и т.д. Вероятность $P(n, N)$ задается распределением Бернулли,

в котором n_+ есть число успехов из N испытаний, каждый из которых появляется с вероятностью $\frac{1}{2}$ [ср. (1.5.1)]. Следовательно,

$$P(n,N)=\binom{N}{n_+}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_+}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_-}=\frac{N!}{n_+!\,n_-!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}. \tag{2.10.3}$$

Теперь подставим сюда вместо n_+ и n_- значения из (2.10.2) и предположим, что значения этих чисел столь велики, что все факториалы могут быть аппроксимированы по теореме Стирлинга

$$N!\sim(2\pi)^{1/2}N^{N+1/2}\mathrm{e}^{-n}. \tag{2.10.4}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}P(n,N)&=\frac{N!}{(N+n/2)!\,(N-n/2)!\,2^N}=\frac{N^{N+1/2}\mathrm{e}^{-N}}{(2\pi)^{1/2}2^N\,[(N+n)/2]^{(N+n+1)/2}\,[(N-n)/2]^{(N-n+1)/2}\,\mathrm{e}^{-N}}=\\&=\frac{2}{(2\pi N)^{1/2}}\frac{1}{(1+n/N)^{(N+n+1)/2}(1-n/N)^{(N-n+1)/2}}=\\&=\frac{2}{(2\pi N)^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(N+n+1)\ln\left(1+\frac{n}{N}\right)-\frac{1}{2}(N-n+1)\ln\left(1-\frac{n}{N}\right)\right].\end{aligned}$$

Разложим каждый логарифм в степенной ряд и воспользуемся тем фактом, что когда значения n_+ и n_- являются большими, они становятся приблизительно равными по модулю, так что $n/N\ll 1$. Таким образом, мы пренебрегаем в экспоненте членами порядка $(n/N)^2$. После группировки членов получим

$$P(n,N)=\frac{2}{(2\pi N)^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{n^2}{N}+O\left(\frac{n}{N}\right)^2\right]. \tag{2.10.5}$$

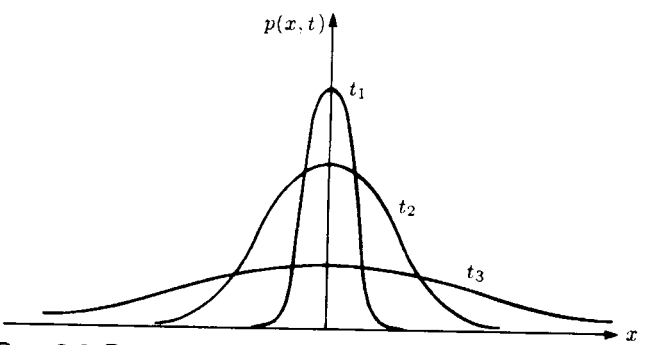


Рис. 2.8. Временна́я эволюция $p(x,t)$ для случайных блужданий для трех разных моментов времени $t_1<t_2<t_3$

Теперь введем координату положения x и время t, записывая

$$x=na,\quad t=NT, \tag{2.10.6}$$

где a — размер каждого шага и T — интервал между последующими шагами. Когда a и T малы и когда числа n и N достаточно велики, можно рассматривать x и t как непрерывные переменные. Если $p(x,t)$ — плотность вероятности от x, то

$$p(x,t)\delta x=\frac{1}{2}P(n,N)\delta x,$$

где $\delta x/\delta n=a$. Множитель $\frac{1}{2}$ появляется вследствие ограничения по модулю n. Следовательно, из (2.10.5) следует, что

$$p(x,t)=\frac{1}{(2\pi t/T)^{1/2}a}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2T}{a^2t}\right).$$

Если допустить, что $a\to 0$ и $T\to 0$ таким образом, что $a^2/T\equiv D$ остается постоянной, то

$$p(x,t)=\frac{1}{(2\pi Dt)^{1/2}}\mathrm{e}^{-x^2/2Dt}. \tag{2.10.7}$$

Это гауссовское распределение вероятности по x с нулевым средним и дисперсией

$$\langle(\Delta x)^2\rangle=Dt. \tag{2.10.8}$$

На рис. 2.8 показана форма $p(x,t)$ для разных значений времени. Очевидно, что плотность вероятности является нестационарной и постепенно уширяется, в результате чего $x(t)$ называется *процессом диффузии*. Иногда его называют *процессом Винера*, в честь Винера (Wiener, 1923, 1930), который его исследовал.

Нетрудно получить выражение для условной плотности вероятности $\mathscr{P}(x,t|x_0,t_0)$. Сперва заметим, что $p(x,t)$ (2.10.7), представляет собой $\mathscr{P}(x,t|0,0)$, потому что было предположено, что $x(0)=0$. Однако, исходя из природы процесса, очевидно, что его эволюция не зависит от того, где и когда этот процесс начинается; $\mathscr{P}(x,t|x_0,t_0)$ зависит только от разницы $x-x_0$ и от интервала времени $t-t_0$ ($t>t_0$). Следовательно, $\mathscr{P}(x,t|x_0,t_0)$ можно получить непосредственно из уравнения (2.10.7) в виде

$$\mathscr{P}(x,t|x_0,t_0)=\frac{1}{[2\pi D(t-t_0)]^{1/2}}\,\mathrm{e}^{-(x-x_0)^2/2D(t-t_0)}. \tag{2.10.9}$$

Это истинная плотность вероятности перехода, которая не зависит от любой другой вероятности.

2.10.2. Совместные вероятности и автокорреляция

Пусть $p(x,t)$ и $\mathscr{P}(x,t|x_0,t_0)$ известны, тогда можно построить любую совместную плотность вероятности $p_n(x_n,t_n;\ldots,x_1,t_1)$, используя марковское свойство (2.6.7). Таким образом, для $n=2$ находим, что

$$p_2(x_2,t_2;x_1,t_1)=\frac{1}{[2\pi D(t_2-t_1)]^{1/2}}\,\mathrm{e}^{-(x_2-x_1)^2/2D(t_2-t_1)}\frac{1}{[2\pi Dt_1]^{1/2}}\,\mathrm{e}^{-x_1^2/2Dt_1},\quad (t_2>t_1). \tag{2.10.10}$$

Это позволяет нам вычислить автокорреляционную функцию от $x(t)$ обычным способом:

$$\Gamma(t_1,t_2)\equiv\langle x(t_1)\,x(t_2)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int x_1x_2p_2(x_2,t_2;x_1,t_1)\,dx_1\,dx_2.$$

Используя (2.10.10) и замену $x_2-x_1=x_3$, получим

$$\Gamma(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int x_1(x_1+x-3)\frac{1}{[2\pi D(t_2-t_1)]^{1/2}}\,\mathrm{e}^{-(x_3)^2/2D(t_2-t_1)}\frac{1}{(2\pi Dt_1)^{1/2}}\,\mathrm{e}^{-x_1^2/2Dt_1}\,dx_1\,dx_3=$$

$$=Dt_1\quad (t_2\geqslant t_1), \tag{2.10.11}$$

потому что второй интеграл, содержащий произведение x_1x_2, стремится к нулю. Необычность этого решения состоит в том, что оно не зависит от более позднего момента времени t_2, поскольку изменение x не зависит от начального значения x. Если бы t_2 была меньше, чем t_1, то получили бы Dt_2. Два решения можно объеденить при помощи единичной ступенчатой функции

$$\theta(\tau)=\begin{cases}1 & \text{для } \tau>0,\\ \frac{1}{2} & \text{для } \tau=0,\\ 0 & \text{для } \tau<0\end{cases}$$

в виде

$$\Gamma(t_1,t_2)=D\left[t_1\theta(t_2-t_1)+t_2\theta(t_1-t_2)\right]. \tag{2.10.12}$$

2.10.3. Уравнения движения для процесса Винера

Если известна плотность вероятности $\mathscr{P}(x,t|x_0,t_0)$, то можно вычислить скорость перехода $\mathscr{A}(x,x_0,t)$, используя выражение (2.7.4), согласно которому

$$\mathscr{A}(x,x_0,t)=\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\mathscr{P}(x,t+\delta t|x_0,t)-\delta(x-x_0)\right]. \tag{2.10.13}$$

Теперь воспользуемся гауссовским характером $\mathscr{P}(x, t+\delta t|x_0, t)$, чтобы выразить плотность вероятности перехода через интеграл Фурье от характеристической функции [см. (1.5.24)] в виде

$$\mathscr{P}(x, t+\delta t|x_0, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2 D\delta t/2}\,\mathrm{e}^{-i(x-x_0)\xi}\,d\xi. \tag{2.10.14}$$

Дельта-функцию можно также представить в виде интеграла Фурье

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i(x-x_0)\xi}\,d\xi. \tag{2.10.15}$$

Если подставить (2.10.14) и (2.10.15) в (2.10.13), разложить $\exp\left(-\xi^2 D\delta t/2\right)$ в степенной ряд по δt и перейти к пределу $\delta t \to 0$, то легко получим

$$\mathscr{A}(x, x_0, t) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-\frac{1}{2}\xi^2 D)\,\mathrm{e}^{-i(x-x_0)\xi}\,d\xi = \frac{1}{2}D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i(x-x_0)\xi}\,d\xi = \frac{1}{2}D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{2\pi}\delta(x-x_0). \tag{2.10.16}$$

Это сильно сингулярная функция. Тем не менее, $\mathscr{A}(x, x_0, t)$ удовлетворяет двум общим условиям (2.7.5) и (2.7.6) для скоростей перехода, оно рассматривается как распределение и используется под знаком интеграла, что приводит к приемлемым результатам.

Таким образом, на основе общего основного уравнения (2.7.8) при помощи (2.10.16) получилось следующее уравнение движения для $p(x, t)$:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}D\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta(x-x_0)\right]p(x_0,t)dx_0 = \frac{1}{2}D\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x,t). \tag{2.10.17}$$

Это соотношение рассматривается как уравнение диффузии, которое могло быть использовано для случайного процесса, изображенного на рис. 2.8.

Иногда процесс Винера называют стохастическим уравнением Ланжевена с нулевым смещением, а именно

$$\frac{dx(t)}{dt} = q(t), \tag{2.10.18}$$

в котором $q(t)$ есть белый гауссовский шум с нулевым средним

$$\langle q(t)\rangle = 0, \quad \langle q(t)q(t')\rangle = D\delta(t-t'). \tag{2.10.19}$$

Тогда из общего соотношения между уравнениями Ланжевена и Фоккера — Планка следует (см. разд. 2.9), что $p(x, t)$ удовлетворяет уравнению движения (2.10.17). Однако, Эйнштейн (Einstein, 1906) указал на то, что стохастическое уравнение (2.10.18) приводит к внутреннему противоречию, потому что скорость, в действительности, не существует. Если попытаться определить среднеквадратичную скорость для процесса Винера в виде $\langle[x(t+\delta t)-x(t)]^2\rangle^{1/2}/\delta t$, то при помощи соотношения (2.10.12) получим выражение

$$\frac{1}{\delta t}\langle[x(t+\delta t)-x(t)]^2\rangle^{1/2} = \frac{1}{\delta t}\left[\langle x^2(t+\delta t)\rangle + \langle x^2(t)\rangle - 2\langle x(t)x(t+\delta t)\rangle\right]^{1/2} = \\ = \frac{1}{\delta t}\left[D(t+\delta t) + Dt - 2Dt\right]^{1/2} = \left(\frac{D}{\delta t}\right)^{1/2}, \tag{2.10.20}$$

которое не имеет предела при $\delta t \to 0$. Таким образом, стохастическое уравнение (2.10.18) не имеет глубокого физического смысла.

Задачи

2.1 Рассмотрите комплексный случайный процесс $z(t) = u(t) + v$, в котором $u(t)$ — комплексный стационарный случайный процесс, v — комплексная случайная переменная, зависящая от времени, которая статистически не зависит от $u(t)$. Является ли $z(t)$ (а) стационарным процессом в широком смысле и (б) эргодическим процессом?

2.2 Покажите, что характеристический функционал $C(\{y\})$ для действительного гауссовского случайного процесса $x(t)$ с нулевым средним задается в виде

$$C(\{y\}) = \exp\left[-\frac{1}{2}\iint_{-\infty}^{\infty} dt_1\, dt_2\; y(t_1)y(t_2)\Gamma(t_1,t_2)\right],$$

где $\Gamma(t_1,t_2) = \langle x(t_1)x(t_2)\rangle$.

2.3 Покажите, что если $x(t)$ — действительный и стационарный (в широком смысле) случайный процесс, и $y(t)$ — *локальное среднее по времени* $x(t)$ на интервале $2T$, определяемое соотношением

$$y(t) = -\frac{1}{2T}\int_{-t-T}^{t+T} x(t')\,dt',$$

то автокорреляционные функции $\Gamma_{xx}(\tau)$ и $\Gamma_{yy}(\tau)$ от $x(t)$ и $y(t)$ связаны соотношением

$$\Gamma_{yy}(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1 - \frac{|\tau'|}{2T}\right)\Gamma_{xx}(\tau - \tau')\,d\tau'.$$

2.4 Пусть $x(t)$ — действительный стационарный случайный процесс нулевым средним и автокорреляционной функцией $\Gamma(\tau) = \mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}/2\alpha$. Найдите разложение Кархунена — Луева для $x(t)$ в интервале $-T < t < T$.

2.5 Действительный случайный процесс $x(t)$ состоит из последовательности чередующихся сегментов, имеющих постоянные положительные и отрицательные значения. Процесс $x(t)$ изменяется от одного значения к другому случайно, со средней скоростью R. Положительные и отрицательные значения x_+ и x_- случайного процесса $x(t)$ имеют разные распределения вероятности с дисперсиями σ_+ и σ_-, кроме того, $\langle x_+\rangle = -\langle x_-\rangle$ и значения не зависят друг от друга. Вычислите спектральную плотность для $x(t)$.

2.6 Одномерный случайный процесс $x(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению $dx/dt = Ax - x^3 q(t)$, в котором A — константа, $q(t)$ — гауссовский белый шум $\langle q(t)\rangle = 0$, $\langle q(t)q(t')\rangle = D\delta(t-t')$. Вычислите плотность вероятности для x в стационарном состоянии.

2.7 Рассмотрите комплексный случайный процесс, заданный уравнением $z(t) = a\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\xi(t) + b\,|\xi(t)|^2$, в котором a, b, ω_0 — заданные числа, $\xi(t)$ — комплексный гауссовский стационарный эргодический случайный процесс со спектральной плотностью $S(\omega)$. Вычислите спектральную плотность для $z(t)$. Является ли $z(t)$ стационарным процессом в широком смысле? Является ли $z(t)$ эргодическим процессом?

2.8 Определенный дискретный случайный процесс $x(t)$ принимает только одно из трех возможных значений x_1, x_2, x_3, и значение изменяется за время T. Условные вероятности $\mathscr{P}(x_i, t+T|x_j, t; x_k, t-T)$ приводятся в следующей таблице:

	$j=1,\ k=2$	$j=1,\ k=3$	$j=2,\ k=1$	$j=2,\ k=3$	$j=3,\ k=1$	$j=3,\ k=2$
$i=1$	0	0	0	1/2	0	1/2
$i=2$	1/2	1/2	0	0	1	1/2
$i=3$	1/2	1/2	1	1/2	0	0

Покажите в явном виде, рассматривая последовательно два различных множества исходных вероятностей $p_2(x_j,t;x_k,t-T)$, а именно

	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$j=1$	0	1/6	1/6
$j=2$	1/6	0	1/6
$j=3$	1/6	1/6	0

и

	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$j=1$	0	1/12	1/3
$j=2$	1/4	0	1/6
$j=3$	1/6	0	0

,

что уравнение

$$p(x_i,t+T)=\sum_j \mathscr{P}(x_i,t+T|x_j,t)\,p(x_j,t)$$

справедливо в обоих случаях, и $\mathscr{P}(x_j,t+T|x_j,t)$ не является вероятностью перехода.

2.9 Следующий комплексный случайный процесс иногда используется для того, чтобы представить поле идеального двухмодового лазера в виде:

$$z(t)=a\exp\{-i[\omega_1 t+\phi_1(t)]\}+a\exp\{-i[\omega_2 t+\phi_2(t)]\}.$$

Здесь a — комплексная константа, ω_1 и ω_2 — фиксированные частоты, а две фазы $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ представляют собой независимые процессы Винера; т.е. каждая из них совершает одномерное случайное блуждание с постоянной диффузии D. Вычислите спектральную плотность случайного процесса $|z(t)|^2$. Является ли $|z(t)|^2$ стационарным процессом в широком смысле?

2.10 Стационарный эргодический комплексный гауссовский случайный процесс $z(t)$ с нулевым средним имеет нормированную спектральную плотность $\mathfrak{s}_1(\omega)$. Найдите нормированную спектральную плотность $\mathfrak{s}_1(\omega)$ случайного процесса $|z(t)|^2$ и получите соотношение между среднеквадратичным шириной $\langle(\Delta\omega)^2\rangle$ для $\mathfrak{s}_1(\omega)$ и $\mathfrak{s}_2(\omega)$.

$$\left(\text{Используйте определение } \langle\omega^n\rangle_{s_1}\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^n s_1(\omega)\,d\omega\right).$$

Покажите, что $\mathfrak{s}_2(\omega)$ симметрична относительно $\omega=0$ независимо от формы $\mathfrak{s}_1(\omega)$.

2.11 Комплексный стационарный эргодический случайный процесс с нулевым средним имеет нормированную автокорреляционную функцию $\gamma(t)$. Покажите, что для любых трех моментов времени t_1, t_2 и t_3,

$$|\gamma(t_3-t_2)-\gamma(t_1-t_2)\gamma(t_3-t_1)|^2\leqslant\left[1-|\gamma(t_1-t_2)|^2\right]\left[1-|\gamma(t_3-t_1)|^2\right],$$

и для любого τ

$$|\gamma(\tau)|^2+|\gamma(2\tau)|^2+|\gamma(3\tau)|^2\leqslant 1+2\mathrm{Re}\left[\gamma(\tau)\gamma(2\tau)\gamma^*(3\tau)\right],$$

где Re означает действительную часть.

2.12 Рассмотрите комплексный стационарный гауссовский случайный процесс $z(t)$ с нулевым средним. Пусть

$$z_T(t)=\begin{cases} z(t), & \text{когда } |t|\leqslant T,\\ 0, & \text{когда } |t|>T,\end{cases}$$

и пусть $\xi(\nu,T)$ — обратный фурье-образ $z_T(t)$. Далее положим

$$S_T(\nu)=\frac{\xi^*(\nu,T)\xi(\nu,T)}{2T},\quad S(\nu)=\lim_{T\to\infty}\langle S_T(\nu)\rangle.$$

Покажите, что на любой частоте ν, для которой $S(\nu)\neq 0$, дисперсия процесса $S_T(\nu)$ не стремится к нулю при $T\to\infty$. Каков смысл этого результата в задаче определения функции спектральной плотности процесса на основе одной из его выборочных функций?

Глава 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

3.1. Комплексный аналитический сигнал[1]

В оптике основные переменные, такие, так плотности тока и заряда, или электрические и магнитные поля, являются функциями положения и времени. Тем не менее, при изучении корреляционных свойств целесообразно представлять эти величины в виде комплексных функций. Это представление является естественным обобщением того, которое часто используется при рассмотрении действительных монохроматических сигналов и, как мы увидим позже (см. разд. 11.12), с аналогичными понятиями сталкиваются при описании электромагнитного поля в рамках квантовой теории поля.

В этом разделе мы обсудим комплексное представление для детерминированных функций и рассмотрим некоторые его основные свойства. В последних главах мы используем это представление при рассмотрении случайных функций.

3.1.1. Определение и основные свойства аналитических сигналов

Пусть $x(t)$ будет действительной функцией действительного переменного t, определенной на интервале $-\infty < t < \infty$, и предположим, что она квадратично интегрируема, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt < \infty. \tag{3.1.1}$$

Можно представить $x(t)$ в виде интеграла Фурье

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}\,d\nu, \tag{3.1.2а}$$

где

$$\tilde{x}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{2\pi i\nu t}\,dt. \tag{3.1.2б}$$

Поскольку функция $x(t)$ действительная, спектральные амплитуды (в общем случае, комплексные) $\tilde{x}(\nu)$ удовлетворяют соотношению

$$\tilde{x}(-\nu) = \tilde{x}^*(\nu). \tag{3.1.3}$$

Из соотношения (3.1.3) видно, что компоненты с отрицательными частотами ($\nu < 0$) не несут никакой информации, которая уже содержится в компонентах с положительными частотами ($\nu > 0$) и, следовательно, без потери общности, мы будем рассматривать вместо $x(t)$ функцию $z(t)$, которая получена на основе интеграла Фурье (3.1.2а) без учета отрицательных частотных компонент, а именно:

$$\tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}(\nu)\,\mathrm{e}^{2\pi i\nu t}\,d\nu, \tag{3.1.4}$$

[1] Многие понятия этой главы отражены, например, в статье (*Денисюк, 1963) и в книгах (*Цыпкин, 1963; *Лэкс, 1974; *Микаэлян, 1990) — *ред. пер.*

где

$$\tilde{z}(\nu) = \begin{cases} \tilde{x}(\nu) & \text{при } \nu \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } \nu < 0. \end{cases} \tag{3.1.4а}$$

Функция $z(t)$, определяемая уравнением (3.1.4а), представляет собой комплексную функцию действительного переменного t. По причинам, которые вскоре станут очевидными, эту функцию называют ***комплексным аналитическим сигналом***[1] действительной переменной t.

Поскольку мы предположили, что $x(t)$ — квадратично-интегрируемая функция, ее фурье-образ $\tilde{x}(\nu)$, согласно теореме Планшереля, также является квадратично-интегрируемой функцией. Тогда из (3.1.4) следует, что тоже самое справедливо и для $z(t)$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 \, dt < \infty. \tag{3.1.5}$$

При помощи уравнения (3.1.3) $x(t)$ можно представить в другом виде

$$x(t) = \int_0^{\infty} a(\nu) \cos\left[\varphi(\nu) - 2\pi\nu t\right] d\nu, \tag{3.1.6}$$

где

$$a(\nu)\, e^{i\varphi(\nu)} = 2\tilde{z}(\nu), \quad [a(\nu),\ \varphi(\nu) \text{ — действительные функции}], \tag{3.1.6а}$$

и аналитический сигнал $z(t)$ можно выразить в виде

$$z(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} a(\nu)\, e^{i[\varphi(\nu) - 2\pi\nu t]} \, d\nu. \tag{3.1.7}$$

Переход от выражения (3.1.6) к (3.1.7) показывает, что комплексный аналитический сигнал представляет собой естественное обобщение комплексного представления, которое часто используется, когда имеют дело с действительными монохроматическими волнами.

Из выражений (3.1.6) и (3.1.7) видно, что

$$x(t) = z(t) + z^*(t), \tag{3.1.8а}$$

т.е.

$$x(t) = 2\mathrm{Re}\, z(t), \tag{3.1.8б}$$

где Re означает действительную часть. Согласно (3.1.8б) действительная часть комплексного аналитического сигнала $z(t)$ составляет одну вторую действительного сигнала $x(t)$, на основе которого был получен сигнал $z(t)$.

Представление аналитического сигнала имеет много интересных свойств. Его наиболее важной особенностью является возможность распространить определение $z(t)$ на комплексные аргументы. Введем комплексную переменную

$$w = t + i\, s, \quad (t, s - \text{действительные}) \tag{3.1.9}$$

и попытаемся аналитически продолжить $z(t)$ из действительной оси t на комплексную плоскость w, используя (3.1.4). Тогда по крайней мере формально, имеем

$$z(w) = \int_0^{\infty} f(\nu, w) \, d\nu, \tag{3.1.10}$$

[1] Это понятие принадлежит Габору (Gabor, 1946). Оригинальное определение Габора отличается от нашего наличием перед интегралом (3.1.4) множителя 2. Для наших целей данное определение является более предпочтительным, поскольку, как мы увидим позже (см. разд. 11.11), это приводит к более элегантному соответствию между классической и квантовой теориями оптической когерентности.

Некоторые приложения аналитических сигналов к задачам техники связи обсуждались Габором (Gabor, 1946), Вилле (Ville 1949, 1950) и Освальдом (Oswald, 1956).

где

$$f(\nu, w) = \tilde{x}(\nu)\, e^{-i2\pi\nu w}. \tag{3.1.11}$$

Мы видим, что для каждого значения ν подынтегральное выражение $f(\nu, w)$ в формуле (3.1.10) представляет собой полностью аналитическую функцию от w, т.е. является аналитической и регулярной на всей комплексной w-плоскости. В соответствии с хорошо известной математической теоремой, сумма (в соответствующем пределе — интеграл) таких функций представляет собой аналитическую и регулярную функцию при условии, что выполняются требования на непрерывность и сходимость[1]. Из выражений (3.1.10) и (3.1.11) мы видим, что интеграл (3.1.10) будет сходится, если $s < 0$. Этот эвристический аргумент предполагает, что если $\tilde{x}(\nu)$ ведет себя достаточно хорошо, то $z(w)$ *есть аналитическая и регулярная функция от w в нижней полуплоскости.* Или, используя несколько другой подход, *функция $z(t)$ (3.1.4) представляет собой граничное значение функции на действительной оси t, которая является аналитической и регулярной в нижней части комплексной w-плоскости.*

Можно показать, что только что полученный результат справедлив при более общих условиях по сравнению с нашим эвристическим подходом. Фактически требование квадратичной интегрируемости (3.1.5) является и необходимым, и достаточным условием для его справедливости[2].

Согласно соотношению (3.1.8б) действительная часть $z(t)$ равна $\frac{1}{2}x(t)$. Обозначим мнимую часть $z(t)$ через $\frac{1}{2}y(t)$, т.е.

$$z(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + i\, y(t)\right], \tag{3.1.12}$$

где $y(t)$ — также действительная функция. Можно показать, что свойство аналитичности $z(t)$, которое мы только что обсудили, предполагает, что $x(t)$ и $y(t)$ образуют *пару относительно преобразований Гильберта* (известную также как сопряженная пара), т.е.

$$y(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t')}{t' - t}\, dt', \tag{3.1.13а}$$

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t')}{t' - t}\, dt', \tag{3.1.13б}$$

где P означает главное значение Коши, взятое при $t' = t$. Для точного вывода этих соотношений следует обратиться к другому источнику (Tichmarsh, 1948, с. 128, теор. 95 и с. 25, теор. 93). Однако если предположить, что $x(t)$ не только квадратично интегрируема, но и непрерывна на действительной временно́й оси $(-\infty < t < \infty)$, то можно получить простой вывод этих соотношений, используя распространенную в теории аналитических функций интегральную формулу Коши. Эта теорема утверждает (Copson, 1935, с. 66 и с. 134), что если функция $z(w)$ комплексной переменной $w = t + is$, (t, s — действительные) является аналитической и регулярной в замкнутой области D w-плоскости и является непрерывной на границе C области D, то (Morse and Feshbach, 1953, с. 368)

$$\oint_c \frac{z(w)}{w - w_0}\, dw = 2\pi i\, z(w_0), \quad \text{если } w_0 \in D, \tag{3.1.14а}$$

$$\oint_c \frac{z(w)}{w - w_0}\, dw = \pi i\, z(w_0), \quad \text{если } w_0 \in C, \tag{3.1.14б}$$

$$\oint_c \frac{z(w)}{w - w_0}\, dw = 0 \quad \text{в других случаях}, \tag{3.1.14в}$$

где интегрирование выполняется вдоль кривой C, против часовой стрелки. В случае, когда w_0 лежит на границе кривой C, интеграл следует рассматривать в смысле главного значения Коши.

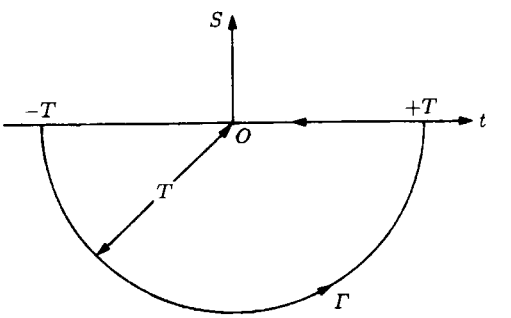


Рис. 3.1. Обозначения к формуле (3.1.15). $w = t + is$

Применим эту теорему к аналитическому сигналу и возьмем в качестве контура интегрирования C кривую, состоящую из отрезка $-T < t < T$ на действительной оси и

[1] Достаточность требований обсуждается, например, в книге (Copson, 1935, с. 110).

[2] ср. (Paley and Wiener, 1934, с. 8, теор. V). Этот результат тесно связан с так называемой *теоремой Тичмарша*, блестящий вывод которой дается в книге (Nussenzveig, 1972, с. 27–28).

полукруга с радиусом T в нижней полуплоскости, с центром в нулевой точке (см. рис. 3.1). Пусть $w_0 = t$ будет точкой на сегменте действительной оси в интервале $-T < t < T$. Тогда из формулы (3.1.14б) следует, что в пределе при $T \to \infty$

$$P\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{z(t')}{t'-t}\,dt' + \lim_{T\to\infty}\int_{\Gamma} \frac{z(w)}{w-t}\,dw = \pi i\, z(t). \tag{3.1.15}$$

Из формул (3.1.10) и (3.1.11) можно вывести, используя квадратичную интегрируемость $\tilde{x}(\nu)$, что

$$\lim_{T\to\infty}\int_{\Gamma} \frac{z(w)}{w-t}\,dw = 0 \tag{3.1.16}$$

и, следовательно, уравнение (3.1.15) означает, что

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z(t')}{t'-t}\,dt' = -\pi i\, z(t). \tag{3.1.17}$$

Подставляя (3.1.12) в эту формулу и приравнивая действительные и мнимые части, получаем соотношения преобразований Гильберта (3.1.13).

Соотношения вида (3.1.13), в которых вместо времени стоит частота, играют важную роль в физике и называются *дисперсионными соотношениями*. Эта терминология возникла в связи с тем, что эти соотношения впервые появляются в теории дисперсии света в материальных средах. Дисперсионные соотношения обычно появляются в физических теориях как следствие *причинности* (Nussenzveig, 1972, гл. 1). Если рассматривать линейную систему, отклик которой характеризуется функцией $K(t)$ (например, диэлектрическая восприимчивость линейной среды на случайное электрическое поле), то причинность требует, чтобы $K(t) \equiv 0$ при $t < 0$ (отклик не возникает до того, как на вход поступил сигнал). Можно показать, что это условие накладывает определенные соотношения между действительными и мнимыми частями фурье-образа $k(\nu)$ функции $K(t)$, среди которых простейшими являются преобразования Гильберта. В данной задаче появление соотношений такого вида не связано с причинностью, потому что они рассматриваются во временно́й области, а не в частотной. Таким образом, *математическая* природа этих соотношений одинакова в обоих случаях. Они возникают из того факта, что фурье-образ $K(t)$ от $k(\nu)$ и фурье-образ $\tilde{z}(\nu)$ от $z(t)$ [см. (3.1.4а)] стремятся тождественно к нулю для отрицательных значений их аргументов.

Иногда бывает полезным выразить переход от действительного сигнала $x(t)$ к связанному с ним комплексному аналитическому сигналу $z(t)$ на основе хорошо известных сингулярных функций теории поля, а именно, на основе так называемой неотрицательной частотной части дельта-функции Дирака[1], определяемой символически на основе выражения

$$\delta_{-}(t) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi i\nu t}\,d\nu = \tag{3.1.18а}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\delta(t) - \frac{1}{\pi i} P\frac{1}{t}\right], \tag{3.1.18б}$$

где P, как и раньше, означает главное значение Коши. Из уравнений (3.1.18а) и (3.1.2) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t')\delta_{-}(t'-t)\,dt' = \int_{-\infty}^{\infty} dt' x(t') \int_0^{\infty} d\nu\, \mathrm{e}^{2\pi i\nu(t'-t)} =$$

$$= \int_0^{\infty} d\nu\, \mathrm{e}^{-2\pi i\nu t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' x(t')\, \mathrm{e}^{2\pi i\nu t'} = \int_0^{\infty} \tilde{x}(\nu)\, \mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}\,d\nu. \tag{3.1.19}$$

Согласно (3.1.4), правая часть выражения (3.1.19) в точности представляет собой аналитический сигнал $z(t)$, связанный с $x(t)$. Таким образом,

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\delta_{-}(t'-t)\,dt'. \tag{3.1.20}$$

[1] Эта терминология возникает из следующего разложения дельта-функции Дирака: $\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi i\nu t)\,d\nu = \delta_{-} + \delta_{+}$, где $\delta_{-} = \int_{-\infty}^{0} \exp(-2\pi i t)\,d\nu$ и $\delta_{+} = \int_0^{\infty} \exp(2\pi i t)\,d\nu$. Для более полного обсуждения этих сингулярных функций см. (Heitler, 1954, разд. 8), см. также приложение А4.1.

Из этой формулы видно, что $z(t)$ есть линейное преобразование от $x(t)$, причем ядро преобразования представляет собой сингулярную функцию δ_-. Если воспользоваться представлением (3.1.18б) δ_--функции, то выражение (3.1.20) означает, что

$$z(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + \frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t')}{t'-t}\, dt'\right], \tag{3.1.21}$$

в соответствии с формулами (3.1.12) и (3.1.13).

Наконец, отметим следующие соотношения, которые могут быть легко получены с использованием формул (3.1.2а), (3.1.4), (3.1.12) и (3.1.13):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)\, dt = 2\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2\, dt = 2\int_0^{\infty} |\tilde{z}(\nu)|^2\, d\nu, \tag{3.1.22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t)\, dt = 0. \tag{3.1.23}$$

3.1.2. Квази-монохроматические сигналы и их огибающие

Покажем, что аналитический сигнал дает недвусмысленное определение для огибающей действительного осциллирующего сигнала.

На практике часто сталкиваются с действительными сигналами, фурье-образы которых (фурье-спектры) заключены в частотном интервале

$$\nu_0 - \frac{1}{2}\Delta\nu \leqslant |\nu| \leqslant \nu_0 + \frac{1}{2}\Delta\nu \quad (\nu_0 > 0, \Delta\nu > 0) \tag{3.1.24}$$

в окрестности частоты $\pm\nu_0$, где

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} \ll 1. \tag{3.1.25}$$

Другими словами, если представить $x(t)$ в виде интеграла Фурье [см.(3.1.2а)], то $|\tilde{x}(\nu)|$ равна нулю за пределами области, определенной неравенствами (3.1.24) (см. рис. 3.2). Говорят, что такой сигнал является *квази-монохроматическим*.

Согласно формулам (3.1.4) и (3.1.4а) аналитический сигнал, связанный с $x(t)$, можно выразить в виде

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}(\nu)\, e^{-2\pi i\nu t}\, d\nu, \tag{3.1.26}$$

где

$$\tilde{z}(\nu) = \begin{cases} \tilde{x}(\nu) & \text{при } \nu \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } \nu < 0. \end{cases} \tag{3.1.27}$$

Для квази-монохроматического сигнала, спектральное распределение амплитуды которого показано на рис. 3.2*а*, $|\tilde{z}(\nu)|$ будет иметь форму, изображенную на рис. 3.2*б*.

Если бы сигнал был *строго монохроматическим* с частотой ν_0, то имели бы

$$x(t) = \xi_0\, e^{-2\pi i\nu_0 t} + \xi_0^*\, e^{2\pi i\nu_0 t} = \tag{3.1.28а}$$

$$= 2\mathrm{Re}\,(\xi_0\, e^{-2\pi i\nu_0 t}) = \tag{3.1.28б}$$

$$= A_0 \cos(\Phi_0 - 2\pi\nu_0 t), \tag{3.1.28в}$$

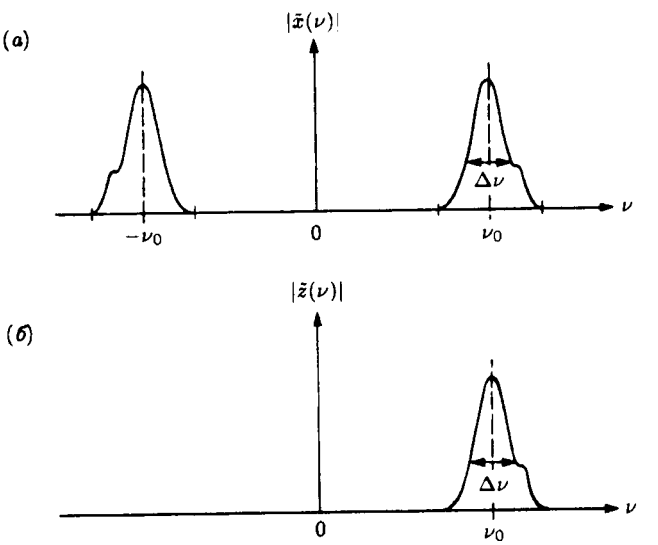


Рис. 3.2. Пример: *а* — спектра Фурье квази-монохроматического сигнала $x(t)$ и *б* — соответствующего ему аналитического сигнала $z(t)$. Показаны только абсолютные значения спектра Фурье

где A_0 и Φ_0 — действительные константы, причем

$$\xi_0 = \frac{1}{2} A_0 \, e^{i\Phi_0}. \tag{3.1.29}$$

Очевидно, в этом случае спектр Фурье от $x(t)$

$$\xi(\nu) = \xi_0^* \delta(\nu + \nu_0) + \xi_0 \delta(\nu - \nu_0), \tag{3.1.30}$$

где δ означает дельта-функцию Дирака, а аналитический сигнал, связанный с монохроматическим сигналом (3.1.28), равен

$$z(t) = \xi_0 \, e^{-2\pi i \nu_0 t} = \frac{1}{2} A_0 \, e^{i[\Phi_0 - 2\pi\nu_0 t]}. \tag{3.1.31}$$

Если вместо строго монохроматического сигнал является квази-монохроматическим, со спектром Фурье, занимающим малую частотную область, заданную неравенствами (3.1.24), то можно представить сигнал в виде уравнения, схожего с (3.1.28с), а именно

$$x(t) = A(t) \cos [\Phi(t) - 2\pi\nu_0 t], \tag{3.1.32}$$

где «амплитуда» A и «фаза» Φ больше не являются константами и представляют собой функции времени. Несмотря на то, что представление (3.1.32) часто записывают в таком виде, очевидно, что оно не является единственным, ибо существует много способов выбора двух функций $A(t)$ и $\Phi(t)$, так чтобы правая часть уравнения (3.1.32) была равна $x(t)$. Однако можно однозначно определить A и Φ (удовлетворяя условию $0 \leqslant \Phi(t) < 2\pi$), если потребовать, чтобы аналитический сигнал $z(t)$, связанный с $x(t)$, был задан в виде представления, аналогичного (3.1.31), а именно

$$z(t) = \frac{1}{2} [x(t) + iy(t)] = \frac{1}{2} A_0 \, e^{i[\Phi(t) - 2\pi\nu_0 t]}. \tag{3.1.33}$$

Согласно соотношению (3.1.13а) имеем

$$y(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t')}{t' - t} \, dt' \tag{3.1.34}$$

и согласно выражениям (3.1.33) и (3.1.12)

$$y(t) = A(t) \sin [\Phi(t) - 2\pi\nu_0 t]. \tag{3.1.35}$$

Если функция $x(t)$ известна, то $y(t)$ можно определить из (3.1.34), и тогда из формул (3.1.32), (3.1.35) и (3.1.33) получим

$$A(t) = \left[x^2(t) + y^2(t)\right]^{1/2} = 2\,|z(t)|, \tag{3.1.36а}$$

$$\Phi(t) = 2\pi\nu_0 t + \chi(t), \tag{3.1.36б}$$

где

$$\cos\chi(t) = \frac{1}{2} \frac{x(t)}{|z(t)|}, \quad \sin\chi(t) = \frac{1}{2} \frac{y(t)}{|z(t)|}. \tag{3.1.36в}$$

Из (3.1.36а) видно, что $A(t)$ не зависит от точного выбора частоты ν_0, и выражения (3.1.36б) и (3.1.36в) означают, что $\Phi(t)$ зависит от ν_0 только через положительный множитель $2\pi\nu_0 t$.

Рассмотрим более внимательно поведение $A(t)$ и $\Phi(t)$. Согласно формулам (3.1.33) и (3.1.26)

$$\frac{1}{2} A(t) \, e^{i\Phi(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\nu) \, e^{-2\pi i(\nu - \nu_0)t} \, d\nu. \tag{3.1.37}$$

Если положить

$$\nu - \nu_0 = \mu \tag{3.1.38}$$

и вспомнить, что согласно (3.1.27) $\tilde{z}(\nu) = 0$ при $\nu < 0$, то уравнение (3.1.37) означает, что

$$\frac{1}{2}A(t)\,e^{i\Phi(t)} = \int_{-\nu_0}^{\infty} \zeta(\mu)\,e^{-2\pi i\mu t}\,d\mu, \tag{3.1.39}$$

где

$$\zeta(\mu) = \tilde{z}(\nu_0 + \mu), \quad \mu \geqslant -\nu_0. \tag{3.1.40}$$

Таким образом, функция $\zeta(\mu)$ имеет тот же вид, что и $\tilde{z}(\nu)$, но смещена на величину ν_0 в отрицательном направлении ν (см. рис. 3.3).

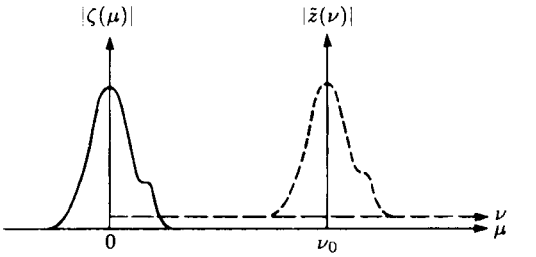


Рис. 3.3. Абсолютное значение смещенного фурье-спектра $\zeta(\mu) = \tilde{z}(\nu_0 + \mu)$

Поскольку спектральные амплитуды $|\tilde{z}(\nu)|$ имеют отличные от нуля значения только в области, определяемой неравенствами (3.1.24), $|\zeta(\mu)|$ будет иметь ненулевые значения только для μ в области

$$-\frac{1}{2}\Delta\nu \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{2}\Delta\nu. \tag{3.1.41}$$

То есть интеграл в правой части (3.1.39) содержит только низко-частотные компоненты. Более того, ввиду предположения о квази-монохроматичности [см. неравенство (3.1.24)], из уравнения (3.1.37) следует, что $A(t)$ и $\Phi(t)$ будут изменяться более медленно со временем t, чем $\cos 2\pi\nu_0 t$ и $\sin 2\pi\nu_0 t$. Фактически $A(t)$ и $\Phi(t)$ будут постоянными на любом временно́м интервале, для которого член $2\pi\mu t$ ($\frac{1}{2}\Delta\nu \leqslant \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{2}\Delta\nu$) в экспоненте в (3.1.39) мал по сравнению с 2π, т.е. на любом интервале длительности Δt

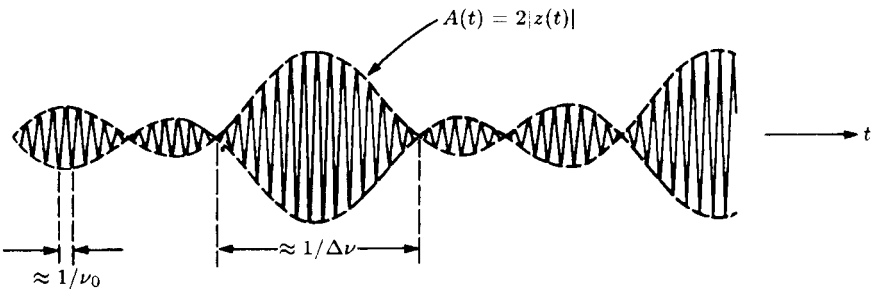


Рис. 3.4. Поведение квази-монохроматического сигнала $x(t)$ и его действительной огибающей $A(t)$

$$\Delta t \ll \frac{1}{\Delta\nu}. \tag{3.1.42}$$

Таким образом, два действительных сигнала, определяемых выражениями (3.1.32) и (3.1.35), представляют собой почти периодические функции от t с частотой ν_0, промодулированные по амплитуде и фазе медленно меняющимися функциями $A(t)$ и $\Phi(t)$. Модуляция становится пренебрежимо малой на любом временно́м интервале, который значительно меньше ширины $1/\Delta\nu$ (см. рис. 3.4). Следовательно, из (3.1.32), (3.1.35) и (3.1.33) вытекают следующие соотношения:

$$\widetilde{x^2(t)} = \widetilde{y^2(t)} = \frac{1}{2}A^2(t) = 2\,|z(t)|^2, \tag{3.1.43}$$

где волнистыми линиями обозначено усреднение по короткому временно́му интервалу, т.е. среднее на интервале, длительность которого меньше, чем $1/\Delta\nu$, но больше $1/\nu_0$.

Так как $A(t)$ и $\Phi(t)$ остаются постоянными на любом временно́м интервале, который много меньше $1/\Delta\nu$, то из (3.1.32) и (3.1.35) следует, что

$$y(t) \approx -x(t - 1/4\nu_0), \tag{3.1.44}$$

а также что

$$y(t) \approx \frac{1}{2\pi\nu_0}\frac{dx(t)}{dt}, \tag{3.1.45а}$$

$$x(t) \approx \frac{1}{2\pi\nu_0}\frac{dy(t)}{dt}. \tag{3.1.45б}$$

Из рис. 3.4 и формулы (3.1.33) очевидно, что функцию

$$A(t)\,e^{i\Phi(t)} = 2z(t)\,e^{2\pi i\nu_0 t} \tag{3.1.46}$$

можно рассматривать как представление *комплексной огибающей*[1] действительного квази-монохроматического сигнала $x(t)$. Огибающая медленно изменяется с течением временем t по сравнению с периодическим множителем.

Существует несколько интересных теорем относительно огибающей, которую мы только что определили. Предположим, что действительный сигнал $x(t)$ строго ограничен в частотной области $\nu_0 - \frac{1}{2}\alpha \leqslant |\nu| \leqslant \nu_0 + \frac{1}{2}\alpha$, т.е. фурье-спектр $\tilde{x}(\nu)$ сигнала $x(t)$ равен нулю за пределами этой области. Теперь рассмотрим фурье-спектр $\sigma(\nu)$ квадрата амплитуды $A^2(t) = 4\,|z(t)|^2$ комплексной огибающей $x(t)$. Она определяется формулой

$$\sigma(\nu) = 4\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2\, e^{2\pi i\nu t}\, dt \tag{3.1.47}$$

или, с учетом (3.1.4) и теоремы свертки для преобразования Фурье,

$$\sigma(\nu) = 4\int_{0}^{\infty} \tilde{x}^*(\nu')\tilde{x}(\nu+\nu')\, d\nu'. \tag{3.1.48}$$

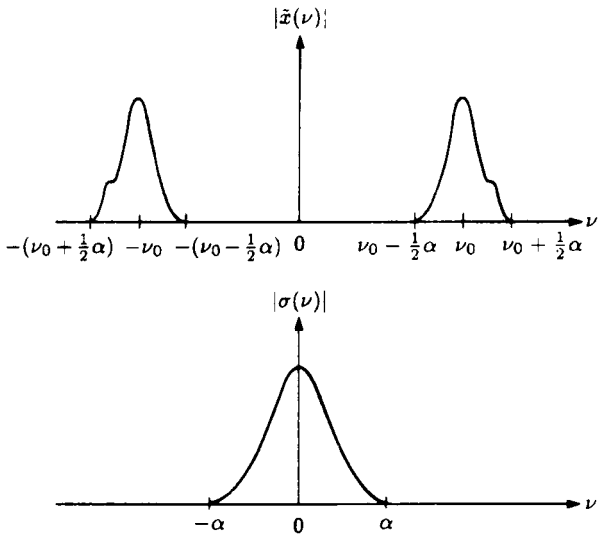


Рис. 3.5. К выводу теоремы Дугунди. Если сигнал ограничен в области $\nu_0 - \frac{1}{2}\alpha \leqslant |\nu| \leqslant \nu_0 + \frac{1}{2}\alpha$, то его квадрат амплитуды $A^2(t) = 4\,|z(t)|^2$ должен быть ограничен в области $-\alpha \leqslant \nu \leqslant \alpha$. Член $\tilde{x}(\nu)$ — спектр Фурье от $x(t)$, и $\sigma(\nu)$ — спектр Фурье от $A^2(t)$

Так как $\tilde{x}(\nu)$ стремится к нулю за пределами области, определяемой соотношением (3.1.24), то из (3.1.48) следует, что $\sigma(\nu)$ будет стремиться к нулю при $|\nu| > \alpha$. Таким образом, мы доказали следующую *теорему* Дугунди (Dugundji, 1958), которая иллюстрируется на рис. 3.5: *если сигнал $x(t)$ строго ограничен в области $\nu_0 - \frac{1}{2}\alpha \leqslant |\nu| \leqslant \nu_0 + \frac{1}{2}\alpha$, то квадрат амплитуды $A^2(t)$ его комплексной огибающей ограничен областью $-\alpha \leqslant \nu \leqslant \alpha$.*

Как мы уже отмечали, представление огибающей (3.1.32) действительного квази-монохроматического сигнала не является единственным. Поэтому возникает вопрос относительно свойств, которые отличают определение, основанное на аналитическом сигнале, от других возможных определений. Мандель (Mandel, 1967) ответил на этот вопрос в рамках стационарных ансамблей действительных, квази-монохроматических сигналов. Его результат можно сформулировать следующим образом. Предположим, что с каждым членом ансамбля $x(t)$ мы связываем другой сигнал $y(t)$, который представляет собой линейное преобразование сигнала $x(t)$ с действительным ядром $K(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-t')\,x(t')\,dt'. \tag{3.1.49}$$

Теперь определим комплексную функцию

$$z(t) = \frac{1}{2}\,[x(t) + iy(t)] \tag{3.1.50}$$

и положим

$$z(t) = z_0(t)\,e^{-2\pi i\nu_0 t}. \tag{3.1.51}$$

Тогда среднее

$$\rho = \left\langle \left| \frac{dz_0(t)}{dt} \right|^2 \right\rangle \tag{3.1.52}$$

[1] Райс (Rice 1944, разд. 3.7) дал другое формальное определение огибающей для определенного класса узких сигналов. Дугунди (Dugundji, 1958) показал, что всякий раз, когда применимо определение Райса, оно эквивалентно данному определению.

будет иметь *минимум* при условии для среднего квадратичного отклонения

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\nu - \nu_0)^2 S(\nu)\, d\nu = \text{минимум},$$

где

$$\nu_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \nu S(\nu)\, d\nu}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)\, d\nu}, \tag{3.1.53}$$

и $S(\nu)$ представляет собой спектр мощности (см. разд. 2.4.1) для $z(t)$, так что минимум достигается, когда ядро $K(t)$ преобразования (3.1.49) становится ядром преобразования Гильберта, т.е. когда $z(t)$ — аналитический сигнал, связанный с действительным сигналом $x(t)$. Этот результат означает, что *из всех возможных огибающих, определенных через линейные преобразования действительного сигнала, только одна огибающая, определенная на основе аналитического сигнала, имеет в среднеквадратичном смысле наименьшую скорость флуктуаций комплексной огибающей.*

3.1.3. Соотношения между корреляционными функциями действительного и связанного с ним комплексного аналитических случайных процессов

Выведем ряд полезных соотношений для функций взаимной корреляции действительных случайных процессов, сопряженных процессов и связанных с ними комплексных аналитических процессов.

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ представляют собой два действительных совместно стационарных, в широком смысле, случайных процесса с нулевым средним и пусть $z_1(t)$ и $z_2(t)$ представляют собой связанные с ними аналитические сигналы. Поскольку выборочные функции стационарного случайного процесса не являются квадратично интегрируемыми (см. разд. 2.4), переход от $x_j(t)$ к $z_j(t)$ $(j = 1, 2)$ следует интерпретировать с некоторым предостережением. Во избежание математической сложности будем формально определять аналитические сигналы тем же способом, как это делалось в разд. 3.1.1; однако точный вывод формул может быть получен только в рамках теории обобщенных функций. Таким образом, если записать

$$x_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}_j(\nu)\, \mathrm{e}^{-2\pi i \nu t}\, d\nu, \quad (j = 1, 2), \tag{3.1.54}$$

то

$$z_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}_j(\nu)\, \mathrm{e}^{-2\pi i \nu t}\, d\nu, \tag{3.1.55}$$

где

$$\tilde{z}_j(\nu) = \begin{cases} \tilde{x}_j(\nu) & \text{при } \nu \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } \nu < 0. \end{cases} \tag{3.1.56}$$

Более того,

$$z_j = \frac{1}{2}\left[x_j(t) + i y_j(t)\right], \quad (j = 1, 2), \tag{3.1.57}$$

где $x_j(t)$ и $y_j(t)$ — действительные функции, которые связаны преобразованиями Гильберта [см. (3.1.13)].

Так как по предположению $x_j(t)$ имеет нулевое среднее, т.е.

$$\langle x_j(t) \rangle = 0, \quad (j = 1, 2), \tag{3.1.58}$$

$y_j(t)$ и $z_j(t)$ представляют собой однородные линейные преобразования $x_j(t)$, то они также имеют нулевые средние, т.е.

$$\langle y_j(t) \rangle = 0, \quad (j = 1, 2), \tag{3.1.59}$$

$$\langle z_j(t) \rangle = 0, \quad (j = 1, 2). \tag{3.1.60}$$

Так же, как и $x_j(t)$, процессы $y_j(t)$ и $z_j(t)$ являются стационарными, по крайней мере, в широком смысле.

Теперь рассмотрим функцию взаимной корреляции

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle z_1^*(t)\, z_2(t+\tau)\rangle \tag{3.1.61}$$

двух комплексных процессов. Согласно обобщенной теореме Винера — Хинчина [см. (2.4.38)]

$$\Gamma_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\nu)\, \mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\, d\nu, \tag{3.1.62}$$

где $W_{12}(\nu)$ — взаимная спектральная плотность двух процессов, определяемая формулой

$$\langle \tilde{z}_1^*(\nu)\, \tilde{z}_2(\nu')\rangle = W_{12}(\nu)\delta(\nu-\nu'). \tag{3.1.63}$$

Согласно (3.1.56) $\tilde{z}_j(t) = 0$ $(j = 1, 2)$ при $\nu < 0$ и, следовательно, уравнение (3.1.63) означает, что

$$W_{12}(\nu) = 0 \quad \text{при } \nu < 0. \tag{3.1.64}$$

Следовательно, уравнение (3.1.62) можно записать в виде

$$\Gamma_{12}(\tau) = \int_{0}^{\infty} W_{12}(\nu)\, \mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\, d\nu. \tag{3.1.65}$$

Поскольку интегрирование в правой части распространяется только на положительные частоты, то $\Gamma_{12}(\tau)$ — аналитический сигнал. Если предположить, что $\Gamma_{12}(\tau)$ является квадратично интегрируемой функцией от τ и использовать основное свойство аналитических сигналов (3.1.13), то получаем следующую теорему:

Теорема I: *Если $z_1(t)$ и $z_2(t)$ представляют собой комплексные аналитические сигналы двух действительных, совместно стационарных, в широком смысле, случайных процессов с нулевыми средними, то функция взаимной корреляции $\Gamma_{12}(\tau) = \langle z_1^*(t) z_2(t+\tau)\rangle$ (предполагаемая квадратично интегрируемой) также представляет собой аналитический сигнал, его действительная $\Gamma_{12}^{(\mathrm{r})}(\tau)$ и мнимая $\Gamma_{12}^{(\mathrm{i})}(\tau)$ части, $[\Gamma_{12}(\tau) = \Gamma_{12}^{(\mathrm{r})}(\tau) + i\Gamma_{12}^{(\mathrm{i})}(\tau)]$, связаны прямым и обратным преобразованиями Гильберта, т.е.*

$$\Gamma_{12}^{(\mathrm{i})}(\tau) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_{12}^{(\mathrm{r})}(\tau')}{\tau'-\tau}\, d\tau', \tag{3.1.66а}$$

$$\Gamma_{12}^{(\mathrm{r})}(\tau) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_{12}^{(\mathrm{i})}(\tau')}{\tau'-\tau}\, d\tau.' \tag{3.1.66б}$$

Чтобы получить другую полезную теорему относительно $z_1(t)$ и $z_2(t)$, рассмотрим функцию взаимной корреляции

$$'\Gamma_{12}(\tau) = \langle {}'z_1^*(t) z_2(t+\tau)\rangle\,, \tag{3.1.67}$$

где

$$'z_1(t) = z_1^*(t). \tag{3.1.68}$$

Согласно выражениям (3.1.55) и (3.1.56) легко видеть, что функция $'z_1(t)$ имеет представление Фурье

$$'z_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} {}'\tilde{z}_1(\nu)\, \mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}\, d\nu, \tag{3.1.69}$$

где

$$'\tilde{z}_1(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu > 0, \\ \tilde{x}_1^*(\nu) & \text{при } \nu \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.1.70}$$

Функция взаимной спектральной плотности $'W_{12}(\nu)$ двух сигналов $'z_1(t)$ и $z_2(t)$ определяется формулой [см. (2.4.35)]

$$\langle {}'\tilde{z}_1^*(\nu)\, \tilde{z}_2(\nu')\rangle = {}'W_{12}(\nu)\delta(\nu-\nu'). \tag{3.1.71}$$

Согласно (3.1.70) $'\tilde{z}_1(\nu)$ равна нулю для всех положительных частот, тогда как, в соответствии с (3.1.56), $\tilde{z}_1(\nu)$ равна нулю для всех отрицательных частот. Из (3.1.71) следует, что

$$'W_{12}(\nu) = 0 \quad \text{для всех} \quad \nu \neq 0. \tag{3.1.72}$$

Далее, согласно обобщенной теореме Винера — Хинчина [см. (2.4.38)] функция взаимной корреляции (3.1.67) имеет представление Фурье

$$'\Gamma_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} {}'W_{12}(\nu)\, \mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\, d\nu, \tag{3.1.73}$$

и, с учетом (3.1.72), мы видим, что

$$'\Gamma_{12}(\tau) \equiv 0. \tag{3.1.74}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема II: *При тех же условиях, что и в Теореме* I,

$$'\Gamma_{12}(\tau) \equiv \langle z_1(t)\, z_2(t+\tau)\rangle = 0 \tag{3.1.75}$$

для всех значений τ.

Из теорем I и II вытекают другие интересные результаты. Подставляя (3.1.57) в (3.1.75) и приравнивая действительные и мнимые части, получим следующую теорему:

Теорема III: *Если* $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$ *— два действительных, совместно стационарных, в широком смысле, случайных процесса с нулевыми средними, и* $y_1(t)$ *и* $y_2(t)$ *соответствующие сопряженные процессы (т.е. результаты преобразований Гильберта), то*

$$\langle x_1(t)\, x_2(t+\tau)\rangle = \langle y_1(t)\, y_2(t+\tau)\rangle, \tag{3.1.76а}$$

$$\langle x_1(t)\, y_2(t+\tau)\rangle = -\langle y_1(t)\, x_2(t+\tau)\rangle. \tag{3.1.76б}$$

В случае $x_2(t) = x_1(t)$ мы имеем $y_2(t) = y_1(t)$ и, положив $\tau = 0$ и опустив индексы, из (3.1.76) получим

$$\langle x^2(t)\rangle = \langle y^2(t)\rangle, \tag{3.1.77а}$$

$$\langle x(t)\, y(t)\rangle = 0. \tag{3.1.77б}$$

Так как согласно формулам (3.1.58) и (3.1.59) имеем $\langle x(t)\rangle = \langle y(t)\rangle = 0$, выражения (3.1.77) означают, что:

Теорема IV: *Дисперсия* $\langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle$ *действительного, стационарного, в широком смысле, случайного процесса* $x(t)$ *с нулевым средним равна дисперсии* $\langle (y - \langle y\rangle)^2\rangle$ *сопряженного процесса* $y(t)$, *и в каждый момент времени два процесса некоррелированы.*

Используя (3.1.57), выразим комплексную функцию взаимной корреляции $\Gamma_{12}(\tau)$ (3.1.61) через действительные процессы $x_j(t)$ и $y_j(t)$. Если воспользоваться также соотношениями (3.1.76), то получим формулу

$$\Gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{2}\left[\langle x_1(t)\, x_2(t+\tau)\rangle + i\,\langle x_1(t)\, y_2(t+\tau)\rangle\right]. \tag{3.1.78}$$

Если, как и раньше, обозначить действительные и мнимые части $\Gamma_{12}(\tau)$ через $\Gamma_{12}^{(\mathrm{r})}(\tau)$ и $\Gamma_{12}^{(\mathrm{i})}(\tau)$, соответственно, и приравнять в (3.1.78) действительные и мнимые части, то получим

Теорема V: *При тех же условиях, что и в Теореме* III, *действительная и мнимая части функции взаимной корреляции* $\Gamma_{12}(\tau)$ *комплексных аналитических сигналов* $z_1(t)$ *и* $z_2(t)$, *связанных с действительными сигналами* $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$, *определяются формулами*

$$\Gamma_{12}^{(\mathrm{r})}(\tau) = \frac{1}{2}\langle x_1(t)\, x_2(t+\tau)\rangle, \tag{3.1.79а}$$

$$\Gamma_{12}^{(\mathrm{i})}(\tau) = \frac{1}{2}\langle x_1(t)\, y_2(t+\tau)\rangle. \tag{3.1.79б}$$

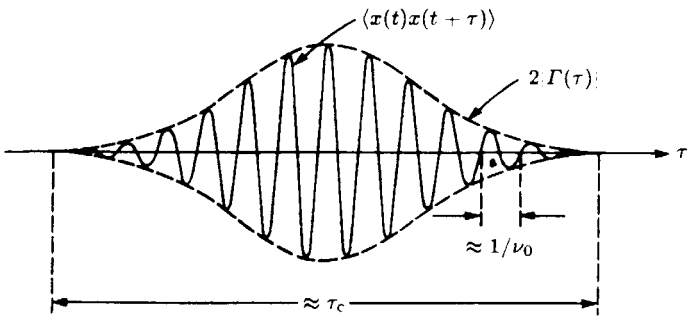


Рис. 3.6. Иллюстрация соотношения между корреляционными функциями действительного квазимонохроматического сигнала $x(t)$ и связанного с ним комплексного аналитического сигнала

Из этой теоремы и Теоремы I вытекает интересное следствие для квази-монохроматического, стационарного, в широком смысле, действительного случайного процесса $x(t)$. Спектр мощности[1] такого процесса $x(t)$ сосредоточен в спектральной области, ширина которой мала по сравнению со средней частотой. Теперь, в соответствии с (3.1.79а) и Теоремой I, $\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = 2\Gamma^{(r)}(\tau) = 2\mathrm{Re}\,\Gamma(\tau)$, где $\Gamma(\tau)$ — автокорреляционная функция аналитического сигнала $z(t)$, связанного с $x(t)$, и Re снова означает действительную часть. Из разд. 3.1.2 мы знаем, что $\Gamma(\tau)\exp(2\pi i\nu_0\tau)$ представляет собой комплексную огибающую $\Gamma^{(r)}(\tau)$ и, следовательно, в соответствии с (3.1.79а), также является комплексной огибающей $\frac{1}{2}\langle x(t)x(t+\tau)\rangle$. Общее поведение действительной автокорреляционной функции $\langle x(t)x(t+\tau)\rangle$ и $2\Gamma(\tau)$ показано на рис. 3.6. Ясно, что эффективная ширина $|\Gamma(\tau)|$ представляет собой меру времени корреляции τ_c действительного процесса $x(t)$, а именно, временной интервал τ, на котором $x(t)$ и $x(t+\tau)$ коррелированы. В оптике, где обычно $x(t)$ — флуктуирующее действительное поле, это время корреляции называют ***временем когерентности*** поля. Позже будет дано более точное определение (см. разд. 4.3.3).

3.1.4. Статистические свойства аналитического сигнала, связанного с действительным гауссовским случайным процессом

Пусть $x(t)$ будет действительным, стационарным, в широком смысле, гауссовским случайным процессом с нулевым средним. Его плотность вероятности в любой момент времени задается формулой

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}, \tag{3.1.80}$$

где $\sigma^2 = \langle x^2\rangle$ — дисперсия случайного процесса x. Процесс $y(t)$, сопряженный $x(t)$, представляет собой линейное преобразование $x(t)$ [см. (3.1.13а)] и, следовательно, в соответствии с хорошо известной теоремой (Davenport and Root, 1958, разд. 8.4), является стационарным, в широком смысле, гауссовским случайным процессом с нулевым средним. Более того, согласно Теореме IV [см. (3.1.77)] дисперсия случайного процесса y равна дисперсии σ для x. Таким образом

$$p(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma^2}. \tag{3.1.81}$$

Согласно (3.1.77б) случайные процессы x и y некоррелированны и, следовательно, их совместная вероятность $p(x,t)$ есть просто произведение $p(x)$ и $p(y)$, так что

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2} \tag{3.1.82}$$

есть двумерное гауссовское распределение. Поскольку ***окружности*** представляют собой геометрическое место точек постоянных значений распределения (3.1.82), говорят, что такое гауссовское распределение является ***циркулярным***.

Рассмотрим теперь совместную плотность вероятности[2] $p(A,\varphi)$ модуля амплитуды $A(t)$ и аргумента фазы $\varphi(t)$ аналитического сигнала [см. (3.1.12) и (3.1.33)]

$$z(t) = \frac{1}{2}\,[x(t) + iy(t)] = \frac{1}{2}A(t)\,\mathrm{e}^{i\varphi(t)}. \tag{3.1.83}$$

[1] Мы подчеркиваем здесь, что это допущение относится к *спектру мощности* случайного сигнала, а *не к спектру Фурье* детерминированного сигнала.

[2] Символ p означает здесь «плотность вероятности», а не конкретную функциональную форму.

Согласно элементарному закону преобразования вероятностей

$$p(A,\varphi)\,dA\,d\varphi = p(x,y)\,dx\,dy. \tag{3.1.84}$$

Так как $x = A\cos\phi$ и $y = A\sin\phi$, легко найдем, что $dx\,dy = A\,dA\,d\phi$ и, следовательно, из (3.1.12) и (3.1.82) получаем, что

$$p(A,\varphi) = \frac{A}{2\pi\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-A^2/2\sigma^2}. \tag{3.1.85}$$

Поскольку в правой части (3.1.85) φ отсутствует, ясно, что все значения фазы ($0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$) равновероятны, т.е. плотность вероятности для φ есть

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}. \tag{3.1.86}$$

Плотность вероятности амплитуды может быть получена интегрированием (3.1.85) по ϕ в области $0 \leqslant \phi < 2\pi$. Результат имеет вид

$$p(A) = \frac{A}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-A^2/2\sigma^2}, \tag{3.1.87}$$

и представляет собой *распределение Рэлея*. Это распределение показано на рис. 3.7.

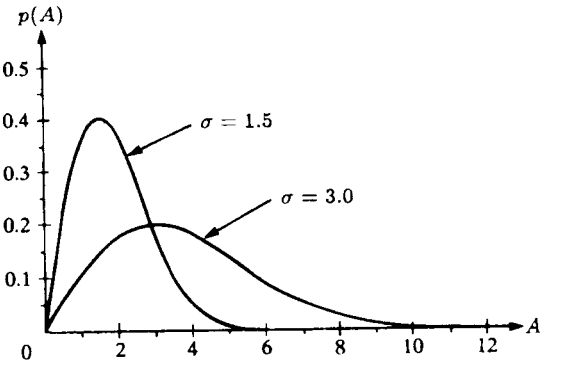


Рис. 3.7. Распределение Рэлея
$p(A) = \frac{A}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-A^2/2\sigma^2}$

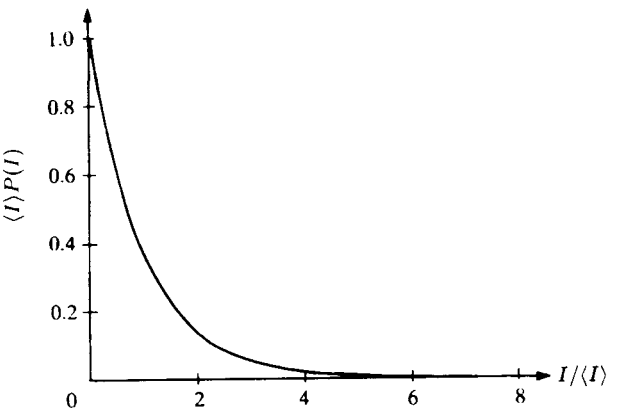


Рис. 3.8. Экспоненциальное распределение
$p(I) = \frac{1}{\langle I\rangle}\,\mathrm{e}^{-I/\langle I\rangle}$

Так как совместная плотность вероятности $p(A,\phi)$ [см. (3.1.85)] представляет собой произведение плотностей вероятностей $p(\phi)$ и $p(A)$, определяемых формулами (3.1.86) и (3.1.87), фаза $\phi(t)$ и амплитуда $A(t)$ аналитического сигнала в каждый момент времени t статистически независимы. Однако в общем случае случайные процессы $\phi(t)$ и $A(t)$ статистически зависимы.

В заключение рассмотрим плотность вероятности квадрата мгновенной амплитуды. Для краткости, мы будем называть ее *мгновенной интенсивностью* и обозначать как $I(t)$:

$$I(t) = A^2(t). \tag{3.1.88}$$

Снова используя элементарный закон преобразования вероятностей (см. разд. 1.3.1)

$$p(I)dI = p(A)\,dA, \tag{3.1.89}$$

из формул (3.1.87) — (3.1.89) находим, что

$$p(I) = \frac{1}{\langle I\rangle}\,\mathrm{e}^{-I/\langle I\rangle}, \quad I \geqslant 0, \tag{3.1.90}$$

где $\langle I\rangle = 2\sigma^2$. Согласно (3.1.90), мгновенная интенсивность имеет *экспоненциальное распределение*, которое изображено на рис. 3.8. Можно показать, что n-ый момент $\langle I^n\rangle$ равен $n!\,\langle I^n\rangle$.

Мы рассмотрели некоторые из простейших статистических свойств комплексного процесса, связанного на основе представления аналитического сигнала с действительным, стационарным, в широком смысле, гауссовским случайным процессом. Более сложная проблема определения статистических свойств комплексного аналитического поля по известным статистическим свойствам действительного флуктурирующего поля, была рассмотрена Агарвалом и Вольфом (Agarwal and Wolf, 1972).

3.2. Представление углового спектра волновых полей

В этом разделе мы опишем математический метод, необходимый для изучения свойств волновых полей в однородных средах. Этот метод основан на определенном интегральном представлении, называемом угловым спектром плоских волн. В своем простейшем виде это представление применяется к детерминированным полям, но его можно обобщить (см. разд. 5.6.3) для случайных полей. С другой стороны, его применение к волновым полям ограничивается областью, которая является либо полупространством, либо ограничена двумя взаимно параллельными плоскостями. Несмотря на его простоту, целесообразность этого метода состоит прежде всего в его интуитивной привлекательности, позволяющей получать качественное понимание различных физических явлений, не выполняя детальные вычисления. Начнем с вывода представления углового спектра в плоско-параллельном слое.

3.2.1. Угловой спектр волнового поля в плоско-параллельном слое

Рассмотрим монохроматическое скалярное волновое поле

$$V(\mathbf{r},t) = U(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{3.2.1}$$

в слое D (см. рис. 3.9), занимающем область

$$0 \leqslant z \leqslant Z \tag{3.2.2}$$

в однородной среде с показателем преломления $n(\omega)$. Предположим, что источники поля находятся за пределами области D. Тогда в области D пространственная часть $U(\mathbf{r})$ функции $V(\mathbf{r},t)$ будет удовлетворять уравнению Гельмгольца

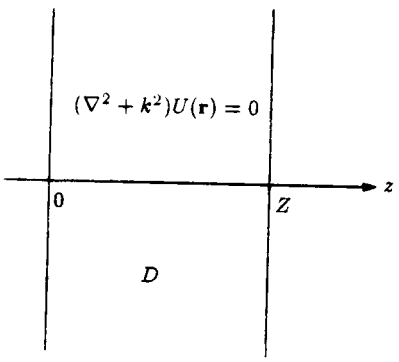


Рис. 3.9. Обозначения, относящиеся к представлению углового спектра волнового поля в плоско-параллельном слое

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0, \tag{3.2.3}$$

где

$$k = n(\omega)k_0, \tag{3.2.4а}$$

$$k_0 = \omega/c \tag{3.2.4б}$$

(c — скорость света в вакууме) представляют собой волновые числа поля в среде и в свободном пространстве, соответственно, отвечающие частоте ω.

Предположим, что в любой плоскости $z = \mathrm{const}$ в плоско-параллельном слое D поле можно представить в виде интеграла Фурье, а именно

$$U(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathscr{U}(u,v;z)\,\mathrm{e}^{i(ux+vu)}\,du\,dv, \tag{3.2.5}$$

($\mathbf{r} = x,y,z$). Подставляя (3.2.5) в (3.2.3) и меняя порядок операции (∇^2+k^2) и интегрирования, мы получим формулу

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \left[\nabla^2 + k^2\right]\left[\mathscr{U}(u,v;z)\,\mathrm{e}^{i(ux+vu)}\right] du\,dv = 0. \tag{3.2.6}$$

После дифференцирования под знаком интеграла находим, что

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \left[(-u^2 - v^2 + k^2)\mathscr{U}(u,v;z) + \frac{\partial^2 \mathscr{U}(u,v;z)}{\partial z^2}\right] \mathrm{e}^{i(ux+vu)}\,du\,dv = 0. \tag{3.2.7}$$

Поскольку уравнение (3.2.7) имеет место для всех значений x и y, член в квадратных скобках под знаком интеграла должен быть равен нулю. Следовательно, функция $\mathscr{U}(u,v;z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}(u,v;z)}{\partial z^2} + w^2 \mathscr{U}(u,v;z) = 0, \tag{3.2.8}$$

где

$$w^2 = k^2 - u^2 - v^2. \tag{3.2.9}$$

Для определенности обозначим через w корень уравнения (3.2.9), определяемый выражением

$$w = \begin{cases} +(k^2 - u^2 - v^2)^{1/2} & \text{при } u^2 + v^2 \leqslant k^2, \\ +i(u^2 + v^2 - k^2)^{1/2} & \text{при } u^2 + v^2 > k^2. \end{cases} \tag{3.2.10}$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.2.8) имеет вид

$$\mathscr{U}(u,v;z) = A(u,v)\,\mathrm{e}^{iwz} + B(u,v)\,\mathrm{e}^{-iwz}, \tag{3.2.11}$$

где $A(u,v)$ и $B(u,v)$ — произвольные функции. При подстановке (3.2.11) в интеграл Фурье (3.2.5) получим следующее выражение для волнового поля в плоско-параллельном слое:

$$U(x,y,z) = \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} A(u,v)\,\mathrm{e}^{i(ux+vy+wz)}\,du\,dv + \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} B(u,v)\,\mathrm{e}^{i(ux+vy-wz)}\,du\,dv. \tag{3.2.12}$$

Эта формула представляет волновое поле в плоско-параллельном слое в виде линейной суперпозиции вкладов $\exp(i\mathbf{K}^+ \cdot \mathbf{r})$ и $\exp(i\mathbf{K}^- \cdot \mathbf{r})$, где $\mathbf{K}^{\pm} = (u,v,\pm w)$. Согласно формулам (3.2.9) и (3.2.4) $(\mathbf{K}^{\pm})^2 = u^2 + v^2 + w^2 = k^2\ [= k_0 n(\omega)]^2$. Этот результат означает, что каждый член в подынтегральных выражениях уравнения (3.2.12) удовлетворяет одному и тому же дифференциальному уравнению, а именно, уравнению Гельмгольца (3.2.3), которому удовлетворяет и поле $U(\mathbf{r})$. Следовательно, экспоненциальные члены в интегралах (3.2.12) представляют собой *моды* этого уравнения, и можно сказать, что формула (3.2.12) суть *представление по модам* волнового поля в плоско-параллельном слое. Не следует путать это представление с представлением Фурье, которое имеет с ним внешнее сходство. В отличие от представления по модам (3.2.12), фурье-представление функции трех действительных переменных содержало бы не двойные, а тройные интегралы. Кроме того, так как было предположено, что $U(x,y,z)$ известна только в области $0 \leqslant z \leqslant Z$, а не во всем пространстве, разложение Фурье, в отличие от разложения (3.2.12), не является единственным и не является представлением по модам волнового поля.

Теперь перейдем к физическому смыслу формулы (3.2.12), предполагая, что среда в плоско-параллельном слое является *непоглощающей*. Тогда показатель преломления $n(\omega)$ и волновое число k будут действительными величинами. Таким образом, формула (3.2.12) представляет волновое поле через вклады четырех типов мод плоской волны:

(а) $$\mathrm{e}^{i(ux+vy+wz)} \quad \text{с} \quad w = +(k^2 - u^2 - v^2)^{1/2}, \quad u^2 + v^2 \leqslant k^2. \tag{3.2.13а}$$

Эти моды, очевидно, представляют собой однородные плоские волны[1], которые распространяются по направлению от граничной плоскости $z = 0$ к $z = Z > 0$.

(б) $$\mathrm{e}^{i(ux+vy+wz)} \quad \text{с} \quad w = +i(u^2 + v^2 - k^2)^{1/2}, \quad u^2 + v^2 > k^2. \tag{3.2.13б}$$

Так как в этом случае $\mathrm{e}^{iwz} = \mathrm{e}^{-|w|z}$, поверхности постоянной амплитуды таких волн определяются как $z = \text{const}$, тогда как поверхности равных фаз определяются в виде $ux + vy = \text{const}$. Очевидно, что эти волны неоднородны. Их амплитуды уменьшаются экспоненциально при распространении от плоскости $z = 0$ к $z = Z > 0$.

(в) $$\mathrm{e}^{i(ux+vy-wz)} \quad \text{с} \quad w = +(k^2 - u^2 - v^2)^{1/2}, \quad u^2 + v^2 \leqslant k^2. \tag{3.2.13в}$$

Очевидно, что эти волны представляют собой однородные плоские волны, которые распространяются от граничной плоскости $z = Z > 0$ к $z = 0$.

[1] Говорят, что волна однородна, если поверхности постоянной амплитуды и постоянной фазы совпадают. Если это не так, то говорят, что волна неоднородна.

(г) $$e^{i(ux+vy-wz)} \quad \text{с} \quad w = i(u^2 - +v^2 - k^2)^{1/2}, \quad u^2 + v^2 > k^2. \tag{3.2.13г}$$

Поскольку теперь $e^{-iwz} = e^{|w|z}$, такие волны являются неоднородными и похожи на те, которые рассматривались выше (б), с той лишь разницей, что их амплитуды спадают экспоненциально при распространении волны от $z = Z$ к $z = Z$.

Очевидно, что моды всех четырех типов, которые мы только что обсудили, необходимы в общем случае для однозначного представления волнового поля в области $0 \leqslant z < Z$. Благодаря физическому смыслу этих мод, являющихся плоскими волнами, говорят, что представление (3.2.12) суть представление волнового поля в виде *углового спектра плоских волн*.

3.2.2. Угловой спектр волнового поля в полупространстве

Во многих задачах, связанных с распространением волн, например, при анализе дифракции в апертуре плоского экрана или при изучении распространения лазерного луча, имеют дело с волновыми полями в полупространстве, скажем $z \geqslant 0$. В таких случаях часто бывает полезным использовать представление по модам волнового поля в полупространстве. Это представление можно получить из только что полученного результата для плоско-параллельного слоя [см. (3.2.12)], переходя к пределу $Z \to \infty$.

Предположим, что $n(\omega) = 1$ в полупространстве $z \geqslant 0$, и поле удаляется на бесконечность, или, более точно, что если $\mathbf{s} \equiv (s_x, s_y, s_z \geqslant 0)$ — любой заданный единичный вектор, задающий направление в полупространстве $z > 0$, то в асимптотическом пределе (см. разд. 3.3.4)

$$U(r\mathbf{s}) \sim F(\mathbf{s}) \frac{e^{ik_0 r}}{r} \quad \text{при} \quad k_0 r \to \infty. \tag{3.2.14}$$

Функцию $F(\mathbf{s})$ называют *диаграммой направленности излучения* поля.

Поскольку полупространство $z \geqslant 0$ можно рассматривать как предел плоско-параллельного слоя $0 \leqslant z \leqslant Z$ при $Z \to \infty$, то ясно, что волновое поле в полупространстве можно также представить в виде (3.2.12). Однако, как мы сейчас покажем, рассмотренное поведение волнового поля при его распространении на бесконечность и некоторые простые физические соображения приводят к упрощению. Для этого целесообразно разделить второй интеграл в правой части уравнения (3.2.12) на вклады однородных и неоднородных волн:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} B(u,v)\, e^{i(ux+vy-wz)}\, du\, dv =$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leqslant k_0^2} B(u,v)\, e^{i(ux+vy-|w|z)}\, du\, dv + \iint_{u^2+v^2 > k_0^2} B(u,v)\, e^{i(ux+vy)}\, e^{|w|z}\, du\, dv, \tag{3.2.15}$$

где w определяется выражением (3.2.10). Так как $|w| = (u^2 + v^2 - k_0^2)^{1/2}$ при $u^2 + v^2 > k_0^2$, амплитуды всех мод плоских волн во втором интеграле в правой части (2.3.15) увеличиваются неограниченно при увеличении z. В любом реальном поле таких мод, очевидно, не будет, т.е.

$$B(u,v) = 0 \quad \text{при} \quad u^2 + v^2 > k_0^2. \tag{3.2.16а}$$

Далее рассмотрим первый интеграл в правой части (3.2.15). Он представляет собой вклады однородных плоских волн, которые распространяются по направлению к плоскости $z = 0$, и кажется очевидным, что их совместный эффект будет представлять поле, являющееся входящим, а не выходящим, как это следует из уравнения (3.2.14). То, что это так, можно приближенно показать, используя принцип стационарной фазы (см. Miyamoto and Wolf, 1962, с. 615, приложение), который мы рассмотрим в разд. 3.3. Следовательно, можно заключить, что в дополнение к требованию (3.2.16а) мы должны также иметь

$$B(u,v) = 0 \quad \text{при} \quad u^2 + v^2 \leqslant k_0^2. \tag{3.2.16б}$$

Из выражений (3.2.12) и (3.2.16) следует, что любое волновое поле в полупространстве $z \geqslant 0$, которое является квадратично интегрируемым на любой плоскости[1] $z = \text{const}$ и которое и уходит на бесконечность в полупространстве, можно представить в виде

$$U(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(u,v)\, e^{i(ux+vy+wz)}\, du\, dv, \tag{3.2.17}$$

где w определяется формулой (3.2.10).

Для дальнейших целей целесообразно перейти к новым переменным

$$u = k_0 p, \quad v = k_0 q, \quad w = k_0 m, \tag{3.2.18}$$

где k_0, как и раньше, — волновое число поля в свободном пространстве, связанное с частотой ω [см. (3.2.46)]. Тогда формула (3.2.17) принимает вид

$$U(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(p,q)\, e^{ik_0(px+qy+mz)}\, dp\, dq, \tag{3.2.19}$$

где

$$a(p,q) = k_0^2 A(k_0 p, k_0 q), \tag{3.2.20}$$

и

$$m = +(1-p^2-q^2)^{1/2} \quad \text{при } p^2+q^2 \leqslant 1, \tag{3.2.21а}$$

$$m = +(p^2+q^2-1)^{1/2} \quad \text{при } p^2+q^2 > 1. \tag{3.2.21б}$$

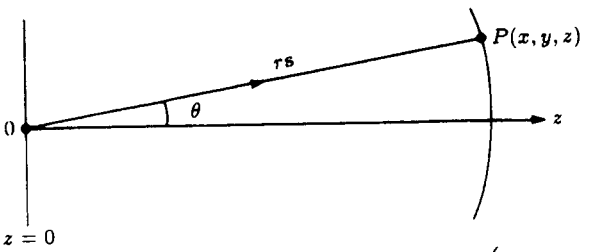


Рис. 3.10. Асимптотическое поведение (в дальней зоне) представления в виде углового спектра (3.2.19) волнового поля на полуплоскости $z \geqslant 0$. Поле в точке $P(r\mathbf{s})$ дальней зоны задается формулой (3.2.22), а именно, $U(r\mathbf{s}) \sim -\frac{2\pi i}{k_0} a(s_x, s_y) \frac{e^{ik_0 r}}{r} \cos\theta$, где $s_x, s_y, s_z = \cos\theta$ — декартовы координаты (направляющие косинусы) единичного вектора $\mathbf{s}$

Формулы (3.2.19) и (3.2.17) представляют собой эквивалентные разновидности представления монохроматического, удаляющегося на бесконечность волнового поля в полупространстве $z \geqslant 0$, которое распространяется на бесконечность в этом полупространстве в виде углового спектра плоских волн. Моды плоских волн бывают двух видов. Моды, для которых $p^2+q^2 \leqslant 1$, являются однородными волнами, распространяющимися в полупространстве $z \geqslant 0$. Моды, для которых $p^2+q^2 > 1$, представляют собой неоднородные волны, амплитуда которых убывает экспоненциально при увеличении расстояния z от граничной плоскости $z = 0$. Последние известны как *быстрозатухающие волны*.

Мы постулировали, что поле удаляется на бесконечность, т.е. оно имеет асимптотическое поведение (3.2.14). То, что представление углового спектра (3.2.19) действительно имеет такое поведение, будет показано позже [см. (3.2.34) и (3.3.95)]. Согласно формуле (3.2.19) в общем случае[2] имеем

$$U(r\mathbf{s}) \equiv U(x,y,z) \sim -\frac{2\pi i}{k_0} \left(\frac{z}{r}\right) a\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) \frac{e^{ik_0 r}}{r} \quad \text{при} \quad k_0 r \to \infty \tag{3.2.22}$$

для любого фиксированного направления $\mathbf{s}$ ($s_x = x/r$, $s_y = y/r$, $s_z = z/r \geqslant 0$), где $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, в полупространство $z \geqslant 0$ (рис. 3.10).

Из формулы (3.2.22) видно, что спектральная амплитуда (в общем случае — комплексная) одной и только одной плоской волны в представлении углового спектра дает вклад в асимптотическое поведение поля в заданном направлении $x/r, y/r, z/r$; а именно, в направлении, обозначенном параметрами $p = x/r$, $q = y/r$. Так как $(x/r)^2 + (y/r)^2 \leqslant 1$, эта плоская волна должна быть однородной и в точности представлять

[1] Из выражения (3.2.17) и очевидного неравенства между интегралами следует, что это требование будет удовлетворяться всякий раз, когда граничное значение $U(x,y,0)$ является квадратично интегрируемым. Другие достаточные условия для обоснования представления в виде углового спектра волнового поля в полупространстве обсуждались Лалором (Lalor, 1968).

[2] При особых условиях в дальнем поле могут быть точки, где асимптотическая формула (3.2.22) не применима (Sherman, Stamnes and Lalor, 1976).

собой плоскую волну, распространяющуюся в направлении вектора $\mathbf{s}$, в котором рассмотрен асимптотический предел (дальняя зона). Физическая сущность этого результата станет очевидной чуть позже (в разд. 3.3), когда будет обсуждаться асимптотическая оценка определенных интегралов, основанная на методе стационарной фазы.

Мы только что видели, что существует тесная связь между дальним полем и спектральными амплитудами мод однородной плоской волны в представлении через угловой спектр поля в полупространстве $z \geqslant 0$. Покажем теперь, что существует также простое соотношение между спектральными амплитудами всех мод плоской волны и граничными значениями поля в плоскости $z = 0$, и что это соотношение дает простую физическую трактовку того, какую информацию несет каждая мода плоской волны. Для этого сначала представим поле на плоскости $z = 0$ в виде двумерного интеграла Фурье:

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{U}_0(u, v)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ux+vy)}\, du\, dv, \tag{3.2.23}$$

где в обозначениях, используемых в (3.2.5), $\widetilde{U}(u, v) \equiv \mathscr{U}(u, v; 0)$. С физической точки зрения, в выражении (3.2.23) граничные значения поля на плоскости $z = 0$ представлены через всевозможные двумерные пространственные периодические компоненты, соответствующие двумерным пространственным частотам (u, v) $[-\infty < u < \infty,\ -\infty < v < \infty]$. Амплитуды Фурье (в общем случае — комплексные), полученные при обратном фурье-преобразовании функции $U(x, y, 0)$:

$$\widetilde{U}_0(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(ux+vy)}\, dx\, dy, \tag{3.2.24}$$

представляют собой интенсивность, с которой пространственно-частотная компонента (u, v) вносит вклад в граничное значение поля на плоскости $z = 0$.

Из представления в виде углового спектра (3.2.19) сразу следует, что

$$U(x, y, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(p, q)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(px+qy)}\, dp\, dq \tag{3.2.25}$$

или, если перейти от переменных интегрирования (p, q) к (u, v) согласно первым двум соотношениям из (3.2.18), то формула (3.2.25) примет вид

$$U(x, y, 0) = \frac{1}{k_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} a\left(\frac{u}{k_0}, \frac{v}{k_0}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ux+vy)}\, du\, dv. \tag{3.2.25а}$$

Сравнивая это выражение с (3.2.23), мы видим, что

$$\widetilde{U}_0(u, v) = \frac{1}{k_0^2} a\left(\frac{u}{k_0}, \frac{v}{k_0}\right), \tag{3.2.26}$$

т.е.

$$a(p, q) = k_0^2 \widetilde{U}_0(k_0 p, k_0 q). \tag{3.2.27}$$

Это соотношение показывает, что *спектральная амплитуда $a(p, q)$ каждой моды плоской волны в представлении поля угловым спектром однозначно определяется одной и только одной пространственно-частотной компонентой (т.е. фурье-компонентой) граничного значения поля $U_0(x, y) \equiv U(x, y, 0)$ на плоскости $z = 0$, а именно, компонентой, называемой «пространственной» частотой*

$$u = k_0 p, \quad v = k_0 q. \tag{3.2.28}$$

Для того, чтобы глубже понять тесную связь между модами углового спектра и граничными значениями поля на плоскости $z = 0$, нужно ввести пространственные периоды Δx и Δy $[0 \leqslant \Delta x < \infty, 0 \leqslant \Delta y < \infty]$, которые связаны с пространственными частотами (u, v) через соотношения

$$\Delta x = \frac{2\pi}{|u|}, \quad \Delta y = \frac{2\pi}{|v|}. \tag{3.2.29}$$

Так как согласно (3.2.18) $u = k_0 p = 2\pi p/\lambda_0$ и $v = k_0 q = 2\pi q/\lambda_0$, где $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ — длина волны монохроматического поля, формула (3.2.29) означает, что

$$\Delta x = \frac{\lambda_0}{|p|}, \quad \Delta y = \frac{\lambda_0}{|q|}. \tag{3.2.30}$$

Поскольку для однородных волн $p^2 + q^2 \leqslant 1$, а для затухающих волн $p^2 + q^2 > 1$, из (3.2.30) следует, что однородные волны связаны с пространственными периодами, для которых

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \leqslant \frac{1}{\lambda_0^2}, \tag{3.2.31а}$$

а затухающие волны связаны с пространственными периодами, для которых

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} > \frac{1}{\lambda_0^2}. \tag{3.2.31б}$$

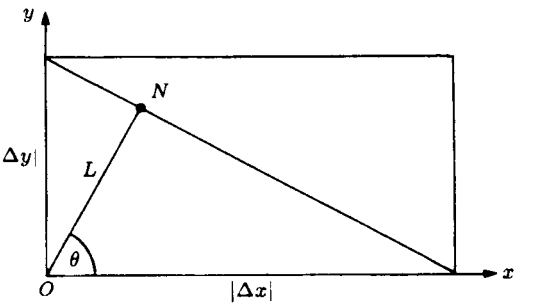


Рис. 3.11. Иллюстрация смысла расстояния L, определяемого уравнением (3.2.32)

Чтобы ясно понять физический смысл приведенных выше неравенств, введем длину L, которая представляет собой длину $\overline{ON}$ перпендикуляра, опущенного из угла O прямоугольника со сторонами Δx и Δy на противолежащую диагональ (рис. 3.11). Если θ — угол между $\overline{ON}$ и осью x, то, очевидно, имеем $L = \Delta x \cos\theta = \Delta y \sin\theta$ и, следовательно,

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{L^2}. \tag{3.2.32}$$

Из того, что мы только что выяснили, следует, что пространственно-частотные компоненты $U(x, y, 0)$, для которых $L \geqslant \lambda_0$, приводят к однородным волнам, тогда как компоненты, для которых $L < \lambda_0$, приводят к затухающим волнам.

Заметим, что в особом случае, когда $\Delta y \to \infty$ (одномерное граничное поле), длина L равна Δx. Не существует простого соответствия для двумерного граничного поля, но мы можем рассматривать L как меру величины периодической компоненты, с которой она связана соотношением (3.2.32). В таком понимании неравенства (3.2.31а) и (3.2.31б) означают, грубо говоря, что однородные волны несут информацию о периодических элементах поля на плоскости $z = 0$, которые больше длины волны, тогда как затухающие волны несут информацию о периодических элементах, которые меньше длины волны. Точное определение границ между двумя областями Δx и Δy показано на рис. 3.12.

Из формул (3.2.18) и (3.2.21) следует, что однородные волны соответствуют пространственным частотам, для которых

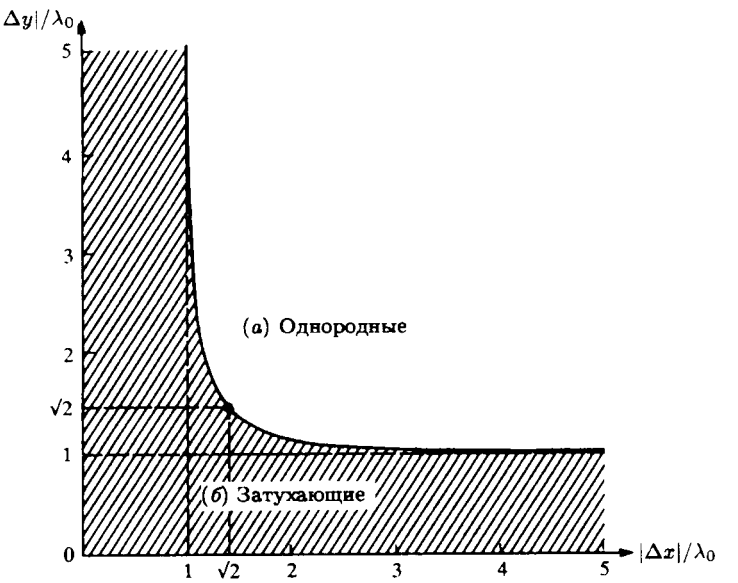


Рис. 3.12. Пространственные периодичности поля на плоскости $z = 0$, в окрестности которой несут информацию однородные волны *а* и затухающие волны *б*

$$u^2 + v^2 \leqslant k_0^2, \tag{3.2.33а}$$

тогда как затухающие волны соответствуют пространственным частотам, для которых

$$u^2 + v^2 > k_0^2. \tag{3.2.33б}$$

Часто говорят, что пространственные частоты, удовлетворяющие неравенству (3.2.33а), являются ***низкими пространственными частотами***, тогда как частоты, удовлетворяющие неравенству (3.2.33б), являются ***высокими пространственными частотами***.

Вернемся на время к формуле (3.2.22) для дальнего поля. Если подставить вместо функции спектральной амплитуды выражение (3.2.27), то выражение (3.2.22) примет вид

$$\widetilde{U}_0(u,v) \equiv U(x,y,z) \sim -2\pi i k_0 \widetilde{U}_0\left(k_0\frac{x}{r}, k_0\frac{y}{r}\right)\frac{e^{ik_0 r}}{r}\cos\theta \quad \text{при } k_0 r \to \infty \tag{3.2.34}$$

вдоль любого заданного направления θ ($\cos\theta = z/r$) в полупространстве $z \geqslant 0$. Поскольку $(x/r)^2 + (y/r)^2$ не может быть больше единицы, $(k_0 x/r)^2 + (k_0 y/r)^2 \leqslant k_0^2$, и из (3.2.34) видно, что дальнее поле полностью определяется низкими пространственными компонентами поля на плоскости $z = 0$. Это должно было иметь место, поскольку, как мы только что узнали, высокие пространственные частоты приводят к затухающим волнам, а амплитуда таких волн спадает экспоненциально при увеличении расстояния z от граничной плоскости $z = 0$. Такие волны в общем случае не дают вклада в дальнее поле[1]. Выражение (3.2.34), которое будет получено непосредственно в разд. 3.2.5 [см. (3.2.88)], представляет точный вариант хорошо известной формулы Фраунгофера из элементарной теории дифракции (ср. Goodman, 1968, с. 61).

3.2.3. Пример: дифракция на полупрозрачном объекте[2]

Для иллюстрации физического смысла представления в виде углового спектра мы рассмотрим распространение света через тонкий, полупрозрачный, слабо рассеивающий объект. Предположим, что объект помещен в плоскости $z = 0$ и освещается монохроматической плоской волной, распространяющейся вдоль положительного направления оси z (см. рис. 3.13). Тогда пространственную часть волны можно представить в виде

$$U^{(i)}(x,y,z) = C e^{ik_0 z}, \tag{3.2.35}$$

где C — константа. Если показатель преломления объекта изменяется медленно, то можно предположить, что выходящее поле U в хорошем приближении определяется уравнением

$$U(x,y,0) = T(x,y)U^{(i)}(x,y,0). \tag{3.2.36}$$

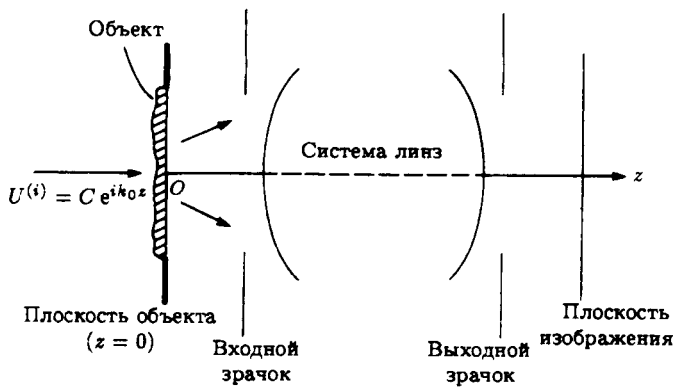


Рис. 3.13. Изображение тонкого полупрозрачного объекта

Если допустить, что только свет, проходящий через объект, попадает в полупространство $z \geqslant 0$, то очевидно, что $T(x,y) = 0$ во всех точках (x,y) вне области объекта на плоскости $z = 0$. Функция $T(x,y) = 0$ называется *функцией пропускания объекта* или *амплитудным пропусканием* (в случае, когда свет падает нормально). Модуль T представляет собой меру количества света, которое объект поглощает при его прохождении, а фаза T есть мера оптической толщины объекта. Модуль и фаза — это те сведения о поле, которые часто необходимо найти. Поместив оптическую систему отображения, например, микроскоп, справа от объекта (т.е. в полупространстве $z > 0$), можно было бы определить свойства объекта на основе анализа его изображения.

Допуская, что выражение (3.2.36) достаточно точно описывает изменение падающей волны из-за наличия объекта, ясно, что функция пропускания $T(x,y)$ — это максимум информации, который отображающая система может дать вблизи объекта. Посмотрим, сколько информации о $T(x,y)$ содержится в прошедшей волне до того, как она достигнет системы отображения.

Из (3.2.35) и (3.2.36) следует, что на плоскости $z = 0$ поле, исходящее из объекта, определяется формулой

$$U(x,y,0) = C\,T(x,y). \tag{3.2.37}$$

[1] Волновые поля в полупространстве, которые совсем не содержат затухающих волн в представлении через угловой спектр, имеют ряд интересных свойств, которые обсуждались Шерманом (Sherman, 1969). Такие поля часто представляют собой очень хорошие аппроксимации полей, встречающихся на практике, за исключением случаев, когда они рассматриваются вблизи источников и границ объектов, с которыми поле может взаимодействовать.

[2] Этот пример и наш метод анализа принадлежат Габору (Gabor, 1961). [см. также книгу (*Ахманов и Никитин, 1998) – *ред. пер.*]

В отсутствие системы отображения выражение (3.2.37) задает граничные значения свободно распространяющегося, удаляющегося на бесконечность поля в полупространстве $z > 0$. Следовательно, согласно выражениям (3.2.19), (3.2.27) и (3.2.37) поле в полупространстве можно представить в виде

$$U(x,y,z) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} Ck_0^2 \widetilde{T}(k_0 p, k_0 q)\, \mathrm{e}^{ik_0(px+qy+mz)}\, dp\, dq, \tag{3.2.38}$$

где

$$\widetilde{T}(u,v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} T(x,y)\, \mathrm{e}^{-i(ux+vy)}\, dx\, dy, \tag{3.2.39}$$

и предполагается, что $T(x,y) \equiv 0$ вне области, где находится объект.

Согласно (3.2.38) амплитуда обычной плоской волны, которая обозначается в представлении угловым спектром прошедшей волны в виде (p,q), определяется формулой

$$a(p,q) = Ck_0^2 \widetilde{T}(k_0 p, k_0 q). \tag{3.2.40}$$

Мы видим, что волна несет информацию о фурье-компонентах функции пропускания, соответствующих двумерной пространственной частоте $u = k_0 p$, $v = k_0 q$, которая соответствует пространственным периодам Δx, Δy, связанным с p и q формулами (3.2.20), которые мы перепишем в виде

$$|p| = \frac{\lambda_0}{\Delta x}, \quad |q| = \frac{\lambda_0}{\Delta y}. \tag{3.2.41}$$

Очевидно, что если Δx и Δy достаточно велики, то $|p|^2 + |q|^2 \ll 1$, т.е. волна будет распространяться в направлении, образующем малый угол θ к оси z (см. рис. 3.10). При уменьшении Δx и Δy угол θ будет увеличиваться и в конце концов станет настолько большим, что соответствующие однородные волны не попадут в систему отображения. Следовательно, эта информация будет потеряна. Этот простой вывод ясно показывает истинную природу потери разрешения при формировании оптического изображения.

Далее рассмотрим информацию, которую несут затухающие волны, относительно малых деталей [см. (3.2.31б)] структуры объекта. Поскольку амплитуда затухающих волн убывает экспоненциально при увеличении расстояния от плоскости объекта, эту информацию будет, очевидно, все сложнее и сложнее распознавать по мере ее удаления. В качестве примера рассмотрим периодический элемент с периодами

$$\Delta x = \lambda_0/5, \quad \Delta y = \infty. \tag{3.2.42}$$

(Вторая формула в (3.2.42) означает, что объект является одномерным вдоль направления оси x.) Согласно выражениям (3.2.41) и (3.2.42) информацию об этом элементе несут моды затухающих волн, для которых

$$|p| = 5, \quad |q| = 0. \tag{3.2.43}$$

В соответствии с (3.2.43) и (3.2.21б) для этой волны имеем

$$m = i(25-1)^{1/2} \approx 4.9i, \tag{3.2.44}$$

и, следовательно, [см. (3.2.38)] пространственная часть волны запишется в виде

$$U(x,y,z) = Ck_0^2 \widetilde{T}(k_0 p, 0)\, \mathrm{e}^{ik_0 px}\, \mathrm{e}^{-k_0|m|z} = Ck_0^2 \widetilde{T}(k_0 p, 0)\, \mathrm{e}^{i5k_0 x}\, \mathrm{e}^{-4.9k_0 z}. \tag{3.2.45}$$

Поскольку

$$\mathrm{e}^{-4.9k_0 z} \approx \mathrm{e}^{-31z/\lambda_0}, \tag{3.2.46}$$

амплитуда этой волны уменьшается в e^{31} раз на расстоянии длины волны от плоскости объекта и в e^{310} раз на расстоянии десяти длин волн! Таким образом, на практике информация о тонких деталях объекта теряется при распространении света.

3.2.4. Представление Вейля для сферической волны[1]

В хорошо известной работе (Weyl, 1919), посвященной распространению электромагнитных волн на проводящей сфере, Вейль получил новое представление для сферической волны. Это представление можно рассматривать как представление в виде углового спектра волнового поля в свободном пространстве, которое испускается точечным источником, помещенным в начало координат. Так как сферическая волна представляет собой функцию Грина оператора Гельмгольца, представление Вейля нашло много полезных приложений, которые связаны с анализом излучения, с задачами дифракции и рассеяния на основе методов углового спектра.

Вследствие того, что сферическая волна сингулярна в центре, строгий вывод представления Вейля требует некоторой математической изощренности. Мы не будем касаться тонкостей, лежащих в основе этого представления, и дадим чисто формальный вывод. Строгое доказательство этого представления можно найти в других источниках (см., например, Baños, 1966, разд. 2.13).

Рассмотрим расходящуюся сферическую волну (опустим временной множитель $e^{-i\omega t}$)

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik_0 r}}{r}, \tag{3.2.47}$$

где $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние от центра волны до точки поля. В любых точках, за исключением начала координат $\mathbf{r} = 0$, $G(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца.

$$(\nabla^2 + k_0^2)G(\mathbf{r}) = 0, \quad (\mathbf{r} \neq 0). \tag{3.2.48}$$

Однако естественно предположить, что если выбрать прямоугольную декартову систему координат с началом координат в точке, где находится источник, то можно представить $G(\mathbf{r})$ в каждом из полупространств $z > 0$ и $z < 0$ в виде углового спектра плоских волн. Рассмотрим сначала представление $G(\mathbf{r})$ в полупространстве $z > 0$. Тогда мы будем иметь, во всяком случае формально,

$$\frac{e^{ik_0 r}}{r} = \iint_{-\infty}^{\infty} a(p,q)\, e^{ik_0(px+qy+mz)}\, dp\, dq, \quad (z > 0), \tag{3.2.49}$$

где m определяется из выражений (3.2.21), а именно,

$$m = +(1 - p^2 - q^2)^{1/2} \quad \text{при } p^2 + q^2 \leqslant 1, \tag{3.2.50а}$$

$$m = +i(p^2 + q^2 - 1)^{1/2} \quad \text{при } p^2 + q^2 > 1. \tag{3.2.50б}$$

Предположим, что функция $a(p,q)$, допускающая представление (3.2.49), существует и, более того, формула (3.2.49) остается справедливой при $z \to 0$, за исключением начала координат (сингулярность сферической волны). Тогда в пределе при $z \to 0$

$$\frac{\exp\left[ik_0(x^2+y^2)^{1/2}\right]}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \iint_{-\infty}^{\infty} a(p,q) \exp\left[ik_0(px+qy)\right]\, dp\, dq. \tag{3.2.51}$$

Выполняя тривиальную замену переменных интегрирования и применяя формулу обратного преобразования Фурье, получаем следующее выражение для функции спектральной амплитуды $a(p,q)$:

$$a(p,q) = \left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[ik_0(x^2+y^2)^{1/2}\right]}{(x^2+y^2)^{1/2}} \exp\left[-ik_0(px+qy)\right]\, dx\, dy. \tag{3.2.52}$$

Интеграл в правой части (3.2.52) можно вычислить в замкнутом виде. Для этого положим

$$x = R\cos\psi, \quad y = R\sin\psi, \tag{3.2.53а}$$

$$p = \rho\cos\chi, \quad q = \sin\chi. \tag{3.2.53б}$$

[1] см. также книгу Вейля (*Вейль, 1986) — *ред. пер.*

Тогда выражение (3.2.52) принимает вид

$$a(p,q)=\left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{e}^{ik_0R}\,\mathrm{e}^{-ik_0R\rho\cos(\psi-\chi)}\,dR\,d\psi. \tag{3.2.54}$$

Интегрирование по ψ можно выполнить непосредственно. Это дает (Watson, 1944, с. 20, выражение (5), с очевидной подстановкой)

$$\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ik_0R\rho\cos(\psi-\chi)}\,d\psi=2\pi J_0(k_0R\rho), \tag{3.2.55}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода. Таким образом, (3.2.54) принимает вид

$$a(p,q)=\frac{k_0^2}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ik_0R}J_0(k_0R\rho)\,dR. \tag{3.2.56}$$

Интеграл в правой части можно вычислить при помощи хорошо известных формул преобразования Ганкеля [Erdelyi, 1954, с. 7, разд. 8.2, формулы (5) и (6)]

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{\sqrt{x}}J_0(xy)\sqrt{xy}\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } 0<y<a,\\ \left(\dfrac{y}{y^2-a^2}\right)^{1/2} & \text{при } a<y<\infty,\end{cases}$$

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin ax}{\sqrt{x}}J_0(xy)\sqrt{xy}\,dx=\begin{cases}\left(\dfrac{y}{a^2-y^2}\right)^{1/2} & \text{при } 0<y<a,\\ 0 & \text{при } a<y<\infty.\end{cases}$$

Если объединить действительную и мнимые части этих выражений и сократить общие множители, то получим формулу

$$\int\limits_0^{\infty}\mathrm{e}^{iax}J_0(xy)\,dx=\begin{cases}\dfrac{i}{(a^2-y^2)^{1/2}} & \text{при } 0<y<a,\\ \dfrac{1}{(y^2-a^2)^{1/2}} & \text{при } y<a<\infty.\end{cases} \tag{3.2.57}$$

Если в этих формулах положить $a=k_0$, $x=R$, $y=k_0\rho$ и воспользоваться тем фактом, что, в соответствии с (3.2.53б), $\rho^2=p^2+q^2$, то найдем

$$\int\limits_0^{\infty}\mathrm{e}^{ik_0R}J_0(k_0R\rho)\,dR=\begin{cases}\dfrac{i}{k_0(1-p^2-q^2)^{1/2}} & \text{при } p^2+q^2<1,\\ \dfrac{1}{k_0(p^2+q^2-1)^{1/2}} & \text{при } p^2+q^2>1.\end{cases} \tag{3.2.58}$$

Подставляя формулу (3.2.58) в (3.2.56) и вспоминая определение (3.2.50) для величины m, получим следующее простое выражение для амплитуды углового спектра:

$$a(p,q)=\frac{ik_0}{2\pi}\frac{1}{m}. \tag{3.2.59}$$

При подстановке (3.2.59) в (3.2.49) окончательно получим искомое представление для сферической волны:

$$\frac{\mathrm{e}^{ik_0r}}{r}=\frac{ik_0}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{m}\,\mathrm{e}^{ik_0(px+qy+mz)}\,dp\,dq,\quad (z>0). \tag{3.2.60}$$

Более тщательный анализ показывает, что эта формула, в действительности, справедлива не только в области полупространства $z > 0$, но и, как мы предполагали, на плоскости $z = 0$, за исключением начала координат.

Точно таким же образом, или используя соображения симметрии, можно показать, что при $z < 0$ выражение (3.2.60) остается справедливым, если z заменить на $|z|$. Комбинируя две эти формулы, получаем для всех z

$$\frac{e^{ik_0 r}}{r} = \frac{ik_0}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} e^{ik_0(px+qy+m|z|)}\, dp\, dq, \quad (z > 0). \tag{3.2.61}$$

Выражение в правой части уравнения (3.2.61) суть форма ***представления Вейля для расходящейся сферической волны***. Оно описывает сферическую волну в каждом полупространстве $z \leqslant 0$ и $z \geqslant 0$ в виде углового спектра плоских волн, который состоит из однородных волн, распространяющихся в дальнюю зону и затухающих волн, экспоненциально убывающих по амплитуде при увеличении расстояния $|z|$ от плоскости z. Заметим, что угловая функция спектральной амплитуды каждой из плоских волн, определяемая уравнением (3.2.59), является сингулярной при $m = 0$, т.е. при $p^2 + q^2 = 1$. Последнее соотношение представляет собой окружность на p, q-плоскости, при переходе через которую изменяется характер мод плоских волн, а именно, моды являются однородными, если $p^2 + q^2 \leqslant 1$, и затухающими, если $p^2 + q^2 > 1$. Сингулярное поведение спектральной амплитуды $a(p, q)$ на этой окружности обусловлено сингулярностью сферической волны в начале координат. Однако эти сингулярности в подынтегральном выражении представления Вейля являются интегрируемыми, конечно, за исключением случая, когда $x = y = z = 0$. Другая причина сингулярности сферической волны состоит в том, что подынтегральное выражение неаналитично [наличие $|z|$ вместо z в (3.2.61)].

Прежде чем продвинуться дальше, кратко рассмотрим соответствующее ***представление Вейля для сходящейся сферической волны***. Его можно вывести непосредственно, выполняя комплексное сопряжение уравнения (3.2.61). Если перейти от переменных интегрирования p и q к переменным $-p$ и $-q$, то

$$\frac{e^{-ik_0 r}}{r} = -\frac{ik_0}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m^*} e^{ik_0(px+qy+m^*|z|)}\, dp\, dq, \quad (z > 0), \tag{3.2.62}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Если вспомнить, что согласно (3.2.50) $m^* = m$ для однородных волн и $m^* = -m$ для затухающих волн, то станет ясно, что формула (3.2.62) представляет сходящуюся сферическую волну в каждом полупространстве $z > 0$ и $z < 0$ в виде суперпозиции однородных волн, распространяющихся от дальней зоны к началу координат, и затухающих волн, амплитуды которых экспоненциально убывают при увеличении $|z|$. Таким образом, по сравнению со случаем расходящейся волны, каждая однородная волна распространяется в обратном направлении, тогда как затухающие волны не изменяются.[1]

На основе (3.2.61) можно легко получить другой вариант формулы Вейля, если ввести другие переменные интегрирования. Для этой цели положим

$$p = \sin\alpha \cos\beta, \quad q = \sin\alpha \sin\beta, \quad m = \cos\alpha. \tag{3.2.63}$$

Вспоминая, что $p^2 + q^2 + m^2 = 1$, (условие, согласно которому каждый член под знаком интеграла представляет моду уравнения Гельмгольца $(\nabla^2 + k_0^2)\, U(\mathbf{r}) = 0$), ясно, что для однородных волн ($p^2 + q^2 \leqslant 1$) α и β

[1] Если вычесть (3.2.62) из (3.2.61), то вклады от затухающих волн сокращаются. Тогда после простых алгебраических преобразований получим хорошо известную формулу (см., например, Courant and Hilbert, 1962, с. 195)

$$\frac{\sin k_0 r}{k_0 r} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \exp(ik_0 \mathbf{s} \cdot \mathbf{r})\, d\Omega.$$

Здесь $\mathbf{s}$ — действительный единичный вектор, $d\Omega$ — элемент телесного угла [см. (3.2.66)], и интегрирование выполняется по всему телесному углу 4π, образуемому всевозможными направлениями вектора $\mathbf{s}$. С точки зрения физики, функцию $\sin(k_0 r)/k_0 r$ можно рассматривать как результат суперпозиции однородных плоских волн с одинаковыми амплитудами $\frac{1}{4\pi}$, распространяющихся во всех возможных направлениях.

— сферические полярные углы, задающие направления распространения вдоль полярной оси в положительном направлении оси z. Однако, так как для затухающих волн ($p^2+q^2>1$) m — комплексная величина, то преобразование (3.2.63) требует, чтобы для таких волн угол α был комплексным. Можно легко проверить, что для однородных волн

$$0 \leqslant \alpha < \pi/2, \quad 0 \leqslant \beta < 2\pi, \tag{3.2.64}$$

тогда как для затухающих волн

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + i\alpha', \quad 0 \leqslant \beta < 2\pi, \tag{3.2.65}$$

где $-\infty < \alpha' < 0$. На рис. 3.14*а* через C_1 обозначена часть α-контура, соответствующая однородным волнам, а C_2 — часть контура, соответствующая затухающим волнам.

Вычисляя якобиан преобразования $p, q \to \alpha, \beta$, можно легко показать, что в обоих случаях

$$\frac{dp\,dq}{m} = \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta. \tag{3.2.66}$$

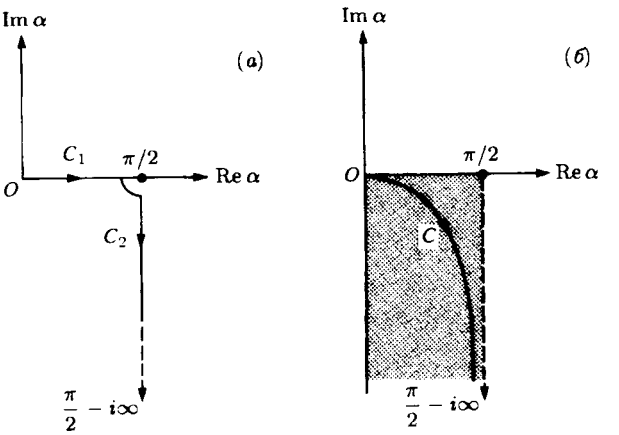


Рис. 3.14. α-контуры, используемые в представлении Вейля для сферической волны. На рис. *а* каждая точка на горизонтальном сегменте C_1 связана с однородной плоской волной, а каждая точка на вертикальной линии C_2 связана с затухающей волной в формуле (3.2.61). Кривая C на рис. *б* — контур, используемый в формуле (3.2.67)

Очевидно, что для действительных значений α выражение (3.2.66) представляет собой элемент телесного угла, образованного (действительными) направлениями распространения однородных плоских волн, в подынтегральном выражении формулы (3.2.61). Подставляя (3.2.66) в (3.2.61), получим следующее альтернативное представление расходящейся сферической волны:

$$\frac{e^{ik_0 r}}{r} = \frac{ik_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\beta \int_{C_1+C_2} e^{ik_0(px+qy+m|z|)} \sin\alpha\, d\alpha. \tag{3.2.67}$$

Здесь p, q и m, конечно, определяются формулами (3.2.63).

Применяя хорошо известные правила интегрирования в комплексной плоскости, контур $C_1 + C_2$ можно заменить контуром, обозначенным на рис. 3.14*б* как C. Этим контуром может быть любая кривая на комплексной α-плоскости, которая начинается в начале координат, асимптотически стремится к $\pi/2 - i\infty$ и лежит целиком внутри заштрихованной полоски. Формула (3.2.67), в которой $C_1 + C_2$ заменен на C, является оригинальным вариантом представления Вейля для расходящейся сферической волны.

Рассмотрим поведение модовых функций вдоль такого контура C. Поскольку каждый из трех параметров p, q и m принимает комплексные значения в каждой точке на кривой C, за исключением начала координат, будем полагать, что

$$p = p_1 + ip_2, \quad q = q_1 + iq_2, \quad m = m_1 + im_2, \tag{3.2.68}$$

где p_1, p_2, q_1, q_2, m_1 и m_2 — действительные величины. Тогда, очевидно, имеем

$$e^{i(px+qy+m|z|)} = e^{ik_0(p_1x+q_1y+m_1|z|)}\, e^{-k_0(p_2x+q_2y+m_2|z|)}, \tag{3.2.69}$$

откуда видно, что поверхности равных амплитуд и равных фаз отличаются, за исключением особых значений параметров. Однако эти моды представляют собой плоские волны, распространяющиеся в направлениях, направляющие косинусы которых пропорциональны p_1, q_1, $\pm m_1$, а амплитуды экспоненциально убывают в направлениях p_2, q_2, $\pm m_2$. Здесь верхний и нижний знаки у m_1 и m_2 соответствуют $z < 0$ и $z > 0$. Эти моды, очевидно, являются обобщениями затухающих волн, с которыми мы уже встречались ранее.

3.2.5. Дифракционные формулы Рэлея[1]

Теперь покажем, как с помощью преобразования Вейля для сферической волны можно легко решить граничные задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца в полупространстве.

Сначала рассмотрим задачу Дирихле, т.е. задачу, в которой нужно найти решение уравнения Гельмгольца (3.2.3) для волнового поля $U(x,y,z)$ в полупространстве $z>0$, зная граничные значения $U(x,y,0)$ на плоскости $z=0$. Будем предполагать, что $U(x,y,z)$ уходит на бесконечность в полупространстве $z>0$.

Начнем с представления в виде углового спектра (3.2.19) поля в полупространстве, а именно,

$$U(x,y,z)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} a(p,q)\,\mathrm{e}^{ik_0(px+qy+mz)}\,dp\,dq, \tag{3.2.70}$$

где согласно (3.2.27) и (3.2.24)

$$a(p,q)=\left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2\iint\limits_{-\infty}^{\infty} U(x',y',0)\,\mathrm{e}^{-ik_0(px'+qy')}\,dx'\,dy'. \tag{3.2.71}$$

Если подставить (3.2.71) в (3.2.70) и поменять порядок интегрирования, то получим следующее выражение для поля через граничные значения:

$$U(x,y,z)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} U(x',y',0)G_d(x-x',y-y',z)\,dx'\,dy', \tag{3.2.72}$$

где

$$G_d(x-x',y-y',z)=\left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ik_0[p(x-x')+q(y-y')+mz]}\,dp\,dq. \tag{3.2.73}$$

Теперь согласно формуле Вейля (3.2.60) с $\mathbf{r}\equiv(x,y,z>0)$ и $\mathbf{r}'\equiv(x,y,0)$

$$\frac{\mathrm{e}^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\frac{ik_0}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{m}\,\mathrm{e}^{ik_0[p(x-x')+q(y-y')+mz]}\,dp\,dq. \tag{3.2.74}$$

Если продифференцировать эту формулу по z и поменять справа порядок дифференцирования и интегрирования, то найдем, что

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\mathrm{e}^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]=-\frac{k_0^2}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ik_0[p(x-x')+q(y-y')+mz]}dp\,dq. \tag{3.2.75}$$

Из сравнения (3.2.73) и (3.2.75) видно, что

$$G_d(x-x',y-y',z)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{e}^{ik_0R}}{R}\right), \tag{3.2.76}$$

где

$$R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=\left[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right]^{1/2}. \tag{3.2.77}$$

Наконец, подставляя (3.2.76) в (3.2.72), получим искомое решение задачи Дирихле:

$$U(x,y,z)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}U(x',y',0)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{e}^{ik_0R}}{R}\right)dx'\,dy'. \tag{3.2.78}$$

[1] см. дополнительно книгу (*Стретт (Рэлей), 1940) — *ред. пер.*

Эта формула впервые была получена Рэлеем[1] (Rayleigh, 1897) и иногда называется *дифракционной формулой Рэлея первого рода*.

Тем же самым способом можно получить решение соответствующей задачи Неймана, в которой нужно найти (удаляющееся) решение уравнения Гельмгольца во всем полупространстве $z > 0$, зная граничные значения производной $\partial U(x,y,z)/\partial z$ на плоскости $z = 0$. Дифференцируя (3.2.70) по z и меняя порядок дифференцирования и интегрирования, найдем, что

$$\left[\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\right]_{z=0} = ik_0 \iint_{-\infty}^{\infty} ma(p,q)\, \mathrm{e}^{ik_0(px+qy)}\, dp\, dq. \tag{3.2.79}$$

Выполняя обратное преобразование Фурье этой формулы (после обычной замены переменных интегрирования), получим следующее выражение для функции спектральной амплитуды поля:

$$a(p,q) = \left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{ik_0 m} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial U(x',y',z)}{\partial z}\right]_{z=0} \mathrm{e}^{-ik_0(px'+qy')}\, dx'\, dy'. \tag{3.2.80}$$

Далее подставим отсюда $a(p,q)$ в (3.2.70) и поменяем порядок интегралов. Тогда получим

$$U(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial U(x',y',z)}{\partial z}\right]_{z=0} G_{\mathrm{N}}(x-x', y-y', z)\, dx'\, dy', \tag{3.2.81}$$

где

$$G_{\mathrm{N}}(x-x', y-y', z) = -\frac{ik_0}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m}\, \mathrm{e}^{ik_0[p(x-x')+q(y-y')+mz]}\, dp\, dq. \tag{3.2.82}$$

Сравнивая эту формулу с представлением Вейля (3.2.60) для сферической волны, мы сразу видим, что

$$G_{\mathrm{N}}(x-x', y-y', z) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{ik_0 R}}{R}, \tag{3.2.83}$$

где R снова определяется формулой (3.2.77). Окончательно, при подстановке (3.2.83) в (3.2.81) найдем

$$U(x,y,z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial U(x',y',z)}{\partial z}\right]_{z=0} \frac{\mathrm{e}^{ik_0 R}}{R}\, dx'\, dy'. \tag{3.2.84}$$

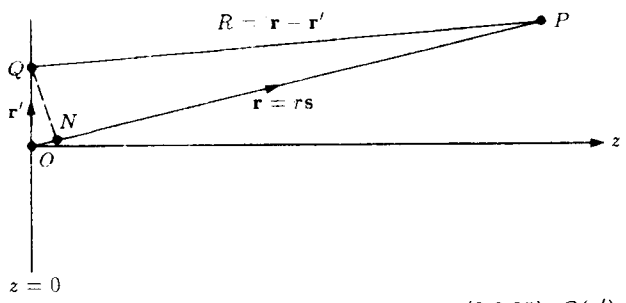


Рис. 3.15. Приближение дальней зоны (3.2.85). $Q(\mathbf{r}')$, $[\mathbf{r}' = (x', y', 0)]$ и $P(\mathbf{r})$, $[\mathbf{r} = (x, y, z)]$ — точки на плоскости $z = 0$ и в дальней зоне, соответственно. Когда r достаточно велико $\overline{QP} \sim \overline{OP} - \overline{ON}$, где N — основание перпендикуляра, проведенного из Q на линию OP, т.е. $R \sim r - \mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'$

Эта формула представляет собой искомое решение задачи Неймана. Иногда ее называют *дифракционной формулой Рэлея второго рода* (Rayleigh, 1897).

В заключение этого раздела рассмотрим поведение дальнего поля на основе дифракционной формулы Рэлея первого рода [см. (3.2.78)]. Для этого заметим, что когда r достаточно велико,

$$R \sim r - \mathbf{s}\cdot\mathbf{r}', \tag{3.2.85}$$

где $\mathbf{s}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$ (см. рис. 3.15). Однако

$$\frac{\mathrm{e}^{ik_0 R}}{R} \sim \frac{\mathrm{e}^{ik_0 r}}{r}\, \mathrm{e}^{-ik_0 \mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'} \quad \text{при} \quad k_0 r \to \infty, \tag{3.2.86}$$

[1] Другой вывод формулы Рэлея (основанный на методе образов), справедливый при более общих условиях, был дан Лунебургом (Luneburg, 1964, разд. 45). Более простой вывод этой формулы, а также второй формулы Рэлея [см. (3.2.84) ниже], на основе интегральной теории Гельмгольца — Кирхгофа, можно найти в книге (Baker and Copson, 1950, с. 157–158).

если $\mathbf{s}$ — фиксирован. Дифференцируя (3.2.86) по z в этом пределе, легко найдем, что

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{ik_0R}}{R}\right) \sim ik_0\left(\frac{z}{r}\right)\frac{e^{ik_0r}}{r}e^{-ik_0\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'}. \tag{3.2.87}$$

Подставляя (3.2.87) в (3.2.78), получим формулу

$$U(r\mathbf{s}) \equiv U(x,y,z) \sim -2\pi ik_0\left(\frac{z}{r}\right)\widetilde{U}\left(k_0\frac{x}{r}, k_0\frac{y}{r}\right)\frac{e^{ik_0r}}{r} \quad \text{при} \quad k_0r \to \infty, \tag{3.2.88}$$

где $\widetilde{U}_0(u,v)$ — фурье-образ от $U(x,y,0)$ (3.2.24). Эта формула для дальнего поля соответствует формуле (3.2.34), полученной другим способом.

3.3. Метод стационарной фазы

Для получения приближений к различным интегралам, которые часто возникают в волновой теории, можно использовать процедуру, которая основана на так называемом методе (или принципе) стационарной фазы. Этот метод дает асимптотическое приближение к интегралам для больших значений соответствующего параметра. Прежде чем рассматривать сущность этого метода, важно обсудить, что мы понимаем под асимптотическим разложением.

3.3.1. Определение асимптотического разложения

Предположим, что

$$F(\xi) = G(\xi)\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{\xi_n} + R_N(\xi)\right], \tag{3.3.1}$$

где для всех N

$$\xi^N R_N(\xi) \to 0, \tag{3.3.2}$$

если $|\xi| \to \infty$ в области $\arg\xi$, a_n — константы, и $G(\xi)$ — некоторая функция от ξ. Тогда, записывая

$$F(\xi) \sim G(\xi)\left[a_0 + \frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\xi^2} + \ldots\right], \tag{3.3.3}$$

говорят, что правая часть формулы (3.3.3) представляет собой *асимптотическое разложение* $F(\xi)$ в определенной области $\arg\xi$. Эта формула означает, что когда $|\xi|$ достаточно велико, абсолютное значение разности между $F(\xi)/G(\xi)$ и суммой конечного ряда $\sum_{n=1}^{N} a_n/\xi^n$ составляет порядка $1/|\xi|^{N+1}$.

Асимптотические разложения могут сильно отличаться от поведения обычных рядов. В частности, они могут не сходится для некоторых или всех значений $|\xi|$. Тем не менее, они часто дают хорошие приближения при достаточно больших значениях $|\xi|$. Фактически при достаточно больших $|\xi|$ первый член $a_0G(\xi)$ в правой части (3.3.3) может обеспечить хорошее приближение для $F(\xi)$. Если используется только первый член (или несколько первых членов) асимптотического разложения, то иногда говорят об *асимптотическом приближении* к $F(\xi)$.

Рассмотрение общих свойств асимптотических рядов выходит за рамки этой книги[1], так как оно представляет собой строгое рассмотрение метода стационарной фазы. Мы лишь обсудим вкратце сущность метода и обоснуем его целесообразность. Далее мы воспользуемся методом для вывода формулы асимптотического приближения к некоторым интегралам, которые часто используются в оптике.

[1] Более подробно см., например, книгу (Whittaker and Watson, 1940, гл. 8).

3.3.2. Метод стационарной фазы для однократных интегралов

Рассмотрим интеграл вида

$$F(k) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kg(x)}\,dx, \tag{3.3.4}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — действительные регулярные функции действительной переменной x, а a и b — действительные константы. Без потери общности можно предположить, что k является положительным. В физических приложениях $F(k)$ часто представляет собой совокупное действие волн с амплитудами $f(x)$ и фазами $g(x)$, имеющих одинаковые волновые числа k.

Чтобы получить представление о поведении интеграла (3.3.4) как функции k, рассмотрим простой пример. Возьмем

$$f(x) \equiv 1, \quad g(x) = x^2, \tag{3.3.5}$$

и рассмотрим действительную часть (обозначаемую как Re) интеграла:

$$\mathrm{Re}\,F_1(k) = \int_a^b \cos(kx^2)\,dx, \quad (a < 0,\ b > 0). \tag{3.3.6}$$

Исследуем поведение подынтегрального выражения

$$G(x,k) = \cos kx^2 \tag{3.3.7}$$

в формуле (3.3.6) при разных значениях k. При заданном k функция $G(x,k)$ будет осциллировать между $+1$ и -1 со скоростью осцилляций, зависящей от k. Поскольку при заданном k нули функции $G(x,k)$ определяются выражением

$$x = \pm\left[(n+\frac{1}{2})\pi/k\right]^{1/2}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,$$

ясно, что если брать все большие и большие значения k, то $G(x,k)$ будет осциллировать все быстрее и быстрее (см. рис. 3.16).

Откажемся от допущения, что $f(x) = 1$, но оставим условие $g(x) = x^2$. Тогда вместо (3.3.6) будем иметь интеграл

$$\mathrm{Re}\,F_2(k) = \int_a^b f(x)\cos(kx^2)\,dx. \tag{3.3.8}$$

Наличие множителя $f(x)$ приводит к «амплитудной модуляции» косинуса. Но очевидно, что независимо от точного вида $f(x)$, при достаточно больших k подынтегральное выражение в правой части (3.3.8) вновь будет осциллировать очень быстро и, следовательно, ***положительные и отрицательных вклады в подынтегральном выражении будут взаимно уничтожаться.*** Более того, можно ожидать, что это будет происходить независимо от того, какая используется функция $g(x)$ (в нашем примере $g(x) = x^2$). Однако, при достаточно больших k взаимное уничтожение не будет полным в окрестностях точек, где $g(x)$ стационарна внутри интервала интегрирования, т.е. где

$$\frac{dg(x)}{dx} = 0, \tag{3.3.9}$$

(в рассмотренных выше примерах начало координат $x = 0$) и точно также в граничных точках

$$x = a \quad \text{и} \quad x = b. \tag{3.3.10}$$

Эти особые точки называют ***критическими точками*** подынтегрального выражения (3.3.4). Говорят, что те точки, которые удовлетворяют (3.3.9), являются ***критическими точками первого рода***, а граничные точки (3.3.10) называют ***критическими точками второго рода***. Конечно, в особых случаях, когда некоторые критические точки могут совпадать с одной или с двумя граничными точками, они представляют собой стационарные точки $g(x)$. Другая сложность может возникнуть, например, когда функции $g(x)$ и $f(x)$ сингулярны. Однако, исключая эти более сложные ситуации, можно показать, что асимптотическое поведение интеграла вида (3.3.4) при $k \to \infty$ полностью определяется поведением подынтегрального выражения в критических точках и, более того, главный член в асимптотическом разложении $F(k)$ часто зависит от критических точек первого рода, т.е. от внутренних точек области интегрирования, в которых $g(x)$ стационарно. Этот факт представляет собой сущность ***принципа стационарной фазы.***

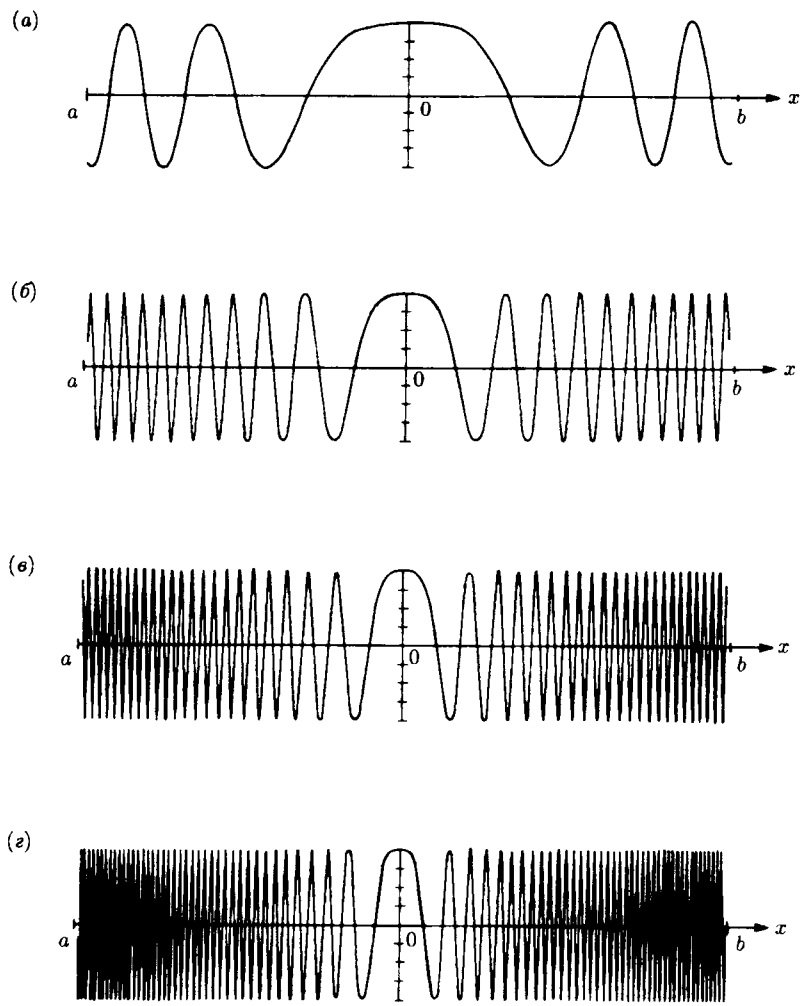


Рис. 3.16. Иллюстрация принципа стационарной фазы. Сравнение поведения функций: *а* — $G(x,1) = \cos x^2$; *б* — $G(x,4) = \cos 4x^2$; *в* — $G(x,9) = \cos 9x^2$; *г* — $G(x,16) = \cos 16x^2$

В задачах волновой теории, отсутствие вкладов от всей области интегрирования, за исключением вкладов от критических точек, может приводить к появлению нежелательной интерференции. Фактически метод стационарной фазы был первоначально предложен в связи с задачами, в которых исследовались волны на поверхности воды (в 1887 В. Томсоном, который позже стал лордом Кельвином). Следует сопоставить этот метод с другим хорошо известным асимптотическим методом, а именно, с методом наибыстрейшего спуска. (см., например, Copson, 1967, разд. 7; Dennery and Krzywicki, 1967, с. 87). Несмотря на то, что метод наибыстрейшего спуска формально похож на метод стационарной фазы, он имеет совершенно другой физический смысл, а именно, в контексте теории поля его можно рассматривать в терминах затухания амплитуд, а не в терминах интерференции фаз. С математической точки зрения, также имеются существенные отличия между этими двумя методами, потому что метод наибыстрейшего спуска использует аналитические свойства функций $f(x)$ и $g(x)$, которые рассматриваются как функции комплексного, а не действительного переменного, тогда как метод стационарной фазы можно разработать только в рамках функций действительного переменного[1]. По этой причине метод стационарной фазы, в отличие от метода наибыстрейшего спуска, можно легко распространить на двумерные интегралы (см. разд. 3.3.3). Более того, в отличие от метода стационарной фазы, метод наибыстрейшего спуска нельзя использовать в случае, когда интеграл имеет конечные пределы.

Теперь мы будем использовать принцип стационарной фазы для определения асимптотического поведения интеграла (3.3.4) при больших k. Наш вывод будет эвристическим, но его результаты можно проверить на основе точного анализа. (См., например, van der Corput, 1934–1935, 1936; Focke, 1954; Erdelyi 1955, разд. 2.9; Braun, 1956).

(а) Вклад критических точек первого рода

Допустим, что в интеграле (3.3.4) $f(x)$ — непрерывная функция, а $g(x)$ — дважды непрерывно-дифференцируемая функция в интервале $a < x < b$. Предположим сначала, что существует одна и только одна критическая точка первого рода, т.е. что существует только одна точка x_1 в интервале, на котором

$$g'(x_1) = 0, \tag{3.3.11}$$

[1] То, что метод стационарный фазы не следует рассматривать как частный случай метода наибыстрейшего спуска, подчеркивал еще ван Кампен (van Kampen, 1958).

где штрих означает дифференцирование по x. Предположим также, что вторая производная от $g(x)$, т.е. $g''(x)$, не равна нулю в точке $x = x_1$:

$$g''(x_1) \neq 0. \tag{3.3.12}$$

Тогда в точках x окрестности x_1

$$g(x) \approx g(x_1) + \frac{1}{2}(x - x_1)^2 g''(x_1). \tag{3.3.13}$$

Так как согласно принципу стационарной фазы вклад в асимптотическое приближение интегралов при больших k дают точки в окрестности x_1, то из (3.3.4) и (3.3.13) имеем

$$F(k) \sim \int_a^b f(x_1)\, \mathrm{e}^{ikg(x_1)}\, \mathrm{e}^{ik(x-x_1)^2 g''(x_1)/2}\, dx. \tag{3.3.14}$$

По той же самой причине можно расширить область интегрирования от (a, b) к $(-\infty, +\infty)$, тогда получим

$$F(k) \sim f(x_1)\, \mathrm{e}^{ikg(x_1)} \int_a^b \mathrm{e}^{ik(x-x_1)^2 g''(x_1)/2}\, dx. \tag{3.3.15}$$

Если перейти от переменной интегрирования x к $u = x - x_1$ и воспользоваться симметрией подынтегрального выражения, то формула (3.3.15) принимает вид

$$F(k) \sim 2f(x_1)\, \mathrm{e}^{ikg(x_1)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{ikg''(x_1)u^2/2}\, du. \tag{3.3.16}$$

Интеграл в правой части представляет собой хорошо известный интеграл Френеля, значение которого (Gradshteyn and Ryzhik, 1980, 395, # 3.691 1)

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{iau^2}\, du = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{|a|}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{\pm i\pi/4}, \tag{3.3.17}$$

где верхний и нижний знаки соответствуют $a \gtrless 0$. С учетом этого результата выражение (3.3.16) принимает вид

$$F^{(1)}(k) \sim \left[\frac{2\pi}{k\,|g''(x_1)|}\right]^{1/2} f(x_1)\, \mathrm{e}^{ikg(x_1)}\, \mathrm{e}^{\pm i\pi/4} \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{3.3.18}$$

где верхний и нижний знаки соответствуют[1] $g''(x_1) \gtrless 0$, и вместо $F(k)$ записали $F^{(1)}(k)$, для того, чтобы подчеркнуть, что выражение в правой части (3.3.18) представляет собой вклад критической точки первого рода.

При выводе формулы мы предполагали, что подынтегральное выражение имеет только одну критическую точку первого рода. Если имеется несколько таких точек x_1, x_2, ..., x_n, то говорят, что соответствующее асимптотическое приближение к $F(k)$ получено при суммировании вкладов, определяемых выражениями вида (3.3.18), на основе которых мы имеем

$$F^{(1)}(k) \sim \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{1/2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{|g''(x_j)|^{1/2}} f(x_j)\, \mathrm{e}^{ikg(x_j)}, \tag{3.3.19}$$

где

$$\varepsilon_j = \mathrm{e}^{\pm i\pi/4} \quad \text{согласно} \quad g''(x_j) \gtrless 0, \tag{3.3.20}$$

и предполагается, что $g''(x_j) \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

[1] Член $|g''(x_1)|$ имеет простой геометрический смысл. Согласно элементарной дифференциальной геометрии радиус кривизны $\rho(x)$ в точке кривой $y = g(x)$ определяется как $\rho(x) = \left|(1 + y')^{3/2}/y''\right|$. Однако в точке $x = x_1$, в которой y стационарна, $\rho(x_1) = 1/|y''(x_1)|$, и мы видим, что множитель $1/|g''(x_1)|^{1/2}$, который появляется в правой части (3.3.18), представляет собой квадратный корень радиуса кривизны фазовой функции $g(x)$ в стационарной точке.

Другой множитель $\mathrm{e}^{\pm i\pi/4}$ в формуле (3.3.18) также имеет интересную интерпретацию, например, в связи с хорошо известной фазовой аномалией волн вблизи фокуса (см. Born and Wolf, 1980, разд. 8.8.4).

(б) Вклад критических точек второго рода

Далее определим вклады критических точек второго рода, а именно, вклады граничных точек интервала интегрирования. Будем предполагать, что граничные точки являются нестационарными для $g(x)$, т.е. что

$$g'(a) \neq 0, \quad g'(b) \neq 0.$$

Перепишем интеграл (3.3.4) в виде

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{ikg(x)}\,dx = \frac{1}{ik}\int_a^b \left[\frac{d}{dx}\,\mathrm{e}^{ikg(x)}\right]\frac{f(x)}{g'(x)}\,dx.$$

Интегрируя правую сторону по частям, получим формулу

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{ikg(x)}\,dx = \frac{1}{ik}\left[\frac{f(b)}{g'(b)}\,\mathrm{e}^{ikg(b)} - \frac{f(a)}{g'(a)}\,\mathrm{e}^{ikg(a)}\right] - \frac{1}{ik}\int_a^b \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g'(x)}\right]\mathrm{e}^{ikg(x)}\,dx. \tag{3.3.21}$$

Снова интегрируя по частям, сразу находим, что третий член в правой части (3.3.21) порядка $1/k^2$ и, следовательно, по сравнению с двумя другими членами им можно пренебречь. Таким образом, можно заключить, что вклад критических точек второго рода составляет

$$F^{(2)}(k) \sim \frac{1}{ik}\left[\frac{f(b)}{g'(b)}\,\mathrm{e}^{ikg(b)} - \frac{f(a)}{g'(a)}\,\mathrm{e}^{ikg(a)}\right]. \tag{3.3.22}$$

Предшествующий анализ показывает, что при достаточно больших k

$$F(k) \sim F^{(1)}(k) + F^{(2)}(k), \tag{3.3.23}$$

где $F^{(1)}(k)$ определяется формулой (3.3.19), а $F^2(k)$ — формулой (3.3.22). Точный математический анализ показывает, что при допущенных условиях выражения (3.3.19) для $F^{(1)}(k)$ и (3.3.22) для $F^{(2)}(k)$ действительно представляют собой основные члены вкладов критических точек первого и второго родов, соответственно, в асимптотических разложениях[1] интеграла $F(k)$ при $k \to \infty$. В заключение отметим, что поскольку при больших значениях k $F^{(1)}(k)$ — порядка $1/\sqrt{k}$, а $F^{(2)}(k)$ — порядка $1/k$, вклады внутренних стационарных точек, если они существуют, являются более значимыми, нежели вклады граничных точек.

3.3.3. Метод стационарной фазы для двойных интегралов

Рассмотрим асимптотическое приближение при $k \to \infty$ для двойного интеграла

$$F(k) = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{e}^{ikg(x,y)}\,dx\,dy, \tag{3.3.24}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — действительные регулярные функции двух действительных переменных x и y, а D — двумерная односвязная замкнутая область. Предположим, что кривая C, ограничивающая область D, является гладкой, т.е. касательная к C изменяется непрерывно вдоль этой кривой.

Рассуждения, подобные тем, которые мы только что привели в общих чертах для одномерных интегралов, приводят к заключению, что при достаточно больших k член $\exp[ikg(x,y)]$ в выражении (3.3.24) быстро осциллирует, по мере пробегания точкой (x,y) области интегрирования, так что различные вклады сокращаются, за исключением вкладов от точек, находящихся в окрестности особых точек, которые также называются *критическими точками*. В этом состоит сущность *метода стационарной фазы для двойных интегралов вида (3.3.24)*.

Наиболее важными критическими точками являются точки в области интегрирования, в которых функция $g(x,y)$ стационарна, т.е. точки (x_1,y_1) в области D, в которых

$$\left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right|_{x_1,y_1} = \left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right|_{x_1,y_1} = 0, \tag{3.3.25}$$

[1] Полные асимптотические разложения приведены у Фоке (Focke, 1954). См. также (Stamnes, 1986, разд. 8).

и точки на границе C, для которых функция $g(x,y)$ стационарна относительно малого смещения dl вдоль кривой C, т.е. точки на кривой C, в которых

$$\frac{\partial g}{\partial l} = 0. \tag{3.3.26}$$

Точки области D, удовлетворяющие требованию (3.3.25), называются *критическими точками первого рода*, а точки, которые удовлетворяют требованию (3.3.26) — *критическими точками второго рода* (см. рис. 3.17).

Теперь приведем эвристический вывод вкладов этих видов критических точек в асимптотическое поведение двойного интеграла (3.3.24) при больших k[1].

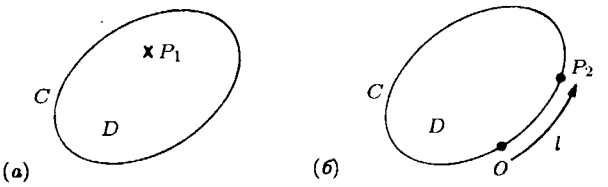


Рис. 3.17. *а* — Критическая точка P_1 первого рода: внутренняя стационарная точка функции $g(x,y)$; *б* — критическая точка P_2 второго рода: точка на границе C области интегрирования, где $g(x,y)$ стационарна относительно смещения dl вдоль границы, измеряемого от некоторой заданной точки O на кривой C

(а) Вклад критических точек первого рода

Предположим, что в двойном интеграле (3.3.24) функция $f(x,y)$ является непрерывной и что $g(x,y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка в области D. Также сначала предположим, что существует только одна критическая точка $P_1(x_1,y_1)$ первого рода в D. В окрестности этой точки

$$g(x,y) \approx g(x_1,y_1) + \frac{1}{2}\left[(x-x_1)^2 g_{xx} + 2(x-x_1)(y-y_1)g_{xy} + (y-y_1)^2 g_{yy}\right], \tag{3.3.27}$$

где $g_{xx} = \partial^2 g/\partial x^2$ и т.д. вычислены в точке P_1. Допустим, что в P_1

$$g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 \neq 0. \tag{3.3.28}$$

Подставляя (3.3.27) в (3.3.24) и используя в точности такое же доказательство, основанное на принципе стационарной фазы, которое мы привели ранее для одномерных интегралов, при достаточно больших k получим, что

$$F(k) \sim f(x_1,y_1)\mathrm{e}^{ikg(x_1,y_1)} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{1}{2}ik(g_{xx}\xi^2 + 2g_{xy}\xi\eta + g_{yy}\eta^2)\right] d\xi\, d\eta, \tag{3.3.29}$$

где ввели обозначения

$$\xi = x - x_1, \quad \eta = y - y_1. \tag{3.3.30}$$

Член в экспоненте подынтегрального выражения (3.3.29) можно упростить, соответствующим образом поворачивая оси ξ и η относительно начала координат $\xi = \eta = 0$. Для этого положим

$$u = \xi\cos\theta + \eta\sin\theta, \tag{3.3.31а}$$

$$v = -\xi\sin\theta + \eta\cos\theta \tag{3.3.31б}$$

и выберем θ таким образом, чтобы квадратичная форма в подынтегральном выражении свелась к сумме квадратов, т.е. таким образом, чтобы

$$g_{xx}\xi^2 + 2g_{xy}\xi\eta + g_{yy}\eta^2 \equiv Au^2 + Bv^2, \tag{3.3.32}$$

где A и B — некоторые константы, которые мы определим позже. Тогда (3.3.29) примет вид

$$F(k) \sim f(x_1,y_1)\,\mathrm{e}^{ikg(x_1,y_1)} I_A(k) I_B(k), \tag{3.3.33}$$

где

$$I_A = 2\int_0^{\infty} \exp(\tfrac{1}{2}ikAu^2)\,du, \quad I_B = 2\int_0^{\infty} \exp(\tfrac{1}{2}ikBv^2)\,dv. \tag{3.3.34}$$

[1]Более точное и более полное обсуждение приводится Фоке (Focke, 1954), Джонсом, Клайном (Jones and Kline, 1958) и Хако (Chako, 1965).

Интегралы (3.3.34) определяются формулой (3.3.17), и с учетом этого выражение (3.3.33) принимает вид

$$F(k) \sim \frac{2\pi\varepsilon_A\varepsilon_B}{k(|A|\,|B|)^{1/2}} f(x_1, y_1)\, e^{ikg(x_1,y_1)}, \tag{3.3.35}$$

где

$$\varepsilon_A = e^{\pm i\pi/4} \quad \text{при } A \gtrless 0, \qquad \varepsilon_B = e^{\pm i\pi/4} \quad \text{при } B \gtrless 0. \tag{3.3.36}$$

Далее выразим множитель $(|A|\,|B|)^{1/2}$ в формуле (3.3.35) через частные производные второго порядка от фазовой функции $g(x, y)$. Для этого воспользуемся тем фактом, что при повороте осей [см. (3.1.31)] квадратичная форма по двум переменным имеет два инварианта, а именно, след

$$\Sigma = g_{xx} + g_{yy} \tag{3.3.37а}$$

и детерминант[1]

$$\Delta = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2. \tag{3.3.37б}$$

В этом случае [см. (3.3.32)]

$$\Sigma = A + B, \tag{3.3.38а}$$
$$\Delta = AB. \tag{3.3.38б}$$

Для удобства введем

$$\varepsilon_A\varepsilon_B = i\sigma. \tag{3.3.39}$$

Если воспользоваться (3.3.37) и (3.3.38), то легко найдем, что

$$\begin{gathered} A > 0,\ B > 0 \quad \text{при } \Delta > 0,\ \Sigma > 0, \\ A < 0,\ B < 0 \quad \text{при } \Delta > 0,\ \Sigma < 0, \\ A > 0,\ B < 0 \text{ или } A < 0,\ B > 0 \quad \text{при } \Delta < 0. \end{gathered} \tag{3.3.40}$$

С учетом этих неравенств формула (3.3.35) принимает вид

$$F^{(1)}(k) \sim \frac{2\pi i\sigma}{k\sqrt{|\Delta|}} f(x_1, y_1)\, e^{ikg(x_1,y_1)}, \tag{3.3.41}$$

где

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \text{когда } \Delta > 0,\ \Sigma > 0, \\ -1, & \text{когда } \Delta > 0,\ \Sigma < 0, \\ -i, & \text{когда } \Delta < 0. \end{cases} \tag{3.3.42}$$

Слева вместо $F(k)$ мы записали $F^{(1)}(k)$, чтобы подчеркнуть, что выражение представляет собой вклад критических точек первого рода в асимптотическое приближение, в предположении, что такая критическая точка существует и что выполняется требование (3.3.28).

Если подынтегральное выражение в (3.3.24) имеет несколько критических точек первого рода, то соответствующее асимптотическое приближение для $F(k)$ получается в результате объединения всех отдельных вкладов, каждый из которых определяется выражением вида (3.3.41).

[1] Можно показать, что величина Δ пропорциональна гауссовской кривизне поверхности $g(x, y) = \text{const}$ [Eisenhart, 1947, с. 225, выражение (40.10)].

(б) Вклад критических точек второго рода

Рассмотрим эвристический вывод вклада критической точки второго рода, т.е. вклада точки $P_2(x_2, y_2)$ на границе C области D, на которой фазовая функция $g(x,y)$ стационарна относительно малого смещения вдоль C [см. (3.3.26)].

Пусть O будет начальной точкой на C и пусть l — расстояние от O до некоторой точки P_2 на границе C, где в качестве положительного направления был выбран обход против часовой стрелки. Пусть α — угол между касательной к кривой C в этой точке и положительным направлением оси x, как показано на рис. 3.18. Обозначая штрихом дифференцирование по l в критической точке P_2, имеем

$$g' \equiv g_x x' + g_y y' = 0. \tag{3.3.43}$$

Следовательно, в точке P_2

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'}{x'} = -\frac{g_x}{g_y}. \tag{3.3.44}$$

Сначала мы предположим, что в P_2

$$x' \neq 0 \quad \text{и} \quad g_y \neq 0. \tag{3.3.45}$$

Очевидно, что величины в уравнениях (3.3.43)—(3.3.45) вычисляются в точке P_2.

Для последующих целей рассмотрим следующие формулы:

$$x' = \cos\alpha = \pm\frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^{1/2}} = \pm\frac{g_y}{(g_x^2+g_y^2)^{1/2}}, \tag{3.3.46а}$$

$$y' = \sin\alpha = \mp\frac{\operatorname{tg}\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^{1/2}} = \mp\frac{g_x}{(g_x^2+g_y^2)^{1/2}}, \tag{3.3.46б}$$

и, вводя множитель η, определяемый как

$$\eta = \pm 1 \quad \text{при} \quad x' g_y \gtrless 0, \tag{3.3.47а}$$

получим [замечая, что согласно (3.3.43) $y' g_y = -x' g_x$]

$$x' = \cos\alpha = \frac{\eta g_y}{(g_x^2+g_y^2)^{1/2}}, \tag{3.3.48а}$$

$$y' = \sin\alpha = \frac{-\eta g_x}{(g_x^2+g_y^2)^{1/2}}. \tag{3.3.48б}$$

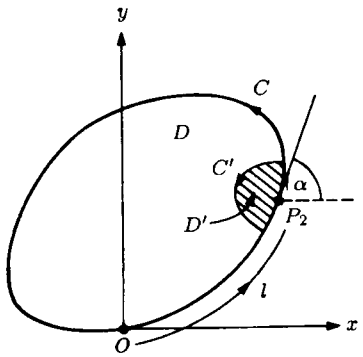


Рис. 3.18. Обозначения для вычисления вклада критической точки P_2 второго рода для двумерного интеграла (3.3.24) в асимптотическом пределе $k \to \infty$

Заметим, что согласно (3.3.43) в точке P_2 имеем $x'y'(g_x x' + g_y y') = 0$, т.е. $(g_x y')x'^2 + (g_y x')y'^2 = 0$. Следовательно, вместо (3.3.47а) можно записать

$$\eta = \pm 1 \quad \text{при} \quad y' g_x \lessgtr 0. \tag{3.3.47б}$$

Для того, чтобы оценить вклад точки P_2, ограничим область интегрирования, согласно методу стационарной фазы, малой окрестностью D', лежащей в области D (см. рис. 3.18) и воспользуемся теоремой Грина:

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{C'} [P\, dx + Q\, dy], \tag{3.3.49}$$

где C' — граница области D', часть которой совпадает с некоторой частью C, а оставшаяся часть целиком принадлежит D и направлена против часовой стрелки. Достаточно рассмотреть специальный случай, когда $Q \equiv 0$. Тогда тождество (3.3.49) примет вид

$$-\iint_{D'} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{C'} P\, dx. \tag{3.3.50}$$

Пусть $P = f\mathrm{e}^{ikg}$. Тогда $\partial P/\partial y = ikg_y f\,\mathrm{e}^{ikg} + f_y\,\mathrm{e}^{ikg}$, и уравнение (3.3.50) дает

$$-ik\iint_{D'} g_y f\,\mathrm{e}^{ikg}\,dx\,dy - \iint_{D'} f_y\,\mathrm{e}^{ikg}\,dx\,dy = \int_{C'} f\,\mathrm{e}^{ikg}\,dx. \tag{3.3.51}$$

Теперь при достаточно больших k вторым членом слева можно, очевидно, пренебречь по сравнению с первым членом. Далее, поскольку область D' может быть сколь угодно малой, можно заменить множитель g_y в подынтегральном выражении его значением в критической точке $P_2(x_2, y_2)$. Более того, можно также заменить dx справа на $x'\,dl$. Тогда получим формулу

$$-ikg_y\iint_{D'} f\,\mathrm{e}^{ikg}\,dx\,dy = \int_{C'} f\,\mathrm{e}^{ikg}x'\,dl. \tag{3.3.52}$$

Теперь в интеграле справа можно заменить f и x' их значениями в точке $P_2(x_2, y_2)$, которая определяется выражением (3.3.48а). После деления обеих частей на $-ikg_y(x_2, y_2)$ находим

$$\iint_{D'} f\,\mathrm{e}^{ikg}\,dx\,dy = \frac{i}{k}\frac{f}{(g_x^2 + g_y^2)^{1/2}}\int_{C'} \eta\,\mathrm{e}^{ikg}\,dl, \tag{3.3.53}$$

где g в последнем интеграле рассматривается как функция длины l дуги C.

Далее разложим фазовую функцию вблизи критической точки P_2, которую поместим, для простоты, в точку O, от которой измеряется длина дуги. Тогда для точек на C' имеем

$$g(l) \approx g(0) + \frac{1}{2}g''(0)l^2, \tag{3.3.54}$$

и, следовательно,

$$\int_{C'} \eta\,\mathrm{e}^{ikg}\,dl \approx \mathrm{e}^{ikg(0)}\int_{C'} \eta\,\mathrm{e}^{ikg''(0)l^2/2}\,dl \approx \mathrm{e}^{ikg(0)}\int_{-\infty}^{\infty} \eta\,\mathrm{e}^{ikg''(0)l^2/2}\,dl \tag{3.3.55}$$

при достаточно больших k. Снова используя (3.3.17) и симметричность подынтегрального выражения (3.3.55), найдем

$$\mathrm{e}^{ikg(0)}\int_{-\infty}^{\infty} \eta\,\mathrm{e}^{ikg''(0)l^2/2}\,dl = \left(\frac{2\pi)}{k\,|g''(0)|}\right)^{1/2}\eta\,\mathrm{e}^{i[kg(0)\pm\pi/4]}, \tag{3.3.56}$$

где верхний и нижний знаки соответствуют $g'' \gtrless 0$. Подставляя (3.3.55) и (3.5.56) в формулу (3.3.53), сразу находим, что

$$\iint_{D'} f\,\mathrm{e}^{ikg}\,dx\,dy \sim \frac{i\eta\varepsilon\sqrt{2\pi}}{k^{3/2}}\left[\frac{f\,\mathrm{e}^{ikg}}{|g''|^{1/2}\,(g_x^2 + g_y^2)^{1/2}}\right]_{P_2}, \tag{3.3.57}$$

где

$$\varepsilon = \mathrm{e}^{\pm i\pi/4} \quad \text{при} \quad g''(0) \gtrless 0.$$

Далее выразим величину $g''(0)$ (т.е. значение g'' в критической точке P_2) в более явной форме. В любой точке на C имеем

$$g' = g_x x' + g_y y', \tag{3.3.58}$$

$$g'' = (g_{xx}x' + g_{xy}y')x' + (g_{yx}x' + g_{yy}y')y' + g_x x'' + g_y y''. \tag{3.3.59}$$

Также в каждой точке на кривой C мы имеем:

$$x' = \cos\alpha, \quad y' = \sin\alpha, \tag{3.3.60}$$

$$x'' = -(\sin\alpha)\alpha', \quad y'' = (\cos\alpha)\alpha', \tag{3.3.61}$$

где

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dl} = \frac{1}{\rho}, \tag{3.3.62}$$

ρ — радиус кривизны кривой C в критической точке P_2, который является положительным или отрицательным (т.е. α увеличивается или уменьшается), в зависимости от того, где находится центр кривизны элемента границы в P_2: на той же стороне, где и область D', или на противоположной стороне (ρ положительна на рис. 3.18). Из формул (3.3.60)—(3.3.62) следует, что

$$x'' = -\frac{y'}{\rho}, \quad y'' = \frac{x'}{\rho}, \tag{3.3.63}$$

и, подставляя эти выражения в (3.3.59), получим для g'' следующую формулу

$$g'' = g_{xx}x'^2 + 2g_{xy}x'y' + g_{yy}y'^2 + \frac{1}{\rho}(-g_x y' + g_y x'). \tag{3.3.64}$$

Значения x' и y' в критических точках определяются из (3.3.48) и, следовательно, из формулы (3.3.64) получаем

$$g''(0) = \frac{g_{xx}g_y^2 - 2g_{xy}g_x g_y + g_{yy}g_x^2}{g_x^2 + g_y^2} + \frac{\eta}{\rho}(g_x^2 + g_y^2)^{1/2}. \tag{3.3.65}$$

Окончательно, подставляя (3.3.65) в (3.3.57), находим искомый вклад критической точки $P_2(x_2, y_2)$ второго рода в асимптотическое приближение для двойного интеграла (3.3.24) при $k \to \infty$:

$$F^{(2)}(k) \sim \frac{\sqrt{2\pi}i\varepsilon\eta}{k^{3/2}\sqrt{|\Omega|}} f(x_2, y_2)\, \mathrm{e}^{ikg(x_2,y_2)}, \tag{3.3.66}$$

где

$$\Omega = \left[g_{xx}g_y^2 - 2g_{xy}g_x g_y + g_{yy}g_x^2 + \left(\frac{\eta}{\rho}\right)(g_x^2 + g_y^2)^{3/2}\right]_{x_2,y_2}, \tag{3.3.67а}$$

$$\eta = \pm 1 \quad \text{при} \quad (x'g_y)_{x_2,y_2} \gtrless 0, \tag{3.3.67б}$$

$$\varepsilon = \mathrm{e}^{\pm i\pi/4} \quad \text{при} \quad \Omega \gtrless 0. \tag{3.3.67в}$$

Наконец, рассмотрим вопрос: останется ли формула (3.3.66) справедливой, когда $x' = 0$ и $g_y = 0$ в точке P_2? Это случай, который мы явно исключили из рассмотрения в предыдущем анализе [см. (3.3.45)]. Если $x' \equiv \cos\alpha = 0$, то $y' = \sin\alpha = \pm 1$, и из (3.3.43) следует, что в точке P_2 $g_y = 0$. Можно предположить, что в точке P_2 $g_x \neq 0$, в противном случае P_2 была бы также критической точкой первого рода, что мы исключаем. Вместо (3.3.50) воспользуемся теоремой Грина в виде

$$\iint_{D'} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{C'} Q\, dy. \tag{3.3.68}$$

Если взять $Q = f\,\mathrm{e}^{ikg}$, то получим, рассуждая точно также, как при выводе (3.3.52), формулу

$$ikg_x \iint_{D'} f\,\mathrm{e}^{ikg}\, dx\, dy = \int_{C'} f\,\mathrm{e}^{ikg} y'\, dl. \tag{3.3.69}$$

Заменяя f и y' справа их значениями в точке P_2 и используя уравнения (3.3.47б) и (3.3.48б), вновь получим формулу (3.3.53), где теперь $\left(g_x^2 + g_y^2\right)^{1/2} = |g_x|$, поскольку $g_y = 0$. Оставшаяся часть вычислений, такая же, как и прежде, приводит к (3.3.66), за исключением того, что η теперь определяется выражением (3.3.47б), а не (3.3.67б).

В общем случае существует несколько критических точек второго рода. Их совместный вклад в асимптотическое приближение для $F(k)$ определяется просто суммированием отдельных вкладов, каждый из которых можно найти из только что полученной формулы.

В заключение заметим, что согласно (3.3.41) вклад критических точек первого рода в асимптотическое приближение двойного интеграла (3.3.24) составляет порядка $1/k$, тогда как согласно (3.3.66) вклад критических точек второго рода — порядка $1/k^{3/2}$. Следовательно, если подынтегральное выражение имеет критические точки первого рода, то их вклады будут в общем случае более значимыми, нежели вклады критических точек второго рода.

Мы предполагали всюду, что граница C области D является гладкой. Если это не так, например, если на кривой C существуют точки, в которых наклон касательной терпит разрыв (угол квадратной области и т.д.), то такие точки также будут вносить вклад в асимптотическое приближение. Точки такого типа называются *критическими точками третьего рода*, и можно показать, что они дают вклад порядка $1/k^2$ (см., например, Stamnes, 1986, разд. 9.1.4).

3.3.4. Пример: поведение представления углового спектра для волновых полей в дальней зоне

В качестве примера, иллюстрирующего целесообразность формулы (3.3.41) для асимптотического приближения определенных видов двойных интегралов, получим теперь выражение для поведения в дальней зоне волнового поля, записанного в виде углового спектра плоских волн.

Рассмотрим волновое поле $U(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ в полупространстве $z \geqslant 0$ (предполагается, что оно является свободным), в котором поле удаляется на бесконечность. Согласно (3.2.19) пространственная часть волнового поля в этой области имеет представление углового спектра в виде

$$U(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(p,q)\,\mathrm{e}^{ik_0(px+qy+mz)}\,dp\,dq, \tag{3.3.70}$$

где

$$m = +(1-p^2-q^2)^{1/2} \quad \text{при } p^2+q^2 \leqslant 1, \tag{3.3.71а}$$

$$m = +i(p^2+q^2-1)^{1/2} \quad \text{при } p^2+q^2 > 0, \tag{3.3.71б}$$

и $k_0 = \omega/c$, c — скорость света в вакууме.

Поскольку затухающие волны, т.е. плоские волны в подынтегральном выражении (3.3.70), для которых используется (3.3.71б), экспоненциально убывают по амплитуде при увеличении расстояния от плоскости $z = 0$, они в общем случае не дают вклада в поле в дальней зоне. Однако, для того, чтобы определить поведение поля в дальней зоне, можно вместо интеграла (3.3.70) рассмотреть интеграл

$$U_{\mathrm{H}}(x,y,z) = \iint_{p^2+q^2\leqslant 1} a(p,q)\,\mathrm{e}^{ik_0(px+qy+mz)}\,dp\,dq, \tag{3.3.72}$$

который содержит только вклады однородных волн.

Рассмотрим поведение U_{H} в точке $P(x,y,z>0)$ дальней зоны в направлении, которое задается единичным вектором $\mathbf{s}$ $(s_x, s_y, s_z > 0)$. Тогда

$$s_x = \frac{x}{r}, \quad s_y = \frac{y}{r}, \quad s_z = \frac{z}{r} > 0, \tag{3.3.73}$$

где

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \tag{3.3.74}$$

— расстояние от точки начала координат до точки P (см. рис. 3.10). При подстановке (3.3.73) в (3.3.72) для x, y и z мы получим для U_{H} выражение

$$U_{\mathrm{H}}(x,y,z) = \iint_{p^2+q^2\leqslant 1} a(p,q)\,\mathrm{e}^{i\kappa g(p,q;s_x,s_y)}\,dp\,dq, \tag{3.3.75}$$

где

$$\kappa = k_0 r, \tag{3.3.76}$$

$$g(p,q;s_x,s_y) = ps_x + qs_y + ms_z, \tag{3.3.77}$$

где m определяется из (3.3.71а) и

$$s_z = (1 - s_x^2 - s_y^2)^{1/2}.$$

Нас интересует поведение $U_{\text{Н}}$ в дальней зоне, а точнее, асимптотическое поведение двойного интеграла в правой части выражения (3.3.75) при $k \to \infty$ и при фиксированных s_x и s_y. Этот интеграл имеет вид (3.3.24) и, следовательно, искомое асимптотическое приближение к $U_{\text{Н}}$ определяется формулой (3.3.41) (с очевидными изменениями обозначений). Полученная «фазовая функция» $g(p, q; s_x, s_y)$ имеет единственную стационарную точку, т.е. одну критическую точку первого рода в области интегрирования. Предполагая пока, что это так, и применяя к данному случаю формулу (3.3.41), получим

$$U_{\text{Н}}(s_x r, s_y r, s_z r) \sim \frac{2\pi i\sigma}{\kappa\sqrt{|\Delta|}} a(p_1, q_1)\, e^{i\kappa g(p_1, q_1; s_x, s_y)}, \tag{3.3.79}$$

где (p_1, g_1) — стационарная точка, т.е. точка, в которой

$$g_p = g_q = 0 \tag{3.3.80}$$

($g_p = \partial g/\partial p$, $g_q = \partial g/\partial q$). Кроме того,

$$\sigma = +1 \quad \text{при } \Delta > 0,\ \Sigma > 0, \tag{3.3.81а}$$
$$\sigma = -1 \quad \text{при } \Delta > 0,\ \Sigma < 0, \tag{3.3.81б}$$
$$\sigma = -i \quad \text{при } \Delta < 0, \tag{3.3.81в}$$

где

$$\Delta = (g_{pp} g_{qq} - g_{pq}^2)_1, \tag{3.3.82}$$
$$\Sigma = (g_{pp} + g_{qq})_1 \tag{3.3.83}$$

($g_{pp} = \partial^2 g/\partial p^2$ и т.д.), а нижний индекс 1 означает, что выражение в скобках вычислено в точке (p_1, q_1). Также предположим, что удовлетворяется требование (3.3.28), т.е. что $\Delta \neq 0$.

Теперь посмотрим, имеет ли в данном случае фазовая функция стационарную точку. Дифференцируя выражение (3.3.77), получаем

$$g_p = s_x + m_p s_z. \tag{3.3.84}$$

Из уравнения (3.3.71а) следует, что

$$m_p = -\frac{p}{m}. \tag{3.3.85}$$

С учетом последней формулы (3.3.84) принимает вид

$$g_p = s_x - \frac{p}{m} s_z. \tag{3.3.86а}$$

Аналогично,

$$g_q = s_y + -\frac{q}{m} s_z. \tag{3.3.86б}$$

Таким образом, функция g будет стационарной [будет выполняться условие (3.3.80)] при $p = p_1$ и $q = q_1$, где

$$\frac{p_1}{m_1} = \frac{s_x}{s_z}, \quad \frac{q_1}{m_1} = \frac{s_y}{s_z}, \tag{3.3.87а}$$

и [см. (3.3.71а)]

$$m_1 = +(1 - p_1^2 - q_1^2)^{1/2}. \tag{3.3.87б}$$

Так как отношения s_x/s_z и s_y/s_z фиксированы, из (3.3.87а) следует, что фазовая функция действительно имеет одну и только одну стационарную точку. Более того, поскольку $\mathbf{s}$ — единичный вектор,

$$s_z = +(1 - s_x^2 - s_y^2)^{1/2}, \tag{3.3.88}$$

и из формул (3.3.87) и (3.3.88) следует, что

$$p_1 = s_x, \quad q_1 = s_y, \quad m_1 = s_z. \tag{3.3.89}$$

Поскольку мы уже знаем физический смысл принципа стационарной фазы, этот результат означает, что *в общем случае в представлении углового спектра поля одна и только одна плоская волна дает вклад в дальнее поле в точке, расположенной в направлении, заданном единичным вектором* $\mathbf{s}$*; а именно, волна, распространяющаяся в заданном направлении*; другие волны гасятся из-за интерференции.

Чтобы определить асимптотическое приближение для поля в дальней зоне в направлении $\mathbf{s}$, нужно согласно выражениям (3.3.80) и (3.3.82) вычислить вторые производные от фазовой функции. Дифференцируя (3.3.84), получим

$$g_{pp} = -s_z \left(\frac{m - pm_p}{m^2} \right)$$

или, используя (3.3.85),

$$g_{pp} = -\frac{s_z}{m} \left(1 + \frac{p^2}{m^2} \right).$$

Следовательно, в стационарной точке p_1, q_1, определяемой формулой (3.3.89), имеем

$$(g_{pp})_1 = -\left[1 + \left(\frac{s_x}{s_z} \right)^2 \right]. \tag{3.3.90а}$$

Аналогично находим

$$(g_{qq})_1 = -\left[1 + \left(\frac{s_y}{s_z} \right)^2 \right], \tag{3.3.90б}$$

$$(g_{pq})_1 = -\left(\frac{s_x s_y}{s_z^2} \right). \tag{3.3.90в}$$

Используя эти выражения и тождество (3.3.88), легко найдем, что величины Δ и Σ имеют значения

$$\Sigma = -\left[1 + \frac{1}{s_z^2} \right], \quad \Delta = \frac{1}{s_z^2}. \tag{3.3.91}$$

Следовательно, в нашем случае, учитывая (3.3.81б), имеем

$$\sigma = -1. \tag{3.3.92}$$

Мы должны также вычислить $a(p,q)$ и $g(p,q)$ в стационарной точке (p_1, q_1), определяемой формулой (3.3.89). Очевидно, что

$$a(p_1, q_1) = a(s_x, s_y), \tag{3.3.93}$$

и, подставляя (3.3.89) в (3.3.77), получим

$$g(p_1, q_1; s_x, s_y) = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1. \tag{3.3.94}$$

Окончательно, подставляя (3.3.76) и (3.3.91) — (3.3.94) в формулу (3.3.79) и вспоминая, что в общем случае поведение U и $U_{\text{Н}}$ в дальней зоне одно и тоже, получим для дальнего поля асимптотическую формулу

$$U(x,y,z) \sim -\frac{2\pi i}{k_0} \left(\frac{z}{r} \right) a\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) \frac{e^{ik_0 r}}{r} \quad \text{при } k_0 r \to \infty, \tag{3.3.95}$$

где предел берется вдоль некоторого заданного направления $s_x = x/r$, $s_y = y/r$, $s_z = z/r > 0$ ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) в полупространстве $z > 0$.

Заметим, что в силу элементарного соотношения (3.2.26) между фурье-образом $\widetilde{U}_0(u,v)$ поля на граничной плоскости $z = 0$ и функцией амплитуды $a(p,q)$ углового спектра, асимптотическая формула (3.2.95) находится в хорошем согласии с формулой (3.2.88), полученной на основе дифракционного интеграла Рэлея первого рода.

Задачи

3.1 Определите преобразование Гильберта для следующих функций:

$$\text{а)}\quad \sin\omega x, \qquad \text{б)}\quad \frac{\cos\omega x}{\omega x}, \qquad \text{в)}\quad \frac{1}{1+(x/a)^2},$$

где ω и a — действительные ненулевые константы.

3.2 Скалярное поле $U(\mathbf{r})$ подчиняется уравнению Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0$$

в полупространстве $z > 0$ и ведет себя, как удаляющаяся на бесконечность волна в этом полупространстве. Более того, поле имеет свойство, согласно которому в двух плоскостях $z_1 > 0$ и $z = z_2 > z_1$

$$U(x, y, z_2) = U(x, y, z_1)$$

для всех значений x и y. Покажите, что:

(а) распределение поля на плоскости $z = 0$ может иметь только пространственно-частотные компоненты (u, v), которые удовлетворяют условию

$$u^2 + v^2 = k^2 - \left(\frac{2\pi\mu}{z_2 - z_1}\right)^2, \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

(б) распределения полей в полупространстве $z > 0$ одинаковы во всех плоскостях, удаленных на расстояние $N(z_2 - z_1)$ от плоскости $z = z_1$, где N — любое целое число.

3.3 Пусть $U^{(1)}(x, y, z)$ и $U^{(2)}(x, y, z)$ — два скалярных волновых поля, распространяющихся в полупространстве $z > 0$. Оба поля ограничены в пространственно-частотной области $u^2 + v^2 \leqslant k^2$ на плоскости $z = \text{const} > 0$. Покажите, что если в некоторой плоскости $z = z_1 > 0$ поля взаимно комплексно сопряжены, т.е. если

$$U^{(2)}(x, y, z_1) = \left[U^{(1)}(x, y, z_1)\right]^*$$

для всех значений x и y, то

$$U^{(2)}(x, y, z_1 + d) = \left[U^{(1)}(x, y, z_1 - d)\right]^*$$

для всех значений d, таких, что $|d| \leqslant z_1$, и для всех значений x и y.

3.4 Рассмотрите монохроматическое волновое поле $U(x, y, z)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ в полупространстве $z > 0$, представление в виде углового спектра которого содержит только однородные волны.

Получите выражение, аналогичное дифракционной формуле Рэлея, для поля $U(x, y, 0)$ в плоскости $z = 0$ при условии, что известно поле в плоскости $z = z_1 > 0$.

3.5 Рассмотрите монохроматическое поле $U(x, y, z)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ в полупространстве $z > 0$. Пусть

$$C(\zeta, \eta; z) = \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} U(\zeta + x, \eta + y, z)U^*(x, y, z)\,dx\,dy$$

— пространственная автокорреляционная функция поля в заданной z-плоскости.

(а) Выразите $C(\zeta, \eta; z)$ через комплексную спектральную функцию амплитуды $a(p, q)$ представления углового спектра поля.

(б) Покажите, что это возможно для функции $C(\zeta, \eta; z)$, не зависящей от z. Найдите общее условие, которому должно удовлетворять поле на граничной плоскости $z = 0$. Может ли это условие выполняться, если поле на граничной плоскости имеет конечное значение? Обоснуйте ответ.

3.6 Покажите, что существуют решения уравнения Гельмгольца, описывающие распространение в полупространство $z > 0$, которые имеют вид

$$U(x, y, z) = \mathrm{e}^{i\beta z} f(x, y),$$

где β — действительная константа.

Получите общее выражение для функции $f(x, y)$ при $0 < \beta \leqslant k$ и обсудите вид представления углового спектра таких полей. Почему решения такого типа известны как недифрагирующие лучи?

3.7 Решения для широкого класса двумерных задач, связанных с распространением монохроматических волн, выражаются в виде

$$\psi(kr, \theta) = \int_{-1}^{+1} f(t)\, \mathrm{e}^{ikr\left[t \sin\theta + (1-t^2)^{1/2} \cos\theta\right]}\, dt,$$

где (r, θ), $0 \leqslant \theta < \pi/2$ — полярные координаты точки поля, и k — положительная константа (волновое число).

Получите асимптотическое приближение для $\psi(kr, \theta)$ при $kr \to \infty$ и при заданном θ.

3.8 Взяв интегральное представление

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(x \sin t - nt)}\, dt$$

функции Бесселя первого рода, получите асимптотическое приближение для J_n, справедливое для больших значений x ($x \gg n$).

3.9 В теории дифракции волн на круговой апертуре имеет место следующий интеграл:

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{ika\sigma}}{\sigma^2} (1 - \rho \cos\phi)\, d\phi,$$

где ρ — положительная константа, и

$$\sigma = (1 - 2\rho \cos\phi + \rho^2)^{1/2}.$$

При этом $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, a — радиус апертуры.

Предполагая, что $\rho \neq 1$, найдите асимптотическое приближение для J, когда радиус апертуры больше длины волны λ ($ka \gg 1$).

Глава 4

ТЕОРИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА СКАЛЯРНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

4.1. Введение

Обратимся к изучению свойств флуктуирующих волновых полей, уделяя внимание, главным образом, оптическому диапазону спектра. Любое электромагнитное поле, существующее в природе, испытывает флуктуации, тесно связанные с самим полем. Как правило, эти флуктуации происходят слишком быстро, что не позволяет непосредственно наблюдать их. Тем не менее, вывод об их существовании можно сделать на основании соответствующих экспериментов, дающих информацию о корреляциях между флуктуациями в двух или более пространственно-временны́х точках.

Простейшими проявлениями корреляций в оптических полях являются хорошо известные интерференционные эффекты, возникающие при наложении двух световых пучков от одного источника. В последнее время, с появлением современных световых детекторов и электронных схем с очень малым временем разрешения, началось изучение других видов корреляций в оптических полях. Эти исследования, наряду с развитием лазеров и других новых типов световых источников, привели к возникновению систематической классификации явлений оптической корреляции и полного статистического описания оптических полей. Раздел оптики, рассматривающий эти вопросы, широко известен как *теория оптической когерентности*.

Первые исследования явлений когерентности принадлежат Верде (Verdet, 1865, 1869) и Лауэ (von Laue, 1907a, b). Некоторые ранние работы Стокса (Stokes, 1852) и Майкельсона (Michelson, 1890, 1891a, b, c, 1892, 1920), хотя в них прямо и не упоминалась когерентность (это понятие возникло значительно позже) также содействовали пониманию и развитию проблемы. Дальнейшие исследования проводились преимущественно Винером (Wiener, 1927–1928, 1929, 1930), Ван Циттертом (van Cittert, 1934), Цернике (Zernike, 1938), Гопкинсом (Hopkins, 1951, 1953, 1957), Вольфом (Wolf, 1954a, b, 1955, 1959, 1981a, b, 1982, 1986), Блан-Лапьерром и Дюмонте (Blanc-Lapierre and Dunmontet, 1955), Панхаратнамом (Pancharatnam, 1956, 1957, 1963a, b, 1975) и Агарвалом и Вольфом (Agarwal and Wolf, 1993). Их главным результатом[1] явилось введение точной меры корреляций между флуктуирующими параметрами поля в двух пространственно-временны́х точках и формулировка динамических законов, которым корреляционные функции (в общем виде представляющие собой совокупность тензоров корреляции второго порядка) удовлетворяют в свободном пространстве. Эта теория «второго порядка» предопределяет возможность рассмотрения с единых позиций всех хорошо известных явлений интерференции и поляризации в традиционной оптике.

Вскоре после того, как эта стадия в развитии вопроса была пройдена, были обнаружены некоторые совершенно новые явления оптической корреляции, объяснение которых потребовало анализа корреляционных свойств более широкого класса (см. гл. 6). Изучение этих явлений в конечном счете привело к формулировке общей теории оптических корреляций и полному статистическому описанию оптических полей. Это общее представление было получено в рамках как классической, так и квантовой теорий.

В этой и двух последующих главах мы рассмотрим теорию оптической когерентности на основе классической теории оптического поля. Описание, основанное на квантовой теории будет представлено в дальнейших главах.

---

[1] Более полный обзор исторического развития теории когерентности дан в книге Борна и Вольфа (Born and Wolf, 1980, разд. 10.1). Некоторые основополагающие работы собраны и изданы в *Selected Papers on Coherence and Fluctuations of Light*, L.Mandel and E.Wolf eds., (Dover, New York, 1970), Vol.1 (1950–1960), Vol.II (1961–1966) и SPIE Optical Engineering Press Milestone Series, MS 19, Parts I and II (Bellingham, WA, 1990). В этих двух книгах также представлена обширная библиография.

4.2. Некоторые элементарные представления и определения

Для начала введем некоторые элементарные представления и определения, обычно используемые при анализе простейших интерференционных экспериментов[1].

4.2.1. Временна́я когерентность и время когерентности

Рассмотрим световой пучок, исходящий из небольшого источника света σ. Мы предполагаем, что свет является квазимонохроматическим, т.е. ширина полосы частот $\Delta\nu$ света мала по сравнению со средней частотой $\bar{\nu}$ этой полосы, и «макроскопически стационарным»[2]. Предположим, что световой пучок разделяется в интерферометре Майкельсона на два пучка в точке P_1 и что эти два пучка вновь соединяются, приобретая разность хода $\Delta l = c\Delta t$ (c — скорость света в вакууме) (рис. 4.1). Если разность хода Δl достаточно мала, в плоскости наблюдения $\mathscr{B}$ образуются интерференционные полосы. Тогда говорят, что возникновение интерференционных полос является проявлением *временно́й когерентности* между двумя пучками, поскольку контраст между полосами зависит от времени задержки Δt, возникшего для этих двух пучков. Экспериментально установлено, что интерференционные полосы наблюдаются только тогда, когда выполняется условие

$$\Delta t \Delta\nu \lesssim 1, \tag{4.2.1}$$

где $\Delta\nu$ — ширина полосы частот света. Время задержки

$$\Delta t \sim \frac{1}{\Delta\nu} \tag{4.2.2}$$

называется *временем когерентности* света, а соответствующая разность хода

$$\Delta l = c\Delta t \sim \frac{c}{\Delta\nu} \tag{4.2.3}$$

— *длиной когерентности*, или, точнее, *продольной длиной когерентности света*. Поскольку $\nu = c/\lambda$, где λ — длина волны, $\Delta\nu \sim c\Delta\lambda/\bar{\lambda}^2$, выражение для длины когерентности может быть также записано в виде

$$\Delta l \sim \left(\frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda}\right)\bar{\lambda}, \tag{4.2.4}$$

где $\bar{\lambda}$ — средняя длина волны света. Приближенно это явление можно интерпретировать следующим образом. Каждая частотная компонента, присутствующая в спектре света, создает в пространстве периодическое распределение интенсивности, и полосы в плоскости наблюдения $\mathscr{B}$ можно рассматривать как результат сложения этих распределений. Распределения, созданные различными частотными компонентами, будут иметь различную пространственную периодичность. Следовательно, с увеличением времени задержки между двумя пучками интерференционная картина будет становиться все менее и менее различимой, поскольку максимумы различных монохроматических вкладов будут становиться все более и более несинхронизированными. При достаточно большом времени задержки периодические распределения интенсивности становятся настолько несинхронизированными, что суперпозиционная картина более не состоит из выраженных максимумов и минимумов интенсивности, т.е. интерферограмма не формируется. Простейшие вычисления показывают, что интерференционные полосы исчезают, когда Δt достигает значения, определяемого выражением (4.2.2).

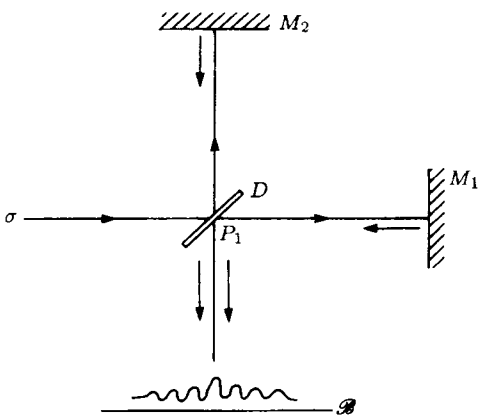


Рис. 4.1. Временна́я когерентность, иллюстрируемая на примере интерференционного эксперимента с использованием интерферометра Майкельсона: σ — источник; D — делитель пучка; M_1, M_2 — зеркала; $\mathscr{B}$ — плоскость наблюдения. (Для простоты компенсатор и коллимирующая система на схеме не показаны)

С другой стороны, можно объяснить это явление, используя понятие корреляций. Согласно разд. 3.1.2 выборочная функция квазимонохроматического светового возбуждения, рассматриваемого как стационарный случайный процесс, может быть представлена в виде последовательности медленно модулированных

[1] В качестве дополнительной литературы рекомендуем книгу (*Александров, Хвостенко, Чайка, 1991) — *ред. пер.*

[2] Под «макроскопической стационарностью» мы подразумеваем отсутствие флуктуаций в макроскопическом масштабе времени. На более строгом языке теории случайных процессов флуктуации могут быть представлены как стационарный случайный процесс (см. разд. 2.2), чей средний период и время корреляции значительно короче усредненного временно́го интервала, необходимого для наблюдения.

волновых цугов со средней частотой, равной средней частоте света, и длительностью порядка обратной ширины полосы частот света, т.е. порядка времени когерентности [(4.2.2)]. Делитель пучка D интерферометра Майкельсона расщепляет каждый волновой цуг на два цуга одинаковой формы и амплитуды. Волновые цуги двух пучков вновь складываются в плоскости наблюдения $\mathscr{B}$. При этом цуги, порожденные одним падающим волновым цугом, оказываются сдвинутыми друг относительно друга, поскольку между пучками возникает время задержки Δt. Очевидно, что сильная корреляция между флуктуациями в двух пучках будет иметь место в плоскости $\mathscr{B}$ в том случае, если время задержки мало по сравнению с $1/\Delta\nu$, т.е. мало по сравнению с длиной когерентности света. Если же время задержки значительно больше, чем $1/\Delta\nu$, то корреляция фактически будет отсутствовать. Таким образом, наличие или отсутствие интерференционных полос в плоскости наблюдения $\mathscr{B}$ напрямую связано с *корреляцией* или *отсутствием корреляции* между флуктуациями в двух световых пучках, достигающих $\mathscr{B}$, соответственно.

В разд. 7.3 явление временно́й когерентности будет рассмотрено нами в более широком контексте и с более строгой точки зрения при обсуждении хорошо известного метода Майкельсона для определения распределения интенсивности в спектральных линиях из экспериментов по двухлучевой интерференции.

В заключение приведем два простых примера, дающих представление о типичных порядках величин времени и длины когерентности. Для света, излучаемого тепловыми источниками (раскаленное тело, газовый разряд) с высокой степенью монохроматичности, ширина полосы частот $\Delta\nu$ составляет $10^8\,\mathrm{c}^{-1}$ или даже более. Соответствующее время когерентности Δt имеет значение 10^{-8} с, а длина когерентности $\Delta l \sim 3 \times 10^{10}\,\text{см} \cdot \text{с}^{-1} \times 10^{-4}\,\text{с} \sim 30\,\text{км}$.

4.2.2. Пространственная когерентность и площадь когерентности

Теперь рассмотрим вкратце интерференционный эксперимент типа опыта Юнга, используя квазимонохроматический свет от протяженного источника σ (рис. 4.2). Предположим, что σ представляет собой *тепловой* источник, такой, как раскаленное вещество или газовый разряд. Для простоты рассмотрим симметричную схему с источником в форме квадрата со стороной Δs. Если отверстия P_1 и P_2 расположены достаточно близко к оси симметрии, вблизи центральной точки P в плоскости наблюдения $\mathscr{B}$ будут наблюдаться интерференционные полосы. Возникновение полос является, как говорят, проявлением *пространственной когерентности* между двумя пучками, приходящими в точку P от двух отверстий P_1 и P_2, поскольку контраст между полосами зависит от расстояния между этими отверстиями (расстояние P_1P_2). Экспериментально установлено, что при достаточно большом расстоянии между источником и плоскостью $\mathscr{A}$, в которой расположены отверстия, интерференционные полосы вблизи P будут наблюдаться в том случае, если

$$\Delta\theta\Delta s \lesssim \bar{\lambda}, \tag{4.2.5}$$

где $\Delta\theta$ — угол, под которым виден отрезок P_1P_2 из источника, и $\bar{\lambda} = c/\bar{\nu}$ — средняя длина волны. Если через R обозначить расстояние между источником и плоскостью, в которой расположены отверстия, то оказывается, что для наблюдения полос вблизи P отверстия должны быть расположены на плоскости $\mathscr{A}$ в пределах области с центром в точке Q и площадью

$$\Delta A \sim (R\Delta\theta)^2 \sim \frac{R^2\bar{\lambda}^2}{S}, \tag{4.2.6}$$

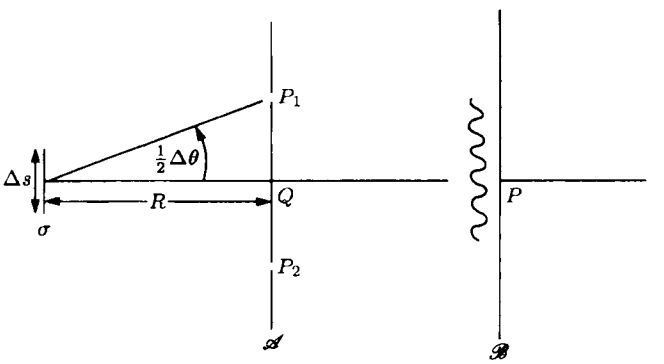


Рис. 4.2. Пространственная когерентность, иллюстрируемая интерференционным опытом Юнга для света от теплового источника σ

где $S = (\Delta s)^2$ — площадь источника. Эта область называется *площадью когерентности* света в плоскости $\mathscr{A}$ вблизи точки Q, а квадратный корень от площади когерентности иногда называют *поперечной длиной когерентности*. Следует отметить, что согласно (4.2.6) площадь когерентности будет тем больше, чем больше R. Однако, существует инвариантная величина, связанная с площадью когерентности и не зависящая от расстояния R, а именно, телесный угол $\Delta A/R^2$. Согласно (4.2.6) величина этого телесного угла определяется выражением

$$\Delta\Omega \sim \bar{\lambda}^2/S. \tag{4.2.7}$$

Иногда полезно выразить площадь когерентности через другой телесный угол $\Delta\Omega'$, под которым источник виден из точки Q. Поскольку $S = R^2\Delta\Omega'$, из (4.2.6) сразу же получаем следующее выражение для площади когерентности

$$\Delta A \sim \bar{\lambda}^2/\Delta\Omega'. \tag{4.2.8}$$

Элементарный вывод условия (4.2.5) приближенно может быть получен, исходя из следующих соображений. Свет, идущий от каждой точки источника, создает в плоскости наблюдения свою интерференционную картину. Поскольку флуктуации света от различных точек теплового источника можно считать взаимонезависимыми и, следовательно, предполагать отсутствие фиксированных фазовых соотношений между ними, то распределение интенсивности в каждой точке плоскости $\mathscr{B}$ представляет собой сумму интенсивностей отдельных интерферограмм от различных точек источника. Максимумы этих интерферограмм будут смещены по отношению друг к другу. Если положение источника и плоскостей $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ остается неизменным, а расстояние между двумя точечными отверстиями постепенно увеличивается, т.е. увеличивается угол $\Delta\theta$ на рис. 4.2, то отдельные интерферограммы становятся все более и более несинхронизированными, что в конечном итоге приведет к фактически равномерному распределению интенсивности вблизи центральной точки в плоскости наблюдения. Простейшие вычисления показывают, что это происходит при $\Delta\theta \sim \bar{\lambda}/\Delta s$, что согласуется с выражением (4.2.5).

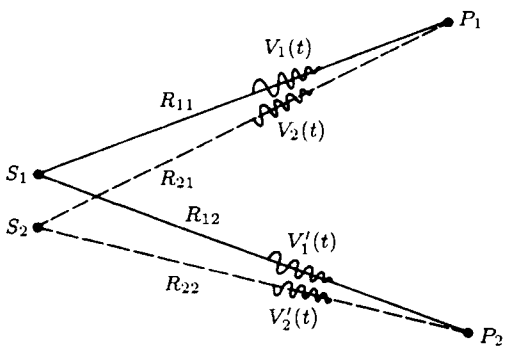


Рис. 4.3. Иллюстрация возникновения пространственной когерентности в двух точках P_1 и P_2 поля, излучаемого двумя некоррелированными источниками S_1 и S_2

Как и в случае временно́й когерентности, более глубокое понимание явления пространственной когерентности может быть получено, если проанализировать эксперимент с точки зрения корреляций, что и будет проделано в разд. 4.3. Однако, возможно, и мы сейчас покажем это, качественно объяснить возникновение корреляций в поле протяженного теплового источника, исходя из весьма простых соображений.

Суть явления легко понять, если вместо протяженного источника σ рассмотреть два точечных источника S_1 и S_2 (рис. 4.3). Предположим, что источники излучают квазимонохроматический свет с одинаковой средней частотой $\bar{\nu}$ и одинаковым эффективным частотным диапазоном $\Delta\nu$ и являются статистически независимыми, так что между световыми полями от этих источников не существует никаких корреляций. Рассмотрим теперь световые возмущения в двух точках P_1 и P_2 в пространстве вокруг источника. Если для простоты пренебречь поляризационными свойствами поля, то световые возмущения, достигающие P_1 от точечных источников S_1 и S_2, можно представить в виде комплексных аналитических скалярных сигналов $V_1(t)$ и $V_2(t)$, соответственно. Аналогичным образом световые возмущения, достигающие точки P_2 от двух точечных источников, могут быть представлены в виде комплексных аналитических сигналов $V_1'(t)$ и $V_2'(t)$.

Если разность между расстояниями $R_{11} = \overline{S_1P_1}$ и $R_{12} = \overline{S_1P_2}$ мала по сравнению с длиной когерентности света, то, очевидно, с точностью до определенного фазового множителя можно записать

$$V_1'(t) = V_1(t). \tag{4.2.9а}$$

По аналогии, если разность между $R_{21} = \overline{S_2P_1}$ и $R_{22} = \overline{S_2P_2}$ мала по сравнению с длиной когерентности света, то, с точностью до определенного фазового множителя имеем

$$V_2'(t) = V_2(t). \tag{4.2.9б}$$

Полное поле в точке P_1 представляет собой суперпозицию двух полей от двух точечных источников (см. рис. 4.3) и, следовательно, определяется выражением

$$V(P_1, t) = V_1(t) + V_2(t). \tag{4.2.10а}$$

Соответственно, полное поле в точке P_2 можно записать в виде

$$V(P_2, t) = V_1'(t) + V_2'(t). \tag{4.2.10б}$$

Поскольку $V_1(t)$ и $V_2(t)$ излучаются статистически независимыми точечными источниками S_1 и S_2, эти два возмущения некоррелированы, так же, как и $V_1'(t)$ и $V_2'(t)$. Однако, *суммы* $V_1(t) + V_2(t)$ и $V_1'(t) + V_2'(t)$,

очевидно, будут коррелированы в силу соотношений (4.2.9). Этот вывод графически проиллюстрирован на рис. 4.3, где (почти идентичные) волновые цуги V_1 и V_1', приходящие в точки P_1 и P_2 от источника S_1, изображены в виде сплошных линий, а (почти идентичные) волновые цуги V_2 и V_2', приходящие в точки P_1 и P_2 от источника S_2, — в виде пунктирных линий. Очевидно, что, хотя изображенные сплошными и пунктирными линиями волновые цуги могут быть совершенно разными, *сумма* двух волновых цугов, приходящих в точку P_1, и *сумма* двух волновых цугов, приходящих в точку P_2, одинаковы. Следовательно, поля в точках P_1 и P_2, заданные выражениями (4.2.10), в действительности будут сильно *коррелированы*. Таким образом, мы видим, что *несмотря на статистическую независимость источников S_1 и S_2, они порождают корреляции поля, которые формируются в процессе распространения и суперпозиции.*

Модель, которую мы только что обсудили, применима только к частному геометрическому случаю ($R_{11} \sim R_{12}$, $R_{21} \sim R_{22}$). Понятно, что если геометрические условия становятся менее строгими, ситуация несколько усложняется. Вместо высокой степени корреляции между полными полями в точках P_1 и P_2, очевидно, будет иметь место несколько меньшая степень корреляции, зависящая от конкретного расположения этих точек. В разд. 4.4.4 мы вновь вернемся к этому вопросу и рассмотрим его с более общей точки зрения.

Проиллюстрируем наш элементарный анализ пространственной когерентности на нескольких примерах. Предположим, что линейный размер теплового источника σ (рис. 4.2) $\Delta s = 1$ мм и что источник испускает квазимонохроматический свет со средней длиной волны $\bar{\lambda} = 5000$ Å. Пусть плоскость $\mathscr{A}$, в которой расположены отверстия, находится на расстоянии $R = 2$ м от источника. Тогда согласно выражению (4.2.6) площадь когерентности в плоскости $\mathscr{A}$ равна

$$\Delta A = \left(\frac{2 \times 10^2}{10^{-1}}\right)^2 \left(5 \times 10^{-5}\right)^2 \text{ см}^2 = 1 \text{ мм}^2, \tag{4.2.11}$$

т.е. ее линейные размеры будут порядка 1 мм.

В качестве второго примера оценим площадь когерентности пучка солнечного света, освещающего поверхность земли. Чтобы удовлетворить нашему предположению о квазимонохроматичности света, мы должны предварительно пропустить солнечный свет через фильтр с узкой полосой пропускания, скажем вблизи длины волны $\bar{\lambda} \sim 5000$ Å. Угловой радиус Солнца составляет примерно $\alpha = 0° 16' \sim 0.00465$ радиан. Следовательно, телесный угол $\Delta\Omega'$, под которым солнечный диск виден с поверхности земли, равен $\Delta\Omega' \approx \approx \pi\alpha^2 \sim 3.14 \times (4.65 \times 10^{-3})^2$ стер $\sim 6.81 \times 10^{-5}$ стер, и площадь когерентности согласно выражению (4.2.8) равна[1]

$$\Delta A \sim \frac{\left(5 \times 10^{-5}\right)^2}{6.81 \times 10^{-5}} \text{ см}^2 \approx 3.67 \times 10^{-3} \text{ мм}^2. \tag{4.2.12}$$

Таким образом, линейный размер площади когерентности на поверхности земли для фильтрованного солнечного света составляет величину порядка $(3.67 \times 10^{-3})^{1/2}$ мм ~ 0.061 мм.

Поучительно сравнить площадь когерентности солнечного света на поверхности земли с площадью когерентности света от более удаленных звезд. Первоначально отметим, что согласно выражению (4.2.8) площадь когерентности обратно пропорциональна величине телесного угла, под которым источник виден из центральной точки Q плоскости, в которой производится оценка. При наблюдении с поверхности земли угловой диаметр звезды обычно на много порядков меньше углового диаметра солнца. Следовательно, площадь когерентности света звезды на поверхности земли должна намного превышать площадь когерентности солнечного света. Для примера рассмотрим Бетельгейзе (α Ориона), которая фактически была первой звездой, чей угловой диаметр был установлен с помощью интерференционной техники (см. разд. 7.2) и составил величину $2\alpha \sim 0.047$ секунд или $\sim 2.3 \times 10^{-7}$ радиан. Телесный угол, под которым эта звезда видна с поверхности земли, равен, соответственно, $\Delta\Omega' \approx \pi\alpha^2 \sim 4.15 \times 10^{-14}$ стер. Таким образом, площадь когерентности света Бетельгейзе, пропущенного через узкополосный фильтр на длине волны $\bar{\lambda} = 5000$ Å, на поверхности земли равна

$$\Delta A \sim \frac{\left(5 \times 10^{-5} \text{ см}\right)^2}{4.15 \times 10^{-14}} \sim 6 \text{ м}^2. \tag{4.2.13}$$

[1] Этот результат для солнечного света, полученный Верде (Verdet, 1865, 1869), является фактически первой оценкой области когерентности, которую можно найти в литературе.

Этот результат подразумевает наличие ощутимых корреляций между световыми колебаниями, достигающими поверхности земли от Бетельгейзе, в двух точках, максимальное расстояние между которыми составляет величину порядка $\sqrt{6}$ метров ~ 2.45 метров ~ 8 футов. Существует множество звезд, чей угловой диаметр значительно меньше углового диаметра Бетельгейзе, так что высокая степень корреляции в свете от этих звезд имеет место на гораздо больших площадях.

Проведенный анализ также позволяет объяснить, почему в удобные для наблюдения ночи изображения звезд в хорошо коррелированных телескопах сопровождаются появлением дифракционной решетки, хорошо известной из теории образования изображений полностью когерентным светом (см., например, Born and Wolf, 1980, разд. 8.5). Как мы только что увидели, свет звезд, попадающий в апертуру телескопа, высоко коррелирован в пределах площадей, которые в общем случае значительно превышают площадь этой апертуры. Следовательно, вторичные элементарные волны, распространяющиеся к плоскости изображения телескопа, складываются, по сути, таким же образом, что и элементарные волны в полностью *когерентном* пучке.

Мы ввели понятие пространственной когерентности для света от теплового источника, который непосредственно падает на удаленную плоскость. Однако, очевидно, что это понятие имеет более общее значение, не зависящее от природы источника и окружающей среды. Существование пространственной когерентности поля можно продемонстрировать в опытах с двумя узкими диафрагмами: интерференционные полосы свидетельствуют о корреляциях света, проходящего через диафрагмы. Разумеется, площадь когерентности в общем случае не определяется простыми формулами (4.2.6) и (4.2.8). Позже (из разд. 4.4) мы узнаем, каким образом может быть определена степень корреляции для света от источника любого типа.

4.2.3. Объем когерентности и параметр вырождения

Теперь введем два других понятия, которые также полезны для интуитивного понимания когерентных свойств света.

Будем считать, что поле представляет собой почти плоскую, квазимонохроматическую, линейно поляризованную волну. Прямой цилиндр, основанием которого является площадь когерентности ΔA в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, и высота которого равна *продольной длине когерентности* Δl (см. рис. 4.4), называется *объемом когерентности*. Он занимает в пространстве объем, равный

$$\Delta V = \Delta A \Delta l. \tag{4.2.14}$$

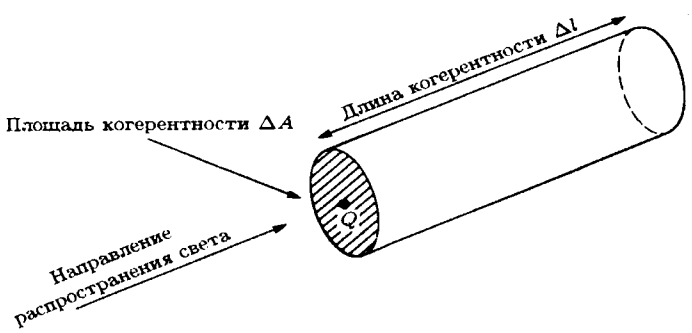


Рис. 4.4. Иллюстрация понятия объема когерентности

Для квазимонохроматической плоской волны объем когерентности не зависит от расположения цилиндра в пространстве. В более реальном случае, когда поле только приближенно можно рассматривать как плоскую волну, ΔA, а следовательно, и ΔV будет зависеть от конкретного местоположения, и, таким образом, уместнее говорить об *объеме когерентности вблизи некоторой точки поля*.

Предположим, что поле создается тепловым источником σ, который имеет форму квадрата с площадью S и испускает квазимонохроматический свет со средней длиной волны $\bar{\lambda}$. Тогда согласно (4.2.6) площадь когерентности вблизи центральной точки Q в плоскости $\mathscr{A}$, параллельной источнику и расположенной на большом расстоянии R от него (см. рис. 4.2), равна $\Delta A \sim (R^2/S)\bar{\lambda}^2$. Согласно (4.2.4) длина когерентности равна $\Delta l \sim \bar{\lambda}^2/\Delta\lambda$. Подставляя полученные выражения в (4.2.14), получим следующее выражение для объема когерентности вблизи точки Q:

$$\Delta V \sim \left(\frac{R^2}{S}\right)\left(\frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda}\right)\bar{\lambda}^3. \tag{4.2.15а}$$

Поскольку $S/R^2 = \Delta\Omega'$ представляет собой телесный угол, под которым площадь источника S видна из точки Q, выражение для ΔV можно переписать в виде

$$\Delta V \sim \frac{1}{\Delta\Omega'}\left(\frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda}\right)\bar{\lambda}^3. \tag{4.2.15б}$$

Оценим объем когерентности для трех случаев, рассмотренных нами в качестве примеров в разд. 4.2.2, полагая, что в каждом случае эффективный диапазон длин волн фильтрованного света составляет $\Delta\lambda = 10^{-7}\bar{\lambda} \sim 5 \times 10^{-4}$ Å, где $\bar{\lambda} \sim 5000$ Å. В этом случае длина когерентности согласно (4.2.4) равна $\Delta l = 5$ м. Для плоского теплового источника с площадью 1 мм^2 площадь когерентности вблизи центральной точки Q в плоскости, параллельной источнику и расположенной на расстоянии $R = 2$ м от него, составляет $\Delta A \sim 1$ мм^2 . Таким образом, согласно (4.2.14) объем когерентности вблизи Q равен

$$\Delta V \sim 1\,\text{мм}^2 \times 5\,\text{м} = 5\,\text{см}^3. \tag{4.2.16}$$

Для фильтрованного солнечного света, достигающего поверхности земли площадь когерентности согласно (4.2.12) составялет $\Delta A \sim 3.67 \times 10^{-3}$ мм^2. Следовательно, объем когерентности солнечного света на поверхности земли равен

$$\Delta V \sim 3.67 \times 10^{-3}\,\text{мм}^2 \times 5\,\text{м} \sim 18\,\text{мм}^3. \tag{4.2.17}$$

Для фильтрованного света от Бетельгейзе площадь когерентности согласно (4.2.13) составляет $\Delta A \sim 6$ м^2, так что

$$\Delta V \sim 6\,\text{м}^2 \times 5\,\text{м} = 30\,\text{м}^3. \tag{4.2.18}$$

Выражения (4.2.15) получены нами для случая, когда излучение рассматривается на большом расстоянии от теплового источника. Однако, понятие объема когерентности, очевидно, имеет более общее значение. Рассмотрим в качестве примера излучение гелий-неонового лазера. Предположим, что поперечное сечение лазерного пучка равно 1 мм^2, а средняя длина волны света составляет $\bar{\lambda} = 6 \times 10^{-5}$ см ($\bar{\nu} \sim 5 \times 10^{14}$ Гц). В течение короткого промежутка времени, порядка нескольких секунд, излучение лазера можно считать стабильным, что обеспечивает узкую полосу частот $\Delta\nu \sim 10^6$ Гц, соответствующую эффективному диапазону длин волн $\Delta\lambda \sim 1.2 \times 10^{-13}$ см. Согласно (4.2.3) длина когерентности в течение такого короткого временно́го промежутка будет составлять величину порядка $\Delta l \sim 3 \times 10^{10} \times 10^{-6}$ см $\sim 3 \times 10^4$ см. Полагая, что лазерный пучок пространственно когерентен по всему поперечному сечению (что имеет место в случае одномодового лазера), с помощью выражения (4.2.14), очевидно, можно оценить объем когерентности

$$\Delta V \sim 10^{-2} \times 3 \times 10^4\,\text{см}^3 = 300\,\text{см}^3. \tag{4.2.19}$$

Понятие объема когерентности имеет интересную интерпретацию в рамках квантовой механики, когда свет рассматривается с точки зрения фотонов. Предположим вновь для простоты, что поле представляет собой почти плоскую, квазимонохроматическую волну. Пусть $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ — импульс фотона, расположенного[1] в окрестности точки $\mathbf{r}(x, y, z)$. Мы можем сопоставить полю шестимерное фазовое пространство фотонов с координатами x, y, z, p_x, p_y, p_z. Учтем, что x и p_x не могут быть измерены одновременно с точностью, большей, чем позволяет соотношение неопределенностей Гейзенберга $\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar/2$ ($\hbar = h/2\pi$, h — постоянная Планка), что также справедливо и для других пар сопряженных переменных Δy, Δp_y и Δz, Δp_z. Таким образом, естественно представить пространство разделенным на ячейки размером

$$\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3. \tag{4.2.20}$$

Фотоны с одинаковой поляризацией, находящиеся в области фазового пространства, размер которой не превышает определенного выражением (4.2.20), являются *по существу неразличимыми* друг от друга.

Легко показать, что введенный нами исключительно в рамках классической теории объем когерентности, по крайней мере, для типичных случаев, имеющих практическое значение, точно соответствует объему $\Delta x \Delta y \Delta z$ пространства в выражении (4.2.20) с учетом ограничений, налагаемых на произведение $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$ геометрией и шириной полосы частот света[2]. Другими словами, *объем когерентности представляет собой область пространства, в пределах которой фотоны поля, по существу, неразличимы друг от друга.* Первоначально оценим неопределенность значений компонент импульса фотона в дальней зоне поля, создаваемого плоским квазимонохроматическим тепловым источником σ с линейными размерами Δs. Обозначим через 2ϕ угол, под которым источник виден из точки Q. Для простоты предположим, что точка Q лежит на нормали к плоскости источника σ, на расстоянии R от этой плоскости, в дальней

[1] Строго говоря, положение фотона не может быть определено более точно, чем в пределах области, линейные размеры которой порядка длины волны

[2] Этот результат впервые был получен Хэнбери Брауном и Твиссом (Hanbury Brown and Twiss, 1957, прил. I, с. 321).

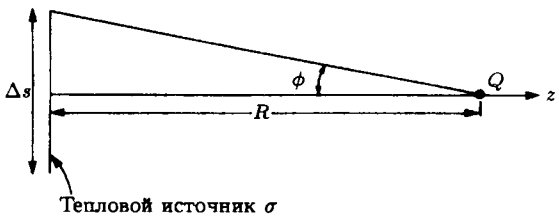


Рис. 4.5. К выводу формул (4.2.22) и (4.2.23) для неопределенностей компонент импульса фотона, испускаемого протяженным тепловым источником

зоне поля (рис. 4.5). Согласно соотношению де Бройля (Born and Wolf, 1980, разд. 3 в прил. II) импульс $\mathbf{p}$ фотона связан с его длиной волны формулой

$$\mathbf{p} = \frac{h}{\lambda}\mathbf{s}, \tag{4.2.21}$$

где $\mathbf{s}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{p}$. Неопределенности значений x- и y-компонент импульса являются результатом пренебрежения точным местоположением точки источника, из которой испускается фотон и, очевидно, представляют собой проекции вектора импульса на оси x и y, расположенные в плоскости источника. Тогда $\Delta p_x = \Delta p_y \sim 2p\sin\phi$ или, используя выражение (4.2.21),

$$\Delta p_x = \Delta p_y \sim \frac{2h}{\bar{\lambda}}\sin\phi \sim \frac{h}{\bar{\lambda}}\frac{\Delta s}{R}, \tag{4.2.22}$$

где $\bar{\lambda}$ — средняя длина волны света. Полагая угол ϕ достаточно малым, можно считать, что неопределенность в значении z-компоненты импульса обусловлена, главным образом, неопределенностью в длине волны. Если $\Delta\lambda$ — эффективный диапазон длин волн света, то из (4.2.21) имеем

$$\Delta p_z \sim \frac{h}{\bar{\lambda}^2}\Delta\lambda. \tag{4.2.23}$$

Из выражений (4.2.22) и (4.2.23) получим

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3 \frac{\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^4}\frac{S}{R^2}, \tag{4.2.24}$$

где $S = (\Delta s)^2$ — площадь источника. Подставляя (4.2.24) в выражение (4.2.20) для размера ячейки фазового пространства, мы видим, что объем пространства вблизи точки Q, в пределах которого фотоны, испускаемые нашим источником, по существу, неразличимы друг от друга, равен

$$\Delta x \Delta y \Delta z = \left(\frac{R^2}{S}\right)\left(\frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda}\right)\bar{\lambda}^3. \tag{4.2.25}$$

Правая часть выражения (4.2.25) в точности совпадает с выражением (4.2.15а) для объема когерентности, полученным в рамках классической теории. Таким образом, мы подтвердили в этом отдельном, но практически важном случае, наше утверждение о квантово-механическом значении понятия объема когерентности.

В качестве другого примера рассмотрим излучение черного тела в большой термоизолированной камере. Хорошо известно, что фотоны, локализованные в области объема V внутри камеры, энергии которых сосредоточены в интервале $\Delta E = h\Delta\nu$ вокруг средней энергии $\bar{E} = h\bar{\nu}$, будут принадлежать одной и той же ячейке фазового пространства, если

$$\frac{8\pi V}{c^3}\bar{\nu}^2\Delta\nu \leqslant 1. \tag{4.2.26}$$

Этот результат означает, что максимальный размер любой области внутри камеры, в пределах которой фотоны неразличимы друг от друга, определяется выражением $V = c^3/(8\pi\bar{\nu}^2\Delta\nu)$ или, используя соотношение $\bar{\nu} = c/\bar{\lambda}$,

$$V = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda}\right)\bar{\lambda}^3. \tag{4.2.27}$$

Эта формула в точности совпадает с выражением (4.2.15б), где угол $\Delta\Omega'$ заменен множителем 8π. Заметим, что $\Delta\Omega'$ в выражении (4.2.15б) представляет собой телесный угол, под которым источник виден из точки Q, т.е. телесный угол, образованный всеми возможными направлениями, вдоль которых излучение источника может достичь объема когерентности. Излучение черного тела внутри термоизолированной камеры можно

рассматривать как смесь плоских волн (с соответствующим статистическим распределением амплитуд и фаз), которая распространяется во всех возможных направлениях. В этом случае $\Delta\Omega' = 4\pi$. Дополнительный множитель $1/2$ появился из-за того, что излучение черного тела не поляризовано; поэтому его можно рассматривать как смесь двух независимых состояний поляризации (линейной или круговой) для каждого направления распространения. Таким образом, выражение (4.2.27), полученное исходя из соображений о неразличимости фотонов, также полностью согласуется с выражением для объема когерентности, основанного на классической волновой теории.

Интересно также проанализировать среднее число фотонов в определенном спиновом состоянии, содержащееся в объеме когерентности для типичных оптических полей. Эта величина известна как параметр вырождения поля (Mandel, 1961a). На языке квантовой статистики параметр вырождения представляет собой среднее значение числа фотонов, находящихся в одинаковом квантовом состоянии. Позже, в разд. 14.6 мы увидим, что этот параметр играет важную роль в фотоэлектрическом детектировании флуктуаций света. Покажем, что значение параметра вырождения для излучения от теплового источника существенно отличается от соответствующего значения для лазерного излучения.

Значение параметра вырождения δ на частоте ν для излучения черного тела при равновесной температуре T известно из ранней работы Эйнштейна (Einstein, 1912) (см. также Bothe, 1927 и Fürth, 1928)

$$\delta = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \tag{4.2.28}$$

(h — постоянная Планка, k_B — постоянная Больцмана). Для обычного раскаленного источника, излучающего на частоте $\nu = 5 \times 10^{14}$ Гц при температуре $T = 3000$ К, получим

$$\delta \sim 3 \times 10^{-4}, \tag{4.2.29}$$

откуда следует, что излучение такого источника сильно невырождено ($\delta \ll 1$). Для того, чтобы $\delta \sim 1$ на этой частоте, необходима согласно (4.2.28) температура $T \sim 3 \times 10^4$ К.

В случае излучения лазера ситуация противоположная. Рассмотрим, например, обычный гелий-неоновый лазер с выходной мощностью 1 мВт, генерирующий пучок с поперечным сечением 1 мм^2, на средней длине волны $\bar{\lambda} = 6 \times 10^{-5}$ см ($\bar{\nu} \sim 5 \times 10^{14}$ Гц). Число фотонов в единице объема, т.е. энергия в единице объема, выраженная через энергию одного фотона в пучке света, генерируемого таким лазером, равно

$$\rho = \frac{10^{-3}}{10^{-2} \times (6.67 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^{14}) \times 3 \times 10^{10}} \text{ фотон/см}^3 \sim 10^7 \text{ фотон/см}^3. \tag{4.2.30}$$

Ранее мы отмечали [(4.2.19)], что на достаточно коротких временны́х интервалах стабильность выходного излучения такова, что объем когерентности лазерного излучения равен $\Delta V \sim 300\,\text{см}^3$. Отсюда следует, что в этом случае параметр вырождения имеет значение

$$\delta = \rho \cdot \Delta V \sim 1 \times 10^7 \times 3 \times 10^2 = 3 \times 10^9. \tag{4.2.31}$$

Следовательно, такое излучение является сильно вырожденным ($\delta \gg 1$). Сравнение (4.2.31) и (4.2.29) дает разницу в 13 порядков в величине вырождения между излучениями черного тела и лазера.

4.3. Интерференция двух стационарных световых пучков как проявление корреляции второго порядка

В предыдущем разделе мы ввели грубые критерии, устанавливающие условия, при которых обычно возникают простые интерференционные явления. Мы также кратко отметили, что эти явления обусловлены *корреляциями* между флуктуациями в интерферирующих пучках. Безусловно, корреляции можно описывать с помощью математического аппарата теории стохастических процессов, изложенного в гл. 2. Общий анализ, основанный на этом подходе, будет проведен нами в гл. 8. Однако, когда мы имеем дело со средней интенсивностью света, что бывает довольно часто, достаточно рассматривать только корреляции второго порядка (т.е. корреляции световых колебаний в двух пространственно-временны́х точках). Мы введем точную меру таких корреляций, исходя из детального анализа простейших интерференционных экспериментов. Ниже (гл. 12) будет показано, что эта мера, которая в этом разделе является классической, в точности соответствует аналогичной мере, определяемой квантово-механически.

4.3.1. Законы интерференции. Функция взаимной когерентности и комплексная степень когерентности[1]

Для того, чтобы выявить существенные аспекты теории, в этой главе мы не будем уделять внимания поляризационным явлениям. Поляризация будет рассмотрена нами позже, в гл. 6.

Пусть $V^{(r)}(\mathbf{r},t)$ — действительная переменная поля, характеризующая поле в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t. Эта функция может представлять собой, например, декартову компоненту вектора напряженности электрического поля или векторный потенциал. Мы намеренно не уточняем здесь природу $V^{(r)}$, поскольку общий анализ не зависит от конкретного выбора переменной поля. Для описания различных экспериментальных ситуаций может оказаться более подходящим различный выбор $V^{(r)}$. Например, при описании фотоэлектрического детектирования в качестве основной переменной поля удобно рассмотреть, как будет показано в разд. 14.1, векторный потенциал (точнее говоря, связанный с ним аналитический сигнал). Однако, существуют другие процессы измерения, для которых более подходящим может оказаться другой выбор.

Для любого реального светового пучка $V^{(r)}$ будет флуктуирующей функцией времени, которую можно рассматривать в качестве характерного члена ансамбля, состоящего из всех возможных реализаций поля. Есть несколько причин, вызывающих флуктуации $V^{(r)}$. В случае света от теплового источника флуктуации, главным образом, возникают благодаря тому, что $V^{(r)}$ состоит из большего числа независимых вкладов; их суперпозиция приводит к появлению флуктуирующего поля, которое может быть описано только статистически. Но даже если свет излучается жестко стабилизированным источником, таким, как лазер, он будет обнаруживать некоторые случайные флуктуации, поскольку нельзя полностью исключить спонтанное излучение. Кроме того, существуют и другие источники флуктуаций, например, колебания зеркал на концах резонатора.

В дальнейшем анализе удобнее перейти от действительной переменной поля $V^{(r)}(\mathbf{r},t)$ к связанному с ней аналитическому сигналу $V(\mathbf{r},t)$, который мы подробно обсуждали в гл. 3. Позже мы увидим (см. разд. 14.2), что комплексное поле $V(\mathbf{r},t)$ естественным образом возникает в теории фотоэлектрического детектирования световых флуктуаций и представляет собой собственное значение оператора уничтожения фотона в пространственно-временно́й точке $(\mathbf{r},t)$.

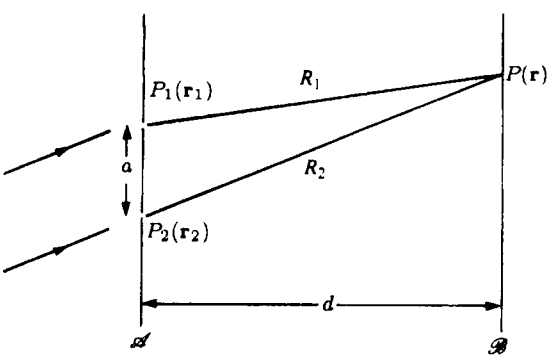


Рис. 4.6. Схема интерференционного эксперимента Юнга для определения корреляционных функций второго порядка

Рассмотрим квазимонохроматический свет, описываемый статистически стационарным ансамблем аналитических сигналов $V(\mathbf{r},t)$. Термин «квазимонохроматический» подразумевает, как отмечалось ранее, что эффективная ширина полосы частот света, т.е. эффективная ширина $\Delta\nu$ его спектра мощности в каждой точке $\mathbf{r}$, мала по сравнению с его средней частотой $\bar{\nu}$:

$$\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}} \ll 1. \tag{4.3.1}$$

Такое поле в каждой точке может быть описано с помощью ансамбля квазимонохроматических сигналов (см. разд. 3.1.2.), центрированных на частоте $\bar{\nu}$.

В силу высокой частоты оптических колебаний величину V как функцию времени невозможно измерить с помощью доступных оптических приемников. Средний период оптических колебаний составляет 10^{-15} с, тогда как типичные фотоэлектрические детекторы имеют временно́е разрешение порядка 10^{-9} с. Правда, существует специальная техника, позволяющая достичь и более короткого временно́го разрешения. Хотя быстрые изменения полей во времени нельзя изучить экспериментально, однако можно измерить корреляцию поля в двух и более пространственно-временны́х точках. Рассмотрим такие измерения на примере оптического поля коллимированного квазимонохроматического пучка света.

Выделим световые колебания в точках $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$, поместив поперек пучка непрозрачный экран $\mathscr{A}$ с небольшими отверстиями в этих двух точках. Мы наблюдаем распределение интенсивности, являющееся результатом суперпозиции света, выходящего из этих отверстий, на экране $\mathscr{B}$, расположенном на расстоянии d от $\mathscr{A}$ (см. рис. 4.6). Предполагается, что d велико по сравнению с оптическими длинами волн. С

[1] см. также книгу (*Лоудон, 1976) и статью (*Быков, 1995) — *ред. пер.*

хорошей степенью точности мгновенное значение поля в точке P на экране $\mathscr{B}$ определяется выражением

$$V(\mathbf{r},t) = K_1 V(\mathbf{r}_1, t-t_1) + K_2 V(\mathbf{r}_2, t-t_2), \tag{4.3.2}$$

где

$$t_1 = R_1/c, \quad t_2 = R_2/c, \tag{4.3.2a}$$

– времена, необходимые для того, чтобы свет прошел от точки P_1 к точке P и от точки P_2 к точке P, соответственно; c — скорость света в вакууме, а K_1 и K_2 — постоянные множители, зависящие от размера отверстий и геометрии эксперимента. Из элементарной теории дифракции[1] следует, что множители K_1 и K_2 мнимые.

Мгновенная интенсивность $I(\mathbf{r},t)$ в точке $P(\mathbf{r})$ в момент времени t может быть определена с помощью формулы[2]

$$I(\mathbf{r},t) = V^*(\mathbf{r},t)V(\mathbf{r},t). \tag{4.3.3}$$

Из выражений (4.3.2) и (4.3.3) следует, что

$$I(\mathbf{r},t) = |K_1|^2 I_1(\mathbf{r}_1, t-t_1) + |K_2|^2 I_2(\mathbf{r}_2, t-t_2) + 2\,\mathrm{Re}\{K_1^* K_2 V^*(\mathbf{r}_1, t-t_1)V(\mathbf{r}_2, t-t_2)\}, \tag{4.3.4}$$

где Re обозначает действительную часть. Если взять среднее от $I(\mathbf{r},t)$ по ансамблю различных реализаций поля и обозначить его как $\langle \ldots \rangle_e$, мы получим

$$\langle I(\mathbf{r},t)\rangle_e = |K_1|^2 \langle I_1(\mathbf{r}_1, t-t_1)\rangle_e + |K_2|^2 \langle I_2(\mathbf{r}_2, t-t_2)\rangle_e + 2\,\mathrm{Re}\{K_1^* K_2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t-t_1, t-t_2)\}, \tag{4.3.5}$$

где

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1)V(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle_e, \tag{4.3.6}$$

$$\langle I(\mathbf{r}_j, t_j)\rangle_e = \langle V^*(\mathbf{r}_j, t_j)V(\mathbf{r}_j, t_j)\rangle_e = \Gamma(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j, t_j, t_j), \quad (j = 1,2). \tag{4.3.7}$$

Функция $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$, определяемая выражением (4.3.6), фактически является функцией взаимной корреляции случайных процессов $V(\mathbf{r}_1, t)$ и $V(\mathbf{r}_2, t)$ (см. разд. 2.4.4). В данном случае она характеризует корреляцию между световыми колебаниями в отверстиях P_1 и P_2 в моменты времени t_1 и t_2, соответственно. Величина $\langle I(\mathbf{r}_j, t_j)\rangle_e$ представляет собой среднюю (по ансамблю) интенсивность света в отверстии P_j в момент времени t_j $(j = 1,2)$. Позже мы увидим [(4.3.19)], что при обычных условиях третий член в правой части (4.3.5) вызывает синусоидальную модуляцию средней интенсивности $\langle I(\mathbf{r},t)\rangle_e$ в зависимости от $\mathbf{r}$.

Обычно нас интересуют *стационарные* поля, для которых все средние по ансамблю не зависят от выбора начала отсчета времени; более того, поле, как правило, является *эргодическим*. При этих условиях, как было показано в разд. 2.2.2, средние по ансамблю уже не зависят от времени и могут быть заменены соответствующими средними по времени.

Обозначим среднее по времени стационарного случайного процесса $f(t)$ как $\langle f(t)\rangle_t$, т.е.

$$\langle f(t)\rangle_t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\,dt. \tag{4.3.8}$$

Тогда «выборочную функцию взаимной корреляции» $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$ можно заменить соответствующей функцией взаимной корреляции по времени. Последняя зависит от двух временны́х аргументов только через их разность $t_2 - t_1$. Тогда, если мы запишем

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t+\tau)\rangle_t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t+\tau)\,dt, \tag{4.3.9}$$

[1] См., например, (Born and Wolf ,1980, разд. 8.3). Когда пучок падает на плоскость $\mathscr{A}$, в которой расположены отверстия, перпендикулярно или почти перпендикулярно, и когда углы между направлениями дифракции P_1P, P_2P и нормалью к плоскости $\mathscr{A}$ малы, тогда $K_1 \approx K_2 \approx -i(d\mathscr{A})/(\lambda R)$, где R — расстояние $\overline{P_1P} \approx \overline{P_2P}$, а $d\mathscr{A}$ — площадь отверстий.

[2] Мгновенная интенсивность $I(\mathbf{r},t)$, определяемая формулой (4.3.3), строго говоря, не пропорциональна квадрату действительной переменной поля $V^{(r)}(\mathbf{r},t)$. Однако, с помощью представления огибающей действительного квазимонохроматического сигнала нетрудно показать, что для квазимонохроматического света, среднее от $(V^{(r)})^2(\mathbf{r},t)$, взятое за промежуток времени, равный нескольким периодам световых колебаний, равно $2I(\mathbf{r},t)$ [см. (3.1.43)].

выражение (4.3.5) для средней интенсивности в точке P при условии стационарности и эргодичности поля принимает вид

$$\langle I(\mathbf{r},t)\rangle = |K_1|^2\langle I(\mathbf{r}_1,t)\rangle + |K_2|^2\langle I(\mathbf{r}_2,t)\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\{K_1^* K_2 \Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_1-t_2)\}, \tag{4.3.10}$$

где индексы t или e, соответствующие двум различным способам усреднения, опущены, так как далее нет необходимости различать их.

Заметим, что если последний член в правой части (4.3.10) не обращается в нуль, средняя интенсивность $\langle I(\mathbf{r},t)\rangle$ не равна сумме (средних) интенсивностей двух световых пучков, приходящих в точку наблюдения P от двух отверстий. Она отличается от этой суммы наличием члена $2\,\mathrm{Re}\,\{K_1^* K_2 \Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_1-t_2)\}$. Поскольку $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq 0$, а следовательно, и $\Gamma \neq 0$, суперпозиция двух пучков приводит к ***интерференции***.

Функция взаимной корреляции $\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$, известная как ***функция взаимной когерентности*** (Wolf, 1955), является основной величиной в элементарной теории оптической когерентности. Из выражения (4.3.3) для мгновенной интенсивности $I(\mathbf{r},t)$ и из определения функции взаимной когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$ (4.3.9) следует, что $\Gamma(\mathbf{r},\mathbf{r},0)$ представляет собой среднюю интенсивность в точке $\mathbf{r}$:

$$\langle I(\mathbf{r},t)\rangle = \langle V^*(\mathbf{r},t)V(\mathbf{r},t)\rangle = \Gamma(\mathbf{r},\mathbf{r},0). \tag{4.3.11}$$

Удобно нормировать функцию взаимной когерентности следующим образом:

$$\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)}{[\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1,0)]^{1/2}[\Gamma(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2,0)]^{1/2}} = \tag{4.3.12a}$$

$$= \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)}{[\langle I(\mathbf{r}_1,t)\rangle]^{1/2}[\langle I(\mathbf{r}_2,t)\rangle]^{1/2}}. \tag{4.3.12б}$$

По причинам, которые вскоре станут очевидными, $\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$ называют ***комплексной степенью когерентности*** световых колебаний в точках $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$. Согласно неравенству (2.4.47), которому удовлетворяет функция взаимной корреляции любых двух совместно стационарных случайных процессов, имеем

$$0 \leqslant |\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)| \leqslant 1 \tag{4.3.13}$$

для произвольных значений аргументов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, и τ функции γ.

Два первых члена в правой части выражения (4.3.10) имеют простой смысл. Предположим, что отверстие P_2 закрыто, так что на плоскость наблюдения $\mathscr{B}$ падает свет только из отверстия P_1. В этом случае $K_2 \equiv 0$, и из (4.3.10) очевидно, что

$$|K_1|^2\langle I(\mathbf{r}_1,t)\rangle \equiv \langle I^{(1)}(\mathbf{r},t)\rangle \tag{4.3.14a}$$

представляет собой среднюю интенсивность света, достигающего точки $P(\mathbf{r})$ и проходящего только через отверстие P_1. Аналогично,

$$|K_2|^2\langle I(\mathbf{r}_2,t)\rangle \equiv \langle I^{(2)}(\mathbf{r},t)\rangle \tag{4.3.14б}$$

есть средняя интенсивность света, достигающего точки $P(\mathbf{r})$ и проходящего только через отверстие P_2.

Последний член в правой части (4.3.10) можно легко выразить через $\langle I^{(1)}\rangle$, $\langle I^{(2)}\rangle$ и γ. Из выражений (4.3.12б), (4.3.14а) и (4.3.14б), используя также формулу (4.3.2) и учитывая, что множители K_1 и K_2 — мнимые, имеем

$$K_1^* K_2 \Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_1-t_2) = [\langle I^{(1)}(\mathbf{r},t)\rangle]^{1/2}[\langle I^{(2)}(\mathbf{r},t)\rangle]^{1/2}\gamma[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,(R_1-R_2)/c)].$$

Подставляя это выражение, а также (4.3.14а) и (4.3.14б), в (4.3.10), мы в итоге получим следующее выражение для средней интенсивности света в точке P при условии, что свет достигает плоскости наблюдения $\mathscr{B}$, пройдя через оба отверстия:

$$\langle I(\mathbf{r},t)\rangle = \langle I^{(1)}(\mathbf{r},t)\rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r},t)\rangle + 2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r},t)\rangle]^{1/2}[\langle I^{(2)}(\mathbf{r},t)\rangle]^{1/2}\,\mathrm{Re}\,\gamma[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,(R_1-R_2)/c)]. \tag{4.3.15}$$

Из (4.3.15) очевидно, что измерение средних интенсивностей $\langle I(\mathbf{r},t)\rangle$, $\langle I^{(1)}(\mathbf{r},t)\rangle$ и $\langle I^{(2)}(\mathbf{r},t)\rangle$ позволяет определить действительную часть комплексной степени когерентности $\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$. Более того, если дополнительно измерить средние интенсивности $\langle I(\mathbf{r}_1,t)\rangle$ и $\langle I(\mathbf{r}_2,t)\rangle$ света в двух отверстиях, то согласно (4.3.12б) можно найти действительную часть функции взаимной когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$.

Как мы только что видели, непосредственное измерение средних интенсивностей предоставляет информацию только о действительных частях корреляционных функций Γ и γ. Однако, мнимые части этих функций, в принципе, могут быть определены по известным действительным частям при всех значениях τ. Поскольку $V(\mathbf{r}_1,t)$ и $V(\mathbf{r}_2,t)$ — аналитические сигналы, их функция взаимной корреляции, т.е. функция взаимной когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$, согласно теореме I из разд. 3.1.3 также является аналитическим сигналом. Следовательно, ее действительная $\operatorname{Re}\Gamma$ и мнимая $\operatorname{Im}\Gamma$ части связаны преобразованиями Гильберта[1]

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) &= \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau')}{\tau'-\tau}\,d\tau',\\ \operatorname{Re}\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) &= -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau')}{\tau'-\tau}\,d\tau',\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

где P — главное значение интеграла по Коши при $\tau'=\tau$. Более того, поскольку комплексная степень когерентности γ отличается от функции взаимной когерентности Γ множителем, не зависящим от τ, функция γ также является аналитическим сигналом. Следовательно, ее действительная и мнимая части также связаны преобразованиями Гильберта.

Вместе с тем, именно абсолютное значение комплексной степени когерентности, а не ее действительная часть, является истинной мерой «резкости» интерференционных эффектов, возникающих в результате суперпозиции двух пучков. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим подробнее выражение (4.3.15) для средней интенсивности $\langle I(\mathbf{r},t)\rangle$ света в плоскости наблюдения $\mathscr{B}$. Положим

$$\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = |\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)|\,e^{i[\alpha(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)-2\pi\bar{\nu}\tau]}, \tag{4.3.17}$$

где

$$\alpha(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \arg\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) + 2\pi\bar{\nu}\tau. \tag{4.3.18}$$

Подставляя (4.3.17) в (4.3.15), мы получим следующее выражение для $\langle I(\mathbf{r},t)\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle I(\mathbf{r},t)\rangle = \langle I^{(1)}(\mathbf{r},t)\rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r},t)\rangle + \\ + 2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r},t)\rangle]^{1/2}[\langle I^{(2)}(\mathbf{r},t)\rangle]^{1/2}|\gamma[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,(R_1-R_2)/c]|\cos\{\alpha[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,(R_1-R_2)/c]-\delta\},\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

где

$$\delta = \frac{2\pi\bar{\nu}}{c}(R_1-R_2) = \bar{k}(R_1-R_2), \tag{4.3.20}$$

причем

$$\bar{k} = \frac{2\pi\bar{\nu}}{c} = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}}, \tag{4.3.21}$$

и $\bar{\lambda}$ — средняя длина волны света. Далее, поскольку мы предположили, что плоскость наблюдения $\mathscr{B}$ удалена на расстояние многих длин волн от плоскости $\mathscr{A}$, средние интенсивности $\langle I^{(1)}\rangle$ и $\langle I^{(2)}\rangle$ двух световых пучков будут слабо изменяться в зависимости от положения $P(\mathbf{r})$ на экране $\mathscr{B}$. А так как мы также предположили, что свет является квазимонохроматическим, то исходя из свойств представления огибающей (см. разд. 3.1.2), $|\gamma|$ и α также будут меняться медленно в любой области плоскости наблюдения $\mathscr{B}$, для которой изменение разности хода R_1-R_2 мало по сравнению с длиной когерентности света. Следовательно,

[1] Согласно теоремам III и V из разд. 3.1.3 мнимая и действительная части Γ могут быть выражены через действительное поле $V^{(r)}(\mathbf{r},t)$ и сопряженное ему по Гильберту поле $V^{(i)}(\mathbf{r},t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\Gamma &= \tfrac{1}{2}\langle V^{(r)}(\mathbf{r}_1,t)V^{(r)}(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle = \tfrac{1}{2}\langle V^{(i)}(\mathbf{r}_1,t)V^{(i)}(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle,\\ \operatorname{Im}\Gamma &= \tfrac{1}{2}\langle V^{(r)}(\mathbf{r}_1,t)V^{(i)}(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle = -\tfrac{1}{2}\langle V^{(i)}(\mathbf{r}_1,t)V^{(r)}(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle.\end{aligned}$$

Поскольку $V=\frac{1}{2}[V^{(r)}+iV^{(i)}]$, из этих соотношений следует, что $\langle V^{(r)^2}(\mathbf{r},t)\rangle = \langle V^{(i)^2}(\mathbf{r},t)\rangle = 2\langle V^*(\mathbf{r},t)V(\mathbf{r},t)\rangle = 2\langle I(\mathbf{r},t)\rangle$, и $\langle V^{(r)}(\mathbf{r},t)V^{(i)}(\mathbf{r},t)\rangle = 0$.

в правой части выражения (4.3.19) мы можем пренебречь изменениями $|\gamma|$ и α, связанными с изменениями аргумента $(R_1 - R_2)/c$, при условии, что

$$||R_1 - R_2|_{P'} - |R_1 - R_2|_P| \ll \frac{c}{\Delta\nu}, \tag{4.3.22}$$

где $|R_1 - R_2|_P$ представляет собой разность расстояний от каждого из отверстий до точки P, $|R_1 - R_2|_{P'}$ — разность расстояний от каждого из отверстий до соседней точки P' в плоскости $\mathscr{B}$, $\Delta\nu$ — эффективная ширина полосы частот света. В то же время косинус в правой части (4.3.19) будет меняться очень быстро в зависимости от положения $\mathbf{r}$ точки P на экране $\mathscr{B}$ из-за наличия величины δ. Согласно (4.3.20) эта величина обратно пропорциональна средней длине волны света, которая очень мала. Следовательно, *в достаточно малой области плоскости наблюдения $\mathscr{B}$ средняя интенсивность $\langle I(\mathbf{r},t)\rangle$ будет меняться почти синусоидально в зависимости от $\mathbf{r}$ при условии, что $|\gamma| \neq 0$.*

Обычной мерой резкости интерференционных полос является так называемая ***видность***, введенная Майкельсоном (Michelson, 1890). Видность $\mathscr{V}(\mathbf{r})$ в точке $P(\mathbf{r})$ интерференционной картины определяется формулой

$$\mathscr{V}(\mathbf{r}) = \frac{\langle I\rangle_{\max} - \langle I\rangle_{\min}}{\langle I\rangle_{\max} + \langle I\rangle_{\min}}, \tag{4.3.23}$$

где $\langle I\rangle_{\max}$ и $\langle I\rangle_{\min}$ — максимальное и минимальное значения средней интенсивности в непосредственной окрестности P. Из (4.3.19) с хорошей степенью точности имеем

$$\langle I\rangle_{\max} = \langle I^{(1)}(\mathbf{r},t)\rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r},t)\rangle + 2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r},t)\rangle]^{1/2}[\langle I^{(2)}(\mathbf{r},t)\rangle]^{1/2}|\gamma[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,(R_1-R_2)/c]|, \tag{4.3.24a}$$

$$\langle I\rangle_{\min} = \langle I^{(1)}(\mathbf{r},t)\rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r},t)\rangle - 2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r},t)\rangle]^{1/2}[\langle I^{(2)}(\mathbf{r},t)\rangle]^{1/2}|\gamma[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,(R_1-R_2)/c]|, \tag{4.3.24б}$$

и выражение (4.3.23), таким образом, принимает вид

$$\mathscr{V}(\mathbf{r}) = 2\left[\eta(\mathbf{r}) + \frac{1}{\eta(\mathbf{r})}\right]^{-1}|\gamma[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,(R_1-R_2)/c]|, \tag{4.3.25}$$

где

$$\eta(\mathbf{r}) = \left[\frac{\langle I^{(1)}(\mathbf{r},t)\rangle}{\langle I^{(2)}(\mathbf{r},t)\rangle}\right]^{1/2}. \tag{4.3.26}$$

Если, как часто бывает, средние интенсивности двух пучков в точке P равны, то $\eta = 1$, и (4.3.25) принимает вид

$$\mathscr{V}(\mathbf{r}) = |\gamma[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,(R_1-R_2)/c]|, \tag{4.3.25а}$$

т.е. в этом случае видность полос равна $|\gamma|$. Распределение средней интенсивности в плоскости наблюдения для случая, когда средние интенсивности двух интерферирующих пучков равны, показано на рис. 4.7.

Согласно (4.3.13) $0 \leqslant |\gamma| \leqslant 1$. На рисунке мы видим, что в предельном случае $|\gamma| = 1$ средняя интенсивность в окрестности произвольной точки P интерференционной картины испытывает максимально возможные периодические изменения между значениями $4\langle I^{(1)}\rangle$ и 0. В другом предельном случае, $\gamma = 0$, интерференционные полосы не формируются совсем; в окрестности P имеет место фактически однородное распределение средней интенсивности. Два этих случая отражают именно то, что традиционно принято называть ***полной когерентностью*** (точнее, полной когерентностью второго порядка) и ***полной некогерентностью*** (второго порядка), соответственно. Промежуточные значения $0 < |\gamma| < 1$ отвечают ***частичной когерентности***; в этом случае распределение средней интенсивности в интерференционной картине в окрестности P представляет собой периодическое изменение между значениями $2(1 + |\gamma|)\langle I^{(1)}\rangle$ и $2(1 - |\gamma|)\langle I^{(1)}\rangle$.

Аргумент (фаза) γ также имеет простой смысл. Из (4.3.18) и (4.3.19) следует, что положение максимумов средней интенсивности в интерференционной картине с высокой степенью точности определяются через

$$\arg\gamma[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,(R_1-R_2)/c] \equiv \alpha[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,(R_1-R_2)/c] - 2\pi\bar{\nu}(R_1-R_2)/c = 2m\pi \quad (m = 0,\pm1,\pm2,\ldots). \tag{4.3.27}$$

Положения максимумов, определяемые формулой (4.3.27), совпадают с положениями, которые мы получили бы, если бы оба отверстия освещались строго монохроматическим светом с длиной волны $\bar{\lambda}$, а фаза световых колебаний в точке P_1 запаздывала бы по отношению к фазе колебаний в точке P_2 на величину $\alpha[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (R_1 - R_2)/c]$. Следовательно, при описании интерференционных эффектов вблизи точки P величину $\alpha[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (R_1 - R_2)/c]$ можно интерпретировать как «эффективное запаздывание» света в точке P_1 относительно точки P_2. Из (4.3.27) видно, что аргумент γ может быть определен из измерений положений максимумов полос интерференционной картины. Известно, что при освещении отверстий монохроматическим светом, отставание фазы на величину 2π приводит к смещению интерференционной картины в направлении, параллельном P_1P_2, на величину $a\bar{\lambda}/d$, (Born and Wolf, 1980, разд. 10.4, выражение 6), где a — расстояние между P_1 и P_2, d — расстояние между плоскостями $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Мы видим, что *полосы, полученные с квазимонохроматическим светом, смещены относительно полос, которые получились бы при синфазном освещении отверстий монохроматическим светом с длиной волны $\bar{\lambda}$ на величину*

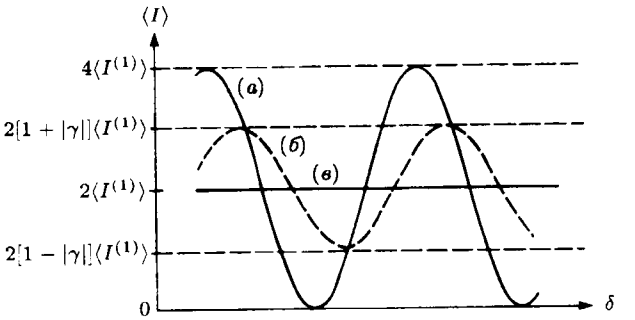


Рис. 4.7. Распределение средней интенсивности $\langle I\rangle$ в точке $P(\mathbf{r})$ плоскости наблюдения $\mathscr{B}$, возникающее в результате наложения двух квазимонохроматических пучков с одинаковой средней интенсивностью $\langle I^{(1)}\rangle$ в интерференционном эксперименте Юнга (см. рис. 4.6):

$$\langle I(\mathbf{r},t)\rangle = 2\langle I^1(\mathbf{r},t)\rangle\{1 + |\gamma[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,(R_1-R_2)/c]|\times \\ \times \cos\{\alpha[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,(R_1-R_2)/c] - \delta\}\}.$$

Кривые соответствуют трем случаям: *а* — полная когерентность второго порядка ($|\gamma| = 1$), *б* — частичная когерентность второго порядка ($0 < |\gamma| < 1$), *в* — полная некогерентность второго порядка ($\gamma = 0$)

$$x = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi}\left(\frac{a}{d}\right)\alpha[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,(R_1-R_2)/c] = \frac{a}{d}\left\{(R_1-R_2) + \frac{\bar{\lambda}}{2\pi}\arg\gamma[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,(R_1-R_2)/c]\right\} \tag{4.3.28}$$

в направлении, параллельном линии, соединяющей отверстия.

Мы обнаружили, что, с одной стороны, γ является мерой корреляции комплексного поля в двух точках P_1 и P_2 [(4.3.12)], а с другой — мерой резкости интерференционной картины [(4.3.25)], полученной в результате суперпозиции пучков, идущих от этих двух точек, а также определяет положение максимумов интерферограммы [(4.3.28)][1]. Поскольку резкость интерференционных полос можно считать проявлением когерентности между интерферирующими пучками, очевидно, что термин *«комплексная степень когерентности»* поля в точках P_1 и P_2 отражает смысл γ, следующий из интерференционных экспериментов. Эта терминология не совсем точна, поскольку γ зависит не только от положения точек P_1 и P_2, но также и от задержки $\tau = (R_1 - R_2)/c$. Вернее было бы оставить термин «комплексная степень когерентности» за величиной $\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau_0)$, где τ_0 — значение τ, при котором $|\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)|$ принимает максимальное значение при фиксированных $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Однако в случае, когда свет предполагается квазимонохроматическим, а интерференционные полосы наблюдаются в той области плоскости $\mathscr{B}$, где их видность максимальна, как это обычно имеет место, различие между этими двумя определениями несущественно. Действительно, как мы уже упоминали, $|\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)|$ и $\alpha(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \arg\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) + 2\pi\bar{\nu}\tau$ меняются очень медленно в зависимости от τ и фактически остаются постоянными в пределах любого интервала изменения τ, который мал по сравнению с временем когерентности $1/\Delta\nu$ света. Следовательно,

$$\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau_1) \approx \gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau_2)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\bar{\nu}(\tau_1-\tau_2)} \tag{4.3.29}$$

для любых τ_1 и τ_2, таких, что

$$|\tau_1 - \tau_2| \ll \frac{1}{\Delta\nu}. \tag{4.3.30}$$

Таким образом, в интервале изменения τ, удовлетворяющем (4.3.30), γ (а также Γ) фактически представляют собой периодические функции τ с периодом, равным среднему периоду $T = 1/\bar{\nu}$ света. Это справедливо,

[1] Экспериментальная установка, используемая в интерференционном эксперименте Юнга, с помощью которой мы пояснили суть понятия комплексной степени когерентности $\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$ не подходит для случая, когда $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$. В этих условиях мы имеем дело с *комплексной степенью автокогерентности*, смысл которой может быть разъяснен с помощью интерферометра Майкельсона (см. разд. 7.3).

в частности, и для некоторого интервала изменения τ вблизи значения $\tau_{\max}$, соответствующего максимуму величины $|\gamma|$.

На практике нас часто интересуют интерференционные эффекты, возникающие в условиях симметрии. В этом случае заметную роль играют только те значения корреляционных функций $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ и $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$, для которых значение аргумента τ близко к нулю. Тогда согласно (4.3.29) и аналогичному соотношению для Γ корреляционные функции могут быть аппроксимированы следующим образом:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \approx J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\, e^{-2\pi i \bar{\nu}\tau}, \tag{4.3.31}$$

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \approx j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\, e^{-2\pi i \bar{\nu}\tau}, \tag{4.3.32}$$

при условии, что

$$|\tau| \ll \frac{1}{\Delta\nu}. \tag{4.3.33}$$

Величины $J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ и $j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ представляют собой *«равновременны́е функции корреляции»*

$$J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t) V(\mathbf{r}_2, t)\rangle, \tag{4.3.34}$$

$$j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = \frac{J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{[J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)]^{1/2}[J(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2)]^{1/2}}. \tag{4.3.35}$$

Равновременну́ю функцию корреляции $J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ обычно называют *взаимной интенсивностью* световых колебаний в точках $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$, а $j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, также, как и $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ — *комплексной степенью когерентности*. Этих двух корреляционных функций менее общего вида, как правило, бывает достаточно для решения многих задач инструментальной оптики.

Поскольку корреляционные эффекты, о которых шла речь в этой главе, характеризуются корреляционной функцией, которая зависит только от *двух* пространственно-временны́х точек, мы будем называть их *эффектами когерентности второго порядка*. Общая классификация эффектов когерентности будет дана в гл. 8.

Очевидно, что явления временно́й и пространственной когерентности, которые мы вкратце качественно обсудили в разд. 4.2.1 и 4.2.2, характеризуются, соответственно, функцией $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau)$ (иногда называемой также *автокогерентной функцией*) и функцией $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)$ (или, в более общем случае, $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0)$, где τ_0 — константа). В первом случае существенна зависимость корреляции от параметра τ, причем точки P_1 и P_2 совпадают, и их положение задано; во втором случае ключевой является зависимость от положения двух точек, тогда как время задержки τ фактически постоянно (точнее говоря, оно меняется в интервале, который мал по сравнению с $1/\Delta\nu$). Однако, различие между временно́й и пространственной когерентностью может быть четко проведено только в самых простейших случаях. В общем случае два этих вида когерентности не являются независимыми, поскольку, как мы узнаем из разд. 4.4 и 4.6, зависимость функции взаимной когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ от пространственных переменных $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ и ее зависимость от временно́й переменной τ связаны между собой. Вскоре мы также узнаем (см. разд. 4.3.2), что функция взаимной когерентности позволяет получить информацию о корреляциях в двух точках поля для произвольной частотной компоненты света

Связывая корреляционные функции Γ и γ с результатами измерений мы должны, разумеется, молчаливо предположить, что измерительная аппаратура определяет среднее значение мгновенной интенсивности $I(\mathbf{r}, t) = V^*(\mathbf{r}, t)V(\mathbf{r}, t)$. На практике так будет почти наверняка, если в качестве V выбрана подходящая полевая переменная, а приемник производит усреднение по времени за промежуток времени, достаточно большой по сравнению с характерными временами флуктуаций поля, т.е. по сравнению со средним периодом и временем когерентности света. (С другой стороны, средняя (по ансамблю) интенсивность может быть получена из последовательности измерений независимо от того, велико или мало время измерения). При этих условиях можно считать, что среднее за время измерения почти не отличается от среднего, взятого за бесконечно длинный интервал времени, определенный в (4.3.8). Если эти условия не выполняются, могут возникнуть другие интерференционные эффекты (переходная интерференция), которые, в частности, обсуждались Манделем и Вольфом (Mandel and Wolf, 1965, разд. 7).

В заключении этого раздела отметим ряд свойств функции взаимной когерентности, которые непосредственно вытекают из общих результатов, полученных для функции взаимной корреляции двух совместно стационарных комплексных случайных процессов. Из (2.4.32) мы имеем

$$\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \tau) = \Gamma^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, -\tau). \tag{4.3.36}$$

Условие неотрицательности (2.4.34) предполагает, что для любых n пар значений пространственно-временных переменных $(\mathbf{r}_1, t_1)$, $(\mathbf{r}_2, t_2)$, ..., $(\mathbf{r}_n, t_n)$, где n — произвольное целое положительное число, и для любых n действительных или комплексных чисел a_1, a_2, ..., a_n,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j^* a_k \Gamma(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k, t_k - t_j) \geqslant 0. \tag{4.3.37}$$

В частности, если $n = 1$, из (4.3.37) следует, что $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0) \geqslant 0$ для любой точки $\mathbf{r}_1$, что очевидно из самого определения функции взаимной когерентности. При $n = 2$ из выражения (4.3.37) получаем, что $|\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \leqslant [\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)]^{1/2}[\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0)]^{1/2}$; этот результат использовался нами при нормировке функции взаимной когерентности [(4.3.12) и (4.3.13)].

4.3.2. Корреляции второго порядка в пространственно-частотной области. Взаимная спектральная плотность и спектральная степень когерентности

Как нам известно из разд. 2.4, одним из важнейших понятий общей теории стохастических процессов является взаимная спектральная плотность (2.4.35). Рассмотрим это понятие применительно к теории оптической когерентности.

Пусть $V(\mathbf{r}, t)$, как и ранее, обозначает аналитический сигнал, характеризующий флуктуирующее оптическое поле в пространственно-временно́й точке $(\mathbf{r}, t)$. Предположим, что оптическое поле является стационарным, по крайней мере, в широком смысле, и эргодичным. Представим $V(\mathbf{r}, t)$ в виде интеграла Фурье (в смысле теории обобщенных функций) по временно́й переменной:

$$V(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \tilde{V}(\mathbf{r}, \nu)\, \mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}\, d\nu. \tag{4.3.38}$$

Функция взаимной спектральной плотности $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ (спектр взаимной мощности) световых возмущений в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ на частоте ν может быть определена выражением [ср. (2.4.35)]

$$\langle \tilde{V}^*(\mathbf{r}_1, \nu)\tilde{V}(\mathbf{r}_2, \nu')\rangle = W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)\delta(\nu - \nu'), \tag{4.3.39}$$

где среднее (по ансамблю) в левой части (4.3.39) берется по различным реализациям поля, а δ в правой части представляет собой дельта-функцию Дирака. Из (4.3.39) очевидно, что взаимная спектральная плотность является мерой корреляции между спектральными амплитудами произвольной частотной компоненты световых колебаний в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

Согласно обобщенной теореме Винера — Хинчина [(2.4.37), (2.4.38)] функция взаимной когерентности и взаимная спектральная плотность образуют пару относительно преобразований Фурье:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int_0^\infty W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)\, \mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\, d\nu, \tag{4.3.40а}$$

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \int_{-\infty}^\infty \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)\, \mathrm{e}^{2\pi i\nu\tau}\, d\tau. \tag{4.3.40б}$$

В частном случае, когда точки $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ совпадают, взаимная спектральная плотность становится функцией положения только одной точки и частоты, и эта функция представляет собой *спектральную плотность* (спектр мощности) света. Мы будем обозначать ее через $S(\mathbf{r}, \nu)$:

$$S(\mathbf{r}, \nu) = W(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu). \tag{4.3.41}$$

Из (4.3.40а) и (4.3.41) получаем

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) = \int_0^\infty S(\mathbf{r}, \nu)\, \mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\, d\nu, \tag{4.3.42а}$$

$$S(\mathbf{r}, \nu) = \int_{-\infty}^\infty \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)\, \mathrm{e}^{2\pi i\nu\tau}\, d\tau. \tag{4.3.42б}$$

Отметим ряд свойств взаимной спектральной плотности. Исходя из (4.3.36) и (4.3.40б), она, очевидно, эрмитова, в том смысле, что

$$W(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1,\nu)=W^*(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu). \tag{4.3.43}$$

Согласно (2.4.40) она является неотрицательно определенной функцией: для любых n точек $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ..., $\mathbf{r}_n$ (где n — произвольное целое положительное число), для любых n действительных или комплексных чисел a_1, a_2, ..., a_n и для любой частоты ν,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_j^*a_kW(\mathbf{r}_j,\mathbf{r}_k,\nu)\geqslant 0. \tag{4.3.44}$$

В частности, при $n=1$ из (4.3.44) и (4.3.41) следует, что спектральная плотность света является неотрицательной функцией

$$S(\mathbf{r},\nu)\geqslant 0, \tag{4.3.45}$$

что, собственно говоря, очевидно, так как по смыслу спектральная плотность является мерой средней плотности энергии в точке $\mathbf{r}$ на частоте ν. Полагая $n=2$, из (4.3.44) получим

$$|W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)|\leqslant[W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1,\nu)]^{1/2}[W(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2,\nu)]^{1/2}. \tag{4.3.46}$$

Полезно осуществить нормировку взаимной спектральной плотности, положив

$$\mu(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)=\frac{W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)}{[W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1,\nu)]^{1/2}[W(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2,\nu)]^{1/2}}= \tag{4.3.47а}$$

$$=\frac{W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)}{[S(\mathbf{r}_1,\nu)]^{1/2}[S(\mathbf{r}_2,\nu)]^{1/2}}. \tag{4.3.47б}$$

Исходя из (4.3.46), имеем

$$0\leqslant|\mu(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)|\leqslant 1 \tag{4.3.48}$$

для всех значений аргументов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и ν. Мы будем называть величину $\mu(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ ***спектральной степенью когерентности на частоте*** ν света в точках $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$. Она иногда упоминается также как комплексная степень пространственной (или спектральной) когерентности на частоте ν (см. Wolf and Carter, 1975, 1976; Mandel and Wolf, 1976; Bastiaans, 1977).

Возможно, стоит отметить, что, несмотря на некоторое формальное сходство в определениях комплексных степеней когерентности $\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$ [(4.3.12)] и $\mu(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ [(4.3.47)] и на то, что $\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$ и $W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ образуют пару относительно преобразований Фурье, γ и μ, вообще говоря, *не* являются фурье-образами друг друга. Соотношение между двумя степенями когерентности обсуждается в работе Фрайберга и Вольфа (Friberg and Wolf, 1995).

Вернемся вновь к эксперименту по двухлучевой интерференции, обсуждавшемуся в разд. 4.3.1, схема которого приведена на рис. 4.6. Проанализируем соотношение между спектральной плотностью света, выходящего из отверстий, и спектральной плотностью света, достигающего плоскости наблюдения $\mathscr{P}$. Для этого произведем обобщение (4.3.10), а именно, выражения для функции автокогерентности

$$\Gamma(\mathbf{r},\mathbf{r},\tau)=\langle V^*(\mathbf{r},t)V(\mathbf{r},t+\tau)\rangle, \tag{4.3.49}$$

которое предпочтительнее, чем выражение для средней интенсивности в точке $P(\mathbf{r})$ плоскости наблюдения. Подставляя выражение для $V(\mathbf{r},t)$ из (4.3.2) в (4.3.49), находим

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbf{r},\mathbf{r},\tau)=&|K_1|^2\langle V^*(\mathbf{r}_1,t-t_1)V(\mathbf{r}_1,t+\tau-t_1)\rangle+\\&+|K_2|^2\langle V^*(\mathbf{r}_2,t-t_2)V(\mathbf{r}_2,t+\tau-t_2)\rangle+K_1^*K_2\langle V^*(\mathbf{r}_1,t-t_1)V(\mathbf{r}_2,t+\tau-t_2)\rangle+\\&+K_2^*K_1\langle V^*(\mathbf{r}_2,t-t_2)V(\mathbf{r}_1,t+\tau-t_1)\rangle.\end{aligned} \tag{4.3.50}$$

Учитывая, что поле стационарно, по крайней мере, в широком смысле, имеем $\langle V^*(\mathbf{r}_1,t-t_1)V(\mathbf{r}_1,t+\tau-t_1)\rangle=$ $=\langle V^*(\mathbf{r}_1,t)V(\mathbf{r}_1,t+\tau)\rangle$ и т.д., тогда (4.3.50) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbf{r},\mathbf{r},\tau)=&|K_1|^2\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1,\tau)+|K_2|^2\Gamma(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2,\tau)+\\&+K_1^*K_2\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau+t_1-t_2)+K_2^*K_1\Gamma(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1,\tau+t_2-t_1).\end{aligned} \tag{4.3.51}$$

Умножим обе части (4.3.51) на $e^{2\pi i\nu\tau}$ и проинтегрируем по τ от $-\infty$ до $+\infty$. При этом мы можем пренебречь слабой зависимостью множителей K_1 и K_2 в правой части (4.3.51) от частоты, поскольку свет предполагается квазимонохроматическим. Тогда, с учетом (4.3.40б), мы получаем следующее выражение для спектральной плотности в точке $P(\mathbf{r})$ плоскости наблюдения:

$$W(\mathbf{r},\mathbf{r},\nu) = |K_1|^2 W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1,\nu) + |K_2|^2 W(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2,\nu) + \\ + K_1^* K_2 W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\, e^{-2\pi i\nu(t_1-t_2)} + K_2^* K_1 W(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1,\nu)\, e^{-2\pi i\nu(t_2-t_1)}. \quad (4.3.52)$$

Из тех же соображений, что были нами приведены касательно выражения (4.3.14а), следует, что первый член в правой части (4.3.52), а именно,

$$|K_1|^2 W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1,\nu) \equiv W^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r},\nu), \quad (4.3.53а)$$

представляет собой спектральную плотность на частоте ν света, приходящего в точку $P(\mathbf{r})$ только из отверстия P_1. По аналогии второй член в правой части (4.3.52), а именно,

$$|K_2|^2 W(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2,\nu) \equiv W^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r},\nu), \quad (4.3.53б)$$

представляет собой спектральную плотность света, приходящего в точку $P(\mathbf{r})$ только из отверстия P_2.

Два последних члена в правой части (4.3.52) могут быть легко выражены через $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ и μ. Из выражений (4.3.47), (4.3.53а) и (4.3.53б), с учетом того, что множители K_1 и K_2 — чисто мнимые, имеем

$$K_1^* K_2 W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = [W^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r},\nu)]^{1/2}[W^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r},\nu)]^{1/2}\mu(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu).$$

Теперь преобразуем формулу (4.3.52), воспользовавшись полученным соотношением, а также выражениями (4.3.53) и (4.3.43). Напомним также, что взаимная спектральная плотность при условии равенства между собой двух ее пространственных аргументов переходит в спектральную плотность [(4.3.41)], и что $t_1 = R_1/c$ и $t_2 = R_2/c$ (см. рис. 4.6). С учетом всего сказанного из (4.3.52) получим следующее выражение для спектральной плотности света в точке $P(\mathbf{r})$ плоскости наблюдения $\mathscr{B}$:

$$S(\mathbf{r},\nu) = S^{(1)}(\mathbf{r},\nu) + S^{(2)}(\mathbf{r},\nu) + +2[S^{(1)}(\mathbf{r},\nu)]^{1/2}[S^{(2)}(\mathbf{r},\nu)]^{1/2}\,\mathrm{Re}\,[\mu(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\, e^{-2\pi i\nu(R_1-R_2)/c}]. \quad (4.3.54)$$

Из формулы (4.3.54), иногда называемой *законом спектральной интерференции*, видно, что в общем случае спектральная плотность $S(\mathbf{r},\nu)$ света в точке P не равна сумме спектральных плотностей $S^1(\mathbf{r},\nu)$ и $S^2(\mathbf{r},\nu)$ двух пучков, приходящих в точку P от двух отверстий. Она отличается от этой суммы наличием последнего члена в правой части формулы. Это член зависит от спектральной степени когерентности света $\mu(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ в двух отверстиях. Из (4.3.54), в частности, следует, что даже если два пучка имеют одинаковое спектральное распределение, т.е. если $S^2(\mathbf{r},\nu) = S^1(\mathbf{r},\nu)$, спектральное распределение света, полученное в результате суперпозиции этих пучков, будет другим. Изменения спектра, возникающие в результате интерференции, будут обсуждаться в разд. 5.8.

Заметим, что выражение (4.3.54) для спектральной плотности в точке плоскости $\mathscr{B}$ похоже на выражение (4.3.15) для средней интенсивности. Это сходство наводит на мысль, что возможно имеет смысл ввести, по аналогии с (4.3.23), понятие *спектральной видности*. Несколько позднее мы так и поступим [(4.5.18)]. Пока же отметим, что закон спектральной интерференции и понятие спектральной видности нашли полезные приложения (см., например, Heiniger, Herden and Tschudi, 1983 и James, Kandpal and Wolf, 1995).

Взаимная спектральная плотность $W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ и спектральная плотность $S(\mathbf{r},\nu)$ могут быть, в принципе, определены из измерений функции взаимной когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$ и функции автокогерентности $\Gamma(\mathbf{r},\mathbf{r},\tau)$ с помощью преобразования Фурье (4.3.40б). В этом случае спектральная степень когерентности может быть найдена по формуле (4.3.47б). С другой стороны, ее можно определить с помощью узкополосных фильтров, что мы сейчас покажем, следуя анализу, проведенному Вольфом (Wolf, 1983).

Как мы уже знаем, функцию взаимной когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$ света в двух отверстиях (интерференционный эксперимент Юнга) можно найти, измерив средние интенсивности света в этих отверстиях, а также видность и положение максимумов интерференционных полос. Теперь заметим, что функция взаимной когерентности согласно (4.3.40а) есть ни что иное, как фурье-образ взаимной спектральной плотности $W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$, которая может быть определена из выражения (4.3.39).

Предположим, что после каждого из отверстий мы разместили одинаковые узкополосные фильтры. Пусть $T(\nu)$ — комплексная функция пропускания каждого фильтра. Тогда взаимную спектральную плотность $W^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ света на выходе фильтров можно найти по формуле (4.3.39), заменив $\widetilde{V}(\mathbf{r}, \nu)$ величиной $T(\nu)\widetilde{V}(\mathbf{r}, \nu)$

$$\langle T^*(\nu)\widetilde{V}^*(\mathbf{r}_1, \nu)T(\nu')\widetilde{V}(\mathbf{r}_2, \nu')\rangle = W^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)\delta(\nu - \nu'). \tag{4.3.55}$$

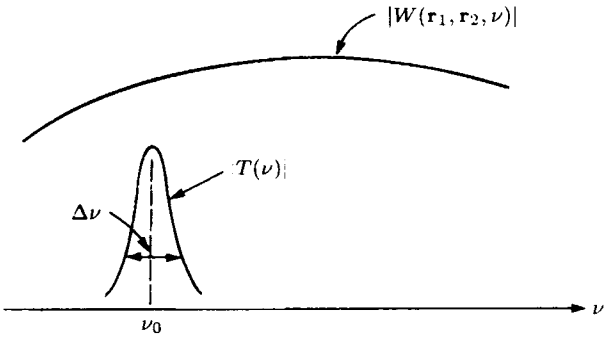


Рис. 4.8. Соотношение между частотными зависимостями модуля функции пропускания $T(\nu)$ фильтров, помещенных перед отверстиями (интерференционный эксперимент Юнга) и абсолютного значения взаимной спектральной плотности $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ нефильтрованного света в этих отверстиях. Предполагается, что эффективные полосы пропускания фильтров $\nu_0 - \frac{1}{2}\Delta\nu \leqslant \nu \leqslant \nu_0 + \frac{1}{2}\Delta\nu$ являются настолько узкими, что при фиксированных $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ как модуль, так и фаза функции $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ [а также $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu)$ и $W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \nu)$] постоянны в пределах полосы пропускания фильтра

Поскольку $T(\nu)$ — детерминированная функция, ее можно вынести за знак усреднения в выражении (4.3.55). Тогда, используя (4.3.39), получим следующее соотношение между взаимными спектральными плотностями фильтрованного и нефильтрованного света в двух отверстиях:

$$W^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = |T(\nu)|^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu). \tag{4.3.56}$$

Выражения (4.3.56) и (4.3.40а) позволяют сразу же записать функцию взаимной когерентности фильтрованного света в двух отверстиях в виде

$$\Gamma^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int_0^\infty |T(\nu)|^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)\, \mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\, d\nu. \tag{4.3.57}$$

Предположим теперь, что каждый фильтр имеет полосу пропускания с эффективной шириной $\Delta\nu$ и центральной частотой ν_0. Пусть взаимная спектральная плотность $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ света, падающего на отверстия, является непрерывной функцией ν и пусть интервал $\Delta\nu$ настолько мал, что $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ существенно не меняется в пределах эффективной полосы пропускания $\nu_0 - \frac{1}{2}\Delta\nu \leqslant \nu \leqslant \nu_0 + \frac{1}{2}\Delta\nu$ фильтров (см. рис. 4.8). Тогда мы можем заменить $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ под знаком интеграла в (4.3.57) на $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu_0)$ и получим следующее выражение для $\Gamma^{(+)}$:

$$\Gamma^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu_0) \int_0^\infty |T(\nu)|^2\, \mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\, d\nu. \tag{4.3.58}$$

Аналогично, если спектральные плотности $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu)$ и $W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \nu)$ света в двух отверстиях представляют собой непрерывные функции частоты ν и интервал $\Delta\nu$ достаточно мал, то с хорошей степенью точности имеем

$$\Gamma^{(+)}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j, \tau) = S(\mathbf{r}_j, \nu_0) \int_0^\infty |T(\nu)|^2\, \mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\, d\nu, \quad (j = 1, 2). \tag{4.3.59}$$

Из формул (4.3.58) и (4.3.59) следует, что, зная функцию пропускания фильтров $T(\nu)$, можно найти взаимную спектральную плотность $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ и спектральные плотности $S(\mathbf{r}_j, \nu)$ $(j = 1, 2)$ света, падающего на отверстия, измерив функцию взаимной когерентности и функцию автокогерентности фильтрованного света, соответственно.

Подставляя (4.3.58) и (4.3.59) в (4.3.12а), получим следующее выражение для комплексной степени когерентности фильтрованного света, идущего от двух отверстий:

$$\gamma^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu_0)\theta(\tau), \tag{4.3.60}$$

где

$$\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu_0) = \frac{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu_0)}{[S(\mathbf{r}_1, \nu_0)]^{1/2}[S(\mathbf{r}_2, \nu_0)]^{1/2}}, \tag{4.3.61}$$

$$\theta(\tau) = \frac{\displaystyle\int_0^\infty |T(\nu)|^2\, \mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\, d\nu}{\displaystyle\int_0^\infty |T(\nu)|^2\, d\nu}. \tag{4.3.62}$$

Множитель $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu_0)$ в правой части выражения (4.3.60), представляет собой в точности спектральную степень когерентности на частоте ν_0 [(4.3.47б)] нефильтрованного света в двух отверстиях. Кроме того, он также равен спектральной степени когерентности $\mu^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu_0)$ фильтрованного света, что можно легко увидеть, подставляя (4.3.56) в (4.3.47б), заменяя W на $W^{(+)}$ и сравнивая полученное выражение с (4.3.61). Таким образом, ***спектральная степень когерентности при фильтрации остается неизменной.*** С другой стороны, нетрудно показать, что комплексная степень когерентности $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ для нефильтрованного и фильтрованного света отличаются друг от друга. Другой множитель $\theta(\tau)$ в правой части выражения (4.3.60), является согласно (4.3.62) нормированным фурье-образом квадрата модуля функции пропускания $T(\nu)$ каждого фильтра.

Из (4.3.60) очевидно, что $|\gamma^{(+)}|$, как функция τ, достигает максимума, когда $|\theta(\tau)|$ максимально, т.е. при $\tau = 0$. Более того, поскольку $\theta(0) = 1$, имеем

$$\gamma^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = \mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu_0). \tag{4.3.63}$$

Эта формула означает, что ***«равновременная» комплексная степень когерентности*** $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ [(4.3.35)] ***фильтрованного света в двух отверстиях равна спектральной степени когерентности*** $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu_0)$ ***нефильтрованного (равно как и фильтрованного) света на средней частоте*** ν_0 ***фильтров.*** Отсюда ясно, что как модуль, так и фазу спектральной степени когерентности можно определить из интерференционного эксперимента, описанного в разд. 4.3.1, поместив за каждым отверстием одинаковые фильтры с достаточно узкими полосами пропускания.

Поскольку, при фиксированном положении отверстий, $|\gamma^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|$ достигает максимума при $\tau = 0$, интерференционные полосы, формируемые фильтрованным светом, будут наиболее резкими вблизи центра интерферограммы, т.е. в окрестности точки, равноудаленной от обоих отверстий. Согласно (4.3.48), модуль спектральной степени когерентности может принимать любые значения от нуля до единицы, включая оба граничных значения. Тогда из выражений (4.3.63), (4.3.60) и соотношения (4.3.25) между видностью полос $\mathscr{V}$ и $|\gamma|$ следует, что ***максимум видности интерференционных полос, формируемых фильтрованным светом, в общем случае не будет стремиться к единице по мере сужения полосы пропускания фильтров.*** Предполагается, что измерения проводятся во временно́м масштабе, подразумевающем усреднение по временно́му интервалу, значительно превышающему обратную ширину полосы фильтров, и что приемник достаточно чувствителен для измерения ослабленных интенсивностей фильтрованного света. Фактически нетрудно создать условия, при которых максимум видности $\mathscr{V}_{\max}$ будет иметь любое значение из интервала $0 \leqslant \mathscr{V}_{\max} \leqslant 1$ вне зависимости от того, насколько узкой может быть эффективная ширина полосы $\Delta\nu$ фильтров. Необходимо только направить на отверстия свет от удаленного, пространственно некогерентного, однородного, круглого, квазимонохроматического источника со средней частотой в окрестности $\nu = \nu_0$, расположенного симметрично по отношению к отверстиям. Подходящее расстояние между отверстиями может быть легко вычислено с помощью теоремы Ван Циттерта — Цернике (см. разд. 4.4.4).

Хотя в условиях применимости формулы (4.3.60) максимум видности интерференционных полос не будет изменяться по мере дальнейшего сужения полосы частот $\Delta\nu$ фильтров, интерференционная картина, тем не менее, все же будет меняться. Если $\Delta\nu$ уменьшается при фиксированном коэффициенте пропускания $|T(\nu_0)|$ фильтров на средней частоте ν_0, эффективная ширина $|\theta(\tau)|$ увеличивается, что может быть легко получено из (4.3.62). Следовательно, эффективная ширина $|\gamma^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|$ (при фиксированных $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$) также будет расти, что, очевидно, следует из (4.3.60). Это означает, что видность полос в плоскости наблюдения будет в этом случае спадать медленнее по мере удаления от центра интерференционной картины.

В формуле (4.3.60) для комплексной степени когерентности фильтрованного света свойства пространственной когерентности, характеризуемые $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu_0)$, и свойства временно́й когерентности, характеризуемые $\theta(\tau)$, полностью разграничены. Это разделение является проявлением так называемой взаимной спектральной чистоты фильтрованного света, которую мы рассмотрим в разд. 4.5.1.

4.3.3. Время когерентности и ширина спектра

В ходе предварительного обсуждения временно́й когерентности в разд. 4.2.1 мы ввели понятие времени когерентности. Эта величина является мерой временно́го интервала, в течение которого существуют заметные корреляции амплитуды и фазы световых колебаний в данной точке P флуктуирующего оптического поля. При рассмотрении простейшего интерференционного эксперимента мы дали определение времени

когерентности Δt, а также произвели грубую оценку этого параметра, а именно,

$$\Delta t = 1/\Delta\nu, \tag{4.3.64}$$

где $\Delta\nu$ — эффективная ширина спектра света в точке P. В этом разделе мы дадим более точное определение времени когерентности, а также введем связанное с ним понятие ширины полосы.

Из разд. 4.3.1 мы знаем, что мерой корреляций световых колебаний в точке P стационарного оптического поля в моменты времени, разделенные интервалом τ, является функция автокогерентности

$$\Gamma(\tau) = \langle V^*(P,t)V(P,t+\tau)\rangle, \tag{4.3.65}$$

где $V(P,t)$ — поле в точке P в представлении комплексного аналитического сигнала. (Для простоты здесь и далее мы опускаем пространственный аргумент функций автокогерентности и спектральной плотности.) Поэтому представляется вполне естественным и удобным с математической точки зрения определить время когерентности Δt в точке P как нормированную среднеквадратичную ширину квадрата модуля $\Gamma(\tau)$, а именно[1]

$$(\Delta\tau)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |\Gamma(\tau)|^2\, d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\tau)|^2\, d\tau}. \tag{4.3.66}$$

По аналогии мы можем определить эффективную ширину спектра (ширину полосы) света $\Delta\nu$ в точке P как нормированную среднеквадратичную ширину квадрата спектральной плотности $S(\nu)$,

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau)\, e^{2\pi i\nu\tau}\, d\tau, \tag{4.3.67}$$

т.е.

$$(\Delta\nu)^2 = \frac{\int_0^{\infty} (\nu-\bar{\nu})^2 S^2(\nu)\, d\nu}{\int_0^{\infty} S^2(\nu)\, d\nu}, \tag{4.3.68}$$

где

$$\bar{\nu} = \frac{\int_0^{\infty} \nu S^2(\nu)\, d\nu}{\int_0^{\infty} S^2(\nu)\, d\nu} \tag{4.3.69}$$

— средняя частота света.

Выражения (4.3.66) и (4.3.68) для времени когерентности и эффективной ширины спектра можно переписать в несколько ином виде, который позволит нам легко вывести основное неравенство, которому удовлетворяет произведение этих величин. Положим, что

$$\begin{aligned} &\Phi(\xi) = S(\bar{\nu}+\xi), && \text{если } \xi \geqslant -\bar{\nu} \quad \text{(а)} \\ &\Phi(\xi) = 0, && \text{если } \xi < -\bar{\nu} \quad \text{(б)} \\ &\psi(\tau) = \Gamma(\tau)\, e^{2\pi i\bar{\nu}\tau}. && \text{(в)} \end{aligned} \tag{4.3.70}$$

Предположим также, что $\Phi(\xi)$ квадратично интегрируемая и непрерывная функция ξ $(-\infty < \xi < \infty)$. Требование непрерывности, в частности, подразумевает, что $\Phi(-\bar{\nu}) = S(0) = 0$.[2] Из (4.3.67) и нашего

[1] Среднее значение $\bar{\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau|\Gamma(\tau)|^2\, d\tau / \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\tau)|^2\, d\tau$ равно нулю, так как $|\Gamma(\tau)|$ — четная функция τ. Безусловно, предполагается, что различные моменты, появляющиеся в этих формулах, существуют.

[2] Фактически это условие необходимо для сходимости интеграла в числителе (4.3.68) (см. Wolf, 1958). Более общий случай $S(0) \neq 0$ рассматривался в несколько ином контексте Кэем и Силвермэном (Kay and Silverman, 1957). См. также (Kharkevich, 1960, разд. 12).

предположения о квадратичной интегрируемости $\Phi(\xi)$ следует, что $\psi(\tau)$ и $\Phi(\xi)$ служат фурье-образами друг друга:

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi)\, e^{-2\pi i \xi \tau}\, d\xi, \quad \Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)\, e^{2\pi i \xi \tau}\, d\tau. \tag{4.3.71}$$

Выражения для $\Delta\tau$ и $\Delta\nu$ принимают вид

$$(\Delta\tau)^2 = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |\psi(\tau)|^2\, d\tau, \quad (\Delta\nu)^2 = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \Phi^2(\xi)\, d\xi, \tag{4.3.72}$$

где

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\tau)|^2\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\xi)\, d\xi. \tag{4.3.73}$$

Равенство двух интегралов в (4.3.73) вытекает из теоремы Парсеваля для преобразования Фурье.

Далее выразим интеграл в выражении для $\Delta\nu$ (4.3.72) через функцию ψ. Используя второе из соотношений (4.3.71), получим

$$\begin{aligned}(\Delta\nu)^2 = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \Phi(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)\, e^{2\pi i \xi \tau}\, d\tau = \\ = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \psi(\tau) \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi)\, e^{2\pi i \xi \tau}\, d\xi = \\ = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)\frac{d^2}{d\tau^2}\psi^*(\tau)\, d\tau = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d\psi}{d\tau}\right|^2 d\tau.\end{aligned} \tag{4.3.74}$$

При переходе от второго выражения к третьему использовано первое из соотношений (4.3.71), а также тот факт, что, поскольку $\Phi(\xi)$ — «сдвинутая спектральная плотность» [см. (4.3.70а) и (4.3.70б)], она должна быть действительной. Последнее выражение получается из предыдущего при интегрировании по частям, если учесть, что $\psi(\tau) \to 0$ при $\tau \to \pm\infty$ — это справедливо, так как по предположению $\psi(\tau)$ — квадратично интегрируемая функция.

Из первого соотношения в выражении (4.3.72), выражения (4.3.74) и первого соотношения в выражении (4.3.73) следует, что

$$(\Delta\tau)^2(\Delta\nu)^2 = \frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{4\left(\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2|\psi(\tau)|^2\, d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d\psi}{d\tau}\right|^2 d\tau\right)}{\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(\tau)|^2\, d\tau\right)^2}\right]. \tag{4.3.75}$$

Существует математическая лемма (Weyl, 1950, с. 393–394; Born and Wolf, 1980, прил. VIII), согласно которой член в квадратных скобках в правой части (4.3.75) больше или равен единице для любой функции $\psi(\tau)$, для которой существуют интегралы. Таким образом, мы получили следующее ***неравенство взаимности***:

$$\Delta\tau\Delta\nu \geqslant 1/4\pi. \tag{4.3.76}$$

Нетрудно показать, что знак равенства в формуле (4.3.76) будет иметь место лишь тогда, когда член в квадратных скобках в правой части (4.3.75) равен единице; а это возможно только в том случае, если $\psi(\tau)$ — функция Гаусса (Born and Wolf, 1980, прил. VIII). Но $\Phi(\xi)$ является фурье-образом $\psi(\tau)$, а фурье-образ функции Гаусса есть также функция Гаусса. Следовательно, $\Phi(\xi)$, будучи функцией Гаусса, должна быть отлична от нуля для всех значений ее аргумента ($-\infty < \xi < \infty$). Но тогда она не удовлетворяет второму условию выражения (4.3.70) (которое является следствием того, что $\Gamma(\tau)$ — аналитический сигнал). Таким образом, знак равенства в формуле (4.3.76) никогда не достигается. Однако, если спектральная плотность $S(\nu)$ приближенно имеет гауссовскую форму и ее средняя частота $\bar{\nu}$ велика по сравнению с эффективной шириной спектра, знак неравенства в (4.3.76) можно, очевидно, заменить знаком порядка величины

$$\Delta\tau\Delta\nu \sim 1/4\pi. \tag{4.3.77}$$

Определения времени когерентности и эффективной ширины спектра, которые мы только что обсудили, применимы для квазимонохроматического света, спектр которого имеет один более или менее ярко выраженный пик. Сложнее дать приемлемые определения этих величин, если спектр имеет несколько пиков (как в случае многомодового лазера) или если многократные пики имеет абсолютная величина функции взаимной когерентности (например, при наблюдении полос Брюстера в белом свете эта функция имеет два пика). Для спектра, состоящего из двух линий, ширина которых значительно меньше расстояния между ними, понятие эффективной ширины, очевидно, уже не будет однозначным.

Определения времени когерентности и эффективной ширины спектра, отличные от тех, что мы обсуждали до сих пор, можно ввести, исходя из рассмотрения единичной ячейки фазового пространства фотонов (см. Mandel, 1959). Тогда время когерентности $(\Delta\tau)'$ определяется формулой

$$(\Delta\tau)' = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)|^2 \, d\tau, \tag{4.3.78}$$

где

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)} = \frac{\langle V^*(P,t)V(P,t+\tau)\rangle}{\langle V^*(P,t)V(P,t)\rangle} \tag{4.3.79}$$

— комплексная степень автокогерентности, а эффективный спектральный диапазон определяется как

$$(\Delta\nu)' = \frac{1}{\displaystyle\int_0^{\infty} \mathfrak{s}^2(\nu)\, d\nu}, \tag{4.3.80}$$

где

$$\mathfrak{s}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\tau)\, \mathrm{e}^{2\pi i\nu\tau}\, d\tau \tag{4.3.81}$$

— нормированная спектральная плотность [см. (2.4.26) и (2.4.27)]. Из (4.3.78) и (4.3.79) следует, что $(\Delta\tau)'$ можно записать в виде

$$(\Delta\tau)' = \frac{1}{[\Gamma(0)]^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\tau)|^2 \, d\tau, \tag{4.3.82}$$

а из (4.3.67), (4.3.79), (4.3.80) и (4.3.81), используя теорему Парсеваля, получаем $(\Delta\nu)'$ в виде

$$(\Delta\nu)' = \frac{[\Gamma(0)]^2}{\displaystyle\int_0^{\infty} S^2(\nu)\, d\nu}. \tag{4.3.83}$$

Если теперь перемножить выражения (4.3.82), (4.3.83) и вновь применить теорему Парсеваля, мы получим соотношение

$$(\Delta\tau)'(\Delta\nu)' = 1 \tag{4.3.84}$$

Следовательно, определенное таким образом время когерентности всегда обратно эффективной ширине спектра.

Можно показать (Mandel and Wolf, 1962; Mehta, 1963), что для простых типов спектральных кривых $\Delta\nu \approx (\Delta\nu)'$ и $\Delta\tau \approx (\Delta\tau)'$. Но если спектральная плотность имеет более сложную форму, два ряда определений могут привести к результатам, совершенно различным по порядку величины. Поэтому в некоторых случаях, применяя то или иное определение, необходимо проявлять осторожность.

4.4. Распространение корреляций

В разд. 4.2.2 мы на простом примере продемонстрировали, что состояние когерентности света может существенно меняться в процессе его распространения. Точнее говоря, мы показали, что даже если свет излучается некоррелированными точечными источниками, то в точках, достаточно удаленных от источников, поле может быть сильно коррелированным. С точки зрения общей теории частичной когерентности,

такое изменение состояния когерентности обусловлено тем, что функция взаимной когерентности удовлетворяет двум законам распространения. В свободном пространстве они представляют собой два волновых уравнения. В этом разделе мы получим эти уравнения, а также два соответствующих дифференциальных уравнения для взаимной спектральной плотности.

4.4.1. Дифференциальные уравнения распространения взаимной когерентности и взаимной спектральной плотности в свободном пространстве

Пусть, как и ранее, $V^{(r)}(\mathbf{r},t)$ — выборочная функция действительного случайного процесса, характеризующего флуктуирующее световое возмущение в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t. Если в качестве $V^{(r)}$ выбрать декартову компоненту электрического поля или векторный потенциал, то в свободном пространстве она будет подчиняться волновому уравнению

$$\nabla^2 V^{(r)}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V^{(r)}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} \tag{4.4.1}$$

(c — скорость света в вакууме). Нетрудно показать, что комплексный аналитический сигнал $V(\mathbf{r},t)$, связанный с $V^{(r)}(\mathbf{r},t)$, также подчиняется этому уравнению. Чтобы продемонстрировать это, представим $V^{(r)}(\mathbf{r},t)$ в виде (обобщенного) интеграла Фурье

$$V^{(r)}(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{V}(\mathbf{r},\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}\,d\nu. \tag{4.4.2}$$

Осуществив фурье-преобразование уравнения (4.4.1), мы получим, что $\widetilde{V}(\mathbf{r},t)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2\widetilde{V}(\mathbf{r},\nu) + k^2\widetilde{V}(\mathbf{r},\nu) = 0, \tag{4.4.3}$$

где

$$k = 2\pi\nu/c. \tag{4.4.4}$$

Аналитический сигнал $V(\mathbf{r},t)$, связанный с действительным полем $V^{(r)}(\mathbf{r},t)$, мы получаем, опуская отрицательные частотные компоненты в правой части (4.4.2):

$$V(\mathbf{r},t) = \int_{0}^{\infty} \widetilde{V}(\mathbf{r},\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}\,d\nu. \tag{4.4.5}$$

Действуя оператором $\nabla^2 - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2$ на (4.4.5) и изменяя порядок различных операций, получаем

$$\nabla^2 V(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = \int_{0}^{\infty} [\nabla^2\widetilde{V}(\mathbf{r},\nu) + k^2\widetilde{V}(\mathbf{r},\nu)]\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}\,d\nu. \tag{4.4.6}$$

Из (4.4.3) следует, что интеграл в правой части полученного выражения обращается в нуль. Следовательно, в свободном пространстве комплексное возмущение $V(\mathbf{r},t)$ действительно удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}. \tag{4.4.7}$$

Теперь осуществим комплексное сопряжение (4.4.7) и заменим $\mathbf{r}$ и t на $\mathbf{r}_1$ и t_1, соответственно:

$$\nabla_1^2 V^*(\mathbf{r}_1,t_1) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V^*(\mathbf{r}_1,t_1)}{\partial t_1^2}, \tag{4.4.8}$$

где ∇_1^2 — лапласиан по координатам точки $\mathbf{r}_1$. Далее умножим обе части (4.4.8) на $V(\mathbf{r}_2,t_2)$. Поскольку дифференцирование в (4.4.8) производится по переменным $\mathbf{r}_1$, t_1, функцию $V(\mathbf{r}_2,t_2)$ можно внести под знак оператора, и мы получим уравнение

$$\nabla_1^2[V^*(\mathbf{r}_1,t_1)V(\mathbf{r}_2,t_2)] = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}[V^*(\mathbf{r}_1,t_1)V(\mathbf{r}_2,t_2)]. \tag{4.4.9}$$

Возьмем среднее (по ансамблю) от выражения (4.4.9) по всем различным реализациям поля. Если мы поменяем порядок операций усреднения и дифференцирования, а также вспомним определение корреляционной функции второго порядка (4.3.6), то в результате получим уравнение

$$\nabla_1^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2). \tag{4.4.10а}$$

Совершенно аналогичным образом получим

$$\nabla_2^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2). \tag{4.4.10б}$$

где ∇_2^2 — лапласиан по координатам точки $\mathbf{r}_2$. Таким образом, мы установили, что *в свободном пространстве корреляционная функция второго порядка* $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2)$ *оптического поля удовлетворяет волновым уравнениям (4.4.10а) и (4.4.10б).*

Теперь предположим, что ансамбль, характеризующий статистические свойства поля, является стационарным, по крайней мере, в широком смысле, и эргодичным. Тогда корреляционная функция $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2)$ зависит от двух временны́х переменных только через их разность $t_2 - t_1 = \tau$. Более того, в этом случае несущественно, каким образом определена корреляционная функция, — через усреднение по ансамблю или через усреднение по времени. Очевидно также, что операторы $\partial^2/\partial t_1^2$ и $\partial^2/\partial t_2^2$ в уравнениях (4.4.10) можно заменить на $\partial^2/\partial \tau^2$. Таким образом, уравнения (4.4.10) переходят в следующие два волновых уравнения, которым удовлетворяет функция взаимной когерентности поля в свободном пространстве:

$$\nabla_1^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau), \tag{4.4.11а}$$

$$\nabla_2^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau). \tag{4.4.11б}$$

Впервые эти волновые уравнения были получены Вольфом (Wolf, 1955).

Каждое из уравнений (4.4.11) описывает изменение функции взаимной когерентности, когда одна из точек ($\mathbf{r}_1$ или $\mathbf{r}_2$) фиксирована, а другая точка и параметр τ меняются. Величина τ представляет собой разность между двумя моментами времени, в которые рассматривается корреляция между световыми колебаниями в точках $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$. В экспериментах τ входит в выражения только как разность хода $R_2 - R_1 = c\tau$ [см. рис. 4.6 и выражение (4.3.2а)]. Само время, таким образом, исключено из основных формул теории когерентности стационарных полей.

Ранее мы отмечали, что пространственная когерентность характеризуется зависимостью функции взаимной когерентности от $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, тогда как временна́я когерентность характеризуется зависимостью от τ. Поскольку уравнения (4.4.11) связывают между собой зависимости Γ от всех переменных $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и τ, очевидно, что в общем случае эффекты пространственной и временно́й когерентности нельзя разделить. Хорошим примером этой взаимосвязи является тот факт, что свет, излучаемый пространственно некогерентным источником, становится частично-когерентным в процессе распространения (см. разд. 4.2.2, рис. 4.3). Элементарное объяснение этому явлению было дано нами на основе конечных волновых цугов, излучаемых различными точками источника. Конечная длительность волновых цугов означает, что излучаемый свет имеет конечную, ненулевую ширину полосы и, следовательно, обладает некоторой временно́й когерентностью. Поскольку уравнения (4.4.11) подразумевают наличие связи между временно́й и пространственной когерентностью, последняя может возникать в поле от пространственно некогерентного источника. Волновые уравнения (4.4.11) позволяют дать количественный анализ этого явления. Более подробно оно будет рассмотрено в разд. 4.4.2–4.4.5.

Взаимная спектральная плотность $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ является фурье-образом функции взаимной когерентности [(4.3.40б)]. Поэтому, осуществив фурье-преобразование уравнений (4.4.11), мы сразу же получаем следующие уравнения Гельмгольца, которым W удовлетворяет в свободном пространстве:

$$\nabla_1^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) + k^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0, \tag{4.4.12а}$$

$$\nabla_2^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) + k^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0, \tag{4.4.12б}$$

где $k = 2\pi\nu/c$.

Очевидно, что задача определения функции взаимной когерентности и взаимной спектральной плотности в любых двух точках области свободного пространства, ограниченной замкнутой поверхностью, сводится теперь к решению стандартной задачи теории дифференциальных уравнений в частных производных. Техника вычислений, как точных, так и приближенных, для такого ряда задач хорошо известна. Мы рассмотрим здесь только две задачи такого рода, представляющие практический интерес.

4.4.2. Распространение корреляций от плоскости

Рассмотрим флуктуирующее оптическое поле $V(\mathbf{r},t)$, распространяющееся в полупространстве $z>0$. Выразим функцию взаимной когерентности световых колебаний в любых двух точках $P_1(\mathbf{r}_1)$, $P_2(\mathbf{r}_2)$ поля через значения функции взаимной когерентности и некоторых ее производных во всех парах точек $S_1(\mathbf{r}_1')$ и $S_2(\mathbf{r}_2')$ плоскости $z=0$ (рис. 4.9).

Так как уравнения Гельмгольца (4.4.12), которым подчиняется взаимная спектральная плотность, проще, чем волновые уравнения для функции взаимной когерентности, рассмотрим сначала распространение взаимной спектральной плотности. Воспользуемся функциями Грина, определяющими решение уравнения Гельмгольца в полупространстве с граничными условиями Дирихле. Необходимо, однако, позаботиться об определении поведения $W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ на достаточном расстоянии от плоскости. Поскольку поле распространяется в полуплоскости $z>0$, из (4.3.39) следует, что $W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ асимптотически ведет себя как *уходящая* волна в точке $\mathbf{r}_2$ и как *приходящая* волна в точке $\mathbf{r}_1$.

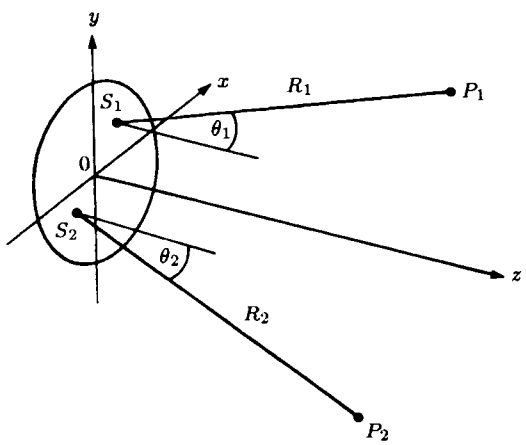


Рис. 4.9. К задаче о распространении взаимной спектральной плотности и взаимной когерентности от плоскости $z=0$ в полупространстве $z>0$

Для начала запишем решение уравнения (4.4.12б) для $W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ через $W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2',\nu)$ при условии, что $\mathbf{r}_2'$ — расположена в плоскости $z=0$, а положение $\mathbf{r}_1$ зафиксировано. Согласно дифракционной формуле Рэлея первого рода (3.2.78) имеем

$$W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(z=0)} W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2',\nu)\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\mathrm{e}^{ikR_2}}{R_2}\right) d^2r_2', \quad (4.4.13)$$

где $R_2=|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_2'|$ и $\partial/\partial z_2$ означает дифференцирование вдоль z-оси. Аналогичным образом получим формулу

$$W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2',\nu) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(z=0)} W(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\nu)\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-ikR_1}}{R_1}\right) d^2r_1', \quad (4.4.14)$$

где $R_1=|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1'|$. Подставляя выражение (4.4.14) в (4.4.13), находим

$$W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{(z=0)} W(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\nu)\times\left[\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-ikR_1}}{R_1}\right)\right]\left[\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\mathrm{e}^{ikR_2}}{R_2}\right)\right] d^2r_1'\,d^2r_2'. \quad (4.4.15)$$

Эта формула выражает значение функции взаимной спектральной плотности поля в полупространстве $z>0$ через граничные значения этой функции на плоскости $z=0$. Преобразуем ее с учетом следующих выражений

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-ikR_1}}{R_1}\right) = -\left(ik+\frac{1}{R_1}\right)\frac{\mathrm{e}^{-ikR_1}}{R_1}\cos\theta_1, \quad (4.4.16а)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-ikR_2}}{R_2}\right) = -\left(-ik+\frac{1}{R_2}\right)\frac{\mathrm{e}^{ikR_2}}{R_2}\cos\theta_2, \quad (4.4.16б)$$

где θ_1 и θ_2 — углы, которые отрезки S_1P_1 и S_2P_2 образуют с положительным направлением оси z. Подставляя (4.4.16) в (4.4.15), получим

$$W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\iint_{(z=0)}W(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\nu)\times$$
$$\times\left[1+\frac{i}{k}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)+\frac{1}{k^2}\frac{1}{R_1R_2}\right]\frac{e^{ik(R_2-R_1)}}{R_1R_2}\cos\theta_1\cos\theta_2\,d^2r_1'\,d^2r_2'. \quad (4.4.17)$$

Формула (4.4.17) представляет собой искомое выражение для распространения взаимной спектральной плотности.

Прежде чем перейти к дальнейшим вычислениям приведем приближенный вид (4.4.17), справедливый для случая, когда точки $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$ удалены на расстояние порядка многих длин волн от плоскости $z=0$. При этом $R_1\gg\lambda$, $R_2\gg\lambda$, и, следовательно, $1/R_1\ll k$, $1/R_2\ll k$. Тогда (4.4.17) принимает вид

$$W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\approx\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\iint_{(z=0)}W(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\nu)\frac{e^{ik(R_2-R_1)}}{R_1R_2}\cos\theta_1\cos\theta_2\,d^2r_1'\,d^2r_2'. \quad (4.4.18)$$

Из (4.4.17) можно легко получить искомый закон распространения функции взаимной когерентности. Умножим обе части (4.4.17) на $e^{-2\pi i\nu\tau}$ и проинтегрируем по интервалу $0<\nu<\infty$. Тогда левая часть полученного выражения представляет функцию взаимной когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$ [см. (4.3.40а)]. Для преобразования правой части мы воспользуемся тем, что

$$\Gamma(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\tau)=\int_0^\infty W(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\nu)\,e^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu \quad (4.4.19)$$

Дифференцируя это выражение и меняя затем местами порядок различных операций, получим

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Gamma(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\tau)}{\partial\tau}=-\int_0^\infty(ik)W(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\nu)\,e^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu, \quad (4.4.19а)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Gamma(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\tau)}{\partial\tau^2}=\int_0^\infty(ik)^2W(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\nu)\,e^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu, \quad (4.4.19б)$$

где использовано соотношение $2\pi\nu/c=k$. В итоге получим следующую формулу (см. Parrent, 1959) для функции взаимной когерентности света в любых двух точках полупространства $z>0$:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{z=0}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{R_1^2R_2^2}\mathscr{D}\Gamma\left(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\tau-\frac{R_2-R_1}{c}\right)d^2r_1'\,d^2r_2', \quad (4.4.20)$$

где $\mathscr{D}$ — дифференциальный оператор

$$\mathscr{D}=1+\frac{R_2-R_1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{R_1R_2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}. \quad (4.4.20а)$$

Из (4.4.20) видно, что, зная функцию взаимной когерентности, ее первую и вторую производные по τ для всех пар точек $S_1(\mathbf{r}_1')$ и $S_2(\mathbf{r}_2')$ плоскости $z=0$, можно найти значения функции взаимной когерентности для всех пар точек $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$ в полуплоскости $z>0$ и для всех значений τ.

Если точки $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$ удалены от плоскости $z=0$ настолько, что $R_1\gg\lambda$, $R_2\gg\lambda$ для всех точек $S_1(\mathbf{r}_1')$ и $S_2(\mathbf{r}_2')$ этой плоскости и для всех длин волн $\lambda=c/\nu=2\pi/k$, для которых $|W(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\nu)|$ имеет существенное значение, то формула (4.4.20) упрощается. В этом случае, просто осуществив фурье-преобразование выражения (4.4.18) и воспользовавшись затем (4.4.19б), мы находим, что

$$\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)\approx-\frac{1}{(2\pi c)^2}\iint_{(z=0)}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{R_1R_2}\Gamma''\left(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\tau-\frac{R_2-R_1}{c})\right)d^2r_1'\,d^2r_2', \quad (4.4.21)$$

где Γ'' — вторая производная по τ от Γ.

С помощью приведенных формул можно получить ряд полезных результатов, имеющих отношение к когерентным свойствам оптических образов, задачам радиометрии, касающимся определения углового распределения интенсивности излучения источников различных состояний когерентности и т.д. Эти вопросы мы рассмотрим несколько позднее.

4.4.3. Распространение корреляций от ограниченных поверхностей

Выведенные нами формулы распространения взаимной спектральной плотности и функции взаимной когерентности от плоскости являются точными решениями дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют эти функции. Можно также получить соответствующие формулы для распространения от искривленных поверхностей. Однако, их применение ограничено необходимостью определения соответствующих функций Грина, которые могут быть получены в законченном виде только для самых простых геометрических форм. Тем не менее, можно вывести приближенный закон распространения, который вполне приемлем для многих ситуаций, встречающихся на практике. Этот приближенный закон, который мы сейчас намереваемся получить, можно, в некотором смысле, рассматривать как аналог широко известного принципа Гюйгенса – Френеля для распространения монохроматического света.

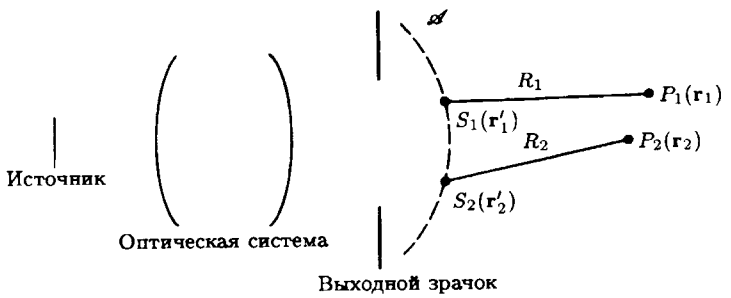


Рис. 4.10. К выводу приближенных законов распространения взаимной спектральной плотности и взаимной интенсивности

Рассмотрим световую волну, распространяющуюся от некоторой оптической системы. Пусть $\mathscr{A}$ — воображаемая незамкнутая поверхность, пересекающая волну (см. рис. 4.10). Предположим, что значения одной из корреляционных функций второго порядка (функции взаимной когерентности или взаимной спектральной плотности) известны для всех пар точек $S_1(\mathbf{r}_1')$ и $S_2(\mathbf{r}_2')$ на поверхности $\mathscr{A}$. Мы хотим найти значения этой корреляционной функции для всех пар точек $P_1(\mathbf{r}_1)$, $P_2(\mathbf{r}_2)$, лежащих с той стороны поверхности $\mathscr{A}$, куда распространяется свет.

Пусть $V(\mathbf{r}_1', t)$ и $V(\mathbf{r}_2', t)$ — комплексные световые возмущения в точках $S_1(\mathbf{r}_1')$ и $S_2(\mathbf{r}_2')$ и пусть $\widetilde{V}(\mathbf{r}_1', \nu)$, $\widetilde{V}(\mathbf{r}_2', \nu)$ — соответствующие спектральные амплитуды. Точнее говоря, четыре этих величины относятся к реализации стохастического процесса, характеризующего флуктуирующее поле. Предположим, что процесс является стационарным, по крайней мере, в широком смысле, а также эргодичным. В таком случае спектральные амплитуды необходимо рассматривать как обобщенные функции. Комплексные амплитуды в точках $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_1(\mathbf{r}_2)$ можно выразить через комплексные амплитуды во всех точках поверхности $\mathscr{A}$ в следующем приближенном виде, который представляет собой математическое выражение принципа Гюйгенса — Френеля (Born and Wolf, 1980, разд. 8.2):

$$\widetilde{V}(\mathbf{r}_1, \nu) = \int_{\mathscr{A}} \widetilde{V}(\mathbf{r}_1', \nu) \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \Lambda_1 \, d^2 r_1', \tag{4.4.22а}$$

$$\widetilde{V}(\mathbf{r}_2, \nu) = \int_{\mathscr{A}} \widetilde{V}(\mathbf{r}_2', \nu) \frac{e^{ikR_2}}{R_2} \Lambda_2 \, d^2 r_2'. \tag{4.4.22б}$$

Здесь R_1 и R_2 — расстояния $\overline{S_1P_1}$ и $\overline{S_2P_2}$, соответственно, а Λ_1 и Λ_2 — коэффициенты наклона. Если углы дифракции на выходном зрачке достаточно малы, то приближенно можно записать

$$\Lambda_2(k) \approx \Lambda_1(k) \approx \frac{ik}{2\pi}. \tag{4.4.23}$$

Из (4.4.22) следует, что

$$\widetilde{V}^*(\mathbf{r}_1, \nu)\widetilde{V}(\mathbf{r}_2, \nu') \approx \int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}} \widetilde{V}^*(\mathbf{r}_1', \nu)\widetilde{V}(\mathbf{r}_2', \nu') \frac{e^{i(k'R_2 - kR_1)}}{R_1 R_2} \Lambda_1^*(k)\Lambda_2(k') \, d^2 r_1' \, d^2 r_2', \tag{4.4.24}$$

где $k = 2\pi\nu/c$ и $k' = 2\pi\nu'/c$. Если теперь мы возьмем среднее по ансамблю от обеих частей (4.4.24) по различным реализациям, поменяем порядок операций усреднения и интегрирования в правой части полученного выражения, а также воспользуемся определением взаимной спектральной плотности (4.3.39), то в результате получим следующий закон распространения:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}} W(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \nu) \frac{e^{ik(R_2 - R_1)}}{R_1 R_2} \Lambda_1^*(k)\Lambda_2(k) \, d^2 r_1' \, d^2 r_2'. \tag{4.4.25}$$

Полагая свет квазимонохроматическим со средней частотой $\bar{\nu}$, из (4.4.25) можно вывести закон распространения для функции взаимной когерентности. Для этого сначала пренебрежем слабой зависимостью A_1 и A_2 от частоты, т.е. заменим эти величины значениями $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$, которые они принимают на средней частоте. Затем умножим обе части (4.4.25) на $e^{-2\pi i\nu\tau}$ и проинтегрируем по ν $(0 < \nu < \infty)$. Воспользовавшись далее соотношением (4.3.40а) между взаимной спектральной плотностью и функцией взаимной когерентности, получим в итоге искомый закон распространения:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}} \frac{\Gamma[\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \tau - (R_2 - R_1)/c]}{R_1 R_2} \bar{A}_1^* \bar{A}_2 \, d^2r_1' \, d^2r_2'. \tag{4.4.26}$$

На практике разность хода $|R_2 - R_1|$ обычно мала по сравнению с длиной когерентности ($\sim c/\Delta\nu$) света, т.е. задержка в правой части (4.4.26) мала по сравнению со временем когерентности:

$$\frac{|R_2 - R_1|}{c} \ll \frac{1}{\Delta\nu}. \tag{4.4.27}$$

В этом случае из свойств представления огибающей действительных сигналов (см. разд. 3.1.2) имеем

$$\Gamma[\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \tau - (R_2 - R_1)/c] \approx \Gamma(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \tau) \, e^{i\bar{k}(R_2 - R_1)}, \tag{4.4.28}$$

($\bar{k} = 2\pi\bar{\nu}/c$), и формула (4.4.26) приобретает вид

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \approx \int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}} \Gamma(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \tau) \frac{e^{i\bar{k}(R_2 - R_1)}}{R_1 R_2} \bar{A}_1^* \bar{A}_2 \, d^2r_1' \, d^2r_2'. \tag{4.4.29}$$

В более общем случае, когда область между поверхностью $\mathscr{A}$ и точками поля $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$ не является свободным пространством, вместо (4.4.25), очевидно, будет иметь место формула

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}} W(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \nu) K^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1', \nu) K(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2', \nu) \, d^2r_1' \, d^2r_2'. \tag{4.4.30}$$

Функция $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \nu)$ в этой формуле является функцией пропускания среды, которая характеризует распространение в области вне пределов поверхности $\mathscr{A}$, т.е. представляет собой комплексное возмущение в точке $\mathbf{r}$ от точечного монохроматического источника с единичной «силой» и нулевой фазой, излучающего на частоте ν и расположенного в точке $\mathbf{r}'$ на поверхности $\mathscr{A}$. При достаточно узкой эффективной полосе света, из (4.4.30) по аналогии с выводом выражения (4.4.29) получим следующий приближенный обобщенный закон распространения для функции взаимной когерентности:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \approx \int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}} \Gamma(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \tau) K^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1', \bar{\nu}) K(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2', \bar{\nu}) \, d^2r_1' \, d^2r_2'. \tag{4.4.31}$$

4.4.4. Теорема Ван Циттерта — Цернике

Одна из центральных теорем элементарной теории частичной когерентности была сформулирована Ван Циттертом (van Cittert, 1934) и позднее, в более общей форме, Цернике (Zernike, 1938). Она выражает корреляции в двух точках поля, излучаемого пространственно некогерентным, квазимонохроматическим, планарным источником.

Теорема Ван Циттерта — Цернике может быть легко получена из нашей формулы (4.4.29). Положим $\tau = 0$ в (4.4.29) и вспомним, что согласно (4.3.34) $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)$ представляет собой просто взаимную интенсивность $J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Если мы также сделаем в (4.4.29) аппроксимацию малых углов, описываемую выражением (4.4.23), то получим следующую формулу, которую иногда называют *законом распространения Цернике* для взаимной интенсивности:

$$J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathscr{A}}\int_{\mathscr{A}} J(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') \frac{e^{i\bar{k}(R_2 - R_1)}}{R_1 R_2} \, d^2r_1' \, d^2r_2'. \tag{4.4.32}$$

Теперь предположим, что незамкнутая поверхность $\mathscr{A}$ совпадает с излучающей поверхностью σ пространственно некогерентного планарного квазимонохроматического вторичного источника. Тогда для любых двух точек $S_1(\mathbf{r}_1')$ и $S_2(\mathbf{r}_2')$ на σ имеем:

$$J(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') = I(\mathbf{r}_1')\delta^{(2)}(\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1'), \tag{4.4.33}$$

где $I(\mathbf{r}')$ — мера интенсивности в точке $\mathbf{r}'$ и $\delta^{(2)}$ — двумерная дельта-функция Дирака. Наличие дельта-функции в правой части выражения (4.4.33) отражает тот факт, что два любых элемента источника полагаются взаимно некоррелированными. Это, безусловно, является идеализацией. Любой существующий в природе источник будет коррелирован, по крайней мере, в пределах области, размером порядка средней длины волны света. Это справедливо даже для источников, которые, вообще говоря, рассматриваются как пространственно полностью некогерентные (например, черное тело). Однако, если корреляции имеют место только на расстояниях, не превышающих средней длины волны, а линейные размеры такого источника значительно больше средней длины волны, как мы полагаем в данном случае, идеализация, описываемая (4.4.33), приводит, как правило, к хорошей аппроксимации для взаимной интенсивности поля.

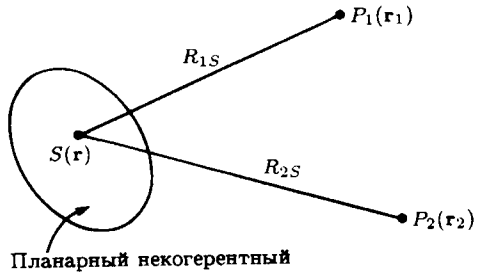


Рис. 4.11. К выводу теоремы Ван Циттерта — Цернике

Подставляя (4.4.33) в (4.4.32), получим формулу

$$J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2 \int_\sigma I(\mathbf{r}') \frac{e^{i\bar{k}(R_{2S} - R_{1S})}}{R_{1S}R_{2S}}\, d^2r', \tag{4.4.34}$$

где R_{1S} и R_{2S} — расстояния от точки $S(\mathbf{r}')$ источника до точек $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$, соответственно (см. рис. 4.11).

Нормируя (4.4.34) согласно (4.3.35), получим следующее выражение для (равновременно́й) комплексной степени когерентности поля, излучаемого нашим пространственно некогерентным источником σ:

$$j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{[I(\mathbf{r}_1)]^{1/2}[I(\mathbf{r}_2)]^{1/2}} \left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2 \int_\sigma I(\mathbf{r}') \frac{e^{i\bar{k}(R_{2S} - R_{1S})}}{R_{1S}R_{2S}}\, d^2r', \tag{4.4.35}$$

где

$$I(\mathbf{r}_j) = J(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j) = \left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2 \int_\sigma \frac{I(\mathbf{r}')}{R_{jS}^2}\, d^2r' \quad (j = 1, 2) \tag{4.4.36}$$

— интенсивность в точке поля $P_j(\mathbf{r}_j)$.

Формула (4.4.35) представляет собой математическую формулировку теоремы Ван Циттерта — Цернике. Она выражает равновременну́ю степень когерентности в двух точках $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$ поля, излучаемого планарным, пространственно некогерентным, квазимонохроматическим источником σ, через распределение интенсивности $I(\mathbf{r}')$ вдоль источника и интенсивности $I(\mathbf{r}_1)$ и $I(\mathbf{r}_2)$ в двух точках поля. Подчеркнем, что при выводе формулы (4.4.35) мы полагали, что разность хода $|R_{2S} - R_{1S}|$ мала по сравнению с длиной когерентности света, а также полагали малыми углы между линиями SP_1 и SP_2 и нормалью к плоскости источника.

Интеграл в правой части выражения (4.4.35) совпадает с интегралом, который часто встречается нам в другом случае, а именно, при вычислениях на основе теории дифракции Гюйгенса — Френеля — Кирхгофа (Born and Wolf, 1980, разд. 8.2 и разд. 8.3). Точнее говоря, теорема Ван Циттерта — Цернике, выражаемая формулой (4.4.35), гласит, что при указанных условиях *равновременна́я степень когерентности* $j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ *равна нормированной комплексной амплитуде некоторой дифракционной картины в точке* $P_2(\mathbf{r}_2)$. *Эта дифракционная картина получится, если заменить источник дифракционным отверстием такого же размера и формы и заполнить его монохроматической сферической волной с частотой* $\bar{k}c/2\pi$, *сходящейся в* $P_1(\mathbf{r}_1)$, *причем распределение амплитуд вдоль отверстия должно быть пропорциональным распределению интенсивности по источнику.*

Во многих случаях, представляющих практический интерес, точки $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$ расположены в дальней зоне поля источника. При этом теорема Ван Циттерта — Цернике приобретает более простой вид.

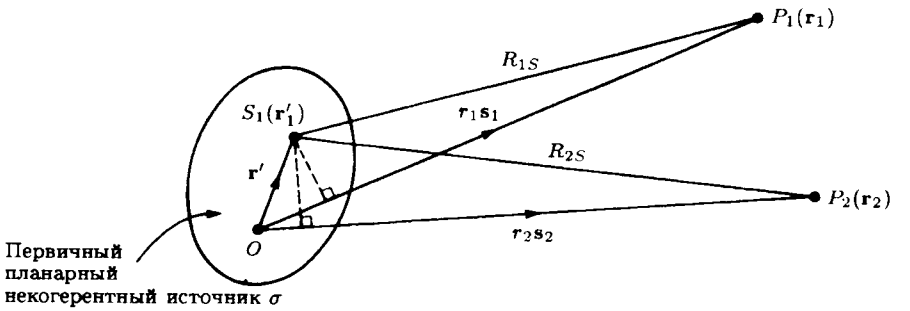


Рис. 4.12. К выводу теоремы Ван Циттерта — Цернике для дальней зоны

Пусть начало координат O лежит в области источника σ, $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ — единичные вектора в направлениях от точки O до точек $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$ (см. рис. 4.12). Тогда

$$\mathbf{r}_1 = r_1\mathbf{s}_1, \quad \mathbf{r}_2 = r_2\mathbf{s}_2. \tag{4.4.37}$$

Рассмотрим интеграл из (4.4.35) в предельном случае, когда $\bar{k}r_1 \to \infty$, $\bar{k}r_2 \to \infty$ при условии, что два направления, задаваемые единичными векторами $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$, фиксированы. Если r_1 и r_2 достаточно велики, то

$$R_{1S} \sim r_1 - \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}', \quad R_{2S} \sim r_2 - \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}'. \tag{4.4.38}$$

Подставляя (4.4.38) в формулы (4.4.34)—(4.4.36) и пренебрегая в знаменателе членами $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}'$ и $\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}'$ по сравнению с r_1 и r_2, соответственно, получим следующие упрощенные формулы

$$J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2 \frac{e^{i\bar{k}(r_2 - r_1)}}{r_1 r_2} \int_\sigma I(\mathbf{r}')\, e^{-i\bar{k}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)\cdot\mathbf{r}'}\, d^2r', \tag{4.4.39}$$

$$j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{i\bar{k}(r_2 - r_1)} \frac{\int_\sigma I(\mathbf{r}')\, e^{-i\bar{k}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)\cdot\mathbf{r}'}\, d^2r'}{\int_\sigma I(\mathbf{r}')\, d^2r'}. \tag{4.4.40}$$

Мы видим, что в случае, когда точки $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$ расположены в дальней зоне источника, взаимная интенсивность $J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ и равновременна́я степень когерентности $j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ могут быть выражены через фурье-преобразование распределения интенсивности вдоль источника $I(\mathbf{r}')$. Формулу (4.4.40) можно считать *теоремой Ван Циттерта — Цернике для дальней зоны*.

В качестве примера рассмотрим однородный ($I(\mathbf{r}') = \text{const}$), некогерентный, квазимонохроматический источник σ в виде круга радиуса a с центром в точке O. Для простоты предположим, что точки $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$ расположены в дальней зоне на одинаковом расстоянии r ($= r_1 = r_2$) от начала координат O и близко к нормали. При этом выражение (4.4.40) приобретает вид

$$j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\int_{r' \leqslant a} e^{-i\bar{k}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)\cdot\mathbf{r}'}\, d^2r'}{\int_{r' \leqslant a} d^2r'}. \tag{4.4.41}$$

Для вычисления интеграла в числителе (4.4.41) запишем

$$\mathbf{r}' = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \quad \mathbf{s}_{2\perp} - \mathbf{s}_{1\perp} \equiv (w\cos\psi, w\sin\psi), \tag{4.4.42}$$

где $\mathbf{s}_{1\perp}$ и $\mathbf{s}_{2\perp}$ — двумерные вектора, представляющие собой проекции трехмерных векторов $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ на плоскость источника. Тогда формула (4.4.41) переходит в

$$j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-i\bar{k}\rho w\cos(\theta - \psi)} \rho\, d\rho\, d\theta. \tag{4.4.43}$$

Интеграл в правой части (4.4.43) хорошо известен из теории дифракции Фраунгофера на круглом отверстии (см., например, Born and Wolf, 1980, разд. 8.5.2). Подставляя его значение в (4.4.43), находим

$$j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{2J_1(v)}{v}. \tag{4.4.44}$$

Здесь

$$v = \bar{k}a|\mathbf{s}_{2\perp} - \mathbf{s}_{1\perp}|, \tag{4.4.45}$$

а $J_1(x)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка. Заметим, что поскольку

$$\mathbf{s}_{1\perp} = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{y_1}{r}, 0\right), \quad \mathbf{s}_{2\perp} = \left(\frac{x_2}{r}, \frac{y_2}{r}, 0\right), \tag{4.4.46}$$

переменная v может быть также представлена в виде

$$v = \bar{k}\left(\frac{a}{r}\right) d_{12} = \bar{k}\left(\frac{a}{r}\right)[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}, \tag{4.4.47}$$

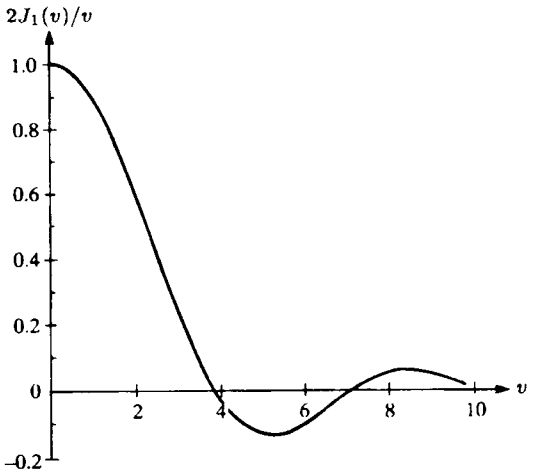


Рис. 4.13. Функция $2J_1(v)/v$

где d_{12}, очевидно, представляет собой расстояние между точками $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$.

Поведение функции $2J_1(v)/v$, которая в нашем примере согласно (4.4.44) представляет собой равновременну́ю степень когерентности, показано на рис. 4.13. Мы видим, что она монотонно уменьшается от значения, равного единице при $v = 0$, до нулевого значения при $v = 3.83$. Таким образом, по мере увеличения расстояния между точками $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$ (равновременна́я) степень когерентности $j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ сначала монотонно убывает. Полная некогерентность ($j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0$) достигается при

$$d_{12} = \frac{3.83}{\bar{k}}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{0.61r\bar{\lambda}}{a}. \tag{4.4.48}$$

При дальнейшем увеличении расстояния вновь возникает небольшая когерентность, но ее степень по модулю остается меньше 0.14. Полная когерентность вновь наступает при $v = 7.02$. Проходя через нуль, функция $2J_1(v)/v$ каждый раз меняет знак, следовательно, фаза комплексной степени когерентности при этом изменяется на π.

Функция $2J_1(v)/v$ монотонно уменьшается от значения, равного единице при $v = 0$, до 0.88 при $v = 1$, т.е. при

$$d_{12} = 0.16\bar{\lambda}r/a. \tag{4.4.49}$$

На практике отклонение, не превышающее 12% от идеального значения, равного единице, считается несущественным. Следовательно, *пространственно некогерентный, квазимонохроматический, однородный источник в виде круга радиуса a почти когерентно освещает в дальней зоне поля, в плоскости, параллельной плоскости источника, и вблизи направления нормали к этой плоскости, площадку ΔA в виде круга диаметра $0.16\bar{\lambda}/\alpha$, где $\alpha = a/r$ — угловой радиус, под которым источник виден из ΔA.* Заметим, что $\Delta A = \pi(0.16\bar{\lambda}/2\alpha)^2$, т.е.

$$\Delta A = 0.063r^2\bar{\lambda}^2/S, \tag{4.4.50}$$

где $S = \pi\alpha^2$ — площадь источника. Это выражение по порядку величины согласуется с соотношением (4.2.6), которое мы получили ранее, исходя из элементарных рассуждений.

4.4.5. Распространение корреляций от первичных источников

В предыдущих разделах мы рассматривали распространение корреляций второго порядка в свободном пространстве, не уделяя внимания тому, каким образом изначально создавалось флуктуирующее поле. Флуктуации поля, безусловно, являются следствием того, что механизм излучения поля источниками никогда не является строго детерминированным и может быть описан только статистически. Выясним, каким образом корреляции поля связаны с корреляциями его источника.

Пусть $Q^{(r)}(\mathbf{r},t)$ представляет собой реализацию (действительного) флуктуирующего скалярного источника, занимающего в свободном пространстве конечную область D, а $V^{(r)}(\mathbf{r},t)$ — поле, излучаемое этим источником. Тогда $V^{(r)}(\mathbf{r},t)$ и $Q^{(r)}(\mathbf{r},t)$ связаны между собой неоднородным волновым уравнением

$$\nabla^2 V^{(r)}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V^{(r)}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -4\pi Q^{(r)}(\mathbf{r},t). \tag{4.4.51}$$

Сопоставим $V^{(r)}$ и $Q^{(r)}$ аналитические сигналы V и Q, соответственно. Повторяя в несколько расширенном виде рассуждения, приведшие к (4.4.7), получим, что $V(\mathbf{r},t)$ удовлетворяет неоднородному волновому уравнению

$$\nabla^2 V(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -4\pi Q(\mathbf{r},t). \tag{4.4.52}$$

Заменим $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r}_1$, t на t_1 и осуществим комплексное сопряжение уравнения. Это дает

$$\nabla_1^2 V^*(\mathbf{r}_1,t_1) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V^*(\mathbf{r}_1,t_1)}{\partial t_1^2} = -4\pi Q^*(\mathbf{r}_1,t_1), \tag{4.4.53}$$

где ∇_1^2 — лапласиан по пространственным координатам точки $\mathbf{r}_1$. Заменим теперь в (4.4.52) $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r}_2$ и t на t_2. Получим

$$\nabla_2^2 V(\mathbf{r}_2,t_2) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V(\mathbf{r}_2,t_2)}{\partial t_2^2} = -4\pi Q(\mathbf{r}_2,t_2), \tag{4.4.54}$$

где ∇_2^2 — лапласиан по координатам точки $\mathbf{r}_2$. Перемножая, соответственно, левые и правые части уравнений (4.4.53) и (4.4.54), находим

$$\left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\right)\left(\nabla_2^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}\right) V^*(\mathbf{r}_1,t_1)V(\mathbf{r}_2,t_2) = (4\pi)^2 Q^*(\mathbf{r}_1,t_1)Q(\mathbf{r}_2,t_2). \tag{4.4.55}$$

Взяв среднее от обеих частей выражения (4.4.55) по ансамблю источника, получаем

$$\left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\right)\left(\nabla_2^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}\right) \Gamma_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2;t_1,t_2) = (4\pi)^2 \Gamma_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2;t_1,t_2), \tag{4.4.56}$$

где

$$\Gamma_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2;t_1,t_2) \equiv \langle V^*(\mathbf{r}_1,t_1)V(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle, \tag{4.4.57}$$

$$\Gamma_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2;t_1,t_2) \equiv \langle Q^*(\mathbf{r}_1,t_1)Q(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle. \tag{4.4.58}$$

Мы видим, что корреляционные функции поля и источника связаны между собой дифференциальным уравнением четвертого порядка.

Предположим, что статистический ансамбль, характеризующий флуктуации источника, стационарен, по крайней мере в широком смысле. В этом случае корреляционная функция источника $\Gamma_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2;t_1,t_2)$ будет зависеть от двух своих временны́х аргументов только через их разность $t_2 - t_1$; это также справедливо для корреляционной функции поля, поскольку соотношение между переменной поля V и переменной источника Q согласно (4.4.52) является линейным. Таким образом, можно записать

$$\Gamma_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2;t_1,t_2) \equiv \Gamma_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_2-t_1), \tag{4.4.59}$$

$$\Gamma_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2;t_1,t_2) \equiv \Gamma_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_2-t_1). \tag{4.4.60}$$

Функция $\Gamma_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$, разумеется, является функцией взаимной когерентности поля, которую мы до сих пор обозначали как $\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$. Оба оператора $\partial^2/\partial t_1^2$ и $\partial^2/\partial t_2^2$ в правой части (4.4.56) можно заменить на $\partial^2/\partial\tau^2$. Следовательно, если источник стационарен, по крайней мере, в широком смысле, корреляционные функции второго порядка поля и источника связаны между собой дифференциальным уравнением четвертого порядка следующего вида

$$\left(\nabla_1^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left(\nabla_2^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right) \Gamma_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = (4\pi)^2 \Gamma_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau). \tag{4.4.61}$$

Выразим Γ_V и Γ_Q через взаимные спектральные плотности W_V и W_Q поля и источника с помощью преобразований Фурье:

$$\Gamma_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)=\int_0^\infty W_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu, \tag{4.4.62a}$$

$$\Gamma_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)=\int_0^\infty W_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu. \tag{4.4.62б}$$

Подставляя (4.4.62) в (4.4.61) и изменяя порядок операций дифференцирования и интегрирования, получим следующее дифференциальное уравнение четвертого порядка для двух функций взаимной спектральной плотности:

$$(\nabla_1^2+k^2)(\nabla_2^2+k^2)W_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)=(4\pi)^2W_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu), \tag{4.4.63}$$

где

$$k=2\pi\nu/c \tag{4.4.64}$$

– волновое число, соответствующее частоте ν.

Уравнение (4.4.61), или (4.4.63), может служить исходной точкой при изучении свойств полей, излучаемых стационарными первичными источниками с любой степенью когерентности. Эти задачи будут рассмотрены нами в разд. 5.2, а в этом разделе мы получим формулу, которая нам понадобится в дальнейшем. Эта формула дает точное решение уравнения (4.4.63) для W_V, выраженное через W_Q, при условии, что источник излучает в свободном пространстве. Решение будет получено в два этапа. Во-первых, перепишем (4.4.63)

$$(\nabla_2^2+k^2)[(\nabla_1^2+k^2)W_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)]=(4\pi)^2W_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) \tag{4.4.65}$$

и решим полученное уравнение относительно $(\nabla_1^2+k^2)W_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ при фиксированном $\mathbf{r}_1$. Хорошо известно, что решение такого волнового уравнения имеет вид (см., например, Papas, 1965, разд. 2.1)

$$(\nabla_1^2+k^2)W_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)=-4\pi\int_D W_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2',\nu)\frac{\mathrm{e}^{ikR_2}}{R_2}\,d^3r_2', \tag{4.4.66}$$

где (см. рис. 4.14)

$$R_2=|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_2'| \tag{4.4.67}$$

и интегрирование осуществляется по всей области источника D. Уравнение (4.4.66) имеет тот же вид, что и (4.4.65), и мы можем сразу же получить его решение. Однако, необходимо помнить, что $V(\mathbf{r}_1)$ и $V(\mathbf{r}_2)$ входят в определение W_V как комплексно сопряженные величины. Поэтому соответствующая функция Грина будет иметь вид $\exp(-ikR_1)/R_1$, в отличие от $\exp(ikR_2)/R_2$. В итоге искомое решение уравнения (4.4.63) имеет вид

$$W_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)=$$
$$=\int_D\int_D W_Q(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\nu)\frac{\mathrm{e}^{ik(R_2-R_1)}}{R_1R_2}\,d^3r_1'\,d^3r_2', \tag{4.4.68}$$

где

$$R_j=|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_j'|,\quad (j=1,2). \tag{4.4.69}$$

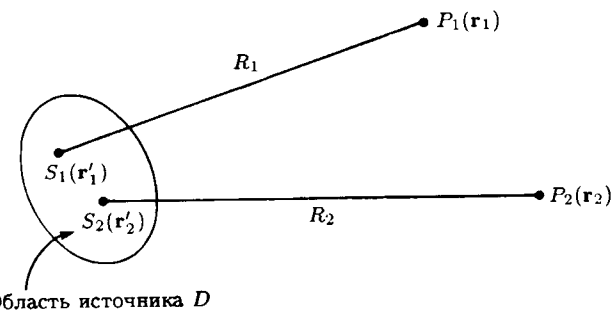


Рис. 4.14. Условные обозначения, используемые в выражениях (4.4.66)—(4.4.70)

Соответствующее решение уравнения (4.4.61) можно получить аналогичным путем, записывая решение однородного волнового уравнения с помощью хорошо известной запаздывающей функции Грина. Или же можно поступить еще проще: осуществить фурье-преобразование выражения (4.4.68) и воспользоваться формулами (4.4.62). В результате получим

$$\Gamma_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)=\int_D\int_D\frac{\Gamma_Q[\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2',\tau-(R_2-R_1)/c]}{R_1R_2}\,d^3r_1'\,d^3r_2'. \tag{4.4.70}$$

4.5. Специальные типы полей

4.5.1. Взаимно спектрально чистый свет

В разд. 4.3.2 мы рассматривали ситуацию, когда свет с одинаковым спектральным распределением распространяется в виде двух пучков от отверстий P_1 и P_2. Если проанализировать свет, являющийся результатом суперпозиции этих пучков на экране $\mathscr{B}$, удаленном от плоскости, в которой расположены отверстия, то обнаружится, что его спектральный состав в различных точках экрана, вообще говоря, неодинаков. Мы покажем, что при определенных условиях, которые часто встречаются на практике, спектральный состав света, являющегося результатом суперпозиции, относительно просто связан со спектральным составом интерферирующих пучков.

Согласно закону спектральной интерференции спектральная плотность света $S(\mathbf{r},\nu)$ в точке $P(\mathbf{r})$ связана со спектральными плотностями $S^{(1)}(\mathbf{r},\nu)$ и $S^{(2)}(\mathbf{r},\nu)$ света, достигающего точки P от отверстий P_1 и P_2, соответственно, формулой

$$S(\mathbf{r},\nu) = S^{(1)}(\mathbf{r},\nu) + S^{(2)}(\mathbf{r},\nu) + 2[S^{(1)}(\mathbf{r},\nu)]^{1/2}[S^{(2)}(\mathbf{r},\nu)]^{1/2}\,\mathrm{Re}\,[\mu(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}], \tag{4.5.1}$$

где $\mu(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ — спектральная степень когерентности света в отверстиях $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$;

$$\tau = \frac{[P_1P] - [P_2P]}{c} \tag{4.5.2}$$

— разность времен, за которые свет распространяется от точки P до P_1 и P_2, соответственно (см. рис. 4.6).

Предположим, что спектральные распределения света в двух отверстиях одинаковы, т.е.

$$S(\mathbf{r}_2,\nu) = C_{12}S(\mathbf{r}_1,\nu) \tag{4.5.3}$$

где C_{12} — коэффициент пропорциональности, не зависящий от частоты. Спектральные плотности света, достигающего точки P в плоскости наблюдения $\mathscr{B}$ от двух отверстий согласно (4.3.53) определяются выражениями

$$S^{(1)}(\mathbf{r},\nu) = |K_1|^2S(\mathbf{r}_1,\nu), \tag{4.5.4а}$$

$$S^{(2)}(\mathbf{r},\nu) = |K_2|^2S(\mathbf{r}_2,\nu) = C_{12}|K_2|^2S(\mathbf{r}_1,\nu). \tag{4.5.4б}$$

Подставляя (4.5.4) в (4.5.1), получим следующее выражение для $S(\mathbf{r},\nu)$:

$$S(\mathbf{r},\nu) = S(\mathbf{r}_1,\nu)\{|K_1|^2 + C_{12}|K_2|^2 + 2\sqrt{C_{12}}|K_1||K_2|\,\mathrm{Re}\,[\mu(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}]\}. \tag{4.5.5}$$

Теперь предположим, что на экране $\mathscr{A}$ существует точка, скажем, $P_0(\mathbf{r}_0)$, в которой спектральная плотность света равна спектральной плотности света в отверстиях с точностью до коэффициента пропорциональности, не зависящего от частоты. Пусть соответствующее значение параметра τ равно τ_0, т.е.

$$\tau_0 = \frac{[P_1P_0] - [P_2P_0]}{c}. \tag{4.5.6}$$

Очевидно, что в этом случае в выражении (4.5.5) член в фигурных скобках, в котором τ заменено на τ_0, не должен зависеть от частоты. Учтем, что множители K_1 и K_2 обратно пропорциональны длине волны, т.е. прямо пропорциональны частоте. Однако, если предположить, что спектр света в каждом отверстии не очень широк, то этой частотной зависимостью можно пренебречь. Последний член в правой части (4.5.5), (где τ заменено на τ_0), не будет зависеть от частоты при условии, что

$$\mu(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau_0} = f(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau_0), \tag{4.5.7}$$

где $f(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau_0)$ есть некоторая функция только от $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и τ_0.

Если существует окрестность точки P_0 в плоскости наблюдения $\mathscr{B}$, такая, что спектральное распределение света в этой окрестности имеет тот же вид, что и спектральное распределение света в отверстиях,

то говорят, что свет в отверстиях *взаимно спектрально чист*[1]. Это, очевидно, будет иметь место, если выполняется условие (4.5.7). Положение точки P_0, таким образом, определяется временем задержки τ_0, определенном в (4.5.6).

Покажем, что взаимно спектрально чистый свет имеет ряд интересных свойств. Согласно (4.3.40а) и (4.3.47б) функцию взаимной когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ можно представить в виде

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int_0^\infty [S(\mathbf{r}_1, \nu)]^{1/2} [S(\mathbf{r}_2, \nu)]^{1/2} \mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) \, \mathrm{e}^{-2\pi i \nu \tau} \, d\nu. \tag{4.5.8}$$

Подставляя (4.5.3) и (4.5.7) в (4.5.8), получим следующее выражение для $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \sqrt{C_{12}} f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0) \int_0^\infty S(\mathbf{r}_1, \nu) \, \mathrm{e}^{-2\pi i \nu (\tau - \tau_0)} \, d\nu. \tag{4.5.9}$$

Далее согласно (4.3.40а) и (4.3.41) интеграл в правой части (4.5.9) есть $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau - \tau_0)$. Следовательно, (4.5.1) можно записать как

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \sqrt{C_{12}} f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0) \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau - \tau_0). \tag{4.5.10}$$

Полученное выражение позволяет нам определить физический смысл функции $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0)$, формально введенной в (4.5.7). Для начала отметим, что согласно формуле (4.5.3) из (4.3.40а) имеем $\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \tau) = C_{12} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau)$ и, следовательно,

$$[\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)]^{1/2} [\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0)]^{1/2} = \sqrt{C_{12}} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0). \tag{4.5.11}$$

Поделив обе части (4.5.10) на это выражение и воспользовавшись определением комплексной степени когерентности γ, получим соотношение

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0) \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau - \tau_0). \tag{4.5.12}$$

Теперь, полагая $\tau = \tau_0$ и учитывая, что $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0) \equiv 1$, мы в итоге получим

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0) = \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0). \tag{4.5.13}$$

Таким образом, функция $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0)$ фактически представляет собой комплексную степень когерентности световых колебаний в двух отверстиях при времени задержки, равном τ_0. При этом наше *условие взаимной спектральной чистоты света* (4.5.7) принимает вид

$$\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0) \, \mathrm{e}^{2\pi i \nu \tau_0}. \tag{4.5.14}$$

Строго говоря, это соотношение должно выполняться для спектральных компонент всех частот ν, присутствующих в спектре света в точках P_1 и P_2. Тем не менее, для хорошего приближения достаточно потребовать, чтобы оно выполнялось только для тех частотных компонент, которые вносят существенный вклад в среднюю интенсивность света в этих точках.

С физической точки зрения, условие (4.5.14) означает, что *если свет в точках P_1 и P_2 взаимно спектрально чист, то абсолютное значение спектральной степени когерентности $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ одинаково для всех частот ν, присутствующих в спектре света в этих точках*, и равно абсолютному значению комплексной степени когерентности $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0)$; кроме того, фазы μ и γ отличаются друг от друга на $2\pi\nu\tau_0$. Безусловно, для того, чтобы свет в точках P_1 и P_2 был взаимно спектрально чист, он должен удовлетворять, наряду с (4.5.14), условию (4.5.3), т.е. спектр света в точках P_1 и P_2 должен быть одинаков (с точностью до некоторого коэффициента пропорциональности, не зависящего от частоты).

Условие (4.5.14) имеет прямое следствие, касающееся формы спектрального распределения света в любой точке $P(\mathbf{r})$ плоскости наблюдения. Подставляя (4.5.14) в выражение для спектральной плотности (4.5.5), находим, что для взаимно спектрально чистого света

$$S(\mathbf{r}, \nu) = S(\mathbf{r}_1, \nu) \left\{ A + B |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0)| \cos \left[\arg \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0) - 2\pi\nu \left(\frac{R_1 - R_2}{c} - \tau_0 \right) \right] \right\}, \tag{4.5.15}$$

[1] Понятие введено Манделем (Mandel, 1961b), который также установил некоторые специфические свойства такого света. Настоящее рассмотрение в основном базируется на анализе, проведенном Манделем и Вольфом (Mandel and Wolf, 1976)

где R_1 и R_2 — расстояние от отверстий P_1 и P_2 до P, и

$$A = |K_1|^2 + C_{12}|K_2|^2, \quad B = 2\sqrt{C_{12}}|K_1||K_2|. \tag{4.5.16}$$

Из (4.5.15) видно, что в плоскости наблюдения спектральная плотность $S(\mathbf{r}, \nu)$ на фиксированной частоте ν изменяется по синусоидальному закону между значениями

$$\begin{aligned} S_{\max}(\mathbf{r}, \nu) &= S(\mathbf{r}_1, \nu)[A + B|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0)|], \\ S_{\min}(\mathbf{r}, \nu) &= S(\mathbf{r}_1, \nu)[A - B|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0)|]. \end{aligned} \tag{4.5.17}$$

По аналогии с выражением (4.3.23) для видности интерференционных полос мы можем определить *спектральную видность* $\mathscr{V}(\mathbf{r}, \nu)$ на частоте ν в точке $P(\mathbf{r})$ интерференционной картины по формуле

$$\mathscr{V}(\mathbf{r}, \nu) = \frac{S_{\max}(\mathbf{r}, \nu) - S_{\min}(\mathbf{r}, \nu)}{S_{\max}(\mathbf{r}, \nu) + S_{\min}(\mathbf{r}, \nu)}. \tag{4.5.18}$$

Подставляя (4.5.17) в (4.5.18), находим, что[1]

$$\mathscr{V}(\mathbf{r}, \nu) = \frac{B}{A}|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0)|. \tag{4.5.19}$$

Так как $|K_1|$ и $|K_2|$ пропорциональны частоте, отношение B/A, исходя из (4.5.16), от частоты не зависит. Следовательно, *спектральная видность интерференционных полос, формируемых двумя взаимно спектрально чистыми пучками, не зависит от частоты.* Более того, поскольку $|K_1|$ и $|K_2|$, а следовательно и B/A, довольно слабо зависят от положения точки P, спектральная видность (при фиксированных P_1 и P_2) фактически остается постоянной на некотором участке плоск

Синусоидальное изменение спектральной плотности вдоль интерференционной картины, задаваемое выражением (4.5.15), при условии, что спектральная видность не зависит от частоты, отражает закон спектральной модуляции для взаимно спектрально чистых пучков.

Мы неоднократно отмечали, что свойства временно́й и пространственной когерентности света, вообще говоря, не являются взаимонезависимыми. Однако взаимно спектрально чистый свет в этом отношении представляет собой исключение. Подставляя (4.5.13) в (4.5.12), получим

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0)\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau - \tau_0). \tag{4.5.20}$$

Мы видим, что комплексная степень когерентности $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ может быть представлена как произведение двух сомножителей: первый сомножитель характеризует пространственную когерентность в двух отверстиях при времени задержки τ_0, а второй — временну́ю когерентность в одном из отверстий. Формула (4.5.20) обычно называется *редукционной формулой для взаимно спектрально чистого света.* Ее можно также записать в эквивалентном виде

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0)\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau - \tau_0), \tag{4.5.20a}$$

который получается непосредственно из (4.5.20). Для этого необходимо умножить обе части (4.5.20) на $[\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0)]^{1/2}$ и воспользоваться определением комплексной степени когерентности (4.3.12а).

Можно показать, что справедливо и обратное: если редукционная формула (4.5.20) выполняется для некоторого значения τ_0, и спектральные плотности света в точках P_1 и P_2 равны друг другу с точностью до коэффициента пропорциональности, не зависящего от частоты, то свет в этих двух точках взаимно спектрально чист.

---

[1] Вообще говоря, независимо от того, являются ли пучки взаимно спектрально чистыми или нет, с помощью выражений (4.5.18) и (4.3.54) можно показать, что [см. (4.3.25) и (4.3.26)]

$$\mathscr{V}(\mathbf{r}, \nu) = 2[\eta(\mathbf{r}, \nu) + 1/\eta(\mathbf{r}, \nu)]^{-1}|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)|,$$

где $\eta(\mathbf{r}, \nu) = [S^{(1)}(\mathbf{r}, \nu)/S^{(2)}(\mathbf{r}, \nu)]^{1/2}$. Далее из (4.3.54) можно вывести, что положение максимумов спектральной плотности $S(\mathbf{r}, \nu)$ при фиксированной частоте ν определяется формулой [ср. (4.3.27)] $\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) - 2\pi\nu(R_1 - R_2)/c = 2m\pi$, $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, где $\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ представляет собой аргумент (фазу) спектральной степени когерентности: $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = |\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)| \exp[i\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)]$.

Взаимно спектрально чистый свет может быть получен, например, при линейной фильтрации света, идущего от двух отверстий в интерференционном эксперименте Юнга (см., например, Kandpal, Saxena, Mehta, Vaishya and Joshi, 1993). В разд. 4.3.2 мы показали, что если полосы пропускания фильтров достаточно узкие, то степень когерентности фильтрованного света определяется выражением (4.3.63), а именно, $\gamma^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = \mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu_0)$, где ν_0 — средняя частота фильтров. Это соотношение, очевидно, согласуется с условием (4.5.14) для взаимно спектрально чистого света. Другие примеры такого света приведены Манделем (Mandel, 1961b).

4.5.2. Когерентный свет в пространственно-временно́й области[1]

Ранее мы показали, что абсолютные значения степеней когерентности $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ и $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ имеют верхний предел, равный единице. При достижении этих граничных значений в соответствующих интерференционных экспериментах имеют место интерференционные полосы с максимально возможной видностью, равной единице. Эти предельные случаи соответствуют *полной когерентности второго порядка*.

Полная когерентность второго порядка в пространственно-временно́й области подразумевает определенные функциональные формы комплексной степени когерентности $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ и функции взаимной когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$, соответственно, в пространственно-частотной области полная когерентность второго порядка предполагает определенные функциональные формы спектральной степени когерентности $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ и взаимной спектральной плотности $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$.

В этом разделе мы рассмотрим полную когерентность второго порядка в пространственно-временно́й области. Соответствующие результаты, относящиеся к пространственно-частотной области будут рассмотрены нами в следующем разделе.

Начнем с условия неотрицательности, которому удовлетворяет комплексная степень когерентности $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j^* a_k \gamma(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k, \tau_k - \tau_j) \geqslant 0, \tag{4.5.21}$$

справедливого для любого положительного целого числа n, любого набора точек $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ..., $\mathbf{r}_n$, любого набора временны́х параметров τ_1, τ_2, ..., τ_n и любых действительных или комплексных постоянных a_1, a_2, ..., a_n. Неравенство (4.5.21) следует из выражений (4.3.37) и (4.3.12a). При $n = 3$ это условие дает

$$\begin{vmatrix} 1 & \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_2 - \tau_1) & \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \tau_3 - \tau_1) \\ \gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \tau_1 - \tau_2) & 1 & \gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \tau_3 - \tau_2) \\ \gamma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1, \tau_1 - \tau_3) & \gamma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2, \tau_2 - \tau_3) & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0 \tag{4.5.22}$$

для всех действительных значений τ_1, τ_2, τ_3 и для любого набора точек $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ из области D, в которой определена комплексная степень когерентности $\gamma(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k, \tau)$. Вычисляя детерминант в выражении (4.5.22) и используя соотношение эрмитовости

$$\gamma(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k, \tau_k - \tau_j) = \gamma^*(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j, \tau_j - \tau_k), \tag{4.5.23}$$

которое следует из (4.3.36) и (4.3.12a), получим следующее неравенство, справедливое для всех значений τ_1, τ_2 и τ_3:

$$|\gamma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2, \tau_2 - \tau_3) - \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_2 - \tau_1)\gamma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1, \tau_1 - \tau_3)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant [1 - |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_2 - \tau_1)|^2][1 - |\gamma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1, \tau_1 - \tau_3)|^2]. \tag{4.5.24}$$

С помощью этого неравенства мы можем легко вывести ряд теорем, касающихся полной когерентности второго порядка в пространственно-временно́й области.

[1] Представленный в этом разделе материал основан на исследовании, проведенном в работе (Mehta, Wolf and Balachandran, 1966).

(а) Полная автокогерентность в заданной точке

Предположим, что свет в некоторой точке $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ области D является полностью когерентным в том смысле, что

$$|\gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \tau)| = 1 \tag{4.5.25}$$

для всех значений τ. Это предположение подразумевает, что

$$\gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \tau) = \mathrm{e}^{i\phi(\tau)}, \tag{4.5.26}$$

где $\phi(\tau)$ — некоторая действительная функция действительной переменной τ, и, возможно, $\mathbf{R}$ (эта зависимость не указана явно). Поскольку γ удовлетворяет условию (4.5.23), $\phi(\tau)$, в свою очередь, должна удовлетворять соотношению

$$\phi(-\tau) = -\phi(\tau) + 2m\pi, \tag{4.5.27}$$

где m — целое число.

Положим в неравенстве (4.5.24) $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}$ и $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r} \in D$ и воспользуемся выражением (4.5.25). В результате получим следующее неравенство:

$$|\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \tau_2 - \tau_3) - \gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \tau_2 - \tau_1)\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \tau_1 - \tau_3)|^2 \leqslant 0. \tag{4.5.28}$$

Поскольку его левая часть заведомо неотрицательна, то очевидно, что неравенство (4.5.28) выполняется только, если его левая часть обращается в нуль, т.е.

$$\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \tau_2 - \tau_3) = \gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \tau_2 - \tau_1)\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \tau_1 - \tau_3). \tag{4.5.29}$$

При $\tau_1 = \tau_3 = \tau_2 - \tau$ отсюда следует, что

$$\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \tau) = \gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \tau)\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, 0). \tag{4.5.30}$$

Теперь положим $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ в (4.5.29) и воспользуемся выражениями (4.5.26) и (4.5.27). В результате получим следующее функциональное уравнение для ϕ:

$$\phi(\tau_1 - \tau_2) + \phi(\tau_2 - \tau_3) + \phi(\tau_3 - \tau_1) = 2m\pi, \tag{4.5.31}$$

где m — произвольное целое число.

Для решения функционального уравнения (4.5.31) используем тот факт, что оно справедливо для всех значений τ_1, τ_2 и τ_3. Дифференцируя (4.5.31) по τ_1 и затем полагая $\tau_1 = \tau_3 = \tau_2 + \tau$, получим следующее дифференциальное уравнение для $\phi(\tau)$:

$$\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = -2\pi\nu_0, \tag{4.5.32}$$

где $\nu_0 = -(d\phi/d\tau)_{\tau=0}/2\pi$ — константа. Интегрируя (4.5.32) по τ, находим, что функция $\phi(\tau)$ имеет вид

$$\phi(\tau) = -2\pi\nu_0\tau + \beta, \tag{4.5.33}$$

где β — константа. Из (4.5.26) и (4.5.33) следует, что

$$\gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \tau) = \mathrm{e}^{i(\beta - 2\pi\nu_0\tau)}. \tag{4.5.34}$$

Теперь учтем, что $\gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}, 0) = 1$. Следовательно, константа β в (4.5.34) должна быть целым, кратным 2π. Более того, поскольку γ, так же, как и Γ, является аналитическим сигналом, т.е. содержит только положительные частотные компоненты, константа ν_0 должна быть положительной. Тогда

$$\gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \tau) = \mathrm{e}^{-2\pi i\nu_0\tau}, \quad (\nu_0 > 0). \tag{4.5.35}$$

Подставляя (4.5.35) в (4.5.30), получим выражение для $\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \tau)$:

$$\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \tau) = \gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, 0)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu_0\tau}, \quad (\nu_0 > 0). \tag{4.5.36}$$

Из этой формулы и соотношения (4.5.23) мы также получим выражение

$$\gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \tau) = \gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}, 0) = \mathrm{e}^{-2\pi i\nu_0\tau}, \quad (\nu_0 > 0). \tag{4.5.37}$$

Подводя итог, можно выразить полученный нами основной результат следующим образом: *если свет является полностью автокогерентным в некоторой точке $\mathbf{R} \in D$ в смысле (4.5.25), то функции $\gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \tau)$, $\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \tau)$ и $\gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \tau)$ для $\mathbf{r} \in D$ и всех значений τ должны иметь вид, задаваемый выражениями (4.5.35)–(4.5.37)*, т.е. должны быть периодическими по τ.

(б) Полная взаимная когерентность в двух заданных точках

Рассмотрим случай, когда свет является полностью взаимно когерентным в двух точках $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2$, лежащих в области D, в которой заключено оптическое поле. Математически это предположение записывается в виде

$$|\gamma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \tau)| = 1 \quad \text{для всех } \tau \tag{4.5.38}$$

при условии, что $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ фиксированы. Наши дальнейшие рассуждения будут аналогичны изложенным выше. Полагая $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2$ и $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r} \in D$ в (4.5.24) и используя (4.5.38), получим неравенство

$$|\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}_2, \tau_2 - \tau_3) - \gamma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \tau_2 - \tau_1)\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}_1, \tau_1 - \tau_3)|^2 \leqslant 0, \tag{4.5.39}$$

которое, очевидно, справедливо только, если соотношение

$$\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}_2, \tau_2 - \tau_3) = \gamma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \tau_2 - \tau_1)\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}_1, \tau_1 - \tau_3) \tag{4.5.40}$$

выполняется для всех значений τ_1, τ_2 и τ_3. Вычисляя абсолютное значение обеих частей выражения (4.5.40) при $\mathbf{r} = \mathbf{R}_1$ и вновь используя (4.5.38), получим

$$|\gamma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1, \tau)| = 1 \quad \text{для всех } \tau. \tag{4.5.41}$$

По аналогии при $\mathbf{r} = \mathbf{R}_2$ находим, что

$$|\gamma(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_2, \tau)| = 1 \quad \text{для всех } \tau. \tag{4.5.42}$$

Выражения (4.5.41) и (4.5.42) означают, что поле полностью автокогерентно в каждой из точек $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$. Следовательно, согласно ранее полученным результатам [(4.5.35)—(4.5.37)] можно записать

$$\gamma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1, \tau) = \gamma(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_2, \tau) = \mathrm{e}^{-2\pi i \nu_0 \tau}, \quad (\nu_0 > 0), \tag{4.5.43}$$

$$\gamma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \tau) = \gamma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, 0)\,\mathrm{e}^{-2\pi i \nu_0 \tau}, \quad (\nu_0 > 0). \tag{4.5.44}$$

Поскольку, согласно (4.5.38), $\gamma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, 0)$ — унимодулярная функция, из (4.5.44) следует, что

$$\gamma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \tau) = \mathrm{e}^{i(\beta - 2\pi\nu_0\tau)}, \tag{4.5.45}$$

где β — действительная постоянная. И, наконец, полагая $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 + \tau$ в (4.5.40) и воспользовавшись (4.5.45), получим формулу

$$\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}_2, \tau) = \gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}_1, \tau)\,\mathrm{e}^{i\beta}, \tag{4.5.46}$$

которая справедлива для всех τ.

Таким образом, мы показали, что *если свет в двух точках $\mathbf{R}_1 \in D$, $\mathbf{R}_2 \in D$ является взаимно полностью когерентным в смысле (4.5.38), то функции $\gamma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1, \tau)$, $\gamma(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_2, \tau)$ и $\gamma(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \tau)$ для всех значений τ должны иметь вид, заданный выражениями (4.5.43) и (4.5.44), более того, если $\mathbf{r}$ — некоторая другая точка области D, то $\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}_2, \tau)$ и $\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}_1, \tau)$ связаны между собой соотношением (4.5.46), где β — действительная постоянная.*

(в) Полная когерентность в объеме

В заключение рассмотрим случай, когда свет является полностью когерентным в объеме D, в том смысле, что

$$|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| = 1 \quad \text{для всех } \tau \tag{4.5.47}$$

и для всех $\mathbf{r}_1 \in D, \mathbf{r}_2 \in D$. Мы вновь начнем с рассмотрения неравенства (4.5.24), где на сей раз мы положим $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ и воспользуемся нашим предположением (4.5.47). В результате получим соотношение

$$\gamma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2, 0) = \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)\gamma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1, 0). \tag{4.5.48}$$

Выражение (4.5.47) предполагает, что

$$\gamma(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k, 0) = \mathrm{e}^{i\phi(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k, 0)}, \quad (j, k = 1, 2, 3), \tag{4.5.49}$$

где ϕ — действительная функция. Из (4.5.48) и (4.5.49) следует, что фазовая функция ϕ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) + \phi(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1, 0) = \phi(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2, 0) + 2m\pi, \tag{4.5.50}$$

где m — целое число. Начало координат в D может быть выбрано таким образом, что $\mathbf{r}_3 = 0$. Тогда из (4.5.50) мы получаем соотношение

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = \alpha(\mathbf{r}_2) - \alpha(\mathbf{r}_1) + 2m\pi, \tag{4.5.51}$$

где $\alpha(\mathbf{r}) = \phi(0, \mathbf{r}, 0)$ — функция, зависящая только от $\mathbf{r}$.

Из (4.5.49) и (4.5.51) следует, что

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\alpha(\mathbf{r}_2) - \alpha(\mathbf{r}_1)]}. \tag{4.5.52}$$

Далее согласно нашему предположению о полной когерентности второго порядка (4.5.47) мы можем применить формулу (4.5.44) при $\mathbf{R}_1 \to \mathbf{r}_1$, $\mathbf{R}_2 \to \mathbf{r}_2$. После подстановки (4.5.52) в (4.5.44) получим следующее выражение для $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$:

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\alpha(\mathbf{r}_2) - \alpha(\mathbf{r}_1) - 2\pi\nu_0\tau]}, \quad (\nu_0 > 0). \tag{4.5.53}$$

Таким образом, мы установили следующее: *Если поле полностью когерентно в объеме D, т.е. если имеет место $|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| = 1$ для всех точек $\mathbf{r}_1 \in D$, $\mathbf{r}_2 \in D$ и для всех значений τ, то комплексная степень когерентности должна иметь вид, заданный выражением (4.5.53), где $\alpha(\mathbf{r})$ — действительная функция радиус-вектора.* Из определения комплексной степени когерентности (4.3.12а) следует, что *в этом случае функция взаимной когерентности принимает факторизованный вид и является периодической по τ*

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = U^*(\mathbf{r}_1) U(\mathbf{r}_2)\, \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu_0\tau}, \quad (\nu_0 > 0), \tag{4.5.54}$$

где

$$U(\mathbf{r}) = [\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0)]^{1/2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\mathbf{r})}. \tag{4.5.55}$$

$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0) = \langle V^*(\mathbf{r}, t) V(\mathbf{r}, t) \rangle$ — средняя интенсивность в точке $\mathbf{r}$, $\alpha(\mathbf{r})$ — фазовый множитель, ν_0 — положительная константа.

Если область D представляет собой свободное пространство, то функция взаимной когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ удовлетворяет двум волновым уравнениям (4.4.11). Подставляя (4.5.54) в эти уравнения, получаем, что функция $U(\mathbf{r})$ подчиняется уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) + k_0^2 U(\mathbf{r}) = 0, \tag{4.5.56}$$

где

$$k_0 = 2\pi\nu_0/c, \tag{4.5.57}$$

c — скорость света в вакууме.

В этом разделе мы показали, что полная когерентность в пространственно-временно́й области всегда предполагает периодическую зависимость комплексной степени когерентности и функции взаимной когерентности от τ. Следовательно, спектральная и взаимная спектральная плотности таких полей представляют собой дельта-функции Дирака, имеющие сингулярность на некоторой положительной частоте ν_0. Очевидно, что такие поля не могут существовать в природе. Их следует рассматривать как математическую идеализацию, а не как реальные оптические поля.

Далее мы рассмотрим полную когерентность в пространственно-частотной области.

4.5.3. Когерентный свет в пространственно-частотной области[1]

Начнем с условия неотрицательности, которому удовлетворяет спектральная степень когерентности $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j^* a_k \mu(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k, \nu) \geqslant 0, \tag{4.5.58}$$

[1] Материал, изложенный в этом разделе, основан на работе Манделя и Вольфа (Mandel and Wolf, 1981).

справедливого для любого целого положительного числа n, любых наборов точек $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ и любого набора действительных или комплексных постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Это неравенство непосредственно следует из (4.3.44) и (4.3.47).

Пусть $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ — три произвольных точки области D, в которой заключено оптическое поле. При $n = 3$ условие (4.5.58) дает

$$\begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix} \geqslant 0, \tag{4.5.59}$$

где мы ввели следующее обозначение:

$$\mu_{jk} = \mu(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k, \nu). \tag{4.5.60}$$

Согласно (4.3.43) и (4.3.47) спектральная степень когерентности является эрмитовой, т.е.

$$\mu_{kj} = \mu_{jk}^*. \tag{4.5.61}$$

Кроме того, из определения (4.3.37) мы видим, что

$$\mu_{jj} = 1. \tag{4.5.62}$$

Тогда неравенство (4.5.59) можно переписать следующим образом:

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{12}^* & 1 & \mu_{23} \\ \mu_{13}^* & \mu_{23}^* & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0. \tag{4.5.63}$$

Вычисляя детерминант, получим неравенство

$$2\,\mathrm{Re}\,(\mu_{12}\mu_{23}\mu_{13}^*) \geqslant |\mu_{12}|^2 + |\mu_{23}|^2 + |\mu_{13}|^2 - 1, \tag{4.5.64}$$

где Re обозначает действительную часть.

Предположим теперь, что поле пространственно полностью когерентно в объеме D на некоторой частоте ν_0, т.е.

$$|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu_0)| = 1 \quad \text{для заданного значения } \nu_0 > 0, \tag{4.5.65}$$

для всех $\mathbf{r}_1 \in D$, $\mathbf{r}_2 \in D$. Тогда, в частности, $|\mu_{12}|^2 = |\mu_{23}|^2 = |\mu_{31}|^2 = 1$, и неравенство (4.5.64) сводится к

$$\mathrm{Re}\,(\mu_{12}\mu_{23}\mu_{13}^*) \geqslant 1, \tag{4.5.66}$$

где частотный аргумент функций μ_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ равен ν_0. Исходя из нашего предположения (4.5.65), функция μ_{jk} имеет вид

$$\mu_{jk} = \mathrm{e}^{i\psi_{jk}}, \tag{4.5.67}$$

где $\psi_{jk} = \psi(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k, \nu_0)$ — действительная функция. В силу соотношения эрмитовости (4.5.61) мы также можем записать

$$\psi_{kj} = -\psi_{jk}. \tag{4.5.68}$$

С учетом (4.5.67) и (4.5.68) неравенство (4.5.66) сводится к

$$\cos\,(\psi_{12} - \psi_{32} + \psi_{31}) \geqslant 1. \tag{4.5.69}$$

Поскольку $|\cos\theta|$ не превышает единицы для действительных значений θ и равен единице при $\theta = 2m\pi$, где m — произвольное целое число, из неравенства (4.5.69) следует, что

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu_0) + \psi(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1, \nu_0) = \psi(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2, \nu_0) + 2m\pi, \tag{4.5.70}$$

где m — целое число. Начало координат в области D может быть выбрано таким образом, что $\mathbf{r}_3 = 0$. Тогда из (4.5.70) мы получим соотношение

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu_0) = \beta(\mathbf{r}_2; \nu_0) - \beta(\mathbf{r}_1; \nu_0) + 2m\pi, \tag{4.5.71}$$

где $\beta(\mathbf{r};\nu_0) = \psi(0,\mathbf{r},\nu_0)$.

Из выражений (4.5.67) и (4.5.71) следует, что спектральная степень когерентности должна иметь вид

$$\mu(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\beta(\mathbf{r}_2;\nu_0)-\beta(\mathbf{r}_1;\nu_0)]}. \tag{4.5.72}$$

Таким образом, полученный нами результат можно сформулировать так: *если поле пространственно полностью когерентно в объеме D на некоторой частоте ν_0, т.е. $|\mu(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu_0)| = 1$ для всех $\mathbf{r}_1 \in D$, $\mathbf{r}_2 \in D$, то спектральная степень когерентности должна иметь вид, определяемый выражением (4.5.72), где $\beta(\mathbf{r};\nu_0)$ — действительная функция радиус-вектора.* Из определения спектральной степени когерентности (4.3.47) следует, что *в этом случае взаимная спектральная плотность на частоте ν_0 приобретает факторизованный вид*

$$W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu_0) = \mathscr{U}^*(\mathbf{r}_1,\nu_0)\mathscr{U}(\mathbf{r}_2,\nu_0), \tag{4.5.73}$$

где

$$\mathscr{U}(\mathbf{r},\nu_0) = [S(\mathbf{r},\nu_0)]^{1/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(\mathbf{r};\nu_0)}, \tag{4.5.74}$$

$S(\mathbf{r},\nu_0)$ — спектральная плотность на частоте ν_0 в точке $\mathbf{r}$; $\beta(\mathbf{r};\nu_0)$ — фазовый множитель.

Если область D представляет собой свободное пространство, то взаимная спектральная плотность $W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ удовлетворяет двум уравнениям Гельмгольца [(4.4.12)]. Подставляя (4.5.73) в эти уравнения, получим, что функция $\mathscr{U}(\mathbf{r},\nu_0)$, в свою очередь, также должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2\mathscr{U}(\mathbf{r},\nu_0) + k_0^2\mathscr{U}(\mathbf{r},\nu_0) = 0, \tag{4.5.75}$$

где

$$k_0 = 2\pi\nu_0/c. \tag{4.5.76}$$

До сих пор мы рассматривали поле, которое является полностью когерентным в объеме D на некоторой определенной частоте ν_0. Предположим теперь, что поле полностью когерентно в объеме D на *всех* ν $(0 < \nu < \infty)$. Тогда, исходя из вышесказанного, взаимная спектральная плотность на каждой частоте этого поля имеет факторизованный вид (4.5.73). Напомним, что функция взаимной когерентности и взаимная спектральная плотность образуют пару относительно преобразования Фурье. И, следовательно, *функция взаимной когерентности поля, которое является полностью когерентным на всех частотах, должна иметь вид*

$$\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \int_0^\infty \mathscr{U}^*(\mathbf{r}_1,\nu)\mathscr{U}(\mathbf{r}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu\tau}\,d\nu. \tag{4.5.77}$$

Заметим, что функция взаимной когерентности вида (4.5.77), в общем случае, *не* является периодической по τ. Следовательно, поле, которому она соответствует, будет иметь спектральную плотность

$$S(\mathbf{r},\nu) \equiv W(\mathbf{r},\mathbf{r},\nu) = |\mathscr{U}(\mathbf{r},\nu)|^2 \tag{4.5.78}$$

ненулевой ширины. Таким образом, полная когерентность в пространственно-частотной области представляет собой, по-видимому, более реалистическое понятие, чем полная когерентность в пространственно-временно́й области.

Полностью когерентное в пространственно-частотной области поле имеет место, например, в резонаторе одномодового лазера, как показано в разд. 7.4. Однако, это поле не является полностью когерентным в пространственно-временно́й области.

4.6. Свободные поля с произвольной степенью когерентности

Поля, встречающиеся в природе, излучаются источниками, расположенными на конечных расстояниях от наблюдателя. Эти поля, как правило, взаимодействуют с материальными средами (линзами, зеркалами, экранами и т.д.). Тем не менее, по причинам, которые мы вкратце укажем, представляет интерес рассмотрение идеализированных полей, не имеющих источников (за исключением, возможно, источников на бесконечности) и не взаимодействующих с материальными объектами. Такие поля называются *свободными полями*. Мы будем рассматривать свободные поля с произвольной степенью когерентности.

Понятие свободного поля, хотя и представляет собой идеализацию, является, тем не менее, практически полезным, поскольку большинство измерений проводятся на расстояниях многих оптических длин волн от источников и объектов, с которыми взаимодействуют поля. Как правило, при этих условиях поле в интересующей нас области в хорошем приближении можно считать свободным полем, которое отличается от реального отсутствием затухающих волн (см. разд. 3.2). Такие волны экспоненциально затухают по амплитуде по мере удаления от их источников, поэтому их вкладом в областях, где проводятся измерения поля, обычно пренебрегают. Естественно, свободное поле проще анализировать математически, чем более общие типы полей.

Из разд. 4.4.1 нам известно, что пространственно-временна́я корреляционная функция поля в свободном пространстве удовлетворяет двум волновым уравнениям, т.е. дифференциальным уравнениям второго порядка по временны́м и пространственным переменным. Сударшан в своей работе (Sudarshan, 1969) показал, что если область представляет собой все пространство, т.е. если мы имеем дело со свободным полем, пространственно-временна́я корреляционная функция второго порядка подчиняется уравнениям первого порядка по времени, но не локализованным в пространстве. Этот результат имеет ряд интересных физических следствий.

В этом разделе мы выведем уравнения Сударшана для распространения корреляционных функций свободных полей и затем коротко обсудим некоторые следствия из них.

4.6.1. Уравнения Сударшана для распространения корреляционных функций второго порядка свободных полей

Пусть $V(\mathbf{r},t)$ — реализация статистического ансамбля свободных полей. Будем рассматривать $V(\mathbf{r},t)$ как комплексный аналитический сигнал, связанный с действительной полевой переменной. На всем пространстве он удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}. \tag{4.6.1}$$

Общее формальное решение (4.6.1), справедливое на всем пространстве, можно представить в виде суперпозиции мод плоских волн, а именно,

$$V(\mathbf{r},t) = \int a(\mathbf{K})\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-Kct)}\,d^3K + \int b(\mathbf{K})\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}+Kct)}\,d^3K, \tag{4.6.2}$$

где $K = |\mathbf{K}|$ и интегрирование проводится по всему трехмерному $\mathbf{K}$-пространству.

Представление свободного поля (4.6.2) может быть легко получено следующим образом. Представим $V(\mathbf{r},t)$ в виде (возможно обобщенного) трехмерного интеграла Фурье

$$V(\mathbf{r},t) = \int \tilde{V}(\mathbf{K},t)\,\mathrm{e}^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\,d^3K, \tag{4.6.3}$$

и подставим это выражение в дифференциальное уравнение (4.6.1). Меняя порядок операций дифференцирования и интегрирования и осуществив обратное фурье-преобразование полученного уравнения, находим

$$\left(-K^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\tilde{V}(\mathbf{K},t) = 0. \tag{4.6.4}$$

Общее решение уравнения (4.6.4) имеет вид

$$\tilde{V}(\mathbf{K},t) = a(\mathbf{K})\,\mathrm{e}^{-iKct} + b(\mathbf{K})\,\mathrm{e}^{iKct}, \tag{4.6.5}$$

где $a(\mathbf{K})$ и $b(\mathbf{K})$ — произвольные функции $\mathbf{K}$. Подставляя (4.6.5) в (4.6.3), получим представление (4.6.2).

Поскольку поле описывается с помощью комплексного аналитического сигнала, оно не может содержать отрицательных частотных компонент, т.е. $b(\mathbf{K}) \equiv 0$ в (4.6.2). В результате поле может быть представлено ансамблем реализаций вида

$$V(\mathbf{r},t) = \int a(\mathbf{K})\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-Kct)}\,d^3K. \tag{4.6.6}$$

Дифференцируя обе части (4.6.6) по t, получим уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -ic \int K a(\mathbf{K})\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} - Kct)}\, d^3K. \tag{4.6.7}$$

Интеграл в правой части этой формулы может быть представлен в виде определенного нелокализованного оператора, действующего на $V(\mathbf{r},t)$. Этот оператор, обычно обозначаемый как $\sqrt{-\nabla^2}$, хорошо известен в физике элементарных частиц и квантовой теории поля. Он может быть определен следующим образом:

Пусть $F(\mathbf{r})$ — произвольная скалярная функция от $\mathbf{r}$, которая может быть представлена в виде интеграла Фурье

$$F(\mathbf{r}) = \int \widetilde{F}(\mathbf{K})\, \mathrm{e}^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\, d^3K. \tag{4.6.8}$$

Тогда

$$\nabla^2 F(\mathbf{r}) = -\int K^2 \widetilde{F}(\mathbf{K})\, \mathrm{e}^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\, d^3K. \tag{4.6.9}$$

Теперь введем оператор $\sqrt{-\nabla^2}$, определив его таким образом

$$\sqrt{-\nabla^2} F(\mathbf{r}) = \int K \widetilde{F}(\mathbf{K})\, \mathrm{e}^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\, d^3K. \tag{4.6.10}$$

Правую часть (4.6.10) можно выразить непосредственно через $F(\mathbf{r})$, подставив выражение для $\widetilde{F}(\mathbf{K})$

$$\widetilde{F}(\mathbf{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(\mathbf{r}')\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}'}\, d^3r', \tag{4.6.11}$$

которое представляет собой обратное преобразование Фурье выражения (4.6.8). Тогда после простых алгебраических вычислений получим формулу

$$\sqrt{-\nabla^2} F(\mathbf{r}) = \int F(\mathbf{r}') H(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, d^3r', \tag{4.6.12}$$

где

$$H(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int K\, \mathrm{e}^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\, d^3K. \tag{4.6.13}$$

В Приложении 4.1 показано, что ядро $H(\mathbf{R})$ интегрального преобразования (4.6.12) можно символически записать в виде

$$H(\mathbf{R}) = \frac{i}{2\pi R} \frac{d^2}{dR^2} [\delta^{(+)}(R) - \delta^{(-)}(R)], \tag{4.6.14}$$

где $R = |\mathbf{R}|$; $\delta^{(+)}(R)$ и $\delta^{(-)}(R)$ — положительно- и отрицательно-частотные части дельта-функции Дирака, определенные в (А4.1.4). Из (4.6.12) видно, что оператор $\sqrt{-\nabla^2}$ является нелокализованным, т.е. значение $\sqrt{-\nabla^2} F(\mathbf{r})$ зависит не только от значения F в точке $\mathbf{r}$, но также от значений F во всех точках пространства.

Вернемся к уравнению (4.6.7). Интеграл в его правой части есть не что иное, как $-ic\sqrt{-\nabla^2} V(\mathbf{r},t)$, так что аналитический сигнал, соответствующий произвольному свободному полю, удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{-\nabla^2} V(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{ic} \frac{\partial V(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{4.6.15}$$

Впервые это уравнение было получено Сударшаном (Sudarshan, 1969).

Поскольку (4.6.15) является дифференциальным уравнением первого порядка по времени, возможно определить значения $V(\mathbf{r},t)$ для всех $\mathbf{r}$ и всех t, зная значение $V(\mathbf{r},t')$ для некоторого момента времени t'. Точная формула, описывающая эту временну́ю эволюцию, может быть получена следующим образом. Сначала осуществим обратное фурье-преобразование (4.6.6). Это дает

$$a(\mathbf{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{iKct'} \int V(\mathbf{r}',t')\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}'}\, d^3r'. \tag{4.6.16}$$

Затем подставим (4.6.16) в (4.6.6) и поменяем порядок интегрирования. В итоге получим формулу

$$V(\mathbf{r},t)=\int V(\mathbf{r}',t')G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\,d^3r', \tag{4.6.17}$$

где

$$G(\mathbf{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}-KcT)}\,d^3K. \tag{4.6.18}$$

В Приложении 4.2 показано, что функция $G(\mathbf{R},T)$ может быть представлена в виде

$$G(\mathbf{R},T)=-\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial}{\partial R}[\delta^{(+)}(R-cT)+\delta^{(-)}(R+cT)], \tag{4.6.19}$$

где $R=|\mathbf{R}|$.

Формула (4.6.17) для временно́й эволюции аналитического сигнала справедлива не только для всех значений $t>t'$, но также и для всех $t<t'$. Этот факт является следствием того, что при построении комплексного аналитического сигнала, связанного с действительным сигналом, нам необходимо знать значения последнего для всех t $(-\infty<t<\infty)$ [см. (3.1.21)].

В настоящем контексте $V(\mathbf{r},t)$ представляет собой выборочную функцию флуктуирующего свободного поля, чья корреляционная функция второго порядка определяется как

$$\Gamma(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)=\langle V^*(\mathbf{r}_1,t_1)V(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle. \tag{4.6.20}$$

Обозначим через $\sqrt{-\nabla_1^2}$ и $\sqrt{-\nabla_2^2}$ оператор $\sqrt{-\nabla^2}$, действующий относительно переменных $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, соответственно. Действуя оператором $\sqrt{-\nabla_j^2}$ $(j=1,2)$ на (4.6.20) и меняя порядок операций в правой части полученных выражений, имеем

$$\sqrt{-\nabla_j^2}\Gamma(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)=\langle\sqrt{-\nabla_j^2}V^*(\mathbf{r}_1,t_1)V(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle,\quad (j=1,2). \tag{4.6.21}$$

Воспользовавшись далее выражением (4.6.15) в правой части (4.6.21) и вновь меняя порядок операций, получим уравнения Сударшана (Sudarshan, 1969)

$$\sqrt{-\nabla_1^2}\Gamma(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)=\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t_1}\Gamma(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2), \tag{4.6.22а}$$

$$\sqrt{-\nabla_2^2}\Gamma(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)=-\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t_2}\Gamma(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2), \tag{4.6.22б}$$

которым подчиняется корреляционная функция второго порядка $\Gamma(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)$ произвольного ансамбля свободных полей.

Отметим, что в отличие от волновых уравнений (4.4.10) для Γ, уравнения Сударшана являются уравнениями первого порядка по временны́м переменным и не локализованы по пространственным переменным. Это означает, что, зная корреляционную функцию $\Gamma(\mathbf{r}_1',t_1';\mathbf{r}_2',t_2')$ для всех значений $\mathbf{r}_1'$ и $\mathbf{r}_2'$ при фиксированных t_1', t_2', можно найти $\Gamma(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)$ для всех значений ее аргументов. Приведем краткий вывод решения данной «задачи с начальными условиями» и обсудим некоторые его физические следствия.

Поскольку большинство встречающихся в природе полей являются стационарными, по крайней мере, в широком смысле, запишем уравнения (4.6.22) для этого типа полей. Для стационарных полей $\Gamma(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)$ зависит от своих временны́х аргументов только через их разность $\tau=t_2-t_1$, т.е. представляет собой функцию взаимной когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$. Поскольку в этом случае $-\partial/\partial t_1=\partial/\partial t_2=\partial/\partial\tau$, уравнения (4.6.22) принимают вид

$$\sqrt{-\nabla_1^2}\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)=-\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial\tau}\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau), \tag{4.6.23а}$$

$$\sqrt{-\nabla_2^2}\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)=-\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial\tau}\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau). \tag{4.6.23б}$$

В заключение, осуществив фурье-преобразование уравнений (4.6.23) и учитывая, что фурье-образ функции взаимной когерентности есть не что иное, как взаимная спектральная плотность $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ (4.3.40б), получим

$$\sqrt{-\nabla_1^2} W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) - kW(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0, \tag{4.6.24а}$$

$$\sqrt{-\nabla_2^2} W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) - kW(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0, \tag{4.6.24б}$$

где $k = 2\pi\nu/c$.

4.6.2. Временна́я эволюция корреляционных функций второго порядка свободных полей[1]

Рассмотрим вновь ансамбль свободных полей, для начала, не полагая его стационарным. Временна́я эволюция каждой реализации $V(\mathbf{r}, t)$ описывается выражением (4.6.17). Подставляя (4.6.17) в (4.6.20), получим формулу

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \iint \Gamma(\mathbf{r}_1', t_1'; \mathbf{r}_2', t_2') G^*(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1', t_1 - t_1') G(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2', t_2 - t_2')\, d^3r_1'\, d^3r_2', \tag{4.6.25}$$

где $G(\mathbf{R}, T)$ — функция Грина (4.6.19). Эта формула, справедливая для всех значений t_1 и t_2 ($t_1 \gtrless t_1'$, $t_2 \gtrless t_2'$) описывает, в законченном виде, временну́ю эволюцию корреляционной функции Γ свободного поля. Она позволяет найти $\Gamma(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)$ для всех значений ее аргументов, зная $\Gamma(\mathbf{r}_1', t_1'; \mathbf{r}_2', t_2')$, где $\mathbf{r}_1'$ и $\mathbf{r}_2'$ принимают все возможные значения, а t_1' и t_2' — произвольные фиксированные временны́е аргументы.

Теперь запишем формулу (4.6.25) для свободных полей, которые являются стационарными, по крайней мере в широком смысле. Для этого положим $t_2 - t_1 = \tau$, $t_2' - t_1' = \tau'$ и с помощью этих соотношений исключим t_2 и t_2' из (4.6.25). Кроме того, мы также можем записать, что $\Gamma(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) \equiv \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$, $\Gamma(\mathbf{r}_1', t_1'; \mathbf{r}_2', t_2') \equiv \Gamma(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \tau')$. В итоге

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \iint \Gamma(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \tau') G^*(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1', t_1 - t_1') G(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2', \tau + t_1 - \tau' - t_1')\, d^3r_1'\, d^3r_2'. \tag{4.6.26}$$

Полагая $t_1 = t_1' = 0$ в (4.6.26), имеем

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \iint \Gamma(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \tau') G^*(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1', 0) G(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2', \tau - \tau')\, d^3r_1'\, d^3r_2'. \tag{4.6.27}$$

Из выражения (4.6.18) и интегрального представления Фурье для дельта-функции Дирака следует, что

$$G^*(\mathbf{R}, 0) = \delta^{(3)}(\mathbf{R}). \tag{4.6.28}$$

Подставляя (4.6.28) в (4.6.27), получим следующую формулу для временно́й эволюции функции взаимной когерентности произвольного свободного поля, которое является стационарным по крайней мере в широком смысле:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2', \tau') G(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2', \tau - \tau')\, d^3r_2', \tag{4.6.29}$$

где τ' ($\gtrless \tau$) — произвольный параметр.

4.6.3. Взаимосвязь между свойствами временно́й и пространственной когерентности свободных полей

Полученная нами формула (4.6.29) имеет ряд интересных следствий, которые мы коротко рассмотрим в этом и последующем разделах.

[1] Основные результаты, приведенные в этом разделе, изложены в работе (Wolf, Devaney and Foley, 1981).

Поскольку параметр τ' в (4.6.29) является произвольным, мы можем, в частности, положить его равным нулю. Тогда корреляционная функция под знаком интеграла в (4.6.29) представляет собой равновременну́ю функцию когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)$, т.е. взаимную интенсивность, с которой мы встречались ранее [(4.3.34)] и обозначается как $J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Таким образом, мы получим формулу

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2') G(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2', \tau)\, d^3 r_2', \tag{4.6.30}$$

которая позволяет выразить функцию взаимной когерентности (т.е. неравновременну́ю корреляционную функцию) через взаимную интенсивность (т.е. через равновременну́ю корреляционную функцию).

Если положить $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ и обозначить переменную интегрирования $\mathbf{r}'$ вместо $\mathbf{r}_2'$, выражение (4.6.30) примет вид

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) = \int J(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau)\, d^3 r'. \tag{4.6.31}$$

В левой части полученного выражения мы имеем функцию автокогерентности, которая является мерой временно́й когерентности поля в точке $\mathbf{r}$. В то же время в правой части функция $J(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ является мерой пространственной когерентности поля в двух точках $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Таким образом, с помощью (4.6.31) свойства временно́й когерентности (стационарного) свободного поля выражены через его свойства пространственной когерентности.

4.6.4. Взаимосвязь спектральных свойств и свойств пространственной когерентности свободных полей[1]

Осуществив фурье-преобразование (4.6.30) по τ и воспользовавшись (4.3.40б), мы получим соотношение

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \int J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2') \widetilde{G}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2', \nu)\, d^3 r_2', \tag{4.6.32}$$

где $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ — взаимная спектральная плотность поля; $\widetilde{G}(\mathbf{R}, \nu)$ — фурье-образ функции Грина (4.6.19), а именно

$$\widetilde{G}(\mathbf{R}, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{R}, T)\, \mathrm{e}^{2\pi i \nu T}\, dT. \tag{4.6.33}$$

Этот фурье-образ вычисляется в Приложении 4.2, и мы приводим здесь результат этих вычислений

$$\widetilde{G}(\mathbf{R}, \nu) = \begin{cases} \dfrac{k^2}{\pi c}\left(\dfrac{\sin kR}{kR}\right), & \text{если } \nu > 0, \\ 0, & \text{если } \nu < 0. \end{cases} \tag{4.6.34}$$

где $k = 2\pi\nu/c$. Подставляя (4.6.34) в (4.6.32), получим другое интересное соотношение

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \frac{k^2}{\pi c} \int J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2') \frac{\sin k|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2'|}{k|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2'|}\, d^3 r_2', \quad \text{если } \nu > 0, \tag{4.6.35а}$$

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0, \quad \text{если } \nu < 0. \tag{4.6.35б}$$

То, что $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0$ при $\nu < 0$, вполне очевидно, поскольку $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ является аналитическим сигналом [см. обсуждение, следующее за (4.3.15)]. В формуле (4.6.35а) взаимная спектральная плотность свободного, стационарного поля выражена через его взаимную интенсивность. Иначе говоря, спектральные свойства поля выражены через свойства пространственной когерентности.

При $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ левая часть (4.6.35) переходит в спектральную плотность $S(\mathbf{r}, \nu) = W(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu)$ света в точке $\mathbf{r}$. Обозначая переменную интегрирования в правой части (4.6.35а) через $\mathbf{r}'$ вместо $\mathbf{r}_2'$, выразим спектральную плотность поля через взаимную интенсивность

$$S(\mathbf{r}, \nu) = \frac{k^2}{\pi c} \int J(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\sin k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3 r'. \tag{4.6.36}$$

[1] Результаты, приведенные в этом разделе, приведены в работе (Wolf and Devaney, 1981).

Некоторые следствия формул (4.6.35) и (4.6.36) для одномерных, статистически стационарных, однородных свободных полей обсуждались в работе (Wolf, Devaney and Gori, 1983).

4.7. Представление по когерентным модам и представление по ансамблю для источников и полей в пространственно-частотной области

В разд. 2.4.1 мы уже отмечали, что стационарную случайную функцию, скажем $V(t)$, в рамках теории обычных функций нельзя представить в виде интеграла Фурье, поскольку выборочные функции не стремятся к нулю при $t \to \pm\infty$. Поэтому представление, использованное нами в предыдущем разделе этой главы, для эвристического описания флуктуирующих полей в пространственно-частотной области, было введено чисто формально. Справедливость основных результатов, полученных при таком нестрогом подходе, можно подтвердить с помощью более сложных математических методов, таких, как обобщенный гармонический анализ и теория обобщенных функций.

Несмотря на то, что фурье-спектр стационарной случайной функции определить невозможно, математически точное представление стационарных случайных источников и полей в пространственно-частотной области может быть получено с помощью ансамблей обычных функций, что было впервые показано Вольфом (Wolf, 1982, см. также 1981a, b, 1986 и Agarwal and Wolf, 1993), по крайней мере, в рамках теории второго порядка. Естественно, в основе этого представления лежат не гармонические фурье-ядра $e^{-2\pi i\nu t}$, а собственные функции интегрального уравнения, ядро которого представляет собой взаимную спектральную плотность. В этом разделе мы изложим основные принципы этой теории.

4.7.1. Представление по когерентным модам частично когерентных полей в свободном пространстве

Рассмотрим стационарное оптическое поле $V(\mathbf{r}, t)$, заключенное в некоторой конечной замкнутой области D свободного пространства. Пусть $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ — функция взаимной когерентности. Предположим, что $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ убывает достаточно быстро при $|\tau| \to \infty$, что гарантирует абсолютную интегрируемость функции взаимной когерентности по τ во всех точках $\mathbf{r}_1 \in D$ и $\mathbf{r}_2 \in D$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|\, d\tau < \infty. \tag{4.7.1}$$

Тогда из хорошо известной теоремы фурье-анализа (Goldberg, 1965) следует, что $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ имеет частотный фурье-образ

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)\, e^{2\pi i\nu\tau}\, d\tau, \tag{4.7.2}$$

и что этот фурье-образ, а именно взаимная спектральная плотность $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$, является непрерывной функцией от ν.

Из (4.3.12a) и неравенства (4.3.13) следует, что абсолютная интегрируемость функции взаимной когерентности Γ предполагает также, что эта функция является квадратично интегрируемой:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|^2\, d\tau < \infty. \tag{4.7.3}$$

Тогда согласно соотношению Парсеваля (Goldberg, 1965) взаимная спектральная плотность квадратично интегрируема по ν:

$$\int_{0}^{\infty} |W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)|^2\, d\nu < \infty, \tag{4.7.4}$$

и выражение (4.7.2) может быть записано в обращенном виде:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int_{0}^{\infty} W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)\, e^{-2\pi i\nu\tau}\, d\nu. \tag{4.7.5}$$

Нижний предел интегрирования в правой части (4.7.5) равен 0, а не $-\infty$, поскольку функция взаимной когерентности представляет собой аналитический сигнал.

Выражения (4.7.2)—(4.7.5) и непрерывность взаимной спектральной плотности как функции частоты следуют из единственного сделанного нами предположения (4.7.1). Предположим теперь, что взаимная спектральная плотность является также непрерывной функцией $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ в области D. Тогда $|W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)|^2$ должна быть ограничена в D. Следовательно,

$$\int_D \int_D |W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)|^2 \, d^3r_1 \, d^3r_2 < \infty. \tag{4.7.6}$$

Ранее мы видели [(4.3.43)], что взаимная спектральная плотность удовлетворяет условию

$$W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \nu) = W^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu), \tag{4.7.7}$$

а также является неотрицательно определенной функцией в том смысле, что

$$\int_D \int_D W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) f^*(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2) \, d^3r_1 \, d^3r_2 \geqslant 0, \tag{4.7.8}$$

где $f(\mathbf{r})$ — произвольная квадратично интегрируемая функция. Это неравенство, представляющее собой «непрерывный аналог» неравенства (4.3.44), может быть получено путем рассуждений, сходных с теми, что мы использовали в разд. 2.4.4 при доказательстве того, что матрица взаимной спектральной плотности $W_{jk}(\nu)$ является неотрицательно определенной. При этом сумму в (2.4.40) необходимо заменить интегралом [ср. (2.3.4а) и (2.3.4б)].

Условие (4.7.6) означает, что взаимная спектральная плотность представляет собой ядро Гильберта — Шмидта. Из выражений (4.7.7) и (4.7.8) следует, что это ядро эрмитово и неотрицательно определенное. Согласно теореме Мерсера (см. разд. 2.5.1), взаимная спектральная плотность, которую мы полагаем непрерывной, может быть представлена в виде

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \sum_n \alpha_n(\nu) \psi_n^*(\mathbf{r}_1, \nu) \psi_n(\mathbf{r}_2, \nu). \tag{4.7.9}$$

Ряд в правой части выражения (4.7.9) абсолютно и равномерно сходится. Функции $\psi_n(\mathbf{r}, \nu)$ являются собственными функциями, а коэффициенты $\alpha_n(\nu)$ — собственными значениями интегрального уравнения

$$\int_D W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) \psi_n(\mathbf{r}_1, \nu) \, d^3r_1 = \alpha_n(\nu) \psi_n(\mathbf{r}_2, \nu), \tag{4.7.10}$$

которое представляет собой однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Если W эрмитова, то, как и в случае одномерного аналога (4.7.10) (см. разд. 2.5), интегральное уравнение (4.7.10) имеет хотя бы одно собственное значение, отличное от нуля. Если W эрмитова и неотрицательно определена, то все собственные значения являются действительными и неотрицательными, т.е.

$$\alpha_n(\nu) \geqslant 0. \tag{4.7.11}$$

Более того, без потери общности, можно предположить, что собственные функции образуют ортонормированное множество, т.е.

$$\int_D \psi_n^*(\mathbf{r}, \nu) \psi_m(\mathbf{r}, \nu) \, d^3r = \delta_{nm}, \tag{4.7.12}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера.

Покажем, что в настоящем контексте разложение Мерсера (4.7.9) имеет интересную физическую трактовку. Перепишем (4.7.9) в виде

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \sum_n \alpha_n(\nu) W^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu), \tag{4.7.13}$$

где

$$W^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \psi_n^*(\mathbf{r}_1, \nu) \psi_n(\mathbf{r}_2, \nu). \tag{4.7.14}$$

Взаимная спектральная плотность вида (4.7.14) соответствует полю, полностью когерентному в пространственно-частотной области. Это очевидно следует из теоремы, полученной нами в разд. 4.5.3 [см. (4.5.73)] или непосредственно из того, что соответствующая спектральная степень когерентности

$$\mu^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \frac{W^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)}{[W^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu)]^{1/2}[W^{(n)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \nu)]^{1/2}} \tag{4.7.15}$$

представляет собой унимодулярную функцию [$|\mu^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)| = 1$ для всех $\mathbf{r}_1 \in D$, $\mathbf{r}_2 \in D$].

Ранее мы показали [(4.4.12)], что в свободном пространстве взаимная спектральная плотность удовлетворяет двум уравнениям Гельмгольца

$$\nabla_1^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) + k^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0, \tag{4.7.16а}$$

$$\nabla_2^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) + k^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0, \tag{4.7.16б}$$

где

$$k = 2\pi\nu/c \tag{4.7.17}$$

— волновое число, связанное с частотой ν. Подставляя разложение (4.7.9) для W в (4.7.16б), умножая уравнение на $\psi_n(\mathbf{r}_1, \nu)$, интегрируя обе части по $\mathbf{r}_1$ в области D и затем меняя порядок операций суммирования и интегрирования, и, наконец, используя условие ортонормированности (4.7.12), находим, что

$$\nabla^2 \psi_n(\mathbf{r}, \nu) + k^2 \psi_n(\mathbf{r}, \nu) = 0 \tag{4.7.18}$$

в области D. Из (4.7.14) и (4.7.18) сразу же следует, что $W^{(n)}$ также удовлетворяет двум уравнениям Гельмгольца

$$\nabla_1^2 W^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) + k^2 W^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0, \tag{4.7.19а}$$

$$\nabla_2^2 W^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) + k^2 W^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0. \tag{4.7.19б}$$

Таким образом, для каждого n, $W^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ удовлетворяет тем же уравнениям, что и взаимная спектральная плотность поля. Следовательно, можно считать, что $W^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ соответствует *моде* поля. Мы показали, что *разложение (4.7.13) представляет взаимную спектральную плотность поля в виде суперпозиции мод, каждая из которых полностью когерентна в пространственно-частотной области.* По этой причине разложение (4.7.9) иногда называют *представлением по когерентным модам* взаимной спектральной плотности.

Также можно легко получить из (4.7.14) и (4.7.12), что моды взаимно ортонормированы или, точнее говоря, что

$$\int_D \int_D [W^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)]^* W^{(m)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)\, d^3r_1\, d^3r_2 = \delta_{nm}. \tag{4.7.20}$$

Далее коротко рассмотрим спектральную плотность поля. Согласно (4.3.41), спектральная плотность $S(\mathbf{r}, \nu)$ света в точке $\mathbf{r}$ представляет собой «диагональный элемент» взаимной спектральной плотности, т.е.

$$S(\mathbf{r}, \nu) \equiv W(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu). \tag{4.7.21}$$

Подставляя (4.7.13) в (4.7.21), получим следующее выражение для спектральной плотности

$$S(\mathbf{r}, \nu) = \sum_n \alpha_n(\nu) S^{(n)}(\mathbf{r}, \nu), \tag{4.7.22}$$

где

$$S^{(n)}(\mathbf{r}, \nu) \equiv W^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu) = |\psi_n(\mathbf{r}, \nu)|^2. \tag{4.7.23}$$

Интегрируя (4.7.22) в области D, меняя порядок операций суммирования и интегрирования и используя формулу

$$\int_D S^{(n)}(\mathbf{r}, \nu)\, d^3r = 1, \tag{4.7.24}$$

которая непосредственно следует из (4.7.23) и (4.7.12), мы получим соотношение

$$\int_D S(\mathbf{r},\nu)\,d^3r = \sum_n \alpha_n(\nu). \tag{4.7.25}$$

Из выражений (4.7.22) и (4.7.23) видно, что вклад моды, обозначенной индексом n, в спектральную плотность в точке $\mathbf{r}$ составляет $\alpha_n(\nu)|\psi_n(\mathbf{r},\nu)|^2$. А из (4.7.25) следует, что ее вклад в интеграл от спектральной плотности по области D, который является мерой полной энергии в D на частоте ν, равен $\alpha_n(\nu)$.

В заключение отметим, что согласно (4.7.5) и (4.7.13) функция взаимной когерентности поля может быть представлена в виде

$$\Gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \sum_n \Gamma^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau), \tag{4.7.26}$$

где $\Gamma^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$ — функция взаимной когерентности моды, обозначенной индексом n, определяется по формуле

$$\Gamma^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \int_0^\infty \alpha_n(\nu) W^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu = \tag{4.7.27а}$$

$$= \int_0^\infty \alpha_n(\nu)\psi_n^*(\mathbf{r}_1,\nu)\psi_n(\mathbf{r}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu. \tag{4.7.27б}$$

Из (4.7.27а) можно легко показать с помощью (4.7.20), что функции $\Gamma^{(n)}$ также ортогональны в том смысле, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_D d^3r_1 \int_D d^3r_2 [\Gamma^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)]^* \Gamma^{(m)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \delta_{nm}\int_0^\infty \alpha_n^2(\nu)\,d\nu. \tag{4.7.28}$$

Однако, в отличие от спектральной степени когерентности $\mu^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$, комплексная степень когерентности $\gamma^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$ каждой моды, полученная путем подстановки (4.7.27б) в (4.3.12а), в общем случае не является унимодулярной функцией. Следовательно, моды $\Gamma^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$, в общем случае, не являются полностью когерентными в пространственно-временно́й области. Полученный вывод вполне предсказуем, поскольку выражения (4.7.27) не соответствуют виду (4.5.54), что требуется для полной когерентности в этой области.

4.7.2. Строгое представление взаимной спектральной плотности в виде корреляционной функции

Теперь с помощью представления по когерентным модам построим ансамбль строго монохроматических волновых функций $\{U(\mathbf{r},\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}\}$ одной и той же частоты ν такой, что взаимная спектральная плотность $W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ будет равна их взаимной корреляционной функции. Математический анализ, лежащий в основе такого построения, отчасти аналогичен уже встречавшемуся нам ранее в связи с ортогональным разложением Карунена — Луева для случайного процесса (см. разд. 2.5.1).

Рассмотрим набор функций $\{U(\mathbf{r},\nu)\}$, каждая из которых является линейной комбинацией собственных функций $\psi_n(\mathbf{r},\nu)$ интегрального уравнения (4.7.10):

$$U(\mathbf{r},\nu) = \sum_n a_n(\nu)\psi_n(\mathbf{r},\nu). \tag{4.7.29}$$

В этом разложении a_n представляют собой случайные коэффициенты, свойства которых мы вскоре определим. Тогда взаимная корреляция для $U(\mathbf{r}_1,\nu)$ и $U(\mathbf{r}_2,\nu)$ в двух точках поля $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ определяется как

$$\langle U^*(\mathbf{r}_1,\nu)U(\mathbf{r}_2,\nu)\rangle_\nu = \sum_n\sum_m \langle a_n^*(\nu)a_m(\nu)\rangle_\nu \psi_n^*(\mathbf{r}_1,\nu)\psi_m(\mathbf{r}_2,\nu), \tag{4.7.30}$$

где угловые скобки с индексом ν обозначают среднее по ансамблю частотно-зависимых функций $U(\mathbf{r},\nu)$, что эквивалентно среднему по ансамблю случайных коэффициентов $a_n(\nu)$. Предположим, что мы выбираем коэффициенты $a_n(\nu)$ таким образом, что

$$\langle a_n^*(\nu)a_m(\nu)\rangle_\nu = \alpha_n(\nu)\delta_{nm}, \tag{4.7.31}$$

где α_n — собственные значения интегрального уравнения (4.7.10), δ_{nm} — символ Кронекера. Потребуем также, чтобы для каждой реализации выполнялось условие

$$\sum_n |a_n(\nu)|^2 < \infty. \tag{4.7.32}$$

Подобный ансамбль $\{a_n(\nu)\}$ можно получить, полагая, например, что

$$a_n(\nu) = [\alpha_n(\nu)]^{1/2}\, e^{i\theta_n}, \tag{4.7.33}$$

где для каждого n θ_n представляет собой случайную переменную, равномерно распределенную в интервале $0 \leqslant \theta_n < 2\pi$; θ_n и θ_m — статистически независимы при $n \neq m$. Выбранный таким образом ансамбль, очевидно, удовлетворяет требованию (4.7.31). Условие (4.7.32) также выполняется, так как

$$\sum_n \langle |a_n(\nu)|^2 \rangle_\nu = \sum_n \alpha_n(\nu), \tag{4.7.34}$$

а сумма собственных значений интегрального уравнения с непрерывным ядром Гильберта — Шмидта, как известно, является конечной [Tricomi, 1957, разд. 3.12, выражение 8, при $\alpha_n = 1/\lambda_n$]. То, что сумма в правой части (4.7.34) конечна, также очевидно из соотношения (4.7.25).

Нетрудно показать, что каждая из выборочных функций $U(\mathbf{r}, \nu)$, заданная в виде разложения (4.7.29), при соблюдении ограничений (4.7.32) является квадратично интегрируемой в области D. Для этого возьмем интеграл от квадрата модуля $U(\mathbf{r}, \nu)$ по области D. Если затем под знаком интеграла заменить $U(\mathbf{r}, \nu)$ соответствующим разложением (4.7.29) и поменять порядок операций интегрирования и суммирования, мы получим формулу

$$\int_D |U(\mathbf{r}, \nu)|^2\, d^3r = \sum_n \sum_m a_n^*(\nu) a_m(\nu) \int_D \psi_n^*(\mathbf{r}, \nu) \psi_m(\mathbf{r}, \nu)\, d^3r. \tag{4.7.35}$$

Поскольку согласно (4.7.12) функции ψ_n образуют ортонормированное множество, выражение (4.7.35) принимает вид

$$\int_D |U(\mathbf{r}, \nu)|^2\, d^3r = \sum_n |a_n(\nu)|^2. \tag{4.7.36}$$

Правая часть полученного выражения конечна в силу условия (4.7.32).

Подставим (4.7.31) в (4.7.30). В результате мы получим формулу

$$\langle U^*(\mathbf{r}_1, \nu) U(\mathbf{r}_2, \nu) \rangle_\nu = \sum_n \alpha_n(\nu) \psi_n^*(\mathbf{r}_1, \nu) \psi_m(\mathbf{r}_2, \nu). \tag{4.7.37}$$

Сравнивая правую часть полученного выражения с правой частью разложения Мерсера (4.7.9) для взаимной спектральной плотности, мы видим, что они равны. Следовательно, равны также и их левые части, т.е.

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \langle U^*(\mathbf{r}_1, \nu) U(\mathbf{r}_2, \nu) \rangle_\nu. \tag{4.7.38}$$

Таким образом, мы построили *ансамбль $\{U(\mathbf{r}, \nu)\}$ случайных полей, позволяющих представить взаимную спектральную плотность $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ заданного поля в виде взаимной корреляционной функции по этому ансамблю.*

Поскольку, исходя из (4.7.18), каждый член в разложении (4.7.29) удовлетворяет уравнению Гельмгольца, каждая функция из нашего ансамбля $\{U(\mathbf{r}, \nu)\}$ также удовлетворяет этому уравнению, т.е.

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}, \nu) + k^2 U(\mathbf{r}, \nu) = 0, \tag{4.7.39}$$

где $k = 2\pi\nu/c$ — волновое число, связанное с частотой ν.

Заметим, что выражение (4.7.38) имеет некоторое сходство с формулой (4.3.39), выражающей взаимную спектральную плотность через $\tilde{V}(\mathbf{r}, \nu)$. Более того, $\tilde{V}(\mathbf{r}, \nu)$, также, как и $U(\mathbf{r}, \nu)$, в свободном пространстве удовлетворяет уравнению Гельмгольца [(4.4.3)]. Тем не менее, все проведенные нами ранее расчеты с

использованием $\widetilde{V}(\mathbf{r},\nu)$, касающиеся стационарных полей, можно рассматривать только как эвристические, поскольку $\widetilde{V}(\mathbf{r},\nu)$ была формально введена нами как фурье-образ случайной функции $V(\mathbf{r},\nu)$. Но, как мы уже неоднократно отмечали, фурье-образ стационарной случайной функции не существует в рамках теории обычных функций. Строго говоря, он может рассматриваться только как обобщенная функция. В то же время в рассматриваемой теории $U(\mathbf{r},\nu)$ представляют собой обычные функции и с их помощью можно дать строгую формулировку многих полученных ранее результатов.

Помимо большей математической строгости, формула (4.7.38) для взаимной спектральной плотности и ее «диагональная» форма

$$S(\mathbf{r},\nu) = \langle U^*(\mathbf{r},\nu)U(\mathbf{r},\nu)\rangle_\nu \tag{4.7.40}$$

для спектральной плотности поля в точке $\mathbf{r}$ хорошо согласуется с физическим смыслом, который мы интуитивно вкладываем в эти понятия. Поскольку, исходя из (4.7.38) и (4.7.39), каждый член ансамбля $U(\mathbf{r},\nu)$ можно рассматривать как не зависящую от времени часть монохроматической волновой функции

$$V(\mathbf{r},t) = U(\mathbf{r},\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}, \tag{4.7.41}$$

то и спектр и взаимный спектр поля представляют собой средние от величин, квадратичных по комплексной амплитуде.

4.7.3. Нормальные моды колебаний частично когерентных первичных источников и представление их взаимной спектральной плотности в виде корреляционной функции

Представления, аналогичные выражениям (4.7.9) и (4.7.38) для взаимной спектральной плотности стационарного поля, могут быть введены и для взаимной спектральной плотности стационарного источника. Аналоги этих двух формул, которые мы получим в данном разделе, приводят нас к понятию нормальных мод колебаний частично когерентного источника, которое позволяет рассматривать поля, излучаемые такими источниками, оперируя понятием когерентных мод.

Рассмотрим первичный флуктуирующий скалярный источник, занимающий некоторую конечную область σ свободного пространства. Пусть $Q(\mathbf{r},t)$ — распределение источника, которое представляет собой аналитический сигнал, связанный с действительным распределением источника $Q^{(r)}(\mathbf{r},t)$. Предположим, что флуктуации характеризуются статистическим ансамблем, который является стационарным, по крайней мере, в широком смысле. Обозначим через $\Gamma_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$ функцию взаимной корреляции для Q, а именно

$$\Gamma_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \langle Q^*(\mathbf{r}_1,t)Q(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle. \tag{4.7.42}$$

Мы предполагаем, по аналогии с (4.7.1), что Γ_Q абсолютно интегрируема по τ. Следовательно, для распределения источника имеют место результаты, аналогичные выражениям (4.7.2)—(4.7.5), полученным для оптического поля. В частности, взаимная спектральная плотность распределения источника

$$W_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)\,\mathrm{e}^{2\pi i\nu\tau}\,d\tau \tag{4.7.43}$$

существует и является непрерывной функцией ν. Далее мы предполагаем, что $W_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ является также непрерывной функцией $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ в области σ. Тогда W_Q представляет собой неотрицательно определенное ядро Гильберта — Шмидта, и, следовательно, по аналогии с (4.7.9), ее можно представить в виде разложения Мерсера, а именно

$$W_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = \sum_n \beta_n(\nu)\phi_n^*(\mathbf{r}_1,\nu)\phi_n(\mathbf{r}_2,\nu), \tag{4.7.44}$$

т.е. в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда. Функции ϕ_n являются собственными функциями, а коэффициенты β_n — собственными значениями интегрального уравнения

$$\int_\sigma W_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\phi_n(\mathbf{r}_1,\nu)\,d^3r_1 = \beta_n(\nu)\phi_n(\mathbf{r}_2,\nu). \tag{4.7.45}$$

Как и ранее, собственные функции с необходимостью являются действительными и неотрицательными

$$\beta_n(\nu) \geqslant 0, \tag{4.7.46}$$

а собственные значения полагаются ортонормированными

$$\int_\sigma \phi_n^*(\mathbf{r},\nu)\phi_m(\mathbf{r},\nu)\,d^3r = \delta_{nm}. \tag{4.7.47}$$

В выражении (4.7.44) взаимная спектральная плотность источника представлена в виде линейной комбинации взаимных спектральных плотностей

$$W_Q^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = \phi_n^*(\mathbf{r}_1,\nu)\phi_n(\mathbf{r}_2,\nu), \tag{4.7.48}$$

которые разлагаются на множители по пространственным переменным $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Это значит, что соответствующая спектральная степень когерентности

$$\mu_Q^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = \frac{W_Q^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)}{[W_Q^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1,\nu)]^{1/2}[W_Q^{(n)}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2,\nu)]^{1/2}} \tag{4.7.49}$$

является унимодулярной. Таким образом, взаимная спектральная плотность источника представлена в виде линейной комбинации взаимных спектральных плотностей элементарных источников, каждый из которых полностью когерентен в пространственно-частотной области. Можно считать, что эти элементарные источники ϕ_n, или, точнее, произведения $\phi_n\,e^{-2\pi i\nu t}$, соответствуют ***нормальным модам колебаний*** данного источника. По аналогии с (4.7.20) можно показать, что взаимные спектральные плотности различных мод взаимно ортогональны.

Особый интерес в плане приложений такого представления по модам представляет аналог выражения (4.7.38), а именно формула

$$W_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = \langle U_Q^*(\mathbf{r}_1,\nu)U_Q(\mathbf{r}_2,\nu)\rangle_\nu. \tag{4.7.50}$$

Мы видим, что ***взаимная спектральная плотность распределения источника представлена в виде корреляционной функции в пространственно-частотной области.*** В (4.7.50) U_Q являются выборочными функциями статистического ансамбля, каждая из которых имеет вид

$$U_Q(\mathbf{r},\nu) = \sum_n b_n(\nu)\phi(\mathbf{r},\nu), \tag{4.7.51}$$

где $b_n(\nu)$ — случайные переменные, удовлетворяющие условиям

$$\langle b_n^*(\nu)b_m(\nu)\rangle_\nu = \beta_n(\nu)\delta_{nm}, \tag{4.7.52}$$

$$\sum_n \langle |b_n(\nu)|^2\rangle_\nu < \infty. \tag{4.7.53}$$

Среднее в (4.7.50) берется по ансамблю U_Q или, что фактически одно и то же, по ансамблю случайных коэффициентов b_n. Вывод формулы (4.7.50) может быть проведен по аналогии с выводом соответствующей формулы (4.7.38) для взаимной спектральной плотности оптического поля.

Рассмотрим поле $V(\mathbf{r},t)$, излучаемое флуктуирующим источником. Пусть $W_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ — взаимная спектральная плотность этого поля. Согласно (4.4.63) W_V связана с взаимной спектральной плотностью источника $W_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ уравнением

$$(\nabla_1^2 + k^2)(\nabla_2^2 + k^2)W_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = (4\pi)^2 W_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu). \tag{4.7.54}$$

Как мы уже отмечали, в разложении (4.7.44) W_Q представлена в виде линейной комбинации вкладов от полностью когерентных элементарных источников. Можно предположить, что каждый такой элементарный источник ϕ_n излучает поле ψ_n, которое является решением уравнения Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_n(\mathbf{r},\nu) = -4\pi\phi_n(\mathbf{r},\nu). \tag{4.7.55}$$

Полагая для простоты, что область вне источника σ представляет собой неограниченное свободное пространство, получим решение (4.7.55) в виде

$$\psi_n(\mathbf{r},\nu)=\int_\sigma \phi_n(\mathbf{r}',\nu)\frac{\exp\left(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r'. \tag{4.7.56}$$

Если же область вне источника σ ограничена или содержит материальные объекты, линейно взаимодействующие с полем, то в выражении (4.7.56) удаляющуюся сферическую волну $\exp\left(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ следует заменить на соответствующую функцию Грина.

Теперь построим ансамбль функций

$$U_V(\mathbf{r},\nu)=\sum_n b_n(\nu)\psi_n(\mathbf{r},\nu), \tag{4.7.57}$$

где ψ_n задаются выражением (4.7.56), а b_n — те же коэффициенты разложения, что и в (4.7.51). Из (4.7.57), (4.7.55) и (4.7.51) следует, что $U_V(\mathbf{r},\nu)$ является удаляющимся решением волнового уравнения

$$(\nabla^2+k^2)U_V(\mathbf{r},\nu)=-4\pi U_Q(\mathbf{r},\nu). \tag{4.7.58}$$

Из (4.7.58) и (4.7.50) получим, что

$$(\nabla_1^2+k^2)(\nabla_2^2+k^2)\langle U_V^*(\mathbf{r}_1,\nu)U_V(\mathbf{r}_2,\nu)\rangle_\nu=(4\pi)^2W_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu), \tag{4.7.59}$$

откуда согласно (4.7.54) следует, что

$$W_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)=\langle U_V^*(\mathbf{r}_1,\nu)U_V(\mathbf{r}_2,\nu)\rangle_\nu. \tag{4.7.60}$$

С помощью этой формулы *взаимная спектральная плотность поля, излучаемого первичным источником, представлена в виде корреляционной функции в пространственно-частотной области.*

В заключение подставим (4.7.57) в (4.7.60). Тогда, воспользовавшись выражением (4.7.52), получим следующее разложение для W_V:

$$W_V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)=\sum_n \beta_n(\nu)\psi_n^*(\mathbf{r}_1,\nu)\psi_n(\mathbf{r}_2,\nu). \tag{4.7.61}$$

Каждый член этого ряда разлагается на множители по двум пространственным переменным $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Следовательно, соответствующие спектральные степени когерентности унимодулярны. Таким образом, выражение (4.7.61) *представляет взаимную спектральную плотность поля, излучаемого первичным источником, в виде линейной комбинации взаимных спектральных плотностей элементарных полей, каждое из которых излучается нормальной модой источника, полностью когерентной в пространственно-частотной области.* В отличие от нормальных мод источника, эти элементарные поля в общем случае не являются взаимно ортогональными, но, исходя из (4.7.52), их вклады $\beta_n(\nu)\psi_n^*(\mathbf{r}_1,\nu)\psi_n(\mathbf{r}_2,\nu)$ во взаимную спектральную плотность W_V поля являются *некоррелированными.*

Приложение 4.1
Ядро $H(\mathbf{R})$ оператора $\sqrt{-\nabla^2}$ в представлении интегрального преобразования [выражение (4.6.14)]

В этом приложении мы формально вычислим интеграл (4.6.13), а именно,

$$H(\mathbf{R})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int K\,e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\,d^3K, \tag{A4.1.1}$$

где интегрирование производится по всему $\mathbf{K}$-пространству.

Введем сферические координаты (K, θ, ϕ) в $\mathbf{K}$-пространстве, направив полярную ось $\theta = 0$ вдоль $\mathbf{R}$. Тогда формула (А4.1.1) принимает вид

$$H(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dK K^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta\, e^{iKR\cos\theta}. \tag{А4.1.2}$$

Интегрирование по ϕ дает 2π. Тогда, полагая $x = \cos\theta$, из (А4.1.2) получим, что

$$H(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dK K^3 \int_{-1}^1 dx\, e^{iKRx} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty K^3 \frac{e^{iKR} - e^{-iKR}}{iKR}\, dK =$$

$$= -\frac{i}{2\pi R}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty K^2 e^{iKR}\, dK - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty K^2 e^{-iKR}\, dK\right] =$$

$$= -\frac{i}{2\pi R}\left\{-\frac{d^2}{dR^2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{iKR}\, dK\right] + \frac{d^2}{dR^2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-iKR}\, dK\right]\right\},$$

т.е.

$$H(\mathbf{R}) = \frac{i}{2\pi R}\frac{d^2}{dR^2}[\delta^{(+)}(R) - \delta^{(-)}(R)], \tag{А4.1.3}$$

где

$$\delta^{(+)}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{iK\xi}\, dK, \quad \delta^{(-)}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-iK\xi}\, dK. \tag{А4.1.4}$$

Эти положительно- и отрицательно-частотные части дельта-функции Дирака фактически представляют собой сингулярные функции δ_- и δ_+, с которыми мы уже встречались в разд. 3.1. Несколько другие обозначения, использованные здесь, связаны с разницей в знаках аргументов экспоненциальных ядер во временно́м и пространственном фурье-преобразовании. Функции $\delta^{(+)}(\xi)$ и $\delta^{(-)}(\xi)$ можно также представить в виде (Heitler, 1984, разд. 8)

$$\delta^{(\pm)}(\xi) = \frac{1}{2}\left[\delta(\xi) \mp \cdot\frac{1}{\pi i}P\frac{1}{\xi}\right], \tag{А4.1.5}$$

где P — главное значение по Коши.

Формула (А4.1.3) в тексте соответствует выражению (4.6.14).

Приложение 4.2
Функция Грина $G(\mathbf{R}, T)$ для временно́й эволюции аналитического сигнала свободного поля и ее фурье-образ $\widetilde{G}(\mathbf{R}, \nu)$ [выражения (4.6.19) и (4.6.34)]

Функция Грина $G(\mathbf{R}, T)$ в выражении (4.6.17), описывающем временну́ю эволюцию аналитического сигнала свободных полей, определяется формулой (4.6.18), а именно

$$G(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{R} - KcT)}\, d^3K, \tag{А4.2.1}$$

где интегрирование проводится по всему $\mathbf{K}$-пространству.

При вычислении интеграла будем следовать алгоритму, приведенному в Приложении 4.1. Введем сферические координаты (K, θ, ϕ) в $\mathbf{K}$-пространстве, направив полярную ось $\theta = 0$ вдоль $\mathbf{R}$, проинтегрируем по ϕ и положим $x = \cos\theta$. В результате выражение (А4.2.1) для функции Грина принимает вид

$$G(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dK K^2 \int_{-1}^1 dx\, e^{iK(Rx - cT)} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty K^2 e^{-iKcT}\left[\frac{e^{iKR} - e^{-iKR}}{iKR}\right] dK =$$

$$= -\frac{1}{2\pi R}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty iK\, e^{iK(R - cT)}\, dK - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty iK\, e^{-iK(R + cT)}\, dK\right],$$

т.е.

$$G(\mathbf{R},T)=-\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial}{\partial R}[\delta^{(+)}(R-cT)+\delta^{(-)}(R+cT)], \tag{A4.2.2}$$

где $\delta^{(+)}$ и $\delta^{(-)}$ — функции, определяемые выражениями (A4.1.4). Формула (A4.2.2) идентична формуле (4.6.19) в основном тексте.

Вычислим фурье-образ полученной функции Грина

$$\tilde{G}(\mathbf{R},\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\mathbf{R},T)\,\mathrm{e}^{2\pi i\nu T}\,dT. \tag{A4.2.3}$$

Для этого перепишем второе промежуточное выражение в формуле (A4.2.2), полученное нами при вычислении интеграла, в виде

$$G(\mathbf{R},T)=\int_{0}^{\infty}g(k)\,\mathrm{e}^{-ikcT}\,dk, \tag{A4.2.4}$$

где

$$g(k)=\frac{2k^2}{(2\pi)^2}\frac{\sin kR}{kR}. \tag{A4.2.5}$$

Переходя в (A4.2.4) к новой переменной интегрирования ν, которая связана с k соотношением

$$kc=2\pi\nu, \tag{A4.2.6}$$

получим следующее выражение для $G(\mathbf{R},T)$

$$G(\mathbf{R},T)=\frac{2\pi}{c}\int_{0}^{\infty}g(2\pi\nu/c)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu T}\,d\nu. \tag{A4.2.7}$$

Осуществляя обратное фурье-преобразование выражения (A4.2.7) и сравнивая полученный результат с (A4.2.3), находим, что

$$\tilde{G}(\mathbf{R},\nu)=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{c}g(2\pi\nu/c), & \text{если } \nu>0,\\ 0, & \text{если } \nu<0.\end{cases} \tag{A4.2.8}$$

И, наконец, подставляя (A4.2.5) в (A4.2.8) и вновь применяя соотношение (A4.2.6), получим окончательное выражение для $\tilde{G}(\mathbf{R},\nu)$

$$\tilde{G}(\mathbf{R},\nu)=\begin{cases}\dfrac{k^2}{\pi c}\left(\dfrac{\sin kR}{kR}\right), & \text{если } \nu>0,\\ 0, & \text{если } \nu<0,\end{cases} \tag{A4.2.9}$$

которое в основном тексте приведено как (4.6.34).

Задачи

4.1 Взаимная интенсивность для всех пар точек поверхности, пересекающей пучок стационарного квазимонохроматического света, имеет вид $J(P_1,P_2)=f(P_1)g(P_2)$, где $f(P)$ и $g(P)$ — некоторые известные функции положения точки на поверхности. Покажите, что:

(а) $g(P)=\alpha f^*(P)$, где α — действительная постоянная, а звездочка означает комплексное сопряжение;

(б) свет в той части пространства, в которой он распространяется, является полностью пространственно когерентным в рамках теории когерентности второго порядка.

4.2 Взаимная спектральная плотность планарного, вторичного источника в точках с радиус-векторами $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$ имеет факторизованный вид

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \omega) = F\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2}{2}, \omega\right) G(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2, \omega).$$

Покажите, что для того, чтобы $F(\boldsymbol{\rho},\omega)$ представляла собой спектральную плотность, а $G(\boldsymbol{\rho},\omega)$ - спектральную степень когерентности света источника, спектральная плотность должна удовлетворять определенному функциональному уравнению. Покажите далее, что функциональному уравнению удовлетворяет любое распределение спектральной плотности, чья зависимость от пространственных координат имеет вид

$$S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \omega) \equiv S^{(0)}(x, y, \omega) = S^{(0)}(0, 0, \omega)\, \mathrm{e}^{(\beta_1 x + \beta_2 y)},$$

где β_1 и β_2 — константы.

4.3 Функция взаимной когерентности стационарного оптического поля в свободном пространстве имеет вид $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)G(\tau)$. Покажите, что функция $F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ должна удовлетворять двум уравнениям Гельмгольца и определите наиболее общий вид $G(\tau)$.

4.4 Рассмотрите статистически стационарное поле в свободном пространстве. Покажите, что комплексная $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ и спектральная $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ степени когерентности поля связаны соотношением

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int_0^\infty \sqrt{s(\mathbf{r}_1, \nu)}\sqrt{s(\mathbf{r}_2, \nu)}\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)\, \mathrm{e}^{-2\pi i \nu \tau}\, d\nu,$$

где $s(\mathbf{r}, \nu) = S(\mathbf{r}, \nu)\left[\int_0^\infty S(\mathbf{r}, \nu)\, d\nu\right]^{-1}$ — нормированная спектральная плотность в точке $\mathbf{r}$.

Предположим далее, что нормированные спектральные плотности в двух точках $\mathbf{r}_1'$ и $\mathbf{r}_2'$ равны друг другу и что $\mu(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \nu) = \eta(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2')\, \mathrm{e}^{2\pi i \nu \tau(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2')}$, где $\eta(\mathbf{r}_2', \mathbf{r}_1') = \eta^*(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2')$ и $\tau(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2')$ — действительная функция, удовлетворяющая соотношению $\tau(\mathbf{r}_2', \mathbf{r}_1') = -\tau(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2')$. Покажите, что при этих условиях для $\gamma(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \tau)$ справедлива редукционная формула для взаимно спектрально чистых пучков

$$\gamma(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \tau) = \gamma(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \tau_{12})\gamma(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_1', \tau - \tau_{12}),$$

где τ_{12} зависит от $\mathbf{r}_1'$ и $\mathbf{r}_2'$.

4.5 Пусть $r\mathbf{s}$ ($\mathbf{s}^2 = 1$) — радиус-вектор (относительно начала координат, расположенного в области источника) точки в дальней зоне поля, излучаемого планарным, вторичным, статистически стационарным источником, занимающим конечную область σ в плоскости $z = 0$. Покажите, что «продольная» спектральная степень когерентности $\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}, r_2\mathbf{s}, \nu)$ является унимодулярной в дальней зоне поля, т.е. что поле в любых двух точках дальней зоны, лежащих на одной прямой, проходящей через начало координат, полностью пространственно когерентно на любой частоте ν.

Используя первое выражение из задачи 4.4, покажите, что, в общем случае, комплексная степень когерентности $\gamma^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}, r_2\mathbf{s}, \tau)$ не является унимодулярной, но $\gamma^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}, r_2\mathbf{s}, \tau) = 1$ при определенном значении τ_0 параметра τ. Определите значение τ_0 и дайте физическую интерпретацию полученного результата.

4.6 Рассмотрите интегральное уравнение

$$\int_{-1}^{1} K(x, x')\phi(x')\, dx' = \lambda\phi(x)$$

с неэрмитовым ядром $K(x, x') = (1 + i\sqrt{3}x)(1 + i\sqrt{3}x')$.

(а) Покажите, что данное интегральное уравнение не имеет решения при $\lambda \neq 0$.

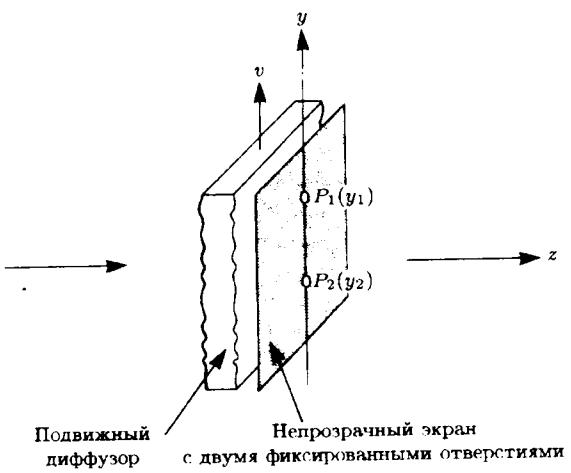
(б) Покажите, что если в одном из сомножителей в правой части выражения для $K(x,x')$ осуществить замену i на $-i$ (при этом ядро становится эрмитовым), уравнение будет иметь решение с собственным значением $\lambda = 4$.

4.7 Монохроматическая плоская волна с частотой ω, распространяющаяся в положительном направлении оси z, падает на диффузор, движущийся с постоянной скоростью v в положительном направлении оси y (см. рисунок). Непосредственно за диффузором находится непрозрачный экран с небольшими отверстиями в точках $P_1(y_1)$ и $P_2(y_2)$. $t(y)$ — функция пропускания диффузора, который полагается статистически однородным и непоглощающим.

(а) Определите комплексную степень когерентности $\gamma_{12}(\tau)$ света в точках P_1 и P_2.

(б) Определите спектральную степень когерентности $\mu_{12}(\omega)$ света в точках P_1 и P_2.

(в) Оцените время когерентности света, идущего от одного из отверстий, для случая, когда корреляционная функция диффузора имеет вид $\exp(-a^2y^2)$, где a — положительная константа.



4.8 В теории атмосферной турбулентности часто встречаются действительные поля $f(\mathbf{r})$ (например, функция показателя преломления), представляющие собой случайные функции радиус-вектора $\mathbf{r}$. Их корреляционная функция определяется как $R(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \langle f(\mathbf{r}_1)f(\mathbf{r}_2)\rangle$, где угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю. Если $R(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ зависит только от разности радиус-векторов $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, например, если $R(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \equiv R(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, то говорят, что случайное поле $f(\mathbf{r})$ статистически *однородно*.

(а) Спектр $S(\mathbf{k})$ однородного случайного поля $f(\mathbf{r})$ можно представить в виде обратного фурье-преобразования его корреляционной функции, т.е.

$$S(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int R(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,d^3r.$$

Полагая, что $f(\mathbf{r})$ также является статистически *изотропным*, т.е. что $R(\mathbf{r})$ зависит только от модуля $r = |\mathbf{r}|$, покажите, что $S(\mathbf{k})$ является функцией только модуля $k = |\mathbf{k}|$ и что

$$S(k) = \frac{1}{2\pi^2 k}\int_0^\infty rR(r)\sin kr\,dr \quad \text{и} \quad R(r) = \frac{4\pi}{r}\int_0^\infty kS(k)\sin kr\,dk.$$

(б) Для таких полей удобно ввести соответствующую спектральную функцию $V(k)$ в виде одномерного обратного фурье-преобразования от $R(r)$, т.е.

$$V(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty R(r)\,\mathrm{e}^{-ikr}\,dr,$$

где функция R, для отрицательных значений ее аргументов, формально определяется соотношением $R(-r) = R(r)$. Выразите $S(k)$ через $V(k)$.

Глава 5

ИЗЛУЧЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ ЛЮБОЙ СТЕПЕНИ КОГЕРЕНТНОСТИ

5.1. Введение

В этой главе мы применим разработанную в предыдущей главе теорию корреляций скалярных волновых полей для изучения излучения от первичных и вторичных скалярных источников любой степени когерентности[1]. В общем случае спектральная плотность и когерентные свойства источника характеризуют природу поля. Мы рассмотрим подробно следующие темы: частично когерентные оптические лучи, роль когерентности в радиометрической модели переноса энергии и влияние когерентных свойств источников на спектры испускаемого излучения.

При рассмотрении этих задач удобно и математически проще использовать вместо пространственно-временного пространственно-частотное описание, т.е. характеризовать корреляционные свойства источников и полей через функцию взаимной спектральной плотности, а не через функцию взаимной когерентности. Конечно, соответствующие результаты в пространственно-временных и пространственно-частотных областях связаны через основные соотношения фурье-преобразования (4.3.30).

5.2. Излучение трехмерных первичных источников

5.2.1. Основные формулы

Рассмотрим излучение от флуктуирующего первичного источника, занимающего конечную область D. Предположим, что флуктуации можно описать с помощью ансамбля, который является стационарным, по крайней мере в широком смысле. Согласно (4.4.68) функция взаимной спектральной плотности $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ поля, которое источник создает в двух точках $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$, выражается через функцию взаимной спектральной плотности $W_Q(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \nu)$ распределения источника с помощью формулы

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \int_D \int_D W_Q(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \nu) \frac{e^{ik(R_2 - R_1)}}{R_1 R_2} \, d^3 r_1' \, d^3 r_2', \tag{5.2.1}$$

где $\mathbf{r}_1'$ и $\mathbf{r}_2'$ — радиус-векторы двух точечных источников S_1 и S_2,

$$R_j = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_j'|, \quad (j = 1, 2), \tag{5.2.2}$$

и $k = 2\pi\nu/c$ (c — скорость света в вакууме) — волновое число, связанное с частотой ν.

Часто интересуются поведением поля в дальней зоне источника. В этом случае формула (5.2.1), как мы сейчас покажем, заметно упрощается. Поместим начало O радиус-векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_1'$, $\mathbf{r}_2'$ в некоторую фиксированную точку в области источника и положим (см. рис. 5.1)

$$\mathbf{r}_1 = r_1 \mathbf{s}_1, \quad \mathbf{r}_2 = r_2 \mathbf{s}_2, \tag{5.2.3}$$

[1] см. также книгу (*Клаудер, Сударшан, 1970) — *ред. пер.*

где $r_1 = |\mathbf{r}_1|$, $r_2 = |\mathbf{r}_2|$ и $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ — единичные векторы, задающие направления из начала координат O в две точки поля. Если эти точки находятся на достаточно большом расстоянии, то в экспоненте подынтегрального выражения (5.2.1) можно использовать приближение

$$R_1 \equiv |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1'| \approx r_1 - \mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{s}_1, \quad R_2 \equiv |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2'| \approx r_2 - \mathbf{r}_2' \cdot \mathbf{s}_2, \tag{5.2.4}$$

в то время, как в знаменателе мы можем использовать приближение $R_1 \approx r_1$, $R_2 \approx r_2$. Тогда мы получим следующее выражение для функции взаимной корреляции:

$$W^{(\infty)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \frac{e^{ik(r_2 - r_1)}}{r_1 r_2} \int_D\int_D W_Q(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \nu)\, e^{-ik(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_2' - \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}_1')}\, d^3\mathbf{r}_1'\, d^3\mathbf{r}_2'. \tag{5.2.5}$$

В левой части (5.2.5) вместо W мы записали $W^{(\infty)}$, чтобы подчеркнуть, что формула применима к дальнему полю.

Правая часть (5.2.5) представляет собой произведение двух множителей. Первый зависит только от расстояний r_1 и r_2 между началом координат O и точками P_1 и P_2 в дальней зоне. Второй множитель зависит только от направлений, определяемых единичными векторами $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$, которые задают направления из начала координат O в точки P_1 и P_2. Полезно сконцентрировать свое внимание на этой прямой зависимости, для чего перепишем уравнение (5.2.2) в виде

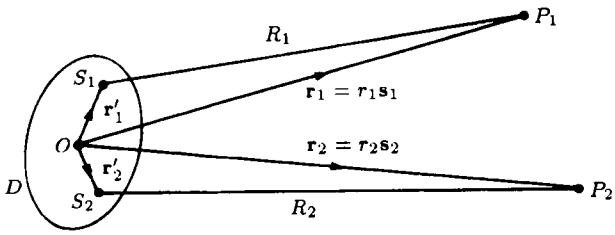


Рис. 5.1. Обозначения к формуле (5.2.5) для взаимной спектральной плотности дальнего поля, создаваемого трехмерным первичным источником

$$W^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2, \nu) = L(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \nu)\frac{e^{ik(r_2 - r_1)}}{r_1 r_2}, \tag{5.2.6}$$

где

$$L(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \nu) = \int_D\int_D W_Q(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \nu)\, e^{-ik(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_2' - \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}_1')}\, d^3\mathbf{r}_1'\, d^3\mathbf{r}_2'. \tag{5.2.7}$$

Функция $L(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \nu)$ известна как ***взаимная интенсивность излучения***. Позже будет показано [см. (5.6.52)], что взаимная интенсивность излучения также представляет собой меру корреляций между модами плоских волн частоты ν поля, распространяющихся в направлениях, заданных единичными векторами $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$.

С помощью некоторых приближений мы получили уравнение (5.2.6); кроме того, можно показать, например, с помощью принципа стационарной фазы, что это уравнение представляет собой точную асимптотическую формулу для $W(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2, \nu)$ когда $kr_1 \to \infty$ и $kr_2 \to \infty$ при фиксированных $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$. Этот факт можно проверить, используя уравнения (4.7.38), (3.3.95) и (3.2.27).

Известно, что формулы вида (5.2.6) применимы также и к другим ситуациям. Например, можно показать, что взаимная спектральная плотность в дальней зоне поля, рассеянного локализованным источником, имеет эту форму. Конечно, взаимная интенсивность излучения не будет больше определяться уравнением (5.2.7).

Поскольку взаимная спектральная плотность $W_Q(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \nu)$ источника имеет нулевое значение, когда либо $\mathbf{r}_1'$, либо $\mathbf{r}_2'$, или оба вектора являются точками вне области источника D, то в этом случае формально мы можно распространить интегрирование в (5.2.7) на все пространство. Тогда мы получим для взаимной интенсивности излучения выражение

$$L(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \nu) = (2\pi)^6 \widetilde{W}_Q(-k\mathbf{s}_1, k\mathbf{s}_2, \nu), \tag{5.2.8}$$

где

$$\widetilde{W}_Q(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^6}\iint W_Q(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \nu)\, e^{-i(\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{r}_1' + \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{r}_2')}\, d^3\mathbf{r}_1'\, d^3\mathbf{r}_2' \tag{5.2.9}$$

— шестимерный пространственный фурье-образ взаимной спектральной плотности источника.

Уравнение (5.2.6) вместе с выражением (5.2.8) для взаимной интенсивности излучения источника представляет собой основную формулу для излучения от флуктуирующих «стационарных» (точнее, стационарных в широком смысле) трехмерных источников. Из (5.2.8) мы видим, что не все пространственные

фурье-компоненты W_Q дают вклад в дальнее поле. Дают вклад только те компоненты, которые обозначены парами трехмерных векторов

$$\mathbf{K}_1 = -k\mathbf{s}_1, \quad \mathbf{K}_2 = -k\mathbf{s}_2. \tag{5.2.10}$$

Так как $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ — единичные векторы, для абсолютных величин пространственно-частотных векторов, которые входят в выражение (5.2.8), мы имеем

$$|\mathbf{K}_1| = |\mathbf{K}_2| = k = 2\pi\nu/c, \tag{5.2.11}$$

т.е. их модули равны волновому числу k, связанному с частотой ν, для свободного пространства.

В особом случае, когда точки P_1 и P_2 в дальней зоне совпадают, мы получим сразу из (5.2.6) формулу

$$S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \nu) = J(\mathbf{s}, \nu)/r^2. \tag{5.2.12}$$

Здесь

$$S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \nu) \equiv W^{(\infty)}(r\mathbf{s}, r\mathbf{s}, \nu), \tag{5.2.13}$$

т.е. «диагональные элементы» $W^{(\infty)}(\mathbf{r}_1\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_2\mathbf{s}_2, \nu)$, представляют собой спектральную плотность поля в точке P, определяемую радиус-вектором $r\mathbf{s}$ и

$$J(\mathbf{s}, \nu) \equiv L(\mathbf{s}, \mathbf{s}, \nu). \tag{5.2.14}$$

Функция $J(\mathbf{s}, \nu)$ известна как *интенсивность излучения* поля.

Здесь мы ввели интенсивность излучения из соображений, основанных на поведении поля в дальней зоне. Позже, в связи с излучением от плоского источника [см. (5.7.35)], мы узнаем, что интенсивность излучения также представляет собой скорость, с которой источник излучает энергию на данной частоте ν в единицу телесного угла в направлении, заданном единичным вектором $\mathbf{s}$.

Из (5.2.14) и (5.2.8) следует, что интенсивность излучения можно вычислить, зная взаимную спектральную плотность источника, с помощью формулы

$$J(\mathbf{s}, \nu) = (2\pi)^6 \widetilde{W}_Q(-k\mathbf{s}, k\mathbf{s}, \nu). \tag{5.2.15}$$

Использование этого выражения для определения интенсивности излучения приводит к необходимости вычисления шестимерного преобразования Фурье. Однако, вследствие того, что два пространственно-частотных аргумента в правой части (5.2.15) отличаются друг от друга только знаком, эту формулу можно представить, как мы сейчас покажем, в более простом виде.

Из (5.2.9) следует, что

$$\widetilde{W}_Q(-k\mathbf{s}, k\mathbf{s}, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^6} \iint W_Q(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \nu)\, \mathrm{e}^{-ik\mathbf{s}\cdot(\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1')}\, d^3\mathbf{r}_1'\, d^3\mathbf{r}_2'. \tag{5.2.16}$$

Преобразуем переменные интегрирования $\mathbf{r}_1'$ и $\mathbf{r}_2'$ к $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$ по формулам

$$\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1' = \mathbf{r}', \quad \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2') = \mathbf{r}, \tag{5.2.17а}$$

отсюда находим, что

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{r}', \quad \mathbf{r}_2' = \mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{r}'. \tag{5.2.17б}$$

Можно легко показать, что якобиан преобразования (5.2.17б) равен единице и, следовательно, мы получим из (5.2.16) следующее выражение для $\widetilde{W}_Q(-k\mathbf{s}, k\mathbf{s}, \nu)$:

$$\widetilde{W}_Q(-k\mathbf{s}, k\mathbf{s}, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^6} \iint W_Q(\mathbf{r} - \tfrac{1}{2}\mathbf{r}', \mathbf{r} + \tfrac{1}{2}\mathbf{r}', \nu)\, \mathrm{e}^{-ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'}\, d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{r}', \tag{5.2.18}$$

где интегрирование формально распространено на все возможные значения переменных интегрирования.

Для дальнейших целей полезно ввести

$$\int W_Q(\mathbf{r}-\tfrac{1}{2}\mathbf{r}',\mathbf{r}+\tfrac{1}{2}\mathbf{r}',\nu)\,d^3r = C_Q(\mathbf{r}',\nu). \tag{5.2.19}$$

Мы будем называть функцию $C_Q(\mathbf{r}',\nu)$ ***полной взаимной спектральной плотностью.***

Из (5.2.18) и (5.2.19) следует, что

$$\widetilde{W}_Q(-k\mathbf{s},k\mathbf{s},\nu) = \frac{1}{(2\pi)^3}\widetilde{C}_Q(k\mathbf{s},\nu), \tag{5.2.20}$$

где

$$\widetilde{C}_Q(\mathbf{f},\nu) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int C_Q(\mathbf{r}',\nu)\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{f}\cdot\mathbf{r}'}\,d^3r' \tag{5.2.21}$$

– трехмерный пространственный фурье-образ полной взаимной спектральной плотности источника. Наконец, при подстановке (5.2.20) в (5.2.15) мы получим следующее альтернативное выражение для интенсивности излучения:

$$J(\mathbf{s},\nu) = (2\pi)^3\widetilde{C}_Q(k\mathbf{s},\nu). \tag{5.2.22}$$

Рассмотрим теперь спектральную степень когерентности [см. (4.3.47б)] дальнего поля, а именно

$$\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1,r_2\mathbf{s}_2,\nu) = \frac{W^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1,r_2\mathbf{s}_2,\nu)}{[S^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1,\nu)]^{1/2}[S^{(\infty)}(r_2\mathbf{s}_2,\nu)]^{1/2}}. \tag{5.2.23}$$

Используя уравнения (5.2.6), (5.2.13) и (5.2.12), можно выразить правую часть (5.2.23) через взаимную интенсивность излучения и интенсивность излучения. Тогда получим следующее выражение для $\mu^{(\infty)}$:

$$\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1,r_2\mathbf{s}_2,\nu) = \frac{L(\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2,\nu)}{[J(\mathbf{s}_1,\nu)]^{1/2}[J(\mathbf{s}_2,\nu)]^{1/2}}\,\mathrm{e}^{ik(r_2-r_1)}. \tag{5.2.24}$$

Если подставить сюда уравнения (5.2.8) и (5.2.15) для взаимной интенсивности излучения и интенсивности излучения, то мы получим следующее выражение для спектральной степени когерентности дальнего поля через фурье-образ взаимной спектральной плотности источника:

$$\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1,r_2\mathbf{s}_2,\nu) = \frac{\widetilde{W}_Q(-k\mathbf{s}_1,k\mathbf{s}_2,\nu)}{[\widetilde{W}_Q(-k\mathbf{s}_1,k\mathbf{s}_1,\nu)]^{1/2}[\widetilde{W}_Q(-k\mathbf{s}_2,k\mathbf{s}_2,\nu)]^{1/2}}\,\mathrm{e}^{ik(r_2-r_1)}. \tag{5.2.25}$$

Если две точки в дальней зоне удалены на одинаковое расстояние от начала координат (т.е. когда $r_2 = r_1$), то часто говорят о ***поперечной когерентности.*** Для такой пары точек спектральная степень когерентности дальнего поля определяется уравнением (5.2.25), в котором экспоненциальный множитель заменен на единицу. Ясно, что спектральная степень когерентности не зависит от общего расстояния ($r_2 = r_1$) от начала координат.

В том случае, когда две точки в дальней зоне расположены в одном и том же направлении ($\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1$), говорят о ***продольной когерентности.*** Для такой пары точек спектральная степень когерентности дальнего поля согласно (5.2.25) равна

$$\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s},r_2\mathbf{s},\nu) = \mathrm{e}^{ik(r_2-r_1)}. \tag{5.2.26}$$

Модуль этого выражения равен единице для всех значений r_1 и r_2, связанных с точками в дальней зоне. Следовательно, поле в любых двух точках в дальней зоне, которые лежат вдоль одного и того же направления, если смотреть от источника, является полностью когерентным для каждой частоты ν, независимо от расстояния $r_2 - r_1$ между двумя точками.

5.2.2. Излучение от некоторых модельных источников

Проиллюстрируем полученные нами общие результаты на примере ряда модельных источников, которые достаточно часто встречаются в природе или используются в лабораториях.

Пусть $W_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ будет снова взаимной спектральной плотностью источника, который занимает конечную область D, и статистическое поведение которого характеризуется стационарным, по крайней мере в широком смысле, ансамблем. Тогда

$$S_Q(\mathbf{r}, \nu) \equiv W_Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu) \tag{5.2.27}$$

представляет собой спектральную плотность распределения источника и

$$\mu_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \frac{W_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)}{[S_Q(\mathbf{r}_1, \nu)]^{1/2}[S_Q(\mathbf{r}_2, \nu)]^{1/2}} \tag{5.2.28}$$

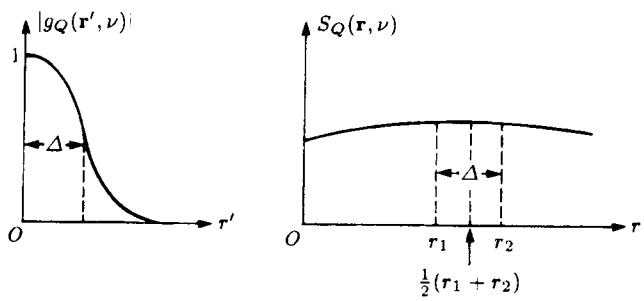
— его спектральная степень когерентности.

Мы будем предполагать, что $\mu_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ зависит от $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ только через разность $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, т.е. задается в виде

$$\mu_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) \equiv g_Q(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \nu) \tag{5.2.29}$$

для каждой эффективной частоты ν в спектре источника. Источники такого типа известны как (первичные) ***источники модели Шелла***, потому что такие источники (на самом деле их аналог для двумерных вторичных источников), по всей видимости впервые были рассмотрены Шеллом (Schell, 1961, 1967). Из уравнений (5.2.29) и (5.2.28) следует, что взаимная спектральная плотность источника модели Шелла задается в виде

$$W_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = [S_Q(\mathbf{r}_1, \nu)]^{1/2}[S_Q(\mathbf{r}_2, \nu)]^{1/2} g_Q(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \nu). \tag{5.2.30}$$



Быстрая функция Медленная функция

Рис. 5.2. Иллюстрация к понятию квазиоднородного источника. Модуль $|g_Q(\mathbf{r}', \nu)|$ спектральной степени когерентности распределения источника изменяется намного быстрее при изменении $\mathbf{r}'$, чем его спектральная плотность $S_Q(\mathbf{r}, \nu)$ при изменении $\mathbf{r}$. Для цели иллюстрации, выбранный источник является одномерным

Мы рассмотрим частный класс источников модели Шелла, а именно такие источники, для которых спектральная плотность $S_Q(\mathbf{r}, \nu)$ как функция от $\mathbf{r}$ изменяется при изменении положения столь медленно, что она является приближенно постоянной на расстояниях в пределах источника, которые порядка корреляционной длины Δ (эффективной ширины $|g_Q(\mathbf{r}', \nu)|$, см. рис. 5.2). В таких случаях обычно говорят, что $S_Q(\mathbf{r}, \nu)$ суть ***медленная*** функция $\mathbf{r}$ и что $g_Q(\mathbf{r}', \nu)$ — ***быстрая*** функция $\mathbf{r}'$. Кроме того, мы также предполагаем, что линейные размеры источника велики по сравнению с длиной волны $\lambda = c/\nu$ и с корреляционной длиной Δ. Источники модели Шелла этого рода известны как ***квазиоднородные источники*** и, как мы позже убедимся, они создают поля, которые относительно просты при математическом анализе и богаты многочисленными свойствами, используемыми для моделирования разных ситуаций, представляющих практический интерес. Когда Δ достаточно мала, порядка или меньше чем длина волны λ, можно сказать, что такой источник является «локально» пространственно некогерентным на частоте ν. Когда Δ порядка многих длин волн, то можно сказать, что источник является пространственно когерентным в локальном смысле. Такое разграничение иногда бывает полезным, поскольку, как мы увидим позже, поля, создаваемые квазиоднородными источниками, принадлежащие к этим двум категориям, имеют разную структуру. Конечно, квазиоднородные источники всегда пространственно некогерентны в «глобальном» смысле, потому что их линейные размеры велики по сравнению с корреляционной длиной Δ.

Так как предполагается, что для квазиоднородных источников спектральная плотность $S_Q(\mathbf{r}, \nu)$ меняется медленно при изменении положения в пределах эффективной ширины Δ, в правой части (5.2.30) можно использовать приближение

$$S_Q(\mathbf{r}_1, \nu) \approx S_Q(\mathbf{r}_2, \nu) \approx S_Q[\tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \nu]. \tag{5.2.31}$$

С использованием этого приближения в (5.2.30), взаимную спектральную плотность $W_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ квазиоднородного источника с хорошей степенью точности можно выразить в виде

$$W_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)=S_Q[\tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2),\nu]g_Q(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\nu). \tag{5.2.32}$$

Шестимерное преобразование Фурье взаимной спектральной плотности источника, которое входит в выражения (5.2.8) и (5.2.15) для взаимной интенсивности излучения и интенсивности излучения, сводится в этом случае к произведению двух трехмерных преобразований Фурье. Чтобы увидеть это, подставим (5.2.32) в (5.2.9) и перейдем от переменных интегрирования $\mathbf{r}_1'$ и $\mathbf{r}_2'$ к $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, используя преобразование (5.2.17б). Тогда мы сразу найдем, что

$$\widetilde{W}_Q(\mathbf{K}_1,\mathbf{K}_2,\nu)=\widetilde{S}_Q(\mathbf{K}_1+\mathbf{K}_2,\nu)\tilde{g}_Q[\tfrac{1}{2}(\mathbf{K}_2-\mathbf{K}_1),\nu], \tag{5.2.33}$$

где $\widetilde{S}_Q(\mathbf{K},\nu)$ и $\tilde{g}_Q(\mathbf{K}',\nu)$ — трехмерные пространственные фурье-образы $S_Q(\mathbf{r},\nu)$ и $g_Q(\mathbf{r}',\nu)$ соответственно, а именно

$$\widetilde{S}_Q(\mathbf{K},\nu)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int S_Q(\mathbf{r},\nu)\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\,d^3r, \tag{5.2.34}$$

$$\tilde{g}_Q(\mathbf{K}',\nu)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int g_Q(\mathbf{r}',\nu)\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{K}'\cdot\mathbf{r}'}\,d^3r'. \tag{5.2.35}$$

Таким образом, мы видим, что когда взаимная спектральная плотность $W_Q(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ факторизуется в виде (5.2.32), что характерно для квазиоднородного источника, то его шестимерный пространственный фурье-образ $\widetilde{W}_Q(\mathbf{K}_1,\mathbf{K}_2,\nu)$ также факторизуется в виде (5.2.33). Более того, поскольку для квазиоднородного источника $S_Q(\mathbf{r},\nu)$ — медленная функция $\mathbf{r}$, а $g_Q(\mathbf{r}',\nu)$ — быстрая функция $\mathbf{r}'$, из соотношения взаимности, включающего эффективные ширины прямого и обратного фурье-образов [см. (4.3.76)], следует, что первый множитель $\widetilde{S}_Q(\mathbf{K},\nu)$ в правой части (5.2.33) представляет собой быструю функцию $\mathbf{K}$, а второй множитель $\tilde{g}_Q(\mathbf{K}',\nu)$ суть медленная функция $\mathbf{K}'$. Эти свойства пригодятся нам в дальнейшем.

При подстановке (5.2.33) в (5.2.8) и (5.2.15) мы получим следующие выражения для взаимной интенсивности излучения и интенсивности излучения поля, излучаемого трехмерным первичным квазиоднородным источником:

$$L(\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2,\nu)=(2\pi)^6\widetilde{S}_Q[k(\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1),\nu]\tilde{g}_Q[\tfrac{1}{2}k(\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2),\nu], \tag{5.2.36}$$

$$J(\mathbf{s},\nu)=(2\pi)^6\widetilde{S}_Q(0,\nu)\tilde{g}_Q(k\mathbf{s},\nu), \tag{5.2.37}$$

где $k=2\pi\nu/c$. Далее, подставляя (5.2.36) и (5.2.37) в формулу (5.2.24), мы находим, что спектральная степень когерентности дальнего поля, создаваемого источником, определяется выражением

$$\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1,r_2\mathbf{s}_2,\nu)=G_Q(k\mathbf{s}_1,k\mathbf{s}_2,\nu)\frac{\widetilde{S}_Q[k(\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1),\nu]}{\widetilde{S}_Q(0,\nu)}\,\mathrm{e}^{ik(r_2-r_1)}, \tag{5.2.38}$$

где

$$G_Q(k\mathbf{s}_1,k\mathbf{s}_2,\nu)=\frac{\tilde{g}_Q[\frac{1}{2}k(\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2),\nu]}{[\tilde{g}_Q(k\mathbf{s}_1,\nu)]^{1/2}[\tilde{g}_Q(k\mathbf{s}_2,\nu)]^{1/2}}. \tag{5.2.39}$$

Как мы только что показали, $\widetilde{S}_Q(\mathbf{K},\nu)$ — быстрая функция $\mathbf{K}$, тогда как $\tilde{g}_Q(\mathbf{K}',\nu)$ — медленная функция $\mathbf{K}'$. Поэтому ясно, что в аргументах $k(\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1)$, для которых множитель $\widetilde{S}_Q[k(\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1),\nu]/\widetilde{S}_Q(0,\nu)$ в (5.2.38) существенно отличен от нуля, в правой части уравнения (5.2.39) $\mathbf{s}_2$ можно заменить на $\mathbf{s}_1$. Следовательно, в уравнении (5.2.38) мы можем положить

$$G_Q(k\mathbf{s}_1,k\mathbf{s}_2,\nu)\approx G_Q(k\mathbf{s}_1,k\mathbf{s}_1,\nu)=1. \tag{5.2.40}$$

Используя это приближение в (5.2.38), получим следующее выражение для спектральной степени когерентности для дальнего поля, создаваемого трехмерным первичным квазиоднородным источником:

$$\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1,r_2\mathbf{s}_2,\nu)\approx\frac{\widetilde{S}_Q[k(\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1),\nu]}{\widetilde{S}_Q(0,\nu)}\,\mathrm{e}^{ik(r_2-r_1)}. \tag{5.2.41}$$

Формулы (5.2.37) и (5.2.41) являются доказательством следующих двух интересных *соотношений взаимности*, которые относятся к излучению, создаваемому источниками этого типа:

(а) угловое распределение интенсивности излучения $J(\mathbf{s},\nu)$ пропорционально трехмерному пространственному фурье-образу спектральной степени когерентности источника [см. (5.2.37)].

(б) спектральная степень когерентности для дальнего поля, с точностью до простого геометрического фазового множителя, равна нормированному трехмерному пространственному фурье-образу спектральной плотности источника [см. (5.2.41)].

Таким образом, мы видим, что влияния пространственных распределений спектральной плотности источника и его спектральной степени когерентности на дальнее поле существенно отличаются. Результат, который следует из вышеприведенной теоремы (б) [см. (5.2.41)], можно рассматривать как аналог теоремы Ван Циттерта — Цернике [см. (4.4.40)] в дальней зоне для трехмерных первичных квазиоднородных источников.

Мы проиллюстрируем эти результаты на следующем простом примере. Рассмотрим трехмерный первичный изотропный квазиоднородный источник, для которого пространственные распределения спектральной плотности и спектральной степени когерентности являются гауссовскими:

$$S_Q(\mathbf{r},\nu) = [A(\nu)]^2\,\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma_S^2(\nu)}, \quad g_Q(\mathbf{r}',\nu) = \mathrm{e}^{-r'^2/2\sigma_g^2(\nu)}, \tag{5.2.42}$$

где $A(\nu)$, $\sigma_S(\nu)$ и $\sigma_g(\nu)$ — положительные величины, $r = |\mathbf{r}|$ и $r' = |\mathbf{r}'|$. Предположение о том, что источник является квазиоднородным на частоте ν, означает, что

$$\sigma_S(\nu) \gg \sigma_g(\nu). \tag{5.2.43}$$

Легко найти, что трехмерные пространственные фурье-образы выражений (5.2.42) (если опустить частотную зависимость $A(\nu)$, $\sigma(\nu)$ и $\delta_g(\nu)$) имеют вид

$$\tilde{S}_Q(\mathbf{K},\nu) = A^2\left(\frac{\sigma_S}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \mathrm{e}^{-(K\sigma_S)^2/2}, \quad \tilde{g}_Q(\mathbf{K}',\nu) = \left(\frac{\sigma_g}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \mathrm{e}^{-(K'\sigma_g)^2/2}. \tag{5.2.44}$$

Подставляя (5.2.44) в (5.2.37), получим следующее выражение для интенсивности излучения источника

$$J(\mathbf{s},\nu) = (2\pi\sigma_S\sigma_g)^3 A^2\,\mathrm{e}^{-(k\sigma_g)^2/2}. \tag{5.2.45}$$

Теперь видно, что интенсивность излучения не зависит от направления (задаваемого единичным вектором $\mathbf{s}$), так как, по предположению, источник является изотропным; также видно, что интенсивность излучения пропорциональна эффективному объему $(4\pi/3)\sigma_S^3$ источника. Заметим, что когда эффективная корреляционная длина σ_g источника меньше длины волны $\lambda = 2\pi/k$, связанной с частотой ν, т.е. когда источник является некогерентным в локальном смысле, формула (5.2.45) для интенсивности излучения сводится к

$$J(\mathbf{s},\nu) \approx (2\pi\sigma_S\sigma_g)^3 A^2. \tag{5.2.46}$$

Таким образом, интенсивность излучения пропорциональна не только эффективному объему источника, но и эффективному объему когерентности, $(4\pi/3)\sigma_g^3$.

Зависимость интенсивности излучения от эффективной корреляционной длины σ_g источника (5.2.45) показана на рис. 5.3.

Теперь рассмотрим когерентные свойства дальнего поля, создаваемого этим источником.

Подставляя $\tilde{S}_Q(\mathbf{K},\nu)$ из (5.2.44) в (5.2.41), получим спектральную степень когерентности:

$$\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2, \nu) = \mathrm{e}^{-(k\sigma_S)^2|\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1|^2/2}\,\mathrm{e}^{ik(r_2-r_1)}. \tag{5.2.47}$$

Поскольку $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ — единичные векторы, имеем (см. рис. 5.4)

$$|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1|^2 = [2\sin(\theta/2)]^2, \tag{5.2.48}$$

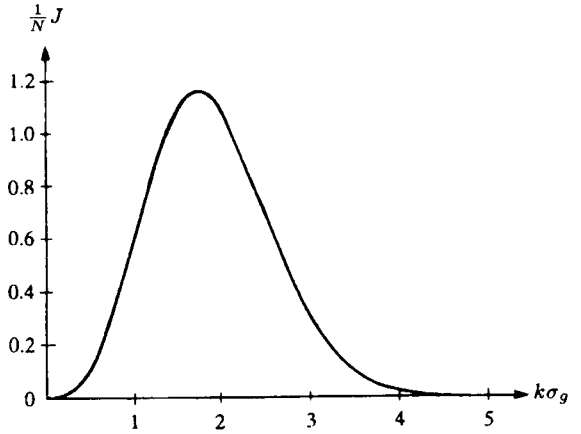


Рис. 5.3.

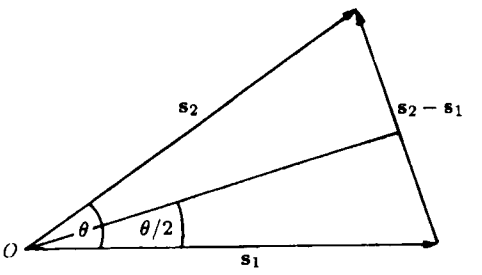


Рис. 5.4.

Рис.5.3. Нормированная интенсивность излучения, рассчитанная по формуле (5.2.45) $J(\mathbf{s},\nu)/N = (k\sigma_g)^3 \exp[-\frac{1}{2}(k\sigma_g)^2]$, где $N = (2\pi/k)^3 A^2 \sigma_S^3$, как функция нормированной эффективной корреляционной длины $k\sigma_g$ эффективной нормированной корреляции, созданного трехмерным гауссовским квазиоднородным источником, описываемым формулой (5.2.42). Заметим, что нормировочная постоянная N пропорциональна эффективному объему источника $(4\pi/3)\sigma_S^3$ (Carter and Wolf, 1981b)

Рис.5.4. Иллюстрация к формуле (5.2.48)

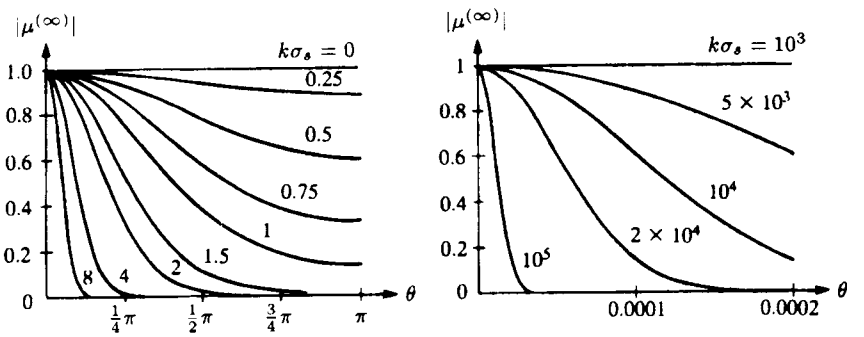


Рис. 5.5. Поведение модуля спектральной степени когерентности $\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2, \nu)$ (5.2.49) для дальнего поля, создаваемого трехмерным гауссовским квазиоднородным источником, описываемым формулами (5.2.42) и (5.2.43), как функции угла θ между $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$. (Carter and Wolf, 1981b)

где θ — угол между $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$. При подстановке (5.2.48) в (5.2.47) получим следующее выражение для $\mu^{(\infty)}$:

$$\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2, \nu) = \mathrm{e}^{-2(k\sigma_S)^2 \sin^2(\theta/2)}\, \mathrm{e}^{ik(r_2 - r_1)}. \tag{5.2.49}$$

Из этой формулы следует, что угловое расстояние θ, для которого пространственная когерентность на заданной частоте ν в дальней зоне является существенной, должно удовлетворять по порядку величины соотношению

$$\sin^2(\theta/2) \lesssim \frac{1}{2(k\sigma_S)^2}. \tag{5.2.50}$$

Рассмотрим два предельных случая. Если эффективный линейный размер источника σ_S много меньше длины волны [подчиняющейся (весьма идеализированному) предположению (5.2.43)], то $k\sigma_S \ll 1$ и неравенство (5.2.50) справедливо для всевозможных углов между единичными векторами $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$, т.е. для $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Тогда дальнее поле будет пространственно полностью когерентным на частоте ν. С другой стороны, если эффективный линейный размер источника σ_S много больше длины волны, то $k\sigma_S \gg 1$ и

значение $\sin^2(\theta/2)$, удовлетворяющее неравенству (5.2.50), можно аппроксимировать $(\theta/2)^2$. Следовательно, при этих условиях, пространственная когерентность на заданной частоте ν в дальней зоне источника распространяется на углы, для которых

$$\theta \lesssim \frac{\sqrt{2}}{k\sigma_S}. \tag{5.2.51}$$

Поведение абсолютного значения спектральной степени когерентности дальнего поля как функции угла θ (5.2.49), показана на рис. 5.5 для некоторых значений нормированного эффективного линейного размера источника $k\sigma_S$.

В этом разделе мы продемонстрировали общие результаты, полученные в разд. 5.2.1 для квазиоднородных источников. Излучение от других типов источников, относящихся к полностью когерентным и полностью некогерентным источникам, так же, как и к гауссовским источникам модели Шелла, обсуждаются в двух работах Картера и Вольфа (Carter and Wolf, 1981a, b).

5.3. Излучение плоских вторичных источников

Большинство источников, используемых в лабораторных условиях, являются вторичными плоскими источниками. Источник такого типа обычно представляет собой апертуру на непрозрачном плоском экране, который освещается либо напрямую, либо через оптическую систему первичным источником. В этом разделе мы изучим поля излучений, создаваемых такими источниками[1].

Мы будем использовать первичный источник, который расположен на одной стороне, скажем $z < 0$, от плоскости апертуры и который излучает в полупространство $z > 0$ в другую сторону от апертуры.

5.3.1. Общие формулы

В рамках корреляционной теории вторичный плоский источник можно характеризовать взаимной спектральной плотностью $W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu)$ флуктуирующего поля $V(\boldsymbol{\rho}, t)$ в плоскости источника $z = 0$. Предположим, что флуктуации $V(\boldsymbol{\rho}, t)$ можно представить стационарным, по крайней мере в широком смысле, ансамблем.

Из (4.4.18) следует, что взаимная спектральная плотность $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ поля в точках $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$, удаленных на расстояния от вторичного источника σ, больших по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi/k = c/\nu$, дается выражением

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_\sigma\int_\sigma W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu) \times \frac{e^{ik(R_2 - R_1)}}{R_1 R_2} \cos\theta_1' \cos\theta_2' \, d^2\rho_1 \, d^2\rho_2. \tag{5.3.1}$$

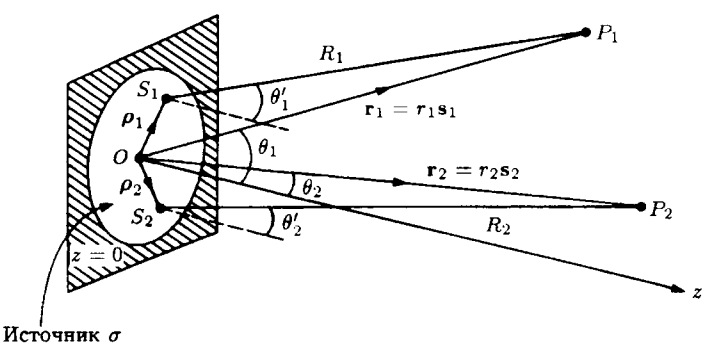


Рис. 5.6. Иллюстрация к вычислению взаимной спектральной плотности дальнего поля, создаваемого плоским источником. S_1 и S_2 — две точки источника, P_1 и P_2 — две точки в дальней зоне

Здесь

$$R_1 = |\mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\rho}_1|, \quad R_2 = |\mathbf{r}_2 - \boldsymbol{\rho}_2| \tag{5.3.2}$$

— расстояния от точек источника $S_1(\boldsymbol{\rho}_1)$ и $S_2(\boldsymbol{\rho}_2)$ до точек поля $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$ соответственно, θ_1' и θ_2' — углы между отрезками S_1P_1 и S_2P_2 и положительным направлением оси z (рис. 5.6).

Предположим, что точки поля расположены в дальней зоне источника. Если обозначить через $\mathbf{s}_{1\perp}$ и $\mathbf{s}_{2\perp}$ проекции, рассматриваемые как двумерные векторы, единичных векторов $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$, соответственно, на плоскость источника $z = 0$, то можно сделать приближение

$$R_1 \approx r_1 - \boldsymbol{\rho}_1 \cdot \mathbf{s}_{1\perp}, \quad R_2 \approx r_2 - \boldsymbol{\rho}_2 \cdot \mathbf{s}_{2\perp} \tag{5.3.3}$$

[1] Излучение *первичных* плоских источников для любого состояния когерентности было рассмотрено Вольфом и Картером (Wolf and Carter, 1978)

($R_1 = |\mathbf{R}_1|$ и т.д.) в показателе экспоненты под знаком интеграла. В знаменателе подынтегрального выражения (5.3.1) можно использовать приближение $R_1 \approx r_1$, $R_2 \approx r_2$. Заменим также углы θ_1' и θ_2' на θ_1 и θ_2, которые образуют отрезки OP_1 и OP_2 с нормалью к плоскости источника. Тогда формула (5.3.1) принимает вид (если ввести обозначение $W^{(\infty)}$ величины W в дальней зоне)

$$W^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2, \nu) = L(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \nu)\frac{e^{ik(r_2-r_1)}}{r_1 r_2}, \tag{5.3.4}$$

где

$$L(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \nu) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \int_\sigma\int_\sigma W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu) \exp\left[-ik(\mathbf{s}_{2\perp}\cdot\boldsymbol{\rho}_2 - \mathbf{s}_{1\perp}\cdot\boldsymbol{\rho}_1)\right] d^2\rho_1\, d^2\rho_2. \tag{5.3.5}$$

Поскольку вторичный источник занимает конечную область σ на плоскости $z = 0$, то $W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu)$ будет иметь нулевые значения, когда $\boldsymbol{\rho}_1$ или $\boldsymbol{\rho}_2$ представляют собой точки на плоскости источника, находящиеся вне его области. Следовательно, интегралы в правой части (5.3.5) можно распространить на всю плоскость $z = 0$ и тогда формулу (5.3.5) можно будет переписать в более компактном виде

$$L(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \nu) = (2\pi k)^2 \widetilde{W}^{(0)}(-k\mathbf{s}_{1\perp}, k\mathbf{s}_{2\perp}, \nu) \cos\theta_1 \cos\theta_2, \tag{5.3.6}$$

где

$$\widetilde{W}^{(0)}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iint W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu)\, e^{-i(\mathbf{f}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_1 + \mathbf{f}_2\cdot\boldsymbol{\rho}_2)}\, d^2\rho_1\, d^2\rho_2 \tag{5.3.7}$$

— четырехмерный пространственный фурье-образ $W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu)$. Так как $\mathbf{s}_{1\perp}$ и $\mathbf{s}_{2\perp}$ — проекции единичных векторов, то $|\mathbf{s}_{1\perp}| \leqslant 1$, $|\mathbf{s}_{2\perp}| \leqslant 1$. Следовательно, из (5.3.6) вытекает, что только те фурье-компоненты, обозначенные пространственно-частотными векторами $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, для которых $|\mathbf{f}_1| \leqslant k$ и $|\mathbf{f}_2| \leqslant k$, дают вклад в корреляционные свойства дальнего поля.

Из выражения (5.3.6) следует, что интенсивность излучения $J(\mathbf{s}, \nu) = L(\mathbf{s}, \mathbf{s}, \nu)$ определяется формулой

$$J(\mathbf{s}, \nu) = (2\pi k)^2 \widetilde{W}^{(0)}(-k\mathbf{s}_\perp, k\mathbf{s}_\perp, \nu) \cos^2\theta, \tag{5.3.8}$$

где θ — угол, который образует вектор $\overrightarrow{OP} = r\mathbf{s}$ с нормалью к плоскости источника (рис. 5.7).

Как и в случае излучения от трехмерных первичных источников, иногда удобно выразить интенсивность излучения в другом виде, а именно, через *полную взаимную спектральную плотность*

$$\widetilde{C}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu) = \int W^{(0)}(\boldsymbol{\rho} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', \nu)\, d^2\rho. \tag{5.3.9}$$

Из формул (5.3.7), (5.3.8) и (5.3.9) следует, что

$$J(\mathbf{s}, \nu) = k^2 \widetilde{C}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp, \nu) \cos^2\theta, \tag{5.3.10}$$

где $\widetilde{C}^{(0)}(\mathbf{f}, \nu)$ — двумерный пространственный фурье-образ $C^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu)$, а именно,

$$\widetilde{C}^{(0)}(\mathbf{f}, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int C^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu)\, e^{-i\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\rho}'}\, d^2\rho'. \tag{5.3.11}$$

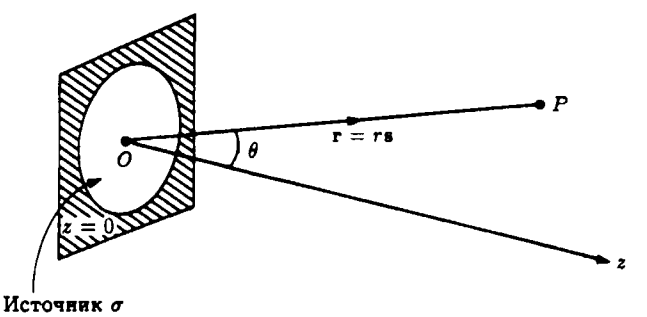


Рис. 5.7. Иллюстрация обозначений в формуле (5.3.8) для интенсивности излучения плоского источника. Через $\mathbf{s}_\perp$ обозначена проекция (не показана), рассматриваемая как двумерный вектор, трехмерного единичного вектора $\mathbf{s}$ на плоскость источника $z = 0$

Спектральная степень когерентности дальнего поля определяется выражением [см. (5.2.24)]

$$\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2, \nu) = \frac{L(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \nu)}{[J(\mathbf{s}_1, \nu)]^{1/2}[J(\mathbf{s}_2, \nu)]^{1/2}}\, e^{ik(r_2-r_1)}. \tag{5.3.12}$$

При подстановке (5.3.6) и (5.3.8) в (5.3.12) получим следующую формулу для $\mu^{(\infty)}$

$$\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2, \nu) = \frac{\widetilde{W}^{(0)}(-k\mathbf{s}_{1\perp}, k\mathbf{s}_{2\perp}, \nu)}{[\widetilde{W}^{(0)}(-k\mathbf{s}_{1\perp}, k\mathbf{s}_{1\perp}, \nu)]^{1/2}[\widetilde{W}^{(0)}(-k\mathbf{s}_{2\perp}, k\mathbf{s}_{2\perp}, \nu)]^{1/2}} e^{ik(r_2 - r_1)}. \tag{5.3.13}$$

Что касается поперечной и продольной когерентности дальнего поля, то из (5.3.13) следуют те же самые выводы, которые были получены в связи с соответствующей формулой (5.2.25), которая относится к излучению трехмерных первичных источников.

5.3.2. Излучение плоских, вторичных, квазиоднородных источников

Среди множества полей, к которым применимы только что полученные общие формулы, на практике особенный интерес вызывают поля, которые создаются определенными типами источников. Они являются вторичными, плоскими источниками, которые обсуждались в разд. 5.2.2. Наиболее популярными среди них являются *источники модели Шелла*, обладающие свойством, согласно которому спектральная степень когерентности $\mu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu)$ в плоскости источника зависит от $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$ только через разность $\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1$, т.е. в виде

$$\mu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu) = g(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1, \nu). \tag{5.3.14}$$

Вспоминая определение (4.3.47б) спектральной степени когерентности, мы имеем для функции взаимной спектральной плотности вторичного плоского источника модели Шелла следующее выражение:

$$W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu) = [S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \nu)]^{1/2}[S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_2, \nu)]^{1/2} g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2, \nu), \tag{5.3.15}$$

где $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu)$ — спектральная плотность света в точке на плоскости источника.

Часто спектральная степень когерентности $g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu)$ света в плоскости источника изменяется намного быстрее при изменении $\boldsymbol{\rho}'$ по сравнению со спектральной плотностью $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu)$ для каждой частотной компоненты ν. Более того, линейные размеры источника обычно велики по сравнению с длиной волны $\lambda = c/\nu$ и со спектральной корреляционной длиной света [эффективная пространственная ширина $g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu)$] в плоскости источника. Тогда говорят, что источник является ***квазиоднородным*** плоским вторичным источником. Так же как и для трехмерных, первичных, квазиоднородных источников, которые мы изучили в разд. 5.2.2, плоские, вторичные, квазиоднородные источники также являются некогерентными в «глобальном» смысле, поскольку их линейные размеры велики по сравнению с их эффективными спектральными корреляционными длинами. Снова полезно отметить отличие между «локально когерентными» и «локально некогерентными» квазиоднородными источниками. В первом случае спектральная корреляционная длина света в плоскости источника больше длины волны $\lambda = c/\nu$, тогда как в последнем случае она порядка или меньше длин волн. Как мы увидим в разд. 5.6.3, локально когерентные, коррелированные по Гауссу, квазиоднородные источники, в отличие от локально некогерентных источников, могут генерировать лучи.

Поскольку спектральная плотность квазиоднородного источника является «медленной функцией» $\boldsymbol{\rho}$, а его спектральная степень когерентности является «быстрой функцией» разности $\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1$, выражение для взаимной спектральной плотности можно аппроксимировать выражением

$$W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu) = S^{(0)}[\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2), \nu] g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1, \nu). \tag{5.3.16}$$

Четырехмерный пространственный фурье-образ (5.3.7) выражения (5.3.16) определяется формулой

$$\widetilde{W}^{(0)}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \nu) = \widetilde{S}^{(0)}[\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2, \nu] \tilde{g}^{(0)}[\tfrac{1}{2}(\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1), \nu], \tag{5.3.17}$$

где $\widetilde{S}^{(0)}(\mathbf{f}, \nu)$ и $\tilde{g}^{(0)}(\mathbf{f}', \nu)$ — двумерные фурье-образы $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu)$ и $g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu)$, соответственно, определяемые по формулам

$$\widetilde{S}^{(0)}(\mathbf{f}, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu) e^{-i\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\rho}} d^2\rho, \tag{5.3.18}$$

$$\tilde{g}^{(0)}(\mathbf{f}', \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu) e^{-i\mathbf{f}'\cdot\boldsymbol{\rho}'} d^2\rho'. \tag{5.3.19}$$

При подстановке (5.3.17) в уравнения (5.3.6) и (5.3.8) мы получим следующие выражения для взаимной интенсивности излучения и интенсивности излучения поля, создаваемого квазиоднородным, вторичным, плоским источником:

$$L(\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2,\nu)=(2\pi k)^2\widetilde{S}^{(0)}[k(\mathbf{s}_{2\perp}-\mathbf{s}_{1\perp}),\nu]\tilde{g}^{(0)}[\tfrac{1}{2}k(\mathbf{s}_{1\perp}+\mathbf{s}_{2\perp}),\nu]\cos\theta_1\cos\theta_2, \tag{5.3.20}$$

$$J(\mathbf{s},\nu)=(2\pi k)^2\widetilde{S}^{(0)}(0,\nu)\tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp,\nu)\cos^2\theta. \tag{5.3.21}$$

Легко получить также при подстановке (5.3.17) в (5.3.13) выражение для спектральной степени когерентности $\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1,r_2\mathbf{s}_2,\nu)$ дальнего поля. Тогда, если применить то же самое приближение, которое использовалось при получении (5.2.41) из (5.2.38), то найдем

$$\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1,r_2\mathbf{s}_2,\nu)=\frac{\widetilde{S}^{(0)}[k(\mathbf{s}_{2\perp}-\mathbf{s}_{1\perp}),\nu]}{\widetilde{S}^{(0)}(0,\nu)}\,\mathrm{e}^{ik(r_2-r_1)}. \tag{5.3.22}$$

Заметим, что уравнения (5.2.21) и (5.3.22) очень похожи на соответствующие формулы (5.2.37) и (5.2.41) для излучения трехмерных, первичных, квазиоднородных источников.

Формулы (5.3.21) и (5.3.22), по Картеру и Вольфу, доказывают два следующих соотношения взаимности, (Carter and Wolf, 1977; см. также Goodman, 1965, Прил. A и Goodman, 1979, разд. 4C) для излучения плоских, вторичных, квазиоднородных источников:

(а) Угловое распределение интенсивности излучения $J(\mathbf{s},\nu)$ пропорционально произведению двумерного фурье-образа спектральной степени когерентности поля в плоскости источника и квадрата косинуса угла между нормалью к плоскости источника и направлением вектора $\mathbf{s}$ [см. (5.3.21)].

(б) Спектральная степень когерентности дальнего поля равна, с точностью до геометрического фазового множителя, нормированному двумерному фурье-образу спектральной плотности поля в плоскости источника [см. (5.3.22)].

Соотношение взаимности (а) означает, что квазиоднородный источник может генерировать интенсивность излучения, обладающего вращательной симметрией относительно нормали к плоскости источника, независимо от формы источника и пространственного распределения спектральной плотности в плоскости источника. В работе Ли и Вольфа (Li and Wolf, 1982) обсуждаются некоторые примеры этого факта.

Соотношение взаимности (б) представляет собой обобщение теоремы Ван Циттерта — Цернике для квазиоднородных источников в дальней зоне [см. (4.4.40)]. Однако, теорема Ван Циттерта — Цернике в ее традиционной постановке применяется к равновременной степени когерентности $j(r_1\mathbf{s}_1,r_2\mathbf{s}_2)$, тогда как формула (5.3.22) имеет отношение к спектральной степени когерентности $\mu(r_1\mathbf{s}_1,r_2\mathbf{s}_2,\nu)$. Когда свет является квазимонохроматическим, это отличие становится несущественным.

Мы проиллюстрируем соотношения взаимности, рассматривая излучение от плоского, вторичного, квазиоднородного источника радиуса $a\gg\lambda$, для которого и пространственное распределение спектральной плотности и спектральная степень когерентности являются гауссовскими[1], т.е.

$$S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu)=\begin{cases}A^2(\nu)\,\mathrm{e}^{-\rho^2/2\sigma_S^2(\nu)} & \text{при } \rho\leqslant a,\\ 0 & \text{при } \rho>a\end{cases} \tag{5.3.23}$$

и

$$g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)=\mathrm{e}^{-\rho'^2/2\sigma_g^2(\nu)}, \tag{5.3.24}$$

где A, σ_S и σ_g — положительные и действительные числа. Так как по предположению источник является квазиоднородным, то мы имеем

$$\sigma_S\gg\sigma_g. \tag{5.3.25}$$

Чтобы упростить вычисления, также предположим, что

$$\sigma_S\ll a. \tag{5.3.26}$$

[1]Интенсивность излучения и когерентные свойства модельных источников других видов в дальней зоне изучались в работах (Baltes, Steinle and Antes, 1976; Steinle and Baltes, 1977 и Baltes and Steinle, 1977). Также см. ниже разд. 5.4.2. Лидер (Leader, 1978) дал критерии области дальней зоны для излучения от плоских вторичных квазиоднородных источников.

Двумерные фурье-образы (5.3.18) и (5.3.19) гауссовских распределений (5.3.23) и (5.3.24) равны

$$\widetilde{S}^{(0)}(\mathbf{f},\nu) \approx \frac{A^2\sigma_S^2}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\sigma_S^2 f^2/2}, \tag{5.3.27}$$

$$\tilde{g}^{(0)}(\mathbf{f}',\nu) = \frac{\sigma_g^2}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\sigma_g^2 f'^2/2}. \tag{5.3.28}$$

При вычислении $\widetilde{S}^{(0)}$ было использовано предположение (5.3.26), которое позволяет выполнить замену усеченного гауссовского распределения (5.3.23) на полное гауссовское распределение при определении его фурье-образа.

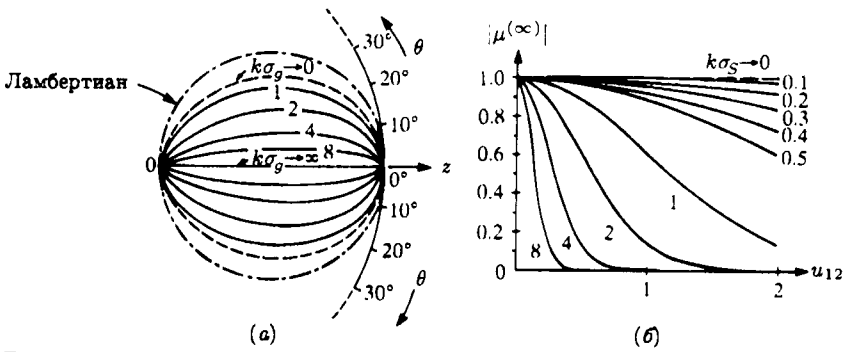


Рис. 5.8. График нормированной интенсивности излучения (5.3.29) в полярных координатах *а* и поведение абсолютного значения спектральной степени когерентности (5.3.33) для дальнего поля, создаваемого гауссовским, квазиоднородным, плоским, вторичным источником *б*. Переменная u_{12} определяется выражением (5.3.34) (Carter and Wolf, 1977)

При подстановке (5.3.27) и (5.3.28) в уравнение (5.3.21) и при использовании соотношения $\mathbf{s}_\perp^2 = \sin^2\theta$ мы получим следующее выражение для интенсивности излучения:

$$J(\mathbf{s},\nu) = J^{(0)}(\nu)\cos^2\theta \times \\ \times\, \mathrm{e}^{-[(k\sigma_g)^2\sin^2\theta]/2}, \tag{5.3.29}$$

где

$$J^{(0)}(\nu) = (kA\sigma_g\sigma_S)^2. \tag{5.3.30}$$

Рассмотрим два предельных случая. При $k\sigma_g \to 0$ источник становится пространственно некогерентным (корреляционная длина равна нулю) на частоте ν,

и из (5.3.29) в этом случае видно, что

$$\left(\frac{J(\mathbf{s},\nu)}{J^{(0)}(\nu)}\right)_{\text{неког.}} \to \cos^2\theta; \tag{5.3.31}$$

следовательно, интенсивность излучения падает с ростом угла θ как $\cos^2\theta$, т.е. быстрее, по сравнению с ламбертовским источником [см. ниже (5.3.45)]. В предельном случае, когда $k\sigma_g \to \infty$ [с учетом предположения (5.3.25) в этом пределе], источник становится локально когерентным и из формул (5.3.29) и (5.3.30) следует, что

$$\left(\frac{J(\mathbf{s},\nu)}{J^{(0)}(\nu)}\right)_{\text{ког.}} = \begin{cases} 0, & \text{когда } \theta \neq 0, \\ 1, & \text{когда } \theta = 0, \end{cases} \tag{5.3.32}$$

т.е. в этом пределе источник излучает только в направлении $\theta = 0$ нормали к плоскости источника.

Поведение нормированного распределения интенсивности излучения, вычисленной с помощью (5.3.29) для некоторых значений спектральной корреляционной ширины σ_g, показано на графике в полярных координатах (рис. 5.8*а*).

Далее рассмотрим спектральную степень когерентности $\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2, \nu)$ для дальнего поля. При подстановке (5.3.27) в (5.3.22) сразу находим

$$\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2, \nu) = \mathrm{e}^{-(k\sigma_s)^2 u_{12}^2/2}\,\mathrm{e}^{ik(r_2-r_1)}, \tag{5.3.33}$$

где

$$u_{12} = |\mathbf{s}_{2\perp} - \mathbf{s}_{1\perp}|. \tag{5.3.34}$$

Поведение спектральной степени когерентности $\mu^{(\infty)}$ (5.3.33) показано на рис. 5.8*б* для разных значений эффективного линейного размера источника σ_S. Нетрудно показать, что когда точки $P_1(r_1\mathbf{s}_1)$ и $P_2(r_2\mathbf{s}_2)$

достаточно близки к оси z в дальней зоне и расположены в одной и той же меридиальной плоскости (т.е. в плоскости, в которой находится ось z), переменная u_{12} представляет собой угловое расстояние двух точек в направлении наблюдения. Рис. 5.8*б* показывает, что с увеличением эффективного линейного размера источника σ_S угловое расстояние точек, в которых дальнее поле имеет отличную от нуля корреляцию, становится все меньше и меньше.

5.3.3. Обратная задача для плоских, вторичных, квазиоднородных источников

В предыдущем разделе (разд. 5.3.2) мы получили выражения для интенсивности излучения и спектральной степени когерентности для дальнего поля, создаваемого плоским, вторичным, квазиоднородным источником. Теперь мы рассмотрим обратную задачу, а именно задачу определения спектральной плотности и спектральной степени когерентности источника на основе измерений в дальнем поле. Из (5.3.21) мы имеем

$$\tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp, \nu) = \frac{J(\mathbf{s}, \nu)}{(2\pi k)^2 \widetilde{S}^{(0)}(0, \nu) \cos^2\theta}. \tag{5.3.35}$$

Эта формула определяет двумерную пространственную фурье-компоненту спектральной степени когерентности источника, обозначенную пространственно-частотным вектором $\mathbf{f} = k\mathbf{s}_\perp$, через интенсивность излучения поля в направлении, задаваемом единичным вектором $\mathbf{s} \equiv (s_x, s_y, s_z)$, где s_x, s_y — декартовы компоненты двумерного вектора $\mathbf{s}_\perp$, а $s_z = +\left(1 - \mathbf{s}_\perp^2\right)^{1/2} = \cos\theta$. Однако, поскольку $|\mathbf{s}_\perp| \leqslant 1$, только низкочастотные пространственные фурье-компоненты, т.е. компоненты, для которых $|\mathbf{f}| \leqslant k$, можно определить, зная интенсивность излучения. Высокочастотные фурье-компоненты, для которых $|\mathbf{f}| > k$, связаны с затухающими волнами (см. разд. 3.2.2). Во многих случаях, представляющих практический интерес, высокочастотными пространственными фурье-компонентами в хорошем приближении можно пренебречь. Тогда из (5.3.55), если использовать соотношение $\cos\theta = +\left(1 - \mathbf{s}_\perp^2\right)^{1/2}$, мы получим для $g^{(0)}$ следующее приближенное выражение:

$$g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu) \approx \frac{1}{(2\pi k)^2 \widetilde{S}^{(0)}(0, \nu)} \int_{\mathbf{s}_\perp^2 \leqslant 1} (1 - \mathbf{s}_\perp^2)^{-1} J(\mathbf{s}, \nu)\, \mathrm{e}^{ik\mathbf{s}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}'}\, d^2(k\mathbf{s}_\perp). \tag{5.3.36}$$

Поскольку спектральная степень когерентности $g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu)$ имеет единичное значение при $\boldsymbol{\rho}' = 0$, из (5.3.36) следует, что

$$\widetilde{S}^{(0)}(0, \nu) \approx \frac{1}{(2\pi k)^2} \int_{\mathbf{s}_\perp^2 \leqslant 1} (1 - \mathbf{s}_\perp^2)^{-1} J(\mathbf{s}, \nu)\, d^2(k\mathbf{s}_\perp). \tag{5.3.37}$$

Далее из (5.3.36) и (5.3.37) следует, что

$$g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbf{s}_\perp^2 \leqslant 1} (1 - \mathbf{s}_\perp^2)^{-1} J(\mathbf{s}, \nu)\, \mathrm{e}^{ik\mathbf{s}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}'}\, d^2 s_\perp}{\displaystyle\int_{\mathbf{s}_\perp^2 \leqslant 1} (1 - \mathbf{s}_\perp^2)^{-1} J(\mathbf{s}, \nu)\, d^2 s_\perp}. \tag{5.3.38}$$

Эта формула дает приближенное решение задачи при поиске спектральной степени когерентности плоского, вторичного, квазиоднородного источника путем измерения углового распределения интенсивности излучения, создаваемого источником.

Чтобы определить распределение спектральной плотности в плоскости источника на основе измерений в дальнем поле, удобно сначала переписать формулу (5.3.22) в виде

$$\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2, \nu) = g^{(\infty)}[k(\mathbf{s}_{2\perp} - \mathbf{s}_{1\perp}), \nu]\, \mathrm{e}^{ik(r_2 - r_1)}, \tag{5.3.39}$$

где

$$g^{(\infty)}[k(\mathbf{s}_{2\perp} - \mathbf{s}_{1\perp}), \nu] = \frac{\widetilde{S}^{(0)}[k(\mathbf{s}_{2\perp} - \mathbf{s}_{1\perp}), \nu]}{\widetilde{S}^{(0)}(0, \nu)}. \tag{5.3.40}$$

Заметим, что когда $r_1 = r_2$ (скажем, $= r$), т.е. когда две точки поля $P_1(r_1\mathbf{s}_1)$ и $P_2(r_2\mathbf{s}_2)$ в дальней зоне находятся на равных расстояниях от начала координат, $\mu^{(\infty)}$ и $g^{(\infty)}$ становятся равными, т.е.

$$\mu^{(\infty)}(r\mathbf{s}_1, r\mathbf{s}_2, \nu) = g^{(\infty)}[k(\mathbf{s}_{2\perp} - \mathbf{s}_{1\perp}), \nu]. \tag{5.3.41}$$

Формула (5.3.40) выражает одну из нормированных пространственных фурье-компонент, обозначенных пространственно-частотными векторами

$$\mathbf{f} = k(\mathbf{s}_{2\perp} - \mathbf{s}_{1\perp}) \tag{5.3.42}$$

распределения спектральной плотности $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu)$, через спектральную степень когерентности $g^{(\infty)}[k(\mathbf{s}_{2\perp} - \mathbf{s}_{1\perp}), \nu]$ для дальнего поля, в равноотстоящих точках от начала координат в направлениях $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$. Так как $|\mathbf{s}_{1\perp}| \leqslant 1$ и $|\mathbf{s}_{2\perp}| \leqslant 1$, мы видим, что на основе измерений спектральной степени когерентности в дальнем поле можно получить только те пространственно-частотные компоненты нормированного распределения спектральной плотности в плоскости источника, для которых $|\mathbf{f}| < 2k$. По той же самой причине, которая обсуждалась ранее в связи с определением спектральной степени когерентности источника на основе измерений интенсивности излучения, мы не будем учитывать пространственно-частотные компоненты, для которых $|\mathbf{f}| > 2k$. Тогда, выполняя обратное преобразование Фурье выражения (5.3.40), получим для спектральной плотности источника следующую формулу

$$S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu) \approx \widetilde{S}^{(0)}(0, \nu) \int_{|\mathbf{f}| \leqslant 2k} g^{(\infty)}(\mathbf{f}, \nu)\, \mathrm{e}^{i\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\rho}}\, d^2 f, \tag{5.3.43}$$

где $\mathbf{f}$ и единичные векторы $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ связаны соотношением (5.3.42), и $\widetilde{S}^{(0)}(0, \nu)$ определяется из (5.3.37). Из определения преобразования Фурье [см. (5.3.18)], сразу следует, что

$$\widetilde{S}^{(0)}(0, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_\sigma S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu)\, d^2\rho, \tag{5.3.44}$$

откуда видно, что $\widetilde{S}^{(0)}(0, \nu)$ пропорционально интегралу от спектральной плотности, взятому по всему источнику.

Формулы (5.3.38) и (5.3.43) дают возможность определить спектральную степень когерентности и нормированную спектральную плотность квазиоднородного, вторичного, плоского источника на основе измерений в дальнем поле.

Проиллюстрируем применение одной из обратных формул для определения спектральной степени когерентности квазиоднородного вторичного плоского ламбертовского источника. Угловое распределение интенсивности излучения от ламбертовского источника подчиняется *закону Ламберта*

$$J(\mathbf{s}, \nu) = J^{(0)}(\nu) \cos\theta, \tag{5.3.45}$$

где $J^{(0)}(\nu) > 0$. Подставляя (5.3.45) в (5.3.38) и вспоминая, что $\mathbf{s}_\perp^2 = s_x^2 + s_y^2$, находим

$$g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu) = \frac{\mathscr{G}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu)}{\mathscr{G}^{(0)}(0, \nu)}, \tag{5.3.46}$$

где

$$\mathscr{G}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu) = \iint_{s_x^2 + s_y^2 \leqslant 1} \frac{1}{[1 - s_x^2 - s_y^2]^{1/2}}\, \mathrm{e}^{ik(s_x x' + s_y y')}\, ds_x\, ds_y, \tag{5.3.47}$$

x', y' — декартовы координаты вектора $\boldsymbol{\rho}'$.

Для вычисления интеграла в правой части уравнения (5.3.47) положим, что

$$s_x = \tau\cos\chi, \quad s_y = \tau\sin\chi, \tag{5.3.48а}$$

$$x' = \rho'\cos\theta, \quad y' = \rho'\sin\theta. \tag{5.3.48б}$$

Тогда формула (5.3.47) принимает вид

$$\mathscr{G}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu) = \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^1 \frac{1}{[1 - \tau^2]^{1/2}}\, \mathrm{e}^{ik\tau\rho'\cos(\chi - \theta)}\, \tau\, d\tau. \tag{5.3.49}$$

Вспоминая хорошо известное интегральное представление функции Бесселя $J_0(x)$ первого рода и нулевого порядка [Watson, 1966, с. 20, уравнение (5)], можно сразу выполнить интегрирование по переменной χ, а именно

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik\tau\rho'\cos(\chi-\theta)}\,d\chi = J_0(k\tau\rho'). \tag{5.3.50}$$

С учетом этой формулы выражение (5.3.49) сводится к

$$\mathscr{G}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu) = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{[1-\tau^2]^{1/2}} J_0(k\tau\rho')\tau\,d\tau. \tag{5.3.51}$$

Этот интеграл можно вычислить в конечном виде (см., например, Градштейн и Рыжик, 1980, с. 682, формула 2, из 6.554) и тогда получаем следующее выражение для $\mathscr{G}^{(0)}$:

$$\mathscr{G}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu) = 2\pi\left(\frac{\sin k\rho'}{k\rho'}\right). \tag{5.3.52}$$

Из (5.3.46) и (5.3.52), с учетом $\mathscr{G}^{(0)}(0,\nu) = 2\pi$, следует, что

$$g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1,\nu) = \frac{\sin k\,|\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1|}{k\,|\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1|}. \tag{5.3.53}$$

Таким образом, мы заключаем, что *все квазиоднородные вторичные плоские ламбертовские источники имеют одну и ту же степень пространственной когерентности, определяемую уравнением (5.3.53)*[1], при условии, что вклады высокочастотных пространственных фурье-компонент ($|\mathbf{f}| > k$) не учитываются. Поведение функции $\sin k\rho'/k\rho'$ показано на рис. 5.9. Мы видим, что корреляции поля в плоскости ламбертовского источника распространяются на расстояние $\Delta\rho'$, такое что $k\Delta\rho' \lesssim \pi/2$, т.е. на расстояния $\Delta\rho' \lesssim \lambda/4$, где $\lambda = c/\nu$ — длина волны. Таким образом, ламбертовский источник является пространственно нестрого когерентным, несмотря на то, что его корреляционные ширины на оптических частотах очень малы, а именно порядка длины волны для каждой спектральной компоненты.

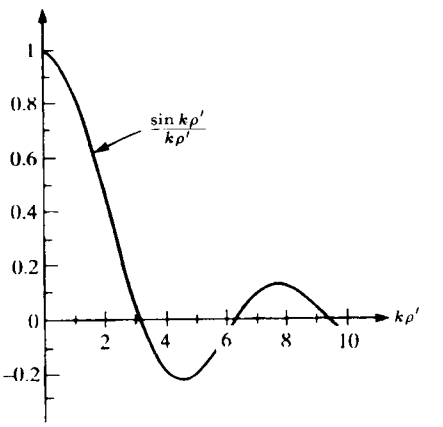


Рис. 5.9. Спектральная степень когерентности $g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu) = \sin(k\rho')/(k\rho')$, где $\boldsymbol{\rho}' = |\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1|$ для плоского вторичного квазиоднородного ламбертовского источника [см. (5.3.53)]

Встречаются обобщения ламбертовского распределения интенсивности излучения (5.3.45), когда изучают корреляционные свойства квазиоднородного источника, который генерирует произвольное распределение $J(\mathbf{s},\nu)$ с вращательной симметрией. Тогда мы можем представить $J(\mathbf{s},\nu)$ в виде ряда по степеням $\cos\theta$:

$$J(\mathbf{s},\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\nu)\cos^n\theta. \tag{5.3.54}$$

Вследствие линейности обратной формулы (5.3.38) взаимная спектральная плотность квазиоднородного источника, которая дает вклад в $J(\mathbf{s},\nu)$, представляет собой линейную комбинацию взаимных спектральных плотностей, создаваемых элементарными источниками (также предполагается, что все они являются квазиоднородными), каждый из которых создает интенсивность излучения вида [см. рис. 5.10*а*]

$$J^{(n)}(\mathbf{s},\nu) = a_n(\nu)\cos^n\theta. \tag{5.3.55}$$

Обратная задача, связанная с распределением интенсивности излучения (5.3.55), была рассмотрена в нескольких работах (Antes, Baltes and Steinle, 1976; Baltes, Steinle and Antes, 1976; Carter, 1984; см. также Baltes, 1977 разд. 3.3 и 3.4 и McGuire, 1979). Было обнаружено, что спектральная степень когерентности $g_n^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)$ квазиоднородного вторичного источника, который генерирует интенсивность излучения (5.3.55), определяется формулой

$$g_n^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu) = 2^{n/2}\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\frac{J_{n/2}(k\rho')}{(k\rho')^{n/2}}, \tag{5.3.56}$$

где $J_{n/2}$ — функция Бесселя первого рода и Γ — гамма-функция.Здесь предполагается также, что вы-

[1]Этот результат согласуется с хорошо известными корреляционными свойствами излучения абсолютно черных тел. По этому вопросу см. (Carter and Wolf, 1975, разд. II).

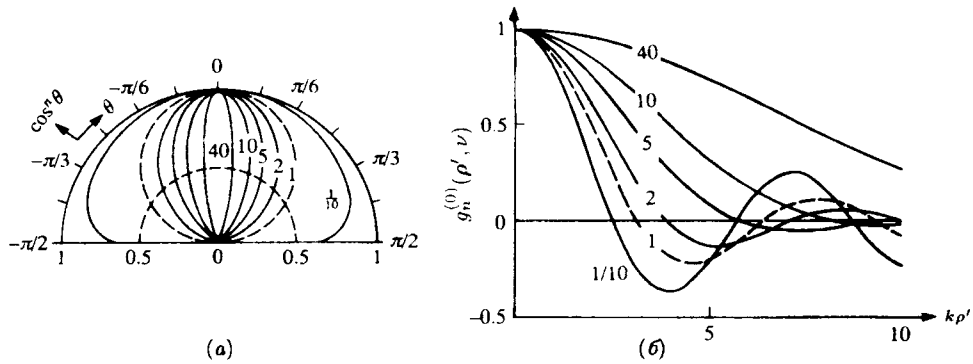


Рис. 5.10. График *а* в полярных координатах, иллюстрирует угловое распределение $J^{(n)}(\mathbf{s}, \nu)/a_n(\nu)$ [см. (5.3.55)] нормированной интенсивности излучения, создаваемой коррелированным по Бесселю, плоским вторичным квазиоднородным источником; *б* — поведение спектральной степени когерентности источника [см. (5.3.56)]. Числа на кривых представляют собой значения параметра n. Пунктирная кривая (для $n = 1$) соответствует ламбертовскому источнику (Baltes, Steinle and Antes, 1976)

сокочастотные пространственные фурье-компоненты ($|\mathbf{f}| > k$) являются пренебрежимо малыми. Формула (5.3.56) справедлива для всех значений $n \geqslant 0$, а не только для неотрицательных значений интеграла и, как легко можно проверить, сводится к формуле (5.3.33) при $n = 1$.

Иногда говорят, что источники, для которых спектральная степень когерентности определяется уравнением (5.3.56), являются *коррелированными по Бесселю*. На рис. 5.10*б* спектральная степень когерентности изображена как функция от $k\rho'$ для некоторых значений параметра n.

5.4. Теоремы эквивалентности для плоских источников, генерирующих одинаковую интенсивность излучения

Одним из весьма полезных свойств лазерных источников является их способность генерировать оптические лучи, т.е. создавать поля, которые являются сильно направленными. Интенсивность излучения $J(\mathbf{s}, \nu)$ таких полей концентрируется в достаточно узком телесном угле, а точнее, $J(\mathbf{s}, \nu)$, как функция $\mathbf{s}$, имеет в направлении $\mathbf{s}_0$ резкий пик. Вследствие того, что лазерный источник является сильно когерентным источником, можно было бы предположить, что только когерентные источники могут генерировать лучи. На самом деле это не так. Было обнаружено, что источники, обладающие другими свойствами когерентности, также могут создавать идентичные распределения интенсивности излучения. В частности, было показано, что квазиоднородные источники, которые, как мы узнали ранее, являются некогерентными, в глобальном смысле, могут создавать то же самое распределение интенсивности излучения, как и пространственно когерентный лазерный источник. Это открытие стало началом исследований, которые привели к формулировке ряда «теорем эквивалентности». Эти теоремы определяют условия, при которых источники, в разных состояниях когерентности и для разных пространственных распределений спектральной плотности, будут генерировать поля с одинаковой интенсивностью излучения. Свойства когерентности света, создаваемого двумя эквивалентными источниками будут, конечно, разными. Этот факт предлагает ряд возможных приложений. Например, лучи с низкой пространственной когерентностью не будут создавать нежелательных спекл-эффектов, которые обычно имеют место при использовании сильно когерентных лазерных лучей; это свойство является особенно полезным, например, в литографии, где требуется очень высокое разрешение.

В настоящем разделе мы сформулируем основные теоремы эквивалентности и продемонстрируем их на численных примерах и некоторых экспериментальных результатах.

5.4.1. Теорема эквивалентности для плоских источников

Согласно (5.3.8) интенсивность излучения, создаваемая плоским, вторичным источником, определяется формулой

$$J(\mathbf{s},\nu) = (2\pi k)^2 \widetilde{W}^{(0)}(-k\mathbf{s}_\perp, k\mathbf{s}_\perp, \nu)\cos^2\theta, \tag{5.4.1}$$

где $\widetilde{W}^{(0)}(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\nu)$ — четырехмерный пространственный фурье-образ (5.3.7) взаимной спектральной плотности $W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\nu)$ распределения поля $V^{(0)}(\boldsymbol{\rho},t)$ в плоскости источника, а именно,

$$\widetilde{W}^{(0)}(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\nu) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iint W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-i(\mathbf{f}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_1+\mathbf{f}_2\cdot\boldsymbol{\rho}_2)}\,d^2\rho_1\,d^2\rho_2, \tag{5.4.2}$$

где интегрирование формально выполняется по всей плоскости источника.

Согласно (5.4.1) интенсивность излучения полностью определяется определенными пространственными компонентами Фурье взаимной спектральной плотности $W^{(0)}$, а именно, теми компонентами, которые обозначены парой пространственно-частотных векторов $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, удовлетворяющих соотношению $\mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1$. Говорят, что соответствующие фурье-компоненты $W^{(0)}$ являются *антидиагональными* компонентами. Более того, как мы уже отмечали и как очевидно из (5.4.1), только низкие пространственно-частотные фурье-компоненты, т.е. компоненты, для которых $|\mathbf{f}_1| \leqslant k$, $|\mathbf{f}_2| \leqslant k$, появляются в выражении для интенсивности излучения. Следовательно, мы имеем следующую *теорему эквивалентности для интенсивности излучения* согласно Коллету и Вольфу (Collett and Wolf, 1978; см. также Collett and Wolf, 1979; Saleh, 1979; Saleh and Irshid, 1982): *Два плоских, вторичных источника, для которых функции взаимной спектральной плотности $W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\nu)$ имеют одинаковые низкочастотные антидиагональные пространственные фурье-компоненты, генерируют одинаковое распределение интенсивности излучения.*

Важно понимать, что даже несмотря на то, что антидиагональные низкочастотные элементы двух источников могут быть идентичными, другие низкочастотные элементы (для которых $\mathbf{f}_2 \neq -\mathbf{f}_1$) могут быть полностью различными. Следовательно, в общем случае два источника будут иметь различные свойства когерентности и различные пространственные распределения их спектральных плотностей. Это, в свою очередь, означает, что, как можно непосредственно видеть из уравнений (5.3.4) и (5.3.6), хотя два источника создают одинаковую интенсивность излучения, дальние поля, которые они создают, будут иметь различные свойства когерентности.

Нетрудно понять физические причины того, почему совершенно различные источники могут генерировать одинаковое распределение интенсивности излучения. Для этой цели выразим сначала взаимную спектральную плотность источника через его спектральную плотность и его спектральную степень когерентности [см. (4.3.47б)]:

$$W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\nu) = [S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\nu)]^{1/2}[S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_2,\nu)]^{1/2}\mu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\nu). \tag{5.4.3}$$

Подставляя (5.4.3) в (5.4.2) и полагая $\mathbf{f}_1 = -k\mathbf{s}_\perp$, $\mathbf{f}_2 = k\mathbf{s}_\perp$, мы получим следующее выражение для низкочастотных антидиагональных фурье-компонент взаимной спектральной плотности источника:

$$\widetilde{W}^{(0)}(-k\mathbf{s}_\perp, k\mathbf{s}_\perp,\nu) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iint [S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\nu)]^{1/2}[S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_2,\nu)]^{1/2}\mu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-ik\mathbf{s}_\perp\cdot(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1)}\,d^2\rho_1\,d^2\rho_2. \tag{5.4.4}$$

Мы видим, что в правой части уравнения (5.4.4) под знаком интеграла появляются как спектральная плотность, так и спектральная степень когерентности источника. Поэтому величина $\widetilde{W}^{(0)}(-k\mathbf{s}_\perp, k\mathbf{s}_\perp,\nu)$, а следовательно и интенсивность излучения (5.4.1), может быть одинаковой, даже когда два источника полностью различны. Иначе говоря, можно заменить $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu)$ и $\mu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\nu)$ другими функциями $'S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu)$ и $'\mu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\nu)$ соответственно, без изменения величины интеграла в (5.4.4). Следовательно, *можно сделать «обмен» между когерентностью и пространственным распределением спектральной плотности источника, не нарушая распределение интенсивности излучения источника.*

Другая формулировка теоремы эквивалентности может быть основана на формуле (5.3.10), а именно

$$J(\mathbf{s},\nu) = k^2\widetilde{C}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp,\nu)\cos^2\theta, \tag{5.4.5}$$

а не на формуле (5.4.1). Здесь $\widetilde{C}^{(0)}(\mathbf{f},\nu)$ — двумерный пространственный фурье-образ полной взаимной спектральной плотности

$$C^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)=\int W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}',\nu)\,d^2\rho. \tag{5.4.6}$$

Формула (5.4.5) сразу доказывает следующую альтернативную формулировку теоремы эквивалентности для интенсивности излучения: *два плоских источника, для которых полная взаимная спектральная плотность $C^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)$ имеет одинаковые низкочастотные ($|\mathbf{f}|\leqslant k$) фурье-компоненты, будут генерировать одинаковое распределение интенсивности излучения.*

Интересное следствие из только что рассмотренной теоремы эквивалентности состоит в возможности изготовления источников, которые являются некогерентными в глобальном смысле, но которые могут, тем не менее, генерировать сильно направленные поля. В частности, такие источники могут создавать такое же распределение интенсивности излучения, как и полностью когерентный лазерный источник. В следующих двух подразделах (5.4.2 и 5.4.3) будут приведены примеры таких эквивалентных источников.

5.4.2. Пример: эквивалентные гауссовские источники модели Шелла

Проиллюстрируем теорему эквивалентности, которую мы только что обсудили, для частного класса источников модели Шелла. Мы напомним, что эти источники характеризуются тем свойством, что спектральная степень когерентности $\mu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\nu)$ зависит от $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$ только через их разность $\boldsymbol{\rho}'=\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1$. Следовательно, взаимная спектральная плотность источника модели Шелла имеет вид (5.3.15), а именно,

$$W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\nu)=[S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\nu)]^{1/2}[S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_2,\nu)]^{1/2}g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1,\nu). \tag{5.4.7}$$

При подстановке (5.4.7) в (5.4.6) находим, что для источника модели Шелла

$$C^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)=g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)H^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu), \tag{5.4.8}$$

где

$$H^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)=\int[S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}',\nu)]^{1/2}[S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}',\nu)]^{1/2}\,d^2\rho. \tag{5.4.9}$$

Предположим теперь, что пространственные распределения спектральной плотности и спектральной степени когерентности являются гауссовскими, а именно

$$S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu)=A^2(\nu)\,\mathrm{e}^{-\rho^2/2\sigma_S^2(\nu)}, \tag{5.4.10}$$

$$g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)=\mathrm{e}^{-\rho'^2/2\sigma_g^2(\nu)}, \tag{5.4.11}$$

где A, σ_s и σ_g — положительные числа. Такой источник мы будем называть *гауссовским источником модели Шелла.*

Подставляя (5.4.10) в (5.4.9) и вычисляя результирующий интеграл, легко найдем, что

$$H^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)=2\pi A^2(\nu)\sigma_S^2(\nu)\,\mathrm{e}^{-\rho'^2/8\sigma_S^2(\nu)}; \tag{5.4.12}$$

и если подставить выражения (5.4.12) и (5.4.11) в (5.4.8), то найдем, что для гауссовского источника модели Шелла

$$C^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)=2\pi A^2(\nu)\sigma_S^2(\nu)\,\mathrm{e}^{-\rho'^2/2\delta^2(\nu)}, \tag{5.4.13}$$

где

$$\frac{1}{\delta^2(\nu)}=\frac{1}{4\sigma_S^2(\nu)}+\frac{1}{\sigma_g^2(\nu)}. \tag{5.4.14}$$

Легко найти, что фурье-образ (5.3.11) выражения (5.4.13) равен

$$\widetilde{C}^{(0)}(\mathbf{f},\nu)=(A\sigma_S\delta)^2\,\mathrm{e}^{-f^2\delta^2/2}. \tag{5.4.15}$$

В правой части этой формулы, а также в некоторых последующих формулах мы явно не показываем зависимость некоторых величин от частоты ν.

Из второй формы теоремы эквивалентности, сформулированной после уравнения (5.4.6) и из уравнений (5.4.15) и (5.4.14) следует, что *два гауссовских источника модели Шелла, для которых величины*

$$\frac{1}{4\sigma_S^2} + \frac{1}{\sigma_g^2} \tag{а}$$

имеют одно и то же значение и произведения

$$A\sigma_S \tag{б}$$

также одинаковы, создают одно и то же распределение для интенсивности излучения[1].

Интенсивность излучения $J(\mathbf{s}, \nu)$, создаваемая таким вращательно симметричным источником, в направлении, составляющем угол θ с нормалью к плоскости источника, получается сразу при замене $\widetilde{C}^{(0)}$ в уравнении (5.4.5) выражением (5.4.15) и при использовании соотношения $\mathbf{s}_\perp^2 = \sin^2\theta$. Тогда находим, что

$$J(\mathbf{s}, \nu) = J^{(0)}(\nu)\cos^2\theta \times \\ \times \, \mathrm{e}^{-[(k\delta)^2 \sin^2\theta]/2}, \tag{5.4.16}$$

где

$$J^{(0)}(\nu) = (kA\sigma_s\delta)^2 \tag{5.4.17}$$

— интенсивность излучения в направлении нормали к плоскости источника ($\theta = 0$).

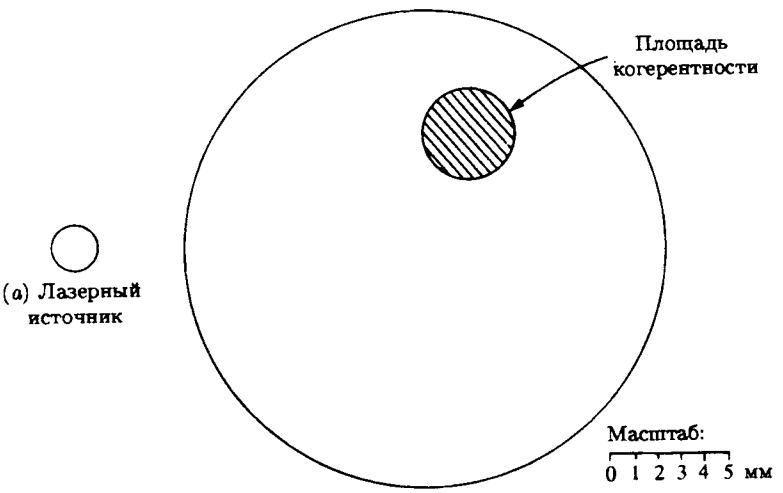


Рис. 5.11. Иллюстрация эффективных размеров лазерного источника *а* и «эквивалентного» квазиоднородного источника *б*. На рис. *б* показана область когерентности квазиоднородного источника (заштрихована) (Wolf, 1978)

Выражение (5.4.16) вместе с (5.4.17) явно показывает, что гауссовские источники модели Шелла, имеющие одинаковые значения параметров δ и произведений $A\sigma_S$, действительно будут создавать одно и то же распределение интенсивности излучения. Зависимость параметра δ, определяемого уравнением (5.4.14), от σ_S и σ_g демонстрирует «обмен» между состоянием когерентности источника (характеризуемого σ_g) и соответствующим образом нормированным пространственным распределением спектральной плотности (характеризуемой σ_S), которая лежит в основе теоремы эквивалентности. Этот факт иллюстрируется на рис. 5.11 и 5.12.

Рассмотрим два предельных случая. В квазиоднородном пределе, характеризуемом условием

$$\sigma_S \gg \sigma_g, \tag{5.4.18}$$

гауссовский источник модели Шелла становится некогерентным в глобальном смысле, и из (5.4.14) мы видим, что в этом случае

$$\delta \approx \sigma_g. \tag{5.4.19}$$

[1] Теорема эквивалентности для гауссовских источников модели Шелла, создающих поля с одинаковым распределением *спектральной степени когерентности* в дальней зоне, была сформулирована Кандпалом и Вольфом (Kandpal and Wolf, 1994).

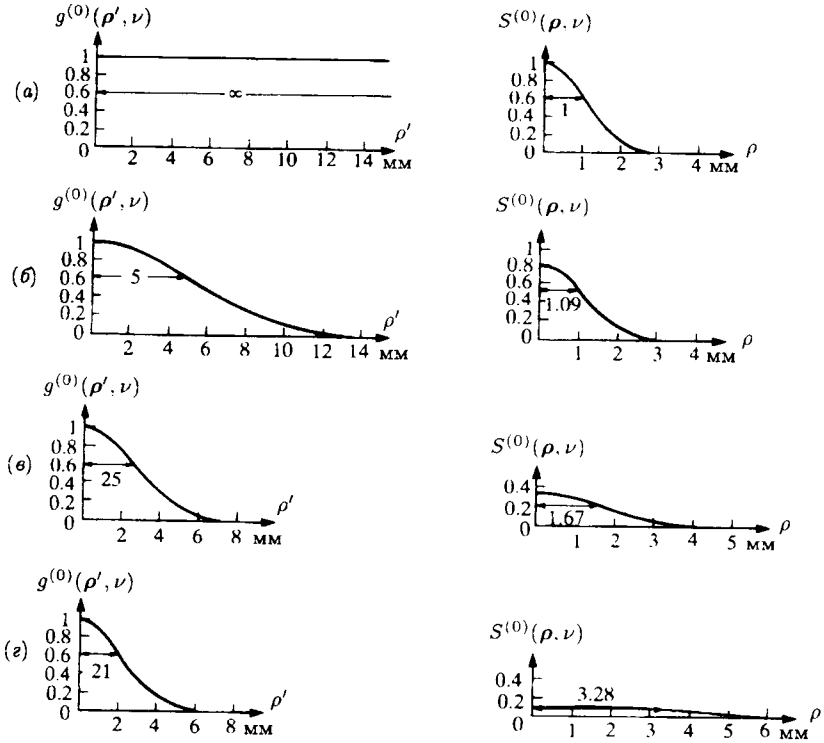


Рис. 5.12. Спектральная степень когерентности $g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)$ и распределение спектральной плотности $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu)$ для четырех плоских, вторичных, гауссовских источников модели Шелла, которые создают идентичные распределения интенсивности излучения. Кривые на рис. *а* относятся к полностью (пространственно) когерентному источнику (например, одномодовый лазер), а кривые на рис. *г* — к некогерентному источнику. Параметры, характеризующие четыре источника, равны: $а-\sigma_g=\infty$, $\sigma_S=1$ мм, $A=1$ (в произвольных единицах); $б-\sigma_g=5$ мм, $\sigma_S=1.09$ мм, $A=0.84$; $в-\sigma_g=2.5$ мм, $\sigma_S=1.67$ мм, $A=0.36$; $г-\sigma_g=2.1$ мм, $\sigma_S=3.28$ мм, $A=0.09$. Нормированная интенсивность излучения от всех этих источников определяется выражением (5.4.16), а именно, $J(\theta)/J(0)=\cos^2\theta\exp[-\frac{1}{2}(k\delta)^2\sin^2\theta]$, где $\delta=2$ мм. (Wolf and Collett, 1978)

В этом пределе выражение (5.4.16) для интенсивности излучения сводится к (5.3.29).

В другом предельном случае, когда

$$\sigma_S \ll \sigma_g, \tag{5.4.20}$$

источник является пространственно когерентным в глобальном смысле, и из формулы (5.4.14) получаем, что

$$\delta \approx 2\sigma_S. \tag{5.4.21}$$

Из выражений (5.4.16), (5.4.17) и (5.4.21) следует, что интенсивность излучения с хорошей степенью точности не зависит от точного значения эффективной корреляционной длины σ_g источника.

Безусловно, предел $\sigma_g \to \infty$ характеризует гауссовский источник модели Шелла, который является полностью пространственно когерентным на частоте ν, т.е. для которого

$$g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)\equiv 1 \quad \text{для всех } \boldsymbol{\rho}'. \tag{5.4.22}$$

Тогда, вместо приближенного соотношения (5.4.21), из (5.4.14) мы имеем точное соотношение $\delta=2\sigma_S$. Примерами таких источников являются лазеры с плоскими зеркалами, каждый из которых работает на низшей моде. При этом эффекты, связанные с дифракцией на краях зеркал, не учитываются. Перепишем уравнение (5.4.10), соответствующее такому источнику, следующим образом:

$$S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu)=A_{\mathrm{L}}^2\,\mathrm{e}^{-2\rho^2/\delta_{\mathrm{L}}^2}, \tag{5.4.23}$$

где $\delta_{\mathrm{L}}=2(\sigma_S)_{\mathrm{L}}$, нижний индекс L означает, что параметры относятся к лазеру $[(\sigma_g)_{\mathrm{L}}\to\infty]$. Из теоремы эквивалентности, которую мы уже обсудили, следует, что *гауссовские источники модели Шелла, для которых* $\delta=\delta_{\mathrm{L}}\equiv 2(\sigma_S)_{\mathrm{L}}$ *и* $A\sigma_S=A_{\mathrm{L}}(\sigma_S)_{\mathrm{L}}$, *будут создавать такое же угловое распределение интенсивности излучения, как и лазерный источник.* Записанное явно первое условие подразумевает согласно (5.4.14), что

$$\frac{1}{4(\sigma_S)_{\mathrm{L}}^2}=\frac{1}{4\sigma_S^2}+\frac{1}{\sigma_g^2}, \tag{5.4.24}$$

откуда

$$\sigma_S \geqslant (\sigma_S)_{\mathrm{L}}, \tag{5.4.25}$$

$$\sigma_g \geqslant 2(\sigma_S)_{\mathrm{L}}. \tag{5.4.26}$$

Таким образом, частично когерентный гауссовский источник модели Шелла, который «эквивалентен» полностью когерентному лазерному источнику, должен иметь больший эффективный размер, чем лазер, и

должен быть коррелированным на расстояниях, по крайней мере, вдвое больших эффективных линейных размеров лазерного источника. Источники с меньшими корреляционными длинами $[\sigma_g \approx 2(\sigma_S)_L]$ являются квазиоднородными источниками, так как тогда, согласно (5.4.24) σ_S должна быть намного больше σ_g. На рис. 5.11 для сравнения изображены лазерный источник и «эквивалентный» квазиоднородный источник. Рис. 5.12 показывает степень когерентности и распределение спектральной плотности в плоскости других гауссовских источников модели Шелла, создающих такое же, как и лазер, распределение интенсивности излучения (см., например, Gori and Palma, 1978; De Santis, Gori and Palma, 1979; Gori, 1980a, b).

5.4.3. Экспериментальная проверка теоремы эквивалентности

Де Сантис, Гори, Гуаттари и Палма (De Santis, Gori, Guattari and Palma, 1979) провели экспериментальную проверку теоремы эквивалентности для интенсивности излучения, используя оптическую схему, схематично изображенную на рис. 5.13. Гауссовское пятнышко лазерного луча было сфокусировано линзой L_1 на стеклянную матовую пластинку G. Пластинка была помещена в фокальную плоскость линзы L_2, за которой следовал амплитудный передаточный фильтр F, описываемый гауссовской передаточной функцией. Как было впервые продемонстрировано Мартинессом и Спиллером (Martienssen and Spiller, 1964), если матовая пластинка непрерывно вращается, поперечное сечение луча, выходящего из пластинки представляет собой пространственно некогерентный, вторичный источник при условии, что размер пятнышка больше чем масштаб неоднородности матовой стеклянной пластики. Используя теорему Ван Циттерта — Цернике и закон распространения для взаимной спектральной плотности, можно показать, что свет в плоскости σ, которая находится за фильтром F, представляет собой гауссовский источник модели Шелла. Обнаружено, что среднеквадратичные ширины (дисперсии) двух распределений (5.4.10) и (5.4.11), характеризующих этот источник, зависят от:

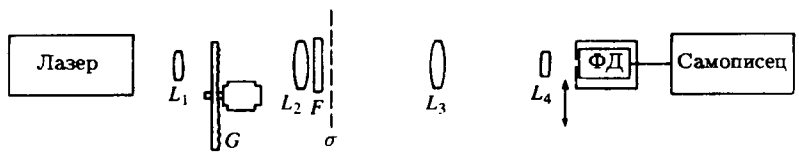


Рис. 5.13. Экспериментальная установка, используемая для проверки теоремы эквивалентности для интенсивности излучения. Обозначения объясняются в тексте. (De Santis, Gori, Guattari and Palma, 1979)

(а) дисперсии корреляционной функции неровности поверхности стекляной матовой пластинки;

(б) дисперсии передаточной функции амплитудного фильтра F;

(в) фокуса линзы L_2.

Соответствующим образом подбирая эти три параметра, можно изготовить гауссовские источники модели Шелла с требуемыми характристиками.

Угловое распределение интенсивности излучения, создаваемого такими источниками, можно исследовать при помощи оптической системы, состоящей из двух линз L_3 и L_4. Изображение, получаемое от этой системы, сканировалось фотодетектором ФД.

В этих экспериментах сначала измерялось угловое распределение гауссовского лазерного луча в отсутствии матовой стеклянной пластинки G и амплитудного фильтра F. Далее, проводились соответствующие измерения с матовой стеклянной пластинкой и амплитудным фильтром. Дисперсии корреляционной функции матовой стеклянной пластинки и передаточной функции фильтра выбирались таким образом, чтобы когерентный лазерный источник и частично когерентный источник модели Шелла удовлетворяли условиям теоремы эквивалентности.

На рис. 5.14 показаны наблюдаемые оптические интенсивности в поперечном сечении когерентного лазерного луча *а* и луча, вышедшего из невращающейся матовой стеклянной пластинки *б*. Средний размер спеклов на рис. 5.14*б* является грубой мерой среднего квадратичного отклонения поперечных корреляций (порядка σ_g) света, который выходит из вращающейся пластинки. Было обнаружено, что несмотря на значительную разницу между двумя источниками, распределения интенсивности в дальней зоне, в точности до масштабного множителя, который оставался в этих экспериментах произвольным, совпадают (рис. 5.15).

Фарина, Нардуччи и Коллет (Farina, Narducci and Collett, 1980) использовали другое устройство для проверки некоторых теоретических предсказаний относительно излучения от частично когерентных источников. Это будет обсуждаться позже, в разд. 5.6.4, в связи с гауссовскими лучами модели Шелла. Здесь

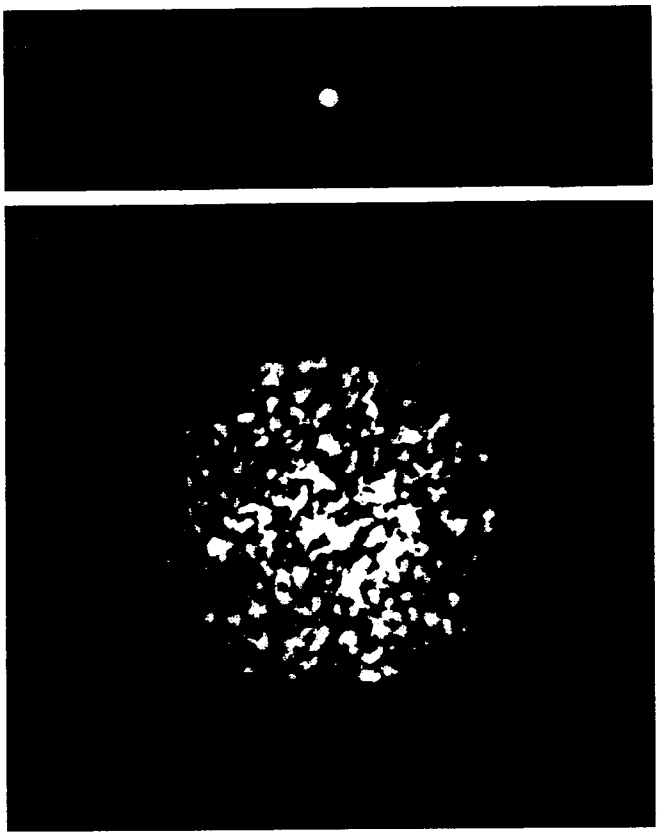


Рис. 5.14. Распределение интенсивности в плоскости когерентного лазерного источника *а* и частично когерентного источника *σ б*. (De Santis, Gori, Guattari and Palma, 1979)

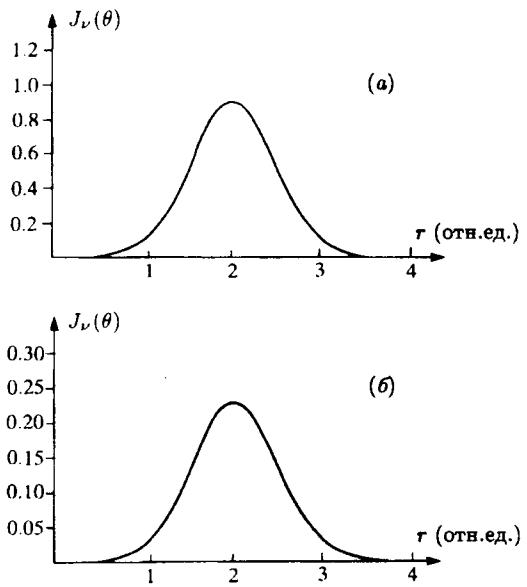


Рис. 5.15. Измеренные угловые распределения для интенсивности излучения $J_\nu(\theta)$ (в произвольных, но идентичных единицах), создаваемых двумя источниками, изображенных на рис. 5.14. (De Santis, Gori, Guattari and Palma, 1979)

мы лишь напомним, что вторичный источник, используемый в этих экспериментах, представлял собой расположенный на пути лазерного луча вращающийся фазовый экран, который создавался распылением водяных капель на чистой стеклянной пластинке. Квазиоднородный источник был изготовлен при помощи соответствующего покрытия и было показано, что такой источник действительно генерирует сильно направленные лучи.

Другие методы изготовления источников с разными когерентными свойствами были описаны в литературе. Один из них использует жидкие кристаллы для рассеяния лазерного луча (Scudieri, Bertolotti and Bartolino, 1974; Carter and Bertolotti, 1978).

Когерентные свойства рассеянного света изменяются при воздействии на жидкий кристалл электрического поля постоянного тока. В других методах изменение свойств когерентности света достигается при прохождении его через разнообразные передаточные или голографические фильтры (Courjon and Bulabois, 1979; Courjon, Bulabois and Carter,1981). Были также разработаны методы, в которых когерентность света изменялась в результате его взаимодействия со звуковыми волнами (Ohtsuka and Imai, 1979; Imai and Ohtsuka, 1980; Turunen, Tervonen, Friberg, 1990; Tervonen, Friberg and Turunen, 1992). Был предложен метод генерации гауссовских источников модели Шелла на основе первичных, квазиоднородных источников, используя системы с обратной связью (Dechamps, Courjon and Bulabois, 1983). Источники с управляемой степенью когерентности, созданные с помощью этих и других методов, находят полезные приложения в таких областях как микроденситометрия (Kinzly, 1972; Reynolds and Smith, 1973), измерения ширины линии (Nyyssonen,1977, 1979), литография (Oldham, Subramanian and Neureuther, 1981), где высокая

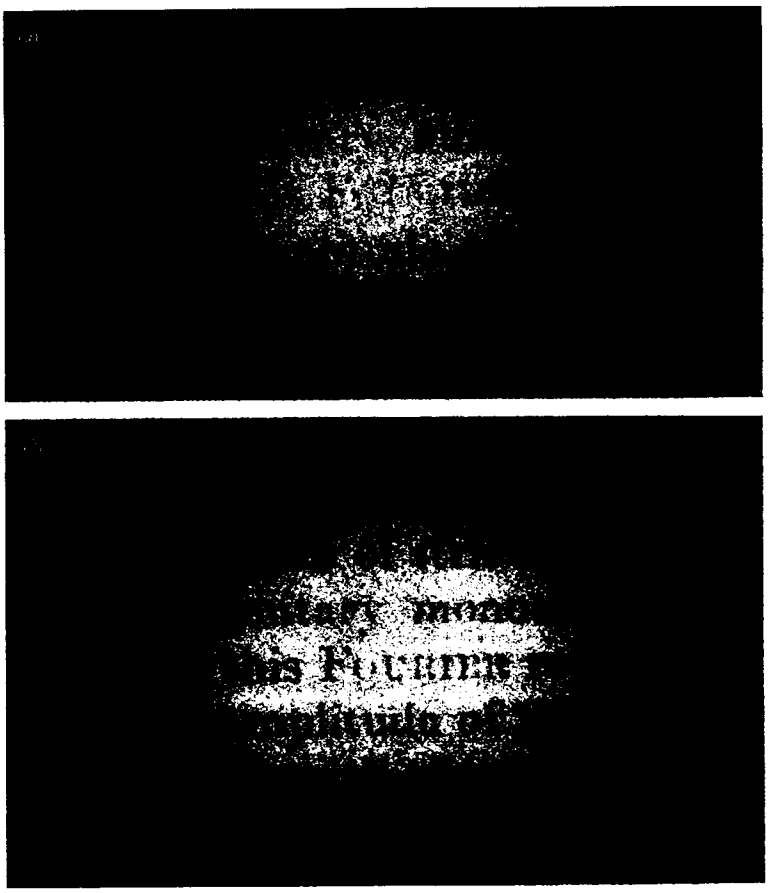


Рис. 5.16. Улучшение разрешения при изменении спектральной степени когерентности света: *а* — фотография текста получена на основе пространственно когерентного света от He:Ne лазера. Образующиеся спеклы затушевывают изображение, делая слова почти неразличимыми; *б* — Фотография того же текста, полученная при помощи света от квазиоднородного (т.е. некогерентного в глобальном смысле) источника. Спеклы исчезли и текст стал читаемым. (С разрешения L.M. Narducci and J.D. Farina)

пространственная когерентность света имеет иногда нежелательные эффекты, приводящие к зернистым изображениям, и, следовательно, трудно получить хорошее разрешение. На рис. 5.16 показан пример, демонстрирующий как уменьшение пространственной когерентности может улучшить разрешение.

5.5. Представление по когерентным модам для гауссовских источников модели Шелла

На протяжении всей этой главы мы дали несколько примеров, связанных с источниками модели Шелла (которые, в соответствующем пределе, содержат квазиоднородные источники). Из-за важности модельных источников этого типа, а также для того, чтобы лучше понять основные отличия между когерентными и некогерентными, в глобальном смысле, источниками, мы рассмотрим представление по когерентным модам, описанное в разд. 4.7, для гауссовских источников модели Шелла. Чтобы сделать анализ по возможности простым, мы будем рассматривать только одномерные источники этого класса.

Одномерный, вторичный, гауссовский источник модели Шелла характеризуется взаимной спектральной плотностью вида [ср. (5.3.15), (5.3.23) и (5.3.24)]

$$W^{(0)}(x_1, x_2, \nu) = [S^{(0)}(x_1, \nu)]^{1/2}[S^{(0)}(x_2, \nu)]^{1/2} g^{(0)}(x_2 - x_1, \nu), \tag{5.5.1}$$

где пространственное распределение спектральной плотности $S^{(0)}(x, \nu)$ и спектральная степень когерентности $g^{(0)}(x', \nu)$ определяются выражениями

$$S^{(0)}(x, \nu) = A^2(\nu)\, \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma_S^2(\nu)}, \tag{5.5.2}$$

$$g^{(0)}(x', \nu) = \mathrm{e}^{-x'^2/2\sigma_g^2(\nu)}, \tag{5.5.3}$$

где $A(\nu)$, $\sigma_S(\nu)$ и $\sigma_g(\nu)$ — положительные числа.

Согласно одномерному аналогу (4.7.44) взаимную спектральную плотность $W^{(0)}(x_1, x_2, \nu)$ можно выразить в виде

$$W^{(0)}(x_1, x_2, \nu) = \sum \beta_n(\nu) \phi_n^*(x_1, \nu) \phi_n(x_2, \nu), \tag{5.5.4}$$

где $\beta_n(\nu)$ — собственные значения и $\phi_n(x, \nu)$ — ортонормированные собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^{(0)}(x_1, x_2, \nu) \phi_n(x_1, \nu)\, dx_1, = \beta_n(\nu) \phi_n(x_2, \nu). \tag{5.5.5}$$

С физической точки зрения, выражение (5.5.4) представляет функцию взаимной спектральной плотности вторичного источника в виде линейной суперпозиции мод взаимной спектральной плотности, каждая из которых является полностью пространственно когерентной на каждой частоте.

Интегральное уравнение (5.5.5), с ядром, определяемым из уравнений (5.5.1) и (5.5.3), можно решить в конечном виде. Обнаружено, что нормированные собственные функции и собственные значения равны (см., например, Gori, 1980b или Starikov and Wolf, 1982)

$$\phi_n(x, \nu) = \left(\frac{2c}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{(2^n n!)^{1/2}} H_n[x(2c)^{1/2}]\, \mathrm{e}^{-cx^2}, \tag{5.5.6}$$

$$\beta_n(\nu) = A^2 \left(\frac{\pi}{a+b+c}\right)^{1/2} \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^n, \tag{5.5.7}$$

где $H_n(x)$ — полиномы Эрмита и

$$a(\nu) = \frac{1}{4\sigma_S^2(\nu)}, \quad b(\nu) = \frac{1}{2\sigma_g^2(\nu)}, \tag{5.5.8а}$$

$$c(\nu) = [a^2(\nu) + 2a(\nu)b(\nu)]^{1/2}. \tag{5.5.8б}$$

Из уравнения (5.5.7), которое дает собственные значения для гауссовского источника модели Шелла, можно получить простое выражение для относительных «весов», с которыми различные моды дают вклад во взаимную спектральную плотность источника. Отношение собственного значения β_n к наименьшему значению β_0 определяется, очевидно, выражением

$$\frac{\beta_n}{\beta_0} = \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^n. \tag{5.5.9}$$

Деля числитель и знаменатель в правой части на множители b^n, можно выразить (5.5.9) в более важном, с физической точки зрения, виде. Тогда мы получим следующее простое выражение для отношения β_n/β_0:

$$\frac{\beta_n}{\beta_0} = \left[\frac{1}{(q^2/2) + 1 + q[(q/2)^2 + 1]^{1/2}}\right]^n, \tag{5.5.10}$$

где параметр q — отношение дисперсии спектральной степени когерентности к дисперсии функции спектральной плотности:

$$q(\nu) = \frac{\sigma_g(\nu)}{\sigma_S(\nu)}. \tag{5.5.11}$$

Ясно, что этот параметр можно рассматривать как меру *степени глобальной когерентности* гауссовского источника модели Шелла. Рассмотрим два предельных случая.

Когда $\sigma_g \gg \sigma_S$, источник является пространственно *когерентным в глобальном смысле*. Согласно (5.5.11) мы имеем в этом случае $q \gg 1$. Тогда из (5.5.10) следует, что

$$\frac{\beta_n}{\beta_0} \approx \frac{1}{q^{2n}}. \tag{5.5.12}$$

Эта формула означает, что для всех $n \neq 0$, $\beta_n \ll \beta_0$ и, следовательно, в когерентном пределе поведение источника хорошо аппроксимируется модой низшего порядка.

В другом предельном случае, когда $\sigma_g \ll \sigma_S$, источник является пространственно *некогерентным в глобальном смысле* и принадлежит к классу квазиоднородных источников, которые мы рассматривали ранее (разд. 5.3.2). В соответствии с (5.5.11) мы имеем $q \ll 1$, и из (5.5.10) следует, что

$$\frac{\beta_n}{\beta_0} \approx 1 - nq. \tag{5.5.13}$$

Эта формула означает, что для адекватного описания источника требуется большое число мод (порядка $1/q$).

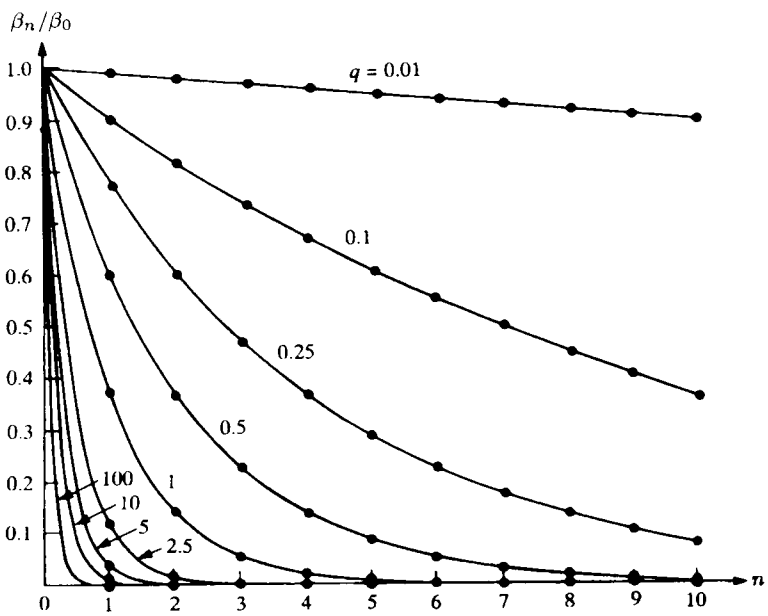


Рис. 5.17. Отношение $(n+1)$-го собственного значения β_n к собственному значению β_0 низшего порядка для одномерного, вторичного, гауссовского источника модели Шелла как функция n [см. (5.5.10)], для некоторых значений степени глобальной когерентности $q = \sigma_g/\sigma_S$. Значения $q \gg 1$ и $q \ll 1$ характеризуют источники, которые являются пространственно когерентными и некогерентными в глобальном смысле соответственно. (Starikov and Wolf, 1982)

На рис. 5.17 показано поведение отношения β_n/β_0 как функции n для разных значений параметра q. Из рисунка видно, что, как только мы переходим от сильно (в глобальном смысле) когерентных источников к некогерентным, для описания пространственных корреляционных свойств необходимо все больше и больше мод. Вклады различных мод в интенсивность в дальнем поле были изучены Стариковым и Вольфом (Starikov and Wolf, 1982). Гори (Gori, 1983) исследовал вклады различных мод во взаимную спектральную плотность для любого поперечного сечения $z = \text{const}$.

Собственные функции (5.5.6), которые иногда называют *эрмитово-гауссовскими функциями*, хорошо известны в теории лазерных резонаторов. Они представляют собой зависящие от x части поперечных мод для конфокальных лазерных резонаторов со сферическими зеркалами и прямоугольными границами вдоль направлений осей x и y, при условии, что дифракция, возникающая на границах зеркал, является пренебрежимо малой (см., например, Kogelnik and Li, 1966; Siegman, 1971, разд. 8.4). В разд. 5.6.2 мы будем изучать структуру поперечной моды низшего порядка.

5.6. Оптические лучи

До сих пор мы интересовались, главным образом, свойствами полей в дальних зонах флуктуирующих источников. Теперь рассмотрим поля на произвольных расстояниях от источников и изучим изменения, которые поля испытывают при распространении. Вследствие сложности задачи мы ограничимся сильно направленными полями, т.е. лучами.

Сначала получим условия, при которых монохроматический плоский источник генерирует луч. Затем мы получим два полезных представления монохроматических лучей. Одно из них основано на угловом спектре плоских волн, другое — на формулировке интегрального преобразования, которое использует соответствующую функцию Грина. Мы применим эти результаты для изучения структуры монохроматического гауссовского луча. После этого мы обобщим результаты на частично когерентные лучи, создаваемые плоскими источниками, находящимися в любом состоянии пространственной когерентности. В заключение, мы изучим основные свойства лучей, создаваемых гауссовским источниками модели Шелла.

5.6.1. Монохроматические лучи

Рассмотрим поле монохроматической волны с частотой ν,

$$V(x,y,z,t) = U(x,y,z;\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}, \tag{5.6.1}$$

распространяющееся в полуплоскости $z > 0$, которая по предположению представляет собой свободное пространство. Как мы узнали в разд. 3.2.2, при обычных условиях, пространственную часть $U(x,y,z;\nu)$ можно выразить во всей полуплоскости $z \geqslant 0$ в виде суперпозиции плоских волн с одинаковыми волновыми числами

$$k = 2\pi\nu/c, \tag{5.6.2}$$

а именно, [(3.2.19), в котором вместо k_0 мы пишем теперь k]

$$U(x,y,z;\nu) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(p,q;\nu)\,\mathrm{e}^{ik(px+qy+mz)}\,dp\,dq, \tag{5.6.3}$$

где

$$m = +[1-p^2-q^2]^{1/2} \quad \text{при } p^2+q^2 \leqslant 1, \tag{5.6.4а}$$

$$m = +i[p^2+q^2-1]^{1/2} \quad \text{при } p^2+q^2 > 1. \tag{5.6.4б}$$

Как мы уже отмечали в разд. 3.2.2, плоские волны, для которых $p^2+q^2 \leqslant 1$ являются обычными однородными волнами, которые распространяются в направлениях, задаваемых единичным вектором (p,q,m). Плоские волны, для которых $p^2+q^2 > 1$, представляют собой затухающие плоские волны, амплитуда которых экспоненциально убывает при увеличении z.

Нам будут нужны два следующих результата, полученные в разд. 3.2.2:

(а) Функция спектральной амплитуды $a(p,q;\nu)$ выражается через граничные значения поля $U(x,y,z;\nu)$ на плоскости $z=0$ в виде [см. (3.2.27)]

$$a(p,q;\nu) = k^2\widetilde{U}^{(0)}(kp,kq;\nu), \tag{5.6.5}$$

где

$$\widetilde{U}^{(0)}(u,v;\nu) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty} U(x,y,0;\nu)\,\mathrm{e}^{-i(ux+vy)}\,dx\,dy \tag{5.6.6}$$

— двумерный пространственный фурье-образ $U(x,y,0;\nu)$.

(б) Пусть

$$r = \left[x^2+y^2+z^2\right]^{1/2} \tag{5.6.7}$$

будет расстоянием от начала координат до точки поля $P(x,y,z)$. Тогда, поскольку P удаляется от начала координат в любом фиксированном направлении, которое задано единичным вектором $\mathbf{s} \equiv \equiv s_x, s_y, s_z > 0$, то в асимптотическом пределе при $kr \to \infty$ имеем [см. (3.2.22)]

$$U(r\mathbf{s},\nu) \sim U^{(\infty)}(r\mathbf{s},\nu) = -\frac{2\pi i}{k}\cos\theta\, a(s_x,s_y;\nu)\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}. \tag{5.6.8}$$

Здесь θ — угол, который единичный вектор $\mathbf{s}$ составляет с положительным направлением оси z (см. рис. 5.18).

Предыдущие соотношения справедливы в общем случае. Теперь мы видоизменим их таким образом, чтобы они были применимы к случаю, когда поле является лучеобразным. Ясно, что в этом случае амплитуды $U^{(\infty)}(r\mathbf{s};\nu)$ дальнего поля не будут учитываться, за исключением $\mathbf{s}$-направлений, которые близки к оси луча. Если выбрать ось луча в направлении оси z, то этот результат означает, согласно (5.6.8), что абсолютные значения $|a(s_x, s_y; \nu)|$ для спектральных амплитуд будут пренебрежимо малыми, за исключением случая, когда $s_x^2 + s_y^2 \ll 1$. Этот результат, с физической точки зрения, означает, что *для луча, распространяющегося в окрестности положительного направления оси z, только те плоские волны будут иметь ненулевые амплитуды в представлении углового спектра (5.6.3), направления которых попадают в узкий телесный угол в окрестности оси z*, что можно было интуитивно предположить. Из этого результата и из соотношения (5.6.5) мы сразу получим условие для распределения поля $U(x, y, 0; \nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}$ на плоскости $z = 0$, необходимое и достаточное для создания в полупространстве $z > 0$ луча, распространяющегося вблизи положительного направления оси z: *$U(x, y, 0; \nu)$ должна, главным образом, содержать лишь низкие пространственно-частотные компоненты, т.е. модуль двумерного пространственного фурье-образа $\widetilde{U}^{(0)}(u, v; \nu)$ должен быть пренебрежимо малым, кроме случая, когда $u^2 + v^2 \ll k^2$.*

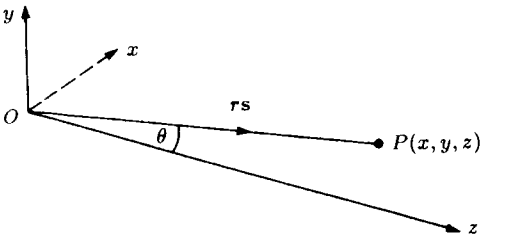


Рис. 5.18. Иллюстрация обозначений в формуле (5.6.8), $\mathbf{s}$ — единичный вектор в направлении OP

Поскольку, как мы только что видели, для луча, который распространяется в направлении, близком к оси z, имеем

$$|a(p, q; \nu)| \approx 0, \quad \text{если не} \quad p^2 + q^2 \ll 1, \tag{5.6.9}$$

то используется только первое из двух выражений (5.6.4) для m; и это выражение можно аппроксимировать двумя первыми членами биномиального разложения, т.е.

$$m \approx 1 - \frac{1}{2}(p^2 + q^2). \tag{5.6.10}$$

Если подставить (5.6.10) в (5.6.3), то мы получим следующее представление для монохроматического луча (мы опускаем периодический временной множитель $\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}$), *который распространяется вдоль оси z в полуплоскости $z > 0$*:

$$U(x, y, z; \nu) = \mathrm{e}^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} a(p, q; \nu)\, \mathrm{e}^{ik(px+qy)}\, \mathrm{e}^{-ik(p^2+q^2)z/2}\, dp\, dq, \tag{5.6.11}$$

где подразумевается, что функция амплитуды (в общем случае, комплексная) $a(p, q; \nu)$ удовлетворяет ограничению (5.6.9).

Если в выражении (5.6.11) использовать простое соотношение (5.6.5) между $a(p, q; \nu)$ и $\widetilde{U}^{(0)}(kp, kq; \nu)$ и изменить переменные интегрирования p и q на $u = kp$, $v = kq$, то мы сразу получим следующее представление луча через фурье-образ его граничных значений на плоскости $z = 0$:

$$U(x, y, z; \nu) = \mathrm{e}^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{U}^{(0)}(u, v; \nu)\, \mathrm{e}^{i(ux+vy)}\, \mathrm{e}^{-iz(u^2+v^2)/2k}\, du\, dv, \tag{5.6.12}$$

где предполагается, что

$$\left|\widetilde{U}^{(0)}(u, v; \nu)\right| \approx 0, \quad \text{если не } u^2 + v^2 \ll k^2. \tag{5.6.13}$$

Можно также представить луч во всем полупространстве $z > 0$ непосредственно через граничные значения поля в плоскости $z = 0$. Для этой цели мы подставим уравнение (5.6.6) для $\widetilde{U}^{(0)}(u, v; \nu)$ в (5.6.12) и изменим порядок интегрирования. Тогда мы получим следующую формулу для луча [вместо $U(x, y, z; \nu)$ мы пишем теперь $U(x, y, z)$]:

$$U(x, y, z) = \mathrm{e}^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} \widetilde{U}(x', y', 0) G(x - x', y - y', z)\, dx'\, dy', \tag{5.6.14}$$

где

$$G(x-x',y-y',z)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-iz(u^2+v^2)/2k}\,\mathrm{e}^{i[u(x-x')+v(y-y')]}\,du\,dv. \tag{5.6.15}$$

Двойной интеграл в правой части есть произведение двух простых интегралов, каждый из которых представляет собой одномерное преобразование Фурье гауссовского распределения с мнимой дисперсией. Его значение, а также значения некоторых других интегралов, с которыми мы столкнемся чуть позже, можно легко получить из формулы [Gradshteyn and Ryzhik, 1980, с. 307, выражение (2) разд. 3.323 вместе с формулами 9.253 и 8.956(1)]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta^2t^2}\,\mathrm{e}^{-iqt}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\beta}\,\mathrm{e}^{-q^2/4\beta^2},\quad(\mathrm{Re}\,\beta>0). \tag{5.6.16}$$

Тогда легко находим, что

$$G(x,y,z)=-\frac{ik}{2\pi z}\,\mathrm{e}^{ik(x^2+y^2)/2z}. \tag{5.6.17}$$

Вместо того, чтобы использовать угловой спектр для представления луча, часто применяют альтернативный подход, который мы вкратце обсудим. Положим

$$U(x,y,z)=\psi(x,y,z)\,\mathrm{e}^{ikz}. \tag{5.6.18}$$

Для строго однонаправленного луча (т.е. для однородной плоской волны), распространяющегося в положительном направлении оси z, ψ будет константой. Для любого физически реализуемого луча, который распространяется вдоль оси z, $\psi(x,y,z)$ будет, конечно, меняться при изменении x, y и z, но если угловое расхождение луча достаточно мало, то можно ожидать, что она будет изменяться очень медленно при изменении z. Предположим, что это изменение происходит столь медленно, что $|\partial^2\psi/\partial z^2|\ll 2k\,|\partial\psi/\partial z|$; другими словами, что изменение $|\partial\psi/\partial z|$ на интервале порядка длины волны вдоль оси z является пренебрежимо малым по сравнению с его значением $|\partial\psi/\partial z|$. Подставляя (5.6.18) в уравнение Гельмгольца для U [см. (4.7.39)] и пренебрегая членом $\partial^2\psi/\partial z^2$, мы находим, что с хорошей степенью точности $\psi(x,y,z)$ удовлетворяет так называемому *параксиальному уравнению*

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+2ik\frac{\partial\psi}{\partial z}=0. \tag{5.6.19}$$

Применяя к параксиальному уравнению (5.6.19) ту же самую процедуру, которую мы применяли к уравнению Гельмгольца в разд. 3.2, нетрудно показать, что наиболее общее решение уравнения (5.6.19), распространяющееся в полуплоскости $z>0$, можно выразить в виде

$$\psi(x,y,z)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}a(p,q)\,\mathrm{e}^{-ik(px+qy)}\,\mathrm{e}^{-ik(p^2+q^2)z/2}\,dp\,dq, \tag{5.6.20}$$

где $a(p,q)$ — произвольная функция параметров p и q, и это решение уравнения (5.6.19), принимающее заданные граничные значения $\psi(x,y,0)$ на плоскости $z=0$, равно[1]

$$\psi(x,y,z)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x',y',0)G(x-x',y-y',z)\,dx'\,dy', \tag{5.6.21}$$

где $G(x-x',y-y',z)$ — функция Грина (5.6.17). Чтобы вывести эту формулу, нужно лишь в уравнении (5.6.20) положить $z=0$, выразить $a(p,q)$ через $\psi(x,y,0)$ и подставить в (5.6.20) это выражение для $a(p,q)$.

[1] С точностью до нормировки и масштабных множителей, интегральное преобразование, которое появляется в правой части (5.6.21) с ядром G, определяемом из (5.6.17), известно как (двумерное) преобразование Френеля. Некоторые из основных свойств преобразования Френеля обсуждаются, например, в книге Гори (Gori, 1981, 1994).

Из соотношения (5.6.18) между $\psi(x,y,z)$ и $U(x,y,z)$ видно, что формулы (5.6.20) и (5.6.21) соответствуют формулам (5.6.11) и (5.6.14). Однако, следует отметить, что решение (5.6.20) параксиального уравнения (5.6.19) не будет соответствовать лучу, пока функция $a(p,q)$ не будет удовлетворять требованию (5.6.9). Решение (5.6.21) также не будет представлять луч, пока $\psi(x,y,0)$ не будет эффективно ограничена в окружности на пространственно-частотной плоскости, радиус которой много меньше волнового числа k, т.е. пока модуль фурье-образа $\tilde{\psi}(u,v,0)$ для $\psi(x,y,0)$ не будет пренебрежимо малым, за исключением случая, когда $u^2+v^2 \ll k^2$. Эти результаты означают, что в то время как регулярное решение параксиального уравнения можно выразить в виде (5.6.20) и (5.6.21), не все решения этого уравнения описывают лучи. Это происходит по той причине, что в нашем представлении лучей мы взяли за основу понятие углового спектра плоских волн, а не параксиальное уравнение. Такой подход дает ясное понимание многих физически важных особенностей волновых полей, независимо от того, имеют ли они структуру луча.

5.6.2. Пример: монохроматические гауссовские лучи

Мы будем использовать одно из представлений луча, полученное в разд. 5.6.1, для объяснения основных свойств гауссовских лучей. Такие лучи создаются многими широко используемыми лазерами.

Гауссовский луч представляет собой направленное поле, которое создается распределением поля

$$U(x,y,0) = A\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/w_0^2} \tag{5.6.22}$$

на плоскости $z=0$. В (5.6.22) A и w_0 — положительные константы. Заметим, что когда расстояние

$$\rho = \left[x^2+y^2\right]^{1/2} \tag{5.6.23}$$

равно w_0, U уменьшается в e раз относительно своего значения $U(0,0,0)=A$ на оси. Следовательно, w_0 — эффективный радиус распределения с круговой симметрией на плоскости $z=0$. По это причине параметр w_0 обычно называют *минимальным размером пятна*.

Гауссовское распределение (5.6.22) часто представляет собой приближение к истинному полю на плоскости $z=0$ на расстояниях ρ, не превышающих некоторого значения $\rho=a$. Если a значительно больше, чем w_0, то эффект использования приближения поля на плоскости $z=0$ полным гауссовским распределением является, как правило, пренебрежимо малым при определении поля во всем полупространстве $z>0$, в котором распространяется луч.

Для того, чтобы представить поле, создаваемое плоским, вторичным источником с граничными значениями (5.6.22), в виде углового спектра плоских волн [см. (5.6.3)], мы должны сначала определить его спектрально-амплитудную функцию $a(p,q)$. Она получается при подстановке выражения (5.6.22) для $U(x,y,0)$ в (5.6.6) при использовании соотношения (5.6.5). Тогда мы получим для $a(p,q)$ выражение

$$a(p,q) = A\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/w_0^2}\,\mathrm{e}^{-ik(px+qy)}\,dx\,dy. \tag{5.6.24}$$

Двойной интеграл в правой части (5.6.24) можно непосредственно вычислить, используя формулу (5.6.16), и мы находим, что

$$a(p,q) = \frac{A(kw_0)^2}{4\pi}\,\mathrm{e}^{-(kw_0)^2(p^2+q^2)/4}. \tag{5.6.25}$$

Для того чтобы выражение представляло собой функцию спектральной амплитуды луча, распространяющегося вдоль оси z, также должно выполняться условие (5.6.9), т.е. $|a(p,q)|$ должна иметь отличные от нуля значения, когда $p^2+q^2 \ll 1$. Выражение (5.6.25) достигает своего максимального значения при $p=q=0$ и уменьшается в e раз относительно максимума при $\frac{1}{4}(kw_0)^2(p^2+q^2)=1$. Следовательно, $|a(p,q)|$ имеет отличные от нуля значения только когда

$$p^2+q^2 \lesssim \frac{4}{(kw_0)^2}. \tag{5.6.26}$$

Следовательно, условие (5.6.9) для луча будет удовлетворяться в данном случае при $4/(kw_0)^2 \ll 1$, т.е. при $w_0 \gg 2/k$. Поскольку $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны, это условие эквивалентно требованию

$$w_0 \gg \lambda/\pi. \tag{5.6.27}$$

Следовательно, при условии, что минимальный размер пятна w_0 много больше длины волны, гауссовское распределение (5.6.22) на плоскости $z = 0$ будет вызывать появление луча, известного как *гауссовский луч*.

Согласно уравнениям (5.6.11) и (5.6.25) гауссовский луч имеет следующее представление углового спектра в полупространстве $z \geqslant 0$:

$$U(x,y,z) = \frac{A(kw_0)^2}{4\pi}\, e^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-[(kw_0)^2/4 + ikz/2](p^2+q^2)}\, e^{ik(px+qy)}\, dp\, dq. \tag{5.6.28}$$

Двойной интеграл в правой части (5.6.28) можно легко вычислить, используя формулу (5.6.16). Если вместо $U(x,y,z)$ мы запишем $U(\rho,z)$, где

$$\rho \equiv (x,y) \tag{5.6.29}$$

— «поперечный вектор», который вместе с z, определяет положение точки поля (x,y,z), то мы получим после вычисления интеграла в (5.6.28) следующее выражение для луча:

$$U(\rho,z) = \frac{A(kw_0)^2}{(kw_0)^2 + 2ikz}\, e^{-\{(k\rho)^2/[(kw_0)^2+2ikz]\}}\, e^{ikz}. \tag{5.6.30}$$

Далее мы выразим правую часть (5.6.30) в виде, который явно определяет амплитуду и фазу $U(\rho,z)$. После громоздких, но простых вычислений находим, что

$$\frac{1}{(kw_0)^2 + 2ikz} = \frac{1}{(kw)^2}\left\{1 - i\left[\left(\frac{w}{w_0}\right)^2 - 1\right]^{1/2}\right\}, \tag{5.6.31}$$

$$\frac{(kw_0)^2}{(kw_0)^2 + 2ikz} = \left(\frac{w_0}{w}\right) e^{i\psi}, \tag{5.6.32}$$

$$e^{-\{(k\rho)^2/[(kw_0)^2+2ikz]\}} = e^{-\rho^2/w^2}\, e^{ik\rho^2/2R}, \tag{5.6.33}$$

где величины w, ψ и R, каждая из которых является функцией z, определяются формулами

$$w(z) = w_0\left[1 + \left(\frac{2z}{kw_0^2}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{5.6.34а}$$

$$\cos\psi(z) = \frac{w_0}{w(z)}, \tag{5.6.34б}$$

$$\sin\psi(z) = -\left[1 - \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{5.6.34в}$$

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{kw_0^2}{2z}\right)^2\right]. \tag{5.6.34г}$$

Поведение величин $w(z)$, $\psi(z)$ и $R(z)$, определяемое этими формулами, показано на рис. 5.19.

При подстановке уравнений (5.6.32) и (5.6.33) в (5.6.30) окончательно получим следующее выражение для монохроматического гауссовского луча (мы опускаем периодический временной множитель $e^{-2\pi i\nu t}$):

$$U(\rho,z) = A\left[\frac{w_0}{w(z)}\right] e^{-\rho^2/[w(z)]^2}\, e^{i\{k[z+\rho^2/2R(z)]+\psi(z)\}}. \tag{5.6.35}$$

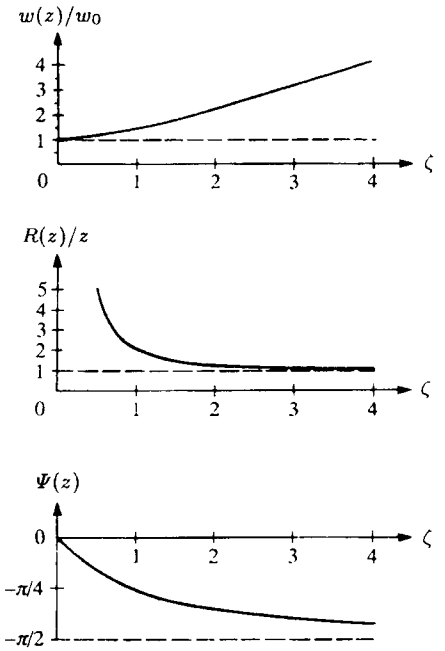


Рис. 5.19. Поведение величин $w(z)$, $\psi(z)$ и $R(z)$ [см. (5.6.34)] для монохроматического гауссовского луча как функции нормированного расстояния $\zeta = 2z/(kw_0^2) = \lambda z/(\pi w_0^2)$ от сужения луча $z = 0$

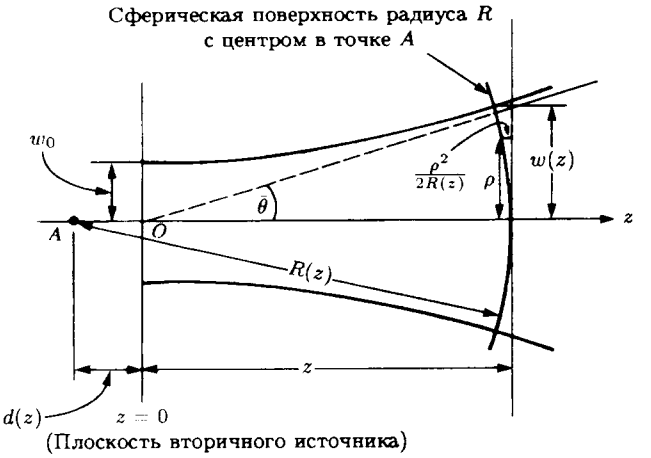


Рис. 5.20. Иллюстрация геометрического смысла параметров, которые характеризуют монохроматический гауссовский луч. Величины $w(z)$, $R(z)$, $d(z)$ и $\bar{\theta}$ определяются выражениями (5.6.34а), (5.6.34б), (5.6.37) и (5.6.40), соответственно

Рассмотрим это выражение более детально.

Мы видим, что, так как луч распространяется от плоскости $z = 0$ в полупространство $z > 0$, амплитуда поля $|U(\boldsymbol{\rho}, z)|$ остается гауссовской в каждом поперечном сечении $z = \text{const}$, но его ширина увеличивается с ростом z. Амплитуда в каждом поперечном сечении уменьшается в e раз относительно своего осевого значения на расстоянии $\rho = w(z)$ от оси. По этой причине $w(z)$ называют *размером пятна на расстоянии* z. Наименьший радиус луча согласно (5.6.34а) есть минимальный размер пятна w_0, а плоскость, в которой размер пятна принимает минимальное значение, называется *перетяжкой луча*.

Далее мы рассмотрим фазу $\phi(\boldsymbol{\rho}, z)$, скажем, гауссовского луча. Из (5.6.35) мы видим,что фаза изменяется от начального значения $\phi(\boldsymbol{\rho}, 0)$ в плоскости сужения до значения

$$\phi(\boldsymbol{\rho}, z) = k\left[z + \frac{\rho^2}{2R(z)}\right] + \psi(z), \tag{5.6.36}$$

при распространении на расстояние z. Первый член справа представляет собой расстояние от плоскости источника, выраженное в единицах $1/k = \lambda/2\pi$. Второй член $k\rho^2/2R(z)$ представляет расстояние, выраженное в тех же единицах, между сферической поверхностью радиуса $R(z)$ и соответствующей z-плоскостью, на высоте ρ от оси. Согласно (5.6.34г), центр сферической поверхности помещается на ось луча на расстоянии

$$d(z) = \frac{k^2 w_0^4}{2z} \tag{5.6.37}$$

за плоскость источника (т.е. в полупространстве $z < 0$) (см. рис. 5.20). Последний член $\psi(z)$ в правой части (5.6.36) представляет дополнительный фазовый сдвиг, который связан с так называемой аномальностью фазы вблизи фокуса (Born and Wolf, 1980, разд. 8.8.4).

Далее рассмотрим поведение луча в дальней зоне вторичного источника. Можно получить упрощенный вид выражения (5.6.35), соответствующего дальнему полю, подставляя в (5.6.35) асимптотические значения величин $w(z)$, $\psi(z)$ и $R(z)$ (5.6.34) при $kz \to \infty$. С другой стороны, выражение для луча в дальней

зоне можно получить, подставляя в общую асимптотическую формулу (5.6.8) функцию спектральной амплитуды (5.6.25) для гауссовского луча и используя тот факт, что для луча в дальней зоне $kr \sim kz$. Тогда получается следующее выражение для дальнего поля $U^{(\infty)}(\theta, z)$:

$$U^{(\infty)}(\theta, z) = -\frac{1}{2} ikAw_0^2 \, e^{-(kw_0)^2\theta^2/4} \, e^{ikz(\theta^2/2)} \frac{e^{ikz}}{z}, \tag{5.6.38}$$

где

$$\theta \approx \frac{\rho}{z} = \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z}, \tag{5.6.39}$$

в котором мы использовали приближение для малых углов $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta$.

Из (5.6.38) мы видим, что амплитуда гауссовского луча в дальней зоне уменьшается в e раз от своего значения на оси луча $\theta = 0$ при $\theta = \bar{\theta}$, где $(kw_0)^2\bar{\theta}^2/4 = 1$, т.е. когда

$$\bar{\theta} = \frac{2}{kw_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \tag{5.6.40}$$

Величина $\bar{\theta}$ известна как *угловое расхождение* гауссовского луча.

Окончательно определим интенсивность излучения $J(\mathbf{s}, \nu)$ для гауссовского луча. Согласно (5.2.12) интенсивность излучения определяется общей формулой

$$J(\mathbf{s}, \nu) = r^2 S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \nu), \tag{5.6.41}$$

где $S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \nu)$ — спектральная плотность в точке P дальней зоны, задаваемой радиус-вектором $r\mathbf{s}$, который образует с положительным направлением оси z угол θ. Кроме того, $S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \nu)$ равна также квадрату амплитуды поля в точке P. Следовательно, из (5.6.38) для гауссовского луча мы имеем

$$S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \nu) = \left|U^{(\infty)}(\theta, z)\right|^2 = \left(\frac{kAw_0^2}{2z}\right)^2 e^{-(kw_0)^2\theta^2/2}. \tag{5.6.42}$$

Подставляя (5.6.42) в (5.6.41) и используя приближение $kr \sim kz$, характерное для луча, мы получим следующее выражение для интенсивности излучения монохроматического гауссовского луча:

$$J(\mathbf{s}, \nu) = (\frac{1}{2} kAw_0^2)^2 \, e^{-(kw_0)^2\theta^2/2}. \tag{5.6.43}$$

За исключением тривиальной разницы в обозначениях, эта формула соответствует пределу когерентности ($k\sigma_g \to \infty$) выражения (5.4.16) для интенсивности излучения, создаваемого гауссовским источником модели Шелла в виде луча ($\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$).

5.6.3. Частично когерентные лучи[1]

В разд. 5.5 мы узнали, что для генерации луча источником необязательно, чтобы этот источник был пространственно полностью когерентным. Фактически, как мы видели, даже те источники, которые являются некогерентными в глобальном смысле, могут генерировать поля этого типа. Теперь мы обсудим математическое представление частично когерентных лучей. В разд. 5.6.4 мы проиллюстрируем результаты, применяя их к лучам, создаваемым гауссовскими источниками модели Шелла.

В разд. 5.6.1 при изучении монохроматических лучей, мы заметили, что полезно начать с представления углового спектра монохроматических полей. Когда мы имеем дело с флуктуирующим полем, статистические свойства которого можно описать с помощью стационарного, по крайней мере, в широком смысле, ансамбля, основной величиной при рассмотрении является функция взаимной когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ или ее фурье-образ — взаимная спектральная плотность $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$. Теперь согласно (4.7.38) взаимную спектральную плотность можно всегда представлять в виде корреляционной функции

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \langle U^*(\mathbf{r}_1, \nu) U(\mathbf{r}_2, \nu) \rangle, \tag{5.6.44}$$

[1] В качестве дополнительной литературы см. книгу (*Лоудон, 1976) — *ред. пер.*

где среднее [обозначаемое ранее как $\langle \dots \rangle_\nu$] берется по ансамблю монохроматических волновых полей $\{U(\mathbf{r},\nu)\exp(-2\pi i\nu t)\}$ с одинаковыми частотами ν.

Выбирая в качестве отправной точки уравнение (5.6.44), мы легко обобщим представление углового спектра для полей, находящихся в любом состоянии когерентности, которые распространяются в полупространство $z > 0$. Для этой цели мы сначала выразим каждый член $U(\mathbf{r},\nu)$ статистического ансамбля, представляющий собой частично когерентное поле, в виде углового спектра плоских волн [см. (5.6.3)], а именно

$$U(\mathbf{r},\nu) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(p,q;\nu)\, \mathrm{e}^{ik(px+qy+mz)}\, dp\, dq, \tag{5.6.45}$$

где

$$m = +(1-p^2-q^2)^{1/2} \quad \text{при } p^2+q^2 \leqslant 1, \tag{5.6.46а}$$

$$m = +i(p^2+q^2-1)^{1/2} \quad \text{при } p^2+q^2 > 1, \tag{5.6.46б}$$

$\mathbf{r} \equiv (x,y,z)$ и $k = 2\pi\nu/c$, где c — скорость света в вакууме. Нужно отметить, что поскольку $U(\mathbf{r},\nu)$ — случайная функция, то такой же является и спектральная амплитудная функция $a(p,q;\nu)$. Подставляя (5.6.45) в (5.6.44) и меняя порядок усреднения и интегрирования, мы получим следующее «двойное представление углового спектра» поля в точках [$\mathbf{r}_1 \equiv (x_1,y_1,z_1 \geqslant 0)$, $\mathbf{r}_2 \equiv (x_2,y_2,z_2 \geqslant 0)$] в полупространстве $z \geqslant 0$:

$$W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = \iiiint_{-\infty}^{\infty} \mathscr{A}(p_1,q_1;p_2,q_2;\nu)\, \mathrm{e}^{ik(p_2x_2+q_2y_2+m_2z_2-p_1x_1-q_1y_1-m_1z_1)}\, dp_1\, dq_1\, dp_2\, dq_2, \tag{5.6.47}$$

где

$$\mathscr{A}(p_1,q_1;p_2,q_2;\nu) = \langle a^*(p_1,q_1;\nu)\, a(p_2,q_2;\nu)\rangle. \tag{5.6.48}$$

Формула (5.6.47) представляет собой взаимную спектральную плотность поля в полупространстве $z \geqslant 0$ в виде суперпозиции коррелированных пар плоских волн, как однородных ($p^2+q^2 \leqslant 1$), так и затухающих ($p^2+q^2 > 1$), распространяющихся в это полупространство. Плоские волны, формирующие каждую пару, являются, в общем случае, коррелированными и их корреляция характеризуется функцией $\mathscr{A}(p_1,q_1;p_2,q_2;\nu)$, которая известна как *угловая корреляционная функция поля* (Marchand and Wolf, 1972). Мы вскоре увидим, что эта функция связана с взаимной интенсивностью излучения поля простым соотношением.

Если в (5.6.47) мы положим $z_1 = z_2 = 0$ и возьмем обратное преобразование Фурье от результирующей формулы, то мы получим следующее выражение для угловой корреляционной функции через фурье-образ взаимной спектральной плотности поля на плоскости $z = 0$:

$$\mathscr{A}(p_1,q_1;p_2,q_2;\nu) = k^4 \widetilde{W}^{(0)}(-kp_1,-kq_1;kp_2,kq_2;\nu), \tag{5.6.49}$$

где

$$\widetilde{W}^{(0)}(u_1,v_1;u_2,v_2;\nu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiiint_{-\infty}^{\infty} W(x_1,y_1,0;x_2,y_2,0;\nu) \times$$

$$\times\, \mathrm{e}^{-i(u_1x_1+v_1y_1+u_2x_2+v_2y_2)}\, dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2. \tag{5.6.50}$$

Когда точки поля $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$ находятся в дальней зоне источника, выражение (5.6.47) для взаимной спектральной плотности принимает более простой вид, который можно легко вывести при помощи асимптотической формулы (5.6.8). Предположим, что $P_1(\mathbf{r}_1)$ и $P_2(\mathbf{r}_2)$ удаляются на бесконечность в заданных направлениях, определяемых единичными векторами $\mathbf{s}_1 \equiv (s_{1x},s_{1y},s_{1z}>0)$, $\mathbf{s}_2 \equiv (s_{2x},s_{2y},s_{2z}>0)$ соответственно. В асимптотическом пределе (т.е. в дальней зоне) при $kr_1 \to \infty$ и $kr_2 \to \infty$ мы получим, подставляя (5.6.8) в (5.6.44) и используя (5.6.48), следующее выражение для взаимной спектральной плотности $W^{(\infty)}$:

$$W^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1,r_2\mathbf{s}_2,\nu) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \mathscr{A}(\mathbf{s}_{1\perp},\mathbf{s}_{2\perp},\nu)\frac{\mathrm{e}^{ik(r_2-r_1)}}{r_1r_2}\cos\theta_1\cos\theta_2. \tag{5.6.51}$$

Здесь $\mathbf{s}_{1\perp} \equiv (s_{1x}, s_{1y}, 0)$ и $\mathbf{s}_{2\perp} \equiv (s_{2x}, s_{2y}, 0)$ — проекции, рассматриваемые как двумерные векторы, единичных векторов $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ на плоскость $z = 0$, $\mathscr{A}(\mathbf{s}_{1\perp}, \mathbf{s}_{2\perp}, \nu) \equiv \mathscr{A}(s_{1x}, s_{1y}; s_{2x}, s_{2y}; \nu)$, θ_1 и θ_2 — углы, которые составляют единичные вектора $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ с положительным направлением оси z (см. рис. 5.6).

Сравнивая формулу (5.6.51) с уравнением (5.3.4), мы видим, что угловая корреляционная функция и взаимная интенсивность излучения связаны простой формулой:

$$L(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \nu) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \mathscr{A}(\mathbf{s}_{1\perp}, \mathbf{s}_{2\perp}, \nu) \cos\theta_1 \cos\theta_2. \tag{5.6.52}$$

Интенсивность излучения $J(\mathbf{s}, \nu)$ поля, согласно (5.2.14), представляет собой «диагональный элемент» взаимной интенсивности излучения. Таким образом, из (5.6.52) следует, что интенсивность излучения связана с «диагональным элементом» угловой корреляционной функции следующей формулой

$$J(\mathbf{s}, \nu) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \mathscr{A}(\mathbf{s}_\perp, \mathbf{s}_\perp, \nu) \cos^2\theta. \tag{5.6.53}$$

Если подставить уравнения (5.6.52) и (5.6.53) в (5.3.12), то мы получим следующее выражение для спектральной степени когерентности дальнего поля через угловую корреляционную функцию:

$$\mu^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2, \nu) = \frac{\mathscr{A}(\mathbf{s}_{1\perp}, \mathbf{s}_{2\perp}, \nu)}{[\mathscr{A}(\mathbf{s}_{1\perp}, \mathbf{s}_{1\perp}, \nu)]^{1/2}[\mathscr{A}(\mathbf{s}_{2\perp}, \mathbf{s}_{2\perp}, \nu)]^{1/2}} \, e^{ik(r_2 - r_1)}. \tag{5.6.54}$$

Ввиду уравнения (5.6.48) первый множитель в правой части (5.6.54), очевидно, представляет собой количественную меру корреляции, которая существует между модами плоской волны поля, распространяющихся в направлениях, задаваемых единичными векторами $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$. По этой причине этот множитель иногда называют *степенью угловой корреляции* поля.

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на флуктуирующее поле, за исключением того, что оно представляется статистическим стационарным, в широком смысле, ансамблем и распространяется в полупространство $z > 0$. Предположим теперь, что поле имеет структуру луча и распространяется в окрестности оси z. Интенсивность излучения такого поля $J(\mathbf{s}, \nu)$ будет отлична от нуля только для тех направлений $\mathbf{s}$, которые лежат в узком телесном угле около оси z. Согласно (5.6.53), это означает, что $|\mathscr{A}(\mathbf{s}_\perp, \mathbf{s}_\perp, \nu)|$ будет иметь отличные от нуля значения только при $\mathbf{s}_\perp^2 \ll 1$. Следовательно, ввиду неравенства

$$|\mathscr{A}(\mathbf{s}_{1\perp}, \mathbf{s}_{2\perp}, \nu)| \leqslant [\mathscr{A}(\mathbf{s}_{1\perp}, \mathbf{s}_{1\perp}, \nu)]^{1/2}[\mathscr{A}(\mathbf{s}_{2\perp}, \mathbf{s}_{2\perp}, \nu)]^{1/2}, \tag{5.6.55}$$

которое сразу следует из (5.6.54) и из того факта, что абсолютное значение спектральной степени когерентности не может быть больше единицы[1] [см. (4.3.48)], $|\mathscr{A}(\mathbf{s}_{1\perp}, \mathbf{s}_{2\perp}, \nu)|$ будет иметь отличные от нуля значения только когда $|\mathbf{s}_{1\perp}| \ll 1$ и $|\mathbf{s}_{2\perp}| \ll 1$. Таким образом, уравнение (5.6.47) суть представление взаимной спектральной плотности луча, который распространяется вблизи направления оси z, при условии, что

$$|\mathscr{A}(p, q; p, q; \nu)| \approx 0, \quad \text{если не } p^2 + q^2 \ll 1. \tag{5.6.56}$$

Используя (5.6.49), можно легко выразить условие для частично когерентного луча через ограничение на граничное значение взаимной спектральной плотности на плоскости $z = 0$, а именно: величина $W^{(0)}(x_1, y_1, 0; x_2, y_2, 0; \nu)$ должна содержать только низкие пространственно-частотные антидиагональные компоненты, т.е.

$$\left|\widetilde{W}^{(0)}(-u, -v; u, v; \nu)\right| \approx 0, \quad \text{если не } u^2 + v^2 \ll k^2. \tag{5.6.57}$$

Из (5.6.46а) следует, что когда $p_1^2 + q_1^2 \ll 1$ и $p_2^2 + q_2^2 \ll 1$, m_1 и m_2 можно аппроксимировать следующим образом:

$$m_1 \approx 1 - \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2), \quad m_2 \approx 1 - \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2). \tag{5.6.58}$$

[1] Этот аргумент доказывает неравенство (5.6.55) только тогда, когда $\mathbf{s}_{1\perp}$ и $\mathbf{s}_{2\perp}$ связаны с однородными волнами в представлении углового спектра поля, потому что в (5.6.64) $|\mathbf{s}_{1\perp}| \leqslant 1$ и $|\mathbf{s}_{2\perp}| \leqslant 1$. Эта область значений, которая представляет здесь интерес. Однако неравенство (5.6.55) справедливо в более общем виде $|\mathscr{A}(p_1, q_1; p_2, q_2; \nu)| \leqslant [\mathscr{A}(p_1, q_1; p_1, q_1; \nu)]^{1/2}[\mathscr{A}(p_2, q_2; p_2, q_2; \nu)]^{1/2}$ для всех действительных переменных p_1, q_1, p_2, q_2, неважно, имеет ли оно отношение к однородным волнам ($p^2 + q^2 \leqslant 1$) или к затухающим ($p^2 + q^2 > 1$). Это общее соотношение можно получить непосредственно из определения (5.6.48) для угловой корреляционной функции при использовании неравенства Шварца.

Используя эти приближения в (5.6.47), мы видим, что взаимную спектральную плотность луча, распространяющегося в окрестности положительного направления оси z, можно выразить в виде

$$W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)=\mathrm{e}^{ik(z_2-z_1)}\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty}\mathscr{A}(p_1,q_1;p_2,q_2;\nu)\,\mathrm{e}^{ik(p_2x_2+q_2y_2-p_1x_1-q_1y_1)}\times$$
$$\times\,\mathrm{e}^{ik[(p_1^2+q_1^2)z_1-(p_2^2+q_2^2)z_2]/2}\,dp_1\,dq_1\,dp_2\,dq_2. \quad (5.6.59)$$

Мы заметим, что взаимная спектральная плотность (5.6.59) луча для любого состояния когерентности идентична взаимной спектральной плотности *ансамбля монохроматических лучей* с одинаковыми частотами ν, спектральные амплитуды которых $a(p,q,\nu)$ являются случайными переменными, и с корреляционной функцией $\mathscr{A}(p_1,q_1;p_2,q_2;\nu)=\langle a^*(p_1,q_1;\nu)a(p_2,q_2;\nu)\rangle$. Подставляя (5.6.11) в (5.6.44), меняя порядок операций усреднения и интегрирования и сравнивая результирующее выражение с (5.6.59), мы сразу получим этот результат.

Если подставить в правую часть (5.6.59) выражение (5.6.49) для угловой корреляционной функции и перейти от переменных интегрирования p_1,q_1,p_2,q_2 к $u_1=-kp_1,v_1=-kq_1,u_2=kp_2,v_2=kq_2$, то мы получим следующее представление для взаимной спектральной плотности луча в полупространстве $z>0$ через фурье-образ ее граничных значений на плоскости $z=0$:

$$W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)=\mathrm{e}^{ik(z_2-z_1)}\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{W}^{(0)}(u_1,v_1;u_2,v_2;\nu)\,\mathrm{e}^{ik(u_1x_1+v_1y_1+u_2x_2+v_2y_2)}\times$$
$$\times\,\mathrm{e}^{[i/(2k)][(u_1^2+v_1^2)z_1-(u_2^2+v_2^2)z_2]}\,du_1\,dv_1\,du_2\,dv_2. \quad (5.6.60)$$

Можно также легко выразить взаимную спектральную плотность луча в полупространстве $z>0$ через граничные значения взаимной спектральной плотности на плоскости $z=0$, не прибегая к преобразованию Фурье. Для этой цели мы подставим (5.6.50) для $\widetilde{W}^{(0)}$ в правую часть (5.6.60) и поменяем порядок интегрирования. Тогда мы получим формулу

$$W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)=\mathrm{e}^{ik(z_2-z_1)}\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty}W(x_1',y_1',0;x_2',y_2',0;\nu)G^*(x_1-x_1',y_1-y_1',z_1)\times$$
$$\times\,G(x_2-x_2',y_2-y_2',z_2)\,dx_1'\,dy_1'\,dx_2'\,dy_2', \quad (5.6.61)$$

где G — функция Грина (5.6.15), явный вид которой определяется формулой (5.6.17).

5.6.4. Гауссовские лучи модели Шелла

Применим некоторые общие результаты, которые мы только что получили при изучении свойств лучей, создаваемых плоскими, вторичными, гауссовскими источниками модели Шелла. Такие источники имеют взаимные спектральные плотности вида (5.4.7), а именно,

$$W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\nu)=[S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\nu)]^{1/2}[S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_2,\nu)]^{1/2}g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1,\nu), \quad (5.6.62)$$

где

$$S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu)=A^2(\nu)\,\mathrm{e}^{-\rho^2/2\sigma_S^2(\nu)}, \quad (5.6.63)$$

$$g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)=\mathrm{e}^{-\rho'^2/2\sigma_g^2(\nu)}, \quad (5.6.64)$$

представляющие собой взаимную спектральную плотность и спектральную степень когерентности света на плоскости источника, A, σ_S и σ_g — положительные величины. В разд. 5.4.2 мы показали, что при

соответствующем выборе величин σ_S и σ_g такие источники могут генерировать поле, интенсивность излучения $J(\mathbf{s},\nu)$ которого имеет отличные от нуля значения в пределах конуса узкого телесного угла, другими словами, могут генерировать луч. Такие лучи называются *гауссовскими лучами модели Шелла.*

Подставляя (5.6.63) и (5.6.64) в (5.6.62), получим для $W^{(0)}$ выражение

$$W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\nu)=A^2\,\mathrm{e}^{-(a\rho_1^2+a\rho_2^2-2b\boldsymbol{\rho}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_2)}, \tag{5.6.65}$$

где (без указания явной зависимости от частоты ν)

$$a=\frac{1}{4\sigma_S^2}+\frac{1}{2\sigma_g^2},\quad b=\frac{1}{2\sigma_g^2}. \tag{5.6.66}$$

Так как $W^{(0)}$ имеет вращательную симметрию относительно начала координат на плоскости источника $z=0$, то ясно, что взаимная спектральная плотность $W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ поля в полупространстве $z>0$, в которое по предположению излучает источник, будет иметь вращательную симметрию относительно оси z. Следовательно, удобно определить местоположение каждой точки $\mathbf{r}(x,y,z)$ в полупространстве с помощью переменных $\boldsymbol{\rho}$, z, где $\boldsymbol{\rho}$ — двумерный поперечный вектор с компонентами (x,y). Взаимная спектральная плотность $W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ тогда будет функцией переменных $\boldsymbol{\rho}_1$, z_1, $\boldsymbol{\rho}_2$, z_2 и ν и, следовательно, мы будем писать $W(\boldsymbol{\rho}_1,z_1;\boldsymbol{\rho}_2,z_2;\nu)$. Мы будем обозначать четырехмерный фурье-образ (5.6.50) функции взаимной спектральной плотности поля на плоскости источника как $\widetilde{W}^{(0)}(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\nu)$, а не в виде $\widetilde{W}^{(0)}(u_1,v_1;u_2,v_2;\nu)$, где $\mathbf{f}_1=(u_1,v_1)$ и $\mathbf{f}_2=(u_2,v_2)$ — двумерные пространственно-частотные векторы. В этих обозначениях выражение (5.6.60) для взаимной спектральной плотности поля, в соответствующем приближении для луча, принимает форму

$$W(\boldsymbol{\rho}_1,z_1;\boldsymbol{\rho}_2,z_2;\nu)=\mathrm{e}^{ik(z_2-z_1)}\iint\widetilde{W}^{(0)}(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{f}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_1+\mathbf{f}_2\cdot\boldsymbol{\rho}_2)}\,\mathrm{e}^{[i/(2k)](f_1^2z_1-f_2^2z_2)}\,d^2f_1\,d^2f_2, \tag{5.6.67}$$

где согласно (5.6.50)

$$\widetilde{W}^{(0)}(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\nu)=\frac{1}{(2\pi)^4}\iint W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1',\boldsymbol{\rho}_2',\nu)\,\mathrm{e}^{-i(\mathbf{f}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_1'+\mathbf{f}_2\cdot\boldsymbol{\rho}_2')}\,d^2\rho_1'\,d^2\rho_2'. \tag{5.6.68}$$

Интегрирование в правой части (5.6.67) выполняется по всей плоскости переменных $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, соответственно, а в (5.6.68) интегрирование выполняется независимо дважды по плоскости источника $z=0$.

При подстановке (5.6.65) в (5.6.68) мы получим следующее выражение для четырехмерного фурье-образа взаимной спектральной плотности распределения поля в плоскости гауссовского источника модели Шелла:

$$\widetilde{W}^{(0)}(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\nu)=\frac{A^2}{(2\pi)^4}\iint\mathrm{e}^{-(a\rho_1'^2+a\rho_2'^2-2b\boldsymbol{\rho}_1'\cdot\boldsymbol{\rho}_2')}\,\mathrm{e}^{-i(\mathbf{f}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_1'+\mathbf{f}_2\cdot\boldsymbol{\rho}_2')}\,d^2\rho_1'\,d^2\rho_2'. \tag{5.6.69}$$

Этот четырехмерный фурье-образ можно вычислить с помощью формулы (5.6.16). В результате, после громоздких, но простых вычислений, мы имеем

$$\widetilde{W}^{(0)}(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\nu)=\frac{A^2}{(4\pi)^2(a^2-b^2)}\,\mathrm{e}^{-(\alpha f_1^2+\alpha f_2^2+2\beta\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2)}, \tag{5.6.70}$$

где

$$\alpha=\frac{a}{4(a^2-b^2)},\quad \beta=\frac{b}{4(a^2-b^2)}. \tag{5.6.71}$$

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на параметры, которые бы обеспечивали генерацию луча гауссовским источником модели Шелла. При подстановке (5.6.70) с $\mathbf{f}_1=(-u,-v)$, $\mathbf{f}_2\equiv(u,v)$ в общее условие для луча (5.6.57) мы получим требуемое условие. Тогда находим, что для генерации луча гауссовским источником модели Шелла мы должны иметь

$$\mathrm{e}^{-2(\alpha-\beta)f^2}\approx 0,\quad \text{если не } f^2\ll k^2. \tag{5.6.72}$$

Экспоненциальный член в (5.6.72) равен единице, когда $f = 0$, и уменьшается в e раз при $2(\alpha - \beta)f^2 = 1$. Таким образом, экспоненциальный член будет давать вклад только когда $f^2 \lesssim 1/2(\alpha - \beta)$. Следовательно, требование (5.6.72) будет выполняться, если

$$\frac{1}{2(\alpha - \beta)} \ll k^2. \tag{5.6.72a}$$

Если подставить (5.6.71) для α и β и вспомнить определения (5.6.66) параметров a и b, а также использовать соотношение $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны, то мы получим следующее необходимое и достаточное условие для генерации луча от плоского, вторичного, гауссовского источника модели Шелла:

$$\frac{1}{(2\sigma_S)^2} + \frac{1}{\sigma_g^2} \ll \frac{2\pi^2}{\lambda^2}. \tag{5.6.73}$$

Рассмотрим два предельных случая:

(а) Когда $\sigma_g \gg \sigma_S$, источник является пространственно когерентным, и условие для луча (5.6.73) теперь означает, что

$$\sigma_S \gg \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{2}}. \tag{5.6.74}$$

Следовательно, грубо говоря, эффективные линейные размеры источника должны быть больше длины волны.

(б) Когда $\sigma_g \ll \sigma_S$, источник является квазиоднородным (в глобальном смысле, пространственно некогерентным — ср. разд. 5.3.2), и условие для луча означает, что

$$\sigma_g \gg \frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}}. \tag{5.6.75}$$

Следовательно, длина корреляции света в плоскости источника должна быть больше длины волны, т.е. для генерации луча квазиоднородный источник должен быть локально когерентным.

Вернемся теперь к более общему случаю. Предполагая, что условие для луча (5.6.73) выполняется, мы получим, при подстановке (5.6.70) в (5.6.67), следующее интегральное представление взаимной спектральной плотности луча, генерируемого гауссовским источником модели Шелла:

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2; \nu) = \frac{A^2}{(4\pi)^2(a^2 - b^2)} \mathrm{e}^{ik(z_2 - z_1)} \times \iint \mathrm{e}^{-(\gamma_1 f_1^2 + \gamma_2 f_2^2 + 2\beta \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2)} \mathrm{e}^{i(\mathbf{f}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1 + \mathbf{f}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}_2)} \, d^2 f_1 \, d^2 f_2, \tag{5.6.76}$$

где

$$\gamma_1 = \alpha - \frac{iz_1}{2k}, \quad \gamma_2 = \alpha + \frac{iz_2}{2k}. \tag{5.6.77}$$

Четырехкратное преобразование Фурье в правой части (5.6.76) можно снова вычислить при помощи формулы (5.6.16), и тогда мы получим следующее выражение для взаимной спектральной плотности:

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2; \nu) = \\ = \frac{A^2}{16(a^2 - b^2)(\gamma_1\gamma_2 - \beta^2)} \mathrm{e}^{ik(z_2 - z_1)} \exp\left[-\frac{1}{4(\gamma_1\gamma_2 - \beta^2)}(\gamma_2\rho_1^2 + \gamma_1\rho_2^2 - 2\beta\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_2)\right]. \tag{5.6.78}$$

Здесь константы α, β, γ_1 и γ_2 определяются уравнениями (5.6.71) и (5.6.77), в которых константы a и b связаны с параметрами источника σ_S и σ_g уравнением (5.6.66).

Теперь мы обсудим некоторые детали формулы (5.6.78). В частности, мы изучим корреляции в двух точках в поперечном сечении луча, а также распределение спектральной плотности по всему лучу.

Положим $z_2 = z_1 = z$ в (5.6.78) и используем аббревиатуру $W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z; \nu)$ для $W(\boldsymbol{\rho}_1, z; \boldsymbol{\rho}_2, z; \nu)$. Тогда формула (5.6.78) принимает вид

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z; \nu) = \frac{A^2}{16(a^2 - b^2)(\gamma\gamma^* - \beta^2)} \exp\left[-\frac{1}{4(\gamma\gamma^* - \beta^2)}(\gamma\rho_1^2 + \gamma^*\rho_2^2 - 2\beta\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_2)\right], \tag{5.6.79}$$

где

$$\gamma = \alpha + \frac{iz}{2k} \tag{5.6.80}$$

и γ^* — комплексно-сопряженная величина γ. После некоторых манипуляций выражению (5.6.79) можно придать более приемлемую, с физической точки зрения, форму. Мы рассмотрим только основные этапы вычислений.

Из определения (5.6.66) следует, что

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{4\sigma_S^2\delta^2}, \tag{5.6.81}$$

где

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{(2\sigma_S)^2} + \frac{1}{\sigma_g^2}. \tag{5.6.82}$$

Заметим, что параметр δ представляет собой ту же самую величину, которая входит в условие для луча (5.6.73); мы сталкивались с этим раньше [см. (5.4.14)] в связи с теоремой эквивалентности для интенсивности излучения.

Из уравнений (5.6.80), (5.6.71) и (5.6.81) мы получаем

$$\gamma\gamma^* - \beta^2 = [\frac{1}{2}\sigma_S\delta\Delta(z)]^2, \tag{5.6.83}$$

где

$$\Delta(z) = +[1 + (z/k\sigma_S\delta)^2]^{1/2}. \tag{5.6.84}$$

По причинам, которые скоро станут очевидными, величину $\Delta(z)$ иногда называют *коэффициентом расширения* луча. Отметим, что $\Delta(z) > \Delta(0)$. Из выражений (5.6.80), (5.6.81) и (5.6.83) мы сразу находим, что

$$\frac{A^2}{16(a^2 - b^2)(\gamma\gamma^* - \beta^2)} = \frac{A^2}{[\Delta(z)]^2}. \tag{5.6.85}$$

Также используя формулы (5.6.71) и (5.6.80) для γ, α, β и выражение (5.6.83), находим, что

$$\frac{\gamma\rho_1^2 + \gamma^*\rho_2^2 - 2\beta\boldsymbol{\rho}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_2}{4(\gamma\gamma^* - \beta^2)} = \frac{1}{[\sigma_S\delta\Delta(z)]^2}\left[\frac{a\rho_1^2 + a\rho_2^2 - 2b\boldsymbol{\rho}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_2}{4(a^2 - b^2)} + \frac{iz}{2k}(\rho_1^2 + \rho_2^2)\right]. \tag{5.6.86}$$

Выражение в правой части (5.6.86) можно выразить в более простой форме. Рассмотрим сначала его действительную часть. Если подставить выражение (5.6.66) для параметров a и b и использовать (5.6.81), то после громоздких вычислений мы находим

$$\frac{1}{[\sigma_S\delta\Delta(z)]^2}\frac{a\rho_1^2 + a\rho_2^2 - 2b\boldsymbol{\rho}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_2}{4(a^2 - b^2)} = \frac{(\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2)^2}{8\sigma_S^2[\Delta(z)]^2} + \frac{(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2}{2\delta^2[\Delta(z)]^2}. \tag{5.6.87}$$

Далее рассмотрим мнимую часть выражения в правой части (5.6.86). Если вспомнить определение для $\Delta(z)$ (5.6.84), то мы легко найдем

$$\frac{iz}{2k[\sigma_S\delta\Delta(z)]^2}(\rho_1^2 - \rho_2^2) = \frac{ik(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{2R(z)}, \tag{5.6.88}$$

где

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{k\sigma_S\delta}{z}\right)^2\right]. \tag{5.6.89}$$

Добавляя уравнения (5.6.87) и (5.6.88) и используя (5.6.86), для экспоненты в последнем множителе в правой части (5.6.79) мы получим следующее выражение:

$$\frac{\gamma\rho_1^2 + \gamma^*\rho_2^2 - 2\beta\boldsymbol{\rho}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_2}{4(\gamma\gamma^* - \beta^2)} = \frac{(\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2)^2}{8\sigma_S^2[\Delta(z)]^2} + \frac{(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2}{2\delta^2[\Delta(z)]^2} + \frac{ik(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{2R(z)}. \tag{5.6.90}$$

Наконец, при подстановке уравнений (5.6.85) и (5.6.90) в (5.6.79), мы получим следующее выражение, ранее полученное Фрайбергом и Судолом (Friberg and Sudol, 1982; см. также Friberg and Sudol, 1983), для взаимной спектральной плотности в любом поперечном сечении луча, создаваемого плоским, вторичным, гауссовским источником модели Шелла:

$$W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,z;\nu)=\frac{A^2}{[\Delta(z)]^2}\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{\rho}_1+\boldsymbol{\rho}_2)^2}{8\sigma_S^2[\Delta(z)]^2}\right]\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1)^2}{2\delta^2[\Delta(z)]^2}\right]\exp\left[\frac{ik(\rho_1^2-\rho_2^2)}{2R(z)}\right]. \tag{5.6.91}$$

В качестве частичной проверки уравнения (5.6.91) рассмотрим его предельную форму при $z\to 0$. Из уравнений (5.6.84) и (5.6.89) мы видим, что $\Delta(0)=1$ и $1/R(0)=0$ и, следовательно,

$$W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,0;\nu)=A^2\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{\rho}_1+\boldsymbol{\rho}_2)^2}{8\sigma_S^2}\right]\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1)^2}{2\delta^2}\right]. \tag{5.6.92}$$

Если вспомнить определение (5.6.82) параметра δ, то мы легко проверим, что уравнение (5.6.92) согласуется с предполагаемым выражением (5.6.65) для взаимной спектральной плотности на плоскости источника $z=0$.

Мы видим, что $W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,0;\nu)$ представляет собой произведение трех членов, а именно, постоянного множителя A^2 и двух гауссовских распределений, первое из которых является функцией суммы $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$, а второе — их разности. Сравнивая (5.6.91) и (5.6.92), мы видим, что, когда свет распространяется от плоскости источника $z=0$ к любой поперечной плоскости $z=\text{const}>0$, взаимная спектральная плотность сохраняет тот же вид, за исключением того, что приобретает фазовый множитель[1] $k(\rho_2^2-\rho_1^2)/2R(z)$. Первый множитель A^2 сводится к $A^2/[\Delta(z)]^2$. Второй и третий множители опять представляют собой гауссовские распределения суммы и разности поперечных переменных, но их эффективные ширины увеличиваются с ростом z, σ_S заменяется на $\sigma_S\Delta(z)$ и δ — на $\delta\Delta(z)$. По этой причине мы называем $\Delta(z)$ коэффициентом расширения луча. На рис. 5.21 показано поведение $\Delta(z)$ и $R(z)$ для некоторых значений параметра $q=\sigma_g/\sigma_S$ [см. (5.5.11)], который характеризует степень глобальной когерентности.

Далее мы рассмотрим предельную форму формулы (5.6.91) для случая, когда гауссовский источник модели Шелла является полностью пространственно когерентным, т.е. когда его спектральная степень когерентности $g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}')\equiv 1$. В этом случае, как мы видим из (5.6.64), $\sigma_g\to\infty$, и параметр δ (5.6.82) имеет значение (где нижний индекс с означает когерентный предел)

$$\delta_c=2\sigma_S; \tag{5.6.93}$$

выражения (5.6.84) и (5.6.89) принимают вид

$$\Delta_c(z)=\left[1+\left(\frac{z}{2k\sigma_S^2}\right)^2\right]^{1/2},\qquad R_c(z)=z\left[1+\left(\frac{2k\sigma_S^2}{z}\right)^2\right]. \tag{5.6.94}$$

Формула (5.6.91) для взаимной спектральной плотности принимает вид

$$W_c(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,z;\nu)=\frac{A^2}{[\Delta_c(z)]^2}\exp\left[-\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{4\sigma_S^2[\Delta_c(z)]^2}\right]\exp\left[\frac{ik(\rho_2^2-\rho_1^2)}{2R_c(z)}\right]. \tag{5.6.95}$$

Заметим, что эту формулу можно выразить в факторизованном виде

$$W_c(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,z;\nu)=U_c^*(\boldsymbol{\rho}_1,z;\nu)U_c(\boldsymbol{\rho}_2,z;\nu), \tag{5.6.96}$$

где

$$U_c(\boldsymbol{\rho},z;\nu)=\frac{A}{\Delta_c(z)}\exp\left[-\frac{\rho^2}{4\sigma_S^2[\Delta_c(z)]^2}\right]\exp\left[\frac{ik\rho^2}{2R_c(z)}\right]\exp[i\phi_c(z)], \tag{5.6.97}$$

[1] Смысл этого фазового множителя можно понять, рассматривая разложение луча по когерентным модам. Обнаружено (Gori, 1983), что каждая когерентная мода содержит фазовый множитель $k\rho^2/2R(z)$, который связан с кривизной его волнового фронта. Это, в свою очередь, означает, что взаимная спектральная плотность луча в любом поперечном сечении будет содержать фазовый множитель $k(\rho_2^2-\rho_1^2)/2R(z)$.

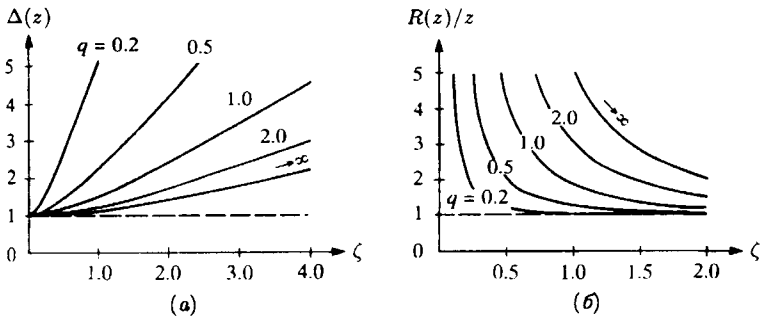


Рис. 5.21. *а* — Поведение коэффициента расширения $\Delta(z)$ (5.6.84) и *б* — величины $R(z)/z$ (5.6.89), для гауссовского луча модели Шелла, как функции нормированного расстояния $\zeta = z/k\sigma_S^2$ от плоскости источника, для некоторых значений степени глобальной когерентности $q = \sigma_g/\sigma_S$. Значения $q \gg 1$ и $q \ll 1$ соответствуют лучам, которые создаются пространственно когерентными и некогерентными источниками, соответственно

где $\phi_c(z)$ — некоторая функция z. Эту функцию можно было бы определить, если рассматривать когерентный предел взаимной спектральной плотности $W(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2; \nu)$ в точках $(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)$, $(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)$ в двух разных поперечных сечениях, а не в точках $(\boldsymbol{\rho}_1, z)$, $(\boldsymbol{\rho}_2, z)$ в одном и том же поперечном сечении, потому что когда $z_2 = z_1 = z$, в произведении $U_c^*(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \nu)U_c(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \nu)$ исчезает экспоненциальный член $\exp[i\phi_c(z)]$. Тот факт, что выражение (5.6.91) факторизуется, означает, что луч является пространственно полностью когерентным на частоте ν (см. разд. 4.5.3) в любом поперечном сечении $z = \text{const} > 0$, что и следовало ожидать. Более того, можно легко проверить, выбирая соответствующим образом $\phi_c(z)$, что выражение (5.6.97) согласуется (если не принимать во внимание обозначения) с более ранним выражением (5.6.35) для монохроматического гауссовского луча.

Теперь вернемся к более общему случаю для луча, создаваемого гауссовским источником модели Шелла для любого состояния когерентности. Если положить $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}$ в (5.6.91), то мы получим следующее выражение для спектральной плотности (т.е. оптической интенсивности на частоте ν) поля луча:

$$S(\boldsymbol{\rho}, z; \nu) = \frac{A^2}{[\Delta(z)]^2} \exp\left[-\frac{\rho^2}{4\sigma_S^2[\Delta(z)]^2}\right]. \tag{5.6.98}$$

Мы видим, что в любом поперечном сечении луча, спектральная плотность на частоте ν имеет гауссовский профиль и значение $A^2/[\Delta(z)]^2$ на оси луча $\rho = 0$. Если определить *радиус луча* $\bar{\rho}_S(z)$ в поперечном сечении $z = \text{const} > 0$ как значение ρ, при котором спектральная плотность на частоте ν уменьшается в e раз относительно своего значения на оси, то мы сразу видим из (5.6.98), что

$$\bar{\rho}_S(z) = \sigma_S \Delta(z)\sqrt{2}. \tag{5.6.99}$$

Так как согласно (5.6.84) $\Delta(0) = 1$, то

$$\bar{\rho}_S(0) = \sigma_S\sqrt{2}, \tag{5.6.100}$$

и из формул (5.6.99), (5.6.100) и (5.6.84) следует, что радиус луча изменяется с расстоянием z в соответствии с «законом расширения луча»

$$\bar{\rho}_S(z) = [\bar{\rho}_S^2(0) + \bar{\theta}_S^2 z^2]^{1/2}, \tag{5.6.101}$$

где, если используется (5.6.82),

$$\bar{\theta}_S^2 = \frac{2}{k^2\delta^2} = \frac{2}{k^2}\left[\frac{1}{(2\sigma_S)^2} + \frac{1}{\sigma_g^2}\right]. \tag{5.6.102}$$

Из (5.6.101) мы видим, что при $z \to \infty$

$$\frac{\bar{\rho}_S(z)}{z} \sim \bar{\theta}_S, \tag{5.6.103}$$

так что $\bar{\theta}_S$ представляет собой *угловое расхождение луча*[1].

[1] Следует отметить, что мы определяем угловое расхождение (частично когерентного) луча на основе уменьшения спектральной плотности в e раз, тогда как для монохроматического гауссовского луча [см. (5.6.40)] мы определяли угловое расхождение на основе уменьшения в e раз амплитуды поля.

На рис. 5.22 показано увеличение радиуса луча при увеличении расстояния z от источника для некоторых значений параметров σ_S и σ_g, которые, согласно уравнениям (5.6.63) и (5.6.64) характеризуют эффективный размер источника и эффективную спектральную ширину когерентности источника. Рис. 5.22*а* показывает, для случая лучей с одинаковыми начальными радиусами, что лучи, которые являются более когерентными, т.е. для которых σ_g больше, являются, соответственно, более направленными. Рис. 5.22*б* демонстрирует, для случая лучей с одинаковой спектральной степенью когерентности, что лучи, которые имеют меньший исходный радиус, являются менее направленными.

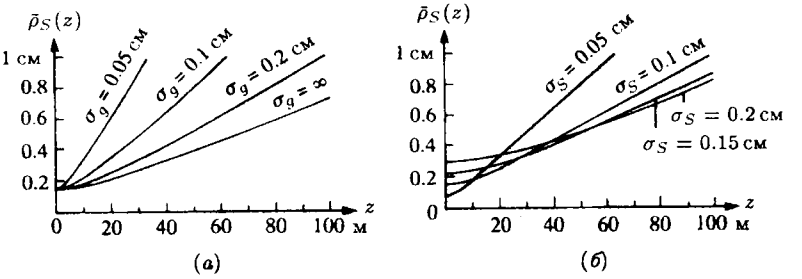


Рис. 5.22. *а* — Радиусы лучей, как функции расстояния z, для гауссовских лучей модели Шелла с одинаковыми начальными радиусами ($\sigma_S = 0.1$ см), но с разной степенью когерентности. Длина волны каждого луча выбиралась равной 6328 Å; *б* — Радиусы лучей с одинаковой начальной спектральной степенью когерентности ($\sigma_g = 0.2$ см), но с разными исходными радиусами. Длина волны была снова выбрана равной 6328 Å. (Foley and Zubairy, 1978)

Рис. 5.23 показывает z-зависимость радиусов лучей для четырех лучей, которые удовлетворяют условиям теоремы эквивалентности для интенсивности излучения (разд. 5.4.2). Мы видим, что при увеличении расстояния от источников, радиусы лучей стремятся к одному и тому же значению, несмотря на тот факт, что источники имеют разные эффективные размеры и разные спектральные ширины когерентности.

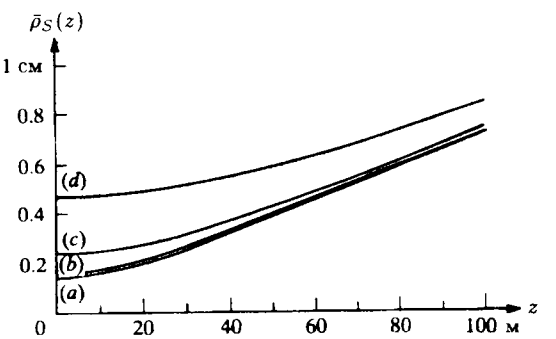


Рис. 5.23. Радиусы для гауссовского луча модели Шелла как функции расстояния z от четырех источников, которые удовлетворяют условиям теоремы эквивалентности для интенсивности излучения (ср. разд. 5.4.2) и, следовательно, имеют одинаковое угловое расхождение $\tilde{\theta}_S$. Параметры для источников, генерирующие эти лучи, равны: (*a*) $\sigma_S = 0.1$ см и $\sigma_g = \infty$, (*b*) $\sigma_S = 0.109$ см и $\sigma_g = 0.5$ см, (*c*) $\sigma_S = 0.167$ см и $\sigma_g = 0.25$ см, (*d*) $\sigma_S = 0.328$ см и $\sigma_g = 0.21$ см. Длина волны каждого луча равна 6328 Å. (Foley and Zubairy, 1978)

В дополнение к угловому расхождению луча можно также определить полное угловое распределение для интенсивности излучения. Для этого мы используем уравнение (5.2.12) и тот факт, что когда поле является лучеобразным, можно заменить r на z в пределе дальней зоны, т.е.

$$J(\mathbf{s}, \nu) = \lim_{kz \to \infty} z^2 S(\boldsymbol{\rho}, z; \nu), \tag{.6.104}$$

где направление $\mathbf{s}$ и, следовательно, угол $\theta = \rho/z$, являются фиксированными. Теперь согласно (5.6.84)

$$\Delta(z) \sim \frac{z}{k\sigma_S \delta} \quad \text{при } kz \to \infty \tag{5.6.105}$$

и, если подставить (5.6.105) в (5.6.98), а затем подставить результирующее выражение в (5.6.84), находим

$$J(\mathbf{s}, \nu) \sim (kA\sigma_S\delta)^2 \mathrm{e}^{-(k\delta)^2\theta^2/2}. \tag{5.6.106}$$

Это формула согласуется с «лучевым пределом» ($\cos\theta \approx 1, \sin\theta \approx \theta$) уравнения (5.4.16), которое мы получили раньше другим способом в связи с теоремой эквивалентности для интенсивности излучения от гауссовских источников модели Шелла.

Теперь рассмотрим спектральную степень когерентности луча. При подстановке (5.6.91) в (4.3.47) и использовании (5.6.82) находим, что спектральная степень когерентности луча в любом поперечном сечении

определяется выражением

$$\mu(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z; \nu) = \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2}{2\delta_g^2[\Delta(z)]^2}\right] \exp\left[\frac{ik(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{2R(z)}\right]. \tag{5.6.107}$$

Мы видим, что абсолютное значение μ определяется гауссовским распределением. Так как согласно (5.6.84) $\Delta(z)$ увеличивается с ростом z, область когерентности света в поперечном сечении луча также возрастает при увеличении z. Если определить *спектральную ширину когерентности* $\bar{\rho}_\mu(z)$ луча как такое расстояние $|\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1|$ между точками в поперечном сечении, при котором $|\mu|$ спадает в e раз относительно его максимального значения, равного единице (для $|\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1| = 0$), то из (5.6.107) мы видим, что

$$\bar{\rho}_\mu(z) = \sigma_g \Delta(z)\sqrt{2}. \tag{5.6.108}$$

Сравнивая это выражение для спектральной ширины когерентности с формулой (5.6.99) для радиуса луча, мы видим, что обе величины подчиняются одному и тому же «закону расширения», и

$$\frac{\bar{\rho}_\mu(z)}{\bar{\rho}_S(z)} = \frac{\sigma_g}{\sigma_S}. \tag{5.6.109}$$

Эта формула означает, что *отношение спектральной ширины когерентности света в любом поперечном сечении луча к его радиусу в этом сечении остается постоянным при его распространении*, т.е. одним и тем же для всех сечений. Более того, это постоянное отношение представляет собой не что иное как степень глобальной когерентности источника [см. (5.5.11)]. В более общем случае отношение $\bar{\rho}_\mu(z')/\bar{\rho}_S(z')$ можно рассматривать как степень глобальной когерентности света на плоскости $z = z'$. Таким образом, уравнение (5.6.109) означает, что *степень глобальной когерентности света в любом поперечном сечении гауссовского луча модели Шелла является инвариантом при его распространении.*

Если подставить в (5.6.108) выражение (5.6.84) для $\Delta(z)$ и использовать выражение (5.6.82), мы получим следующую явную формулу для зависимости спектральной ширины когерентности (на частоте ν) от z:

$$\bar{\rho}_\mu(z) = [\bar{\rho}_\mu^2(0) + \bar{\theta}_\mu^2 z^2]^{1/2}, \tag{5.6.110}$$

где

$$\bar{\rho}_\mu(0) = \sigma_g\sqrt{2}, \tag{5.6.111}$$

$$\bar{\theta}_\mu^2 = \frac{2}{k^2}\left(\frac{\sigma_g}{\sigma_S}\right)^2 \frac{1}{\delta^2} = \frac{2}{k^2}\left(\frac{\sigma_g}{\sigma_S}\right)^2 \left[\frac{1}{(2\sigma_S)^2} + \frac{1}{\sigma_g^2}\right]. \tag{5.6.112}$$

Из (5.6.110) следует, что при $z \to \infty$

$$\frac{\bar{\rho}_\mu(z)}{z} \sim \bar{\theta}_\mu. \tag{5.6.113}$$

Следовательно, $\bar{\theta}_\mu$ представляет собой половину угла конуса телесного угла с вершиной в начале координат, в пределах которого свет в любом поперечном сечении в дальней зоне является пространственно когерентным на частоте ν. По этой причине $\bar{\theta}_\mu$ иногда называют *углом когерентности дальней зоны.*

Из (5.6.111) и (5.6.102) следует, что

$$\bar{\rho}_\mu(0)\bar{\theta}_S = \frac{1}{k}\left[4 + \left(\frac{\sigma_g}{\sigma_S}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{5.6.114}$$

а из (5.6.100) и (5.6.112)

$$\bar{\rho}_S(0)\bar{\theta}_\mu = \frac{1}{k}\left[4 + \left(\frac{\sigma_g}{\sigma_S}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{5.6.115}$$

Эти формулы являются доказательством двух *соотношений взаимности* между гауссовским источни-

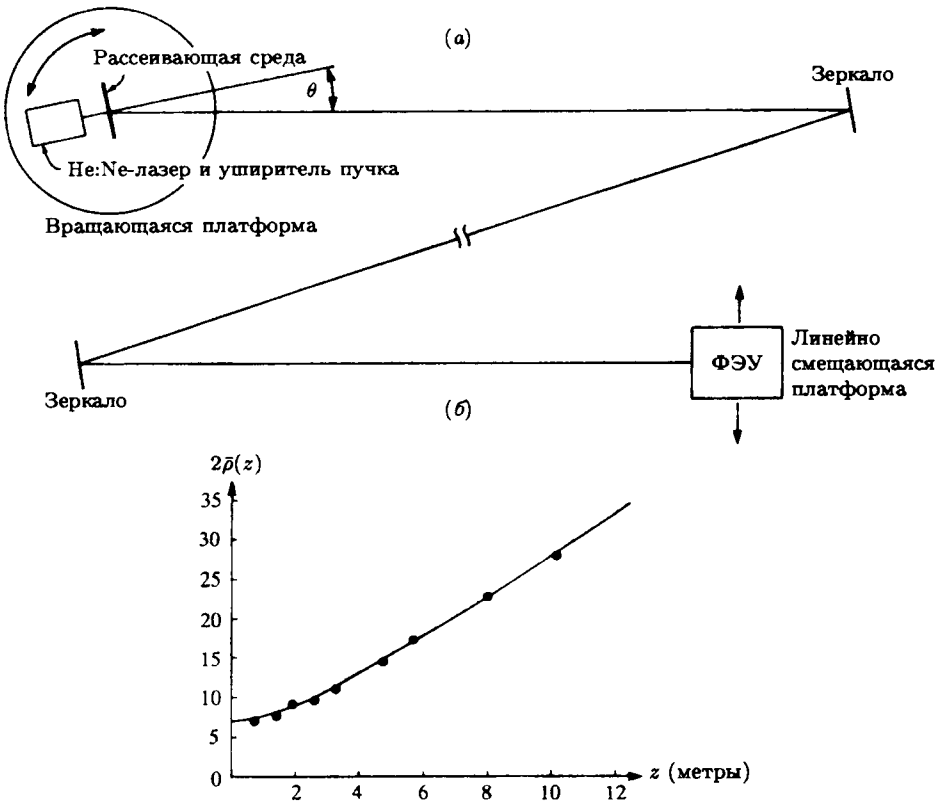


Рис. 5.24. *а* — Экспериментальная установка для измерения углового распределения интенсивности излучения, создаваемого плоскими, вторичными, гауссовскими квазиоднородными источниками; *б* — Эффективный диаметр луча $2\bar{\rho}_S(z)$ как функция расстояния z от источника. Сплошная линия на рис. *б* была получена теоретически. Точки представляют результаты измерений (Farina, Narducci and Collett, 1980)

ком модели Шелла, который генерирует луч, и поведением луча в дальней зоне[1]: Первое уравнение [см. (5.6.114)] показывает, что угловое расхождение луча обратно пропорционально спектральной ширине когерентности света на плоскости источника. Второе уравнение [см. (5.6.115)] показывает, что угол когерентности дальней зоны обратно пропорционален эффективному линейному размеру источника.

Если подставить выражения (5.6.111) и (5.6.100) в (5.6.114) и (5.6.115) для $\bar{\rho}_\mu(0)$ и $\bar{\rho}_S(0)$ и вспомнить, что $k = 2\pi\lambda$, соотношения взаимности можно выразить в виде

$$\bar{\theta}_S = \left(\frac{\lambda}{2\pi\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sigma_g}\left[4+\left(\frac{\sigma_g}{\sigma_S}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{5.6.116а}$$

$$\bar{\theta}_\mu = \left(\frac{\lambda}{2\pi\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sigma_S}\left[4+\left(\frac{\sigma_g}{\sigma_S}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{5.6.116б}$$

Заметим, что в особом случае, когда источник является когерентным в глобальном смысле ($\sigma_g \gg \sigma_S$), формулы (5.6.116а) и (5.6.116б) принимают вид

$$\bar{\theta}_S \approx \left(\frac{\lambda}{2\pi\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sigma_S}, \quad \bar{\theta}_\mu \approx \left(\frac{\lambda}{2\pi\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sigma_g}{\sigma_S}\right)\frac{1}{\sigma_S}. \tag{5.6.117}$$

[1]Соотношения взаимности, которые применяются к широкому классу частично когерентных источников и дальних полей, которые они создают, были сформулированы Фрайбергом и и Вольфом (Friberg and Wolf, 1983)

Когда источник является некогерентным в глобальном смысле ($\sigma_g \ll \sigma_S$), т.е. он представляет собой квазиоднородный источник, выражения (5.6.116а) и (5.6.116б) принимают вид

$$\bar{\theta}_S \approx \left(\frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sigma_g}, \quad \bar{\theta}_\mu \approx \left(\frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sigma_S}. \tag{5.6.118}$$

Некоторые из теоретических результатов, обсуждаемых в этом разделе, были проверены экспериментально Фариной, Нардуччи и Колеттом (Farina, Narducci and Collett, 1980). Вторичный гауссовский квазиоднородный источник был образован путем освещения соответствующего фазового экрана лучом от гелий-неонового лазера, который уширялся и коллимировался телескопической системой. Фазовый экран создавался при помощи распыления водяных капель на прозрачной стеклянной подложке. Водяная пыль образовывала равномерное шероховатое покрытие, толщина которого могла контролироваться изменением количества напыления. Напыленная пластинка была установлена на вращающийся вал синхронного мотора, который поворачивал пластинку без значительных колебаний. Когда вращающаяся пластинка освещалась лазером, свет непосредственно за пластинкой и параллельный к ней представлял собой вторичный источник с требуемыми свойствами. Этот источник генерировал луч, который мог распространяться на разные расстояния при помощи системы зеркал [см. рис. 5.24*а*]. Измерения для луча были сделаны при помощи охлажденного фотоумножителя, закрепленного на подвижной платформе. Используя это устройство, были определены диаметры луча на разных расстояниях от вторичного источника. Было обнаружено, что результаты, которые изображены на рис. 5.24*б*, находятся в хорошем согласии с теорией. Другие теоретические предсказания, относящиеся к лучам, создаваемым вторичными гауссовскими квазиоднородными источниками, были также проверены при помощи этой экспериментальной установки.

5.7. Основы радиометрии

До сих пор мы изучали свойства полей, создаваемых флуктуирующими источниками, в рамках классической теории когерентности второго порядка. В основу этой теории положены волновое уравнение физической оптики и некоторые элементарные статистические методы. Однако существует наиболее старая теория, называемая радиометрией[1], которая иногда используется для описания и анализа характеристик излучения источников. В основе этой теории лежит идея, согласно которой, в области пространства, содержащей излучение, энергия распространяется вдоль геометрических траекторий, т.е. вдоль световых лучей. Эта модель используется, главным образом, при рассмотрении тепловых источников и была успешно использована при анализе задач, которые встречаются, например, в осветительной технике. Обобщением радиометрии является *теория переноса энергии излучения*, которая расширяет возможности радиометрической модели при исследовании распространения излучения как в детерминированных, так и в случайных средах[2]. Эта теория является основным инструментом исследований в астрофизике и имеет многочисленные приложения в других областях.

Радиометрия и теория переноса энергии излучения развивались вполне независимо от современных теорий излучения и, несмотря на продолжительную историю, их основы не были до конца поняты (Wolf, 1978). В этом разделе мы обсудим результаты исследований, которые проясняют в некоторой степени этот вопрос. В основном, мы ограничимся анализом связи между некоторыми основными понятиями этих более старых дисциплин и основными понятиями теории оптической когерентности.

Мы начнем с краткого обсуждения закона сохранения энергии в скалярных волновых полях.

5.7.1. Плотность энергии, поток энергии и закон сохранения энергии в скалярных волновых полях

Плотность энергии и плотность потока энергии представляют собой две важные величины, которые связаны с любым электромагнитым полем. Первая величина является скалярной, вторая — векторной.

[1]Обзор ранней работы в этой области приводится в статье Тротера (Trotter, 1919). Оказывается, радиометрия была систематизирована в начале двадцатого века в связи с теорией теплового излучения. *Теория теплового излучения* Макса Планка, первое издание которого вышло в 1906 году, остается до сих пор одним из исчерпывающих обзоров в этом области.

[2]Обзоры по теории переноса энергии излучения можно найти, например, в книге Хопфа (Hopf, 1934) или Чандрасекхара (Chandrasekhar, 1960). Некоторые из основных работ в этой области были переизданы в Менцеле (Menzel, 1966).

Они связаны хорошо известным законом сохранения энергии, известным как теорема Пойнтинга (см., например, Born and Wolf, 1980, разд. 1.1.4). Со скалярными волновыми полями можно также связать скалярные и векторные плотности, которые подчиняются тому же самому закону сохранения и которые можно рассматривать как аналог плотности энергии и плотности потока энергии электромагнитного поля. В этом разделе мы введем эти величины для скалярных волновых полей, получим соответствующий закон сохранения и обсудим некоторые его детали. Мы будем рассматривать как детерминированные, так и случайные волновые поля.

Пусть $V(\mathbf{r},t)$ будет комплексным детерминированным волновым полем в области свободного пространства. Оно удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}, \tag{5.7.1}$$

где c — скорость света в вакууме. Общетеоретические рассмотрения поля предполагают (см., например, Венцель, 1949, разд. 8), что (действительную) скалярную величину

$$H(\mathbf{r},t) = \alpha\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial V^*}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla V^* \cdot \nabla V\right] \tag{5.7.2}$$

можно рассматривать как плотность энергии, а действительный вектор

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},t) = -\alpha\left[\frac{\partial V^*}{\partial t}\nabla V + \frac{\partial V}{\partial t}\nabla V^*\right] \tag{5.7.3}$$

как вектор плотности потока энергии. Здесь α — положительная константа, значение которой зависит от выбора единиц.

Если продифференцировать по времени H и взять дивергенцию от $\mathbf{F}$ и использовать (5.7.1), то мы легко найдем, что

$$\frac{\partial H(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{5.7.4}$$

Проинтегрируем (5.7.4) по области D. Это дает

$$\int_D \frac{\partial H}{\partial t}\, d^3r + \int_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, d^3r = 0. \tag{5.7.5}$$

Если в первом члене мы поменяем операции интегрирования и дифференцирования и применим теорему Гаусса ко второму члену, то уравнение (5.7.5) примет вид

$$\frac{d}{dt}\int_D H(\mathbf{r},t)\, d^3r + \int_\sigma \mathbf{F}(\mathbf{r},t)\cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0, \tag{5.7.6}$$

где второй интеграл берется по поверхности σ, ограничивающей объем D, $\mathbf{n}$ — внешняя единичная нормаль к элементу $d\sigma$ области D. Формуле (5.7.6) можно дать следующую интерпретацию. Скорость увеличения (или уменьшения) энергии, заключенной в объеме D, в данный момент времени t равна скорости, с которой энергия входит (или выходит) в (из) объема D через граничную поверхность σ. В этой интерпретации уравнение (5.7.6) представляет собой *закон сохранения энергии* поля. Формула (5.7.4) представляет собой дифференциальную форму этого закона.

Физический смысл вектора потока энергии $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$ должен интерпретироваться, как можно видеть из следующих рассуждений, с некоторым предостережением. Согласно элементарному векторному исчислению, имеет место тождество $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) \equiv 0$, где $\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$ — любая векторная дважды непрерывно дифференцируемая по пространственным переменным функция. Следовательно, уравнения (5.7.4) и (5.7.6) не изменятся, если к $\mathbf{F}$ добавить ротор любого достаточно регулярного векторного поля $\mathbf{f}$. Это показывает, что вектор плотности потока $\mathbf{F}$ (5.7.3) не является единственным вектором, согласующимся с законом сохранения энергии. Эти замечания указывают на то, что нельзя рассматривать $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$ как представление скорости потока энергии в точке $\mathbf{r}$ за время t. Физический смысл имеет только интеграл от нормальной

компоненты вектора потока энергии, взятый по любой замкнутой поверхности в области пространства, содержащей поле[1].

Далее предположим, что комплексная функция $V(\mathbf{r},t)$ является аналитическим сигналом, который представляет монохроматическое поле с частотой ν, т.е.

$$V(\mathbf{r},t) = U(\mathbf{r},\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}. \tag{5.7.7}$$

Выражения (5.7.2) и (5.7.3) для плотности энергии и для вектора плотности потока вектора теперь принимают вид, (где $k = 2\pi\nu/c$),

$$H_\nu(\mathbf{r}) = \alpha k^2\left[U^*U + \frac{1}{k^2}\boldsymbol{\nabla}U^*\cdot\boldsymbol{\nabla}U\right], \tag{5.7.8}$$

$$\mathbf{F}_\nu(\mathbf{r}) = -i\alpha kc[U^*\boldsymbol{\nabla}U - U\boldsymbol{\nabla}U^*], \tag{5.7.9}$$

где вместо $H(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$ мы записали $H_\nu(\mathbf{r})$ и $\mathbf{F}_\nu(\mathbf{r})$, чтобы подчеркнуть, что эти величины теперь не зависят от t, а зависят от частоты ν. Дифференциальная форма [см. (5.7.4)] закона сохранения энергии принимает теперь вид

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}_\nu(\mathbf{r}) = 0. \tag{5.7.10}$$

До сих пор мы считали переменную поля детерминированной. Предположим теперь, что она является случайной и представляет собой флуктуирующее оптическое поле. Полагая, что флуктуации можно представить в виде статистического стационарного, в широком смысле, ансамбля, взаимную спектральную плотность поля можно выразить в виде [ср. (4.7.38)]

$$W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = \langle U^*(\mathbf{r}_1,\nu)U(\mathbf{r}_2,\nu)\rangle. \tag{5.7.11}$$

Здесь угловые скобки означают усреднение, которое осуществляется по соответствующему ансамблю строго монохроматических волновых полей с частотами ν. Тогда средняя плотность энергии и плотность потока энергии на частоте ν определяются математическим ожиданием выражений (5.7.8) и (5.7.9), а именно,

$$\langle H_\nu(\mathbf{r})\rangle = \alpha k^2\left[\langle U^*U\rangle + \frac{1}{k^2}\langle\boldsymbol{\nabla}U^*\cdot\boldsymbol{\nabla}U\rangle\right], \tag{5.7.12}$$

$$\langle\mathbf{F}_\nu(\mathbf{r})\rangle = -i\alpha kc\,[\langle U^*\boldsymbol{\nabla}U\rangle - \langle U\boldsymbol{\nabla}U^*\rangle]. \tag{5.7.13}$$

Кроме того, усредняя по ансамблю (5.7.10) и меняя порядок усреднения и дифференцирования, мы получим дифференциальную форму закона сохранения для случайных статистически стационарных волновых полей:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\langle\mathbf{F}_\nu(\mathbf{r})\rangle = 0. \tag{5.7.14}$$

При использовании (5.7.11) мы можем выразить $\langle H_\nu\rangle$ и $\langle\mathbf{F}_\nu\rangle$ через взаимную спектральную плотность, а не через ансамбль $\{U\}$, тогда мы находим

$$\langle H_\nu(\mathbf{r})\rangle = \alpha k^2\left[W(\mathbf{r},\mathbf{r},\nu) + \frac{1}{k^2}\lim_{\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}}\lim_{\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}}\boldsymbol{\nabla}_2\cdot\boldsymbol{\nabla}_1 W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\right], \tag{5.7.15}$$

$$\langle\mathbf{F}_\nu(\mathbf{r})\rangle = -i\alpha kc\lim_{\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}}\lim_{\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}}[\boldsymbol{\nabla}_2 W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) - \boldsymbol{\nabla}_1 W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)]. \tag{5.7.16}$$

Иногда бывает полезным записать эквивалентное выражение для среднего вектора плотности потока энергии, которое включает один, а не два предельных перехода. Его можно получить следующим образом. Положим

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \tag{5.7.17}$$

Тогда мы имеем $W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = W(\mathbf{r}-\frac{1}{2}\mathbf{r}',\mathbf{r}+\frac{1}{2}\mathbf{r}',\nu)$, где

$$W(\mathbf{r}-\tfrac{1}{2}\mathbf{r}',\mathbf{r}+\tfrac{1}{2}\mathbf{r}',\nu) = \langle U^*(\mathbf{r}-\tfrac{1}{2}\mathbf{r}',\nu)U(\mathbf{r}+\tfrac{1}{2}\mathbf{r}',\nu)\rangle. \tag{5.7.18}$$

[1] В этой связи имеет смысл процитировать Лоренца (Lorentz, 1909, с. 25): «в общем случае невозможно проследить за движением энергии в том же самом смысле, в котором мы можем проследить за движением элементарных частиц, переносящих энергию.»

Если применить к обеим частям уравнения (5.7.18) оператор градиента ∇', действующий на «переменную разности» $\mathbf{r}'$, изменить порядок дифференцирования и усреднения и затем перейти к пределу $\mathbf{r}' \to 0$, то мы получим формулу

$$\lim_{\mathbf{r}'\to 0} \nabla'\{W(\mathbf{r}-\tfrac{1}{2}\mathbf{r}', \mathbf{r}+\tfrac{1}{2}\mathbf{r}', \nu)\} = \frac{1}{2}\langle U^*(\mathbf{r})\nabla U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r})\nabla U^*(\mathbf{r})\rangle.$$

Сравнивая эту формулу с (5.7.13), мы получим альтернативное выражение для среднего вектора плотности потока энергии:

$$\langle \mathbf{F}_\nu(\mathbf{r})\rangle = -2i\alpha kc \lim_{\mathbf{r}'\to 0} \nabla' W(\mathbf{r}-\tfrac{1}{2}\mathbf{r}', \mathbf{r}+\tfrac{1}{2}\mathbf{r}', \nu). \tag{5.7.19}$$

Также существует другое выражение и для $\langle H_\nu(\mathbf{r})\rangle$, включающее единственный предельный переход, которое можно получить из (5.7.15):

$$\langle H_\nu(\mathbf{r})\rangle = -2\alpha \lim_{\mathbf{r}'\to 0} \nabla'^2 W(\mathbf{r}-\tfrac{1}{2}\mathbf{r}', \mathbf{r}+\tfrac{1}{2}\mathbf{r}', \nu). \tag{5.7.20}$$

Предположим теперь, что точка поля $P(\mathbf{r})$ находится в дальней зоне плоского излучающего источника, который занимает конечную область на плоскости $z = 0$ и излучает в полупространство $z > 0$. Мы покажем, что существуют простые соотношения между плотностью энергии, вектором плотности потока энергии и спектральной плотностью в точке P. Чтобы это продемонстрировать, мы сначала представим каждый член статистического ансамбля $\{U(\mathbf{r}, \nu)\}$, описывающего поле в полупространстве $z > 0$, в виде углового спектра плоских волн [см. (3.2.19), в котором мы заменяем k_0 на k, а также осуществляем тривиальные изменения для других обозначений], а именно

$$U(\mathbf{r}, \nu) = \int a(\mathbf{s}'_\perp, \nu)\, e^{ik\mathbf{s}'\cdot\mathbf{r}}\, d^2\mathbf{s}'_\perp, \tag{5.7.21}$$

где $\mathbf{s}' \equiv (s'_x, s'_y, s'_z)$, $\mathbf{s}'_\perp \equiv (s'_x, s'_y, 0)$ и

$$s'_z = +[1 - s'^2_x - s'^2_y]^{1/2} \quad \text{при } s'^2_x + s'^2_y \leqslant 1, \tag{5.7.22а}$$

$$s'_z = +i[s'^2_x + s'^2_y - 1]^{1/2} \quad \text{при } s'^2_x + s'^2_y > 1. \tag{5.7.22б}$$

Непосредственно из (5.7.21) следует, что

$$\nabla U(\mathbf{r}, \nu) = ik \int \mathbf{s}' a(\mathbf{s}'_\perp, \nu)\, e^{ik\mathbf{s}'\cdot\mathbf{r}}\, d^2\mathbf{s}'_\perp. \tag{5.7.23}$$

Ранее мы показали [см. (3.2.22)], что выражение (5.7.21) в дальней зоне, когда точка $\mathbf{r} = r\mathbf{s}$, ($\mathbf{s}^2 = 1$) удаляется в дальнюю зону ($kr \to \infty$) в направлении $\mathbf{s}$, имеет вид

$$U^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \nu) = -\frac{2\pi i}{k} \cos\theta\, a(\mathbf{s}_\perp, \nu) \frac{e^{ikr}}{r}. \tag{5.7.24}$$

Из этого выражения, или же применяя к интегралу (5.7.23) принцип стационарной фазы, мы находим, что

$$\nabla U^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \nu) = 2\pi \cos\theta\, a(\mathbf{s}_\perp, \nu) \frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{s}. \tag{5.7.25}$$

В этих формулах θ обозначает угол между единичным вектором $\mathbf{s}$ и положительным направлением оси z, $\mathbf{s}_\perp$ — проекция, рассматриваемая как двумерный вектор, единичного вектора $\mathbf{s}$ на плоскость источника $z = 0$ (см. рис. 5.18). Подставляя уравнения (5.7.4) и (5.7.25) в формулы (5.7.12) и (5.7.13), мы получим следующие выражения для средних плотности энергии и вектора плотности потока энергии в дальней зоне источника:

$$\langle H_\nu^{(\infty)}(\mathbf{r})\rangle = 2(2\pi)^2 \alpha \mathscr{A}(\mathbf{s}_\perp, \mathbf{s}_\perp, \nu) \frac{\cos^2\theta}{r^2}, \tag{5.7.26}$$

$$\langle \mathbf{F}_\nu^{(\infty)}(\mathbf{r})\rangle = 2(2\pi)^2 \alpha c \mathscr{A}(\mathbf{s}_\perp, \mathbf{s}_\perp, \nu) \frac{\cos^2\theta}{r^2}\mathbf{s}. \tag{5.7.27}$$

В этих формулах

$$\mathscr{A}(\mathbf{s}_\perp, \mathbf{s}_\perp, \nu) = \langle a^*(\mathbf{s}_\perp, \nu) a(\mathbf{s}_\perp, \nu) \rangle \tag{5.7.28}$$

— «диагональный элемент» угловой корреляционной функции излучаемого поля [ср. (5.6.48)]. Он связан с взаимной спектральной плотностью поля на плоскости источника уравнением (5.6.49). Теперь из (5.2.12) и (5.6.53) следует, что спектральная плотность дальнего поля $S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \nu) = W^{(\infty)}(r\mathbf{s}, r\mathbf{s}, \nu) = J(\mathbf{s}, \nu)/r^2$ выражается в виде

$$S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \nu) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \mathscr{A}(\mathbf{s}_\perp, \mathbf{s}_\perp, \nu) \frac{\cos^2\theta}{r^2}. \tag{5.7.29}$$

До сих пор константа α считалась произвольной. Положим теперь

$$\alpha = \frac{1}{2ck^2} = \frac{c}{8\pi^2\nu^2}. \tag{5.7.30}$$

С учетом этого определения из уравнений (5.7.26), (5.7.27) и (5.7.29) мы получаем следующие выражения

$$\langle H_\nu^{(\infty)}(r\mathbf{s}) \rangle = \frac{1}{c} S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \nu), \tag{5.7.31}$$

$$\langle \mathbf{F}_\nu^{(\infty)}(r\mathbf{s}) \rangle = S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \nu)\mathbf{s}. \tag{5.7.32}$$

Формулы (5.7.31) и (5.7.32) означают, что в дальней зоне передачу энергии можно представить как распространение энергии вдоль прямых линий в радиальных направлениях (т.е. в направлениях от начала координат к точке поля) со скоростью света в вакууме. Подчеркнем, что в общем случае эта простая модель является характерной только для передачи энергии в дальней зоне излучающего источника.

Исходя из смысла вектора плотности потока, очевидно, что скорость излучения источника на частоте ν в полупространство $z > 0$ определяется выражением

$$\mathscr{F}_\nu = \int_{(2\pi)} \langle \mathbf{F}_\nu^{(\infty)}(r\mathbf{s}) \rangle \cdot \mathbf{s} r^2 \, d\Omega, \tag{5.7.33}$$

где интегрирование выполняется в пределах телесного угла 2π, образуемого всеми единичными векторами $\mathbf{s}$, направленными в полупространство $z > 0$. Если подставить в эту формулу выражение (5.7.32) для усредненного вектора плотности потока, мы получим выражение для $\mathscr{F}_\nu$

$$\mathscr{F}_\nu = \int_{(2\pi)} r^2 S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \nu) \, d\Omega. \tag{5.7.34}$$

Согласно (5.2.12) подынтегральное выражение в правой части (5.7.34) есть не что иное как интенсивность излучения $J(\mathbf{s}, \nu)$. Таким образом, $\mathscr{F}_\nu$ можно выразить в виде

$$\mathscr{F}_\nu = \int_{(2\pi)} J(\mathbf{s}, \nu) \, d\Omega. \tag{5.7.35}$$

Эта формула показывает, что интенсивность излучения, которую мы ввели в разд. 5.2.1 для анализа поведения спектральной плотности в дальней зоне, представляет собой скорость излучения источником энергии на частоте ν в единицу телесного угла в направлении $\mathbf{s}$.

5.7.2. Основные понятия радиометрии

Главное допущение в радиометрии можно выразить в виде следующего основного радиометрического закона. Скорость $d^2\mathscr{F}_\nu$, с которой излучается энергия на частоте ν в телесный угол $d\Omega$ элементом $d\sigma$ плоского стационарного источника σ, определяется выражением

$$d^2\mathscr{F}_\nu = B_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}) \cos\theta \, d\sigma \, d\Omega. \tag{5.7.36}$$

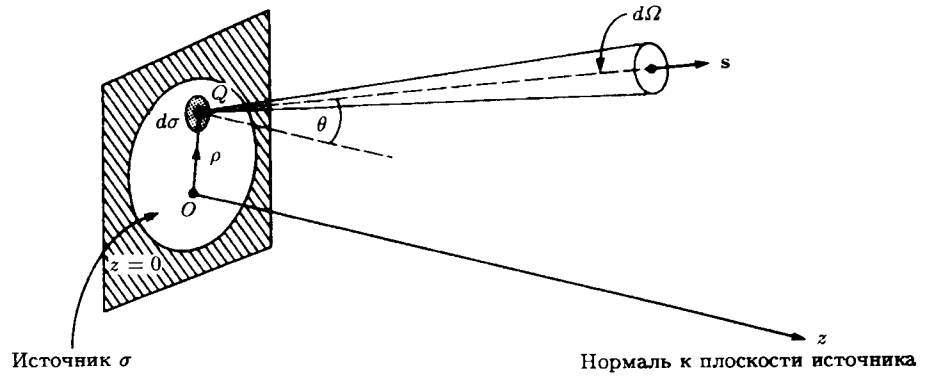


Рис. 5.25. Иллюстрация обозначений, относящихся к определению лучистости $B_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s})$ [см. (5.7.36)]

Здесь $\boldsymbol{\rho}$ — двумерный радиус-вектор точки Q в плоскости источника, на котором расположен элемент $d\sigma$, $\mathbf{s}$ — единичный вектор вдоль оси элемента телесного угла $d\Omega$ и θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$ — угол, который создает единичный вектор $\mathbf{s}$ с нормалью к плоскости источника (рис. 5.25). Функция $B_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s})$ называется *спектральной плотностью энергетической яркости* или *яркостью*. Ввиду ее ясного физического смысла эта величина, очевидно, должна удовлетворять следующим двум требованиям:

$$B_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}) \geqslant 0 \quad \text{при } \boldsymbol{\rho} \in \sigma, \tag{5.7.37а}$$

$$B_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}) = 0 \quad \text{при } \boldsymbol{\rho} \notin \sigma. \tag{5.7.37б}$$

Формула (5.7.36) означает, что скорость $d\mathscr{F}_\nu$, с которой источник излучает энергию на частоте ν в телесный угол $d\Omega$, определяется выражением

$$d\mathscr{F}_\nu = \cos\theta \int_\sigma B_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s})\, d^2\rho, \tag{5.7.38}$$

и что полная скорость $\mathscr{F}_\nu$ излучения источником энергии на частоте ν выражается в виде

$$\mathscr{F}_\nu = \int_{(2\pi)} d\Omega \cos\theta \int_\sigma d^2\rho\, B_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}). \tag{5.7.39}$$

Первый интеграл в правой части уравнения (5.7.39) берется по телесному углу 2π, который стягивается полусферой с центром в области излучающего источника, в полупространстве, в которое излучает источник.

Сравнивая (5.7.39) и (5.7.35), мы видим, что основной радиометрический закон (5.7.36) не будет противоречить физической оптике, если интенсивность излучения выражается через яркость по формуле

$$J(\mathbf{s}, \nu) = \cos\theta \int_\sigma B_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s})\, d^2\rho. \tag{5.7.40}$$

Ранее мы выразили интенсивность излучения через взаимную спектральную плотность $W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu)$ света на плоскости источника [см. (5.3.8) и (5.3.7)]:

$$J(\mathbf{s}, \nu) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \cos^2\theta \int_\sigma\int_\sigma W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu)\, e^{-ik\mathbf{s}_\perp\cdot(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1)}\, d^2\rho_1\, d^2\rho_2. \tag{5.7.41}$$

Сравнивая (5.7.41) и (5.7.40), мы видим, что следующее соотношение должно иметь место для всех действительных единичных векторов $\mathbf{s} \equiv (s_x, s_y, s_z \geqslant 0)$, с $\mathbf{s}_\perp \equiv (s_x, s_y, 0)$:

$$\int_\sigma B_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s})\, d^2\rho = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \cos^2\theta \int_\sigma\int_\sigma W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu)\, e^{-ik\mathbf{s}_\perp\cdot(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1)}\, d^2\rho_1\, d^2\rho_2. \tag{5.7.42}$$

Оказывается, что многие функции $B_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s})$ будут удовлетворять требованию (5.7.42). Однако, как было показано Фрайбергом (Friberg, 1979), ни одна из них не может быть выражена в виде линейного преобразования взаимной спектральной плотности $W^{(0)}$ распределения поля по источнику и при этом удовлетворять ограничениям (5.7.37) для всевозможных источников. Однако, если ослабить некоторые из требований на функцию яркости, можно получить обобщенный вид функции яркости, который является полезным в некоторых приложениях. В связи с этим следует напомнить, что традиционная радиометрия развивалась для исследования излучения от тепловых источников, которые являются пространственно некогерентными. В разд. 5.7.3 мы покажем, что для таких источников, а фактически для более широкого класса квазиоднородных источников, можно ввести обобщенную функцию яркости, которая имеет свойства, обычно характерные для яркости, и которая находится в соответствии с физической оптикой.

Откажемся от требования (5.7.37б) и распространим интегрирование по переменной $\boldsymbol{\rho}$ в (5.7.40) и (5.7.42) на всю плоскость источника, в качестве которой мы выберем плоскость $z = 0$. Поскольку взаимная спектральная плотность $W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu)$ имеет нулевое значение всякий раз когда $\boldsymbol{\rho}_1$ или $\boldsymbol{\rho}_2$ (или оба) представляют собой точки на плоскости $z = 0$, которые расположены вне области источника σ, мы можем формально распространить оба двойных интеграла в правой части (5.7.42) на всю плоскость $z = 0$. Тогда мы получим следующее соотношение

$$\int \mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s})\, d^2\rho = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \cos^2\theta \iint W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu)\, \mathrm{e}^{-ik\mathbf{s}_\perp \cdot (\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)}\, d^2\rho_1\, d^2\rho_2, \tag{5.7.43}$$

в котором все интегралы берутся по всей плоскости $z = 0$ источника. Теперь перейдем от переменных интегрирования $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$ в правой части уравнения (5.7.43) к $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\rho}'$, где

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2), \quad \boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1. \tag{5.7.44}$$

Тогда уравнение (5.6.43) принимает вид

$$\int \mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s})\, d^2\rho = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \cos\theta \iint W^{(0)}(\boldsymbol{\rho} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', \nu)\, \mathrm{e}^{-ik\mathbf{s}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}'}\, d^2\rho\, d^2\rho'. \tag{5.7.45}$$

Очевидно, это соотношение удовлетворяется для (5.7.44)

$$\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \cos\theta \int W^{(0)}(\boldsymbol{\rho} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', \nu)\, \mathrm{e}^{-ik\mathbf{s}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}'}\, d^2\rho'. \tag{5.7.46}$$

Это выражение для обобщенной яркости было введено Вальтером (Walther, 1968) и часто используется при анализе радиометрических задач, в которых рассматриваются частично когерентные источники (см., например, Marchand and Wolf, 1974a). Ввиду наших, более ранних замечаний, не удивительно, что оно может принимать отрицательные значения (Marchand and Wolf, 1974a, b) в нарушение неявного постулата (5.7.37а). Однако, можно видеть, что оно всегда действительно.

Другое возможное (вообще говоря, не эквивалентное) определение обобщенной яркости дается формулой

$$'\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \cos\theta\, \mathrm{e}^{-ik\mathbf{s}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}} \int W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', \nu)\, \mathrm{e}^{-ik\mathbf{s}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}'}\, d^2\rho'. \tag{5.7.47}$$

Для того, чтобы вывести свойства функции $'\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s})$, мы выразим ее в несколько другом виде. Для этой цели представим $W^{(0)}$ в виде (5.7.11), а именно,

$$W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', \nu) = \langle U^{(0)*}(\boldsymbol{\rho}, \nu) U^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu) \rangle. \tag{5.7.48}$$

Подставляя (5.7.48) в (5.7.47), мы находим, что

$$'\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}) = k^2 \cos\theta \langle [U^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu)]^* \tilde{U}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp, \nu) \rangle\, \mathrm{e}^{-ik\mathbf{s}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}}, \tag{5.7.49}$$

где

$$\tilde{U}^{(0)}(\mathbf{f},\nu)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int U^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\rho}'}\,d^2\rho' \tag{5.7.50}$$

— двумерный пространственный фурье-образ $U^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)$.

Из уравнения (5.7.49) следует, что $'\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\mathbf{s})$ представляет собой в общем случае комплексную величину. Однако ее интеграл по переменной $\boldsymbol{\rho}$, взятый по всей плоскости $z=0$, всегда является действительным и неотрицательным. Этот факт непосредственно следует из уравнения (5.7.49), которое дает при интегрировании

$$\int {}'\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\mathbf{s})\,d^2\rho=(2\pi k)^2\cos\theta\langle[U^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp,\nu)]^*\tilde{U}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp,\nu)\rangle\geqslant 0. \tag{5.7.51}$$

Вследствие того, что интеграл имеет действительное значение, он не изменится, если заменить $'\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\mathbf{s})$ на

$$''\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\mathbf{s})=\mathrm{Re}\,{}'\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\mathbf{s}), \tag{5.7.52}$$

где Re означает действительную часть. Поэтому ясно, что при вычислении интенсивности излучения при помощи радиометрической формулы (5.7.40) для функции яркости могло быть использовано любое из выражений (5.7.46), (5.7.47) или (5.7.52). Определение обобщенной яркости, которое эквивалентно $''\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{s})$, было впервые предложено Вальтером (Walther, 1973; см. также Walther, 1978a, b)[1]. Однако, точно так же, как и яркость (5.7.46), $''\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{s})$ может принимать иногда отрицательные значения (Marchand and Wolf, 1974b; Walther, 1974).

Математическая структура формул (5.7.46) и (5.7.47) наводит на мысль о причинах возникновения трудностей при попытке определить функцию яркости в рамках физической оптики. Эти формулы имеют ту же математическую структуру, что и выражения для обобщенных функций распределения в фазовом пространстве, известных также как квазивероятности, которые иногда используются при вычислении среднего значения квантовомеханических операторов при помощи методов, которые аналогичны методам, используемым в классической статистической механике (ср. разд. 11.8). Вследствие того, что такие обобщенные функции распределения являются функциями c-числовых представителей некоммутирующих операторов, они не являются истинными вероятностями[2] и, следовательно, они могут быть отрицательными или даже комплексными. В частности, формула (5.7.46) похожа на выражение для так называемой функции распределения Вигнера (Wigner, 1932)[3], в то время, как формула (5.7.47) имеет сходство с функцией фазово-пространственного распределения, введенной Маргенау и Хиллом (Margenau and Hill, 1961).

Каким бы ни было принято выражение для обощенной функции яркости, оно должно всегда удовлетворять требованию (5.7.39), которое дает правильное значение для скорости излучения источником энергии в полупространство $z>0$. Формулу (5.7.39) можно выразить в двух альтернативных, но эквивалентных формах, а именно,

$$\mathscr{F}_\nu=\int_{(2\pi)} J(\mathbf{s},\nu)\,d\Omega, \tag{5.7.53}$$

и (распространяя интегрирование по переменной $\boldsymbol{\rho}$ на всю плоскость источника)

$$\mathscr{F}_\nu=\int E_\nu(\boldsymbol{\rho})\,d^2\rho. \tag{5.7.54}$$

В первой формуле, которая есть не что иное, как (5.7.35), $J(\mathbf{s},\nu)$ — интенсивность излучения, которая выражается через обобщенную яркость (5.7.40). Интенсивность излучения представляет собой скорость, с которой источник излучает энергию на частоте ν в единицу телесного угла в направлении $\mathbf{s}$. В формуле (5.7.54)

$$E_\nu(\boldsymbol{\rho})=\int_{(2\pi)} B_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\mathbf{s})\cos\theta\,d\Omega \tag{5.7.55}$$

[1] Многие из основных работ, касающихся основ радиометрии, переизданы в *Избранных работах по когерентности и радиометрии*, под ред. А.Т. Фрайберга (A.T. Friberg, 1993).

[2] Невозможность введения функций фазово-пространственного распределения, которые подчинялись бы всем постулатам теории вероятности, была продемонстрирована Вигнером (Wigner, 1971), с. 25.

[3] Более подробно о функции распределения Вигнера см. (Imre, Özizmir, Rosenbaum and Zweifel, 1967).

— другая радиометрическая величина, известная как *энергетическая светимость*. Согласно выражению (5.7.54) можно считать, что она представляет собой скорость, с которой источник излучает энергию на частоте ν с единицы площади источника, являющуюся функцией радиус-вектора $\boldsymbol{\rho}$. Теперь выразим (обобщенную) энергетическую светимость через взаимную спектральную плотность.

Поскольку, как мы уже отмечали, обобщенное излучение не определяется однозначно через взаимную спектральную плотность, то из (5.7.55) следует, что то же самое справедливо для обобщенной энергетической светимости. Мы получим выражение для энергетической светимости, связанной с обобщенной энергетической яркостью (5.7.46). Подставляя (5.7.46) в правую часть (5.7.46), меняя порядок интегрирования и используя выражение для элемента телесного угла $d\Omega = ds_x\, ds_y/\cos\theta$, легко получим

$$\mathscr{E}_\nu(\boldsymbol{\rho}) = \int W^{(0)}(\boldsymbol{\rho} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', \nu) K_\nu(\boldsymbol{\rho}')\, d^2\rho', \tag{5.7.56}$$

где

$$K_\nu(\boldsymbol{\rho}') = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{s_x^2 + s_y^2 \leqslant 1} \cos\theta\, \mathrm{e}^{-ik\mathbf{s}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}'}\, ds_x\, ds_y, \tag{5.7.57}$$

$\mathbf{s}_\perp \equiv (s_x, s_y)$ и $\cos\theta = [1 - s_x^2 - s_y^2]^{1/2}$. Интеграл в правой части (5.7.57) можно легко вычислить, если перейти к полярным координатам интегрирования и использовать интегральное представление (5.3.50) для функции Бесселя $J_0(x)$ и для сферической функции Бесселя, а именно,

$$j_1(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right). \tag{5.7.58}$$

Тогда получаем для ядра $K_\nu(\boldsymbol{\rho}')$ интегрального преобразования (5.7.56) выражение (см. Marchand and Wolf, 1974a)

$$K_\nu(\boldsymbol{\rho}') = \frac{k^2}{2\pi}\left[\frac{j_1(k\rho')}{k\rho'}\right]. \tag{5.7.59}$$

При подстановке (5.7.59) в (5.7.56) мы находим следующее выражение для обобщенной энергетической светимости:

$$\mathscr{E}_\nu(\boldsymbol{\rho}) = \frac{k^2}{2\pi}\int W^{(0)}(\boldsymbol{\rho} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', \nu)\left[\frac{j_1(k\rho')}{k\rho'}\right] d^2\rho'. \tag{5.7.60}$$

Можно показать, что обобщенная энергетическая светимость (5.7.60) может принимать отрицательные значения, указывающие на то, как и в случае энергетической яркости, что в общем случае она не является измеримой величиной.

5.7.3. Функция энергетической яркости от плоских вторичных квазиоднородных источников[1]

Ранее мы упоминали, что радиометрия в значительной степени развивалась в связи с задачами о тепловых источниках, т.е. источниках типа черного тела или таких источниках, излучение от которых можно получить линейной фильтрацией излучения черного тела (см. разд. 13.2). Источники такого типа принадлежат обычно к классу квазиоднородных источников. Следовательно, представляет интерес рассмотреть формы выражений основных радиометрических величин для источников такого вида.

Для плоского, вторичного, квазиоднородного источника взаимная спектральная плотность имеет вид [см. (5.3.16)]

$$W^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu) = S^{(0)}[\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2), \nu)] g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1, \nu), \tag{5.7.61}$$

где спектральная плотность $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu)$ изменяется значительно медленней при изменении $\boldsymbol{\rho}$, чем спектральная степень когерентности $g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu)$ при изменении $\boldsymbol{\rho}'$. Более того, линейные размеры такого источника

[1] Обсуждение этого раздела в значительной степени основано на исследовании Картера и Вольфа (Carter and Wolf, 1977; см. также Friberg, 1981). Для аналогичных вычислений, касающихся гауссовских источников модели Шелла, см. (Baltes and Steinle, 1977) и (Baltes, Steinle and Antes, 1978).

велики по сравнению с его спектральной шириной когерентности распределения света на частоте ν в плоскости источника, т.е. по сравнению с эффективной шириной $|g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu)|$ (см. рис. 5.2).

Если подставить (5.7.61) в (5.7.46), то мы легко получим следующее выражение для одной из обобщенных функций энергетической яркости для квазиоднородного источника:

$$\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}) = k^2 S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu) \tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp, \nu) \cos\theta, \tag{5.7.62}$$

где

$$\tilde{g}^{(0)}(\mathbf{f}, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu)\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\rho}'}\, d\boldsymbol{\rho}' \tag{5.7.63}$$

— двумерный пространственный фурье-образ $g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}')$.

Мы видим, что функция энергетической яркости (5.7.62), имеющая факторизованный вид, является произведением функции от $\boldsymbol{\rho}$ и функции от $\mathbf{s}$ на каждой частоте. Безусловно, первый множитель $k^2 S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu)$ является неотрицательным. Второй множитель $\tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp, \nu)$ — также неотрицателен, так как он представляет собой фурье-образ коэффициента корреляции, который является неотрицательно определенным и, следовательно, согласно теореме Бошнера (разд. 1.4.2)

$$\tilde{g}^{(0)}(\mathbf{f}, \nu) \geqslant 0 \tag{5.7.64}$$

для всех двумерных векторов $\mathbf{f}$. Поскольку $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, последний множитель $\cos\theta$ является также неотрицательным. Таким образом, уравнение (5.7.62) показывает, что *функция энергетической яркости (5.7.46) для квазиоднородного источника должна быть неотрицательной*:

$$\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}) \geqslant 0. \tag{5.7.65}$$

Более того, поскольку спектральная плотность $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu)$ обращается в нуль во всех точках плоскости источника вне области σ, занимаемой источником, то

$$\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}) \equiv 0 \quad \text{при } \boldsymbol{\rho} \notin \sigma. \tag{5.7.66}$$

Таким образом, мы видим, что *энергетическая яркость (5.7.46) для квазиоднородного источника удовлетворяет постулатам (5.7.37а) и (5.7.37б) традиционной радиометрии*. Кроме того, если подставить (5.7.61) в два других определения функции яркости [см. (5.7.47) и (5.7.52)] и использовать тот факт, что $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu)$ изменяется при изменении $\boldsymbol{\rho}$ значительно медленней, чем $g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu)$ изменяется при изменении $\boldsymbol{\rho}'$, то с хорошей степенью точности мы найдем, что каждая их них равна выражению (5.7.62), так что

$$\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}) \approx {}'\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}) = {}''\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{s}), \tag{5.7.67}$$

т.е. *для квазиоднородного источника три определения функции яркости в сущности эквивалентны друг другу*.

Рассмотрим энергетическую светимость. Если подставить (5.7.61) в формулу (5.7.60), мы сразу получим следующее выражение для энергетической светимости для квазиоднородного источника:

$$\mathscr{E}_\nu(\boldsymbol{\rho}) = C_g(\nu) S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu), \tag{5.7.68}$$

где

$$C_g(\nu) = \frac{k^2}{2\pi} \int g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \nu) \left[\frac{j_1(k\rho')}{k\rho'}\right] d\boldsymbol{\rho}'. \tag{5.7.69}$$

Формулы (5.7.68) и (5.7.69) показывают, что *обобщенная энергетическая светимость* [определенная с помощью выражения (5.7.46) для яркости] *для квазиоднородного источника пропорциональна спектральной плотности $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu)$, при этом множитель пропорциональности $C_g(\nu)$ зависит от спектральной степени когерентности распределения света в плоскости источника*. По причинам, которые станут вскоре очевидными, множитель $C_g(\nu)$ иногда называют *коэффициентом отдачи* источника. Его можно выразить

в несколько другом виде, из которого можно легко определить его основные свойства. Если подставить (5.7.62) в (5.7.55) и сравнить результирующее выражение с (5.7.68), то мы найдем

$$C_g(\nu) = k^2 \int_{(2\pi)} \tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp, \nu) \cos^2\theta \, d\Omega. \tag{5.7.70}$$

Так как согласно (5.7.64) $\tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp, \nu) \geqslant 0$ для всех значений своих аргументов, то из (5.7.70) мы видим, что

$$C_g(\nu) \geqslant 0. \tag{5.7.71}$$

Если использовать этот результат для (5.7.68) и тот факт, что спектральная плотность $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu)$ является неотрицательной, то

$$\mathscr{E}_\nu(\boldsymbol{\rho}) \geqslant 0. \tag{5.7.72}$$

Таким образом, *обобщенная энергетическая светимость для квазиоднородного источника*, связанная с обобщенной энергетической яркостью формулой (5.7.46), *обязательно должна быть неотрицательной*. [Ввиду уравнения (5.7.67) то же самое утверждение остается справедливым, если вместо выражения (5.7.46) использовать для энергетической яркости альтернативные выражения — либо (5.7.47), либо (5.7.52)]. Более того, поскольку спектральная плотность $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu)$ равна нулю, когда точка $\boldsymbol{\rho}$ расположена вне площади источника σ, из (5.7.68) следует, что

$$\mathscr{E}_\nu(\boldsymbol{\rho}) \equiv 0 \quad \text{при } \boldsymbol{\rho} \notin \sigma. \tag{5.7.73}$$

Из (5.7.69) можно также получить верхний предел для $C_g(\nu)$. Для этого мы выполним обратное преобразование Фурье выражения (5.7.63), положим $\boldsymbol{\rho}' = 0$ и используем тот факт, что $g^{(0)}(0, \nu) = 1$. Тогда мы находим, что

$$\int_{f^2 \leqslant k^2} \tilde{g}^{(0)}(\mathbf{f}, \nu) \, d^2 f + \int_{f^2 > k^2} \tilde{g}^{(0)}(\mathbf{f}, \nu) \, d^2 f = 1. \tag{5.7.74}$$

Если мы положим $\mathbf{f} = k\mathbf{s}_\perp = (ks_x, ks_y)$ и используем неравенство (5.7.64), то

$$k^2 \iint_{s_x^2 + s_y^2 \leqslant 1} \tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp, \nu) \, ds_x \, ds_y \leqslant 1. \tag{5.7.75}$$

Поскольку $d\Omega = ds_x \, ds_y / \cos\theta$, из уравнений (5.7.75) и (5.7.70) следует, что

$$C_g(\nu) \leqslant 1. \tag{5.7.76}$$

Из неравенства (5.7.76) и выражения (5.7.68) мы видим, что *энергетическая светимость квазиоднородного источника в любой его точке меньше или равна спектральной плотности в этой точке.*

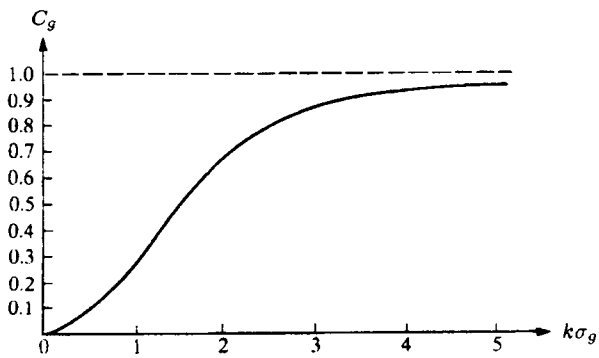


Рис. 5.26. Коэффициент отдачи C_g для плоского, вторичного, гауссовского, коррелированного $[g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}') = \exp(-\rho'^2/2\sigma_g^2)]$, квазиоднородного источника, как функция его нормированной эффективной ширины корреляции $k\sigma_g$ (Wolf and Carter, 1978a)

На рис. 5.26 показано поведение коэффициента отдачи C_g для вторичного, плоского, гауссовского, коррелированного квазиоднородного источника как функции его эффективной спектральной ширины когерентности σ_g. Мы видим, что C_g увеличивается монотонно при изменении σ_g от нулевого значения для полностью некогерентного источника ($\sigma_g \ll \lambda$) к единице для локально когерентного источника ($\sigma_g \gg \lambda$). Было показано, что для ламбертовского квазиоднородного источника величина C_g равна 1/2 (Wolf and Carter, 1978a).

Интенсивность излучения $J(\mathbf{s}, \nu)$, создаваемую квазиоднородным источником, можно получить при подстановке (5.7.62) в (5.7.40). Тогда мы сразу находим, что

$$J(\mathbf{s}, \nu) = (2\pi k)^2 \tilde{S}^{(0)}(0, \nu) \tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp, \nu) \cos^2\theta, \tag{5.7.77}$$

где $\widetilde{S}^{(0)}(0,\nu)$ — фурье-образ распределения спектральной плотности в плоскости источника, полученный для пространственной частоты $\mathbf{f}=0$, т.е.

$$\widetilde{S}^{(0)}(0,\nu)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu)\,d^2\rho. \tag{5.7.78}$$

Выражение (5.7.77) согласуется с формулой (5.3.21), которая была получена другим способом.

В заключение заметим, что скорость, с которой квазиоднородный источник излучает энергию на частоте ν, согласно уравнениям (5.7.54), (5.7.68) и (5.7.78), равна

$$\mathscr{F}_\nu=(2\pi)^2C_g(\nu)\widetilde{S}^{(0)}(0,\nu). \tag{5.7.79}$$

Из этой формулы и (5.7.78) мы видим, что для квазиоднородного источника $\mathscr{F}_\nu$ пропорциональна полной спектральной плотности на частоте ν. Согласно (5.7.69) коэффициент пропорциональности $C_g(\nu)$, $(0\leqslant C_g(\nu)\leqslant 1)$, зависит только от спектральной степени когерентности источника и, следовательно, представляет собой меру «эффективности» излучения, с которой источники, имеющие одинаковую спектральную плотность, но различные спектральные степени когерентности, генерируют излучение. По этой причине $C_g(\nu)$ называют коэффициентом эффективности.

В этом разделе мы продемонстрировали, что радиометрическая модель, применяемая к излучению от квазиоднородных источников, согласуется с физической оптикой, по крайней мере, что касается свойств основных радиометрических величин [см. (5.7.65), (5.7.66), (5.7.72) и (5.7.73)]. Это весьма удовлетворительное заключение, поскольку тепловые источники, для которых разрабатывалась традиционная радиометрия и к которым она, главным образом, применялась, обычно принадлежат к этому классу источников. Для других типов источников радиометрическая модель должна интерпретироваться с некоторым предостережением, потому что энергетическая яркость и энергетическая светимость могут не обладать всеми свойствами, которые обычно им приписываются. Тем не менее, понятия энергетической яркости и энергетической светимости можно всегда использовать при вычислении измеримых радиометрических величин, таких как поток излучения и интенсивность излучения.

5.7.4. Модель переноса энергии излучения

Теория переноса энергии излучения представляет собой обобщение радиометрии, которую мы обсудили в предыдущих разделах. Простая радиометрическая модель (5.7.36) для скорости, с которой энергия излучается из элемента плоского источника, становится более расширенной в том смысле, что энергетическая яркость обобщается на величину поля. Элементом поверхности $d\sigma$ может быть любая часть (вообще говоря, фиктивной) поверхности в области пространства, в котором находится излучение. Тогда, вместо яркости, обычно говорят о *плотности потока* излучения. Мы будем обозначать плотность потока как $I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})$, где $\mathbf{r}$ означает радиус-вектор элемента $d\sigma$, а $\mathbf{s}$ означает единичный вектор, задающий направление. В соответствии с моделью переноса излучения можно считать, что энергия передается через элемент поверхности $d\sigma$ вдоль пучка света. Предполагается, что скорость $d^2\mathscr{F}_\nu$, с которой переносится в стационарном поле энергия на частоте ν через $d\sigma$ в элемент телесного угла $d\Omega$ в направлении $\mathbf{s}$, равна

$$d^2\mathscr{F}_\nu=I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})\cos\theta\,d\sigma\,d\Omega, \tag{5.7.80}$$

где θ — угол между единичным вектором $\mathbf{s}$ и единичным вектором нормали $\mathbf{n}$ к элементу $d\sigma$ (см. рис. 5.27). В частном случае, когда $d\sigma$ совпадает с элементом плоской излучающей поверхности, плотность потока переходит в яркость $B_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})$, и формула (5.7.80) сводится к основному радиометрическому закону (5.7.36). Поскольку согласно (5.7.80) удельная интенсивность представляет собой скорость, с которой передается энергия на частоте ν через единицу спроецированной площади (проекция на плоскость перпендикулярную к $\mathbf{s}$) в единицу телесного угла, необходимо, чтобы она была неотрицательной, т.е.

$$I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})\geqslant 0 \tag{5.7.81}$$

для всех значений аргументов.

В феноменологической теории переноса энергии излучения обычно вводят две другие основные величины, которые выражаются через плотность потока: так называемая *пространственная плотность излучения*, $'H_\nu(\mathbf{r})$ и *результирующий поток* $'\mathbf{F}_\nu(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r}$ на частоте ν. Они определяются формулами (Planck, 1959, разд. 22; Chandrasekhar, 1960, разд. 2.2 и 2.3)

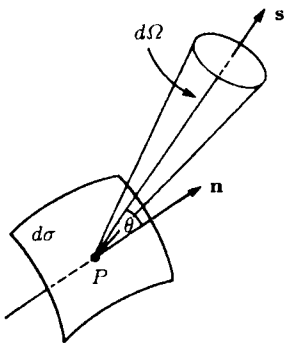


Рис. 5.27. Иллюстрация обозначений, относящихся к определению (5.7.80) плотности потока излучения $I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})$

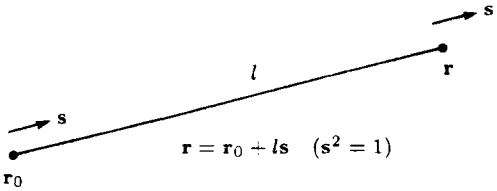


Рис. 5.28. Иллюстрация смысла некоторых символов в (5.7.86)

$$'H_\nu(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int_{(4\pi)} I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})\,d\Omega, \tag{5.7.82}$$

$$'\mathbf{F}_\nu(\mathbf{r}) = \int_{(4\pi)} I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})\mathbf{s}\,d\Omega. \tag{5.7.83}$$

В уравнении (5.7.82) c означает скорость света в вакууме, а интегрирование в (5.7.82) и (5.7.83) распространяется на полный телесный угол 4π, соответствующий всевозможным направлениям единичного вектора $\mathbf{s}$. Вообще говоря, считается само собой разумеющимся, что пространственную плотность излучения $'H_\nu(\mathbf{r})$ можно определить как среднее значение плотности энергии и $'\mathbf{F}_\nu(r)$ — как среднее значение вектора плотности потока энергии в точке $\mathbf{r}$ на частоте ν.

Элементарные рассуждения, в основе которых лежат только простые геометрические аргументы, касающиеся закона сохранения энергии, приводят к интегро-дифференциальному уравнению для распространения плотности потока в любой изотропной среде, которое известно как *уравнение переноса энергии излучения*. Это уравнение можно записать в виде (Hopf, 1934, разд. 2)

$$\mathbf{s}\cdot\nabla I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \\ = -\alpha_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) + \int_{(4\pi)} \beta_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{s}')I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}')\,d\Omega' + D_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}). \tag{5.7.84}$$

Функции $\alpha_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})$, $\beta_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{s}')$ и $D_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})$ известны как *коэффициент затухания, коэффициент дифференциального рассеяния* и *функция источника*, соответственно. Левая часть уравнения (5.7.84) представляет собой скорость изменения плотности потока в направлении $\mathbf{s}$. В правой части первый член — скорость уменьшения энергии, вследствие поглощения в направлении вектора $\mathbf{s}$, второй член (при интегрировании по телесному углу 4π) представляет собой скорость увеличения энергии в направлении вектора $\mathbf{s}$ из-за рассеяния изо всех $\mathbf{s}'$- направлений, а последний член представляет собой скорость, с которой энергия генерируется источниками поля.

Несмотря на широкое использование теории переноса энергии излучения, до сих пор не было получено на основе электромагнитной теории или на основе скалярной волновой теории удовлетворительного вывода ее основного уравнения (5.7.84), за исключением некоторых частных случаев.

Имеет смысл рассмотреть решения уравнения (5.7.84) для двух частных случаев. Когда рассеянием можно пренебречь ($\beta_\nu \approx 0$) и нет источников ($D_\nu = 0$), уравнение сводится к

$$\mathbf{s}\cdot\nabla I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = -\alpha_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}). \tag{5.7.85}$$

Из этого уравнения следует, что удельная интенсивность $I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})$ в любой точке $\mathbf{r}$, связанной с точкой $\mathbf{r}_0$ вектором в направлении $\mathbf{s}$, соотносится с удельной интенсивностью $I_\nu(\mathbf{r}_0,\mathbf{s})$ в точке $\mathbf{r}_0$ по формуле

$$I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = I_\nu(\mathbf{r}_0,\mathbf{s})\exp\left\{-\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \alpha_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})\,dl\right\}, \tag{5.7.86}$$

где интегрирование берется вдоль линии, соединяющей $\mathbf{r}_0$ с $\mathbf{r}$ [см. рис. 5.28]. Формула (5.7.86) известна как *закон Бэра*.

В свободном пространстве ($\alpha_\nu = \beta_\nu = D_\nu = 0$) уравнение для переноса энергии излучения принимает простой вид

$$\mathbf{s}\cdot\nabla I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = 0. \tag{5.7.87}$$

Вскоре будет показано, что уравнение (5.7.87) можно рассматривать как основное уравнение радиометрии в свободном пространстве. Из него следует, что вдоль линии в направлении вектора $\mathbf{s}$, соединяющей две точки $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$, имеем

$$I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = I_\nu(\mathbf{r}_0,\mathbf{s}). \tag{5.7.88}$$

Таким образом, в свободном пространстве плотность потока является постоянной вдоль луча.

5.7.5. Радиометрия как коротковолновой предел статистической волновой теории с квазиоднородными источниками[1]

В разд. 5.7.3 мы ввели обобщенную функцию яркости для плоского, вторичного, квазиоднородного источника. Покажем теперь, что естественное обобщение определения одной из таких функций подходит для представления обобщенной яркости не только для точек на плоскости источника, но также для всех точек полупространства $z > 0$. Мы покажем далее, что в коротковолновом пределе (более точно в асимптотическом пределе при $k \to \infty$) эта функция подчиняется всем основным постулатам традиционной радиометрии и удовлетворяет уравнению (5.7.87), как частному случаю уравнения (5.7.84) переноса энергии излучения для свободного пространства.

Вернемся к определению (5.7.49) для обобщенной яркости, а именно,

$$'\mathscr{B}_\nu(\boldsymbol{\rho},\mathbf{s}) = k^2 s_z \langle [U^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu)]^* \widetilde{U}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp,\nu)\rangle \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mathbf{s}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}}, \tag{5.7.89a}$$

в котором мы использовали соотношение $\cos\theta = s_z$ и вместо U и $\widetilde{U}$ записали U_0 и $\widetilde{U}_0$, чтобы подчеркнуть, что эти величины относятся к точкам плоскости источника $z = 0$. Согласно (3.2.27) можно выразить формулу (5.7.89а) в альтернативной форме

$$'\mathscr{B}_\nu(\boldsymbol{\rho},\mathbf{s}) = s_z \langle [U^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu)]^* a(\mathbf{s}_\perp,\nu)\rangle \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mathbf{s}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}}, \tag{5.7.89б}$$

где $a(\mathbf{s}_\perp,\nu)$ — амплитуда углового спектра (случайного) поля $U(\mathbf{r},\nu)$, создаваемого источником в полупространстве $z > 0$.

Структура формулы (5.7.89б) предполагает следующее обобщение, обозначаемое через $\mathscr{B}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})$, функции $'\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\mathbf{s})$ в точках, соответствующих любым положениям $\mathbf{r} \equiv (x,y,z)$ в полупространстве $z > 0$, в которое источник излучает:

$$\mathscr{B}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = s_z \langle U^*(\mathbf{r},\nu) a(\mathbf{s}_\perp,\nu)\rangle \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}, \tag{5.7.90}$$

где $\mathbf{s} \equiv (s_x, s_y, s_z > 0)$, как обычно, действительный единичный вектор и $\mathbf{s}_\perp \equiv (s_x, s_y, 0)$. Очевидно,

$$\lim_{z\to+0} \mathscr{B}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = '\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\mathbf{s}) \quad [\boldsymbol{\rho} \equiv (x,y,0)]. \tag{5.7.91}$$

Далее мы покажем, что расширение (5.7.90) определения (5.7.89б) имеет физически важное значение для излучения, создаваемого квазиоднородными источниками, по крайней мере, в асимптотическом пределе при $k \to \infty$. Для этого мы сначала выразим переменную поля $U(\mathbf{r},\nu)$ через его граничные значения $U^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu)$ на плоскости $z = 0$, используя дифракционную формулу Рэлея первого рода [см. (3.2.78)], а именно,

$$U(\mathbf{r},\nu) = \int_\sigma U^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu) G(R,\nu)\, d^2\rho, \tag{5.7.92}$$

где

$$G(R,\nu) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\right), \tag{5.7.93}$$

$$R = |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|, \tag{5.7.94}$$

[1] Основная часть представленного в этом разделе анализа основана на исследованиях Фолея и Вольфа (Foley and Wolf, 1985, 1991). Дальнейшие разработки их теории описаны в работах (Wolf, 1994 и Foley and Wolf, 1995).

и интегрирование выполняется по области источника σ. Подставляя (5.7.92) в (5.7.90), меняя порядок усреднения и интегрирования и используя (5.7.89б), мы находим, что

$$\mathscr{B}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \mathrm{e}^{ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} \int_\sigma {}'\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\mathbf{s}) G^*(R,\nu)\, \mathrm{e}^{-ik\mathbf{s}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}}\, d^2\rho. \tag{5.7.95}$$

В общем случае эта величина является комплексной и, следовательно, не может представлять истинную функцию яркости. Однако, как мы покажем, ситуация меняется, когда источник является квазиоднородным, а длина волны излучаемого поля является достаточно короткой.

Для плоского вторичного квазиоднородного источника обобщенная функция яркости на плоскости источника определяется уравнением (5.7.62) [см. также (5.7.67)]. При подстановке этого выражения в (5.7.95) мы получим для $\mathscr{B}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})$ следующее выражение:

$$\mathscr{B}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = k^2 s_z \tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp,\nu) C_\nu^*(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp)\, \mathrm{e}^{ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}, \tag{5.7.96}$$

где

$$C_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp) = \int_\sigma G(R,\nu) S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu)\, \mathrm{e}^{ik\mathbf{s}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}}\, d^2\rho. \tag{5.7.97}$$

В формуле (5.7.96) $\tilde{g}^{(0)}(\mathbf{f},\nu)$ представляет собой двумерный фурье-образ [см. (5.7.63)] спектральной степени когерентности источника, а $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu)$ — спектральная плотность в точке источника.

Рассмотрим теперь поведение выражения (5.7.96) для очень коротких длин волн λ или, более точно, в асимптотическом пределе при $k \equiv 2\pi/\lambda \to \infty$, считая, что этот предельный переход не влияет на источник. Для этой цели продифференцируем сначала правую часть (5.7.93) и подставим результирующее выражение для функции Грина $G(R,\nu)$ в (5.7.97). Тогда мы находим, что

$$C_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp) = C_\nu^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp) + C_\nu^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp), \tag{5.7.98}$$

где

$$C_\nu^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp) = \frac{kz}{2\pi i} \int_\sigma S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu) \frac{\mathrm{e}^{ik\Phi(R,\boldsymbol{\rho})}}{R^2}\, d^2\rho, \tag{5.7.99}$$

$$C_\nu^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp) = \frac{z}{2\pi} \int_\sigma S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu) \frac{\mathrm{e}^{ik\Phi(R,\boldsymbol{\rho})}}{R^3}\, d^2\rho \tag{5.7.100}$$

и

$$\Phi(R,\boldsymbol{\rho}) \equiv \Phi(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp,\boldsymbol{\rho}) = |\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r}| + \mathbf{s}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}. \tag{5.7.101}$$

Когда k становится все больше и больше, экспоненциальный член в выше приведенных интегралах будет, в общем случае, осциллировать все быстрее и быстрее при изменении $\boldsymbol{\rho}$ в области интегрирования (область источника) и может быть вычислен при использовании принципа стационарной фазы для двойных интегралов (разд. 3.3.3). Более того, как очевидно из сравнения двух выражений в правых частях уравнений (5.7.99) и (5.7.100), $C_\nu^{(2)}$ является величиной более низкого порядка по k при $k \to \infty$. Поэтому кроме некоторых частных случаев (например, где на оси симметрии расположены точки поля), мы можем пренебречь вкладом $C_\nu^{(2)}$ при асимптотической оценке C_ν, и тогда мы имеем

$$C_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp) \sim C_\nu^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp) \quad \text{при } k \to \infty. \tag{5.7.102}$$

Асимптотическая оценка $C_\nu^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp)$ приведена в прил. 5.1; находим

$$C_\nu^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp) \sim \begin{cases} S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_0,\nu)\, \mathrm{e}^{ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}, & \text{если } \boldsymbol{\rho}_0 \in \sigma, \\ O\left(\dfrac{1}{k^{1/2}}\right), & \text{если } \boldsymbol{\rho}_0 \notin \sigma \end{cases} \tag{5.7.103}$$

(O — символ порядка) при $k \to \infty$, где $\boldsymbol{\rho}_0$ (в прил. 5.1 обозначается как $\boldsymbol{\rho}'_0$) — точка плоскости источника, определяемая по формуле

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{r}_\perp - \frac{z}{s_z}\mathbf{s}_\perp. \tag{5.7.104}$$

При подстановке (5.7.103) в (5.7.96) мы находим, что, с точностью до главного порядка по k в асимптотическом разложении при $k \to \infty$,

$$\mathscr{B}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) \sim \begin{cases} k^2 s_z S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_0,\nu)\tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp,\nu), & \text{если } \boldsymbol{\rho}_0 \in \sigma, \\ 0, & \text{если } \boldsymbol{\rho}_0 \notin \sigma. \end{cases} \tag{5.7.105}$$

Сравнивая выражение (5.7.105) с выражением (5.7.62) для функции яркости квазиоднородного источника, а именно,

$$\mathscr{B}_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\mathbf{s}) = k^2 s_z S_\nu^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\nu)\tilde{g}_\nu^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp,\nu), \quad (\boldsymbol{\rho}_0 \in \sigma), \tag{5.7.106}$$

и вспоминая, что $s_z = \cos\theta$, мы видим, что в асимптотическом пределе при $k \to \infty$

$$\mathscr{B}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \begin{cases} B_\nu(\boldsymbol{\rho}_0,\mathbf{s}), & \text{если } \boldsymbol{\rho}_0 \in \sigma, \\ 0, & \text{если } \boldsymbol{\rho}_0 \notin \sigma, \end{cases} \tag{5.7.107}$$

где вектор положения $\boldsymbol{\rho}_0$ точки плоскости источника связан с точкой поля уравнением (5.7.104).

Для того, чтобы понять физический смысл только что полученного результата, обозначим точки концов векторов $\boldsymbol{\rho}_0$ и $\mathbf{r}$, связанных соотношением (5.7.104), как Q_0 и P, соответственно. Тогда с помощью элементарной геометрии можно показать, что Q_0 есть точка, через которую линия, проходящая через P в направлении единичного вектора $\mathbf{s}$, пересекает плоскость источника $z = 0$ (см. рис. 5.29). Таким образом, уравнения (5.7.107) и (5.7.106) означают, что

$$\mathscr{B}_\nu(P,\mathbf{s}) = \begin{cases} k^2 s_z S^{(0)}(Q_0,\nu)\tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp,\nu), & \text{если } \mathbf{s} \in \Omega_P, \\ 0, & \text{если } \mathbf{s} \notin \Omega_P, \end{cases} \tag{5.7.108}$$

где Ω_P означает телесный угол, образованный векторами от всех точек источника до точки P.

Из простого соотношения (5.7.107) и из уравнений (5.7.65) и (5.7.66) следует, что в асимптотическом пределе при $k \to \infty$ функция $\mathscr{B}_\nu$ должна быть неотрицательной и принимать нулевые значения во всех точках плоскости источника, которые находятся вне области источника. Следовательно, она подчиняется двум основным постулатам традиционной радиометрии. Более того, из (5.7.104) и (5.7.107) мы сразу видим, что

$$\mathscr{B}_\nu(P,\mathbf{s}) = \mathscr{B}_\nu^{(0)}(Q_0,\mathbf{s}), \tag{5.7.109}$$

т.е. $\mathscr{B}_\nu(P,\mathbf{s})$ *постоянна вдоль каждой прямой линии в полупространстве* $z > 0$. Формула (5.7.109), которая идентична уравнению (5.7.88) для плотности потока излучения, означает, что в свободном пространстве функция $\mathscr{B}_\nu(P,\mathbf{s}) \equiv \mathscr{B}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})$ удовлетворяет уравнению (5.7.87) переноса энергии излучения, а именно,

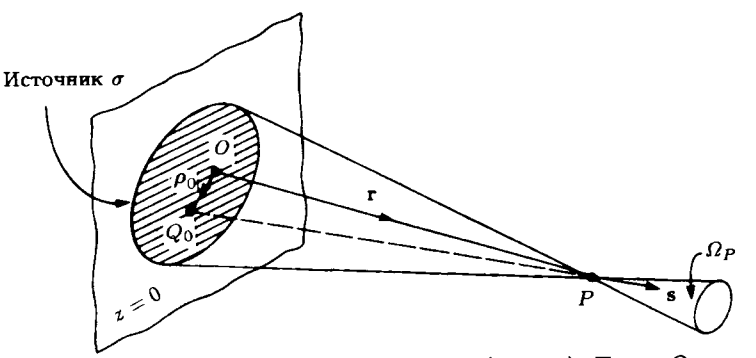


Рис. 5.29. Иллюстрация обозначений к (5.7.108). Точка Q_0 на плоскости источника, вектор положения которой $\boldsymbol{\rho}_0$ определяется уравнением (5.7.104), есть точка пересечения линии, проходящей через точку P в направлении действительного единичного вектора $\mathbf{s}$, с плоскостью источника $z = 0$

$$\mathbf{s} \cdot \nabla \mathscr{B}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = 0. \tag{5.7.110}$$

Очевидно, в этом случае $\mathscr{B}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})$ можно отождествить с плотностью потока $I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})$ (см. разд. 5.7.4) и также с функцией яркости $B_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})$ в традиционной радиометрии. По этой причине предельную форму будем обозначать как $B_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})$.

Основные результаты, полученные в этом разделе, можно объединить в виде следующего утверждения: *в асимптотическом пределе при* $k = 2\pi/\lambda \equiv 2\pi\nu/c \to \infty$ *функция яркости, определяемая уравнением (5.7.105)* или, более точно [с учетом (5.7.104)], *уравнением*

$$B_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = k^2 s_z [S^{(0)}(\mathbf{r}_\perp - (z/s_z)\mathbf{s}_\perp,\nu)]\tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp,\nu) \tag{5.7.111}$$

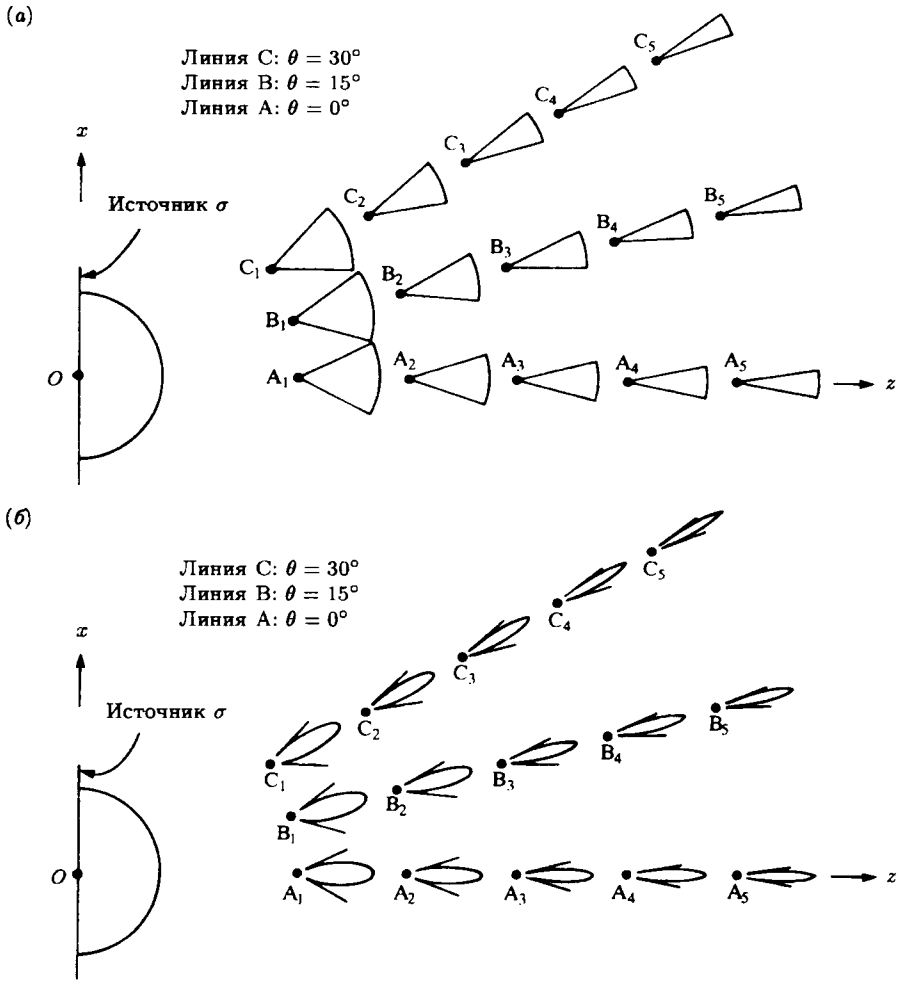


Рис. 5.30. Графики в полярных координатах, построенные на основе (5.7.105), для спектральной функции яркости $\mathscr{B}_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ в разных точках на плоскости x, y, создаваемой различными плоскими вторичными источниками. Точки с нижними индексами 1, 2, 3, 4 и 5 соответствуют расстояниям 4 см, 6 см, 8 см, 10 см и 12 см, соответственно, от центра источника O. *а* — для кругового квазиоднородного ламбертовского источника с радиусом $a = 2$ см; *б* — для кругового квазиоднородного ламбертовского источника с радиусом $a = 2$ см, спектральная плотность которого на частоте ν спадает, как гауссовская функция [см. (5.3.23)] с дисперсией $\sigma_S(\nu) = 1$ см;

правильно описывает поведение поля, создаваемого любым плоским вторичным квазиоднородным источником. Мы подчеркиваем, что формула (5.7.11) показывает, что энергетическая яркость зависит не только от распределения спектральной плотности $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \nu)$ в плоскости источника, но и от степени когерентности $g^{(0)}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \nu)$ источника.

На рис. 5.30 изображены графики в полярных координатах, полученные с помощью (5.7.105), которые иллюстрируют поведение функции яркости полей, создаваемых некоторыми квазиоднородными источниками.

Из графиков следует, что, как и ожидалось, когерентные свойства источника могут оказывать значительное влияние на функцию яркости.

Отправным пунктом предыдущего анализа было определение (5.7.49) для обобщенной функции яркости на плоскости вторичного источника. Было показано, что те же самые результаты можно получить на

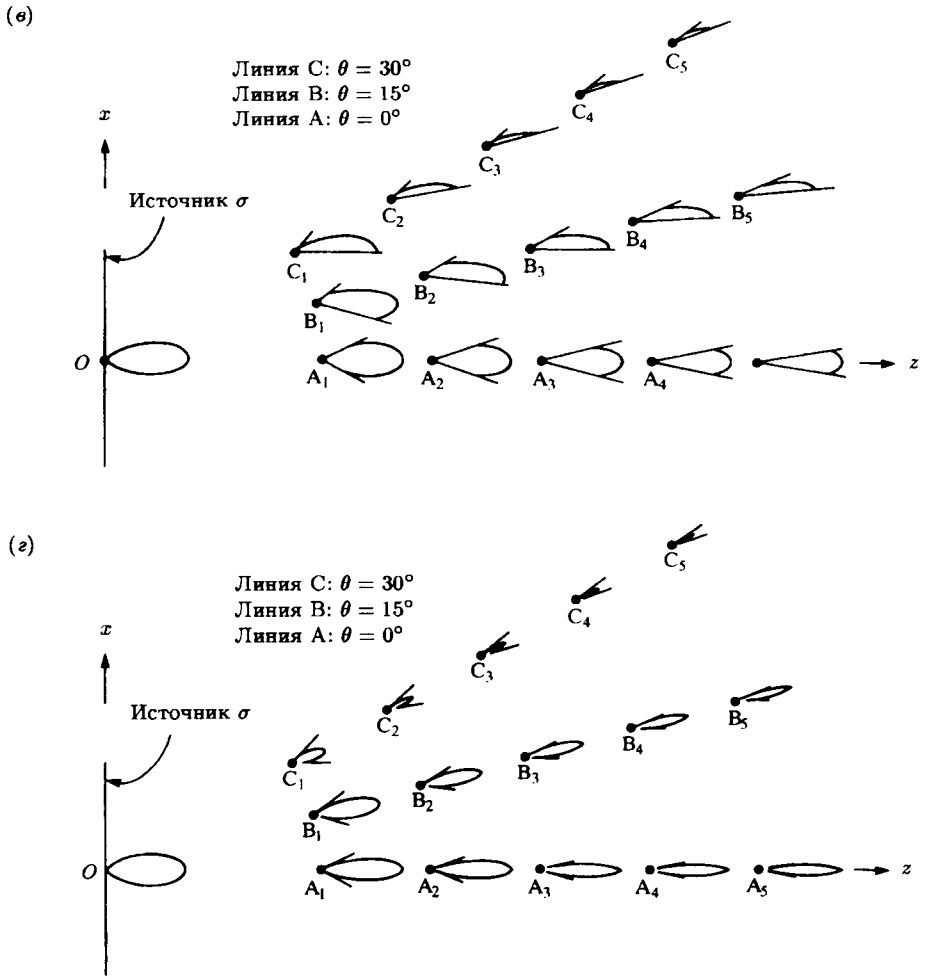


Рис. 5.30. (продолжение) *в* — для кругового квазиоднородного гауссовского коррелированного источника [см. (5.3.24)] с радиусом $a = 2$ см и $\sigma_g(\nu) = 0,5\lambda$; *г* — для кругового квазиоднородного гауссовского коррелированного источника с радиусом $a = 2$ см, $\sigma_g(\nu) = 0,5\lambda$, спектральная плотность которого на частоте ν спадает как гауссовская функция с $\sigma_S(\nu) = 1$ см. (Foley and Wolf, 1991)

основе другого определения (5.7.46) (Kim and Wolf, 1987). На самом деле, есть указания на то, что в асимптотическом пределе при $k \to \infty$ многие другие возможные определения обобщенных яркостей будут приводить к одинаковым результатам (Agarwal, Foley and Wolf, 1987; Friberg, Agarwal, Foley and Wolf, 1992).

5.8. Влияние пространственной когерентности источника на спектр излучаемых полей

В разд. 5.2 и 5.3 мы рассмотрели излучение от источников, находящихся в любом состоянии когерентности, и узнали, как свойства когерентности источника влияют на *пространственное* распределение излучаемой энергии на любой частоте. В этом разделе мы рассмотрим как когерентные свойства источника влияют на *спектральное* распределение энергии (рассматриваемое как функция частоты), т.е. какое они оказывают влияние на спектр испускаемого излучения. Оказывается, что изменение состояния про-

странственной когерентности может привести к заметным изменениям спектра излучаемого поля.

Мы начнем с рассмотрения очень простого примера, иллюстрирующего сущность этого явления.

5.8.1. Спектр поля, создаваемого двумя частично коррелированными источниками[1]

Рассмотрим поле, создаваемое двумя флуктуирующими источниками, расположенными в точках P_1 и P_2. Пусть $\{Q(P_1,\omega)\}$ и $\{Q(P_2,\omega)\}$ будут статистически стационарными ансамблями, которые представляют собой флуктуации источника, и пусть $\{U(P,\omega)\}$ будет ансамблем, который описывает поле, создаваемое источниками в точке P (см.рис. 5.31)[2]. Если источники достаточно малы, то каждую реализацию $U(P,\omega)$ можно выразить в виде

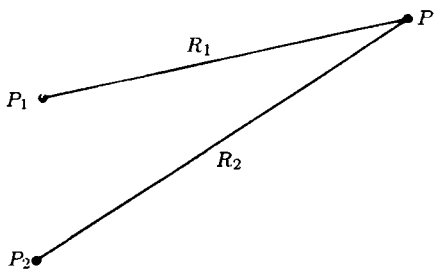


Рис. 5.31. Обозначения к определению спектра $S(P,\omega)$ поля в точке P, создаваемого двумя малыми источниками, расположенных в точках P_1 и P_2 с идентичными спектрами $S_Q(\omega)$

$$U(P,\omega) = Q(P_1,\omega)\frac{e^{ikR_1}}{R_1} + Q(P_2,\omega)\frac{e^{ikR_2}}{R_2}, \tag{5.8.1}$$

где R_1 и R_2 — расстояния от P_1 к P и от P_2 к P, соответственно, $k = \omega/c$, c — скорость света в вакууме. Спектр поля в точке P определяется выражением

$$S(P,\omega) = \langle U^*(P,\omega)U(P,\omega)\rangle, \tag{5.8.2}$$

в котором, как обычно, угловые скобки означают среднее по ансамблю. При подстановке (5.8.1) в (5.8.2) мы легко находим, что

$$S(P,\omega) = \\ = \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) S_Q(\omega) + \left[W_Q(P_1,P_2,\omega)\frac{e^{ik(R_2-R_1)}}{R_1R_2} + \text{к.с.}\right]. \tag{5.8.3}$$

Здесь

$$S_Q(\omega) = \langle Q^*(P_1,\omega)Q(P_1,\omega)\rangle = \langle Q^*(P_2,\omega)Q(P_2,\omega)\rangle \tag{5.8.4}$$

— спектр, который по предположению является одним и тем же для каждого источника,

$$W_Q(P_1,P_2,\omega) = \langle Q^*(P_1,\omega)Q(P_2,\omega)\rangle \tag{5.8.5}$$

— взаимная спектральная плотность двух источников, а к.с. означает комплексное сопряжение.

Введем степень корреляции двух источников по формуле

$$\mu_Q(P_1,P_2,\omega) = \frac{W_Q(P_1,P_2,\omega)}{S_Q(\omega)} \tag{5.8.6}$$

[см. (4.3.47б)]. При подстановке (5.8.6) для W_Q в (5.8.3) мы находим, что

$$S(P,\omega) = S_Q(\omega)\left\{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \left[\mu_Q(P_1,P_2,\omega)\frac{e^{ik(R_2-R_1)}}{R_1R_2} + \text{к.с.}\right]\right\}. \tag{5.8.7}$$

Ради простоты выберем точку поля P таким образом, чтобы она находилась на биссектрисе, которая перпендикулярна линии, соединяющей точки P_1 и P_2. Тогда $R_1 = R_2$ (скажем, $= R$), и формула (5.8.7) сводится к

$$S(P,\omega) = \frac{2}{R^2}S_Q(\omega)[1 + \operatorname{Re}\mu_Q(P_1,P_2,\omega)], \tag{5.8.8}$$

где Re означает действительную часть.

[1] Приведенный в этом разделе анализ принадлежит Вольфу (Wolf, 1987c).

[2] Мы используем угловую частоту ω, а не круговую частоту $\nu = \omega/2\pi$; это обозначение применяется в большинстве публикаций, на которые мы ссылаемся в данном разделе.

Из (5.8.8) мы видим, что в частном случае, когда $\mu_Q(P_1, P_2, \omega) = 0$ для всех частот в спектре источника $S_Q(\omega)$, т.е. когда два источника некоррелированы, спектр поля $S(P,\omega)$ пропорционален спектру источника $S_Q(\omega)$. Однако, *в общем случае два спектра S и S_Q не будут пропорциональными друг другу* из-за наличия в выражении (5.8.8) степени корреляции $\mu_Q(P_1, P_2, \omega)$. Более того, как можно сразу видеть из (5.8.7), спектр поля $S(P,\omega)$ в разных точках пространства будет, вообще говоря, разным. Этот простой пример ясно показывает, что корреляции источника могут видоизменять нетривиальным образом спектр испускаемого поля.

Видоизмененный спектр поля может принимать различные формы, в зависимости от природы частотной зависимости коэффициента корреляции $\mu_Q(P_1, P_2, \omega)$. Рассмотрим для примера ситуацию, когда

$$\mu_Q(P_1, P_2, \omega) = a\, e^{-(\omega-\omega_1)^2/2\delta_1^2} - 1, \tag{5.8.9}$$

где a, ω_1 и $\delta_1 \ll \omega_1$ — положительные константы. Для того, чтобы выражение (5.8.9) имело смысл коэффициента корреляции, оно должно удовлетворять неравенству $0 \leqslant |\mu_Q| \leqslant 1$, которое означает, что $a \leqslant 2$.

Предположим также, что спектр $S_Q(\omega)$ каждого из двух источников состоит из одной спектральной линии, имеющей гауссовский профиль:

$$S_Q(\omega) = A\, e^{-(\omega-\omega_0)^2/2\delta_0^2}, \tag{5.8.10}$$

где A, ω_0 и $\delta_0 \ll \omega_0$ — также положительные константы.

При подстановке (5.8.9) и (5.8.10) в формулу (5.8.8) мы получим следующее выражение для спектра поля в точке P:

$$S(P,\omega) = \frac{2Aa}{R^2}\, e^{-(\omega-\omega_0)^2/2\delta_0^2}\, e^{-(\omega-\omega_1)^2/2\delta_1^2}. \tag{5.8.11}$$

Прямым вычислением, которое проще всего выполнить при использовании так называемой теоремы произведения для гауссовских функций (см. прил. 5.2), можно показать, что это выражение можно переписать в виде

$$S(P,\omega) = A'\, e^{-(\omega-\omega_0')^2/2\delta_0'^2}, \tag{5.8.12}$$

где

$$A' = \left(\frac{2Aa}{R^2}\right) e^{-(\omega_1-\omega_0)^2/2(\delta_0^2+\delta_1^2)}, \tag{5.8.13}$$

$$\omega_0' = (\delta_1^2\omega_0 + \delta_0^2\omega_1)/(\delta_0^2 + \delta_1^2), \tag{5.8.14}$$

$$\frac{1}{\delta_0'^2} = \frac{1}{\delta_0^2} + \frac{1}{\delta_1^2}. \tag{5.8.15}$$

Уравнение показывает, что спектр поля в точке P состоит из одной спектральной линии с гауссовским профилем. Однако, в общем случае эта линия центрирована не относительно частоты ω_0 спектра источника $S_Q(\omega)$, а относительно частоты ω_0', определяемой из уравнения (5.8.14).

Если бы два источника были некоррелированными ($\mu_Q = 0$), то согласно уравнениям (5.8.8) и (5.8.10) мы имели бы

$$[S(P,\omega)]_{\text{некор.}} = \left(\frac{2A}{R^2}\right) e^{-(\omega-\omega_0)^2/2\delta_0^2}. \tag{5.8.16}$$

При сравнении этого выражения с (5.8.12) мы видим, что несмотря на то, что обе линии имеют гауссовские профили, они отличаются друг от друга. Поскольку согласно (5.8.15) $\delta_0' < \delta_0$, спектральная линия поля, создаваемого коррелированными источниками, является более узкой, чем спектральная линия от некоррелированных источников. Более того, мы можем легко вывести из (5.8.14), что $\omega_0' \lesseqgtr \omega_0$, также, как и $\omega_1 \lesseqgtr \omega_0$. Следовательно, если $\omega_1 < \omega_0$, спектральная линия (5.8.12) поля центрируется относительно более низкой частоты по сравнению со спектральной линией (5.8.16) от двух некоррелированных источников, или, как говорят, она испытывает *красное смещение*; а если $\omega_1 > \omega_0$, спектральная линия (5.8.12) центрируется относительно более высокой частоты, и тогда говорят, что она испытывает *синее смещение*. Эти результаты проиллюстрированы на рис. 5.32. На рис. 5.33 и рис. 5.34 показаны примеры других видов спектральных изменений, создаваемых соответствующими корреляциями источника. (см. также Gamliel and Wolf, 1988; Gamliel, 1988.)

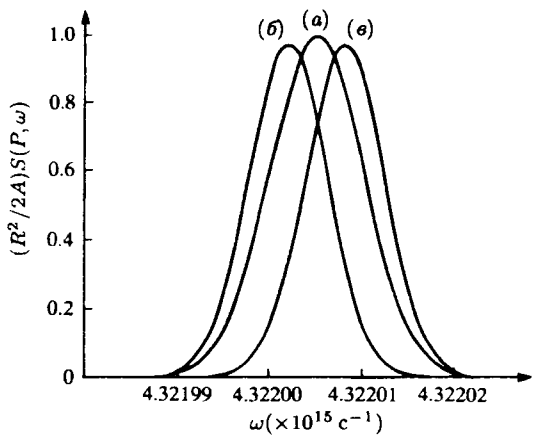


Рис. 5.32. Красное и синее смещения спектральной линии в соответствии с формулами (5.8.12) — (5.8.15). Спектр $S_Q(\omega)$ обоих распределений двух источников есть одиночная линия с гауссовским профилем (5.8.10), где $A = 1$, $\omega_0 = 4.32201 \times 10^{15}\,\mathrm{c}^{-1}$ (линия Hg $\lambda = 4358.33$ Å), $\delta_0 = 5 \times 10^9\,\mathrm{c}^{-1}$. *а* — Спектр поля $S(P,\omega)$ в точке P, когда два источника некоррелированы [$\mu_Q = 0$]; *б* — Спектр поля в точке P, когда два источника коррелированы в соответствии с (5.8.9), где $a = 1.8$, $\delta_1 = 7.5 \times 10^9\,\mathrm{c}^{-1}$ и $\omega_1 = \omega_0 - 2\delta_0$ (линия, смещенная в красную сторону) и *в* — $\omega_1 = \omega_0 + 2\delta_0$ (линия смещена в синюю сторону) (Wolf, 1987c)

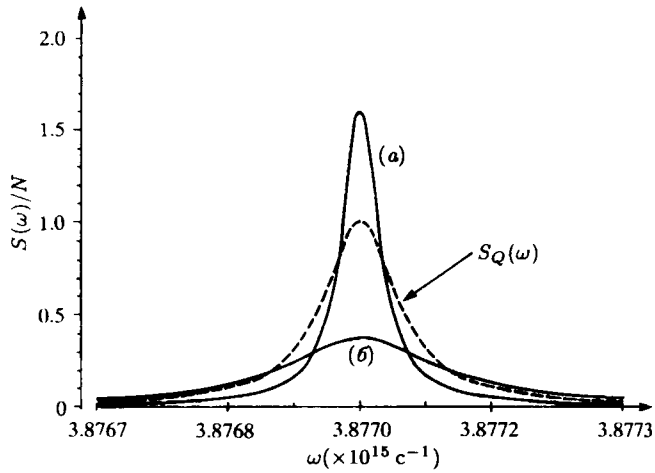


Рис.5.33. Сужение *а* и уширение *б* спектральной линии вследствие корреляций источника [согласно выражению (5.8.8)]. Спектр источника представляет собой одиночную линию с лоренцевским профилем $S_Q(\omega) = A_0[(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma_0^2]^{-1}$ и спектральная степень когерентности равна

$$\mu_Q(\omega) = \frac{A_j(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma_0^2}{A_0(\omega - \omega_j)^2 + \Gamma_j^2} - 1,$$

где $\omega_0 = 3.77 \times 10^{15}\,\mathrm{c}^{-1}$, $\Gamma_0 = 5 \times 10^{10}\,\mathrm{c}^{-1}$. В случае (*а*) $j = 1$, $\Gamma_1 = 2.5 \times 10^{10}\,\mathrm{c}^{-1}$, $A_1/A_0 = 0.4$. В случае (*б*) $j = 2$, $\Gamma_2 = 10^{11}\,\mathrm{c}^{-1}$, $A_2/A_0 = 1.5$. Нормировочный множитель $N = A_0/\Gamma_0^2$

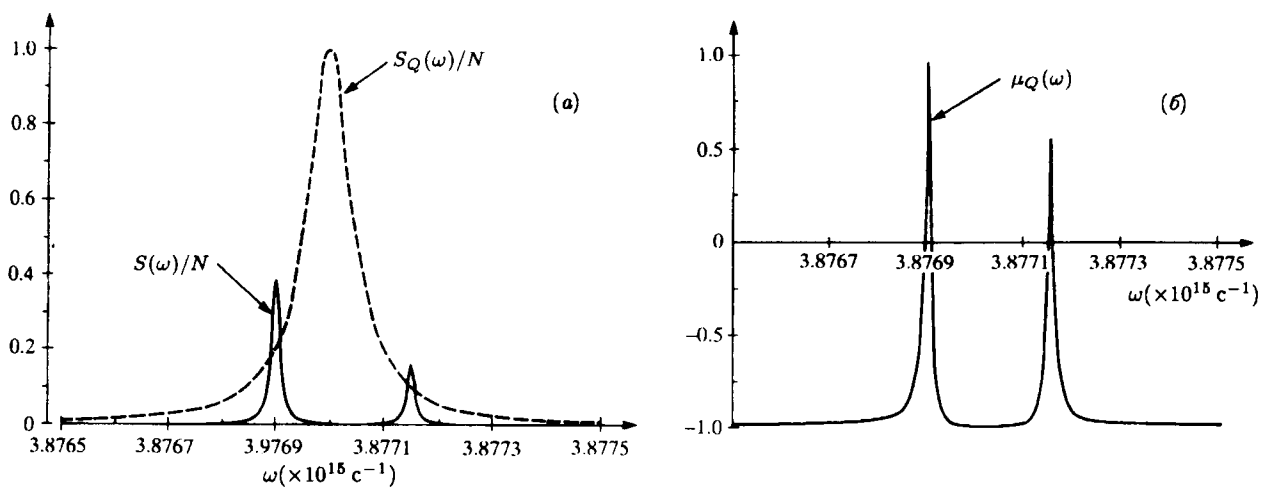


Рис.5.34. Генерация двух спектральных линий (5.8.8) от одиночной спектральной линии с лоренцевской формой $S_Q(\omega) = A_0[(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma_0^2]^{-1}$ и со спектральной степенью когерентности

$$\mu_Q(\omega) = \sum_{j=1}^{2} \frac{A_j}{A_0} \frac{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma_0^2}{(\omega - \omega_j)^2 + \Gamma_j^2} - 1,$$

где $\omega_0 = 3.87700 \times 10^{15}\,\mathrm{c}^{-1}$, $\Gamma_0 = 5 \times 10^{10}\,\mathrm{c}^{-1}$, $\omega_1 = 3.87690 \times 10^{15}\,\mathrm{c}^{-1}$, $\Gamma_1 = 8 \times 10^9\,\mathrm{c}^{-1}$, $A_1/A_0 = 0.01$, $\omega_2 = 3.87715 \times 10^{15}\,\mathrm{c}^{-1}$, $\Gamma_2 = 8 \times 10^9\,\mathrm{c}^{-1}$, $A_2/A_0 = 0.04$. Нормировочный множитель равен $N = A_0/\Gamma_0^2$. На рис. *а* изображены спектральные линии, а на рис. *б* — поведение спектральной степени когерентности $\mu_Q(\omega)$

Предсказание о том, что корреляции между излучающими источниками могут привести к сдвигам спектральных линий, было впервые продемонстрировано на акустических (а не на оптических) волнах Бокком, Дугласом, Ноксом (Bocko, Douglass and Knox, 1987). Два частично коррелированных источника (громкоговорители) с одинаковым спектром были получены при помощи двух независимых генераторов, которые создавали случайные сигналы $X(t)$ и $Y(t)$. Комбинированные сигналы

$$Q(P_1,t) = X(t) + Y(t), \tag{5.8.17а}$$

$$Q(P_2,t) = Y(t) - X(t) \tag{5.8.17б}$$

управляли двумя громкоговорителями, находящимися недалеко друг от друга в точках P_1 и P_2 (см. рис.5.35). Из (5.8.17) следует, что

$$\langle Q^*(P_1,t)Q(P_1,t+\tau)\rangle = \langle Q^*(P_2,t)Q(P_2,t+\tau)\rangle = \\ = \langle X^*(t)X(t+\tau)\rangle + \langle Y^*(t)Y(t+\tau)\rangle, \tag{5.8.18}$$

где мы использовали тот факт, что

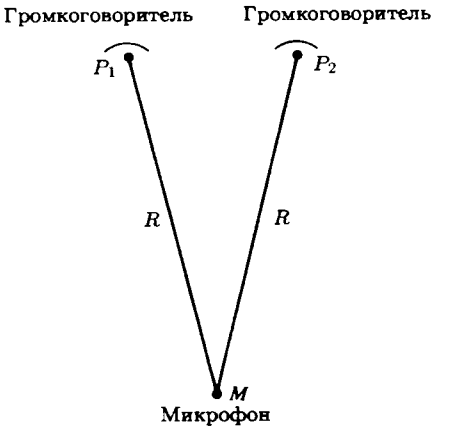


Рис. 5.35. Схема акустического эксперимента, который был использован для демонстрации образования сдвигов частоты спектральных линий вследствие корреляции источников. (Bocko, Duaglass and Knox, 1987)

$$\langle X^*(t)Y(t+\tau)\rangle = \langle Y^*(t)X(t+\tau)\rangle = 0, \tag{5.8.19}$$

так как два генератора независимы. Выполняя преобразование Фурье уравнений (5.8.18) и используя теорему Винера — Хинчина [см. (2.4.15) и (2.4.16)], мы мы сразу видим, что спектры двух источников являются одинаковыми, и каждый из них определен формулой

$$S_Q(\omega) = S_X(\omega) + S_Y(\omega), \tag{5.8.20}$$

где $S_X(\omega)$ и $S_Y(\omega)$ — спектры мощности для $X(t)$ и $Y(t)$ соответственно.

Далее из (5.8.17) следует, что функция взаимной корреляции двух источников определяется выражением

$$\langle Q^*(P_1,t)Q(P_2,t+\tau)\rangle = -\langle X^*(t)X(t+\tau)\rangle + \langle Y^*(t)Y(t+\tau)\rangle. \tag{5.8.21}$$

После преобразования Фурье этой формулы и использования теоремы Винера — Хинчина, снова получим для взаимной спектральной плотности двух источников выражение

$$W_Q(P_1,P_2,\omega) = -S_X(\omega) + S_Y(\omega). \tag{5.8.22}$$

Из (5.8.22) и (5.8.20) следует, что степень корреляции $\mu_Q(P_1,P_2,\omega)$ двух источников (5.8.6) определяется по формуле

$$\mu_Q(P_1,P_2,\omega) = \frac{-S_X(\omega) + S_Y(\omega)}{S_X(\omega) + S_Y(\omega)}. \tag{5.8.23}$$

В этом эксперименте микрофон D размещался на равном расстоянии от двух акустических источников. Спектры измерялись в микрофоне, когда сначала включался один источник, потом — другой. Было обнаружено, что спектры имеют такую же форму, как и спектры двух источников. Далее измерялся спектр $S(M,\omega)$ звука в микрофоне M, когда оба источника были включены. Согласно (5.8.8) в котором $S_Q(\omega)$ и $\mu_Q(P_1,P_2,\omega)$ определяются уравнениями (5.8.20) и (5.8.23), соответственно, находим, что

$$S(M,\omega) = \frac{4}{R^2} S_Y(\omega). \tag{5.8.24}$$

Этот спектр очевидно не пропорционален спектру $S_Q(\omega)$ [см. (5.8.20)] каждого источника, если $S_X(\omega)$ не пропорционально $S_Y(\omega)$. Пик спектра поля $S(M,\omega)$, зависящий от вида $S_X(\omega)$ и $S_Y(\omega)$, может смещаться относительно пика спектра источника S_Q. Этот эффект наблюдался в эксперименте. При подходящем выборе спектров сигналов $X(t)$ и $Y(t)$ наблюдалось красное [см. рис. 5.36*а*] и синее [см. рис. 5.36*б*] смещения.

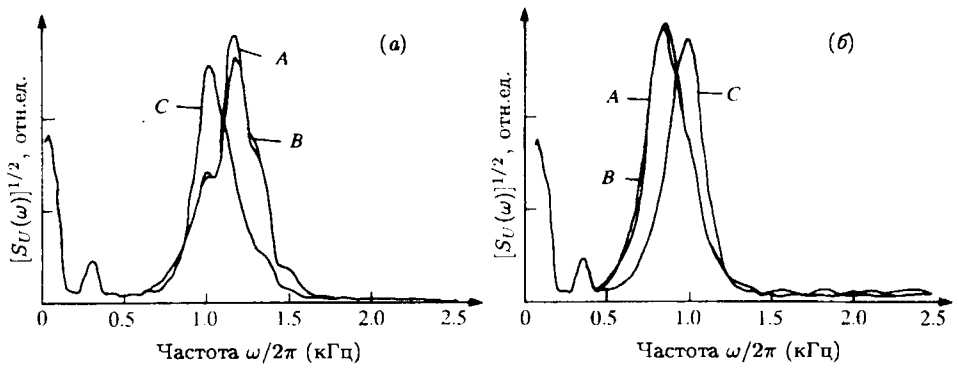


Рис. 5.36. Квадратный корень от спектральной плотности линий, которые были измерены в акустическом эксперименте, изображенном на рис. 5.35. Кривые A и B — спектральные кривые, измеренные в микрофоне M, когда был включен только один из источников. Кривая C — спектральная линия в M, когда оба источника были включены. Видно, что в случае *а* линия испытывает красное смещение относительно A и B, а в случае *б* — синее смещение, в зависимости от выбора коэффициента корреляции μ_Q. (Bocko, Douglass and Knox, 1987)

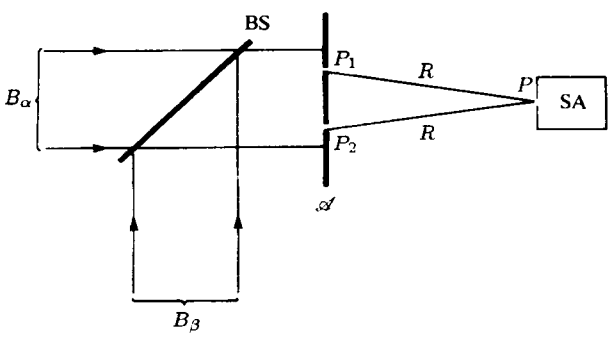


Рис. 5.37. Схема оптического эксперимента, используемого для демонстрации образования частотных сдвигов спектральных линий вследствие корреляций источника. (Gori, Guattari, Palma and Padovani, 1988)

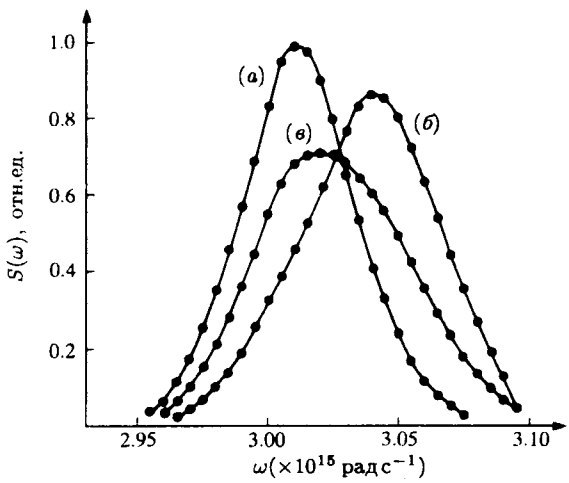


Рис. 5.38. Результаты измерений (точки), демонстрирующие сдвиги спектральных линий из-за корреляций между двумя малыми оптическими источниками (см. установку на рис.5.37). Для ясности, точки экспериментальных данных соединены сплошными линиями. *а* — спектр красного смещения, *б* — спектр синего смещения, *с* — спектр источника, умноженного на 2. (Gori, Guattari, Palma and Padovani, 1988)

Вскоре после этого Гори, Гуатари, Палма и Падовани (Gori, Guattari, Palma and Padovani, 1988) провели оптический эксперимент, иллюстрирующий сдвиги спектральных линий от двух частично коррелированных источников. Вторичные источники P_1 и P_2 создавались одновременным освещением двух отверстий двумя когерентными, но взаимно независимыми лучами B_α и B_β с использованием делителя луча BS (см. рис. 5.37).

Корреляция между источниками P_1 и P_2 зависит от ориентации делителя луча, которую можно менять, изменяя угол его наклона относительно нормали к плоскости $\mathscr{A}$, в которой находятся два отверстия.

Спектр поля, создаваемый вторичными источниками P_1 и P_2, исследовался анализатором спектра (АС), который помещался в окрестность точки, удаленной на одно и тоже расстояние R от каждого источника. При помощи этого устройства (рис. 5.38) наблюдалось красное и синее смещения.

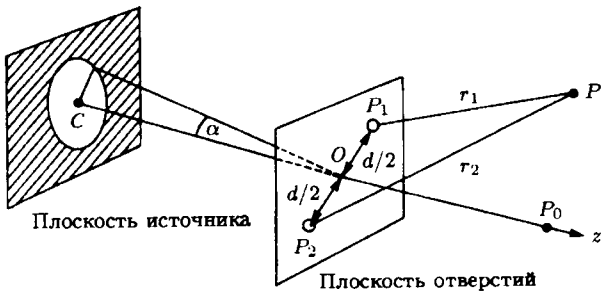


Рис. 5.39. Иллюстрация схемы и обозначений для формулы (5.8.25) (James and Wolf, 1991a)

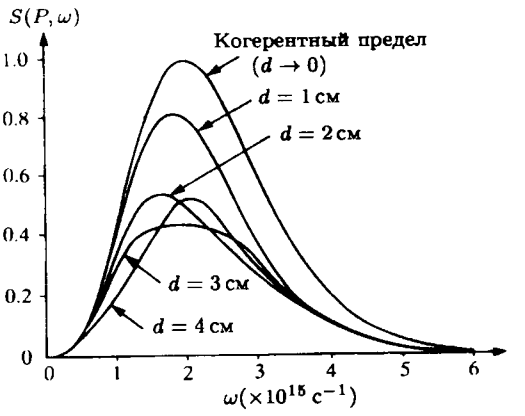


Рис. 5.40. Изменения, создаваемые интерференцией в аксиальной точке P_0 [см. рис. 5.39] в спектре Планка при разных значениях d. Предполагалось, что источник находится при температуре $T = 3000$ K и стягивает угловой полудиаметр $\alpha = 2.96 \times 10^{-5}$ рад. в точке O. Единицы измерения на вертикальной оси произвольные (James and Wolf, 1991a)

Интересный способ получения двух малых источников, которые могут быть коррелированными, был описан Факлисом и Морисом (Faklis and Morris, 1992).

Другой концептуально простой способ для иллюстрации влияния когерентности на оптический спектр основан на интерференционном эксперименте Юнга. Если отверстия освещаются частично когерентным светом, то спектр света в интерференционной картине будет отличаться от спектра падающего на отверстия света по двум причинам: из-за дифракции на отверстиях и вследствие корреляции света в двух этих отверстиях. Однако, как было впервые показано Джеймсом и Вольфом (James and Wolf, 1991a, b), изменения, возникающие благодаря частичной когерентности, существенны лишь тогда, когда ширина полосы частот падающего света достаточно велика. Мы вкратце осветим основную часть их анализа.

Предположим, что два отверстия освещаются удаленным, плоским, некогерентным, однородным, круговым источником [см. рис. 5.39]. Также мы предполагаем, что устройство является симметричным, плоскости отверстий параллельны плоскости источника. Из одной из теорем взаимности для квазиоднородных источников [см. (5.3.22)] следует, что спектральная степень когерентности света, падающего на отверстия, определяется выражением

$$\mu(P_1, P_2, \omega) = \frac{2J_1(d\omega\alpha/c)}{d\omega\alpha/c}, \tag{5.8.25}$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода и первого порядка, 2α — угловой диаметр, который источник стягивает в средней точке O между двумя отверстиями и d — расстояние между ними, c — скорость света в вакууме. Для простоты рассмотрим спектр $S(P_0, \omega)$ в точке P_0, удаленной на некоторое расстояние за плоскость малых диафрагм и находящейся на нормали CO к плоскости источника. Из выражений (4.3.54) и (5.8.25), а также из элементарной формулы для дифракции на отверстии следует, что

$$S(P_0, \omega) = 2\left(\frac{A}{2\pi cr}\right)^2 \omega^2 \left[1 + \frac{2J_1(d\omega\alpha/c)}{d\omega\alpha/c}\right] S^{(i)}(\omega), \tag{5.8.26}$$

$\omega = 2\pi\nu$, где $S^{(i)}(\omega)$ — спектр падающего на два отверстия света, A — площадь каждого отверстия (которое предполагается достаточно малым) и r — расстояние $\overline{P_1P_0}$ ($= \overline{P_2P_0}$). На рис. 5.40 показан вид спектра $S(P_0, \omega)$, вычисленного с помощью (5.8.26) для разных значений d в случае, когда спектр падающего света представляет собой спектр Планка

$$S^{(i)}(\omega) = \frac{A'\omega^3}{\exp(\hbar\omega/k_BT) - 1}. \tag{5.8.27}$$

Здесь A' — константа, $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π, k_B — постоянная Больцмана и T — температура. Рисунок показывает, что появляется существенное изменение в спектре в точке P_0 как только расстояние между отверстиями становится все больше и больше, т.е. как только спектральная плотность когерентности $\mu(P_1P_2,\omega)$ падающего на два отверстия света изменяется при изменении d. Этот эффект был экспериментально продемонстрирован в работе (Kandpal, Vaishya, Chander, Saxena, Mehta and Joshi, 1992 и Santarsiero and Gori, 1992).

Из (5.8.25) мы видим, что спектральная степень когерентности зависит от ω и d только через их произведение. Если вместо $\mu(P_1,P_2,\omega)$ записать $\mu(d,\omega;\alpha)$, то этот результат означает, что

$$\mu(d,\omega;\alpha)=\mu(\beta d,\omega/\beta;\alpha), \tag{5.8.28}$$

где β — любое положительное число. Эта формула показывает, что при условиях, когда применима формула (5.8.25), спектральная степень когерентности света на частоте ω в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии d, совпадает со спектральной степенью когерентности света на частоте ω/β в точках, удаленных друг от друга на расстояние βd. Таким образом, существует «обмен» между частотой и расстоянием. Этот результат представляет собой пример так называемого ***интерференционного принципа эквивалентности*** для определенных типов полей (James and Wolf, 1991c). Такие поля создаются, например, всеми плоскими, квазиоднородными источниками, имеющими один и тот же нормированный спектр во всех точках источника. Этот принцип представляет интерес в радиоастрономии для достижения высокого разрешения при помощи только двух радиотелескопов, с заданным расстоянием между ними.

5.8.2. Спектр дальнего поля, образуемого плоскими вторичными квазиоднородными источниками

Мы только что показали, что при наложении света от двух малых коррелированных источников с одинаковыми спектрами, спектр будет, вообще говоря, изменяться. Можно было бы ожидать, что изменения в спектре будут также иметь место, если свет создается протяженным частично когерентным или полностью когерентным источником, т.е. спектр света, создаваемого такими источниками, не будет, в общем случае, инвариантным при распространении. В этом разделе мы рассмотрим такие изменения для случая, когда свет создается плоским, вторичным источником σ, который, как мы будем предполагать, является квазиоднородным.

Начнем с уравнения (5.3.21) для интенсивности излучения, создаваемой таким источником, а именно

$$J(\mathbf{s},\omega)=(2\pi k)^2\widetilde{S}^{(0)}(0,\omega)\tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp,\omega)\cos^2\theta. \tag{5.8.29}$$

Здесь

$$\widetilde{S}^{(0)}(0,\omega)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_\sigma S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\omega)\,d^2\rho, \tag{5.8.30}$$

где $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\omega)$ — спектральная плотность поля в точке источника и

$$\tilde{g}^{(0)}(\mathbf{f}',\omega)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{f}'\cdot\boldsymbol{\rho}'}\,d^2\rho' \tag{5.8.31}$$

— двумерный пространственный фурье-образ спектральной степени когерентности $g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1,\omega)$ света на плоскости источника. Далее

$$k=\omega/c \tag{5.8.32}$$

— как обычно, означает волновое число, связанное с частотой ω, θ — угол между единичным вектором $\mathbf{s}$ и нормалью к плоскости источника [см. рис. 5.41] и $\mathbf{s}_\perp$ — проекция единичного вектора $\mathbf{s}$ на плоскость источника, которая рассматривается как двумерный вектор.

Поскольку мы интересуемся спектром $S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)$ в дальней зоне, а не интенсивностью излучения $J(\mathbf{s},\omega)$, мы используем простое соотношение (5.2.12), а именно,

$$S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)=J(\mathbf{s},\omega)/r^2, \tag{5.8.33}$$

и затем получим из (5.8.29) и (5.8.33) следующую формулу для спектра в дальней зоне:

$$S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega) = \left(\frac{2\pi k}{r}\right)^2 \widetilde{S}^{(0)}(0,\omega)\tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp,\omega)\cos^2\theta. \tag{5.8.34}$$

Предположим теперь, что нормированный спектр, скажем $\mathfrak{s}^{(0)}(\omega)$, является одинаковым в каждой точке плоскости, т.е. что

$$S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\omega) = I^{(0)}(\boldsymbol{\rho})\mathfrak{s}^{(0)}(\omega), \tag{5.8.35}$$

где

$$I(\boldsymbol{\rho}) = \int_0^\infty S^{(0)}(\boldsymbol{\rho},\omega)\,d\omega. \tag{5.8.36}$$

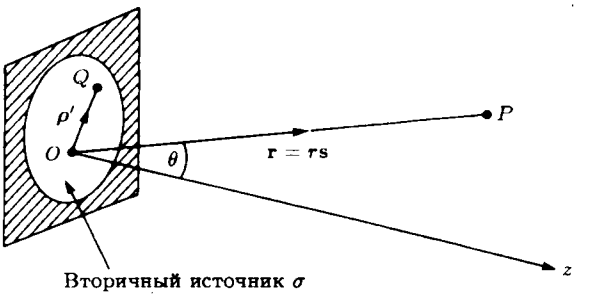


Рис. 5.41. Обозначения, относящиеся к выводу формулы (5.8.34) для спектра в дальней зоне, создаваемого плоским вторичным квазиоднородным источником

Очевидно, что

$$\int_0^\infty \mathfrak{s}^{(0)}(\omega)\,d\omega = 1. \tag{5.8.37}$$

Функция $I(\boldsymbol{\rho})$ (5.8.36) представляет собой оптическую интенсивность света в точке источника $Q(\boldsymbol{\rho})$. При подстановке (5.8.35) в (5.8.34) мы получим следующее выражение для спектра в дальней зоне[1]:

$$S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega) = \left(\frac{2\pi k}{r}\right)^2 \widetilde{I}(0)\mathfrak{s}^{(0)}(\omega)\tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp,\omega)\cos^2\theta, \tag{5.8.38}$$

где

$$\widetilde{I}(0) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_\sigma I(\boldsymbol{\rho})\,d^2\rho. \tag{5.8.39}$$

Формула (5.8.38) показывает, что, с точностью до простых геометрических множителей, спектр света в дальней зоне отличается, вообще говоря, от спектра на плоскости источника по двум причинам:

(а) Из-за наличия коэффициента пропорциональности $k^2 = (\omega/c)^2$, который появляется в формулах, описывающих эффект дифракции света на апертуре.

(б) Из-за наличия частотного множителя $\tilde{g}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp,\omega)$, который зависит от корреляционных свойств света на плоскости источника.

В частности, если спектр источника $\mathfrak{s}^{(0)}(\omega)$ состоит из одной спектральной линии, центрированной относительно ω_0, и если пик $\tilde{g}^{(0)}$ расположен на другой частоте ω_1, то спектр в дальней зоне будет центрироваться относительно некоторой частоты, которая отличается от ω_0 на величину, зависящую от ω_1. Таким образом, точно также, как в простом случае, рассмотренном в разд. 5.8.1, излучающей системы, состоящей из двух коррелированных источников, корреляции поля на плоском, вторичном, квазиоднородном источнике могут изменить спектр излучаемого поля, и эти изменения могут существенным образом проявиться в виде сдвига спектральной линии. Это не истинный сдвиг, потому что смещенная линия немного искажается. Более того, из-за наличия величины $k\mathbf{s}_\perp$ в аргументе $\tilde{g}^{(0)}$, изменения в спектре будут, вообще говоря, зависеть от направления наблюдения $\mathbf{s}$.

В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда нормированный спектр вторичного источника представляет собой одиночную линию с гауссовским профилем. Тогда

$$\mathfrak{s}^{(0)}(\omega) = \frac{1}{\delta_0\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-(\omega-\omega_0)^2/2\delta_0^2}, \quad (\delta_0 \ll \omega_0), \tag{5.8.40}$$

[1] Вольф (Wolf, 1987a) получил аналогичную формулу для спектра излучения в дальней зоне, создаваемого первичным, трехмерным, квазиоднородным источником [см. также (Wolf, 1987b)].

где δ_0 и ω_0 — положительные константы. Мы предполагаем, что на каждой эффективной частоте ω спектральная степень когерентности света на плоскости источника определяется гауссовской функцией, т.е.

$$g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \omega) = \mathrm{e}^{-\rho'^2/2\sigma_g^2}, \tag{5.8.41}$$

где σ_g много меньше дисперсии функции $I(\boldsymbol{\rho})$ (5.8.36).

Двумерный пространственный фурье-образ выражения (5.8.41) равен

$$\tilde{g}^{(0)}(\mathbf{f}, \omega) = \frac{\sigma_g^2}{2\pi} \mathrm{e}^{-\sigma_g^2 f^2/2}. \tag{5.8.42}$$

Подставляя (5.8.40) и (5.8.42) в формулу (5.8.38), используя (5.8.32) и тот факт, что $\mathbf{s}_\perp^2 = \sin^2\theta$, мы получим следующее выражение для спектра в дальней зоне:

$$S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \omega) = \frac{A}{r^2}\omega^2 \mathrm{e}^{-(\omega-\omega_0)^2/2\delta_0^2} \mathrm{e}^{-\omega^2/2\alpha^2(\theta)} \cos^2\theta, \tag{5.8.43}$$

где

$$A = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_g^2 \tilde{I}(0)}{\delta_0 c^2}, \tag{5.8.44}$$

$$\frac{1}{\alpha^2(\theta)} = \frac{\sigma_g^2}{c^2}\sin^2\theta. \tag{5.8.45}$$

Произведение двух гауссовских функций в правой части (5.8.43) можно выразить в виде одной гауссовской функции, например, при использовании теоремы произведения для гауссовских функций (см. прил. 5.2). Тогда находим, что

$$\mathrm{e}^{-(\omega-\omega_0)^2/2\delta_0^2} \mathrm{e}^{-\omega^2/2\alpha^2} = \mathrm{e}^{-\omega_0^2/2(\delta_0^2+\alpha^2)} \mathrm{e}^{-(\omega-\tilde{\omega})^2/2\tilde{\delta}^2}, \tag{5.8.46}$$

где

$$\tilde{\omega}(\theta) = \frac{\omega_0\alpha^2(\theta)}{\delta_0^2 + \alpha^2(\theta)}, \tag{5.8.47а}$$

$$\frac{1}{\tilde{\delta}^2(\theta)} = \frac{1}{\delta_0^2} + \frac{1}{\alpha^2(\theta)}. \tag{5.8.47б}$$

При подстановке (5.8.46) в (5.8.43) мы, наконец, получим следующее выражение для спектра в дальней зоне:

$$S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \omega) = \left[\frac{A}{r^2} \mathrm{e}^{-\omega_0^2/2[\delta_0^2+\alpha^2(\theta)]}\right] \omega^2 \mathrm{e}^{-[\omega-\tilde{\omega}(\theta)]^2/2\tilde{\delta}^2(\theta)} \cos^2\theta. \tag{5.8.48}$$

Формула (5.8.48) показывает, что спектр в дальней зоне пропорционален произведению ω^2 и гауссовского распределения. Множитель ω^2 вносит незначительное изменение в гауссовскую функцию. За исключением когда $\theta = 0$ [см. (5.8.49) ниже], гауссовская функция центрируется не относительно средней частоты ω_0 спектра источника, а относительно более низкой частоты $\tilde{\omega}(\theta)$, определяемой из (5.8.47а). Далее согласно (5.8.47б) $\tilde{\delta}(\theta) < \delta_0$ (за исключением случая, когда $\theta = 0$); т.е. спектр в дальней зоне является более узким, чем спектральная линия источника. Для $\theta = 0$, т.е. в случае, когда направление наблюдения перпендикулярно плоскости источника, уравнения (5.8.45), (5.8.47а) и (5.8.47б) дают $1/\alpha(0) = 0$, $\tilde{\omega}(0) = \omega_0$ и $\tilde{\delta}(0) = \delta_0$, и выражение (5.8.48) для спектра в дальней зоне сводится к

$$[S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \omega)]_{\theta=0} = \frac{A}{r^2}\omega^2 \mathrm{e}^{-(\omega-\omega_0)^2/2\delta_0^2}. \tag{5.8.49}$$

На рис. 5.42 изображены некоторые изменения в спектре, вычисленные с помощью (5.8.48).

В предыдущем обсуждении мы неявно предполагали, что $\sigma_g \neq 0$, т.е. что поле на плоскости источника имеет ненулевое значение корреляционной длины. Рассмотрим предельный случай, когда источник является пространственно полностью некогерентным, т.е. когда $\sigma_g \to 0$. Этот предел должен пониматься в том

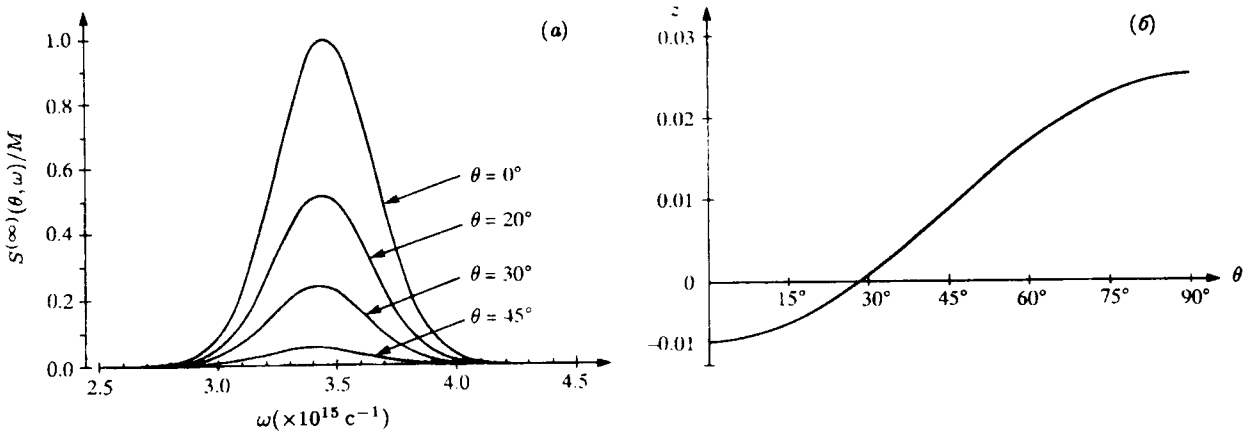


Рис. 5.42. *а* — Спектры в дальней зоне $S^{(\infty)}(\theta,\omega) \equiv S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)$ [см. (5.8.48)] в единицах $M = A\omega_0^2/r^2$ как функции направления наблюдения θ, создаваемые гауссовским коррелированным [см. (5.8.41)], плоским, вторичным, квазиоднородным источником, нормированный спектр которого есть спектральная линия с гауссовским профилем [см. (5.8.40)]. Константы равнялись $\sigma_g = 3\lambda = 3\lambda_0/2\pi$, $\lambda_0 = 5500$ Å ($\omega_0 = 3.43 \times 10^{15}\,\mathrm{c}^{-1}$) и $\delta_0 = 6 \times 10^{-2}\omega_0$; *б* — Относительный сдвиг центральной частоты $z(\theta) = [\omega_0 - \tilde{\omega}(\theta)]/\tilde{\omega}(\theta) = [\tilde{\lambda}(\theta) - \lambda_0]/\lambda_0$, $\tilde{\lambda}(\theta) = 2\pi c/\tilde{\omega}(\theta)$

смысле, что $\sigma_g^2\widetilde{I}(0)$ остается конечной при $\sigma_g \to 0$ для того, чтобы множитель A (5.8.44) имел ненулевое значение. Из (5.8.45) мы видим, что в этом случае $1/\alpha \to 0$ независимо от угла наблюдения. Формулы (5.8.47) дают теперь $\tilde{\omega}(\theta) = \omega_0$ и $\tilde{\delta}(\theta) = \delta_0$ для всех значений θ в области значений $0 < \theta \leqslant \pi/2$, и уравнение (5.8.48) сводится к правой части (5.8.49), т.е. мы имеем в случае пространственно некогерентного источника (нижний индекс «неког.»)

$$[S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)]_{\text{неког.}} = \frac{A}{r^2}\omega^2\,\mathrm{e}^{-(\omega-\omega_0)^2/2\delta_0^2}\cos^2\theta. \tag{5.8.50}$$

Заметим, что спектр в дальней зоне, создаваемый некогерентным источником, зависит от направления наблюдения, значение его пика спадает по закону $\cos^2\theta$.

Мы видим, что в двух случаях, соответствующих уравнениям (5.8.49) и (5.8.50), спектры в дальней зоне пропорциональны произведению нормированного спектра источника $s^{(0)}(\omega)$ [см. (5.8.40)] и множителя ω^2, который приводит к очень незначительному искажению линии и вызывает небольшое синее смещение.

До сих пор мы рассматривали только влияние корреляций источника на спектры излучаемых полей в свободном пространстве. На практике между источником и детектором присутствуют рассеивающие и преломляющие элементы[1]. Преломляющая апертура будет, вообще говоря, изменять когерентные свойства света, проходящего через нее, даже в отсутствие дисперсии. Например, если частично когерентный свет преломляется на апертуре, линейные размеры которой порядка или меньше, чем ширина поперечных корреляций падающего света, то свет, прошедший через апертуру будет пространственно когерентным. Однако, если размер апертуры достаточно большой, проходящий через него свет будет частично когерентным. Следовательно, можно ожидать, что на спектр света, который проходит через апертуру, будет, в общем случае, влиять размер апертуры. Этот эффект был впервые отмечен в работе (Kandpal, Vaishya and Joshi, 1989).

Систематическое изучение влияния размера апертуры на спектр преломляющегося на апертуре света было сделано Фолеем (Foley, 1990, 1991). Он рассмотрел простую систему, которая изображена на рис. 5.43. Однородный, пространственно некогерентный, плоский, круговой источник σ радиуса a_S помещался в передней фокальной плоскости тонкой линзы L с фокусным расстоянием f. Непрозрачный экран с круговой апертурой $\mathscr{A}$ с радиусом a помещался в задней фокальной плоскости линзы. Фолей обнаружил, что спектр

[1]Общее выражение для изменений в спектре вследствие распространения света от источника, находящегося в любом состоянии когерентности, через линейную инвариантную по времени систему было получено Вольфом и Финупом (Wolf and Fienup, 1991).

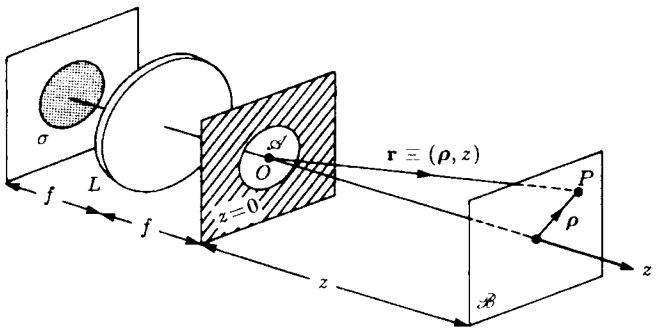


Рис. 5.43. Устройство для изучения влияния размера апертуры на спектр частично когерентного света. σ — однородный, пространственно некогерентный, плоский, круговой источник радиуса a_S, помещенный в передней фокальной плоскости тонкой линзы L. Круговая апертура $\mathscr{A}$ радиуса a помещается в задней фокальной плоскости линзы. Плоскость наблюдения $\mathscr{P}$ находится в дальней зоне апертуры. (Foley, 1990)

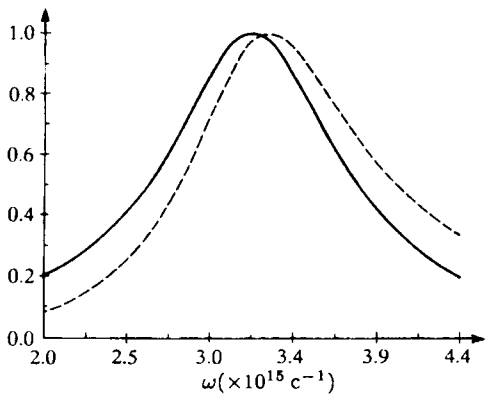


Рис. 5.44. Иллюстрация эффекта апертуры на спектр света для системы, изображенной на рис. 5.43. Нормированный спектр на оси в дальней зоне (пунктирная линия) и нормированный спектр на апертуре (сплошная линия), для случая когда нормированный спектр на апертуре имеет лоренцевский профиль $s^{(0)}(\omega) = A\Gamma^2/[(\omega - \bar{\omega})^2 + \Gamma^2]$, ($A$ = const), где $\bar{\omega} = 3.2 \times 10^{15}\,\mathrm{c}^{-1}$, $\Gamma = 0.6 \times 10^{15}\,\mathrm{c}^{-1}$ и $a/l = 0.25$, l — эффективная корреляционная ширина света на апертуре на частоте $\bar{\omega}$. (Foley, 1990)

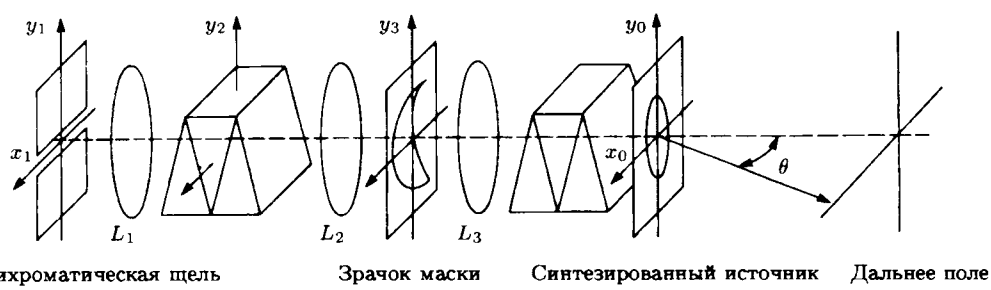


Рис. 5.45. Оптическая система, которая используется для синтеза плоских, вторичных источников с заданными когерентными свойствами. (Indebetouw, 1989).

дифрагированного света в дальней зоне отличается от спектра света в окрестности апертуры на множитель, который зависит, главным образом, от отношения радиуса апертуры к эффективной спектральной корреляционной длине

$$l(\omega) = \frac{0.61cf}{\omega a_S} \tag{5.8.51}$$

света на апертуре. На рис. 5.44 проиллюстрирован пример такого изменения в спектре. Возвращаясь к (5.8.34), ясно, что при соответствующем выборе спектральной степени когерентности источника, можно получить более существенные изменения, чем просто сдвиги линий. Это так же очевидно из теоретических предсказаний, изображенных на рис. 5.33 и рис. 5.34. Индебетау (Indebetouw, 1989) разработал систему для синтеза источников с заданными свойствами когерентности. Она схематично показана на рис. 5.45. На входе помещается узкая щель, которая освещается пространственно некогерентным полихроматическим (сложным) светом с однородной спектральной плотностью. Эта щель отображается двухлинзовой афокальной системой (линзы L_1 и L_2 с фокусными расстояниями f) на маску плоскости 3. Зрачок этой отображающей апертуры (плоскость 2 на рис. 5.45) состоит из апертуры и призмы, которая сдвигает изображение

щели вдоль оси y_3 на величину, зависящую от частоты. При соответствующих экспериментальных условиях плоскость 3 действует как промежуточный вторичный источник, который является пространственно некогерентным вдоль оси x_3 и спектрально рассеянным вдоль оси y_3. Для получения желаемой спектральной степени когерентности на плоскости 0 за другой призмой, которая идентична первой, используется зрачок маски с комплексной амплитудной функцией пропускания $T(x_3, \omega)$. Эта вторая призма необходима для удаления определенного нежелательного фазового члена.

Подробное вычисление показывает, что в плоскости 0 образуется вторичный источник со спектральной плотностью, одинаковой в каждой точке, и со спектральной степенью когерентности, которая изменяется вдоль направления x и пропорциональна фурье-образу квадрата модуля функции пропускания $T(x_3, \omega)$ маски зрачка, которая модулирует рассеянное изображение щели.

На рис. 5.46 показан пример маски зрачка, используемый для синтеза источника с заданной степенью когерентности. Синтезированный источник имеет примерно равномерную спектральную плотность, $S(\omega) = S_0 = \text{const}$, в определенной частотной области значений и равную нулю вне этой области. На рис. 5.47 показаны спектры в дальней зоне, создаваемые этим источником в трех выбранных направлениях наблюдения.

Наконец, следует заметить, что во всех ситуациях, приводящих к изменениям спектра, которые мы до сих обсуждали, никакие новые частотные компоненты не создавались корреляционным механизмом. Этот факт является очевидным, например, из уравнения (5.8.38), которое показывает, что $S^{(\infty)}(\mathbf{rs}, \omega) = 0$ всякий раз, когда $s^{(0)}(\omega) = 0$. Корреляции источника приводят к увеличению или уменьшению вкладов различных частотных компонент в исходном спектре, но не создают новых компонент. Следовательно, наибольшие спектральные сдвиги, которые могут создаваться таким образом, будут порядка эффективной ширины исходной спектральной линии. Аналогичные замечания применимы к изменениям в спектре, обусловленным, отчасти, аналогичным механизмом рассеяния на частично коррелированных, статических, случайных средах [см. разд. 7.6.4(в), а именно (7.6.59)]. Однако для динамического рассеяния или, более точно, для рассеяния на случайных средах, для которых отклики на падающее поле варьируются не только в пространстве, но и во времени, в рассеянном свете могут появиться спектральные компоненты, которых не было в падающем свете. В частности, такой процесс может привести к большим сдвигам линии. При определенных условиях изменения в спектре, которые возникают таким способом, могут имитировать эффект Доплера, даже несмотря на то, что источник, рассеиватель и наблюдатель покоятся друг относительно друга (Wolf, 1989; James, Savedoff and Wolf, 1990; James and Wolf, 1990, 1994). На рис. 7.9 приведен пример.

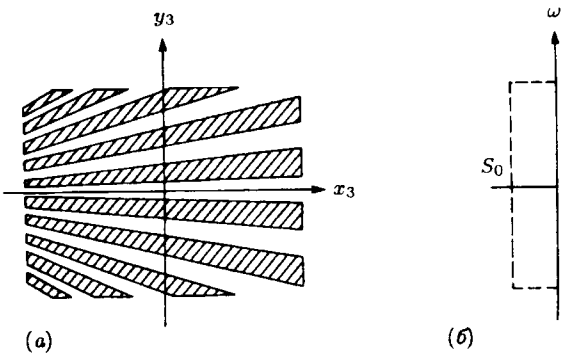


Рис. 5.46. Маска зрачка *а*, используемая для синтеза источника с однородным спектром *б*, который создает спектры в дальней зоне, показанные на рис. 5.47. (Indebetouw, 1989)

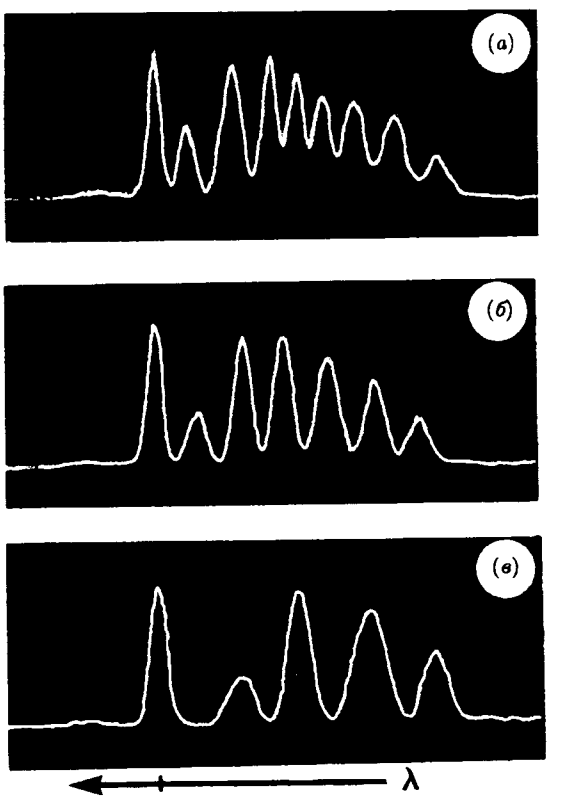


Рис. 5.47. Спектры в дальней зоне, наблюдаемые в направлениях (*а*) $\theta = 3°$; (*б*) $\theta = 0°$ и (*в*) $\theta = -3°$, создаваемые синтезированным, спектрально однородным источником, полученным посредством маски зрачка, изображенной на рис. 5.46 (Indebetouw, 1989)

5.8.3. Условие для спектральной инвариантности: закон скейлинга для плоских вторичных квазиоднородных источников

В предыдущем разделе мы показали, что в общем случае спектр света в дальней зоне, создаваемый плоским, квазиоднородным, вторичным источником, отличается от спектра источника даже при распространении в свободном пространстве. Можно выразить этот факт словами, что спектр света не является, в общем случае, инвариантом при распространении. С другой стороны, до относительно недавнего времени, изменения в спектрах не наблюдались. Это говорит о том, что источники в обычных лабораториях имеют весьма определенные свойства когерентности. Вскоре мы увидим, что это действительно так.

Снова рассмотрим поле, создаваемое плоским, вторичным, квазиоднородным источником с нормированным спектром $s^{(0)}(\omega)$ [см. (5.8.35)], который имеет одинаковое значение в каждой точке источника. Сначала мы получим условие, которому спектральная степень когерентности источника должна удовлетворять, чтобы нормированный спектр дальнего поля, создаваемого источником, не зависел от направления $\mathbf{s}$ наблюдения. Для этой цели мы используем две формулы обращения, которые мы получили в разд. 5.3. Первая из них [см. (5.3.37)] с учетом (5.8.33) принимает вид

$$\widetilde{S}^{(0)}(0,\omega) = \frac{r^2}{(2\pi)^2}\int_{\mathbf{s}_\perp^2\leqslant 1}(1-\mathbf{s}_\perp^2)^{-1}S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)\,d^2s_\perp, \tag{5.8.52}$$

где мы предположили, что высокие пространственно-частотные компоненты ($f^2 > k^2$) спектральной степени когерентности света на плоскости источника становятся пренебрежимо малыми. Если нормированный спектр $s^{(0)}$ является одинаковым в каждой точке источника, то, выполняя двумерное пространственное преобразование Фурье (5.8.35) и вычисляя его для пространственной частоты $\mathbf{f} = 0$, мы имеем

$$\widetilde{S}^{(0)}(0,\omega) = \widetilde{I}(0)s^{(0)}(\omega), \tag{5.8.53}$$

где $\widetilde{I}(0)$ пропорциональна полной интенсивности [см. (5.8.36) и (5.8.39)]. Используя это соотношение в (5.8.52), мы получим следующую формулу для восстановленного (нижний индекс «восст.») нормированного спектра источника:

$$[s^{(0)}(\omega)]_{\text{восст.}} = \frac{r^2}{(2\pi)^2\widetilde{I}(0)}\int_{\mathbf{s}_\perp^2\leqslant 1}(1-\mathbf{s}_\perp^2)^{-1}S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)\,d^2s_\perp. \tag{5.8.54}$$

Если проинтегрировать обе стороны этого уравнения по всей частотной области и использовать условие нормировки (5.8.37), мы сразу находим, что

$$\frac{(2\pi)^2\widetilde{I}(0)}{r^2} = \int_0^\infty d\omega\int_{\mathbf{s}_\perp^2\leqslant 1}(1-\mathbf{s}_\perp^2)^{-1}S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)\,d^2s_\perp. \tag{5.8.55}$$

При подстановке этого уравнения в (5.8.54), мы получим следующее окончательное выражение для нормированного спектра на основе спектра в дальней зоне:

$$[s^{(0)}(\omega)]_{\text{восст.}} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbf{s}_\perp^2\leqslant 1}(1-\mathbf{s}_\perp^2)^{-1}S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)\,d^2s_\perp}{\displaystyle\int_0^\infty d\omega\int_{\mathbf{s}_\perp^2\leqslant 1}(1-\mathbf{s}_\perp^2)^{-1}S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)\,d^2s_\perp}. \tag{5.8.56}$$

Далее, при использовании простого соотношения (5.8.33) во второй формуле обращения [см. (5.3.38)], для квазиоднородных источников мы получим соответствующее выражение для спектральной степени когерентности источника:

$$[g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\omega)]_{\text{восст.}} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbf{s}_\perp^2\leqslant 1}(1-\mathbf{s}_\perp^2)^{-1}S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)\exp(ik\mathbf{s}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}')\,d^2s_\perp}{\displaystyle\int_{\mathbf{s}_\perp^2\leqslant 1}(1-\mathbf{s}_\perp^2)^{-1}S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)\,d^2s_\perp}. \tag{5.8.57}$$

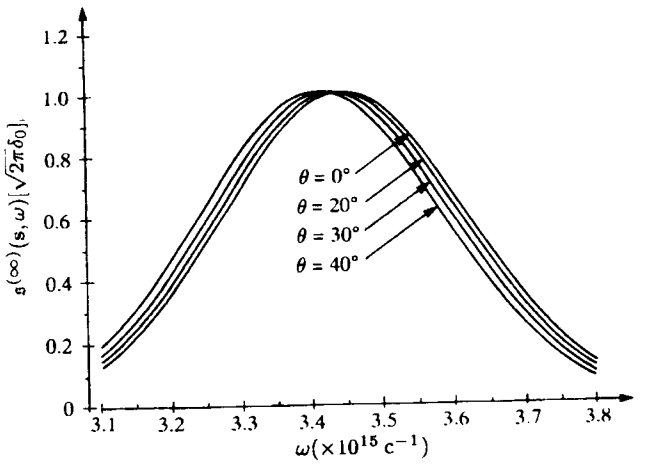


Рис. 5.48. Нормированные спектры в дальней зоне $s^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega) = S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)/\int_0^\infty S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)\,d\omega$, вычисленные с помощью (5.8.48) в единицах $[\delta_0\sqrt{2\pi}]^{-1}$, создаваемые плоским, вторичным, квазиоднородным источником с нормированным спектром, состоящим из одной линии с гауссовским профилем, и со спектральной степенью когерентности, которая также является гауссовской с $\omega_0 = 3.43 \times 10^{15}$ Гц, $\delta_0/\omega_0 = 1/20$, $\sigma_g = 0.5\lambda_0$ (Wolf, 1992)

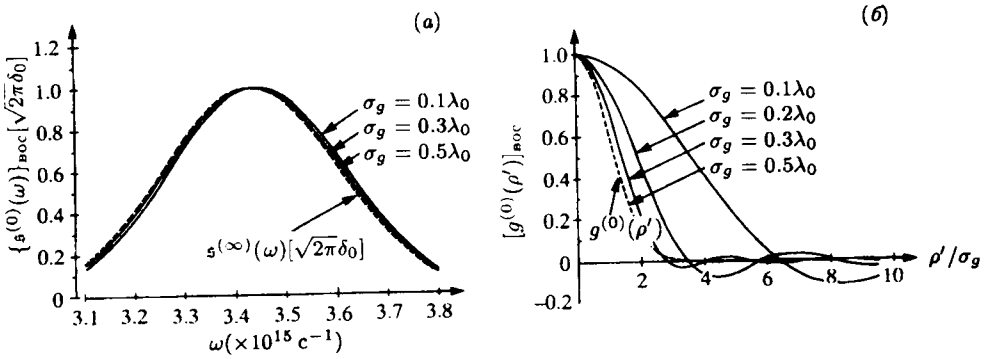


Рис. 5.49. *а* — Восстановленные нормированные спектры источников $[s^{(0)}(\omega)]_{\text{восст}}$ в единицах $[\delta_0\sqrt{2\pi}]^{-1}$ и *б* — восстановленная спектральная степень когерентности $[g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\omega_0)]_{\text{восст}}$ (на рисунке аргумент ω_0 не показан), вычисленные на основе спектров в дальней зоне, показанные на рис. 5.48, используя (5.8.56) и (5.8.57) (Wolf, 1992)

Формулы (5.8.56) и (5.8.57) доказывают тот интересный факт, что для рассматриваемого класса источников спектр в дальней зоне позволяет определить как нормированный спектр источника, так и спектральную степень когерентности источника при условии, что высокие пространственно-частотные компоненты ($|\mathbf{f}| > k$) спектральной степени когерентности являются пренебрежимо малыми, что обычно и происходит. На рис. 5.49 представлены примеры таких восстановлений на основе нормированных спектров в дальней зоне [см. (5.8.58) ниже], для случая, когда и нормированный спектр источника и спектральная степень когерентности имеют гауссовские профили [см. (5.8.40) и (5.8.41)]. Спектры в дальней зоне определяются уравнением (5.8.48) и показаны на рис. 5.48.

Из рис. 5.49 мы видим, что для источников, к которым относятся эти вычисления, восстановленные спектры источников и восстановленная спектральная степень когерентности источника восстанавливаются очень близко к данным предполагаемого источника, при условии, что дисперсия спектральной степени когерентности источника порядка или больше $0.5\lambda_0$. Предполагая, что высокие пространственно-частотные компоненты спектральной степени когерентности являются пренебрежимо малыми, нам не нужно проводить отличия между истинными и восстановленными данными и, следовательно, мы теперь будем опускать индекс «восст.» .

Введем нормированный спектр в дальней зоне

$$s^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega) = \frac{S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)}{I^{(\infty)}(r\mathbf{s})}, \tag{5.8.58}$$

где

$$I^{(\infty)}(r\mathbf{s}) = \int_0^\infty S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)\,d\omega. \tag{5.8.59}$$

Очевидно, эта нормировка дает

$$\int_0^\infty s^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)\,d\omega = 1. \tag{5.8.60}$$

Ясно, из соотношения (5.8.33) между спектром в дальней зоне и интенсивностью излучения и из определения (5.8.58), что $s^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)$ фактически не зависит от расстояния r между началом координат и точкой наблюдения в дальней зоне. Предположим теперь, что спектр также не зависит от направления $\mathbf{s}$ наблюдения. Тогда мы можем вместо $s^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega)$ записать $s^{(\infty)}(\omega)$, и уравнение (5.8.58) означает, что

$$S^{(\infty)}(r\mathbf{s},\omega) = s^{(\infty)}(\omega)I^{(\infty)}(r\mathbf{s}). \tag{5.8.61}$$

Подставляя (5.8.61) в первую формулу обращения (5.8.56), используя условие нормировки (5.8.60) и пренебрегая вкладами от высоких пространственно-частотных компонент, мы получим следующий результат

$$s^{(\infty)}(\omega) = s^{(0)}(\omega). \tag{5.8.62}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема: *Рассмотрим плоский вторичный квазиоднородный источник, в каждой точке которого нормированный спектр имеет одно и то же значение. Если нормированный спектр поля, создаваемого этим источником, имеет одинаковые значения в каждой точке дальней зоны, то он должен быть равен нормированному спектру источника.*

Кроме того, если подставить (5.8.61) во вторую формулу обращения [см. (5.8.57)] и снова пренебречь вкладами от высоких пространственно-частотных компонент, то мы получим следующее выражение для спектральной степени когерентности источника:

$$g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\omega) = \frac{\displaystyle\int_{s_\perp^2\leqslant 1} (1-\mathbf{s}_\perp^2)^{-1} I^{(\infty)}(r\mathbf{s}) \exp(ik\mathbf{s}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}')\,d^2s_\perp}{\displaystyle\int_{s_\perp^2\leqslant 1} (1-\mathbf{s}_\perp^2)^{-1} I^{(\infty)}(r\mathbf{s})\,d^2s_\perp}. \tag{5.8.63}$$

Мы видим, что $g^{(0)}$ имеет определенную функциональную форму, а именно (если вместо $\boldsymbol{\rho}'$ писать $\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1$),

$$g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1,\omega) = h[k(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1)], \quad (k=\omega/c=2\pi/\lambda), \tag{5.8.64}$$

т.е. она является функцией только переменной

$$\zeta = k(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1) = 2\pi\frac{\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_1}{\lambda}. \tag{5.8.65}$$

По понятным причинам говорят, что спектральная степень когерентности, которая имеет функциональную форму (5.8.64), подчиняется *закону скейлинга.*

Только что установленный результат вместе с результатом (5.8.62) можно объединить в следующую теорему, впервые сформулированную Вольфом (Wolf, 1986, 1992):

Теорема: *Рассмотрим поле, создаваемое плоским вторичным квазиоднородным источником, в каждой точке которого нормированный спектр имеет одно и то же значение. Для того, чтобы нормированный спектр света, генерируемый этим источником, имел одинаковые значения как в дальней зоне, так и в самом источнике, спектральная степень когерентности света на плоскости источника должна удовлетворять закону скейлинга, т.е. должна иметь функциональную форму (5.8.64).*

Примерами таких источников, которые удовлетворяют закону скейлинга, являются все плоские, вторичные, квазиоднородные, *ламбертовские* источники, поскольку согласно (5.3.53) все такие источники имеют спектральную степень когерентности

$$g^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1, \omega) = \\ = \frac{\sin k|\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1|}{k|\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1|}, \quad (5.8.66)$$

которая, очевидно, подчиняется закону скейлинга (5.8.64). До недавнего времени «спектральная инвариантность» подразумевалась как само собой разумеющаяся, поскольку квазиоднородные ламбертовские источники часто встречаются в лабораториях и поскольку, как мы только что узнали, нормированный спектр света в дальней зоне, создаваемый таким источником, совпадает с нормированным спектром источника. Однако такая инвариантность на самом деле не является общим свойством света. Этот результат, впервые предсказанный Вольфом (Wolf, 1986), был вскоре подтвержден экспериментально Морисом и Факлисом (Morris and Faklis, 1987). Мы опишем кратко этот эксперимент.

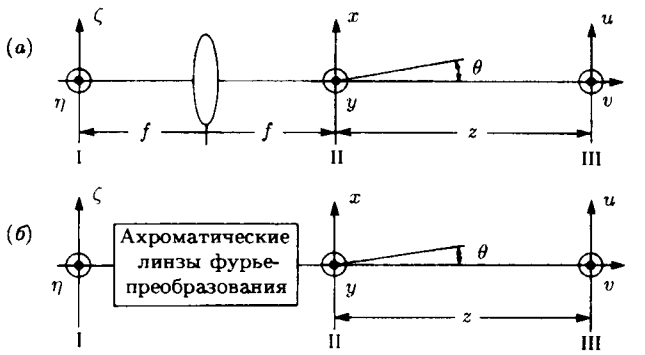


Рис. 5.50. Схемы экспериментов, реализующих плоский, вторичный, квазиоднородный источник в плоскости II, подчиняющийся закону скейлинга *а* и не подчиняющийся ему *б* (Morris and Faklis, 1987)

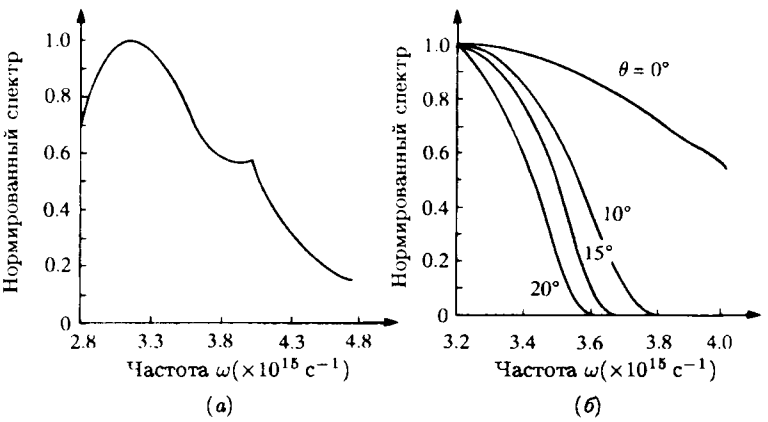


Рис. 5.51. Измеренные значения в разных направлениях θ нормированного спектра в дальней зоне, создаваемого источником, который удовлетворяет закону скейлинга *а* и не удовлетворяет ему *б*. Эти спектры были получены с помощью экспериментальных устройств, показанных на рис. 5.50. Было обнаружено, что для источника *а*, подчиняющемуся закону скейлинга, все нормированные спектры в дальней зоне являются одинаковыми, и поэтому на рисунке изображена только одна кривая (Morris and Faklis, 1987)

Морис и Факлис освещали апертуру в плоскости I [см. рис. 5.50] светом от широкополосного, существенно некогерентного теплового источника (вольфрамовая лампа), помещенного непосредственно перед апертурой. В плоскости II при помощи (а) обычной линзы с фокусным расстоянием f и (б) ахроматической линзы фурье-преобразования создавался плоский, вторичный, квазиоднородный источник. Спектры света, получаемые от этих источников, измерялись в дальней зоне (плоскость III) в разных направлениях наблюдения θ. Эти спектры сравнивались со спектрами вторичных источников в плоскости II.

Можно показать, что если апертура в плоскости II достаточно велика, то спектральная степень когерентности вторичного источника в плоскости II, создаваемого линзой на схеме (а), удовлетворяет закону скейлинга. С другой стороны, можно показать , что спектральная степень когерентности света в плоскости II, полученного при помощи ахроматической линзы фурье-преобразования, не подчиняется закону скейлинга. В соответствие с представленным ранее в этом разделе теоретическим анализом, можно ожидать, что в экспериментальной установке, показанной на рис. 5.50*а*, нормированный спектр дальнего поля (плоскость III) будет одинаковым во всех направлениях θ и будет равен нормированному спектру источника; тогда как в установке, изображенной на рис. 5.50*б*, нормированный спектр в дальней зоне будет зависеть от разных направлений θ и, следовательно, за исключением некоторых направлений, будет также отличаться от нормированного спектра источника. Это действительно было продемонстрировано в экспериментах Мориса и Факлиса. Их результаты приведены на рис. 5.51.

Мы подчеркиваем, что закон скейлинга представляет собой условие для спектральной инвариантности плоского, вторичного, квазиоднородного источника в *дальней зоне*. Вблизи источника спектр поля может отличаться как от спектра в дальней зоне, так и от спектра источника.

Приложение 5.1
Вывод асимптотического приближения (5.7.103)[1]

Согласно (5.7.99), имеем

$$C_\nu^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp) = \frac{kz}{2\pi i} N_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp), \tag{A5.1.1}$$

где (вместо $\boldsymbol{\rho}$ пишем $\boldsymbol{\rho}'$),

$$N_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp) = \int_\sigma S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}',\nu)\frac{e^{ik\Phi(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp,\boldsymbol{\rho}')}}{R^2}\, d^2\rho', \tag{A5.1.2}$$

и

$$\Phi(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp,\boldsymbol{\rho}') = R + \mathbf{s}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}', \tag{A5.1.3}$$

где

$$R = |\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}'|\,. \tag{A5.1.4}$$

Пусть

$$\mathbf{r}\equiv(x,y,z), \quad \boldsymbol{\rho}' = (x',y',0). \tag{A5.1.5}$$

Тогда формула (A5.1.2) принимает вид

$$N_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}_\perp) = \int_\sigma f(x',y';\mathbf{r};\nu)\, e^{ikg(x',y';\mathbf{r};\mathbf{s}_\perp)}\, dx'\, dy', \tag{A5.1.6}$$

где

$$f(x',y';\mathbf{r};\nu) = \frac{1}{R^2}S^{(0)}(x',y';\nu), \tag{A5.1.7a}$$

$$g(x',y';\mathbf{r};\mathbf{s}_\perp) = s_x x' + s_y y' + R, \tag{A5.1.7б}$$

$$R = [(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + z^2]^{1/2}. \tag{A5.1.8}$$

Асимптотическое поведение интеграла (A5.1.6) при $k\to\infty$ можно определить, используя принцип стационарной фазы для двойных интегралов (см. разд. 3.3.3). В этом предельном переходе принимается, что источник остается прежним, т.е. спектр $S^{(0)}(x',y',\nu)$ в интеграле остается заданным. Мы должны сначала определить местоположение критических точек первого рода подынтегрального выражения. Они представляют собой точки, в которых функция $g(x',y';\mathbf{r};s_x,s_y)$ стационарна в области источника σ относительно (x',y'), т.е. когда

$$g_{x'} = g_{y'} = 0 \tag{A5.1.9}$$

в области σ, где $g_{x'}$ и $g_{y'}$ означают первые частные производные от g по x' и y' соответственно. Теперь из уравнений (A5.1.7б) и (A5.1.8) мы имеем

$$g_{x'} = s_x + \frac{x'-x}{R}, \quad g_{y'} = s_y + \frac{y'-y}{R}. \tag{A5.1.10}$$

Из (A5.1.10) и (A5.1.8) следует, что если точка $x' = x_0'$ и $y' = y_0'$ является критической точкой первого рода, то она должна удовлетворять уравнениям

$$x_0' - x = -s_x[(x_0'-x)^2 + (y_0'-y)^2 + z^2]^{1/2}, \tag{A5.1.11a}$$

$$y_0' - y = -s_y[(x_0'-x)^2 + (y_0'-y)^2 + z^2]^{1/2}. \tag{A5.1.11б}$$

Возводя в квадрат левую и правую стороны этих уравнений, мы получим совместные уравнения для величин $(x_0'-x)^2$ и $(y_0'-y)^2$. Они легко решаются, и, следовательно, имеем

$$x_0' = x - \frac{s_x}{s_z}z, \quad y_0' = y - \frac{s_y}{s_z}z, \tag{A5.1.12a}$$

[1] см. (Foley and Wolf, 1991).

или, более точно, в векторном виде, с $\boldsymbol{\rho}_0' \equiv (x_0', y_0', 0)$, $\mathbf{r}_\perp \equiv (x, y, 0)$,

$$\boldsymbol{\rho}_0' = \mathbf{r}_\perp - \frac{z}{s_z}\mathbf{s}_\perp. \tag{А5.1.12б}$$

Формулы (А5.1.12) показывают, что функция $g(x', y'; \mathbf{r}; s_x, s_y)$ имеет одну и только одну стационарную точку на плоскости источника $z = 0$. Эта точка будет критической точкой первого рода подынтегрального выражения в правой части (А5.1.2), только если она расположена в области источника σ. На рис. 5.29 (см. текст) проиллюстрирован геометрический смысл этой точки, которая обозначена как Q_0.

Согласно общей формуле (3.3.41) асимптотическое приближение к интегралу (А5.1.6) определяется выражением [если игнорировать зависимость функции $f(x', y', \mathbf{r}; \nu)$ от ν, что является оправданным по причинам, которые объяснялись в разд. 5.7.5]

$$N_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{s}_\perp) \sim \frac{2\pi i\alpha}{k\sqrt{|\Delta|}} f(x_0', y_0'; \mathbf{r}; \nu)\, \mathrm{e}^{ikg(x_0', y_0'; \mathbf{r}; \mathbf{s}_\perp)} \quad \text{при } k \to \infty, \tag{А5.1.13}$$

где

$$\Delta = (g_{x'x'} g_{y'y'} - g_{x'y'}^2)|_{x_0', y_0'}, \tag{А5.1.14}$$

и

$$\alpha = \begin{cases} +1 & \text{при } \Delta > 0,\ \Sigma > 0, \\ -1 & \text{при } \Delta > 0,\ \Sigma < 0, \\ -i & \text{при } \Delta < 0, \end{cases} \tag{А5.1.15}$$

$$\Sigma = (g_{x'x'} + g_{y'y'})|_{x_0', y_0'}. \tag{А5.1.16}$$

Нами предположено, что $\Delta \neq 0$. Член $g_{x'x'}$ означает вторую частную производную от g по x', и т.д. Эти производные легко получаются при дифференцировании выражений (А5.1.10). Тогда получаем следующие формулы:

$$g_{x'x'} = \frac{1}{R}\left[1 - \frac{(x'-x)^2}{R^2}\right], \quad g_{y'y'} = \frac{1}{R}\left[1 - \frac{(y'-y)^2}{R^2}\right], \quad g_{x'y'} = -\frac{(x'-x)(y'-y)}{R^3}. \tag{А5.1.17}$$

Подставляя (А5.1.12а) в (А5.1.17), можно легко получить значения этих величин в критической точке $x' = x_0'$ и $y' = y_0'$. Находим

$$g_{x'x'}|_{x_0', y_0'} = \frac{s_z}{z}(1 - s_x^2), \quad g_{y'y'}|_{x_0', y_0'} = \frac{s_z}{z}(1 - s_y^2), \quad g_{x'y'}|_{x_0', y_0'} = -\frac{s_x s_y s_z}{z}, \tag{А5.1.18}$$

где мы использовали тот факт, что

$$R|_{x_0', y_0'} = \frac{z}{s_z}, \tag{А5.1.19}$$

как следует из уравнений (А5.1.8) и (А5.1.12а).

Подставляя (А5.1.18) в формулы (А5.1.14), (А5.1.15) и (А5.1.16), находим, что

$$\Delta = \left(\frac{s_z^2}{z}\right)^2, \quad \alpha = 1 \quad \text{и } \Sigma > 0. \tag{А5.1.20}$$

Более того, подставляя формулы (А5.1.12а) в (А5.1.7) и используя (А5.1.19), получим для $f(x_0', y_0'; \mathbf{r}, \nu)$ и для $g(x_0', y_0'; \mathbf{r}; \mathbf{s}_\perp)$ следующие выражения

$$f(x_0', y_0'; \mathbf{r}, \nu) = \left(\frac{s_z}{z}\right)^2 S^{(0)}(x_0', y_0', \nu), \tag{А5.1.21}$$

$$g(x_0', y_0'; \mathbf{r}, \mathbf{s}_\perp) = xs_x + ys_y + zs_z = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}. \tag{А5.1.22}$$

При подстановке уравнений (А5.1.20), (А5.1.21) и (А5.1.22) в общую формулу (А5.1.13) мы находим

$$N_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{s}_\perp) \sim \frac{2\pi i}{k}\frac{1}{z} S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_0', \nu)\, \mathrm{e}^{ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} \quad \text{при } k \to \infty, \tag{А5.1.23}$$

при условии, что точка $\boldsymbol{\rho}_0'$, определяемая формулой (А5.1.12б), лежит в области интегрирования (область источника). Если это не так, то вклад в асимптотическое разложение для $N_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{s}_\perp)$ дают критические точки второго рода, которые расположены на граничной кривой области σ (см. разд. 3.3.2(б)). Эти точки (за исключением некоторых специальных случаев)

$$N_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{s}_\perp) \sim O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right) \quad \text{при } k \to \infty. \tag{А5.1.24}$$

Наконец, подставляя (А5.1.23) и (А5.1.24) в (А5.1.1), мы видим, что при $k \to \infty$

$$C_\nu^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{s}_\perp) \sim \begin{cases} S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_0', \nu)\, \mathrm{e}^{ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} & \text{при } \boldsymbol{\rho}_0' \in \sigma, \\ O\left(\dfrac{1}{k^{1/2}}\right) & \text{при } \boldsymbol{\rho}_0' \notin \sigma, \end{cases} \tag{А5.1.25}$$

где $\boldsymbol{\rho}_0'$ определяется формулой (А5.1.12б). Выражение (А5.1.25) есть не что иное, как формула (5.7.103), используемая в тексте.

Приложение 5.2
Теорема произведения для гауссовских функций[1]

В этом приложении мы докажем следующую теорему, которая известна как *теорема произведения для гауссовских функций*:

Если $G(\omega - \omega_j; \delta_j)$ представляет собой гауссовскую функцию

$$G(\omega - \omega_j; \delta_j) = \exp[-(\omega - \omega_j)^2/2\delta_j^2], \tag{А5.2.1}$$

то произведение двух таких функций пропорционально другой гауссовской функции, равной

$$G(\omega - \omega_1; \delta_1)G(\omega - \omega_2; \delta_2) = G[\omega_1 - \omega_2; (\delta_1^2 + \delta_2^2)^{1/2}]G(\omega - \tilde{\omega}; \tilde{\delta}), \tag{А5.2.2}$$

где

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega_1\delta_2^2 + \omega_2\delta_1^2}{\delta_1^2 + \delta_2^2}, \tag{А5.2.3}$$

$$\frac{1}{\tilde{\delta}^2} = \frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta_2^2}. \tag{А5.2.4}$$

Чтобы доказать эту теорему, умножим две гауссовские функции и выразим их произведение в виде

$$G(\omega - \omega_1; \delta_1)G(\omega - \omega_2; \delta_2) = \exp[-g(\omega)]. \tag{А5.2.5}$$

Тогда

$$g(\omega) = \frac{1}{2\delta_1^2\delta_2^2}[\delta_2^2(\omega - \omega_1)^2 + \delta_1^2(\omega - \omega_2)^2] = \frac{1}{2\delta_1^2\delta_2^2}(a^2\omega^2 - 2b\omega + c), \tag{А5.2.6}$$

где

$$a^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2, \tag{А5.2.7а}$$

$$b = \omega_1\delta_2^2 + \omega_2\delta_1^2, \tag{А5.2.7б}$$

$$c = \omega_1^2\delta_2^2 + \omega_2^2\delta_1^2. \tag{А5.2.7в}$$

[1] см. (Wolf, Foley and Gori, 1989).

Выделяя в уравнении (А5.2.6) полный квадрат, находим

$$g(\omega) = \frac{a^2}{2\delta_1^2\delta_2^2}\left(\omega - \frac{b}{a^2}\right)^2 + \frac{1}{2\delta_1^2\delta_2^2}\left(c - \frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{1}{\tilde{\delta}^2}(\omega - \tilde{\omega})^2 + \frac{1}{2\delta_1^2\delta_2^2}\left(c - \frac{b^2}{a^2}\right), \tag{А5.2.8}$$

где

$$\frac{1}{\tilde{\delta}^2} = \frac{a^2}{\delta_1^2\delta_2^2} = \frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta_2^2}, \tag{А5.2.9}$$

$$\tilde{\omega} = \frac{b}{a^2} = \frac{\omega_1\delta_2^2 + \omega_2\delta_1^2}{\delta_1^2 + \delta_2^2}. \tag{А5.2.10}$$

Используя уравнения (А5.2.7а)—(А5.2.7в), нетрудно показать, что

$$c - \frac{b^2}{a^2} = \frac{\delta_1^2\delta_2^2}{\delta_1^2 + \delta_2^2}(\omega_1 - \omega_2)^2. \tag{А5.2.11}$$

Подставляя (А5.2.11) в (А5.2.8) и (А5.2.8) в (А5.2.5), находим, с учетом определения (А5.2.1), что

$$G(\omega - \omega_1; \delta_1)G(\omega - \omega_2; \delta_2) = \exp\left[-\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{2(\delta_1^2 + \delta_2^2)}\right]\exp\left[-\frac{(\omega - \tilde{\omega})^2}{2\tilde{\delta}^2}\right] = \\ = G[\omega_1 - \omega_2; (\delta_1^2 + \delta_2^2)^{1/2}]G(\omega - \tilde{\omega}; \tilde{\delta}), \tag{А5.2.12}$$

что и требовалось доказать.

В последней части прил. А работы (Wolf, Foley and Gori, 1989) обсуждаются некоторые следствия из этой теоремы.

Задачи

5.1 Рассмотрите трехмерный, статистически стационарный, конечный источник.

(а) Покажите, что когда источник является пространственно полностью некогерентным, интенсивность излучения поля не зависит от направления.

(б) Какой вид принимает выражение для интенсивности излучения, когда источник является пространственно полностью когерентным?

(в) Рассмотрите когерентный, однородный, синфазный, сферический источник с радиусом a. Покажите, что при определенных значениях a источник не будет излучать.

5.2 Флуктуирующий источник $Q(\mathbf{r}, t)$ занимает конечную, трехмерную область D в свободном пространстве. Флуктуации характеризуются стационарным статистическим ансамблем. Покажите,что если источник является пространственно когерентным на некоторой частоте ω, то поле, создаваемое этим источником, также будет пространственно когерентным на той же частоте.

5.3 Функция взаимной спектральной плотности флуктуирующего, статистически стационарного распределения источника $Q(\mathbf{r}, t)$, занимающего трехмерную область D, имеет вид

$$W_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = p(\omega)[f^*(\mathbf{r}_1, \omega)f(\mathbf{r}_2, \omega) + g^*(\mathbf{r}_1, \omega)g(\mathbf{r}_2, \omega)] + \\ + q(\omega)[f^*(\mathbf{r}_1, \omega)g(\mathbf{r}_2, \omega) + g^*(\mathbf{r}_1, \omega)f(\mathbf{r}_2, \omega)],$$

где $p(\omega)$ и $q(\omega)$ — действительные числа, $p(\omega)$ — положительное число, и

$$|q(\omega)| \leqslant p(\omega), \quad \int_D f^*(\mathbf{r}, \omega)g(\mathbf{r}, \omega)\, d^3r = 0, \quad \int_D |f(\mathbf{r}, \omega)|^2\, d^3r = \int_D |g(\mathbf{r}, \omega)|^2\, d^3r = 1.$$

Определите представление $W_Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ по когерентным модам.

5.4 Плоский, вторичный, квазиоднородный источник конечной протяженности излучает в полупространство $z > 0$. Полный поток, который источник излучает на частоте ω, определяется выражением

$$F_\omega = \int J_\omega(\mathbf{s})\, d\Omega,$$

где $J_\omega(\mathbf{s})$ — интенсивность излучения и интегрирование выполняется по телесному углу 2π, который полусфера на бесконечности стягивает в источник в полупространстве $z > 0$. Покажите, что

$$F_\omega \leqslant \int_\sigma S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \omega)\, d^2r,$$

где $S^{(0)}(\boldsymbol{\rho}, \omega)$ — спектральная плотность источника и σ — площадь, занимаемая источником.

5.5 Монохроматическое поле распространяется в полупространство $z > 0$. Покажите, что:

(а) затухающие волны не дают вклад в полный поток энергии через любую плоскость $z = \text{const} > 0$.

(б) энергия сохраняется в том смысле, что полный поток, входящий в полупространство из плоскости $z = 0$ равен полному потоку энергии через полусферу на бесконечности в этом полупространстве.

5.6 Рассмотрите два идентичных малых источника на расстоянии d друг от друга. Спектр каждого источника равен $S_Q(\omega)$, а корреляция между ними характеризуются $\mu_Q(\omega)$.

Получите выражение для полной мощности, излучаемой двумя источниками и обсудите предельные случаи $d \ll \lambda$ и $d \gg \lambda$, $(\lambda = 2\pi c/\omega)$. Прокомментируйте смысл этого результата для случая $d \ll \lambda$ в сравнении с полным поведением спектра в дальней зоне.

5.7 Рассмотрите линейную, инвариантную по времени оптическую систему. Свет на входной плоскости $z = z_0$ (см. рисунок) является статистически стационарным и имеет один и тот же спектр источника в каждой точке на этой плоскости, а его спектральная степень когерентности — $\mu_0(\boldsymbol{\rho}_1', \boldsymbol{\rho}_2', \omega)$. Далее, $K(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', \omega)$ — функция импульсного отклика системы для пропускания монохроматического света из точки $\boldsymbol{\rho}'$ на входной плоскости $z = z_0$ к точке $\boldsymbol{\rho}$ на выходной плоскости $z = z_1$.



(а) Получите выражение для спектра $S_1(\boldsymbol{\rho}, \omega)$ на выходной плоскости.

(б) Рассмотрите специальный случай, когда свет от частично когерентного, плоского, вторичного источника занимает конечную область σ на входной плоскости $z = z_0$ и излучает в дальнюю зону свободного пространства. Получите выражение для $S_1(\boldsymbol{\rho}, \omega)$ в этом случае.

(в) Упростите выражение, полученное в (б) для случая, когда источник является квазиоднородным, и покажите, что этот результат согласуется с одним из соотношений взаимности для излучения, создаваемого квазиоднородными источниками (см. разд. 5.3.2).

(г) Какой вид принимает выражение для $S_1(\boldsymbol{\rho}, \omega)$, когда на вход в положительном направлении оси z поступает полихроматическая плоская волна?

5.8 Рассмотрите трехмерный, пространственно некогерентный, первичный источник, занимающий конечную область D. Флуктуации этого источника статистически стационарны, и спектр источника является одинаковым в каждой точке источника.

(а) Покажите, что нормированный спектр поля, создаваемый этим источником, имеет одинаковые значения в каждой точке вне области источника D.

(б) Получите выражение для спектральной степени когерентности поля в дальней зоне.

5.9 Трехмерный, первичный, квазиоднородный источник со спектром $S_Q(\omega)$, который является одним и тем же в каждой точке источника, имеет спектральную степень когерентности, которая подчиняется трехмерному закону скейлинга, т.е. $\mu_Q(\mathbf{r}',\omega) = h(k\mathbf{r}')$, $(k = \omega/c)$. Покажите, что нормированная спектральная плотность $s_V(r\mathbf{u},\omega)$ поля, создаваемого этим источником, является одинаковой везде в дальней зоне и найдите соотношение между нормированным спектром s_V в дальней зоне и спектром источника S_Q.

5.10 Рассмотрите *параксиальное* распространение света от частично когерентного, статистически стационарного, плоского, вторичного источника, который расположен в плоскости $z = 0$ и излучает в полупространство $z > 0$. Пусть $\mathbf{r} \equiv (x,y,z) \equiv (\boldsymbol{\rho},z)$, $[\boldsymbol{\rho} = (x,y)]$ будет радиус-вектором обычной точки в этом полупространстве.

Покажите, что если нормированный спектр $s(\boldsymbol{\rho},z;\omega)$ поля не зависит от $\boldsymbol{\rho}$ на каждой плоскости $z = \text{const} > 0$, то нормированный спектр поля является инвариантом при распространении, т.е. не изменяется во всем полупространстве $z \geqslant 0$.

Глава 6

ТЕОРИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВЕКТОРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

6.1. Введение

В предыдущих главах мы изучили корреляционные эффекты второго порядка во флуктуирующих скалярных волновых полях. Мы видели, что простейшее проявление корреляций второго порядка в таких полях — это хорошо известные интерференционные явления. Мы показали, что их тщательный анализ приводит к введению скалярных корреляционных функций (функции взаимной когерентности или ее фурье-образа — функции взаимной спектральной плотности), с помощью которых могут быть проанализированы все корреляционные эффекты второго порядка.

Теперь обратим внимание на векторные поля, а точнее, на флуктуирующие электромагнитные поля. Начнем с анализа хорошо известного явления, которое свидетельствует о наличии корреляций второго порядка электромагнитных полей, а именно частичной поляризации. Мы увидим, что анализ частичной поляризации может быть с успехом выполнен с помощью определенных матриц размерности 2×2. Их естественным обобщением являются корреляционные матрицы размерности 3×3, которые связаны с набором корреляционных тензоров второго ранга. Используя эти тензоры, можно получить единое описание всех корреляционных явлений второго порядка в электромагнитных полях.

Как и в скалярном случае, удобно использовать аналитическое представление сигнала (разд. 3.1.1). Рассмотрим единственную реализацию флуктуирующего поля и пусть $\mathbf{E}^{(r)}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{H}^{(r)}(\mathbf{r},t)$ обозначают (действительные) векторы электрического и магнитного поля, соответственно, в точке, заданной радиус-вектором $\mathbf{r}$ в момент времени t. Выразим каждый вектор поля в виде интеграла Фурье

$$\mathbf{E}^{(r)}(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\mathbf{E}}^{(r)}(\mathbf{r},\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}\,d\nu,\quad \mathbf{H}^{(r)}(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\mathbf{H}}^{(r)}(\mathbf{r},\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}\,d\nu. \tag{6.1.1}$$

Тогда соответствующие комплексные аналитические сигналы задаются интегралами

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\int_{0}^{\infty}\widetilde{\mathbf{E}}^{(r)}(\mathbf{r},\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}\,d\nu,\quad \mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\int_{0}^{\infty}\widetilde{\mathbf{H}}^{(r)}(\mathbf{r},\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}\,d\nu. \tag{6.1.2}$$

Для полей, которые являются статистически стационарными, разложение Фурье (6.1.1) не будет существовать в смысле теории аналитических функций (см. разд. 2.4) и должно интерпретироваться в смысле теории обобщенных функций. Из уравнения (3.1.12) следует, при применении к каждой декартовой компоненте комплексного электрического и магнитного поля, что

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2}[\mathbf{E}^{(r)}(\mathbf{r},t)+i\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r},t)], \tag{6.1.3а}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2}[\mathbf{H}^{(r)}(\mathbf{r},t)+i\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r},t)], \tag{6.1.3б}$$

где действительная и мнимая части каждого из этих двух комплексных векторов поля образуют пару относительно преобразования Гильберта.

Для дальнейших целей будет удобно вывести выражения для средних значений плотностей электрической и магнитной энергии и для среднего значения вектора Пойнтинга электромагнитного поля в свободном пространстве через комплексные векторы поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Полагая, что флуктуации поля стационарны (по крайней мере, в широком смысле), эргодичны и имеют нулевое среднее, мы имеем, согласно уравнениям (3.1.77), что

$$\langle [\mathbf{E}^{(r)}(\mathbf{r},t)]^2 \rangle = \langle [\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r},t)]^2 \rangle, \tag{6.1.4a}$$

$$\langle \mathbf{E}^{(r)}(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r},t) \rangle = 0. \tag{6.1.4б}$$

Теперь в гауссовой системе единиц[1] среднее значение плотности электрической энергии $\langle w_e(\mathbf{r},t) \rangle$ задается выражением

$$\langle w_e(\mathbf{r},t) \rangle = \frac{1}{8\pi} \langle [\mathbf{E}^{(r)}(\mathbf{r},t)]^2 \rangle. \tag{6.1.5}$$

Воспользовавшись соотношениями (6.1.3а) и (6.1.4), мы сразу же найдем, что в терминах комплексного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$

$$\langle w_e(\mathbf{r},t) \rangle = \frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \rangle. \tag{6.1.6}$$

Точно таким же образом следует, что среднее значение плотности магнитной энергии $\langle w_m(\mathbf{r},t) \rangle$ может быть выражено в виде

$$\langle w_m(\mathbf{r},t) \rangle = \frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{H}^*(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \rangle. \tag{6.1.7}$$

Среднее значение вектора Пойнтинга задается выражением

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},t) \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}^{(r)}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}^{(r)}(\mathbf{r},t) \rangle. \tag{6.1.8}$$

Теперь согласно (6.1.3) имеем

$$\mathrm{Re}\,\langle \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{4} \mathrm{Re}\,[\langle (\mathbf{E}^{(r)} - i\mathbf{E}^{(i)}) \times (\mathbf{H}^{(r)} + i\mathbf{H}^{(i)}) \rangle] = \frac{1}{4} [\langle \mathbf{E}^{(r)} \times \mathbf{H}^{(r)} \rangle + \langle \mathbf{E}^{(i)} \times \mathbf{H}^{(i)} \rangle], \tag{6.1.9}$$

где Re обозначает действительную часть. Воспользовавшись соотношением (3.1.77а), мы сразу же найдем, что два слагаемых в правой части уравнения (6.1.9) равны друг другу, и, следовательно,

$$\mathrm{Re}\,\langle \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{E}^{(r)} \times \mathbf{H}^{(r)} \rangle. \tag{6.1.10}$$

Подставляя это соотношение в выражение (6.1.8), мы получаем требуемое выражение для среднего значения вектора Пойнтинга:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},t) \rangle = \frac{c}{2\pi} \mathrm{Re}\,\langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \rangle. \tag{6.1.11}$$

6.2. Равновременна́я 2 × 2-матрица когерентности хорошо коллимированного, однородного, квазимонохроматического светового луча[2]

Рассмотрим хорошо коллимированный, однородный, квазимонохроматический световой луч со средней частотой $\bar{\nu}$. Выберем правую декартову систему координат с осями x, y, z и осью z вдоль эффективного направления распространения луча. Пусть

$$E_x(t) = a_1(t)\, e^{i[\alpha_1(t) - 2\pi\nu t]}, \quad E_y(t) = a_2(t)\, e^{i[\alpha_2(t) - 2\pi\nu t]}, \tag{6.2.1}$$

[1] В этой книге используются как система единиц Гаусса, так и система единиц СИ. В целом, гауссова система единиц используется только при выводе формул в этой главе и следующих главах, тогда как значения электромагнитных величин всегда даются в единицах СИ.

[2] Анализ, представленный в этом разделе, в основном базируется на статье Вольфа (Wolf, 1959)

где $[a_1(t) \geqslant 0,\ a_2(t) \geqslant 0]$ — компоненты комплексного вектора электрического поля в направлениях x и y, соответственно, в точке (x, y) некоторой поперечной плоскости $z = z_0$ в момент времени t. Если точка (x, y) лежит в пределах пучка и не слишком близко к его краю, $E_x(t)$ и $E_y(t)$ будут фактически независимы от x и y, потому что луч предполагается однородным; однако, они будут зависеть от координаты z_0 (которую мы не указали явно в аргументах E_x и E_y).

Из свойств представления огибающей узкополосных сигналов, обсуждавшихся в разд. 3.1.2, следует, что множители комплексной амплитуды $a_1(t)\,e^{i\alpha_1(t)}$ и $a_2(t)\,e^{i\alpha_2(t)}$ в выражении (6.2.1) будут меняться медленно с t по сравнению с $\cos 2\pi\bar{\nu}t$ и $\sin 2\pi\bar{\nu}t$, оставаясь фактически постоянными на временны́х интервалах, меньших по сравнению с обратной шириной полосы света. Амплитуды $a_1(t)$ и $a_2(t)$, также как $E_x(t)$ и $E_y(t)$, являются случайными величинами.

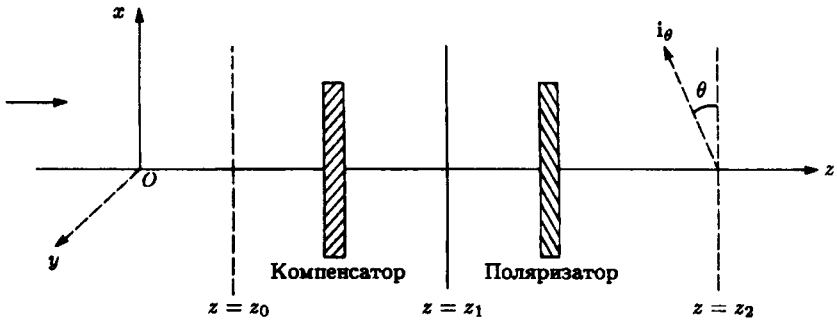


Рис. 6.1. Иллюстрация установки для определения элементов равновременно́й 2 × 2-матрицы когерентности однородного квазимонохроматического светового луча

В общем случае $E_x(t)$ и $E_y(t)$ будут коррелированны. Покажем теперь, что некоторая информация об этой корреляции может быть получена из простых экспериментов. Предположим, что луч пропускается через компенсатор и затем через поляризатор. Пусть ε_1 и ε_2 обозначают изменения фазы, созданные в $E_x(t)$ и $E_y(t)$, соответственно, компенсатором при прохождении света от плоскости $z = z_0$ до плоскости $z = z_1$ (см. рис. 6.1). Далее, пусть θ обозначает угол, который направление колебаний электрического поля, выходящего из поляризатора, образует с осью x. Обозначим как $\mathbf{i}_\theta$ единичный вектор с компонентами $\cos\theta$, $\sin\theta$ вдоль направлений x и y, соответственно. Опуская несущественный постоянный фазовый множитель, комплексное электрическое поле в любой точке поперечного сечения $z = z_2$ луча, который выходит из этого двухкомпонентного устройства, задается (если игнорировать потери на отражение на поверхностях компенсатора и поляризатора) в виде

$$\mathbf{E}'(t; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) = [E_x(t)\,e^{i\varepsilon_1}\cos\theta + E_y(t)\,e^{i\varepsilon_2}\sin\theta]\mathbf{i}_\theta \tag{6.2.2}$$

Среднее значение плотности электрической энергии $\langle w'_e \rangle$ в любой точке в освещенной части плоскости $z = z_2$ согласно уравнению (6.1.6) задается выражением

$$\langle w'_e(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta)\rangle = \frac{1}{4\pi}\langle \mathbf{E}'^*(t; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) \cdot \mathbf{E}'(t; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta)\rangle, \tag{6.2.3}$$

которое не зависит от времени из-за нашего допущения, что поле статистически стационарно. Подставляя уравнение (6.2.2) в уравнение (6.2.3), получим для $\langle w'_e \rangle$ выражение

$$\langle w'_e(\delta, \theta)\rangle = \frac{1}{4\pi}[J_{xx}\cos^2\theta + J_{yy}\sin^2\theta + J_{xy}\,e^{i\delta}\sin\theta\cos\theta + J_{yx}\,e^{-i\delta}\cos\theta\sin\theta], \tag{6.2.4}$$

где

$$\delta = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \tag{6.2.5}$$

и J_{kl}, (k, l стоят вместо x или y), — элементы ковариантной матрицы

$$\mathbf{J} \equiv \begin{bmatrix} \langle E_x^*(t)E_x(t)\rangle & \langle E_x^*(t)E_y(t)\rangle \\ \langle E_y^*(t)E_x(t)\rangle & \langle E_y^*(t)E_y(t)\rangle \end{bmatrix}. \tag{6.2.6}$$

В силу того, что фазовые изменения ε_1 и ε_2 входят в правую часть уравнения (6.2.4) только через разность $\delta = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, мы записали $\langle w'_e(\delta, \theta)\rangle$, а не $\langle w'_e(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta)\rangle$ в левой части этого уравнения. Ковариантная матрица $\mathbf{J}$, определенная уравнением (6.2.6), может быть названа ***равновременно́й матрицей когерентности*** 2 × 2 или, для краткости, ***матрицей когерентности*** луча. По причинам, которые станут ясными в разд. 6.3, ее

также иногда называют *поляризационной матрицей*. Следует заметить, что термин «матрица когерентности» используется в оптической теории когерентности в нескольких различных смыслах, с некоторыми из которых мы будем сталкиваться позднее.

Пусть Tr J обозначает след матрицы когерентности. Мы видим, что

$$\operatorname{Tr}\mathbf{J} \equiv J_{xx} + J_{yy} = \langle E_x^*(t)E_x(t)\rangle + \langle E_y^*(t)E_y(t)\rangle = 4\pi\langle w_e\rangle, \tag{6.2.7}$$

т.е. он пропорционален среднему значению плотности электрической энергии $\langle w_e\rangle$ света в любой точке поперечного сечения $z = z_0$ луча, падающего на устройство. Недиагональные элементы J_{xy} и J_{yx} являются комплексными числами в общем случае, и они представляют равновременные корреляции между x- и y-компонентами комплексного электрического поля на плоскости $z = z_0$. Ясно, что J_{xy} и J_{yx} являются комплексно-сопряженными друг к другу, т.е. что

$$J_{yx} = J_{xy}^*, \tag{6.2.8}$$

откуда следует, что матрица когерентности эрмитова. Более того, она является неотрицательно определенной, т.е. для любых произвольных комплексных чисел c_1 и c_2 имеем

$$c_1^*c_1J_{xx} + c_2^*c_2J_{yy} + c_1^*c_2J_{xy} + c_2^*c_1J_{yx} \geqslant 0. \tag{6.2.9}$$

Этот результат следует из очевидного факта, что $\langle|c_1E_x + c_2E_y|^2\rangle \geqslant 0$. Можно легко вывести из неравенства (6.2.9) или из неравенства Шварца и соотношения эрмитовости (6.2.8), что детерминант матрицы когерентности, который мы обозначим как det J, является неотрицательным, т.е. что

$$\det\mathbf{J} \equiv J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} \geqslant 0. \tag{6.2.10}$$

Мы видим из уравнения (6.2.4), что как диагональные, так и недиагональные элементы матрицы когерентности в общем необходимы для расчета изменения среднего значения плотности энергии электрического поля света, прошедшего через устройство. По своей математической структуре недиагональные элементы аналогичны взаимной интенсивности скалярной теории [(4.3.34)]. Мы нормируем недиагональные элементы J_{xy}, как и взаимную интенсивность, полагая

$$j_{xy} \equiv |j_{xy}|\,e^{i\beta_{xy}} \equiv \frac{J_{xy}}{(J_{xx})^{1/2}(J_{yy})^{1/2}}. \tag{6.2.11}$$

Из уравнений (6.2.8), (6.2.10) и (6.2.11) следует, что

$$0 \leqslant |j_{xy}| \leqslant 1. \tag{6.2.12}$$

Ясно, что j_{xy} может рассматриваться как мера степени корреляции, которая существует между компонентами $E_x(t)$ и $E_y(t)$ комплексного вектора электрического поля в некоторой точке плоскости $z = z_0$ в любой отдельный момент времени.

Вернемся теперь к выражению (6.2.4) для среднего значения плотности энергии электрического поля в плоскости $z = z_2$. Если мы воспользуемся уравнениями (6.2.8) и (6.2.11), то формула (6.2.4) может быть представлена в виде

$$\langle w_e'(\delta,\theta)\rangle = \frac{1}{4\pi}[J_{xx}\cos^2\theta + J_{yy}\sin^2\theta + 2(J_{xx})^{1/2}(J_{yy})^{1/2}|j_{xy}|\cos\theta\sin\theta\cos(\beta_{xy}+\delta)]. \tag{6.2.13}$$

Или, если мы положим

$$\frac{1}{4\pi}J_{xx}\cos^2\theta = \langle I^{(1)}(\theta)\rangle, \quad \frac{1}{4\pi}J_{yy}\sin^2\theta = \langle I^{(2)}(\theta)\rangle, \tag{6.2.13a}$$

то формула (6.2.13) может быть записана в более компактной форме

$$\langle w_e'(\delta,\theta)\rangle = \langle I^{(1)}(\theta)\rangle + \langle I^{(2)}(\theta)\rangle + 2[\langle I^{(1)}(\theta)\rangle]^{1/2}[\langle I^{(2)}(\theta)\rangle]^{1/2}|j_{xy}|\cos(\beta_{xy}+\delta). \tag{6.2.14}$$

Уравнение (6.2.14) аналогично закону (4.3.19) скалярной теории для интерференции частично когерентного света.

С помощью уравнения (6.2.13) элементы матрицы когерентности могут быть определены из измерений, в которых используются компенсатор и поляризатор. Необходимо только измерить значения усредненной плотности энергии электрического поля $\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle$ в любой точке плоскости $z = z_2$ для ряда выбранных пар значений δ и θ и решить уравнение (6.2.13) для элементов J_{xx}, J_{yy} и $J_{xy} = J^*_{yx}$.

Пусть $\{\delta,\theta\}$ обозначает измерение на плоскости $z = z_2$ среднего значения плотности энергии электрического поля, которое соответствует отдельной паре значений δ,θ. Удобным набором измерений является, например,

$$\{0,0^\circ\},\{0,45^\circ\},\{0,90^\circ\},\{0,135^\circ\},\{\pi/2,45^\circ\},\{\pi/2,135^\circ\}.$$

Тогда мы сразу же найдем из уравнения (6.2.4), что

$$J_{xx} = 4\pi\langle w'_e(0,0^\circ)\rangle, \tag{6.2.15а}$$

$$J_{yy} = 4\pi\langle w'_e(0,90^\circ)\rangle, \tag{6.2.15б}$$

$$J_{xy} = J^*_{yx} = 2\pi\{[\langle w'_e(0,45^\circ)\rangle - \langle w'_e(0,135^\circ)\rangle] + i[\langle w'_e(\pi/2,45^\circ)\rangle - \langle w'_e(\pi/2,135^\circ)\rangle]\}. \tag{6.2.15в}$$

Три этих формулы задают элементы матрицы когерентности через значения усредненной плотности энергии, определенные из шести экспериментов[1].

Изучим более тщательно, как среднее значение плотности энергии электрического поля $\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle$ меняется с δ и θ. С этой целью мы перепишем (6.2.13) в более удобной форме, используя тригонометрические тождества $\cos^2\theta = (1+\cos 2\theta)/2$, $\sin^2\theta = (1-\cos 2\theta)/2$ и $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$. Если снова воспользоваться (6.2.11), то выражение (6.2.13) примет вид,

$$\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle = \frac{1}{8\pi}[(J_{xx}+J_{yy}) + (J_{xx}-J_{yy})\cos 2\theta + 2|J_{xy}|\sin 2\theta\cos(\beta_{xy}+\delta)]. \tag{6.2.17}$$

Второе и третье слагаемые в правой части (6.2.17) могут быть объединены с помощью элементарного тригонометрического тождества, и мы тогда получим для среднего значения плотности энергии электрического поля на плоскости $z = z_2$ выражение

$$\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle = \frac{1}{8\pi}\{\mathrm{Tr}\,\mathbf{J} + R(\delta)\cos[2\theta - \phi(\delta)]\}, \tag{6.2.18}$$

где

$$R(\delta) = [(J_{xx}-J_{yy})^2 + 4|J_{xy}|\cos^2(\beta_{xy}+\delta)]^{1/2}, \tag{6.2.19}$$

$$\cos\phi(\delta) = \frac{J_{xx}-J_{yy}}{R(\delta)}, \quad \sin\phi(\delta) = \frac{2|J_{xy}|}{R(\delta)}\cos(\beta_{xy}+\delta). \tag{6.2.20}$$

Предположим, что мы фиксируем θ, но изменяем δ. Из выражения (6.2.17) мы видим, что $\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle$ теперь изменяется синусоидально между значениями

$$\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle_{\max(\delta)} = \frac{1}{8\pi}[\mathrm{Tr}\,\mathbf{J} + (J_{xx}-J_{yy})\cos 2\theta + 2|J_{xy}|\sin 2\theta], \tag{6.2.21а}$$

$$\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle_{\min(\delta)} = \frac{1}{8\pi}[\mathrm{Tr}\,\mathbf{J} + (J_{xx}-J_{yy})\cos 2\theta - 2|J_{xy}|\sin 2\theta], \tag{6.2.21б}$$

[1] Фактически для определения матрицы когерентности достаточно четырех правильно подобранных экспериментов, например, следующих:

$$\{0,0^\circ\},\{0,45^\circ\},\{0,135^\circ\},\{\pi/2,45^\circ\}.$$

Можно легко показать, что элементы матрицы когерентности выражаются через четыре измеренных значения усредненной плотности электрической энергии, полученные из этих экспериментов, следующим образом:

$$J_{xx} = 4\pi\langle w'_e(0,0^\circ)\rangle, \tag{6.2.16а}$$

$$J_{yy} = 4\pi[\langle w'_e(0,45^\circ)\rangle + \langle w'_e(0,135^\circ)\rangle - \langle w'_e(0,0^\circ)\rangle], \tag{6.2.16б}$$

$$J_{xy} = J^*_{yx} = 2\pi\{[\langle w'_e(0,45^\circ)\rangle - \langle w'_e(0,135^\circ)\rangle] - i[\langle w'_e(0,45^\circ)\rangle + \langle w'_e(0,135^\circ)\rangle - 2\langle w'_e(\pi/2,45^\circ)\rangle]\}. \tag{6.2.16в}$$

при условии, что $\sin 2\theta \geqslant 0$. Эти два выражения могут быть переписаны в виде

$$\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle_{\max(\delta)} = \frac{1}{8\pi}[\mathrm{Tr}\,\mathbf{J} + R'M], \tag{6.2.22а}$$

$$\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle_{\min(\delta)} = \frac{1}{8\pi}[\mathrm{Tr}\,\mathbf{J} + R'N], \tag{6.2.22б}$$

где

$$R' = [(\mathrm{Tr}\,\mathbf{J})^2 - 4\det\mathbf{J}]^{1/2}, \tag{6.2.23}$$

$$M = \max[\cos(2\theta+\phi'), \cos(2\theta-\phi')], \tag{6.2.24а}$$

$$N = \min[\cos(2\theta+\phi'), \cos(2\theta-\phi')], \tag{6.2.24б}$$

$$\cos\phi' = \frac{J_{xx}-J_{yy}}{R'}, \quad \sin\phi' = \frac{2|J_{xy}|}{R'}. \tag{6.2.25}$$

Из (6.2.17) видно, что максимум имеет место, когда

$$\delta = -\beta_{xy} \pm 2m\pi, \quad (m = 0,1,2,\ldots), \tag{6.2.26а}$$

а минимум имеет место, когда

$$\delta = -\beta_{xy} \pm (2m+1)\pi, \quad (m = 0,1,2,\ldots). \tag{6.2.26б}$$

Далее предположим, что δ фиксировано, и меняется θ. Из формулы (6.2.18) следует, что $\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle$ опять меняется синусоидально между значениями

$$\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle_{\max(\delta)} = \frac{1}{8\pi}[\mathrm{Tr}\,\mathbf{J} + R(\delta)], \tag{6.2.27а}$$

$$\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle_{\min(\delta)} = \frac{1}{8\pi}[\mathrm{Tr}\,\mathbf{J} - R(\delta)]. \tag{6.2.27б}$$

Из (6.2.18) ясно, что максимум по отношению к θ имеет место, когда

$$\theta = \frac{1}{2}\phi \pm m\pi, \quad (m = 0,1,2,\ldots), \tag{6.2.28а}$$

и минимум по отношению к θ имеет место, когда

$$\theta = \frac{1}{2}\phi \pm (m+\frac{1}{2})\pi, \quad (m = 0,1,2,\ldots). \tag{6.2.28б}$$

Наконец, определим экстремумы среднего значения плотности энергии электрического поля по отношению к δ и θ. Они могут быть получены либо нахождением максимума выражения (6.2.22а) и минимума выражения (6.2.22б) по отношению к θ, либо максимума (6.2.27а) и минимума (6.2.27б) по отношению к δ. Результаты таковы:

$$\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle_{\max(\delta,\theta)} = \frac{1}{8\pi}\{\mathrm{Tr}\,\mathbf{J} + [(\mathrm{Tr}\,\mathbf{J})^2 - 4\det\mathbf{J}]^{1/2}\}, \tag{6.2.29а}$$

$$\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle_{\min(\delta,\theta)} = \frac{1}{8\pi}\{\mathrm{Tr}\,\mathbf{J} - [(\mathrm{Tr}\,\mathbf{J})^2 - 4\det\mathbf{J}]^{1/2}\}. \tag{6.2.29б}$$

Значения пар (δ,θ), для которых максимумы имеют место, задаются формулами (6.2.26а) и (6.2.28а), а те значения, для которых имеют место минимумы, задаются формулами (6.2.26б) и (6.2.28б).

Из выражениий (6.2.29) следует, что

$$\frac{\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle_{\max(\delta,\theta)} - \langle w'_e(\delta,\theta)\rangle_{\min(\delta,\theta)}}{\langle w'_e(\delta,\theta)\rangle_{\max(\delta,\theta)} + \langle w'_e(\delta,\theta)\rangle_{\min(\delta,\theta)}} = \left[1 - \frac{4\det\mathbf{J}}{(\mathrm{Tr}\,\mathbf{J})^2}\right]^{1/2}. \tag{6.2.30}$$

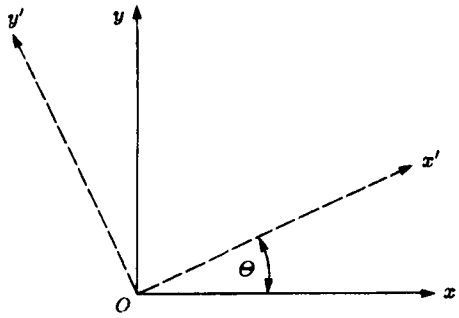


Рис. 6.2. Иллюстрация обозначений, относящихся к определению изменения матрицы когерентности J при повороте осей вокруг направления распространения луча

Выражение в левой части (6.2.30) аналогично выражению для видности интерференционных полос в интерференционных экспериментах Юнга, которые мы обсуждали в разд. 4.3.1. Мы показали там, что видность пропорциональна абсолютному значению степени когерентности света на апертурах [(4.3.25)]. Позднее мы увидим, что выражение в правой части (6.2.30) также имеет простой физический смысл.

При определении матрицы когерентности мы использовали фиксированную, но произвольную систему координат (x,y) на плоскости, перпендикулярной к направлению распространения луча (ось z). Теперь мы кратко рассмотрим, как матрица когерентности преобразуется, когда оси x, y поворачиваются на угол Θ вокруг оси z. Компоненты $E_{x'}$ и $E_{y'}$ комплексного вектора электрического поля в новой системе координат x', y' (см. рис. 6.2) выражаются через E_x и E_y следующим образом:

$$E_{x'} = E_x \cos\Theta + E_y \sin\Theta, \quad E_{y'} = -E_x \sin\Theta + E_y \cos\Theta. \tag{6.2.31}$$

Элементы матрицы когерентности $\mathbf{J}'$ в повернутой системе координат равны

$$J_{k'l'} = \langle E^*_{k'} E_{l'} \rangle, \tag{6.2.32}$$

где каждый из индексов k', l' принимает значения x' и y'. Из (6.2.31) и (6.2.32) мы сразу же найдем, что

$$\mathbf{J}' = \begin{bmatrix} J_{xx}c^2 + J_{yy}s^2 + (J_{xy} + J_{yx})cs & (J_{yy} - J_{xx})cs + J_{xy}c^2 - J_{yx}s^2 \\ (J_{yy} - J_{xx})cs + J_{yx}c^2 - J_{xy}s^2 & J_{xx}s^2 + J_{yy}c^2 - (J_{xy} + J_{yx})cs \end{bmatrix}, \tag{6.2.33}$$

где

$$c = \cos\Theta, \quad s = \sin\Theta. \tag{6.2.34}$$

Из формулы (6.2.33) следует, что

$$\operatorname{Tr}\mathbf{J}' = J_{xx} + J_{yy} = \operatorname{Tr}\mathbf{J} \tag{6.2.35}$$

и что

$$\det\mathbf{J}' = J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} = \det\mathbf{J}. \tag{6.2.36}$$

Выражения (6.2.35) и (6.2.36) показывают, что как след матрицы когерентности, так и ее детерминант, остаются неизменными при любом вращении системы осей x, y вокруг направления z. Этот результат также следует из хорошо известных теорем о матрицах.

Вместо использования матрицы когерентности (поляризации) для представления корреляций в квазимонохроматических пучках простого излучения можно использовать тесно связанное и гораздо более старое представление Стокса (Stokes, 1852) (которое фактически предшествует электромагнитной теории Максвелла). В силу того, что представление Стокса широко используется, мы сейчас кратко опишем его и покажем, как оно связано с современным описанием состояния поляризации световой волны в терминах матриц когерентности.

Представим снова компоненты $E_x(t)$ и $E_y(t)$ комплексного электрического поля в двух взаимно ортогональных направлениях, перпендикулярных к направлению распространения луча, в форме, заданной уравнениями (6.2.1), а именно:

$$E_x(t) = a_1(t)\,e^{i[\alpha_1(t) - 2\pi\nu t]}, \quad E_y(t) = a_2(t)\,e^{i[\alpha_2(t) - 2\pi\nu t]}. \tag{6.2.37}$$

Тогда можно определить так называемые *параметры Стокса* для луча выражениями

$$s_0 = \langle a_1^2 \rangle + \langle a_2^2 \rangle, \quad s_1 = \langle a_1^2 \rangle - \langle a_2^2 \rangle, \quad s_2 = 2\langle a_1 a_2 \cos\Delta(t) \rangle, \quad s_3 = 2\langle a_1 a_2 \sin\Delta(t) \rangle, \tag{6.2.38}$$

где

$$\Delta(t) = \alpha_2(t) - \alpha_1(t). \tag{6.2.39}$$

Сравнивая (6.2.38) с (6.2.6) и используя (6.2.39) и (6.2.37), мы сразу же найдем, что четыре параметра Стокса и элементы матрицы когерентности связаны формулами

$$s_0 = J_{xx} + J_{yy}, \quad s_1 = J_{xx} - J_{yy}, \quad s_2 = J_{xy} + J_{yx}, \quad s_3 = i(J_{yx} - J_{xy}), \tag{6.2.40а}$$

$$J_{xx} = \frac{1}{2}(s_0 + s_1), \quad J_{yy} = \frac{1}{2}(s_0 - s_1), \quad J_{xy} = \frac{1}{2}(s_2 + is_3), \quad J_{yx} = \frac{1}{2}(s_2 - is_3). \tag{6.2.40б}$$

Соотношения (6.2.40) могут быть выражены в более компактной форме с помощью спиновых матриц Паули, которые мы выбираем равными

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.2.41}$$

и единичной матрицы

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.2.42}$$

Можно сразу же найти, что соотношения (6.2.40а) и (6.2.40б) эквивалентны формулам

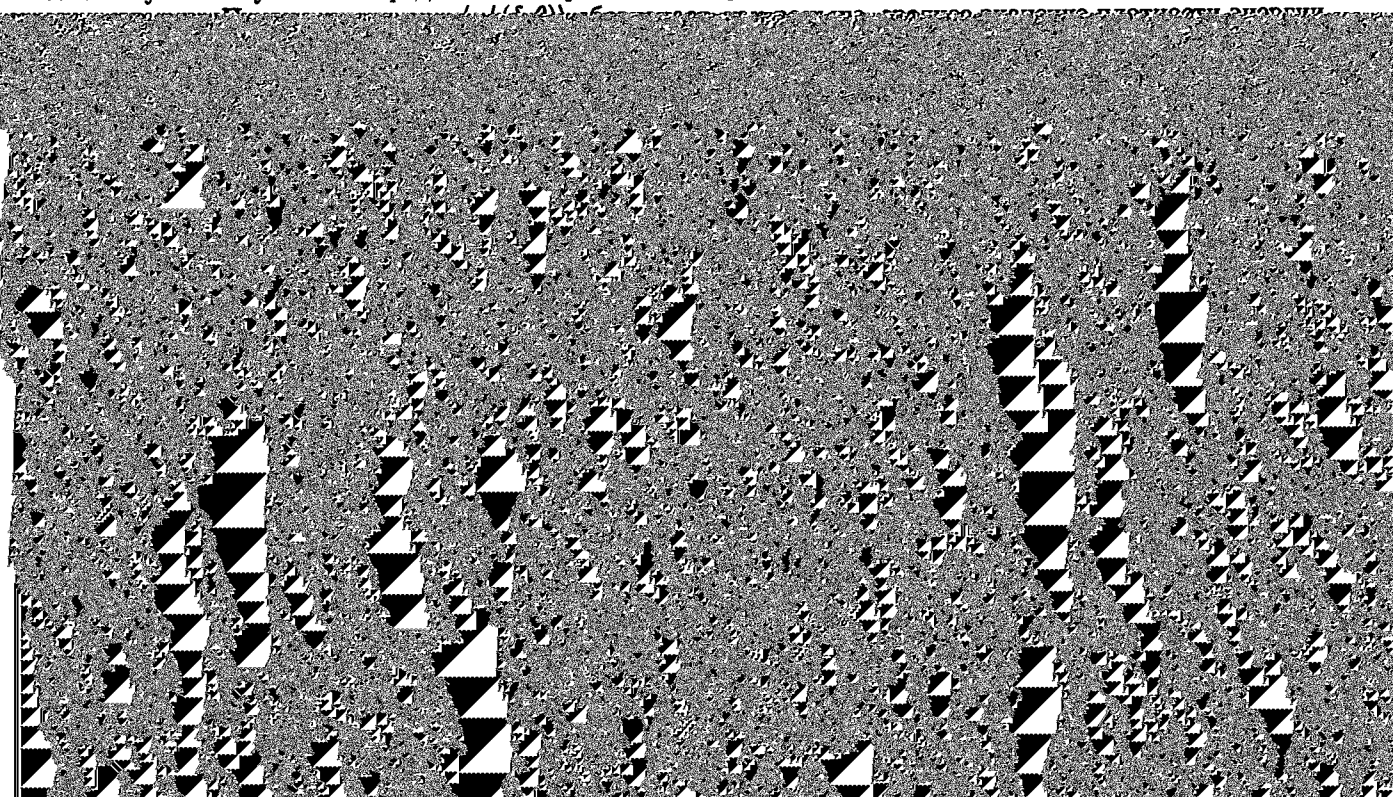
$$s_j = \mathrm{Tr}\,[\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}_j], \quad j = 0, 1, 2, 3, \tag{6.2.43а}$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} s_j \boldsymbol{\sigma}_j. \tag{6.2.43б}$$

Из этих соотношений ясно, что любое свойство матрицы когерентности может быть перенесено на свойство параметров Стокса. Например, воспользовавшись выражениями (6.2.40а), мы сразу же найдем, что неотрицательность детерминанта матрицы когерентности [(6.2.10)] означает, что четыре параметра Стокса удовлетворяют неравенству

$$s_0^2 \geqslant s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \tag{6.2.44}$$

Точно так же, как и элементы матрицы когерентности, четыре параметра Стокса квазимонохроматического пучка могут быть определены из простых экспериментов, в которых используются компенсатор



6.3.1. Неполяризованный свет (естественный свет)

Рассмотрим сначала луч, для которого

$$j_{xy} = 0, \tag{6.3.1}$$

независимо от конкретного выбора осей x и y. Согласно (6.2.11) и (6.2.8) это требование означает, что независимо от выбора осей x и y

$$J_{xy} = J_{yx} = 0. \tag{6.3.2}$$

Ввиду закона преобразования, заданного уравнением (6.2.33), это означает, что независимо от выбора Θ $(J_{yy} - J_{xx}) \cos\Theta \sin\Theta = 0$, т.е. при любом выборе осей x, y

$$J_{xx} = J_{yy}. \tag{6.3.3}$$

Из формул (6.3.2) и (6.3.3) следует, что матрица когерентности теперь имеет вид

$$\mathbf{J} = J_{xx} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6.3.4}$$

т.е. *она пропорциональна единичной матрице*. Коэффициент пропорциональности J_{xx} также не зависит от выбора осей, потому что, когда уравнения (6.3.2) и (6.3.3) выполняются, главный диагональный член $J_{x'x'}$ в «преобразованной» матрице когерентности $\mathbf{J}'$ (6.2.33) не зависит от Θ. Точнее говоря, мы показали, что, когда x- и y-компоненты вектора электрического поля не коррелированны для всех пар направлений [уравнение (6.3.1)], среднее $J_{xx} = \langle E_x^*(t) E_x(t) \rangle$ имеет одно и то же значение для каждого направления, перпендикулярного к направлению распространения луча.

Воспользовавшись соотношениями (6.3.2) и (6.3.3) в формуле (6.3.4), мы сразу же найдем, что

$$\langle w_e'(\delta, \theta) \rangle = \frac{1}{4\pi} J_{xx}. \tag{6.3.5}$$

В силу того, что правая часть этого выражения постоянна, левая часть должна быть независима от θ и δ. Следовательно, если луч, характеризующийся матрицей когерентности (6.3.4), проходит через компенсатор и поляризатор, то среднее значение плотности электрической энергии прошедшего луча не зависит от запаздывания, внесенного компенсатором, и ориентации поляризатора. Легко видеть, что тот же результат применим и к плотности магнитной энергии прошедшего поля. Свет с такими свойствами называется *неполяризованным*. Он также называется *естественным светом*, потому что такой свет генерируется источниками, которые часто встречаются в природе (например, многие звездные источники). В силу того, что $\langle w_e'(\delta, \theta) \rangle$ теперь не зависит от δ и θ, выражение в левой части (6.2.30) принимает свое наименьшее возможное значение, а именно нуль, т.е.

$$\frac{\langle w_e'(\delta, \theta) \rangle_{\max(\delta,\theta)} - \langle w_e'(\delta, \theta) \rangle_{\min(\delta,\theta)}}{\langle w_e'(\delta, \theta) \rangle_{\max(\delta,\theta)} + \langle w_e'(\delta, \theta) \rangle_{\min(\delta,\theta)}} = 0. \tag{6.3.6}$$

6.3.2. Полностью поляризованный свет

Рассмотрим другой крайний случай, а именно, случай, когда

$$|j_{xy}| = 1. \tag{6.3.7}$$

Это требование означает, что компоненты комплексного электрического вектора в направлениях x и y теперь полностью коррелированны. Из (6.3.7) и из определения (6.2.1) коэффициентов корреляции j_{xy} следует, что теперь мы имеем

$$|J_{xy}| = (J_{xx})^{1/2} (J_{yy})^{1/2}, \tag{6.3.8}$$

или из использования условия эрмитовости (6.2.8) также следует, что

$$\det \mathbf{J} = 0. \tag{6.3.9}$$

И наоборот, можно легко показать, что из (6.3.9) следует (6.3.7).

Вспомним, что детерминант матрицы когерентности инвариантен по отношению к повороту осей x, y вокруг направления распространения [см. (6.2.36)]. Следовательно, если уравнение (6.3.9), а, значит, и (6.3.7), выполняются для одного частного выбора осей x, y, то эти уравнения удовлетворяются для любого другого выбора. Физически этот результат означает, что если две компоненты комплексного электрического вектора $\mathbf{E}(t)$ вдоль любой пары (взаимно ортогональных) направлений x и y полностью коррелированны, то они коррелированны для любых таких пар направлений.

Ввиду соотношения (6.3.8) и условия эрмитовости (6.2.8) матрица когерентности $\mathbf{J}$ теперь имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & (J_{xx})^{1/2}(J_{yy})^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\alpha} \\ (J_{xx})^{1/2}(J_{yy})^{1/2}\,\mathrm{e}^{-i\alpha} & J_{yy} \end{bmatrix}, \tag{6.3.10}$$

где α — действительный фазовый множитель.

Свет, для которого выполняется условие (6.3.7) или, что эквивалентно, условие (6.3.9), называют ***полностью поляризованным***. Эта терминология происходит из того факта, что детерминированная монохроматическая волна, которая полностью поляризована в обычном смысле (ср. Born and Wolf, 1980, разд. 1.4.2 и 1.4.3.), может рассматриваться как детерминированный аналог волны такого сорта. Это легко увидеть, рассматривая плоскую, монохроматическую, электромагнитную волну, которая распространяется в положительном направлении z. Пусть

$$E_x(z,t) = e_1\,\mathrm{e}^{i(k_0 z - 2\pi\nu_0 t)}, \quad E_y(z,t) = e_2\,\mathrm{e}^{i(k_0 z - 2\pi\nu_0 t)} \tag{6.3.11}$$

— компоненты комплексного вектора ее электрического поля в двух взаимно ортогональных направлениях, перпендикулярных к направлению z. В уравнении (6.3.11) e_1 и e_2 — константы (вообще говоря, комплексные) и $k_0 = 2\pi\nu_0/c$, причем c — скорость света в вакууме. Элементами матрицы когерентности такой волны являются $J_{kl} = E_k^* E_l = e_k^* e_l$, $(k,l = x,y)$, т.е. матрица когерентности теперь имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} e_1^* e_1 & e_1^* e_2 \\ e_2^* e_1 & e_2^* e_2 \end{bmatrix}. \tag{6.3.12}$$

В выражениях для элементов матрицы когерентности (6.3.12) не появляется символ усреднения, потому что мы условились представлять волну детерминированным ансамблем, т.е. ансамблем, в котором выборочные функции идентичны (с вероятностью, равной единице). Мы видим, что детерминант матрицы когерентности (6.3.12) имеет нулевое значение, точно также как и для флуктуирующей волны, для которой выполняется требование (6.3.9).

Ясно, что наш «классический эксперимент», в котором используются только компенсатор и поляризатор, не может отличить квазимонохроматическую волну, матрица когерентности которой имеет детерминант с нулевым значением, от строго детерминированной монохроматической плоской волны, задаваемой выражением (6.3.11), для которой

$$e_1 = (J_{xx})^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\beta_1}, \quad e_2 = (J_{yy})^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\beta_2}, \tag{6.3.13}$$

где β_1 и β_2 — произвольные константы.

Благодаря тому, что полностью поляризованная волна характеризуется требованием $\det \mathbf{J} = 0$, выражение в правой части (6.2.30) равно единице, т.е.

$$\frac{\langle w'_{\mathrm{e}}(\delta,\theta)\rangle_{\max(\delta,\theta)} - \langle w'_{\mathrm{e}}(\delta,\theta)\rangle_{\min(\delta,\theta)}}{\langle w'_{\mathrm{e}}(\delta,\theta)\rangle_{\max(\delta,\theta)} + \langle w'_{\mathrm{e}}(\delta,\theta)\rangle_{\min(\delta,\theta)}} = 1, \tag{6.3.14}$$

откуда видно, что для полностью поляризованной волны выражение слева принимает свое наибольшее возможное значение. Выражение (6.3.14) означает, что в этом случае

$$\langle w'_{\mathrm{e}}(\delta,\theta)\rangle_{\min(\delta,\theta)} = 0. \tag{6.3.15}$$

6.3.3. Степень поляризации

Теперь покажем, что любая матрица когерентности $\mathbf{J}$ может быть единственным образом выражена как сумма двух матриц, одна из которых представляет полностью неполяризованный свет, а другая — полностью поляризованный свет. Это означает, что всегда можно выразить $\mathbf{J}$ в виде

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{\text{непол}} + \mathbf{J}^{\text{пол}}, \tag{6.3.16}$$

где

$$\mathbf{J}^{\text{непол}} = A\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{\text{пол}} = \begin{bmatrix}B & D\\ D^* & C\end{bmatrix}, \tag{6.3.17}$$

причем

$$A \geqslant 0, \quad B \geqslant 0, \quad C \geqslant 0 \tag{6.3.18а}$$

$$BC - DD^* = 0. \tag{6.3.18б}$$

Для того, чтобы это показать, будем снова полагать, что J_{kl} — элементы матрицы когерентности $\mathbf{J}$. Согласно выражениям (6.3.16) и (6.3.17) имеем

$$A + B = J_{xx}, \quad A + C = J_{yy}, \tag{6.3.19}$$

$$D = J_{xy}, \qquad D^* = J_{yx}. \tag{6.3.20}$$

Подставляя в уравнение (6.3.18б) B и C из уравнений (6.3.19) и D и D^* из уравнений (6.3.20), получаем следующее уравнение для элемента A:

$$(J_{xx} - A)(J_{yy} - A) - J_{xy}J_{yx} = 0. \tag{6.3.21}$$

Это уравнение показывает, что A является собственным значением матрицы когерентности $\mathbf{J}$. Можно сразу же найти решения уравнения (6.3.21) (Wolf, 1959)

$$A = \frac{1}{2}\{\operatorname{Tr}\mathbf{J} \pm [(\operatorname{Tr}\mathbf{J})^2 - 4\det\mathbf{J}]^{1/2}\}. \tag{6.3.22}$$

В силу того, что матрица когерентности $\mathbf{J}$ эрмитова и неотрицательно определена [см. (6.2.8) и (6.2.9)], оба собственных значения A являются неотрицательными, что легко может быть проверено прямым расчетом.

Сначала рассмотрим значение A, задаваемое выражением (6.3.22) со знаком минус перед квадратным корнем. Подставляя это значение в уравнения (6.3.19), получаем следующие выражения для элементов B и C:

$$B = \frac{1}{2}(J_{xx} - J_{yy}) + \frac{1}{2}[(\operatorname{Tr}\mathbf{J})^2 - 4\det\mathbf{J}]^{1/2}, \tag{6.3.23а}$$

$$C = \frac{1}{2}(J_{yy} - J_{xx}) + \frac{1}{2}[(\operatorname{Tr}\mathbf{J})^2 - 4\det\mathbf{J}]^{1/2}. \tag{6.3.23б}$$

Теперь, если мы воспользуемся соотношением эрмитовости $J_{yx} = J_{xy}^*$ [(6.2.8)], то сразу же найдем, что

$$[(\operatorname{Tr}\mathbf{J})^2 - 4\det\mathbf{J}]^{1/2} = [(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4|J_{xy}|^2]^{1/2} \geqslant |J_{xx} - J_{yy}| \tag{6.3.24}$$

и, следовательно, матричные элементы B и C, задаваемые выражениями (6.3.23), являются неотрицательными, что требуют два из трех неравенств (6.3.18а). С другой стороны, можно легко показать, что другое значение A, задаваемое уравнением (6.3.22) с положительным знаком перед квадратным корнем, дает отрицательные значения для B и C, и поэтому оно не удовлетворяет двум неравенствам из трех неравенств (6.3.18а). Следовательно, мы показали, что существует единственное разложение матрицы когерентности $\mathbf{J}$ в виде (6.3.16).

Из выражения для матрицы когерентности $\mathbf{J}^{\text{пол}}$ поляризованной части света [вторая матрица в уравнении (6.3.17)] и из выражений (6.3.23) следует, что ее след задается как

$$\operatorname{Tr}\mathbf{J}^{\text{пол}} = [(\operatorname{Tr}\mathbf{J})^2 - 4\det\mathbf{J}]^{1/2}, \tag{6.3.25}$$

и, следовательно, отношение

$$P \equiv \frac{\operatorname{Tr}\mathbf{J}^{\text{пол}}}{\operatorname{Tr}\mathbf{J}} = \left[1 - \frac{4\det\mathbf{J}}{(\operatorname{Tr}\mathbf{J})^2}\right]^{1/2}. \tag{6.3.26}$$

Теперь согласно (6.2.7) след матрицы когерентности волны пропорционален среднему значению плотности электрической энергии, и мы можем поэтому рассматривать след как меру интенсивности волны. Следовательно, отношение $\operatorname{Tr}\mathbf{J}^{\text{пол}}/\operatorname{Tr}\mathbf{J}$, которое мы обозначили буквой P в формуле (6.3.26), представляет собой

отношение «поляризованной части» волны к ее полной интенсивности. По этой причине P называется *степенью поляризации* волны, представленной матрицей когерентности $\mathbf{J}$. Ввиду неравенства (6.3.24) ясно, что степень поляризации, заданная выражением в правой части уравнения (6.3.26), является неотрицательной величиной, значения которой ограничены нулем и единицей, т.е.

$$0 \leqslant P \leqslant 1. \tag{6.3.27}$$

Из уравнения (6.3.26) следует, что когда $P = 1$, детерминант матрицы когерентности $\mathbf{J}$ имеет нулевое значение, что в точности является условием (6.3.9) ***полностью поляризованного*** света. Когда $P = 0$, мы имеем согласно (6.3.26) соотношение $(\operatorname{Tr}\mathbf{J})^2 = 4\det\mathbf{J}$, которое, записанное в явном виде, означает, что

$$(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}J_{yx} = 0. \tag{6.3.28}$$

В силу того что, согласно уравнению (6.2.8) $J_{yx} = J_{xy}^*$, левая часть уравнения (6.3.28) является суммой двух квадратов, и каждое из двух слагаемых обязательно должно быть равно нулю, т.е. $J_{xx} = J_{yy}$ и $J_{xy} = J_{yx} = 0$. Это в точности условия (6.3.2) и (6.3.3) *неполяризованного* света. Во всех других случаях $(0 < P < 1)$ свет называют *частично поляризованным*.

Заметим, что выражение (6.3.26) для степени поляризации тождественно выражению в правой части уравнения (6.2.30) и, следовательно,

$$\frac{\langle w'_{\mathrm{e}}(\delta,\theta)\rangle_{\max(\delta,\theta)} - \langle w'_{\mathrm{e}}(\delta,\theta)\rangle_{\min(\delta,\theta)}}{\langle w'_{\mathrm{e}}(\delta,\theta)\rangle_{\max(\delta,\theta)} + \langle w'_{\mathrm{e}}(\delta,\theta)\rangle_{\min(\delta,\theta)}} = P. \tag{6.3.29}$$

Таким образом, левая часть выражения (6.3.29), которая, как мы уже отмечали, аналогична выражению для видности интерференционных полос в интерференционном эксперименте Юнга, в точности равна степени поляризации светового луча. Ввиду (6.3.29) выражения (6.3.6) и (6.3.14) теперь приобретают ясный смысл.

Из соотношения (6.3.26) очевидно, что степень поляризации не зависит от выбора осей x, y, потому что она выражается через инварианты матрицы когерентности при повороте осей вокруг направления распространения.

Степень поляризации также может быть легко выражена через собственные значения A_1 и A_2 матрицы когерентности $\mathbf{J}$, т.е. через два корня уравнения (6.3.21), заданные выражением (6.3.22). С этой целью мы вспомним, что каждая эрмитова матрица может быть диагонализирована с помощью унитарного преобразования и что ее след и ее детерминант инвариантны при таком преобразовании (в общем, это унитарное преобразование не будет отображать реальный поворот осей x, y вокруг направления распространения волны). Следовательно,

$$\operatorname{Tr}\mathbf{J} = A_1 + A_2, \tag{6.3.30а}$$

$$\det\mathbf{J} = A_1 A_2. \tag{6.3.30б}$$

Подставляя (6.3.30) в (6.3.26), мы получим требуемое альтернативное выражение для степени поляризации, а именно

$$P = \left|\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}\right|. \tag{6.3.31}$$

Наконец, выразим степень поляризации через четыре параметра Стокса, а не через элементы матрицы когерентности. Из соотношений (6.2.40б) мы сразу же найдем, что

$$\det\mathbf{J} = \frac{1}{4}(s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2), \tag{6.3.32а}$$

$$\operatorname{Tr}\mathbf{J} = s_0. \tag{6.3.32б}$$

Подставляя эти формулы в уравнение (6.3.26), мы получим требуемое выражение для степени поляризации

$$P = \frac{(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{1/2}}{s_0}. \tag{6.3.33}$$

Из этого выражения следует, что для полностью поляризованного луча ($P = 1$) имеем

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = s_0^2, \tag{6.3.34}$$

тогда как для полностью неполяризованного луча ($P = 0$)

$$s_1 = s_2 = s_3 = 0. \tag{6.3.35}$$

Состояние поляризации полностью поляризованной волны может быть представлено геометрически на сфере, известной как сфера Пуанкаре. Существуют также интересные геометрические представления для волн с произвольной степенью поляризации. Некоторые соотношения касаются степени поляризации P, степени корреляции j_{xy} и параметров, которые характеризуют эллипс поляризации поляризованной части луча. Обсуждение некоторых из этих тем может быть найдено, например, у Борна и Вольфа (Born and Wolf, 1980, разд. 10.8.2), Вольфа (Wolf, 1959) и Паррента и Романа (Parrent and Roman, 1960).

6.4. Прохождение квазимонохроматического луча через линейные, не формирующие изображения устройства[1]

Теперь изучим как матрица когерентности меняется, когда квазимонохроматический световой луч проходит через некоторые часто используемые линейные, не формирующие изображение оптические устройства. В этих целях полезно объединить компоненты $E_x(t)$ и $E_y(t)$ комплексного вектора электрического поля в некоторой точке плоскости $z = z_0$, поперечной к направлению распространения луча [см. (6.2.1)], в вектор-строку

$$\mathscr{E}(t) = [E_x(t) \quad E_y(t)]. \tag{6.4.1}$$

Его эрмитово сопряжение — это вектор-столбец

$$\mathscr{E}^\dagger(t) = \begin{bmatrix} E_x^*(t) \\ E_y^*(t) \end{bmatrix}. \tag{6.4.1a}$$

Матрица когерентности $\mathbf{J}$ падающего луча может быть выражена в форме

$$\mathbf{J} = \langle \mathscr{E}^\dagger(t)\mathscr{E}(t) \rangle. \tag{6.4.2}$$

Если луч проходит через линейное устройство, такое как компенсатор, поглотитель, ротатор или поляризатор, вектор $\mathscr{E}(t)$ преобразуется в другой вектор, который в «выходной плоскости» $z = z_1$ может быть представлен вектором-строкой

$$\mathscr{E}'(t) = \mathscr{E}\mathbf{T}, \tag{6.4.3}$$

где $\mathbf{T}$ — 2×2-матрица, которая характеризует устройство. Мы будем называть $\mathbf{T}$ *матрицей передачи* устройства.

Матрица когерентности комплексного электрического поля луча, который выходит из устройства в точке на выходной плоскости $z = z_1$, задается как

$$\mathbf{J}' = \langle \mathscr{E}'^\dagger(t)\mathscr{E}'(t) \rangle. \tag{6.4.4}$$

Подставляя (6.4.3) в (6.4.4) и опуская аргумент t у $\mathscr{E}(t)$, мы сразу же найдем, что $\mathbf{J}' = \langle \mathbf{T}^\dagger \mathscr{E}^\dagger \mathscr{E}\mathbf{T} \rangle = \mathbf{T}^\dagger \langle \mathscr{E}^\dagger \mathscr{E} \rangle \mathbf{T}$ или, если воспользоваться (6.4.2),

$$\mathbf{J}' = \mathbf{T}^\dagger \mathbf{J} \mathbf{T}, \tag{6.4.5}$$

[1] Анализ в этом разделе, в основном, базируется на статье Паррента и Романа (Parrent and Roman, 1960). Он может рассматриваться, в некоторых отношениях, как обобщение на квазимонохроматический свет с любой степенью поляризации матричного исчисления, введенного Джонсом (Jones, 1941a; см. также Jones 1941b, 1942, 1947a, b, 1948, 1956; Hurwitz и Jones, 1941) для прохождения монохроматического света через линейные системы. Все эти статьи перепечатаны в Свинделле (Swindell, 1975).

где $\mathbf{T}^\dagger$ — эрмитово сопряженная $\mathbf{T}$.

Отметим очевидное следствие уравнения (6.4.5). Если мы вычислим детерминант обеих частей этого уравнения и используем хорошо известную теорему о том, что детерминант произведения матриц равен произведению их детерминантов (Aitken, 1944, разд. 34), то из уравнения (6.4.5) следует, что

$$\det \mathbf{J}' = \det \mathbf{T}^\dagger \times \det \mathbf{J} \times \det \mathbf{T} = \det \mathbf{J} |\det \mathbf{T}|^2. \tag{6.4.6}$$

Предположим теперь, что падающий луч полностью поляризован ($P = 1$). Тогда, согласно (6.3.26), мы имеем $\det \mathbf{J} = 0$ и уравнение (6.4.6) означает, что $\det \mathbf{J}' = 0$; следовательно, степень поляризации P' луча, прошедшего через устройство также равна единице, т.е. прошедший луч также полностью поляризован. Этот результат можно было ожидать, так как интуитивно ясно и может быть легко проверено, что для того, чтобы полностью поляризованный луч стал *деполяризованным*, т.е. для того, чтобы его степень поляризации изменила свое значение с единицы на более малую величину, необходимо, чтобы устройство вносило некоторую случайность. Такое устройство или среда (например, атмосфера) не может быть представлено единой матрицей передачи $\mathbf{T}$, а должно характеризоваться ансамблем таких матриц передачи (см., например, Kim, Mandel and Wolf, 1987).

Выражение для среднее значение плотности электрической энергии $\langle w_e' \rangle$ прошедшего луча получается при подстановке уравнения (6.4.5) в формулу (6.2.7), примененную теперь к лучу, который выходит из линейного устройства. Сразу же можно найти, что

$$\langle w_e' \rangle = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Tr} \{\mathbf{T}^\dagger \mathbf{J} \mathbf{T}\}. \tag{6.4.7}$$

Мы сейчас определим вид матрицы преобразования $\mathbf{T}$ для некоторых простых, линейных, не образующих изображения устройств.

6.4.1. Компенсатор

Пусть ε_1 и ε_2 обозначают фазовые изменения, вносимые в компоненты E_x и E_y, соответственно, компенсатором при распространении луча через него от плоскости $z = z_0$ до плоскости $z = z_1$. Мы примем, что относительная разность фаз

$$\delta = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \tag{6.4.8}$$

которая в общем случае является функцией частоты, мала по сравнению с $2\pi l/\bar{\lambda}$, где l — длина когерентности света и $\bar{\lambda}$ — средняя длина волны. Мы также примем, что потери, вызванные отражениями и поглощением в компенсаторе, пренебрежимо малы.

Ясно, что компенсатор переводит $\mathscr{E}$ в вектор-строку

$$\mathscr{E}' = \begin{bmatrix} E_x e^{i\varepsilon_1} & E_y e^{i\varepsilon_2} \end{bmatrix} = \mathscr{E} \begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_2} \end{bmatrix}. \tag{6.4.9}$$

В силу того, что теперь важна только разность фаз между двумя декартовыми компонентами электрического поля, мы можем выразить соотношение между $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ в виде

$$\mathscr{E}' = \mathscr{E} \begin{bmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{bmatrix}. \tag{6.4.9a}$$

Сравнивая уравнение (6.4.9) с общим выражением (6.4.3), мы видим, что матрица передачи компенсатора, которую мы обозначим как $\mathbf{T}_C$, равна

$$\mathbf{T}_C = \begin{bmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{bmatrix}. \tag{6.4.10}$$

Можно легко проверить, что $\mathbf{T}_C^\dagger \mathbf{T}_C = \mathbf{T}_C \mathbf{T}_C^\dagger = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — единичная матрица. Следовательно, матрица передачи нашего (несколько идеализированного) компенсатора унитарна. Используя этот факт и вспоминая,

что след произведения матриц не меняется при циклической перестановке, из уравнений (6.4.7) и (6.4.10) получим

$$\langle w'_{\mathrm{e}}\rangle = \frac{1}{4\pi}\operatorname{Tr}\{\mathbf{J}\mathbf{T}_{\mathrm{C}}\mathbf{T}_{\mathrm{C}}^{\dagger}\} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{Tr}\mathbf{J} = \langle w_{\mathrm{e}}\rangle. \tag{6.4.11}$$

Это соотношение показывает, что среднее значение электрической плотности энергии луча не меняется при прохождении через компенсатор.

6.4.2. Поглотитель

В поглотителе компоненты E_x и E_y будут затухать. Пусть $\mathrm{e}^{-\alpha_1}$ и $\mathrm{e}^{-\alpha_2}$ ($\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$) — коэффициенты затухания компонент x и y комплексного вектора электрического поля при распространении через поглотитель от плоскости $z = z_0$ до плоскости $z = z_1$. Мы предполагаем, что изменение α_1 и α_2 в узком спектральном диапазоне квазимонохроматического луча и

$$\mathbf{T}_{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\alpha_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\alpha_2} \end{bmatrix}. \tag{6.4.13}$$

Заметим, что равенство $\mathbf{T}_{\mathrm{A}}^{\dagger} = \mathbf{T}_{\mathrm{A}}$ показывает эрмитовость матрицы передачи поглотителя. Используя этот факт, мы сразу же найдем из уравнения (6.4.7), что среднее значение плотности электрической энергии прошедшего луча задается выражением

$$\langle w'_{\mathrm{e}}\rangle = \frac{1}{4\pi}\operatorname{Tr}\{\mathbf{T}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\mathbf{J}\mathbf{T}_{\mathrm{A}}\} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{Tr}\{\mathbf{J}\mathbf{T}_{\mathrm{A}}\mathbf{T}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{Tr}\{\mathbf{J}\mathbf{T}_{\mathrm{A}}^{2}\} = \frac{1}{4\pi}[J_{xx}\,\mathrm{e}^{-2\alpha_1} + J_{yy}\,\mathrm{e}^{-2\alpha_2}]. \tag{6.4.14}$$

6.4.3. Ротатор

Различные материалы и физические устройства создают вращение вектора электрического поля относительно направления распространения луча. Такое устройство называется ротатором. Пусть χ — угол поворота комплексного вектора электрического поля вокруг направления распространения при прохождении света через ротатор от плоскости $z = z_0$ до плоскости $z = z_1$. Если мы примем, что χ фактически не зависит от частоты в узком спектральном диапазоне квазимонохроматического луча и пренебрежем потерями на отражение и поглощение, то ротатор превращает $\mathscr{E}$ в

$$\mathscr{E}' = \mathscr{E}\begin{bmatrix} \cos\chi & \sin\chi \\ -\sin\chi & \cos\chi \end{bmatrix}. \tag{6.4.15}$$

Следовательно, матрица передачи $\mathbf{T}_{\mathrm{R}}$ ротатора задается как

$$\mathbf{T}_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} \cos\chi & \sin\chi \\ -\sin\chi & \cos\chi \end{bmatrix}. \tag{6.4.16}$$

Сразу же видно, что $\mathbf{T}_{\mathrm{R}}$ — действительная, ортогональная и, следовательно, унитарная матрица, так что ее транспонированная $\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}$, ее эрмитово сопряженная $\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{\dagger}$ и ее обратная матрицы $\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{-1}$ равны друг другу ($\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{\dagger} = \mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{-1}$). Из уравнения (6.4.7) и унитарности $\mathbf{T}_{\mathrm{R}}$ следует, что среднее значение плотности электрической энергии прошедшего луча задается выражением

$$\langle w'_{\mathrm{e}}\rangle = \frac{1}{4\pi}\operatorname{Tr}\{\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{\dagger}\mathbf{J}\mathbf{T}_{\mathrm{R}}\} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{Tr}\{\mathbf{J}\mathbf{T}_{\mathrm{R}}\mathbf{T}_{\mathrm{R}}^{\dagger}\} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{Tr}\mathbf{J} = \langle w_{\mathrm{e}}\rangle, \tag{6.4.17}$$

т.е. среднее значение плотности электрической энергии не меняется при прохождении через ротатор.

6.4.4. Поляризатор

Рассмотрим далее поляризатор, который пропускает составляющую электрического поля, направленную под углом θ к направлению x. Составляющая $E(\theta)$ падающего поля в этом направлении задается следующим образом:

$$E(\theta) = E_x \cos\theta + E_y \sin\theta. \tag{6.4.18}$$

Следовательно, если пренебречь потерями на отражение и пропускание, вектор-строка $\mathscr{E}'$, который представляет прошедшее поле, задается как

$$\begin{aligned}\mathscr{E}' &= [E(\theta)\cos\theta \quad E(\theta)\sin\theta] = \\ &= [(E_x\cos\theta + E_y\sin\theta)\cos\theta \quad (E_x\cos\theta + E_y\sin\theta)\sin\theta] = \mathscr{E}\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{6.4.19}$$

Поэтому матрица передачи $\mathbf{T}_\mathrm{P}$ поляризатора равна

$$\mathbf{T}_\mathrm{P} = \begin{bmatrix}\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}. \tag{6.4.20}$$

Легко видеть, что эта матрица удовлетворяет условию идемпотентности $\mathbf{T}_\mathrm{P}\mathbf{T}_\mathrm{P} = \mathbf{T}_\mathrm{P}$, т.е. $\mathbf{T}_\mathrm{P}$ представляет (действительный симметричный) проективный оператор. Это, конечно, выражает тот факт, что электрическое поле, которое выходит из поляризатора, не меняется при прохождении через другой идентичный поляризатор.

Плотность энергии прошедшего луча согласно (6.4.7) задается в виде

$$\langle w_\mathrm{e}'\rangle = \frac{1}{4\pi}\operatorname{Tr}\{\mathbf{T}_\mathrm{P}^\dagger\mathbf{J}\mathbf{T}_\mathrm{P}\} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{Tr}\{\mathbf{J}\mathbf{T}_\mathrm{P}\mathbf{T}_\mathrm{P}^\dagger\} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{Tr}\{\mathbf{J}\mathbf{T}_\mathrm{P}\mathbf{T}_\mathrm{P}\} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{Tr}\{\mathbf{J}\mathbf{T}_\mathrm{P}\}. \tag{6.4.21}$$

6.4.5. Каскадная система

Предположим, что квазимонохроматический световой луч проходит через набор не формирующих изображение устройств D_1, D_2, ..., D_n, собственные оси которых расположены вдоль направления распространения луча (рис. 6.3). Выведем выражение для матрицы передачи системы в целом через матрицы передачи отдельных компонент.

Пусть $\mathscr{E}_0$ — это вектор-строка, представляющий собой комплексное электрическое поле падающего луча на плоскости $z = z_0$. После прохождения через D_1 комплексное электрическое поле на плоскости $z = z_1$, расположенной между D_1 и D_2, будет задаваться как

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_0\mathbf{T}_1, \tag{6.4.22}$$

где $\mathbf{T}_1$ — матрица передачи D_1. После прохождения через второе устройство D_2 комплексное электрическое поле на плоскости $z = z_2$, расположенной между D_2 и D_3, будет задаваться вектором-строкой

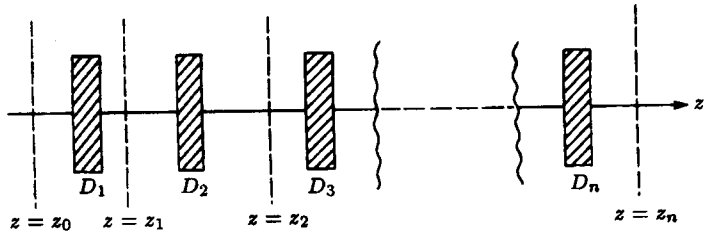


Рис. 6.3. Обозначения, относящиеся к определению матрицы передачи каскадной системы

$$\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_1\mathbf{T}_2, \tag{6.4.23}$$

где $\mathbf{T}_2$ — матрица передачи D_2. Ясно, что серия последовательных прохождений между плоскостями $z = z_j$ и $z = z_{j+1}$ описывается системой рекуррентных соотношений

$$\mathscr{E}_j = \mathscr{E}_{j-1}\mathbf{T}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.4.24}$$

Из этих соотношений следует, что

$$\mathscr{E}_n = \mathscr{E}_0\mathbf{T}, \tag{6.4.25}$$

где

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\ldots\mathbf{T}_n \tag{6.4.26}$$

— матрица передачи, которая характеризует распространение луча от «входной плоскости» $z = z_0$ к «выходной плоскости» $z = z_n$ (см. рис. 6.3).

Мы видим из выражений (6.4.5) и (6.4.26), что если $\mathbf{J}$ — это матрица когерентности на входной плоскости $z = z_0$ луча, падающего на каскадную систему, сформированную из элементов D_1, D_2, ..., D_n, то матрица когерентности выходящего луча на выходной плоскости $z = z_n$ задается в виде

$$\mathbf{J}' = (\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\ldots\mathbf{T}_n)^\dagger\mathbf{J}(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\ldots\mathbf{T}_n). \tag{6.4.27}$$

Эта формула означает, что

$$\mathbf{J}' = \mathbf{T}_n^\dagger\mathbf{T}_{n-1}^\dagger\ldots\mathbf{T}_1^\dagger\mathbf{J}\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\ldots\mathbf{T}_n. \tag{6.4.28}$$

Мы проиллюстрируем использование этой формулы, применив ее к задаче, которую мы рассматривали в разд. 6.2 более простым способом; а именно, определим среднее значение плотности электрической энергии луча, прошедшего через двухкомпонентную систему, состоящую из компенсатора и поляризатора. Для этого случая формула (6.4.28) дает

$$\mathbf{J}' = \mathbf{T}_\mathrm{P}^\dagger\mathbf{T}_\mathrm{C}^\dagger\mathbf{J}\mathbf{T}_\mathrm{C}\mathbf{T}_\mathrm{P}, \tag{6.4.29}$$

где $\mathbf{T}_\mathrm{C}$ и $\mathbf{T}_\mathrm{P}$ — матрицы передачи компенсатора и поляризатора, заданные уравнениями (6.4.10) и (6.4.20), соответственно.

Среднее значение плотности энергии $\langle w_\mathrm{e}'\rangle$ луча, выходящего из этой системы согласно уравнениям (6.4.29) и (6.2.7) задается выражением

$$\langle w_\mathrm{e}'\rangle = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\,\{\mathbf{T}_\mathrm{P}^\dagger\mathbf{T}_\mathrm{C}^\dagger\mathbf{J}\mathbf{T}_\mathrm{C}\mathbf{T}_\mathrm{P}\} = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\,\{\mathbf{T}_\mathrm{C}\mathbf{T}_\mathrm{P}\mathbf{T}_\mathrm{P}^\dagger\mathbf{T}_\mathrm{C}^\dagger\mathbf{J}\}. \tag{6.4.30}$$

Ранее мы отметили, что $\mathbf{T}_\mathrm{P}$ — действительная и симметричная идемпотентная матрица, так что $\mathbf{T}_\mathrm{P}\mathbf{T}_\mathrm{P}^\dagger = \mathbf{T}_\mathrm{P}$. Следовательно, уравнение (6.4.30) может быть выражено в виде

$$\langle w_\mathrm{e}'\rangle = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\,\{\mathbf{K}\mathbf{J}\}, \tag{6.4.31}$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}_\mathrm{C}\mathbf{T}_\mathrm{P}\mathbf{T}_\mathrm{C}^\dagger. \tag{6.4.32}$$

Подставляя выражения (6.4.10) и (6.4.20) в (6.4.32), можно сразу же найти, что

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{e}^{-i\delta} \\ \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{e}^{i\delta} & \sin^2\theta \end{bmatrix}. \tag{6.4.33}$$

Наконец, при подстановке выражения (6.4.33) в (6.4.31) получаем, что

$$\langle w_\mathrm{e}'\rangle = \frac{1}{4\pi}[J_{xx}\cos^2\theta + J_{yy}\sin^2\theta + J_{xy}\,\mathrm{e}^{+i\delta}\sin\theta\cos\theta + J_{yx}\,\mathrm{e}^{-i\delta}\cos\theta\sin\theta] \tag{6.4.34}$$

согласуется с формулой (6.2.4).

Прохождение луча через различные устройства может, конечно, также быть описано с помощью параметров Стокса, а не с помощью матриц когерентности. Для того, чтобы вывести соответствующий закон преобразования, обозначим с помощью s_j и s_j', $j = 1, 2, 3$, параметры Стокса луча на входной и выходной плоскостях, соответственно. Тогда мы имеем согласно (6.2.43)

$$s_j = \mathrm{Tr}\,[\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}_j], \tag{6.4.35а}$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2}s_j\boldsymbol{\sigma}_j, \tag{6.4.35б}$$

где $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3$ — спиновые матрицы Паули, определенные формулой (6.2.41), и $\boldsymbol{\sigma}_0$ — единичная 2×2-матрица (6.2.42). В правой части выражения (6.4.35б) и в последующем используется правило суммирования Эйнштейна, т.е. по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Теперь согласно (6.4.5) матрицы когерентности $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}'$ на входной и выходной плоскостях связаны формулой

$$\mathbf{J}' = \mathbf{T}^\dagger \mathbf{J} \mathbf{T}. \tag{6.4.36}$$

Подставляя (6.4.36) в (6.4.35а), мы сразу же найдем, что

$$s'_j = \mathrm{Tr}\,[\mathbf{T}^\dagger \mathbf{J} \mathbf{T} \boldsymbol{\sigma}_j] \tag{6.4.37}$$

или, используя выражение (6.4.35б), что

$$s'_j = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,[\mathbf{T}^\dagger s_k \boldsymbol{\sigma}_k \mathbf{T} \boldsymbol{\sigma}_j] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,[\mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{T}^\dagger s_k \boldsymbol{\sigma}_k],$$

т.е.

$$s'_j = M_{jk} s_k, \tag{6.4.38}$$

где

$$M_{jk} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,[\mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{T}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_k]. \tag{6.4.39}$$

Формула (6.4.38) — искомый закон преобразования параметров Стокса, и она показывает, что каждый параметр Стокса для поля на выходной плоскости является линейной комбинацией параметров Стокса для поля на входной плоскости. Видно, что это линейное соотношение характеризуется 4 × 4-матрицей $\mathbf{M} = [M_{jk}]$, вообще говоря, известной как *матрица Мюллера*[1]. Формула (6.4.39) выражает элементы матрицы Мюллера системы через элементы матрицы передачи.

Частично по историческим причинам параметры Стокса использовались гораздо более часто, чем матрицы когерентности. Следует заметить, однако, что влияние линейных, не образующих изображение, не деполяризующих, детерминированных устройств описывается гораздо более просто с помощью матрицы когерентности, чем с помощью параметров Стокса. В представлении матрицей когерентности устройство характеризуется 2 × 2-матрицей, тогда как в представлении параметров Стокса необходимы 4 × 4-матрицы. Очевидно для не деполяризующих устройств элементы матрицы Мюллера удовлетворяют значительному числу ограничений (см., например, Barakat, 1981; Simon, 1982).

6.5. Обобщенные матрицы когерентности второго порядка и тензоры когерентности стационарного электромагнитного поля

6.5.1. Электрические, магнитные и смешанные матрицы когерентности (тензоры)

Матрица когерентности $\mathbf{J}$ (6.2.6) характеризует простейшие корреляционные свойства однородного, квазимонохроматического пучка электромагнитного излучения. В частности, как мы видели, с ее помощью можно описать состояние поляризации пучка.

Для того, чтобы описать корреляционные свойства электромагнитного поля, которое не обязательно квазимонохроматично или имеет форму луча, требуются более общие матрицы когерентности. Они могут быть определены следующим образом. Рассмотрим флуктуирующее поле, статистические свойства которого характеризуется стационарным эргодическим ансамблем, и пусть $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ — представления

[1] Названа в честь Мюллера, который использовал такие матрицы в лекциях по феноменологической оптике, которые он читал в Массачусетском технологическом институте в течение 1945–1948. Мюллер не публиковал своих результатов в открытой литературе, кроме короткого резюме (Mueller, 1948; см. также Parke, 1949; Shurkliff, 1962, с. 117). Такие матрицы были, однако, использованы ранее, по крайней мере, в некоторых частных случаях Солейлеттом (Soleilett, 1929) и Перрином (Perrin, 1942). Соотношение между матрицами Мюллера и матрицами, используемыми в исчислении Джонса (см. примечание к началу разд. 6.4), обсуждалось в нескольких статьях, например, (Barakat, 1981), (Simon, 1982), (Kim, Mandel and Wolf, 1987).

комплексных аналитических сигналов для векторов электрического и магнитного поля, соответственно, в пространственно-временно́й точке $(\mathbf{r}, t)$. Для простоты предположим, что они имеют нулевые средние значения:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\rangle = \langle \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\rangle = 0. \tag{6.5.1}$$

Тогда матрицы когерентности [введенные Вольфом (Wolf, 1954)] определяются формулами:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) \equiv [\mathscr{E}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)] = [\langle E_j^*(\mathbf{r}_1,t)E_k(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle], \tag{6.5.2а}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) \equiv [\mathscr{H}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)] = [\langle H_j^*(\mathbf{r}_1,t)H_k(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle], \tag{6.5.2б}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) \equiv [\mathscr{M}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)] = [\langle E_j^*(\mathbf{r}_1,t)H_k(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle], \tag{6.5.2в}$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) \equiv [\mathscr{N}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)] = [\langle H_j^*(\mathbf{r}_1,t)E_k(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle], \tag{6.5.2г}$$

где каждое j и k соответствует индексам x, y, z, которые обозначают компоненты, выбранные в фиксированной декартовой прямоугольной системе координат. $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ называются *электрической* и *магнитной матрицами когерентности*, соответственно, а $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ называются *смешанными матрицами когерентности*. Эти матрицы, конечно, могут рассматриваться как декартовы тензоры второго ранга. В последующем обсуждении нам часто будет удобнее использовать язык и обозначения тензорного анализа, а не матричной алгебры.

Мы отметим несколько очевидных соотношений, которые сразу же следуют из вышеприведенных определений и предположения о стационарности, а именно,

$$\mathscr{E}_{kj}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \mathscr{E}_{jk}^*(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1,-\tau), \tag{6.5.3а}$$

$$\mathscr{H}_{kj}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \mathscr{H}_{jk}^*(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1,-\tau), \tag{6.5.3б}$$

$$\mathscr{M}_{kj}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \mathscr{N}_{jk}^*(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1,-\tau). \tag{6.5.3в}$$

Матрицы когерентности также подчиняются различным условиям неотрицательной определенности, которые могут быть выведены следующим образом. Запишем очевидное неравенство

$$\left\langle \left| \int d^3r \int dt \,\{f_j(\mathbf{r},t)E_j(\mathbf{r},t) + g_j(\mathbf{r},t)H_j(\mathbf{r},t)\} \right|^2 \right\rangle \geqslant 0, \tag{6.5.4}$$

где $f_j(\mathbf{r},t)$ и $g_j(\mathbf{r},t)$, $(j = x,y,z)$ — произвольные функции $\mathbf{r}$ и t, и интегрирование проводится по произвольной пространственно-временно́й области, содержащей поле. Опять подразумевается правило суммирования Эйнштейна. Мы сразу же получаем из неравенства (6.5.4) и из определяющих соотношений (6.5.2) следующие условия неотрицательной определенности [первоначально выведенные в контексте квантованного электромагнитного поля (Mehta and Wolf, 1967a)]:

$$\begin{aligned}\int d^3r_1 \int dt_1 \int d^3r_2 \int dt_2 \,\{&f_j^*(\mathbf{r}_1,t_1)f_k(\mathbf{r}_2,t_2)\mathscr{E}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_2-t_1) + \\ &+ g_j^*(\mathbf{r}_1,t_1)g_k(\mathbf{r}_2,t_2)\mathscr{H}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_2-t_1) + \\ &+ f_j^*(\mathbf{r}_1,t_1)g_k(\mathbf{r}_2,t_2)\mathscr{M}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_2-t_1) + \\ &+ g_j^*(\mathbf{r}_1,t_1)f_k(\mathbf{r}_2,t_2)\mathscr{N}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_2-t_1)\} \geqslant 0.\end{aligned} \tag{6.5.5}$$

Здесь мы также использовали стационарность поля.

Особый интерес представляют два частных случая этого неравенства. Если мы будем считать, что $g_j(\mathbf{r},t) \equiv 0$ в неравенстве (6.5.5), мы получим следующее условие неотрицательной определенности, которому подчиняется электрическая матрица когерентности:

$$\int d^3r_1 \int dt_1 \int d^3r_2 \int dt_2 \,\{f_j^*(\mathbf{r}_1,t_1)f_k(\mathbf{r}_2,t_2)\mathscr{E}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_2-t_1)\} \geqslant 0, \tag{6.5.6}$$

где снова используется правило суммирования Эйнштейна. Аналогично, положив $f_j(\mathbf{r},t) \equiv 0$, получим соответствующее условие неотрицательной определенности, которому удовлетворяет магнитная матрица когерентности:

$$\int d^3r_1 \int dt_1 \int d^3r_2 \int dt_2 \,\{g_j^*(\mathbf{r}_1,t_1)g_k(\mathbf{r}_2,t_2)\mathscr{H}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_2-t_1)\} \geqslant 0. \tag{6.5.7}$$

Условия неотрицательной определенности (6.5.5)—(6.5.7) могут быть представлены в альтернативных видах с использованием суммирования, а не интегрирования. Для того, чтобы показать это, положим

$$f_j(\mathbf{r},t)=\sum_{p=1}^{P}\sum_{m=1}^{M}a_{jpm}\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)\delta(t-t_m), \tag{6.5.8}$$

$$g_j(\mathbf{r},t)=\sum_{p=1}^{P}\sum_{m=1}^{M}b_{jpm}\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)\delta(t-t_m), \tag{6.5.9}$$

где P и M — произвольные положительные целые числа, a_{jpm}, b_{jpm} ($j=x,\,y,\,z$, $p=1,\,2,\,\ldots,\,P$, $m=1,\,2,\,\ldots,\,M$) — произвольные константы (действительные или комплексные), $\mathbf{r}_p$ — произвольные точки и t_m — произвольные моменты времени в пространственно-временно́й области, по которой в уравнении (6.5.5) выполняется интегрирование. Тогда мы получим из неравенств (6.5.5)—(6.5.7) следующие условия неотрицательной определенности:

$$\begin{aligned}a^*_{jpm}a_{kqn}\mathscr{E}_{jk}(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q,t_n-t_m)+b^*_{jpm}b_{kqn}\mathscr{H}_{jk}(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q,t_n-t_m)+\\+a^*_{jpm}b_{kqn}\mathscr{M}_{jk}(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q,t_n-t_m)+b^*_{jpm}a_{kqn}\mathscr{N}_{jk}(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q,t_n-t_m)\geqslant 0,\end{aligned} \tag{6.5.10}$$

$$a^*_{jpm}a_{kqn}\mathscr{E}_{jk}(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q,t_n-t_m)\geqslant 0, \tag{6.5.11}$$

$$b_{jpm}b_{kqn}\mathscr{H}_{jk}(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q,t_n-t_m)\geqslant 0. \tag{6.5.12}$$

Можно сразу же выразить средние значения плотности электрической и магнитной энергии $\langle w_{\mathrm{e}}(\mathbf{r},t)\rangle$ и $\langle w_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t)\rangle$ стационарного электромагнитного поля в свободном пространстве через электрическую и магнитную матрицы когерентности. Из формул (6.1.6), (6.1.7) и (6.5.2а), (6.5.2б) непосредственно следует, что

$$\langle w_{\mathrm{e}}(\mathbf{r},t)\rangle=\frac{1}{4\pi}\operatorname{Tr}\mathbf{E}(\mathbf{r},\mathbf{r},0), \tag{6.5.13}$$

$$\langle w_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t)\rangle=\frac{1}{4\pi}\operatorname{Tr}\mathbf{H}(\mathbf{r},\mathbf{r},0). \tag{6.5.14}$$

Хотя временны́е аргументы формально входят в левые части уравнений (6.5.13) и (6.5.14) [а также в уравнения (6.5.15) ниже], эти выражения фактически не зависят от времени, как видно из правых частей этих уравнений. Этот факт является следствием нашего предыдущего допущения, что электромагнитное поле является статистически стационарным.

Мы можем также сразу же выразить усредненный вектор Пойнтинга $\langle S(\mathbf{r},t)\rangle$ такого поля через смешанные матрицы когерентности. Согласно (6.1.11) и формулам (6.5.2в) и (6.5.2г) декартовы компоненты $\langle\mathbf{S}(\mathbf{r},t)\rangle$ задаются выражениями

$$\langle S_j(\mathbf{r},t)\rangle=\frac{c}{2\pi}\varepsilon_{jkl}\operatorname{Re}\{\langle E^*_kH_l\rangle-\langle E^*_kH_l\rangle\}=\frac{c}{2\pi}\varepsilon_{jkl}\operatorname{Re}\{\mathscr{M}_{kl}(\mathbf{r},\mathbf{r},0)-\mathscr{M}_{lk}(\mathbf{r},\mathbf{r},0)\} \tag{6.5.15а}$$

или, если мы используем соотношение (6.5.3в),

$$\langle S_j(\mathbf{r},t)\rangle=\frac{c}{2\pi}\varepsilon_{jkl}\operatorname{Re}\{\mathscr{M}_{kl}(\mathbf{r},\mathbf{r},0)-\mathscr{N}^*_{kl}(\mathbf{r},\mathbf{r},0)\}. \tag{6.5.15б}$$

В этих формулах индексы j, k, l представляют собой индексы x, y, z или их циклическую перестановку.

6.5.2. Дифференциальные уравнения первого порядка для распространения тензоров когерентности[1]

В силу того, что электрические и магнитные поля связаны уравнениями Максвелла, корреляционные матрицы или, что то же самое, корреляционные тензоры, которые представляют такие матрицы, не независимы друг от друга. Мы сейчас выведем главные соотношения, которые существуют между ними.

[1] Анализ, представленный в этом разделе, базируется в основном на исследованиях Вольфа (Wolf, 1956) и Романа и Вольфа (Roman and Wolf, 1960a).

Для начала выразим уравнения Максвелла в тензорной форме. Для этого вспомним, что векторное произведение любых двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ может быть записано как

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_j=\varepsilon_{jkl}a_kb_l, \tag{6.5.16}$$

где ε_{jkl} — это полностью антисимметричный единичный тензор Леви-Чивита, т.е. $\varepsilon_{jkl}=+1$ или -1 в зависимости от того, являются ли индексы j, k, l четной или нечетной перестановкой целых чисел 1, 2, 3, и $\varepsilon_{jkl}=0$, когда два (или более) индекса равны. Декартовы компоненты теперь обозначаются индексами 1, 2, 3, а не x, y, z. Если в тождестве (6.5.16) $\mathbf{a}$ представляет собой векторный оператор $\boldsymbol{\nabla}=(\partial/\partial x_1,\partial/\partial x_2,\partial/\partial x_3)\equiv\partial/\partial\mathbf{r}=\boldsymbol{\partial}$, то получаем

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b})_j=\varepsilon_{jkl}\partial_kb_l. \tag{6.5.17}$$

В силу того, что мы будем иметь дело с функциями, которые зависят от положения в двух точках $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, мы должны различать два дифференциальных оператора. Будем использовать верхние индексы 1 или 2 в соответствии с тем, как оператор действует по отношению к координатам $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, т.е.

$$\boldsymbol{\partial}^1\equiv\partial/\partial\mathbf{r}_1,\quad \boldsymbol{\partial}^2\equiv\partial/\partial\mathbf{r}_2. \tag{6.5.18}$$

В этих обозначениях уравнения Максвелла в свободном пространстве для каждой реализации ансамбля комплексного поля могут быть выражены в виде[1]

$$\varepsilon_{jkl}\partial_k^1E_l(\mathbf{r}_1,t_1)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_1}H_j(\mathbf{r}_1,t_1)=0, \tag{6.5.19}$$

$$\varepsilon_{jkl}\partial_k^1H_l(\mathbf{r}_1,t_1)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_1}E_j(\mathbf{r}_1,t_1)=0, \tag{6.5.20}$$

$$\partial_j^1E_j(\mathbf{r}_1,t_1)=0, \tag{6.5.21}$$

$$\partial_j^1H_j(\mathbf{r}_1,t_1)=0. \tag{6.5.22}$$

Здесь мы опять используем правило суммирования Эйнштейна, т.е. повторение индексов означает суммирование по всем возможным значениям индекса.

Возьмем комплексное сопряжение уравнения (6.5.19) и умножим его на $E_m(\mathbf{r}_2,t_2)$. Тогда мы получим соотношение

$$\varepsilon_{jkl}\partial_k^1E_l^*(\mathbf{r}_1,t_1)E_m(\mathbf{r}_2,t_2)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_1}H_j^*(\mathbf{r}_1,t_1)E_m(\mathbf{r}_2,t_2)=0. \tag{6.5.23}$$

Далее мы положим $t_2=t_1+\tau$ и зафиксируем t_2. Тогда $\partial/\partial t_1=-\partial/\partial\tau$, и мы найдем из уравнения (6.5.23), проведя усреднение по ансамблю и в результате записав t вместо t_1, что

$$\varepsilon_{jkl}\partial_k^1\langle E_l^*(\mathbf{r}_1,t)E_m(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\langle H_j^*(\mathbf{r}_1,t)E_m(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle=0, \tag{6.5.24}$$

или, в терминах тензоров когерентности $\mathscr{E}$ и $\mathscr{N}$, представленных матрицами [выражения (6.5.2а) и (6.5.2г)],

$$\varepsilon_{jkl}\partial_k^1\mathscr{E}_{lm}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\mathscr{N}_{jm}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)=0. \tag{6.5.25}$$

Таким же образом мы можем вывести из уравнения Максвелла (6.5.19) следующее уравнение, которое связывает тензоры когерентности $\mathscr{M}$ и $\mathscr{H}$ [выражения (6.5.2б) и (6.5.2в)]:

$$\varepsilon_{jkl}\partial_k^1\mathscr{M}_{lm}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\mathscr{H}_{jm}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)=0. \tag{6.5.26}$$

[1] Мы используем здесь тот факт, что не только действительные поля $\mathbf{E}^{(r)}$, $\mathbf{H}^{(r)}$, но также и связанные с ними представления комплексных аналитических сигналов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла. То, что это так, легко проверить, например, используя процедуру, примененную в разд. 4.4.1, для того чтобы показать, что если действительная функция $V^{(r)}(\mathbf{r},t)$ удовлетворяет волновому уравнению, то ему также удовлетворяет соответствующий комплексный аналитический сигнал $V(\mathbf{r},t)$.

Из второго уравнения Максвелла (6.5.20) мы можем вывести таким же образом следующие уравнения, которые связывают тензоры $\mathscr{N}$ и $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ и $\mathscr{M}$, соответственно:

$$\varepsilon_{jkl}\partial_k^1 \mathscr{N}_{lm}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\mathscr{E}_{jm}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = 0, \tag{6.5.27}$$

$$\varepsilon_{jkl}\partial_k^1 \mathscr{H}_{lm}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\mathscr{M}_{jm}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = 0. \tag{6.5.28}$$

Далее мы рассмотрим некоторые следствия уравнений с дивергенцией (6.5.21) и (6.5.22). Если мы возьмем комплексное сопряжение уравнения (6.5.21), умножим его на $E_k(\mathbf{r}_2,t_2)$, проведем усреднение по ансамблю и используем тот факт, что поле стационарно, то получим уравнение

$$\partial_j^1 \mathscr{E}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = 0. \tag{6.5.29}$$

Точно таким же образом мы можем вывести из уравнения (6.5.21) уравнение

$$\partial_j^1 \mathscr{M}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = 0. \tag{6.5.30}$$

Из уравнения с дивергенцией (6.5.22) мы можем вывести с помощью такой же процедуры два уравнения

$$\partial_j^1 \mathscr{N}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = 0, \tag{6.5.31}$$

$$\partial_j^1 \mathscr{H}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = 0. \tag{6.5.32}$$

Уравнения (6.5.25)—(6.5.32) являются основными уравнениями для распространения корреляционных тензоров электромагнитного поля в свободном пространстве. Существует другая система аналогичных уравнений, которая использует операторы $\boldsymbol{\partial}^2$, а не $\boldsymbol{\partial}^1$ и которая может быть выведена точно таким же образом. Эти две системы уравнений не являются независимыми. Одна может быть выведена из другой с помощью соотношений (6.5.3).

Различные следствия этих уравнений и некоторые обобщения обсуждались в литературе. В частности, были выведены законы сохранения, включающие корреляции поля (Roman and Wolf, 1960b; Roman, 1961b), и уравнения были обобщены на случай, когда учитывалось влияние случайных зарядов и случайных токов (Roman, 1961a; Beran and Parrent, 1962). Были получены явные выражения для тензоров когерентности излучения абсолютно черного тела и были изучены некоторые из их следствий (Bourret, 1960) и (Mehta, Wolf 1964a, b).

6.5.3. Волновые уравнения для распространения тензоров когерентности

Дифференциальные уравнения первого порядка, которые мы только что вывели, связывают четыре тензора когерентности второго порядка стационарного электромагнитного поля в свободном пространстве. Мы сейчас покажем, что эти уравнения означают, что каждый тензор удовлетворяет двум волновым уравнениям.

Применим оператор $(1/c)\partial/\partial\tau$ к уравнению (6.5.27). Тогда мы получим уравнение

$$\varepsilon_{jkl}\partial_k^1 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\mathscr{N}_{lm} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\mathscr{E}_{jm} = 0. \tag{6.5.33}$$

Далее подставим в левую часть этого уравнения формулу (6.5.25) и найдем, что

$$\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lab}\partial_k^1\partial_a^1 \mathscr{E}_{bm} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\mathscr{E}_{jm} = 0. \tag{6.5.34}$$

Сейчас мы воспользуемся тождеством [Jeffreys, 1931, с. 15, уравнение (55)]

$$\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lab} = \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{abl} = \delta_{ja}\delta_{kb} - \delta_{jb}\delta_{ka}, \tag{6.5.35}$$

где δ_{mn} — символ Кронекера. Тогда уравнение(6.5.34) сводится к

$$\partial_b^1 \partial_j^1 \mathscr{E}_{bm} - \partial_k^1 \partial_k^1 \mathscr{E}_{jm} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \mathscr{E}_{jm} = 0. \tag{6.5.36}$$

Теперь согласно уравнению (6.5.29) первое слагаемое слева исчезает. К тому же $\partial_k^1 \partial_k^1 = \nabla_1^2$, где ∇_1^2 — оператор Лапласа, взятый по отношению к координатам первой точки $\mathbf{r}_1$. Следовательно, если мы также заменим индекс m на k, уравнение (6.5.36) сводится к уравнению

$$\nabla_1^2 \mathscr{E}_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \mathscr{E}_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau), \tag{6.5.37}$$

показывающему, что в свободном пространстве электрический тензор когерентности удовлетворяет волновому уравнению.

Точно таким же образом можно показать, что другие тензоры когерентности также удовлетворяют этому уравнению, а именно

$$\nabla_1^2 \mathscr{H}_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \mathscr{H}_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau), \tag{6.5.38}$$

$$\nabla_1^2 \mathscr{M}_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \mathscr{M}_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau), \tag{6.5.39}$$

$$\nabla_1^2 \mathscr{N}_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \mathscr{N}_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau). \tag{6.5.40}$$

Далее, используя уравнения (6.5.3), можно сразу же найти из уравнений (6.5.37)—(6.5.40), что каждый из четырех тензоров когерентности удовлетворяют волновому уравнению, в котором оператор Лапласа действует на координаты второй точки $\mathbf{r}_2$ (в этом случае мы обозначим оператор Лапласа как ∇_2^2), т.е. каждый тензор когерентности также удовлетворяет волновому уравнению вида

$$\nabla_2^2 \mathscr{E}_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \mathscr{E}_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau). \tag{6.5.41}$$

Завершим этот раздел, подчеркнув, что мы определили матрицы когерентности (тензоры когерентности) стационарных электромагнитных полей и вывели динамические уравнения, которым они подчиняются в свободном пространстве. Эти определения и уравнения определяют математический подход к единому рассмотрению многих проблем, касающихся пространственной когерентности, временно́й когерентности второго порядка и состояния поляризации поля.

6.6. Тензоры взаимной спектральной плотности второго порядка стационарного электромагнитного поля

6.6.1. Электрический, магнитный и смешанный тензоры взаимной спектральной плотности

Ранее мы видели, например, при обсуждении основ радиометрии (разд. 5.7) и изучении влияния корреляций источника на спектр испущенного излучения (разд. 5.8), что в некоторых случаях более естественно и более удобно использовать пространственно-частотное, а не пространственно-временно́е описание флуктуирующего волнового поля. Также предпочтительно использовать пространственно-частотное описание при анализе распространения света в диспергирующей среде и в некоторых других случаях, касающихся взаимодействия флуктуирующего волнового поля с веществом. Поэтому уместно обсудить пространственно-частотные аналоги некоторых результатов, касающихся пространственно-временны́х тензоров когерентности, которые мы только что рассмотрели.

Основными математическими величинами при пространственно-частотном описании являются так называемые матрицы взаимной спектральной плотности или, что то же самое, тензоры взаимной спектральной плотности. Они являются естественным обобщением скалярной функции взаимной спектральной плотности, с которой мы часто имели дело в предыдущих главах.

Пусть $\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\nu)$ и $\widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\nu)$ — (обобщенные) фурье-образы флуктуирующих комплексных электрических и магнитных полей, соответственно, которые предполагаются стационарными и имеющими нулевое среднее. Тогда тензоры взаимной спектральной плотности могут быть введены с помощью формул [ср. (4.3.39)]

$$\langle \widetilde{E}_j^*(\mathbf{r}_1,\nu)\widetilde{E}_k(\mathbf{r}_2,\nu')\rangle = W_{jk}^{(e)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\delta(\nu-\nu'), \tag{6.6.1а}$$

$$\langle \widetilde{H}_j^*(\mathbf{r}_1,\nu)\widetilde{H}_k(\mathbf{r}_2,\nu')\rangle = W_{jk}^{(h)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\delta(\nu-\nu'), \tag{6.6.1б}$$

$$\langle \widetilde{E}_j^*(\mathbf{r}_1,\nu)\widetilde{H}_k(\mathbf{r}_2,\nu')\rangle = W_{jk}^{(m)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\delta(\nu-\nu'), \tag{6.6.1в}$$

$$\langle \widetilde{H}_j^*(\mathbf{r}_1,\nu)\widetilde{E}_k(\mathbf{r}_2,\nu')\rangle = W_{jk}^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\delta(\nu-\nu'), \tag{6.6.1г}$$

где индексы $j,\ k = x,y,z$ опять обозначают декартовы компоненты, δ — дельта функция Дирака и $\nu \geqslant 0$. Каждая из четырех величин $W_{jk}^{(e)}$, $W_{jk}^{(h)}$, $W_{jk}^{(m)}$ и $W_{jk}^{(n)}$ является составляющей тензора второго ранга. $W_{jk}^{(e)}$ и $W_{jk}^{(h)}$ известны как ***электрический*** и ***магнитный тензоры взаимной спектральной плотности***, соответственно, и $W_{jk}^{(m)}$ и $W_{jk}^{(n)}$ называются ***смешанными тензорами взаимной спектральной плотности***. Девять компонент каждого из этих четырех тензоров можно, конечно, представить в виде матриц 3×3, известных как электрическая, магнитная или смешанная ***матрицы взаимной спектральной плотности***, соответственно.

Согласно обобщенной теореме Винера — Хинчина [формулы (2.4.37) и (2.4.38)] каждый тензор когерентности, определенный выражениями (6.5.2), и тензор взаимной спектральной плотности образуют пару относительно преобразования Фурье:

$$\mathscr{E}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \int_0^\infty W_{jk}^{(e)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu, \tag{6.6.2а}$$

$$\mathscr{H}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \int_0^\infty W_{jk}^{(h)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu, \tag{6.6.2б}$$

$$\mathscr{M}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \int_0^\infty W_{jk}^{(m)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu, \tag{6.6.2в}$$

$$\mathscr{N}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \int_0^\infty W_{jk}^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu. \tag{6.6.2г}$$

Нижние пределы интегралов в этих формулах равны 0, а не $-\infty$, потому что мы используем представление аналитических сигналов для полей. Выполнив обратное преобразование Фурье уравнений (6.6.2), получим

$$W_{jk}^{e}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = \int_{-\infty}^\infty \mathscr{E}_{jk}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)\,\mathrm{e}^{2\pi i\nu\tau}\,d\tau, \quad (\nu \geqslant 0), \tag{6.6.3}$$

и т.д.

Из определяющих выражений (6.6.1а) и (6.6.1б) мы сразу же видим, что каждый тензор взаимной спектральной плотности электрического и магнитного полей удовлетворяет соотношению вида

$$W_{kj}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = [W_{jk}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1,\nu)]^*, \tag{6.6.4}$$

где α означает индексы e или h. Далее из выражений (6.6.1в) и (6.6.1г) очевидно, что также выполняется следующее соотношение, касающееся смешанных тензоров взаимной спектральной плотности,

$$W_{kj}^{(m)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = [W_{jk}^{(n)}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1,\nu)]^*. \tag{6.6.5}$$

Тензоры взаимной спектральной плотности удовлетворяют ряду условий неотрицательной определенности, которые могут быть выведены следующим образом. Начнем с очевидного неравенства

$$\left\langle \left| \int_{\nu-\varepsilon_1}^{\nu+\varepsilon_2} d\nu' \int d^3r\,\{f_j(\mathbf{r})\widetilde{E}_j(\mathbf{r},\nu') + g_j(\mathbf{r})\widetilde{H}_j(\mathbf{r},\nu')\} \right|^2 \right\rangle \geqslant 0. \tag{6.6.6}$$

Здесь $f_j(\mathbf{r})$ и $g_j(\mathbf{r})$, $j = 1,2,3$, — произвольные функции положения, ν — произвольная положительная частота и ε_1 и ε_2 — произвольные положительные числа, причем $\nu - \varepsilon_1 > 0$. Интегрирование по объему выполняется в произвольной области пространства, содержащей поле. Как и раньше, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Из неравенства (6.6.6) мы легко находим, если обратиться к (6.6.1), что

$$\int_{\nu-\varepsilon_1}^{\nu+\varepsilon_2} d\nu' \int d^3\mathbf{r}_1 \int d^3\mathbf{r}_2 \{f_j^*(\mathbf{r}_1) f_k(\mathbf{r}_2) W_{jk}^{(e)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu') + g_j^*(\mathbf{r}_1) g_k(\mathbf{r}_2) W_{jk}^{(h)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu') + f_j^*(\mathbf{r}_1) g_k(\mathbf{r}_2) W_{jk}^{(m)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu') + g_j^*(\mathbf{r}_1) f_k(\mathbf{r}_2) W_{jk}^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu')\} \geqslant 0. \quad (6.6.7)$$

В силу того, что это неравенство выполняется для интегрирования по произвольному малому частотному диапазону, оно приводит к следующему условию неотрицательной определенности, касающемуся четырех тензоров взаимной спектральной плотности, первоначально выведенному в рамках теории квантованных электромагнитных полей (Mehta and Wolf, 1967b, прил. III)

$$\int d^3\mathbf{r}_1 \int d^3\mathbf{r}_2 \{f_j^*(\mathbf{r}_1) f_k(\mathbf{r}_2) W_{jk}^{(e)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) + g_j^*(\mathbf{r}_1) g_k(\mathbf{r}_2) W_{jk}^{(h)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) + f_j^*(\mathbf{r}_1) g_k(\mathbf{r}_2) W_{jk}^{(m)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) + g_j^*(\mathbf{r}_1) f_k(\mathbf{r}_2) W_{jk}^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\} \geqslant 0. \quad (6.6.8)$$

Отметим два частных случая. Если в выражении (6.6.8) мы положим $g_j(\mathbf{r}) \equiv 0$, $(j = x,y,z)$, то получим следующее условие неотрицательной определенности, которому подчиняется электрический тензор взаимной спектральной плотности:

$$\int d^3\mathbf{r}_1 \int d^3\mathbf{r}_2 \, f_j^*(\mathbf{r}_1) f_k(\mathbf{r}_2) W_{jk}^{(e)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) \geqslant 0. \quad (6.6.9)$$

Аналогично, если в выражении (6.6.8) мы положим $f_j(\mathbf{r}) \equiv 0$, $(j = x,y,z)$, то получим соответствующее условие неотрицательной определенности, которому удовлетворяет магнитный тензор взаимной спектральной плотности:

$$\int d^3\mathbf{r}_1 \int d^3\mathbf{r}_2 \, g_j^*(\mathbf{r}_1) g_k(\mathbf{r}_2) W_{jk}^{(h)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) \geqslant 0. \quad (6.6.10)$$

Точно так же, как соответствующие неравенства, касающиеся тензоров когерентности второго порядка, неравенства (6.6.8)—(6.6.10) могут быть представлены в альтернативных видах, использующих суммирование, а не интегрирование. Для того, чтобы показать это, положим

$$f_j(\mathbf{r}) = a_{jp}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p), \quad (6.6.11)$$

$$g_j(\mathbf{r}) = b_{jp}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p), \quad (6.6.12)$$

где P — произвольное положительное целое число, a_{jp}, b_{jp}, $j = x,y,z$, $p = 1,2,\ldots,P$ — произвольные (действительные или комплексные) константы и $\mathbf{r}_p$ — произвольные точки внутри области, по которой проводится пространственное интегрирование в уравнении (6.6.8). Тогда мы получим из неравенств (6.6.8)—(6.6.10) следующие условия неотрицательной определенности

$$a_{jp}^* a_{kq} W_{jk}^{(e)}(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q,\nu) + b_{jp}^* b_{kq} W_{jk}^{(h)}(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q,\nu) + a_{jp}^* b_{kq} W_{jk}^{(m)}(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q,\nu) + b_{jp}^* a_{kq} W_{jk}^{(n)}(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q,\nu) \geqslant 0, \quad (6.6.13)$$

$$a_{jp}^* a_{kq} W_{jk}^{(e)}(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q,\nu) \geqslant 0, \quad (6.6.14)$$

$$b_{jp}^* b_{kq} W_{jk}^{(h)}(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q,\nu) \geqslant 0. \quad (6.6.15)$$

Из формул (6.1.6), (6.1.7), (6.1.11) и (6.6.2) мы сразу же получим следующие выражения для средних значений плотностей электрической и магнитной энергии и среднего значения вектора Пойнтинга через тензоры взаимной спектральной плотности:

$$\langle w_{\mathrm{e}}(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \mathrm{Tr}\,\mathbf{W}^{(e)}(\mathbf{r},\mathbf{r},\nu)\,d\nu, \tag{6.6.16}$$

$$\langle w_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \mathrm{Tr}\,\mathbf{W}^{(m)}(\mathbf{r},\mathbf{r},\nu)\,d\nu, \tag{6.6.17}$$

$$\langle S_j(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{c}{2\pi}\varepsilon_{jkl}\,\mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty [W_{kl}^{(m)}(\mathbf{r},\mathbf{r},\nu) - W_{lk}^{(m)}(\mathbf{r},\mathbf{r},\nu)]\,d\nu\right\} = \tag{6.6.18а}$$

$$= \frac{c}{2\pi}\varepsilon_{jkl}\,\mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty [W_{kl}^{(m)}(\mathbf{r},\mathbf{r},\nu) - W_{kl}^{(n)}(\mathbf{r},\mathbf{r},\nu)]\,d\nu\right\}. \tag{6.6.18б}$$

Хотя временны́е аргументы и появляются в левой части уравнений (6.6.16)—(6.6.18), средние величины не зависят от времени по тем же самым причинам, о которых упоминалось ранее в связи с уравнениями (6.5.13)—(6.5.15).

Явные выражения для тензоров взаимной спектральной плотности излучения абсолютно черного тела были выведены Метой и Вольфом (Mehta and Wolf, 1967c).

6.6.2. Дифференциальные уравнения первого порядка для распространения тензоров взаимной спектральной плотности

Четыре тензора взаимной спектральной плотности связаны между собой системой дифференциальных уравнений. Их вид в свободном пространстве можно сразу же получить, выполнив преобразование Фурье уравнений (6.5.25)—(6.5.32), которые связывают тензоры когерентности, и используя соотношения (6.6.3). Тогда можно получить требуемые уравнения:

$$\varepsilon_{jkl}\partial_k^1 W_{lm}^{(e)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) + i\frac{2\pi\nu}{c}W_{jm}^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = 0, \tag{6.6.19}$$

$$\varepsilon_{jkl}\partial_k^1 W_{lm}^{(m)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) + i\frac{2\pi\nu}{c}W_{jm}^{(h)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = 0, \tag{6.6.20}$$

$$\varepsilon_{jkl}\partial_k^1 W_{lm}^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) - i\frac{2\pi\nu}{c}W_{jm}^{(e)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = 0, \tag{6.6.21}$$

$$\varepsilon_{jkl}\partial_k^1 W_{lm}^{(h)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) - i\frac{2\pi\nu}{c}W_{jm}^{(m)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = 0, \tag{6.6.22}$$

$$\partial_j^1 W_{jk}^{(e)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = 0, \tag{6.6.23}$$

$$\partial_j^1 W_{jk}^{(m)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = 0, \tag{6.6.24}$$

$$\partial_j^1 W_{jk}^{(n)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = 0, \tag{6.6.25}$$

$$\partial_j^1 W_{jk}^{(h)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = 0. \tag{6.6.26}$$

Существует аналогичная система уравнений, которая использует операторы $\boldsymbol{\partial}^2$, а не $\boldsymbol{\partial}^1$. Она может быть получена из уравнений (6.6.19)—(6.6.26), используя соотношения (6.6.4).

6.6.3. Уравнения Гельмгольца для распространения тензоров взаимной спектральной плотности

В свободном пространстве каждый тензор взаимной спектральной плотности подчиняется уравнению Гельмгольца. Для того чтобы показать это, можно либо исключить тензоры $\mathbf{W}^{(n)}$ или $\mathbf{W}^{(e)}$ из уравнений

(6.6.19) и (6.6.21), либо исключить $\mathbf{W}^{(m)}$ или $\mathbf{W}^{(h)}$ из уравнений (6.6.20) и (6.6.22). Более простой путь для получения тех же результатов состоит в выполнении преобразования Фурье уравнений (6.5.37)—(6.5.40) и использовании того факта, что тензоры взаимной спектральной плотности представляют собой фурье-образы тензоров когерентности [(6.6.3)]. Тогда сразу же можно получить уравнения Гельмгольца

$$\nabla_1^2 W_{jk}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) + \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2 W_{jk}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0, \tag{6.6.27}$$

где ∇_1^2 — оператор Лапласа, взятый по координатам первой точки $\mathbf{r}_1$, и α означает любой из индексов e, h, m или n.

Если мы возьмем комплексное сопряжение уравнения (6.6.27), используем соотношение (6.6.4) и поменяем местами аргументы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, то получим вторую систему уравнений Гельмгольца

$$\nabla_2^2 W_{jk}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) + \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2 W_{jk}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0, \tag{6.6.28}$$

где ∇_2^2 — оператор Лапласа, взятый по координатам второй точки $\mathbf{r}_2$.

Задачи

6.1 Определите матрицы Мюллера компенсатора, поглотителя, ротатора и поляризатора.

6.2 Объясните, как можно использовать комбинацию четырех не формирующих изображение устройств, обсуждавшихся в разд. 6.4.1–6.4.4, для преобразования неполяризованного света в свет с круговой поляризацией. Можно ли это осуществить, используя только устройства без потерь, т.е. компенсатор и ротатор.

6.3 Покажите на примере или другим путем, что степень поляризации хорошо коллимированного, однородного, квазимонохроматического светового луча может уменьшиться после прохождения через одно из четырех не формирующих изображение устройств, обсуждавшихся в разд. 6.4.1–6.4.4.

6.4 Взаимные спектральные тензоры $W_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$, $(\alpha = e, h, n, m;\ i, j = 1, 2, 3)$ электромагнитного поля, которое статистически однородно и изотропно, зависят от $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ только через разность $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ и инвариантны при повороте осей координат.

Покажите, что любой взаимный спектральный тензор вида

$$C_{ij}(\mathbf{r}', \nu) = F(r', \nu) x_i' x_j' + G(r', \nu)\delta_{ij},$$

где $\mathbf{r}' \equiv (x_1', x_2', x_3')$, δ_{ij} — δ-символ Кронекера и $r' = |\mathbf{r}'|$, инвариантен при повороте.

6.5 Пусть $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \nu)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \nu)$ — пространственно-временны́е реализации ансамбля стационарных электромагнитных полей в вакууме. Они могут быть представлены как угловые спектры

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \nu) = \int_{(4\pi)} \mathbf{e}(\mathbf{s}, \nu)\, e^{ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}\, d\Omega, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, \nu) = \int_{(4\pi)} \mathbf{h}(\mathbf{s}, \nu)\, e^{ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}\, d\Omega,$$

где $\mathbf{s}$ — действительные единичные векторы и интегрирование проводится по всему телесному углу 4π, создаваемому $\mathbf{s}$.

Покажите, что среднее значение плотности энергии и среднее значение вектора Пойнтинга поля могут быть выражены в виде (в системе единиц Гаусса)

$$\langle W_\nu(\mathbf{r})\rangle = \int_{(4\pi)} Q_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{s})\, d\Omega, \quad \langle \mathbf{S}_\nu(\mathbf{r})\rangle = \int_{(4\pi)} \mathbf{R}_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{s})\, d\Omega,$$

где

$$Q_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \frac{1}{4\pi}[\langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r},\nu)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{s},\nu)\rangle + \langle \mathbf{H}^*(\mathbf{r},\nu)\cdot\mathbf{h}(\mathbf{s},\nu)\rangle]\,\mathrm{e}^{ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}},$$
$$\mathbf{R}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \frac{c}{4\pi}[\langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r},\nu)\times\mathbf{h}(\mathbf{s},\nu)\rangle - \langle \mathbf{H}^*(\mathbf{r},\nu)\times\mathbf{e}(\mathbf{s},\nu)\rangle]\,\mathrm{e}^{ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}.$$

6.6 Величины $Q_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})$ и $\mathbf{R}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s})$, определенные в задаче 6.5, могут рассматриваться как «угловые компоненты» среднего значения плотности энергии и среднего значения вектора потока энергии. Покажите, что они связаны формулой

$$cQ_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \mathbf{s}\cdot\mathbf{R}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}),$$

где c — скорость света в вакууме. Далее покажите, что они удовлетворяют дифференциальными уравнениями

$$\mathbf{s}\cdot\nabla Q_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) - \frac{1}{2ik}\nabla^2 Q_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = 0,$$
$$\mathbf{s}\cdot\nabla \mathbf{R}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) - \frac{1}{2ik}\nabla^2 \mathbf{R}_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s}) = 0,$$

где $k = 2\pi\nu/c$.

6.7 Рассмотрим электромагнитное поле, создаваемое флуктуирующим источником на основе тока зарядов, с распределением, локализованным все время в конечной области D. Флуктуации являются статистически стационарными. Если $\mathbf{W}^{(e)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ и $\mathbf{W}^{(h)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ — взаимные спектральные тензоры комплексных электрического и магнитного полей, создаваемых источником, покажите, что в *дальней зоне*

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{W}^{(e)}(r\mathbf{s},r\mathbf{s},\nu) = \mathrm{Tr}\,\mathbf{W}^{(h)}(r\mathbf{s},r\mathbf{s},\nu), \quad (\mathbf{s}^2 = 1).$$

Глава 7

ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ КОГЕРЕНТНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

7.1. Введение

В гл. 5 мы обсуждали некоторые применения теории когерентности второго порядка к задачам, касающимся излучения локализованных источников с любой степенью когерентности. В данной главе мы опишем некоторые другие применения теории второго порядка. Два первых касаются классических методов интерферометрии для определения угловых диаметров звезд и распределения энергии спектральных линий. Оба метода были введены Альбертом Майкельсоном много лет назад, и основополагающие принципы были объяснены им без какой-либо концепции теории когерентности (которая была сформулирована позднее). Однако, теория когерентности второго порядка дала более глубокое понимание соответствующих физических принципов и также предложила полезные модификации этих методов, некоторые из которых будут обсуждаться в разд. 9.10.

Другое применение, которое будет обсуждаться в этой главе, касается определения углового и спектрального распределения энергии в оптических полях, рассеянных флуктуирующей линейной средой. Анализ будет основан на теории когерентности второго порядка полного электромагнитного поля, которую мы развили в гл. 6.

7.2. Звездная интерферометрия[1]

Как хорошо известно, угловые диаметры, под которыми видны звезды с Земли, так малы, что ни один имеющийся телескоп не может их разрешить. В фокальной плоскости телескопа звездный свет дает дифракционную картину, которая неотличима от той, которую давал бы свет от точечного источника, дифрагировавший на апертуре телескопа и деградировавший при прохождении через атмосферу Земли.

Майкельсон (Michelson, 1890, 1920) показал, что угловой диаметр звезды и в некоторых случаях распределение интенсивности по звездному диску могут быть определены из измерений, сделанных при помощи системы, состоящей из интерферометра, установленного на телескопе. Схема такой системы показана на рис. 7.1[2].

Свет от звезды падает на два внешних зеркала M_1 и M_2 интерферометра, отражается двумя внутренними зеркалами M_3 и M_4 и попадает на заднюю фокальную плоскость телескопа $\mathscr{F}$, к которому прикреплен интерферометр. Внутренние зеркала M_3 и M_4 закреплены, тогда как внешние зеркала M_1 и M_2 могут быть симметрично разнесены в направлении, соединяющем M_3 и M_4. В фокальной плоскости $\mathscr{F}$ тогда можно наблюдать дифракционное изображение звезды, на которую сфокусирован телескоп, пересеченное полосами, образованными двумя интерферирующими лучами.

Видность полос в фокальной плоскости $\mathscr{F}$ зависит от разнесения зеркал M_1 и M_2. Майкельсон с помощью элементарного рассуждения показал, что из измерений изменения видности полос с расстоянием между двумя зеркалами можно получить информацию о распределении интенсивности по звездному диску,

[1] см. также книгу (*Scully, Zubairy, 1997) — *ред. пер.*

[2] Подробное описание двух типов звездных интерферометров Майкельсона приводится в статьях Майкельсона и Пиза (Michelson, Pease, 1921) и Пиза (Pease, 1925, 1930, 1931).

по крайней мере, в случаях, когда можно допустить, что распределение имеет вращательную симметрию. В частности, Майкельсон показал, что если диск звезды круглый и однородный, то видность, рассматриваемая как функция расстояния d между двумя внешними зеркалами M_1 и M_2, будет иметь нули для определенных расстояний, и что наименьшее расстояние, для которого видность имеет нулевое значение, задается выражением

$$d_0 = \frac{0.61\bar{\lambda}}{\alpha}, \qquad (7.2.1)$$

где $\bar{\lambda}$ — средняя длина волны и α — угловой радиус звезды. Таким образом, из измерений d_0 может быть определен угловой диаметр звезды. Угловые диаметры нескольких звезд до величин порядка 0.02 угловых секунд были впервые определены этим способом с помощью системы, сконструированной и построенной Майкельсоном и Пизом, и завершены в 1920 году. Два подвижных зеркала поддерживались на перекладине длиной 20 футов ($\sim$ 6 метров), которая устанавливалась на 100-дюймовом ($\sim$ 2.5 метров) телескопе в обсерватории Маунт Вильсон в Калифорнии. Результаты, полученные при помощи этого прибора, подытожены в статье (Pease, 1931).

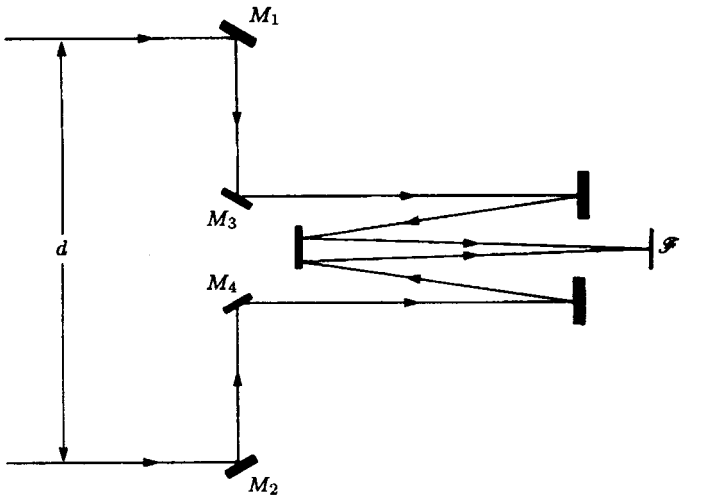


Рис. 7.1. Схема звездного интерферометра Майкельсона

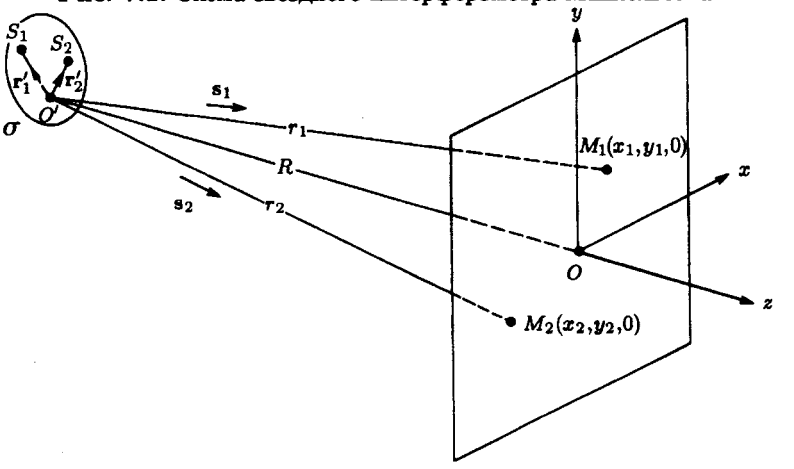


Рис. 7.2. Изображение, иллюстрирующее значение некоторых символов в уравнениях (7.2.3)—(7.2.7). $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ — единичные векторы в направлениях $O'M_1$ и $O'M_2$, соответственно

С точки зрения теории когерентности второго порядка принципы метода могут быть легко поняты. Для того, чтобы сделать анализ как можно проще, мы идеализируем ситуацию, рассматривая звезду в качестве планарного некоррелированного источника σ, перпендикулярного оси телескопа, и считая, что зеркала расположены в плоскости, параллельной плоскости источника. Отсутствие корреляций вдоль источника означает, что взаимная интенсивность $J(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2)$ [(4.3.34)] δ-коррелирована, т.е. для любых двух точек $\mathbf{r}'_1$ и $\mathbf{r}'_2$ на σ (см. рис. 7.2)

$$J(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = I(\mathbf{r}'_1)\delta^{(2)}(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1), \qquad (7.2.2)$$

где $I(\mathbf{r}'_1)$ — средняя интенсивность в $\mathbf{r}'_1$ и $\delta^{(2)}$ — двумерная дельта-функция Дирака. Согласно теореме Ван Циттерта — Цернике для дальней зоны свет, который достигает внешних зеркал M_1 и M_2 интерферометра, будет частично когерентным. Равновременна́я комплексная степень когерентности $j(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2)$ света, падающего на два зеркала, задается выражением (4.4.40), а именно,

$$j(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2) = \mathrm{e}^{i\bar{k}(r_2 - r_1)} \frac{\int_\sigma I(\mathbf{r}')\,\mathrm{e}^{-i\bar{k}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)\cdot\mathbf{r}'}\,d^2r'}{\int_\sigma I(\mathbf{r}')\,d^2r'}. \qquad (7.2.3)$$

В этой формуле r_1 и r_2 — расстояния до зеркал M_1 и M_2 от выбранной на звездном диске σ точки O', $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ — единичные векторы вдоль направлений $O'M_1$ и $O'M_2$ и $\bar{k} = 2\pi/\bar{\lambda}$ — среднее волновое число.

В интегралах в правой части (7.2.3) распределение интенсивности по σ рассматривается как функция радиус-вектора $\mathbf{r}'$, определяющего местонахождение произвольной точки источника S.

Перепишем правую часть выражения (7.2.3) в более явной форме. Мы выберем декартову прямоугольную систему координат OX, OY, OZ с началом в средней точке между двумя зеркалами и с осью OZ вдоль оси телескопа, направленной к телескопу (рис. 7.2). Обозначим через O' точку, в которой (отрицательная) ось z пересекает звездный диск, и обозначим расстояние $\overline{O'O}$ как R. Если $(x_1, y_1, 0)$ и $(x_2, y_2, 0)$ — координаты центров зеркал M_1 и M_2 и (ξ, η) — x- и y-компоненты произвольной точки $\mathbf{r}'$ на звездном диске, то мы имеем

$$\mathbf{s}_l = \left(\frac{x_l}{r_l}, \frac{y_l}{r_l}, \frac{R}{r_l}\right), \tag{7.2.4a}$$

$$r_l = (x_l^2 + y_l^2 + R^2)^{1/2}, \tag{7.2.4б}$$

($l = 1, 2$). Выражение (7.2.3) теперь принимает вид

$$j(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \mathrm{e}^{i\bar{k}(r_2 - r_1)} \frac{\displaystyle\int_\sigma I(\xi, \eta) \exp\left\{i\bar{k}\left[\frac{x_1 - x_2}{R}\xi + \frac{y_1 - y_2}{R}\eta\right]\right\} d\xi\, d\eta}{\displaystyle\int_\sigma I(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}, \tag{7.2.5}$$

где мы записали $j(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ вместо $j(x_1, y_1, x_2, y_2)$, потому что четыре координаты, которые определяют местонахождение зеркал M_1 и M_2, входят в правую часть (7.2.5) только через разности $x_1 - x_2$ и $y_1 - y_2$. Мы также записали $I(\xi, \eta)$ вместо $I(\mathbf{r}')$.

Легко увидеть, что множитель $\exp[i\bar{k}(r_2 - r_1)]$ в правой части (7.2.5) может быть заменен единицей. Мы имеем согласно (7.2.4б)

$$r_l = R\left[\left(\frac{x_l}{R}\right)^2 + \left(\frac{y_l}{R}\right)^2 + 1\right]^{1/2} = R\left[1 + \frac{1}{2}\frac{x_l^2 + y_l^2}{R^2} + O\left(\frac{x_l^2 + y_l^2}{R^2}\right)^2\right], \quad (l = 1, 2), \tag{7.2.6}$$

и, следовательно, при достаточно больших R

$$\bar{k}(r_2 - r_1) \approx \frac{\pi[(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)]}{\bar{\lambda} R}. \tag{7.2.7}$$

В силу того, что выражение в правой части (7.2.7) содержит в знаменателе астрономически большое расстояние R от звезды до поверхности Земли, $\bar{k}(r_2 - r_1)$ будет пренебрежимо мало по сравнению с единицей и, следовательно, $\exp[i\bar{k}(r_2 - r_1)] \approx 1$. Поэтому с этого места и далее мы будем опускать первый экспоненциальный множитель в правой части (7.2.5).

Отношения

$$\frac{\xi}{R} = p, \quad \frac{\eta}{R} = q \tag{7.2.8}$$

могут быть, очевидно, отождествлены с угловыми координатами точки $(\xi, \eta, -R)$ на звездном диске при наблюдении из средней точки между внешними зеркалами интерферометра. Если мы также положим, что

$$I(\xi, \eta) \equiv I(pR, qR) \equiv i(p, q), \tag{7.2.9}$$

где $i(p, q)$ — мера интенсивности по звездному диску как функция угловых переменных p и q, то формула (7.2.5) принимает вид

$$j(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \frac{\displaystyle\int_{\sigma'} i(p, q) \exp\{i\bar{k}[(x_1 - x_2)p + (y_1 - y_2)q]\}\, dp\, dq}{\displaystyle\int_{\sigma'} i(p, q)\, dp\, dq}, \tag{7.2.10}$$

где σ' — область на плоскости p, q, которая соответствует области источника σ на плоскости ξ, η.

Выражение (7.2.10) показывает, что равновременна́я комплексная степень когерентности света, падающего на два внешних зеркала интерферометра, представляет собой нормированный фурье-образ распределения интенсивности по звездному диску. Теперь согласно (4.3.25а) и (4.3.35) абсолютная величина $|j|$ равновременно́й степени когерентности j равна видности интерференционных полос на центральном участке интерференционной картины, образованной светом, достигающим фокальной плоскости $\mathscr{F}$ телескопа. Более того, согласно (4.3.28) фаза j может быть определена из местоположения максимумов интенсивности интерференционной картины. Мы видим, выполнив обратное преобразование Фурье выражения (7.2.10), что распределение нормированной интенсивности по звездному диску может, в принципе, быть определено из измерений видности и местоположения максимумов интенсивности интерференционной картины, образованной в фокальной плоскости $\mathscr{F}$ телескопа. Однако, измерения местоположения максимумов интенсивности почти невозможно выполнить на практике из-за возмущающего действия атмосферы, которое приводит к беспорядочному движению полос. Однако, если можно предположить, что распределение интенсивности $i(p,q)$ по звездному диску имеет вращательную симметрию относительно оси z, то элементарные расчеты по обратному преобразованию Фурье выражения (7.2.10) показывают, что $i(p,q)$ может быть определено даже без знания фазы равновременно́й степени когерентности за исключением некоторых неопределенностей, которые возникают, если j обращается в нуль при некоторых значениях своего аргумента, потому что j тогда становится действительной величиной. Такие неопределенности могут во многих случаях быть устранены из соображений правдоподобия.

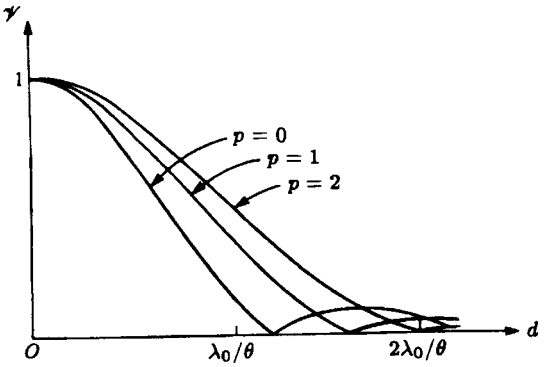


Рис. 7.3. Примеры, иллюстрирующие изменение видности полос $\mathscr{V}$ с изменением расстояния d между внешними зеркалами M_1 и M_2 звездного интерферометра Майкельсона. Предполагается, что источник пространственно некогерентный и круговой с угловым диаметром 2α, с распределением интенсивности по диску, заданным как $I(\theta) = I_0(\alpha^2 - \theta^2)^p$, причем θ означает угловое расстояние от центра диска и I_0 — константа

На рис. 7.3 для некоторых простых модельных источников показаны изменения видности полос с расстоянием d между двумя внешними зеркалами M_1 и M_2 звездного интерферометра Майкельсона. Если мы интересуемся определением только углового размера звезды, а не распределением интенсивности по звездному диску, анализ сильно упрощается. Предположим, например, что звездный диск имеет круговую симметрию относительно O' и однородную интенсивность, т.е. $i(p,q)$ постоянно по диску. Если диск имеет угловой диаметр 2α, стягиваемый на интерферометре, то мы тогда получаем согласно (4.4.44)

$$j(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \frac{2J_1(v)}{v}, \tag{7.2.11}$$

где

$$v = \frac{2\pi\alpha}{\bar{\lambda}} d, \quad d = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}, \tag{7.2.12}$$

J_1 — функция Бесселя первого рода и первого порядка и $\bar{\lambda} = 2\pi/\bar{k}$ — средняя длина волны. Поведение функции $2J_1(v)/v$ показано на рис. 4.13. Ее значение равно единице, когда $v = 0$, и она монотонно уменьшается до нуля при $v = 3.83$; при дальнейшем увеличении v, $2J_1(v)/v$ осциллирует с уменьшающейся амплитудой. Если d_0 обозначает наименьшее значение расстояния d между внешними зеркалами M_1 и M_2, при котором равновременна́я степень когерентности j обращается в нуль, то мы имеем $3.83 = 2\pi\alpha d_0/\bar{\lambda}$, т.е.

$$\alpha = \frac{0.61\bar{\lambda}}{d_0}. \tag{7.2.13}$$

Таким образом, определяя наименьшее расстояние d_0 между внешними зеркалами, при котором полосы в фокальной плоскости телескопа $\mathscr{F}$ исчезают, из (7.2.13) можно определить угловой радиус звезды α. Эта формула находится в согласии с выражением (7.2.1), выведенным Майкельсоном с помощью других рассуждений.

Позднее были построены другие интерферометры, которые используют принципы, заложенные Майкельсоном. Например, в университете Сиднея (Австралия) был построен звездный интерферометр с базой 11.4 м (Davis and Tango, 1985, 1986) как первая ступень к созданию прибора этого типа с очень большой

базой. Он расположен на участке Австралийской национальной лаборатории измерений в Вест Линдсфилде около Сиднея. Другой звездный интерферометр, известный как Инфракрасный пространственный интерферометр, расположен в Маунт Вильсон. Он сконструирован для работы на инфракрасной длине волны около 10 мкм и использует пару подвижных телескопов, каждый из которых состоит из плоского зеркала диаметром 2 м и параболического зеркала диаметром 1.65 м, и он использует гетеродинную систему детектирования сигнала (Bester, Danchi and Towns; Breckinridge, 1990, с. 40).

Было разработано много других методов интерферометрии для использования в оптической астрономии. Выдающимся среди них является метод так называемой спекл-интерферометрии, предложенный Лабейри (Labeyrie, 1970, см. также Dainty, 1984), и метод интерферометрии звездной интенсивности, предложенный Хэнбери Брауном и Твиссом, который будет обсуждаться в разд. 9.10 и 14.6.1. Обзор этих и других методов высокого разрешения, используемых в оптической астрономии, можно найти, например, у Лабейри (Labeyrie, 1976) и Брекинриджа (Breckinridge, 1990).

Мы ограничили наше обсуждение интерферометрами, используемыми в видимом диапазоне оптического спектра. Однако, те же принципы использовались с большим успехом в радиоастрономии, где приборы, аналогичные звездному интерферометру Майкельсона, стали в действительности основным инструментом исследования (см., например, Rohlfs, 1986; Thompson, Moran and Swenson, 1986).

7.3. Интерференционная спектроскопия[1]

7.3.1. Общие принципы

Рассмотрим другой метод Майкельсона, о котором мы говорили в начале этой главы, для определения распределения энергии в спектральных линиях (Michelson, 1891, 1892, 1927). Этот метод используется для определения распределения энергии в спектральных линиях и способен разрешать линии, которые слишком узки для анализа с помощью обычных призменных или решеточных спектрографов. Световой луч разделялся на два луча вблизи точки P_1 в интерферометре Майкельсона (см. рис. 4.1). Лучи совмещаются после того, как между ними достигнута разность пути $c\tau$. Тогда можно определить видность $\mathscr{V}(\tau) \equiv \mathscr{V}(P_1, \tau)$ получающихся интерференционных полос как функцию τ. Майкельсон показал, что из знания видности можно получить информацию об энергетическом распределении спектра света и что, в частности, когда спектр симметричен относительно некоторой частоты ν_0, профиль спектра является фурье-образом видности, за исключением некоторых неопределенностей, которые возникают, если видность имеет нули при некоторых значениях аргумента. Такие неопределенности могут иногда быть устранены с помощью рассуждений правдоподобия. Используя этот метод, Майкельсон обнаружил, что определенные спектральные линии, которые выглядели синглетами при анализе света обычными методами, были в действительности дублетами или мультиплетами, и он смог определить их ширину в некоторых случаях.

Принцип этого метода может опять быть легко понят с помощью теории когерентности второго порядка. Если мы примем, что два луча имеют одинаковые средние интенсивности, то согласно (4.3.25a) видность полос на плоскости наблюдения $\mathscr{P}$ связана с комплексной степенью когерентности света на делителе пучка D, расположенном в точке $P_1(\mathbf{r}_1)$ (см. рис.4.1), с помощью формулы

$$\mathscr{V}(\tau) = |\gamma(\tau)|, \tag{7.3.1}$$

где $\gamma(\tau) \equiv \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau)$ — комплексная степень автокогерентности света в точке P_1 . Представим $\gamma(\tau)$ в виде интеграла Фурье, а именно, как

$$\gamma(\tau) = \int_0^\infty s(\nu)\, \mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\, d\nu. \tag{7.3.2}$$

Согласно (4.3.12a) и (4.3.42a) величина

$$s(\nu) = \frac{S(\nu)}{\displaystyle\int_0^\infty S(\nu)\, d\nu} \tag{7.3.3}$$

представляет собой нормированную спектральную плотность света в P_1.

[1] В качестве дополнительной литературы отметим книгу (*Александров, Хвостенко, Чайка, 1991) — *ред. пер.*

Рассмотрим сначала случай, когда нормированная спектральная плотность симметрична относительно некоторой частоты, скажем, ν_0[1]. Тогда удобно ввести «смещенный» нормированный спектр

$$s_{\text{см}}(\mu) = \begin{cases} s(\nu_0 + \mu), & \text{если } \mu \geqslant -\nu_0, \\ 0, & \text{если } \mu < -\nu_0. \end{cases} \tag{7.3.4}$$

Если в интеграле в правой части (7.3.2) мы сделаем замену переменных ν на $\mu = \nu - \nu_0$ и воспользуемся выражением (7.3.4), то сразу же найдем, что

$$\gamma(\tau) = \gamma_{\text{см}}(\tau)\, e^{-2\pi i \nu_0 \tau}, \tag{7.3.5}$$

где

$$\gamma_{\text{см}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{см}}(\mu)\, e^{-2\pi i \mu \tau}\, d\mu. \tag{7.3.6}$$

В силу того, что $s_{\text{см}}(\mu)$ — четная функция μ, из выражения (7.3.6) следует, что

$$\gamma_{\text{см}}(\tau) = 2 \int_{0}^{\infty} s_{\text{см}}(\mu) \cos(2\pi\mu\tau)\, d\mu. \tag{7.3.7}$$

Выполняя обратное преобразование Фурье выражения (7.3.7), мы получаем следующее выражение для $s_{\text{см}}(\mu)$ через $\gamma_{\text{см}}(\tau)$:

$$s_{\text{см}}(\mu) = 2 \int_{0}^{\infty} \gamma_{\text{см}}(\tau) \cos(2\pi\mu\tau)\, d\tau. \tag{7.3.8}$$

Теперь спектральная плотность $s(\nu)$ и, следовательно, также ее «смещенная» форма $s_{\text{см}}(\mu)$ (7.3.4) становятся действительными. Поэтому согласно (7.3.7) $\gamma_{\text{см}}(\tau)$ должна быть также действительной и, следовательно,

$$\gamma_{\text{см}}(\tau) = \varepsilon(\tau) |\gamma_{\text{см}}(\tau)|, \tag{7.3.9}$$

где $\varepsilon(\tau)$ может принимать значения только $+1$ и -1. Полагая, что $\gamma_{\text{см}}(\tau)$ и, следовательно, также $|\gamma_{\text{см}}(\tau)|$ — непрерывные функции τ, что реализуется на практике, из выражения (7.3.9) мы видим, что функция $\varepsilon(\tau)$ также будет непрерывной, за исключением, может быть, тех значений τ, при которых $\gamma_{\text{см}}(\tau) = 0$. Только при этих частных значениях $\varepsilon(\tau)$ может меняться с $+1$ на -1 и наоборот. Более того, так как нормировка комплексной степени когерентности $\gamma(\tau)$ дает, что $\gamma(0) = 1$, мы получаем из выражений (7.3.5) и (7.3.9), что

$$\varepsilon(0) = +1. \tag{7.3.10}$$

Сначала будем считать, что $\gamma_{\text{см}}(\tau)$ вовсе не имеет нулей, и в этом случае, как мы видим из (7.3.5) и (7.3.1), $\gamma(\tau)$ и $\mathscr{V}(\tau)$ также не будут иметь нулей. Тогда, в силу того, что значение $\varepsilon(\tau)$ не может измениться кроме как в нуле $\gamma_{\text{см}}(\tau)$, мы будем иметь $\varepsilon(\tau) \equiv \varepsilon(0) = +1$ и выражение (7.3.9) сводится к

$$\gamma_{\text{см}}(\tau) = |\gamma_{\text{см}}(\tau)|. \tag{7.3.11}$$

Если мы опять обратимся к выражениям (7.3.5) и (7.3.1), то получим, что теперь $\gamma_{\text{см}}(\tau) = \mathscr{V}(\tau)$, и уравнение (7.3.8) дает

$$s_{\text{см}}(\mu) = 2 \int_{0}^{\infty} \mathscr{V}(\tau) \cos(2\pi\mu\tau)\, d\tau. \tag{7.3.12}$$

Таким образом, мы показали, что *если спектральная плотность симметрична относительно некоторой частоты ν_0 и комплексная степень автокогерентности света и, следовательно, также видность не имеют нулей, профиль нормированной спектральной функции $s_{\text{см}}(\mu)$ равен удвоенному косинус-преобразованию Фурье функции видности полос.* Этот результат проиллюстрирован примером на рис. 7.4.

[1]Благодаря тому, что $\gamma(\tau)$ — аналитический сигнал, $s(\nu) = 0$ для $\nu < 0$. Следовательно, предположение о симметрии означает, что кроме того, что $s(\nu) = 0$ для $\nu > 2\nu_0$, мы пренебрегаем «хвостом» $s(\nu)$ для $\nu < 0$. Ясно, что такое приближение разумно, когда свет квазимонохроматичен, потому что $2\nu_0$ тогда много больше, чем эффективная ширина полосы света.

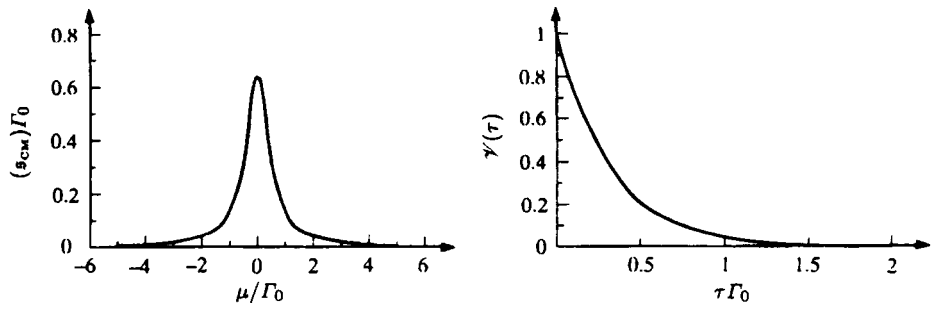


Рис. 7.4. Пример нормированного профиля спектра $s_{см}(\mu)$ и соответствующей функции видности $\mathscr{V}(\tau)$. Профиль спектра является линией Лоренца $s_{см}(\mu) = (\Gamma_0/2\pi)/(\mu^2 + \frac{1}{4}\Gamma_0^2)$, $(\mu \geqslant \nu_0)$, при $2\pi\Gamma_0 = 1.877 \times 10^9\,\text{с}^{-1}$, $\nu_0 = 2.466 \times 10^{15}\,\text{с}^{-1}$ (линия Лаймана). Соответствующая функция видности $\mathscr{V}(\tau) = \exp(-\pi\Gamma_0\tau)$

Далее рассмотрим более сложный случай, когда спектральная плотность все еще симметрична относительно некоторой частоты ν_0, но $\gamma_{см}(\tau)$ становится равным нулю при некоторых значениях τ. Предположим, что $\gamma_{см}(\tau)$ на положительной оси τ обращается в нуль при $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$, $(0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N)$. В этом случае мы, очевидно, получим из выражений (7.3.8) и (7.3.9), если также используем (7.3.5) и (7.3.1), следующее выражение для нормированной функции спектрального профиля:

$$s_{см}(\mu) = 2\int_0^{\tau_1} \mathscr{V}(\tau)\cos 2\pi\mu\tau\, d\tau + 2\sum_{n=1}^{N-1}\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \varepsilon_n \mathscr{V}(\tau)\cos 2\pi\mu\tau\, d\tau + 2\int_{\tau_N}^{\infty} \varepsilon_n \mathscr{V}(\tau)\cos 2\pi\mu\tau\, d\tau, \quad (7.3.13)$$

где каждая из величин ε_n принимает значение $+1$ или -1. Если все нули τ_n, $(n = 1, 2, \ldots, N)$, являются простыми нулями $\gamma_{см}(\tau)$, непрерывность требует, чтобы $\gamma_{см}(\tau)$ меняла знак при прохождении τ через каждый нуль, что означает $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = +1$, $\varepsilon_3 = -1$ и т.д. Если нули не простые, а второго или более высокого порядка, предыдущее рассуждение нужно модифицировать очевидным образом. К сожалению, (как правило, несколько неточное) знание функции видности $\mathscr{V}(\tau) = |\gamma_{см}(\tau)|$, получаемое из измерений, не указывает точно на возможную кратность нулей; но, тем не менее, значения ε_n и, следовательно, $s_{см}(\mu)$ могут иногда быть определены из соображений правдоподобия.

7.3.2. Проблема фазы

Теперь коротко рассмотрим общий случай, когда спектр несимметричен. В этом случае рассуждение, ведущее от выражения (7.3.2) к выражению (7.3.8), больше не применимо. Вместо этого мы поступим следующим образом. Сначала мы выполним обратное преобразование Фурье выражения (7.3.2) и получим формулу

$$s(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\tau)\, e^{2\pi i\nu\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} \gamma(\tau)\, e^{2\pi i\nu\tau}\, d\tau + \int_0^{\infty} \gamma(\tau)\, e^{2\pi i\nu\tau}\, d\tau. \quad (7.3.14)$$

В первом интеграле в правой части (7.3.14) сделаем замену переменных интегрирования τ на $-\tau$ и используем соотношение

$$\gamma(-\tau) = \gamma^*(\tau), \quad (7.3.15)$$

которое следует из определения (4.3.12а) γ и из соотношения (4.3.36). Тогда мы получим для нормированной спектральной плотности выражение

$$s(\nu) = 2\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty} \gamma(\tau)\, e^{2\pi i\nu\tau}\, d\tau, \quad (7.3.16)$$

где Re обозначает действительную часть. Теперь $\gamma(\tau)$ является в общем случае комплексной. Пусть $\psi(\tau)$ является фазой $\gamma(\tau)$, т.е.

$$\gamma(\tau) = |\gamma(\tau)|\, e^{i\psi(\tau)}. \quad (7.3.17)$$

Если мы подставим (7.3.17) в (7.3.16) и воспользуемся тем, что согласно (7.3.1) $|\gamma(\tau)|$ равно функции видности, то получим формулу

$$s(\nu) = 2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \mathscr{V}(\tau)\,\mathrm{e}^{i[\psi(\tau)+2\pi\nu\tau]}\,d\tau. \tag{7.3.18}$$

Эта формула показывает, что функция $s(\nu)$ нормированной спектральной плотности (уже не предполагающаяся симметричной) может быть рассчитана из знания функции $\mathscr{V}(\tau)$ видности полос и фазы $\psi(\tau)$ комплексной степени автокогерентности света. Мы ранее поняли, [ср. (4.3.28)], что $\psi(\tau)$ может быть определена из измерений местоположения максимумов интерференционных полос. Такие измерения, однако, гораздо труднее выполнить, чем измерения функции видности.

Обычно предполагают, следуя обсуждению этого вопроса Рэлеем (Rayleigh, 1892), что измерения видности и положения максимумов интенсивности дают два *независимых* блока информации, так что оба они должны быть получены для определения асимметричного распределения спектра. Однако, недавние исследования, основывающиеся на теории когерентности (Wolf, 1962; Roman and Marathay, 1963; Marathay and Roman, 1964; Dialetis and Wolf, 1967; Dialetis, 1967; Nussenzveig, 1967), показали, что аналитические свойства комплексной степени когерентности накладывают определенные ограничения на фазовую функцию $\psi(\tau)$, которые могут быть связаны с соответствующим модулем $|\gamma(\tau)|$ и, следовательно, с соответствующей кривой видности $\mathscr{V}(\tau)$. Предположим, что $\gamma(\tau)$ квадратично интегрируема, подчиняется условию Палея — Винера (Paley and Wiener, 1934, с. 16, теор. XII)

$$\int_0^\infty \frac{|\ln|\gamma(\tau)||}{\tau^2+1}\,d\tau < \infty \tag{7.3.19}$$

и является непрерывной функцией τ. Тогда можно показать, что $\psi(\tau)$ должна иметь вид (Toll, 1956)

$$\psi(\tau) = \psi_{\min}(\tau) + \psi_{\mathrm{B}}(\tau) - 2\pi\nu_0\tau. \tag{7.3.20}$$

Здесь ν_0 — произвольная неотрицательная постоянная,

$$\psi_{\min}(\tau) = \frac{2\tau}{\pi}P\int_0^\infty \frac{\ln|\gamma(\tau')|}{\tau'^2-\tau^2}\,d\tau', \tag{7.3.21}$$

где P обозначает главное значение интеграла по Коши, взятое при $\tau' = \tau$, и

$$\psi_{\mathrm{B}}(\tau) = \sum_j \arg\frac{\tau-\tau^{(j)}}{\tau-\tau^{(j)*}}, \tag{7.3.22}$$

$\tau^{(j)}$ — нули $\gamma(\tau)$, рассматриваемой как функция комплексного τ в нижней половине, Π^-, комплексной плоскости τ ($\mathrm{Im}\,\tau \leqslant 0$).

Результат, выраженный формулой (7.3.20), трудно доказать строго[1], и мы не будем выводить его здесь. Мы просто коротко покажем происхождение трех слагаемых в выражении (7.3.20) для фазы $\psi(\tau)$ комплексной степени автокогерентности $\gamma(\tau)$.

Ранее мы поняли, что из-за того, что $\gamma(\tau)$ является аналитическим сигналом, она представляет собой граничное значение на действительной оси τ функции, которая является аналитической и регулярной в нижней половине плоскости τ, скажем, Π^- (ср. разд. 3.1.1). Следовательно, функция

$$\ln\gamma(\tau) \equiv \ln|\gamma(\tau)| + i\psi(\tau), \tag{7.3.23}$$

рассматриваемая как функция комплексного τ, также будет аналитической в этой полуплоскости, но она будет иметь точки ветвления в точках $\tau^{(j)}$, $(j = 1, 2, \ldots)$, в которых $\gamma(\tau)$ имеет нулевые значения. Если $\gamma(\tau)$ не имеет нулей ни на Π^-, ни на действительной оси $\mathrm{Im}\,\tau = 0$, то аналитичность $\ln\gamma(\tau)$, как может быть показано с помощью интегральной формулы Коши, приводит к тому, что фаза $\gamma(\tau)$ задается выражением (7.3.21) (ср. Page, 1955, с. 224) для действительных значений τ. Этот вклад известен как *минимальная*

[1] Строгое, хотя и не совсем полное, доказательство было дано в работе (Toll, 1956). См. также (Weaver and Pao, 1981 и Burge, Fiddy, Greenaway and Ross, 1976).

фаза, связанная с $|\gamma(\tau)|$, — терминология, выражающая то обстоятельство, что, как можно легко показать, вклад $\psi_B(\tau)$ в полную фазу в (7.3.20) неотрицателен.

Если $\gamma(\tau)$, рассматриваемая как функция комплексного τ, имеет нули в полуплоскости Π^- или на действительной оси $\operatorname{Im}\tau = 0$, то можно показать, что каждый такой нуль дает вклад в полную фазу $\gamma(\tau)$ в качестве аддитивного слагаемого. Если нули не лежат на действительной оси, их вклад задается выражением под знаком суммирования в правой части (7.3.22). Этот вклад известен как *фаза Блашке*, потому что он является фазой так называемого *множителя Блашке*

$$B_j(\tau) = \frac{\tau - \tau^{(j)}}{\tau - \tau^{(j)*}}, \quad (\operatorname{Im}\tau^{(j)} < 0). \tag{7.3.24}$$

Ясно, что такой множитель — функция, которая является аналитической и регулярной в нижней половине комплексной плоскости τ, имеет единственный нуль в этой полуплоскости в точке $\tau = \tau^{(j)}$ и является унимодулярной на действительной оси τ. Третье аддитивное слагаемое в правой части уравнения (7.3.20), которое линейно по τ, влияет только на абсолютное положение спектрального распределения энергии, а не на его форму (профиль спектра), как легко видеть из теоремы «сдвига» для преобразования Фурье.

Если $\gamma(\tau)$ имеет нули на действительной оси, наши предыдущие предположения о непрерывности $\ln\gamma(\tau)$ больше не справедливы. В этом случае можно показать, что фаза $\psi(\tau)$ задается суммой выражения (7.3.30) и выражения, которое представляет вклад от нулей на оси. Эти вклады могут быть определены методом контурного интегрирования.

Из предыдущего обсуждения очевидно, что фазовая функция $\psi(\tau)$ комплексной степени автокогерентности, которая необходима для однозначной реконструкции спектрального профиля методом Майкельсона, полностью определяется $|\gamma(\tau)|$ (что эквивалентно знанию кривой видности) и положением нулей аналитического продолжения $\gamma(\tau)$ в нижнюю половину комплексной плоскости τ (включая действительную ось $\operatorname{Im}\tau = 0$). К сожалению, положение нулей, которые не расположены на действительной оси τ, не может быть определено, зная $|\gamma(\tau)|$ для действительных значений τ.

Был предложен ряд косвенных методов для определения фазы $\gamma(\tau)$ и нормированного спектра $s(\nu)$ из измерений модуля $\gamma(\tau)$. В одном методе спектр модифицируется при прохождении света через фильтр с экспоненциальным частотным пропусканием (Mehta, 1965), а в другом методе добавляется узкая, почти монохроматичная компонента на некоторой известной частоте (Gamo, 1963, с. 801). Сейчас мы кратко обсудим принципы, лежащие в основе этих методов.

Метод, в котором применяются экспоненциальные фильтры, основан на следующем. Поскольку $\gamma(\tau) \equiv \gamma(\tau_r, \tau_i)$, рассматриваемая как функция комплексной переменной $\tau = \tau_r + i\tau_i$, (τ_r, τ_i действительны), аналитична и регулярна в нижней половине Π^- комплексной плоскости τ ($\tau_i < 0$), ее модуль и фаза связаны следующими дифференциальными уравнениями, которые являются следствиями уравнений Коши — Римана:

$$\frac{\partial|\gamma(\tau_r,\tau_i)|}{\partial\tau_r} = -|\gamma(\tau_r,\tau_i)|\frac{\partial\psi(\tau_r,\tau_i)}{\partial\tau_i}, \quad (\tau_i < 0), \tag{7.3.25а}$$

$$\frac{\partial|\gamma(\tau_r,\tau_i)|}{\partial\tau_i} = |\gamma(\tau_r,\tau_i)|\frac{\partial\psi(\tau_r,\tau_i)}{\partial\tau_r}, \quad (\tau_i < 0). \tag{7.3.25б}$$

Следовательно, если как $|\gamma(\tau)|$, так и ее производная $\partial|\gamma(\tau)|/\partial\tau_i$ известны на действительной оси, фаза $\psi(\tau)$ на действительной оси может быть определена путем интегрирования уравнения (7.3.25б). Тогда для ψ можно получить выражение

$$\psi(\tau_r,0) = \int_0^{\tau_r}\frac{1}{|\gamma(\tau_r',0)|}\left[\frac{\partial|\gamma(\tau_r',\tau_i)|}{\partial\tau_i}\right]_{\tau_i\to-0}d\tau_r' = \left[\int_0^{\tau_r}\frac{\partial\ln|\gamma(\tau_r',\tau_i)|}{\partial\tau_i}\,d\tau_r'\right]_{\tau_i\to-0}. \tag{7.3.26}$$

Задача сводится к экспериментальному определению $|\gamma(\tau_r,\tau_i)|$ вне действительной оси; из этой информации могут быть оценены предельные значения производной $\partial|\gamma(\tau_r',\tau_i)|/\partial\tau_i$ при $\tau_i \to -0$. Для того, чтобы провести такие измерения, можно поступить следующим образом. Предположим, что имеется фильтр с экспоненциальным пропусканием $e^{-2\pi\nu T}$, где T — положительная постоянная, и что световой луч, у которого должно быть определено нормированное распределение спектра $s(\nu)$, проходит через такой фильтр. Выходящий свет имеет модифицированное спектральное распределение

$$s_м(\nu) = Ks(\nu)\,e^{-2\pi\nu T}, \tag{7.3.27}$$

где K — постоянная нормировки, которая представляет собой отношение первоначальной к модифицированной средней интенсивности света. Тогда комплексная степень автокогерентности прошедшего света задается как

$$\gamma_{\text{м}}(\tau_r, 0) = \int_0^\infty s_{\text{м}}(\nu)\, e^{-2\pi i\nu\tau_r}\, d\nu \tag{7.3.28}$$

или, с помощью выражения (7.3.27),

$$\gamma_{\text{м}}(\tau_r, 0) = K \int_0^\infty s(\nu)\, e^{-2\pi i\nu(\tau_r - iT)}\, d\nu = K\gamma(\tau_r, -T), \quad (T > 0). \tag{7.3.29}$$

Эта формула показывает, что измерение $|\gamma_{\text{м}}|$ вдоль действительной оси эквивалентно измерению $|\gamma|$ вне действительной оси τ вдоль линии $\operatorname{Im}\tau = -T$.

Предыдущий анализ показывает, что с помощью экспоненциальных фильтров, т.е. фильтров, которые модифицируют спектр в соответствии с выражением (7.3.27), можно определить фазу ψ комплексной степени автокогерентности вдоль действительной оси из (7.3.26).

Далее рассмотрим другой метод, упоминавшийся ранее, для определения спектра из измерений абсолютного значения комплексной степени автокогерентности. Предположим, что мы создаем другой световой луч, ширина полосы которого, имеющая центр на некоторой частоте ν_1, много меньше, чем эффективная ширина $s(\nu)$. Мы аппроксимируем спектр этого луча выражением $I_1\delta(\nu - \nu_1)$, где $\delta(\nu)$ — дельта-функция Дирака. Мы предположим, что частота ν_1 лежит за пределами эффективного спектрального диапазона $s(\nu)$. Если этот луч (который мы будем называть опорным) совмещается со световым лучом, спектр которого должен быть определен, то (нормированная) спектральная плотность результирующего луча равна

$$s_{\text{общ}}(\nu) = [s(\nu) + \beta\delta(\nu - \nu_1)]/(1 + \beta), \tag{7.3.30}$$

где β — отношение $I_1/\langle I\rangle$ средних интенсивностей света двух составляющих лучей. Поэтому комплексная степень автокогерентности смеси равна

$$\gamma_{\text{общ}}(\tau) = \int_0^\infty s_{\text{общ}}(\nu)\, e^{-2\pi i\nu\tau}\, d\nu = \frac{\gamma(\tau) + \beta\, e^{-2\pi i\nu_1\tau}}{1 + \beta}. \tag{7.3.31}$$

Из выражений (7.3.30) и (7.3.31) следует, что

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty |\gamma_{\text{общ}}(\tau)|^2\, e^{2\pi i\nu\tau}\, d\tau &= \int_0^\infty s_{\text{общ}}(\nu')s_{\text{общ}}(\nu' + \nu)\, d\nu' = \\ &= \frac{1}{(1+\beta)^2}\left\{\int_0^\infty s(\nu')s(\nu' + \nu)\, d\nu' + \beta^2\delta(\nu) + \beta s(\nu_1 + \nu) + \beta s(\nu_1 - \nu)\right\} = \\ &= \frac{1}{(1+\beta)^2}\left\{\int_{-\infty}^\infty |\gamma(\tau)|^2\, e^{2\pi i\nu\tau}\, d\tau + \beta^2\delta(\nu) + \beta s(\nu_1 + \nu) + \beta s(\nu_1 - \nu)\right\}. \end{aligned} \tag{7.3.32}$$

Если определены как $|\gamma_{\text{общ}}(\tau)|$, так и $|\gamma(\tau)|$, можно найти сумму последних двух членов из уравнения (7.3.32). Эти два члена представляют неизвестное спектральное распределение, смещенное на $-\nu_1$, и образ этого распределения, отраженный относительно начала координат. Следовательно $s(\nu)$ может быть выведено из $|\gamma_{\text{общ}}(\tau)|$. Без опорного луча возникала бы существенная неопределенность при реконструкции, потому что степени автокогерентности, связанные с любым спектральным распределением $s(\nu)$ и его зеркальным отображением на некоторой линии $\nu = \nu'$, имеют одинаковые модули.

Две процедуры реконструкции, которые мы только что описали, были экспериментально проверены с определенным успехом (Kohler and Mandel, 1973); и также в связи с обратной задачей, касающейся пространственных, а не временны́х переменных τ.

Были предложены другие методы определения фазы комплексной степени когерентности в контексте как интерференционной спектроскопии, так звездной интерферометрии. Один из них несколько напоминает второй из описанных нами методов, но вместо существенно монохроматичного светового луча в нем используется луч с произвольным, но известным спектром (Mehta, 1968). Другие предложенные методы используют измерения корреляций более высокого порядка, чем второй (например, Gamo, 1963; Beard, 1969).

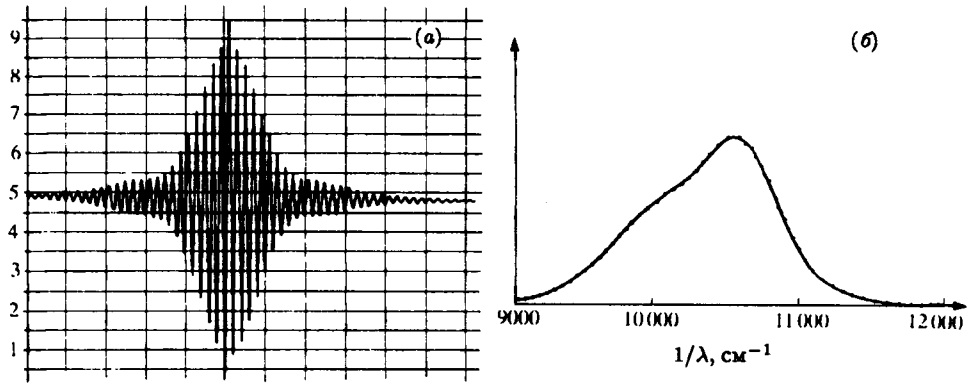


Рис. 7.5. Определение инфракрасного спектра со средней длиной волны $\bar{\lambda} \approx 1$ мкм из интерферограммы: *а* — интерферограмма; *б* — спектр (Connes, 1961a)

Проблема получения фазовой информации из других данных, особенно из измерений интенсивности, имеет место не только в теории оптической когерентности, но и во многих других областях, например, в рентгеновской кристаллографии, электронной микроскопии и распознавании образов. Обзор некоторых методов, используемых для решения таких фазовых задач, дан в статьях Ферверды (Ferwerda, 1978) и Миллане (Millane, 1990).

Метод Майкельсона определения распределения энергии в спектральных линиях из кривых видности позднее был вытеснен в некоторой степени другим интерференционным методом, называемым фурье-спектроскопией (также известным как метод интерферограмм) (Fellgett, 1958a, b; Jacquinot, 1958, 1960; Strong and Vanasse, 1959; Connes, 1961a, b, c, d; Vanasse and Sakai, 1967). Этот метод, который используется, главным образом, в инфракрасном диапазоне спектра, позволяет определить действительную часть $\gamma^{(r)}(\tau)$ комплексной степени автокогерентности $\gamma(\tau)$. Зная $\gamma^{(r)}(\tau)$ как функцию τ, в принципе можно полностью определить нормированную спектральную плотность. Пример показан на рис. 7.5.

7.4. Когерентность поперечных мод лазерного резонатора[1]

Теория резонансных мод в лазерном резонаторе берет свое начало в классических статьях Фокса и Ли (Fox and Li, 1961) и Бойда и Гордона (Boyd and Gordon, 1961). Она была впоследствии расширена и улучшена целым рядом авторов. Теория сыграла центральную роль в лазерной физике и лазерной технике, но будучи основана на монохроматической модели, она не объясняла когерентных свойств мод. Первые попытки прояснить этот вопрос были сделаны Вольфом (Wolf, 1963), Стрейфером (Streifer, 1966), Алленом, Гейтхаузом и Джонсом (Allen, Gatehouse and Jones, 1971) и Гори (Gori, 1980). Более полный анализ, основанный на теории когерентности в пространственно-частотной области, был позднее проведен Вольфом и Агарвалом (Wolf and Agarwal, 1984). В этом разделе мы представим этот анализ когерентных свойств поперечных мод лазерного резонатора.

7.4.1. Условия устойчивости для взаимной спектральной плотности света на зеркале резонатора

Рассмотрим пустой резонатор, состоящий из двух зеркал A и B. Предположим, что свет с некоторым начальным распределением на зеркале A запускается в резонатор. Будем считать, что флуктуации света характеризуются ансамблем, стационарным, по крайней мере, в широком смысле. Обозначим через $W_0(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu)$ взаимную спектральную плотность первоначального распределения света в точках, заданных радиус-векторами $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$ на зеркале A (рис. 7.6). Свет распространяется к зеркалу B, где он отражается и дифрагирует, а часть его возвращается к зеркалу A. После отражения и дифракции на этом зеркале

[1] см. также книгу (*Розанов, 1997) и обзор (*Ораевский, 1994) — *ред. пер.*

часть света распространяется снова к зеркалу B, и процесс продолжается. Обозначим через $W_j(\rho_1, \rho_2, \nu)$ взаимную спектральную плотность света на зеркале A после завершения j циклов $A \to B \to A$.

Согласно (4.7.38) взаимная спектральная плотность W_j может быть представлена в виде

$$W_j(\rho_1, \rho_2, \nu) = \langle U_j^*(\rho_1, \nu) U_j(\rho_2, \nu) \rangle, \tag{7.4.1}$$

где проведено усреднение по ансамблю случайных функций $\{U_j(\rho, \nu)\}$. Благодаря тому, что каждый член этого ансамбля $U_j(\rho, \nu)$ является граничным значением поля, которое удовлетворяет уравнению Гельмгольца

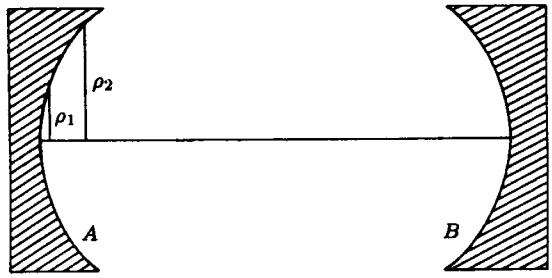


Рис. 7.6. Иллюстрация геометрии и обозначений, относящихся к определению условия состояния устойчивости для взаимной спектральной плотности света в лазерном резонаторе

$$(\nabla^2 + k^2) U_j(\mathbf{r}, \nu) = 0 \tag{7.4.2}$$

($k = 2\pi\nu/c$, c — скорость света в вакууме) в пространстве между двумя зеркалами, U_{j+1} и U_j будут связаны линейным преобразованием, т.е.

$$U_{j+1}(\rho, \nu) = \int_A L(\rho, \rho', \nu) U_j(\rho', \nu)\, d^2\rho', \tag{7.4.3}$$

($j = 0, 1, 2, \ldots$). Здесь $L(\rho, \rho', \nu)$ — пропагатор для распространения монохроматического света с частотой ν из точки ρ' на зеркале A в точку ρ на том же зеркале после единственного отражения и дифракции на другом зеркале B. Приближенное выражение в явной форме для этого пропагатора может быть получено с помощью принципа Гюйгенса — Френеля (см., например, Boyd and Gordon, 1961). Заменяя индекс j на $j + 1$ в (7.4.1), затем подставляя U_{j+1} из выражения (7.4.3) и меняя местами порядок усреднения и интегрирования, мы получим следующее соотношение между взаимными спектральными плотностями W_j и W_{j+1}:

$$W_{j+1}(\rho_1, \rho_2, \nu) = \int_A \int_A L^*(\rho_1, \rho_1', \nu) L(\rho_2, \rho_2', \nu) W_j(\rho_1', \rho_2', \nu)\, d^2\rho_1'\, d^2\rho_2'. \tag{7.4.4}$$

Естественно предположить, что после значительного числа проходов между двумя зеркалами достигается устойчивое состояние в том смысле, что $W_{j+1}(\rho_1, \rho_2, \nu)$ будет равняться $W_j(\rho_1, \rho_2, \nu)$ с неким коэффициентом пропорциональности $\sigma(\nu)$. Этот коэффициент представляет собой потери света из-за дифракции и поглощения за один полный проход ($A \to B \to A$). В более явной форме устойчивое состояние характеризуется требованием, что для существенно больших значений j

$$W_{j+1}(\rho_1, \rho_2, \nu) = \sigma(\nu) W_j(\rho_1, \rho_2, \nu). \tag{7.4.5}$$

В силу того, что «диагональные» значения $W_j(\rho, \rho, \nu)$ и $W_{j+1}(\rho, \rho, \nu)$ представляют собой спектральные плотности, они должны быть действительными и положительными и, следовательно,

$$\sigma(\nu) > 0. \tag{7.4.6}$$

Подставляя W_{j+1} из (7.4.5) в (7.4.4) и опуская индекс j, мы получим уравнение

$$\int_A \int_A W(\rho_1', \rho_2', \nu) L^*(\rho_1, \rho_1', \nu) L(\rho_2, \rho_2', \nu)\, d^2\rho_1'\, d^2\rho_2' = \sigma(\nu) W(\rho_1, \rho_2, \nu). \tag{7.4.7}$$

Это уравнение является интегральным уравнением для граничных значений мод $W(\rho_1, \rho_2, \nu)$ взаимной спектральной плотности на зеркале A, которые может поддерживать резонатор, т.е. это уравнение для граничных значений взаимных спектральных плотностей, связанных с модами лазерного резонатора.

Мы подробно рассмотрели распределение света на зеркале A, но точно такие же результаты применимы, конечно, к свету на другом зеркале B.

7.4.2. Природа решений интегрального уравнения (7.4.7)

Для того, чтобы объяснить природу решений уравнения (7.4.7), мы разложим (неэрмитов) пропагатор $L(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu)$ в биортогональный ряд (Morse and Feshbah, 1953, с. 884–886)[1].

$$L(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu) = \sum_n \alpha_n(\nu)\phi_n(\boldsymbol{\rho}_1, \nu)\chi_n^*(\boldsymbol{\rho}_2, \nu). \tag{7.4.8}$$

Здесь $\alpha_n(\nu)$ и $\phi_n(\boldsymbol{\rho}, \nu)$ — собственные значения и собственные функции, соответственно, интегрального уравнения Фредгольма

$$\int_A L(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu)\phi_n(\boldsymbol{\rho}_2, \nu)\, d^2\rho_2 = \alpha_n(\nu)\phi_n(\boldsymbol{\rho}_1, \nu) \tag{7.4.9}$$

и $\beta_n(\nu)$ и $\chi_n(\boldsymbol{\rho}, \nu)$ — собственные значения и собственные функции соответствующего интегрального уравнения Фредгольма, ядро которого сопряжено с L, а именно,

$$\int_A L^*(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_1, \nu)\chi_n(\boldsymbol{\rho}_2, \nu)\, d^2\rho_2 = \beta_n(\nu)\chi_n(\boldsymbol{\rho}_1, \nu). \tag{7.4.10}$$

Ядро $L(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu)$ для лазерных резонаторов определено на конечной области A и является для каждого ν непрерывной функцией обеих пространственных переменных $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$. Известно, что для ядер такого типа существуют следующие теоремы[2]:

(а) Каждому собственному значению α_n уравнения (7.4.9) соответствует собственное значение уравнения (7.4.10), и

$$\beta_n = \alpha_n^*. \tag{7.4.11}$$

Более того, ранги (степени вырождения) α_n и β_n одинаковы.

(б) Соответствующие собственные функции двух уравнений являются при подходящей нормировке ортонормированными в области A, т.е.

$$\int_A \phi_n^*(\boldsymbol{\rho}, \nu)\chi_m(\boldsymbol{\rho}, \nu)\, d^2\rho = \delta_{nm}, \tag{7.4.12}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера.

Подставим уравнение (7.4.8) в уравнение (7.4.7) и поменяем местами порядок интегрирования и суммирования. Тогда мы получим соотношение

$$\sum_n \sum_m \alpha_n^*(\nu)\alpha_m(\nu)w_{nm}(\nu)\phi_n^*(\boldsymbol{\rho}_1, \nu)\phi_m(\boldsymbol{\rho}_2, \nu) = \sigma(\nu)W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \nu), \tag{7.4.13}$$

где

$$w_{nm} = \int_A \int_A W(\boldsymbol{\rho}_1', \boldsymbol{\rho}_2', \nu)\chi_n(\boldsymbol{\rho}_1', \nu)\chi_m^*(\boldsymbol{\rho}_2', \nu)\, d^2\rho_1' d^2\rho_2'. \tag{7.4.14}$$

Далее умножим обе части уравнения (7.4.13) на $\chi_N(\boldsymbol{\rho}_1, \nu)\chi_M^*(\boldsymbol{\rho}_2, \nu)$, проинтегрируем по $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$ и воспользуемся соотношениями биортогональности (7.4.12) и выражением (7.4.14) для w_{nm}. Тогда можно получить соотношение

$$\sum_n \sum_m \alpha_n^*(\nu)\alpha_m(\nu)w_{nm}(\nu)\delta_{nN}\delta_{mM} = \sigma(\nu)w_{NM}(\nu), \tag{7.4.15}$$

из которого следует, что

$$[\sigma(\nu) - \alpha_N^*(\nu)\alpha_M(\nu)]w_{NM}(\nu) = 0 \quad \text{(нет суммирования)}. \tag{7.4.16}$$

[1] Ряд (7.4.8) не следует путать с так называемым разложением Шмидта, которое является биортогональным в другом смысле и также использовалось в теории лазерных мод резонатора.

[2] Доказательства этих результатов для одномерного случая см. у Смитиеса (Smithies, 1970), теоремы 6.7.3 и 6.7.4.

Уравнение (7.4.16) означает, что либо $w_{NM}(\nu)=0$, либо $\sigma(\nu)=\alpha_N^*(\nu)\alpha_M(\nu)$. Первый случай ($w_{NM}=0$) не представляет здесь интереса, потому что соответствующий член при $n=N$, $m=M$ не вносит вклада в двойную сумму в левой части уравнения (7.4.13). Другое решение означает, что собственные значения интегрального уравнения (7.4.7) равны

$$\sigma_{NM}(\nu)=\alpha_N^*(\nu)\alpha_M(\nu). \tag{7.4.17}$$

Мы теперь должны рассмотреть два случая.

(а) $\sigma_{NM}(\nu)$ невырождено

Предположим сначала, что $\sigma_{NM}(\nu)$ не вырождено в том смысле, что не существует другой пары $\alpha_{N'}(\nu)$ и $\alpha_{M'}(\nu)$ собственных значений интегрального уравнения (7.4.9), для которой $\alpha_{N'}^*(\nu)\alpha_{M'}(\nu)=\alpha_N^*(\nu)\alpha_M(\nu)$, т.е. мы считаем, что

$$\alpha_N^*\alpha_M\neq\alpha_{N'}^*\alpha_{M'}\quad\text{для всех }\alpha_{N'}\neq\alpha_N,\ \alpha_{N'}\neq\alpha_M,\ \alpha_{M'}\neq\alpha_M,\ \alpha_{M'}\neq\alpha_N. \tag{7.4.18}$$

Формула (7.4.16) тогда означает, что при частной реализации

$$\sigma_{kl}(\nu)=\alpha_k^*(\nu)\alpha_l(\nu) \tag{7.4.19}$$

невырожденного собственного значения основного интегрального уравнения (7.4.7) $w_{NM}=0$, если только не $k=N$ и $l=M$. Тогда разложение (7.4.13) сводится к единственному слагаемому

$$W(\rho_1,\rho_2,\nu)=w_{kl}\phi_k^*(\rho_1,\nu)\phi_l(\rho_2,\nu). \tag{7.4.20}$$

В силу того, что взаимная спектральная плотность является эрмитовой [(4.3.43)], из выражения (7.4.20) следует, что

$$w_{kl}\phi_k^*(\rho_2,\nu)\phi_l(\rho_1,\nu)=w_{kl}^*\phi_k(\rho_1,\nu)\phi_l^*(\rho_2,\nu), \tag{7.4.21}$$

т. е. что

$$\frac{\phi_l(\rho_1,\nu)}{\phi_k(\rho_1,\nu)}=\frac{w_{kl}^*}{w_{kl}}\frac{\phi_l^*(\rho_2,\nu)}{\phi_k^*(\rho_2,\nu)}. \tag{7.4.22}$$

Для каждой частоты ν левая часть уравнения (7.4.22) является функцией только ρ_1, в то время как правая часть является функцией только ρ_2. Это возможно только, если каждая часть не зависит от пространственных переменных. Если мы обозначим каждую часть уравнения (7.4.22) как $\Omega_{kl}(\nu)$, то получим, что

$$\phi_l(\rho,\nu)=\Omega_{kl}(\nu)\phi_k(\rho,\nu), \tag{7.4.23}$$

и при использовании этого соотношения выражение (7.4.20) принимает вид

$$W(\rho_1,\rho_2,\nu)=w_{kl}\Omega_{kl}\phi_k^*(\rho_1,\nu)\phi_k(\rho_2,\nu). \tag{7.4.24}$$

Далее мы подставим выражение (7.4.24) в (7.4.14). Тогда получим следующее выражение для w_{nm}:

$$w_{nm}=w_{kl}\Omega_{kl}\int_A\phi_k^*(\rho_1',\nu)\chi_n(\rho_1',\nu)\,d^2\rho_1'\int_A\phi_k(\rho_2',\nu)\chi_m^*(\rho_2',\nu)\,d^2\rho_2'. \tag{7.4.25}$$

Если мы воспользуемся соотношением биортогональности (7.4.12), то выражение (7.4.25) для w_{nm} сразу же сводится к

$$w_{nm}=w_{kl}\Omega_{kl}\delta_{kn}\delta_{km}, \tag{7.4.26}$$

из которого следует, что

$$w_{nm}=0,\quad\text{если не } n=m=k \tag{7.4.27}$$

и что

$$w_{kk}=w_{kl}\Omega_{kl}. \tag{7.4.28}$$

Если мы воспользуемся соотношением (7.4.28) в уравнении (7.4.24), то увидим, что решения интегрального уравнения (7.4.7) задаются как

$$W^{(k)}(\rho_1, \rho_2, \nu) = \lambda^{(k)}(\nu)\phi_k^*(\rho_1, \nu)\phi_k(\rho_2, \nu), \tag{7.4.29}$$

где

$$\lambda^{(k)}(\nu) = w_{kk}(\nu); \tag{7.4.30}$$

и если мы воспользуемся выражением (7.4.19), то легко найдем, что соответствующие собственные значения равны

$$\sigma^{(k)}(\nu) = \alpha_k^*(\nu)\alpha_k(\nu). \tag{7.4.31}$$

Коэффициент пропорциональности $\lambda^{(k)}$ в правой части уравнения (7.4.29) зависит от нормировки. Нормируем ϕ_k таким образом, что

$$\int_A |\phi_k(\rho, \nu)|^2 \, d^2\rho = 1. \tag{7.4.32}$$

Правая часть (7.4.29) может быть тогда отождествлена с разложением Мерсера $W^{(k)}$ [ср. (4.7.9)], которое теперь состоит из единственного слагаемого. Этот результат означает, что каждое решение нашего интегрального уравнения также является модой в смысле теории представления по когерентным модам статистических волновых полей, которую мы обсуждали в разд. 4.7. Физический смысл $\lambda^{(k)}$ тогда может быть легко понят из следующего рассмотрения. В силу того, что $W^{(k)}(\rho, \rho, \nu)$ представляет собой спектральную плотность моды k в точке ρ на зеркале A, мы получаем согласно (7.4.29)

$$S^{(k)}(\rho, \nu) \equiv W^{(k)}(\rho, \rho, \nu) = \lambda^{(k)}(\nu)|\phi_k(\rho, \nu)|^2. \tag{7.4.33}$$

Интегрируя обе части уравнения (7.4.33) по площади зеркала A и используя выражение (7.4.32), мы получаем соотношение

$$\int_A S^{(k)}(\rho, \nu) \, d^2\rho = \lambda^{(k)}(\nu). \tag{7.4.34}$$

Следовательно, $\lambda^{(k)}(\nu)$ представляет собой спектр k-ой моды, проинтегрированный по площади зеркала A, и является мерой скорости, с которой энергия на частоте ν распространяется в устойчивом состоянии от зеркала A в резонансную полость.

Интегральное уравнение (7.4.9) для функций $\phi_n(\rho, \nu)$, входящих в выражение (7.4.29), является в точности интегральным уравнением обычной (монохроматической) теории лазерных мод резонатора Фокса и Ли (Fox and Li, 1961) и Бойда и Гордона (Boyd and Gordon, 1961), на которую мы ссылались в начале этого раздела. Мы можем поэтому назвать функции $\phi_n(\rho, \nu)$ *модами Фокса — Ли*, и, как видно из предыдущего анализа, они имеют более широкий смысл, чем это могло бы показаться из того способа, которым они были первоначально введены.

В силу того, что каждое решение (7.4.29) интегрального уравнения (7.4.7) для устойчивого распределения взаимной спектральной плотности на зеркале A факторизуется по отношению к пространственным переменным ρ_1 и ρ_2, его спектральная степень когерентности на частоте ν [(4.3.37)], а именно,

$$\mu^{(k)}(\rho_1, \rho_2, \nu) = \frac{W^{(k)}(\rho_1, \rho_2, \nu)}{[W^{(k)}(\rho_1, \rho_1, \nu)]^{1/2}[W^{(k)}(\rho_2, \rho_2, \nu)]^{1/2}}, \tag{7.4.35}$$

является унимодулярной. Этот результат означает (см. разд. 4.5.3), что каждое решение (7.4.29) является взаимной спектральной плотностью распределения поля, которое полностью пространственно когерентно на частоте ν на всей поверхности зеркала A. Таким образом, показано, что если нет вырождения, т.е. если требование (7.4.18) удовлетворяется, то интегральное уравнение (7.4.7) приводит лишь к такому решению, которое описывает свет, являющийся пространственно полностью когерентным на любой частоте ν.

Согласно анализу из разд. 4.5.3 факторизация взаимной спектральной плотности на произведение двух функций, каждая из которых зависит только от одной из двух пространственных переменных, является необходимым и достаточным условием для полной пространственной когерентности в пространственно-частотной области. Следовательно, если лазер работает на более, чем одной поперечной моде, выход не может быть пространственно полностью когерентным по поверхности зеркала, и это заключение подтверждается экспериментом (Bertolotti, Daino, Gori and Sette, 1965).

До сих пор частота ν оставалась несколько произвольной. Естественно предположить, что когда лазер работает в устойчивом состоянии, интегральное уравнение (7.4.7) будет справедливо для каждой частотной компоненты, которая присутствует на выходе лазера. Тогда мы получим, производя преобразование Фурье уравнения (7.4.29), что функция взаимной когерентности (4.3.40а) моды лазерного резонатора задается как

$$\Gamma^{(k)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)=\int_0^\infty \lambda^{(k)}(\nu)\phi_k^*(\boldsymbol{\rho}_1,\nu)\phi_k(\boldsymbol{\rho}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu. \tag{7.4.36}$$

Заметим, что в отличие от комплексной степени пространственной когерентности $\mu^{(k)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\nu)$ комплексная степень когерентности в пространственно-временно́й области $\gamma^{(k)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)$ [(4.3.12а)] каждой моды, а именно,

$$\gamma^{(k)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)=\frac{\Gamma^{(k)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)}{[\Gamma^{(k)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_1,0)]^{1/2}[\Gamma^{(k)}(\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_2,0)]^{1/2}}, \tag{7.4.37}$$

не унимодулярна для всех значений своих аргументов. Действительно, $\gamma^{(k)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)\to 0$ при $|\tau|\to\infty$ из-за эргодичности (ср. разд. 2.2.2) оптического поля. Однако, при обычных обстоятельствах, когда $|\tau|$ много меньше, чем время когерентности света, $|\gamma^{(k)}|$ будет, вообще говоря, отличаться от единицы на ничтожно малую величину для всех положений двух точек, заданных с помощью $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$ на зеркалах резонатора.

Рассмотрим теперь кратко ситуацию, которую мы до сих пор исключали, а именно, когда

(б) $\sigma_{NM}(\nu)$ вырождено

В этом случае будут существовать такие собственные значения $\alpha_{N'}$ и $\alpha_{M'}$, что

$$\alpha_N^*\alpha_M=\alpha_{N'}^*\alpha_{M'},\quad \alpha_{N'}\neq\alpha_N,\quad \alpha_{N'}\neq\alpha_M,\quad \alpha_{M'}\neq\alpha_M,\quad \alpha_{M'}\neq\alpha_N. \tag{7.4.38}$$

Вместо уравнения (7.4.20) мы теперь получаем

$$W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\nu)=\sum_k\sum_l c_{kl}(\nu)\phi_k^*(\boldsymbol{\rho}_1,\nu)\phi_l(\boldsymbol{\rho}_2,\nu), \tag{7.4.39}$$

где c_{kl} — константы. Эти константы должны удовлетворять ограничению $c_{lk}(\nu)=c_{kl}^*(\nu)$, которое следует из того, что взаимная спектральная плотность является эрмитовой [см. (4.3.43)]. Диагонализуем матрицу $\mathbf{C}=[c_{kl}(\nu)]$ с помощью унитарной матрицы $\mathbf{U}=[u_{kl}]$. Тогда $\mathbf{C}=\mathbf{U}^\dagger\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}$, где $\mathbf{\Lambda}=[\Lambda_k]$ — диагональная матрица. Мы также нормируем ϕ_k в соответствии с уравнением (7.4.32). Вырожденное решение (7.4.39) нашего основного интегрального уравнения (7.4.7) принимает форму разложения Мерсера

$$W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\nu)=\sum_k \Lambda_k(\nu)f_k^*(\boldsymbol{\rho}_1,\nu)f_k(\boldsymbol{\rho}_2,\nu), \tag{7.4.40}$$

где

$$f_k(\boldsymbol{\rho},\nu)=\sum_l u_{kl}(\nu)\phi_l(\boldsymbol{\rho},\nu). \tag{7.4.41}$$

Из-за того, что решение (7.4.40) не факторизуется по отношению к пространственным переменным $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$, поле на зеркале A больше не является полностью когерентным[1].

Из уравнения (7.4.40) мы теперь получим для спектральной плотности вырожденной моды в точке $\boldsymbol{\rho}$ зеркала A следующее выражение вместо (7.4.33)

$$S(\boldsymbol{\rho},\nu)\equiv W(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},\nu)=\sum_k \Lambda_k(\nu)|f_k(\boldsymbol{\rho},\nu)|^2; \tag{7.4.42}$$

и вместо (7.4.36) мы получаем следующее выражение для функции взаимной когерентности

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)=\sum_k\int_0^\infty \Lambda_k(\nu)f_k^*(\boldsymbol{\rho}_1,\nu)f_k(\boldsymbol{\rho}_2,\nu)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu. \tag{7.4.43}$$

[1] Свойства пространственной когерентности таких вырожденных решений для идеального плоскопараллельного резонатора Фабри — Перо изучались Фрайбергом и Туруненом (Friberg and Turunen, 1994).

7.5. Диэлектрический отклик и спектр индуцированной поляризации во флуктуирующей среде[1]

В качестве другого применения теории когерентности второго порядка мы теперь выведем некоторые формулы, относящиеся к макроскопическому отклику флуктуирующей во времени среды (детерминированному или случайному) на электрическое поле. В разд. 7.6 мы воспользуемся ими при рассмотрении рассеяния электромагнитных волн.

7.5.1. Среда, макроскопические свойства которой не изменяются со временем

Для начала вспомним некоторые стандартные результаты, относящиеся к электромагнитному полю в линейной, пространственно недиспергирующей среде[2], макроскопические свойства которой не зависят от времени. В каждой точке $\mathbf{r}$ среды (для простоты $\mathbf{r}$ не показано в явной форме как аргумент различных величин, например, $\mathbf{E}$, $\mathbf{P}$, η, N и α) фурье-образы

$$\tilde{\mathbf{E}}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,dt, \tag{7.5.1a}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(t)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,dt \tag{7.5.1б}$$

действительного электрического поля $\mathbf{E}(t)$ и индуцированной действительной поляризации $\mathbf{P}(t)$ связаны основополагающим соотношением вида

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \tilde{\eta}(\omega)\tilde{\mathbf{E}}(\omega), \tag{7.5.2}$$

где $\tilde{\eta}(\omega)$ — диэлектрическая восприимчивость (которая, вообще говоря, представляет собой тензор). Разумеется, справедливо также аналогичное соотношение между фурье-образами магнитного поля и индуцированной намагниченности. Сосредоточим наше обсуждение на отклике среды только на электрическое поле. Для простоты мы также ограничимся изотропной средой. Диэлектрическая восприимчивость тогда является скаляром.

Из микроскопической теории известно, что для многих сред $\tilde{\eta}(\omega)$ может быть выражена через среднее число молекул N на единицу объема и среднюю поляризуемость $\alpha(\omega)$ каждой молекулы в виде

$$\tilde{\eta}(\omega) = N\alpha(\omega)\left[1 - \frac{4\pi}{3}N\alpha(\omega)\right]^{-1}. \tag{7.5.3}$$

Это хорошо известное соотношение Лорентц — Лоренца, чаще записываемое в альтернативной, но эквивалентной форме (Born and Wolf, 1980, разд. 2.3.3)

$$\frac{4\pi}{3}N\alpha(\omega) = \frac{n^2(\omega) - 1}{n^2(\omega) + 2}, \tag{7.5.3a}$$

в которой используется показатель преломления среды $n(\omega)$, а не диэлектрическая восприимчивость $\tilde{\eta}(\omega)$. Эквивалентность следует из соотношения $n^2(\omega) = 1 + 4\pi\tilde{\eta}(\omega)$. Частотная зависимость поляризуемости $\alpha(\omega)$ может быть рассчитана из осцилляторной модели Лоренца среды (Born and Wolf, 1980, разд. 2.3.4).

Выполним преобразование Фурье выражения (7.5.2) и используем тот факт, что отклик среды должен быть причинным. Тогда мы получим следующее основополагающее соотношение, справедливое во временно́й области

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{t} \eta(t - t')\mathbf{E}(t')\,dt' \tag{7.5.4a}$$

[1] Анализ в этом разделе следует в основном рассмотрению Манделя и Вольфа (Mandel and Wolf, 1973). [В качестве дополнительной литературы можно рекомендовать обзор (Желудев, 1990) — *ред. пер.*]

[2] Пространственно недиспергирующая среда — это среда, отклик которой на приложенное электромагнитное поле является локальным, т.е. индуцированная поляризация $\mathbf{P}$ и индуцированная намагниченность $\mathbf{M}$ в точке $\mathbf{r}$ среды зависят от значений электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитного поля $\mathbf{H}$ только в этой точке.

или, что эквивалентно,

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \eta(t')\mathbf{E}(t-t')\,dt', \tag{7.5.4б}$$

где

$$\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\eta}(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,d\omega. \tag{7.5.5}$$

Тот факт, что в уравнении (7.5.4а) η зависит от t и t' только через разность $t-t'$ является отражением допущения, что макроскопические свойства среды не зависят от времени. В силу того, что как $\mathbf{P}(t)$, так и $\mathbf{E}(t)$ действительны, $\eta(\tau)$ также должна быть действительной, и $\eta(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ из-за принципа причинности.

7.5.2. Среда, макроскопические свойства которой зависят от времени детерминированным образом

Предположим теперь, что макроскопические свойства среды меняются с течением времени, но что отклик остается линейным и пространственно недиспергированным. Будем также полагать, что эти изменения являются детерминированными. Эта ситуация возникает, например, если через сосуд, наполненный покоящейся жидкостью, проходит монохроматическая волна сжатия. Тогда вместо выражения (7.5.4б) мы получим общее линейное соотношение причинности

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \eta(t;t')\mathbf{E}(t-t')\,dt', \tag{7.5.6}$$

в котором функция отклика $\eta(t;t')$ зависит от двух аргументов. Ее зависимость от второго аргумента t' характеризует отклик среды на достаточно короткий импульс электромагнитного излучения.

Для того чтобы достигнуть некоторого понимания обобщенной функции восприимчивости $\eta(t;t')$, выполним преобразование Фурье по второму аргументу

$$\hat{\eta}(t;\omega') = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \eta(t;t')\,\mathrm{e}^{i\omega' t'}\,dt'. \tag{7.5.7}$$

Теперь учтем, что когда отклик среды не зависит от времени, обычная восприимчивость $\tilde{\eta}(\omega)$ связана с (независящей от времени) плотностью N уравнением (7.5.3). Когда среда флуктуирует, N является функцией времени, скажем, $N(t)$, и если флуктуации не слишком быстрые, то можно ожидать, что правая часть уравнения (7.5.3) будет представлять собой зависящее от времени $\hat{\eta}(t;\omega')$ обобщение $\tilde{\eta}(\omega)$, т.е. что

$$\hat{\eta}(t;\omega') = N(t)\alpha(\omega')\left[1 - \frac{4\pi}{3}N(t)\alpha(\omega')\right]^{-1}. \tag{7.5.8}$$

Хотя область применимости этого уравнения может быть определена только из микроскопических соображений, здесь мы проясняем физический смысл диэлектрической восприимчивости, которая зависит от двух, а не от одного временного аргумента.

В качестве иллюстрации предыдущих результатов, рассмотрим ситуацию, когда монохроматическое поле с частотой ω_0 взаимодействует со средой. Тогда

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2}[\mathbf{a}\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t} + \mathbf{a}^*\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t}], \tag{7.5.9}$$

где вектор $\mathbf{a}$ не зависит от времени. Тогда из выражений (7.5.9), (7.5.6) и (7.5.7) следует, что индуцированная поляризация $\mathbf{P}(t)$ определяется выражением

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{2}[\hat{\eta}(t;\omega_0)\mathbf{a}\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t} + \hat{\eta}^*(t;\omega_0)\mathbf{a}^*\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t}], \tag{7.5.10}$$

где было использовано соотношение

$$\hat{\eta}(t;-\omega_0) = \hat{\eta}^*(t;\omega_0), \tag{7.5.11}$$

которое является следствием действительности параметра $\eta(t;t')$. Из (7.5.10) следует, что фурье-образ $\tilde{\mathbf{P}}(\omega)$ поляризации $\mathbf{P}(t)$ имеет вид

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \frac{1}{2}[\bar{\eta}(\omega-\omega_0;\omega_0)\mathbf{a} + \bar{\eta}^*(-\omega-\omega_0;\omega_0)\mathbf{a}^*], \tag{7.5.12}$$

где

$$\bar{\eta}(\omega;\omega_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\eta}(t;\omega_0)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,dt \tag{7.5.13}$$

или, с учетом (7.5.7),

$$\bar{\eta}(\omega;\omega_0) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\mathrm{e}^{i\omega t}\int_0^{\infty}dt'\,\eta(t;t')\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t'}. \tag{7.5.14}$$

Выражение (7.5.12) показывает, что когда электрическое поле монохроматично с частотой ω_0, спектр Фурье индуцированной поляризации состоит из двух отдельных вкладов от спектра восприимчивости с центральными частотами $\omega = \pm\omega_0$.

Наконец, запишем следующее соотношение, которое следует из выражений (7.5.11) и (7.5.13):

$$\bar{\eta}(-\omega,-\omega_0) = \bar{\eta}^*(\omega,\omega_0). \tag{7.5.15}$$

7.5.3. Среда, макроскопические свойства которой случайным образом меняются во времени

Рассмотрим ситуацию, когда флуктуируют как падающее электрическое поле, так и физические свойства среды, и эти флуктуации не детерминированы. Флуктуации электрического поля могут возникать из-за движения или столкновения излучающих атомов, которые генерируют поле. Флуктуации физических свойств среды могут быть вызваны изменениями температуры или давления, а также другими причинами. Будем считать, что $\mathbf{E}(t)$ и $\hat{\eta}(t;\omega')$ — случайные процессы, которые являются стационарными, по крайней мере, в широком смысле. Мы также предположим, что эти два процесса статистически независимы, что с хорошей степенью точности имеет место в случае, когда влияние электрического поля $\mathbf{E}(t)$ на флуктуации восприимчивости пренебрежимо мало. В большинстве случаев, представляющих практический интерес, временны́е масштабы изменения $\eta(t;t')$ по отношению к t и t' совершенно различны. Изменения по t, будучи связанными с тепловыми флуктуациями, обычно заключены в ширине полосы в несколько МГц (часто кГц) около нулевой частоты, тогда как изменения по t', связанные с оптическими переходами между атомными состояниями, центрированы на частотах в диапазоне около 10^{14}–10^{15} Гц и могут иметь ширину полосы порядка 100 МГц. Однако, для микроволновых переходов и быстро флуктуирующей среды два частотных диапазона могут приближаться друг к другу и даже перекрываться.

Изучим теперь, как связаны тензоры спектральной плотности электрического поля и индуцированной поляризации. Проще всего это можно сделать следующим образом. Сначала мы представим вектор электрического поля в выражении (7.5.6) в виде (обобщенного) интеграла Фурье и воспользуемся выражением (7.5.7). Тогда получим следующее выражение для индуцированной поляризации

$$\mathbf{P}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{\eta}(t;\omega')\tilde{\mathbf{E}}(\omega')\,\mathrm{e}^{-i\omega' t}\,d\omega'. \tag{7.5.16}$$

Можно легко вывести из этой формулы или, что еще проще, из выражения (7.5.6), что случайный процесс $\mathbf{P}(t)$ точно так же, как $\hat{\eta}(t;\omega')$ и $\mathbf{E}(t)$, стационарен, по крайней мере, в широком смысле.

Заметим, что если падающее поле квазимонохроматично с центральной частотой ω_0 и $\eta(t;\omega')$ меняется медленно с ω' в окрестности $\omega' = \omega_0$, то выражение (7.5.16) может быть аппроксимировано как

$$\mathbf{P}(t) = \hat{\eta}(t;\omega_0)\mathbf{E}(t). \tag{7.5.17}$$

Данное соотношение часто используют, не принимая во внимание тот факт, что $\hat{\eta}$ зависит не только от времени, но и от частоты. Это может быть оправдано, когда эффективные частоты электрического поля не слишком близки к резонансной области среды. Если это не так, необходимо учитывать зависимость $\hat{\eta}$ от частоты (ср. Wolf and Foley, 1989, разд. II).

Из (7.5.16) следует, что тензор корреляции индуцированной поляризации определяется формулой

$$\langle P_j(t)P_k(t+\tau)\rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{\eta}^*(t;\omega_1')\hat{\eta}(t+\tau;\omega_2')\rangle \langle \widetilde{E}_j^*(\omega_1')\widetilde{E}_k(\omega_2')\rangle \, \mathrm{e}^{i\omega_1' t_e - i\omega_2'(t+\tau)}\, d\omega_1'\, d\omega_2', \tag{7.5.18}$$

где индексы j, k ($j = 1,2,3$, $k = 1,2,3$) обозначают декартовы компоненты, а угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю. Здесь мы воспользовались тем, что случайные процессы $\hat{\eta}(t;\omega)$ и $\mathbf{E}(t)$ по предположению статистически независимы. Вспомним соотношение [(6.6.1а) в несколько другой записи]

$$\langle \widetilde{E}_j^*(\omega_1')\widetilde{E}_k(\omega_2')\rangle = W_{jk}^{(E)}(\omega_1')\delta(\omega_1' - \omega_2'), \tag{7.5.19}$$

которое определяет тензор спектральной плотности $W_{jk}^{(E)}$ электрического поля. Если воспользоваться этим соотношением в (7.5.18), то выражение для тензора корреляций индуцированной поляризации сводится к

$$\langle P_j(t)P_k(t+\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{\eta}^*(t;\omega')\hat{\eta}(t+\tau;\omega')\rangle W_{jk}^{(E)}(\omega')\, \mathrm{e}^{-i\omega'\tau}\, d\omega', \tag{7.5.20}$$

где мы опустили индекс 1 у ω_1'.

Определим спектральную плотность $W^{(\hat{\eta})}(\omega;\omega')$ через $\hat{\eta}(t;\omega')$ и тензор спектральной плотности $W_{jk}^{(P)}(\omega)$ через $\mathbf{P}(t)$ с помощью теоремы Винера — Хинчина [(2.4.15) и (2.4.16)]

$$W^{(\hat{\eta})}(\omega,\omega') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{\eta}^*(t;\omega')\hat{\eta}(t+\tau;\omega')\rangle \, \mathrm{e}^{i\omega\tau}\, d\tau, \tag{7.5.21}$$

$$W_{jk}^{(P)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \langle P_j(t)P_k(t+\tau)\rangle \, \mathrm{e}^{i\omega\tau}\, d\tau. \tag{7.5.22}$$

Используя условие (7.5.11) и тот факт, что $\hat{\eta}(t;\omega')$ в широком смысле стационарный случайный процесс, из (7.5.21) можно сразу же вывести, что спектральная плотность $W^{(\hat{\eta})}$ удовлетворяет следующему соотношению, которое нам скоро понадобится:

$$W^{(\hat{\eta})}(-\omega;-\omega') = W^{(\hat{\eta})}(\omega;\omega'). \tag{7.5.23}$$

Выполняя преобразование Фурье выражения (7.5.20) по τ, меняя порядок интегрирования и используя уравнения (7.5.21) и (7.5.22), мы получаем следующее выражение для тензора спектральной плотности индуцированной поляризации:

$$W_{jk}^{(P)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{jk}^{(E)}(\omega')W^{(\hat{\eta})}(\omega-\omega';\omega')\, d\omega'. \tag{7.5.24}$$

Из этой формулы видно, что если бы $W^{(\hat{\eta})}$ были независимы от второго аргумента, то спектральная плотность индуцированной поляризации была бы просто сверткой спектральных плотностей $\mathbf{E}(t)$ и $\hat{\eta}(t;\omega)$. Однако, благодаря наличию второго аргумента, что является следствием дисперсионных свойств среды, интеграл в выражении (7.5.24) более сложный, чем свертка.

Тензорные свойства спектральной плотности $W_{jk}^{(P)}$ иногда не важны. Например, если падающий свет полностью поляризован, то спектральные свойства адекватно передаются скалярной функцией, и тензорные индексы в (7.5.24) могут быть опущены. Если к тому же $W^{(E)}(\omega)$ имеет пик на частотах $\pm\omega_0$, который значительно уже, чем ширина функции спектральной плотности $W^{(\hat{\eta})}(\omega,\omega')$ как по ω, так и по ω', то $W^{(E)}(\omega')$ под знаком интеграла в (7.5.24) часто можно аппроксимировать выражением

$$W^{(E)}(\omega') = \langle I\rangle[\delta(\omega'-\omega_0) + \delta(\omega'+\omega_0)], \tag{7.5.25}$$

где $\delta(\omega)$ — дельта-функция Дирака и $\langle I \rangle$ обозначает математическое ожидание (среднее) интенсивности электрического поля. Подставляя (7.5.25) в (7.5.24) и используя соотношение (7.5.23), мы получаем следующее простое выражение для спектральной плотности индуцированной поляризации через спектральную плотность $\tilde{\eta}$:

$$W^{(P)}(\omega) = \langle I \rangle [W^{(\tilde{\eta})}(\omega - \omega_0; \omega_0) + W^{(\tilde{\eta})}(-\omega - \omega_0; \omega_0)]. \tag{7.5.26}$$

Эта формула показывает, что спектральная плотность индуцированной поляризации $\mathbf{P}$ отражает простым образом спектральную плотность флуктуаций $\tilde{\eta}(t; \omega_0)$. В частности, если для данной частоты ω_0 $W^{(\tilde{\eta})}(\omega, \omega_0)$ имеют форму узких линий с центрами на частотах $\omega = \pm\omega_1$ $(\omega_1 < \omega_0)$, как, например, часто бывает в случае акустических волн в твердых телах или жидкостях, спектр $W^{(P)}(\omega)$ индуцированной поляризации будет согласно (7.5.26) состоять из дублетов с центрами на частотах $\pm\omega_0$ с расстоянием $2\omega_1$ между двумя линиями в каждом дублете. Хорошо известные дублеты Бриллюэна в спектре света, рассеянного такой средой, являются отражением этого результата, что будет явно показано в разд. 7.6.5.

Наконец подчеркнем, что формулу (7.5.26) нельзя использовать во всех ситуациях, даже если речь идет о лазерном свете. Большинство лазеров генерируют свет, ширина полосы которого порядка сотен кГц или даже больше, и если эта ширина полосы сравнима или больше, чем ширина полосы спектра флуктуаций $\tilde{\eta}$, то приближенная формула (7.5.26) не применима (ср. Mandel, 1969). Более общее выражение (7.5.24) описывает многие эксперименты по рассеянию. Теперь обратим наше внимание на теорию, лежащую в основе этих экспериментов.

7.6. Рассеяние от случайных сред

При обширном использовании лазерного света в экспериментах по рассеянию было получено много информации о тепловых флуктуациях в газах и жидкостях, о колебаниях решетки в твердых телах, о фазовых переходах и т.д.[1] В этом разделе мы выведем некоторые главные формулы, которые объясняют природу рассеянного поля без ограничения узкополосным светом, и проиллюстрируем результаты несколькими примерами. Начнем с вывода некоторых из наиболее важных формул, относящихся к рассеянию света детерминированной средой.

7.6.1. Основные уравнения для детерминированного рассеяния

Пусть $\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r}, t)$ обозначают действительные векторы электрического и магнитного поля, соответственно, детерминированного электромагнитного поля, падающего на детерминированную среду, занимающую конечный объем V в свободном пространстве. Как обычно, $\mathbf{r}$ обозначает радиус-вектор точки в пространстве и t обозначает время. В результате взаимодействия падающего поля с излучателем будут возбуждаться новые поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. Пусть $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ — поляризация и намагниченность, соответственно, в рассеивающей среде, индуцированные падающей волной. Эти два векторных поля будут некоторыми функционалами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Предположим, как это обычно и бывает, что $\mathbf{P}$ зависит только от $\mathbf{E}$, и $\mathbf{M}$ зависит только от $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{P} = f(\mathbf{E}), \quad \mathbf{M} = g(\mathbf{H}). \tag{7.6.1}$$

Точная форма этих *основополагающих соотношений* зависит, конечно, от природы рассеивающей среды.

Пусть

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} \tag{7.6.2}$$

— вектор электрического смещения и вектор магнитной индукции, соответственно.

Предположим, что рассеивающая среда является непроводящей и не содержит внешних зарядов и токов. Если с помощью (7.6.2) исключить $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ из уравнений Максвелла, то мы получим следующую

[1] Обзор некоторых из этих исследований смотри, например, у Камминса (Cummins, 1969), Камминса и Свинея (Cummins and Swinney, 1970), Чу (Chu, 1974), Кросиньани, Ди Порто и Бертолотти (Crosignani, Di Porto and Bertolotti, 1975) и Берне и Пекоры (Berne and Pecora, 1976).

систему уравнений (в системе единиц Гаусса):

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c}[\dot{\mathbf{P}} + c\nabla \times \mathbf{M}], \tag{7.6.3а}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}} = 0, \tag{7.6.3б}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi\nabla \cdot \mathbf{P}, \tag{7.6.3в}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{7.6.3г}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени. Частные решения этих уравнений, которые представляют собой электромагнитное поле, полученное при рассеянии падающего поля $\mathbf{E}^{(\mathrm{i})}$, $\mathbf{H}^{(\mathrm{i})}$ средой, имеют вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}^{(\mathrm{s})}(\mathbf{r},t), \tag{7.6.4а}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}^{(\mathrm{s})}(\mathbf{r},t), \tag{7.6.4б}$$

где полевые векторы $\mathbf{E}^{(\mathrm{s})}$, $\mathbf{B}^{(\mathrm{s})}$ рассеянной волны, которые ведут себя как волны, уходящие на бесконечность, удовлетворяют связанной системе уравнений (Born and Wolf, 1980, разд. 2.2.2)

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{s})}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\nabla \times \dot{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t) + \nabla \times [\nabla \times \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{e}}(\mathbf{r},t)] - 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r},t), \tag{7.6.5а}$$

$$\mathbf{B}^{(\mathrm{s})}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\nabla \times \dot{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{e}}(\mathbf{r},t) + \nabla \times [\nabla \times \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t)]. \tag{7.6.5б}$$

В этих уравнениях $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{e}}$ и $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{m}}$ — это электрический и магнитный векторы Герца, соответственно, определяемые формулами

$$\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{e}}(\mathbf{r},t) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r', \tag{7.6.6а}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t) = \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r'. \tag{7.6.6б}$$

7.6.2. Рассеяние на детерминированной среде в приближении Борна первого порядка

Если среда линейна, изотропна и немагнитна, основополагающие соотношения имеют вид [ср. (7.5.6)]

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \eta(\mathbf{r},t;t')\mathbf{E}(\mathbf{r},t-t')\, dt', \tag{7.6.7а}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r},t) = 0, \tag{7.6.7б}$$

где $\eta(\mathbf{r};t;t')$ — обобщенная диэлектрическая восприимчивость, введенная в разд. 7.5.2.

Мы снова выразим полное поле $(\mathbf{E},\mathbf{B})$ в виде суммы падающего поля $(\mathbf{E}^{(\mathrm{i})},\mathbf{B}^{(\mathrm{i})})$ и рассеянного поля $(\mathbf{E}^{(\mathrm{s})},\mathbf{B}^{(\mathrm{s})})$. Тогда выражение (7.6.7а) для индуцированной поляризации принимает вид

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \mathbf{P}_1(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}_2(\mathbf{r},t), \tag{7.6.8}$$

где

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \eta(\mathbf{r},t;t')\mathbf{E}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{r},t-t')\, dt', \tag{7.6.9а}$$

$$\mathbf{P}_2(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \eta(\mathbf{r},t;t')\mathbf{E}^{(\mathrm{s})}(\mathbf{r},t-t')\, dt'. \tag{7.6.9б}$$

Предположим, что рассеивающая среда слабая, в том смысле, что для всех значений ее аргументов поляризация, индуцированная рассеянным полем, много меньше поляризации, индуцированной падающим полем, т.е. что

$$|\mathbf{P}_2(\mathbf{r},t)| \ll |\mathbf{P}_1(\mathbf{r},t)| \tag{7.6.10а}$$

и также что

$$\left|\frac{\partial \mathbf{P}_2(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right| \ll \left|\frac{\partial \mathbf{P}_1(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right|, \tag{7.6.10б}$$

$$|\nabla \cdot \mathbf{P}_2(\mathbf{r},t)| \ll |\nabla \cdot \mathbf{P}_1(\mathbf{r},t)|. \tag{7.6.10в}$$

В этом случае основные уравнения (7.6.5а) и (7.6.5б) сводятся к

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{s})}(\mathbf{r},t) = \nabla \times [\nabla \times \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r},t)] - 4\pi \mathbf{P}_1(\mathbf{r},t), \tag{7.6.11а}$$

$$\mathbf{B}^{(\mathrm{s})}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\nabla \times [\dot{\boldsymbol{\Pi}}(\mathbf{r},t)], \tag{7.6.11б}$$

где

$$\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r},t) = \int_V \frac{\mathbf{P}_1(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}'. \tag{7.6.12}$$

В уравнениях (7.6.11) фигурирует только электрический вектор Герца, потому что $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t) \equiv 0$, т.к. среда предполагалась немагнитной. По этой причине мы опустили индекс «е» у $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{e}}$.

Заметим, что из уравнений (7.6.11) следует, что

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^{(\mathrm{s})} = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{P}_1, \tag{7.6.11в}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{(\mathrm{s})} = 0. \tag{7.6.11г}$$

Уравнения (7.6.11) вместе с уравнением (7.6.12) описывают рассеянное электромагнитное поле с той же степенью точности, какая получается при использовании приближения Борна первого порядка в квантовой теории рассеяния. Если функция обобщенной диэлектрической восприимчивости $\eta(\mathbf{r},t;t')$ известна, $\mathbf{P}_1(\mathbf{r},t)$ может быть вычислено из уравнения (7.6.9а), и вектор Герца $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r},t)$ может быть определен с помощью (7.6.12). Рассеянное поле во всех точках за пределами среды может быть тогда получено из уравнений (7.6.11). Для дальнейшего анализа будет полезно использовать фурье-образы векторов поля, а не сами векторы поля. Мы будем использовать такое же определение фурье-образов, как в уравнении (7.5.1), а именно,

$$\widetilde{\mathbf{E}}^{(\mathrm{s})}(\mathbf{r},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^{(\mathrm{s})}(\mathbf{r},t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, dt, \tag{7.6.13}$$

$$\widetilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{r},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}_1(\mathbf{r},t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, dt \tag{7.6.14}$$

и т.д. Если для $\mathbf{P}_1(\mathbf{r},t)$ под знаком интеграла в уравнении (7.6.14) подставить выражение (7.6.9а), то после прямых вычислений найдем, что

$$\widetilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\eta}(\mathbf{r},\omega-\omega';\omega')\widetilde{\mathbf{E}}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{r},\omega')\, d\omega', \tag{7.6.15}$$

где

$$\bar{\eta}(\mathbf{r},\omega;\omega') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta}(\mathbf{r},t;\omega')\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, dt = \tag{7.6.16а}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\int_0^{\infty} dt' \eta(\mathbf{r},t;t')\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t'}. \tag{7.6.16б}$$

Величины $\bar{\eta}(\mathbf{r},\omega;\omega')$ и $\hat{\eta}(\mathbf{r},t;\omega')$ являются, конечно, обобщением величин $\bar{\eta}(\omega;\omega')$ и $\hat{\eta}(t;\omega')$, с которыми мы имели дело раньше [(7.5.13) и (7.5.14)].

Выполняя преобразование Фурье уравнений (7.6.11), мы легко получим следующие выражения для частотных компонент рассеянного поля:

$$\widetilde{\mathbf{E}}^{(s)}(\mathbf{r},\omega) = \boldsymbol{\nabla}\times[\boldsymbol{\nabla}\times\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}(\mathbf{r},\omega)] - 4\pi\widetilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{r},\omega), \tag{7.6.17а}$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{(s)}(\mathbf{r},\omega) = -ik\boldsymbol{\nabla}\times\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}(\mathbf{r},\omega), \tag{7.6.17б}$$

где

$$k = \omega/c \tag{7.6.18}$$

— волновое число, связанное с частотой ω, и

$$\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}(\mathbf{r},\omega) = \int_V \widetilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{r}',\omega)\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r'. \tag{7.6.19}$$

Мы сейчас рассмотрим рассеянное поле в точках $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ в дальней зоне рассеивающей среды. Положим

$$\mathbf{r} = r\mathbf{s}, \tag{7.6.20}$$

где начало радиус-вектора $\mathbf{r}$ взято в некоторой точке в рассеивающем объеме и $\mathbf{s}$ — единичный вектор. Когда r достаточно велико, мы, очевидно, можем записать (см. рис. 7.7)

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \sim r - \mathbf{s}\cdot\mathbf{r}' \tag{7.6.21}$$

($r = |\mathbf{r}|$) и, следовательно,

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \sim \frac{e^{ikr}}{r}e^{-ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'}, \quad (kr\to\infty,\ \mathbf{s}\text{ фиксирован}). \tag{7.6.22}$$

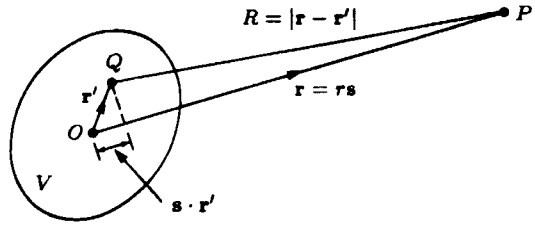


Рис. 7.7. Иллюстрация обозначений, относящихся к приближению дальней зоны (7.6.21): Q — характерная точка в области источника V и P — точка в дальней зоне

Используя асимптотическое приближение (7.6.22) в (7.6.19), мы получим следующее выражение для вектора Герца $\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}$:

$$\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}(r\mathbf{s},\omega) = (2\pi)^3\mathscr{P}_1(k\mathbf{s},\omega)\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{7.6.23}$$

где

$$\mathscr{P}_1(\mathbf{K},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_V \widetilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{r}',\omega)\,e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}'}\,d^3r' \tag{7.6.24}$$

— трехмерный пространственный фурье-образ $\widetilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{r},\omega)$. В силу того, что $\widetilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{r},\omega)$ является одномерным фурье-образом по времени $\mathbf{P}_1(\mathbf{r},t)$, мы можем выразить $\mathscr{P}_1(\mathbf{K},\omega)$ непосредственно через $\mathbf{P}_1(\mathbf{r},t)$ в виде

$$\mathscr{P}_1(k\mathbf{s},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_V\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{P}_1(\mathbf{r}',t')\,e^{i(\omega t'-k\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}')}\,d^3r'dt'. \tag{7.6.25}$$

Можно также представить $\mathscr{P}_1(k\mathbf{s},\omega)$ в виде выражения

$$\mathscr{P}_1(k\mathbf{s},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_V d^3r'\,e^{-ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\,\bar{\eta}(\mathbf{r}',\omega-\omega';\omega')\widetilde{\mathbf{E}}^{(i)}(\mathbf{r}',\omega'), \tag{7.6.26}$$

которое получается, если подставить (7.6.15) в (7.6.24) и положить $\mathbf{K} = k\mathbf{s}$.

Наконец, подставляя (7.6.23) в (7.6.17), замечая, что $\widetilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{r},\omega) = 0$, когда $\mathbf{r}$ представляет собой точку за пределами рассеивающего объема, можно показать при помощи векторных тождеств, двухвременных функций Грина (Papas, 1965, разд. 2.2), или используя представление волновых полей угловым спектром [Friberg and Wolf, 1983, выражение (4.5)], что в точках дальней зоны

$$\widetilde{\mathbf{E}}^{(s)}(r\mathbf{s},\omega) \sim -(2\pi)^3k^2\mathbf{s}\times[\mathbf{s}\times\mathscr{P}_1(k\mathbf{s},\omega)]\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{7.6.27а}$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{(s)}(r\mathbf{s},\omega) \sim (2\pi)^3k^2\mathbf{s}\times\mathscr{P}_1(k\mathbf{s},\omega)\frac{e^{ikr}}{r}. \tag{7.6.27б}$$

7.6.3. Рассеяние случайной средой в приближении Борна первого порядка[1]

Теперь рассмотрим более сложную задачу рассеяния случайной средой. Из-за сложности задачи мы сделаем следующие упрощающие предположения о рассеивающей среде:

(а) Рассеивающая среда является линейной, изотропной, ненамагниченной, статистически однородной, и ее временны́е флуктуации стационарны, по крайней мере в широком смысле, и имеют приближенно нулевое среднее. Предположения об однородности[2] и стационарности означают, что корреляционная функция диэлектрической восприимчивости $\hat{\eta}(\mathbf{r},t;\omega')$ для пары точек $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ в среде на временах t_1 и t_2 зависит только от разности $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ и t_2-t_1:

$$\langle\hat{\eta}^*(\mathbf{r}_1,t_1;\omega')\hat{\eta}(\mathbf{r}_2,t_2;\omega')\rangle = G(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,t_2-t_1;\omega'). \tag{7.6.28}$$

Угловые скобки обозначают здесь усреднение по ансамблю реализаций случайной среды.

(б) Пространственная протяженность корреляций восприимчивости мала по сравнению с размером объема рассеяния V, т.е. расстояния $R=|\mathbf{R}|=|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|$, для которых $|G(\mathbf{R},T;\omega)|$ не мало, гораздо меньше, чем линейные размеры V.

(в) Рассеяние существенно слабое, так что оно может рассматриваться в рамках приближения Борна первого порядка.

Что касается падающего (действительного) электрического поля, мы будем считать, что оно статистически однородно и стационарно, по крайней мере, в широком смысле. Тогда его корреляционный тензор будет также зависеть от пространственных и временны́х переменных только через разности $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ и t_2-t_1, т.е. будет иметь вид

$$\langle[E_l^{(\mathrm{i})}(\mathbf{r}_1,t_1)]^*E_m^{(\mathrm{i})}(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle = \mathscr{E}_{lm}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,t_2-t_1), \tag{7.6.29}$$

где l и m обозначают декартовы компоненты. Угловые скобки слева обозначают усреднение, проведенное по ансамблю, что характеризует статистические свойства падающего поля.

В последующем анализе нам также понадобится тензор $W_{lm}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\omega)$ взаимной спектральной плотности падающего электрического поля. Формально он может быть определен уравнением [ср. (6.8.1a)]

$$\langle[\widetilde{E}_l^{(\mathrm{i})}(\mathbf{r}_1,\omega)]^*\widetilde{E}_m^{(\mathrm{i})}(\mathbf{r}_2,\omega')\rangle = W_{lm}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\omega)\delta(\omega-\omega'), \tag{7.6.30}$$

где $\widetilde{E}_l^{(\mathrm{i})}$ и $\widetilde{E}_m^{(\mathrm{i})}$ — обобщенные фурье-образы $E_l^{(\mathrm{i})}$ и $E_m^{(\mathrm{i})}$, соответственно, и δ — дельта-функция Дирака. Согласно обобщенной теореме Винера — Хинчина [(2.4.37) и (2.4.38)] электрический тензор взаимной спектральной плотности является фурье-образом электрического корреляционного тензора, т.е.

$$W_{lm}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{R},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{E}_{lm}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{R},T)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega T}\,dT. \tag{7.6.31}$$

Следует заметить, что средние в выражениях (7.6.28) и (7.6.29) берутся по двум разным статистическим ансамблям. В (7.6.28) оно берется по ансамблю, который характеризует флуктуации диэлектрической восприимчивости, тогда как в (7.6.29) — по ансамблю, который характеризует флуктуации падающего поля. Мы будем полагать, что эти два вида флуктуаций статистически независимы. Это предположение разумно, если падающее поле не слишком сильное.

Теперь мы выведем выражения для углового и спектрального распределений энергии рассеянного поля в дальней зоне. В этих целях мы сначала заметим, что благодаря тому, что как $\hat{\eta}$, так и $\widetilde{\mathbf{E}}^{(\mathrm{i})}$ — случайные процессы, процесс $\mathscr{P}_1(\mathbf{K},\omega)$, заданный выражением (7.6.26), является также случайным. Следовательно,

[1] Анализ в разд. 7.6.3 и 7.6.4 близко следует тому, что был дан Вольфом и Фолеем (Wolf and Foley, 1989).

[2] Строгая однородность требует, чтобы среда занимала все пространство. Однако, когда линейные размеры рассеивающего объема велики по сравнению как с масштабом корреляций диэлектрической восприимчивости [эффективный диапазон $\mathbf{r}'$ величины $G(\mathbf{r}',T;\omega')$], так и с длиной волны $\lambda'=2\pi c/\omega'$, приближение бесконечной среды не вносит значительных ошибок и приводит к гораздо более простому анализу. Те же замечания применимы к приближению стационарности.

(обобщенные) фурье-образы $\widetilde{\mathbf{E}}^{(s)}$ и $\widetilde{\mathbf{B}}^{(s)}$ рассеянного поля в дальней зоне, заданные выражениями (7.6.27), также являются случайными процессами. Для каждой реализации мы имеем из (7.6.27a)

$$[\widetilde{\mathbf{E}}^{(s)}(r\mathbf{s},\omega)]^* \cdot \widetilde{\mathbf{E}}^{(s)}(r\mathbf{s},\omega') = (2\pi)^6 \frac{k^2 k'^2}{r^2} e^{i(k'-k)r}\{\mathbf{s} \times [\mathbf{s} \times \mathscr{P}_1^*(\mathbf{k},\omega)]\} \cdot \{\mathbf{s} \times [\mathbf{s} \times \mathscr{P}_1(\mathbf{k}',\omega')]\}, \quad (7.6.32)$$

где

$$\mathbf{k} = k\mathbf{s} = \frac{\omega}{c}\mathbf{s}, \quad \mathbf{k}' = k'\mathbf{s} = \frac{\omega'}{c}\mathbf{s}. \quad (7.6.33)$$

Правая часть (7.6.32) упрощается с помощью векторного тождества $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$, и тогда можно найти, что (ср. Wolf and Foley, 1989, с. 579)

$$[\widetilde{\mathbf{E}}^{(s)}(r\mathbf{s},\omega)]^* \cdot \widetilde{\mathbf{E}}^{(s)}(r\mathbf{s},\omega') = (2\pi)^6 \frac{k^2 k'^2}{r^2} e^{i(k-k')r}(\delta_{lm} - s_l s_m)\mathscr{P}_{1l}^*(\mathbf{r},\omega)\mathscr{P}_{1m}(\mathbf{k}',\omega'), \quad (7.6.34)$$

где s_l и s_m — декартовы компоненты единичного вектора $\mathbf{s}$, δ_{lm} обозначает символ Кронекера и суммирование проводится по повторяющимся индексам.

Далее мы проведем усреднение выражения (7.6.34) по ансамблям падающего поля и флуктуирующей среды. Обозначая это двойное усреднение двойными угловыми скобками, мы сразу же получим (7.6.34), что

$$\langle\langle[\widetilde{\mathbf{E}}^{(s)}(r\mathbf{s},\omega)]^* \cdot \widetilde{\mathbf{E}}^{(s)}(r\mathbf{s},\omega')\rangle\rangle = (2\pi)^6 \frac{k^2 k'^2}{r^2} e^{i(k'-k)r}(\delta_{lm} - s_l s_m)\langle\langle\mathscr{P}_{1l}^*(\mathbf{k},\omega)\mathscr{P}_{1m}(\mathbf{k}',\omega')\rangle\rangle. \quad (7.6.35)$$

Путем сравнительно долгих, но простых вычислений, выполненных в Приложении 7.1, можно найти, что двойное усреднение, которое появляется в правой части (7.6.35), можно выразить с хорошей степенью точности в виде

$$\langle\langle\mathscr{P}_{1l}^*(\mathbf{k},\omega)\mathscr{P}_{1m}(\mathbf{k}',\omega')\rangle\rangle \approx \frac{V\delta(\omega-\omega')}{(2\pi)^6}\int_V d^3R\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1\, \overline{G}(\mathbf{R},\omega - \omega_1;\omega_1)W_{lm}^{(i)}(\mathbf{R},\omega_1), \quad (7.6.36)$$

где

$$\overline{G}(\mathbf{R},\Omega;\omega') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{R},T;\omega')\, e^{i\Omega T}\, dT \quad (7.6.37)$$

— временно́й фурье-образ корреляционной функции (7.6.28) обобщенной восприимчивости $\hat{\eta}(\mathbf{r},t;\omega')$ рассеивающей среды. Знак приближенного равенства в (7.6.36) возникает из-за использования нашего предположения о том, что длина пространственных корреляций флуктуаций диэлектрической восприимчивости мала по сравнению с линейными размерами рассеивающего объема.

Наконец, подставляя (7.6.36) в (7.6.35), мы видим, что

$$\langle\langle[\widetilde{\mathbf{E}}^{(s)}(r\mathbf{s},\omega)]^* \cdot \widetilde{\mathbf{E}}^{(s)}(r\mathbf{s},\omega')\rangle\rangle = S^{(s)}(r\mathbf{s},\omega)\delta(\omega-\omega'), \quad (7.6.38)$$

где

$$S^{(s)}(r\mathbf{s},\omega) = \frac{Vk^4}{r^2}(\delta_{lm} - s_l s_m)\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_V d^3R\, \overline{G}(\mathbf{R},\omega-\omega_1;\omega_1)W_{lm}^{(i)}(\mathbf{R},\omega_1)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \quad (7.6.39)$$

и k и $\mathbf{k}$ определены выражениями (7.6.33).

Величина $S^{(s)}(r\mathbf{s},\omega)$, определенная формулой (7.6.38) и заданная выражением (7.6.39), пропорциональна среднему значению плотности электрической энергии на частоте ω рассеянного электрического поля в точке $\mathbf{r} = r\mathbf{s}$ дальней зоны. Согласно хорошо известным свойствам дальнего поля [см., например, Friberg and Wolf, 1983, выражения (4.10) и (4.11)] она также пропорциональна средним значениям плотности магнитной энергии и величины вектора Пойнтинга на частоте ω в дальней зоне. Поэтому мы можем считать, что $S^{(s)}(r\mathbf{s},\omega)$ представляет собой спектральную плотность рассеянного поля. Формула (7.6.39) выражает ее в виде линейного преобразования взаимной спектральной плотности $W_{lm}^{(i)}$, определенной выражением (7.6.30), падающего флуктуирующего электрического поля. Видно, что ядро преобразования

пропорционально преобразованию Фурье по времени (7.6.37) двухвременно́й корреляционной функции G, определенной уравнением (7.6.28), обобщенной диэлектрической восприимчивости рассеивающей среды. Эта двухвременна́я корреляционная функция аналогична так называемой зависящей от времени двухчастичной корреляционной функции Ван Хова (Van Hove, 1954: Glauber, 1962, разд. 5), также известной как функция парного распределения, которая часто встречается в физике плазмы и в теории рассеяния нейтронов.

7.6.4. Некоторые частные случаи

(a) Рассеяние линейно поляризованного немонохроматического поля

Предположим, что падающее поле — это флуктуирующая немонохроматическая плоская волна, падающая в направлении, определяемом действительным единичным вектором $\mathbf{s}_0$, с электрическим вектором, линейно поляризованном в направлении, определяемом единичным вектором $\mathbf{e}_0$ ($\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = 0$) (рис.7.8). Тогда каждая реализация падающего поля может быть представлена в виде

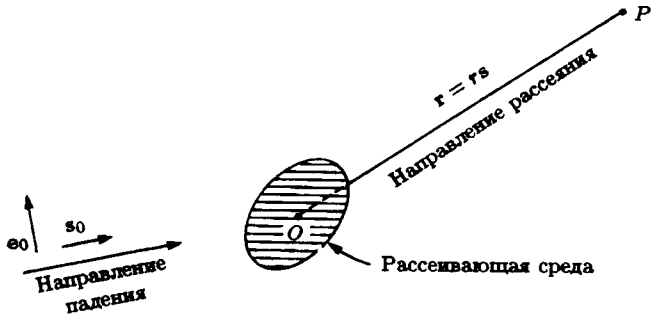


Рис. 7.8. Рассеяние линейно поляризованной плоской, немонохроматической, электромагнитной волны. Векторы $\boldsymbol{s}_0$ и $\boldsymbol{s}$ — действительные единичные векторы в направлении распространения падающего поля $\mathbf{E}^{(\mathrm{i})}$, $\mathbf{B}^{(\mathrm{i})}$ и рассеянного поля $\mathbf{E}^{(\mathrm{s})}$, $\mathbf{B}^{(\mathrm{s})}$, соответственно, тогда как $\mathbf{e}_0$ — действительный единичный вектор в направлении поляризации падающего электрического поля. Точка P — это точка в дальней зоне

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{r},t) = \mathbf{e}_0 \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\, d\omega. \qquad (7.6.40)$$

Фурье-образ $\mathbf{E}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{r},t)$ по t, очевидно, равен

$$\widetilde{\mathbf{E}}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{r},\omega) = A(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r}}\, \mathbf{e}_0, \qquad (7.6.41)$$

где $A(\omega)$ — случайная переменная для каждой частоты ω. Подставляя (7.6.41) в (7.6.30), можно заметить, что

$$\langle A^*(\omega)A(\omega')\rangle\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mathbf{s}_0\cdot(k'\mathbf{r}_2-k\mathbf{r}_1)}\, e_{0l}e_{0m} = \\ = W^{(\mathrm{i})}_{lm}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\omega)\delta(\omega-\omega'), \qquad (7.6.42)$$

где e_{0l} и e_{0m} — декартовы компоненты единичного вектора $\mathbf{e}_0$. Теперь спектральная плотность $S^{(\mathrm{i})}(\omega)$ падающего поля равна просто следу от $W^{(\mathrm{i})}_{lm}(0,\omega)$, и, следовательно, из уравнения (7.6.42) вытекает, что

$$\langle A^*(\omega)A(\omega')\rangle = S^{(\mathrm{i})}(\omega)\delta(\omega-\omega'). \qquad (7.6.43)$$

Если мы используем это соотношение в уравнении (7.6.42), то увидим, что тензор взаимной спектральной плотности падающего поля задается выражением

$$W^{(\mathrm{i})}_{lm}(\mathbf{R},\omega) = S^{(\mathrm{i})}(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{R}}\, e_{0l}e_{0m}. \qquad (7.6.44)$$

Подставляя (7.6.44) в более общую формулу (7.6.39), мы получаем следующее выражение для среднего значения спектральной плотности рассеянного поля:

$$S^{(\mathrm{s})}(r\mathbf{s},\omega) = \frac{Vk^4\sin^2\psi}{r^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_V d^3R\, \overline{G}(\mathbf{R},\omega-\omega';\omega')S^{(\mathrm{i})}(\omega')\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}-\mathbf{k}'_0)\cdot\mathbf{R}}, \qquad (7.6.45)$$

где

$$\mathbf{k} = k\mathbf{s} = \frac{\omega}{c}\mathbf{s} \qquad (7.6.46)$$

— волновой вектор компоненты ω рассеянного поля,

$$\mathbf{k}'_0 = k'\mathbf{s}_0 = \frac{\omega'}{c}\mathbf{s}_0 \qquad (7.6.47)$$

— волновой вектор компоненты ω' падающего поля и ψ — это угол между направлением $\mathbf{s}$ рассеяния и направлением поляризации $\mathbf{e}_0$ падающего электрического поля, т.е. $\cos\psi = \mathbf{s}\cdot\mathbf{e}_0$. При выводе (7.6.45) мы также использовали тождество

$$(\delta_{lm} - s_l s_m)e_{0l}e_{0m} = 1 - (\mathbf{s}\cdot\mathbf{e}_0)^2 = 1 - \cos^2\psi = \sin^2\psi. \tag{7.6.48}$$

На этом этапе полезно ввести функцию $\mathscr{G}(\mathbf{K}, \Omega; \omega')$, определенную формулой

$$\mathscr{G}(\mathbf{K}, \Omega; \omega') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_V \overline{G}(\mathbf{R}, \Omega; \omega')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\,d^3R. \tag{7.6.49}$$

Выражение (7.6.45) для спектральной плотности рассеянного поля в дальней зоне тогда принимает вид

$$S^{(\mathrm{s})}(r\mathbf{s}, \omega) = \frac{(2\pi)^3 V k^4 \sin^2\psi}{r^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0', \omega - \omega'; \omega')S^{(\mathrm{i})}(\omega')\,d\omega'. \tag{7.6.50}$$

Функция $\mathscr{G}(\mathbf{K}, \Omega; \omega')$, заданная выражением (7.6.49), имеет простое значение, что легко увидеть при подстановке $\overline{G}$ из (7.6.37) в (7.6.49). Тогда можно найти, что

$$\mathscr{G}(\mathbf{K}, \Omega; \omega') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_V d^3R\int_{-\infty}^{\infty} dT\, G(\mathbf{R}, T; \omega')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{R} - \Omega T)} \tag{7.6.51a}$$

или, в более явной форме, если мы вспомним определение (7.6.28) функции $G(\mathbf{R}, T; \omega')$,

$$\mathscr{G}(\mathbf{K}, \Omega; \omega') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_V d^3R\int_{-\infty}^{\infty} dT\,\langle\hat{\eta}^*(\mathbf{r}, t; \omega')\hat{\eta}(\mathbf{r}+\mathbf{R}, t+T; \omega')\rangle\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{R} - \Omega T)}. \tag{7.6.51б}$$

Мы видим, что $\mathscr{G}(\mathbf{K}, \Omega; \omega')$ — это четырехмерный пространственно-временно́й фурье-образ двухточечной корреляционной функции диэлектрической восприимчивости $\hat{\eta}$ рассеивающей среды; мы будем говорить о ней как об *обобщенной структурной функции* среды. Когда $\hat{\eta}$ фактически не зависит от ω' (т.е. когда ω' находится за пределами резонансной области среды), она аналогична так называемому динамическому структурному фактору (Forster, 1975) для флуктуаций плотности частиц.

Формула (7.6.50), которая является главным результатом этого раздела, показывает, что когда падающее поле является линейно поляризованной немонохроматической плоской волной, спектральная плотность рассеянного поля в дальней зоне равна (с точностью до простых геометрических множителей) «взвешенному интегралу», взятому по спектру падающего поля. Этот результат справедлив, конечно, только в пределах точности первого борновского приближения. Весовой множитель — это обобщенная структурная функция среды. Этот взвешенный интеграл не надо путать со сверткой, потому что ядро зависит от частот ω и ω' более сложным образом, чем через их разность.

Формула (7.6.50) применялась для изучения изменений в линейчатых спектрах, создаваемых рассеянием от некоторой модельной среды, физические свойства которой изменяются хаотично как в пространстве, так и во времени (Foley and Wolf, 1989; Wolf, 1989; James, Savedoff and Wolf, 1990; James and Wolf, 1990, 1994). Было обнаружено, что в некоторых случаях изменения могут быть подобными эффекту Доплера с его характерными особенностями, несмотря на то, что источник, рассеиватель и наблюдатель находятся в покое по отношению друг к другу. Пример приведен на рис. 7.9.

(б) Рассеяние линейно поляризованного монохроматического поля

Часто, особенно когда поле, падающее на рассеиватель, генерируется лазером, предполагают, что поле монохроматично. Соответствующая упрощенная формула для спектра рассеянного поля $S^{(\mathrm{s})}(r\mathbf{s}, \omega)$ может быть тогда получена, полагая

$$S^{(\mathrm{i})}(\omega') = \frac{1}{2}I_0[\delta(\omega' - \omega_0) + \delta(\omega' + \omega_0)] \tag{7.6.52}$$

в (7.6.50), где I_0 — положительная константа. Тогда можно получить для $S^{(\mathrm{s})}(r\mathbf{s}, \omega)$ выражение

$$S^{(\mathrm{s})}(r\mathbf{s}, \omega) = \frac{(2\pi)^3 k^4 I_0 V \sin^2\psi}{2r^2}[\mathscr{G}(k\mathbf{s} - k_0\mathbf{s}_0, \omega - \omega_0; \omega_0) + \mathscr{G}(k\mathbf{s} + k_0\mathbf{s}_0, \omega + \omega_0; -\omega_0)], \tag{7.6.53}$$

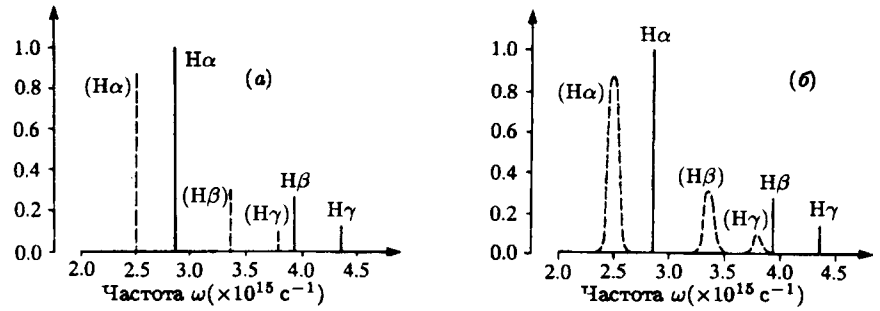


Рис.7.9. Три узких водородных линии Бальмера Hα, $2.8705 \times 10^{15}\,\text{с}^{-1}$; Hβ, $3.875 \times 10^{15}\,\text{с}^{-1}$ и Hγ, $4.3402 \times 10^{15}\,\text{с}^{-1}$: *а* — как они выглядели бы в покоящейся системе их источника (сплошные линии) и со сдвигом Доплера (пунктирные линии), вызванным движением со скоростью 0.145 с от наблюдателя; *б* — те же линии (показанные пунктиром), сдвинутые и уширенные из-за рассеяния средой, находящейся в покое по отношению к источнику и наблюдателю, корреляционная функция (7.6.28) которых является гауссовской функцией

$$G(\mathbf{R}, T; \omega') = G_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{\sigma_x^2} + \frac{Y^2}{\sigma_y^2} + \frac{Z^2}{\sigma_z^2} + \frac{c^2T^2}{\sigma_\tau^2}\right)\right],$$

($\mathbf{R} = X, Y, Z$) при $\sigma_x = \sigma_y = 34.21$ нм, $\sigma_z = 8.731$ мкм, $\sigma_\tau = 1.376$ мкм, $s_{0z} = 0.800$, $s_z = 0.921$, $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_0 = 0.965$ (James and Wolf, 1990)

где $k_0 = \omega_0/c$. Если, как это часто бывает, флуктуации диэлектрической восприимчивости являются медленными в масштабах оптического периода $2\pi/\omega_0$, можно сделать приближение

$$\mathscr{G}(k\mathbf{s} + k_0\mathbf{s}_0, \omega + \omega_0; -\omega_0) \approx 0, \quad \text{если } \omega > 0, \tag{7.6.54}$$

и выражение (7.6.53) для спектра рассеянного поля сводится к[1]

$$S^{(s)}(r\mathbf{s}, \omega) = \frac{(2\pi)^3 k^4 I_0 V \sin^2\psi}{2r^2} \mathscr{G}(k\mathbf{s} - k_0\mathbf{s}_0, \omega - \omega_0; \omega_0). \tag{7.6.55}$$

Формула (7.6.55) также применима, когда $\omega < 0$, потому что $S^{(s)}(r\mathbf{s}, -\omega) = S^{(s)}(r\mathbf{s}, \omega)$, как очевидно из уравнения (7.6.38), т.к. $\widetilde{\mathbf{E}}^{(s)}(r\mathbf{s}, \omega)$ — это фурье-образ (обобщенный) действительной функции.

Уравнение (7.6.55) показывает, что спектральная плотность $S^{(s)}(r\mathbf{s}, \omega)$ теперь прямо пропорциональна: (а) рассеивающему объему V, (б) квадрату обратного расстояния r до рассеивателя, (в) квадрату синуса угла ψ между направлением поляризации падающей волны и направлением рассеяния и (г) значению обобщенной структурной функции $\mathscr{G}(\mathbf{K}, \Omega; \omega_0)$ с аргументами $\mathbf{K} = k\mathbf{s} - k_0\mathbf{s}_0$ и $\Omega = \omega - \omega_0$.

Из (7.6.55) и определения (7.6.51а) обобщенной структурной функции ясно, что измерение спектральной плотности в некотором определенном направлении $\mathbf{s}$ и для выбранной частоты ω зависит от определенной пространственно-временно́й компоненты Фурье пространственно-временно́й корреляционной функции G от $\hat{\eta}$ [(7.6.28)]. Зависимость спектральной плотности рассеянного света от разности $k\mathbf{s} - k_0\mathbf{s}_0$ двух волновых векторов отражает пространственное поведение флуктуаций диэлектрической восприимчивости $\hat{\eta}$, тогда как ее зависимость от $\Omega = \omega - \omega_0$ отражает временно́е поведение этих флуктуаций.

(в) Статический предел

Предположим теперь, что рассеивающая среда проявляет случайность в своих физических свойствах в пространственной, а не во временно́й области, т.е. ее диэлектрическая восприимчивость $\hat{\eta}(\mathbf{r}, t; \omega')$ является случайной функцией $\mathbf{r}$, а не t. Так бывает, например, когда используют так называемую модель «замороженной атмосферы» при изучении рассеяния в атмосфере. Временна́я зависимость флуктуаций

[1] Похожие выражения для спектра рассеянного поля были выведены различными способами Комаровым и Фишером (Komarov and Fisher, 1962), Ван Кампеном (van Kampen, 1969, с. 235, формула (7а)) и Пекорой (Pecora, 1964, формула (30)).

показателя преломления атмосферы тогда игнорируется, потому что его изменения гораздо медленнее флуктуаций оптического поля, и только пространственные флуктуации показателя преломления тогда принимаются во внимание. Мы говорим о такой ситуации как о *статическом рассеянии* и будем писать $\tilde{\eta}(\mathbf{r},\omega')$ вместо $\hat{\eta}(\mathbf{r},t;\omega')$. Пространственно-временна́я корреляционная функция $G(\mathbf{R},T;\omega')$, определенная выражением (7.6.28), будет независимой от T, и мы будем обозначать ее как $g(\mathbf{R},\omega')$:

$$g(\mathbf{R},\omega') = \langle \tilde{\eta}^*(\mathbf{r},\omega')\tilde{\eta}(\mathbf{r}+\mathbf{R},\omega')\rangle. \tag{7.6.56}$$

Тогда из (7.6.37) следует, что

$$\overline{G}(\mathbf{R},\Omega;\omega') = g(\mathbf{R},\omega')\delta(\Omega). \tag{7.6.57}$$

Подставляя это выражение в общую формулу (7.6.39), мы получаем следующее выражение для спектральной плотности рассеянного поля в статическом пределе:

$$S^{(\mathrm{s})}(r\mathbf{s},\omega) = \frac{Vk^4}{r^2}(\delta_{lm} - s_l s_m)\int_V g(\mathbf{R},\omega)W_{lm}^{(\mathrm{i})}(\mathbf{R},\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\,d^3R. \tag{7.6.58}$$

Практический интерес представляют два частных случая формулы (7.6.58). Когда падающее поле — линейно поляризованная немонохроматическая плоская волна [(7.6.40)], тензор взаимной спектральной плотности падающего поля задается выражением (7.6.44), и, если мы также используем тождество (7.6.48), то выражение (7.6.58) сводится к

$$S^{(\mathrm{s})}(r\mathbf{s},\omega) = \frac{(2\pi)^3 Vk^4\sin^2\psi}{r^2}\tilde{g}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0,\omega)S^{(\mathrm{i})}(\omega), \tag{7.6.59}$$

где, как и ранее, $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{s}$, $\mathbf{k}_0 = (\omega/c)\mathbf{s}_0$ и $\tilde{g}(\mathbf{K},\omega)$ — трехмерный фурье-образ корреляционной функции $g(\mathbf{R},\omega)$, т.е.

$$\tilde{g}(\mathbf{K},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_V g(\mathbf{R},\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\,d^3R, \tag{7.6.60}$$

или в более явной форме из (7.6.56) имеем

$$\tilde{g}(\mathbf{K},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_V \langle \tilde{\eta}^*(\mathbf{r},\omega)\tilde{\eta}(\mathbf{r}+\mathbf{R},\omega)\rangle\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\,d^3R. \tag{7.6.61}$$

Формула (7.6.59) показывает, что даже при статическом рассеянии спектр рассеянного света отличается, в общем, от спектра падающего света. Изменение возникает из-за коэффициента пропорциональности $k^4 = (\omega/c)^4$ и из-за зависимости от частоты фурье-образа $\tilde{g}$ статической корреляционной функции g. Он также зависит от направления наблюдения. Формула (7.6.59) напоминает в своих главных чертах формулу (5.8.29) для спектра поля, генерируемого квазимонохроматическим источником в свободном пространстве. Спектральные изменения, индуцируемые статическим рассеянием, изучались с помощью аналога формулы (7.6.59), выведенного из скалярной теории, а не из полной электромагнитной теории, Вольфом, Фолеем и Гори [Wolf, Foley and Gori, 1989, выражение (3.7)].

Рассмотрим другой частный случай, а именно — рассеяние *монохроматического* линейно поляризованного света с частотой ω_0 статической средой. В этом случае спектр падающего света задается формулой (7.6.52), и для $\omega > 0$ выражение (7.6.59) сводится к

$$S^{(\mathrm{s})}(r\mathbf{s},\omega) = \frac{(2\pi)^3 I_0 Vk^4\sin^2(\psi)}{2r^2}\tilde{g}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0,\omega)\delta(\omega-\omega_0). \tag{7.6.62}$$

Формула такого вида была впервые выведена Эйнштейном (Einstein, 1910) в хорошо известном исследовании, которое явилось отправной точкой статистической теории рассеяния света. Заметим, что согласно (7.6.62) спектральная плотность света, рассеянного в направлении, заданном единичным вектором $\mathbf{s}$, пропорциональна трехмерной пространственной компоненте Фурье статической корреляционной функции $g(\mathbf{R},\omega)$ диэлектрической восприимчивости; а именно, компоненте, обозначенной вектором

$$\mathbf{K}_0 = k_0(\mathbf{s}-\mathbf{s}_0). \tag{7.6.63}$$

В силу того, что $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}_0$ — это единичные векторы, следует, что

$$|\mathbf{K}_0| \leqslant 2k_0 = 4\pi/\lambda_0, \tag{7.6.64}$$

где λ_0 — длина волны падающего света. Теперь учтем, что вектор $\mathbf{K}_0$ связан с пространственными периодическими компонентами $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ корреляционной функции $g(\mathbf{R}, \omega)$ соотношениями

$$\Delta x = \frac{2\pi}{|K_{0x}|}, \quad \Delta y = \frac{2\pi}{|K_{0y}|}, \quad \Delta z = \frac{2\pi}{|K_{0z}|}, \tag{7.6.65}$$

где K_{0x}, K_{0y} и K_{0z} — декартовы компоненты $\mathbf{K}_0$. Следовательно, неравенство (7.6.64) может быть выражено в форме [аналогичной выражению (3.2.31a), которую мы встречали раньше в связи с представлением угловым спектром волновых полей]

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \leqslant \left(\frac{2}{\lambda_0}\right)^2. \tag{7.6.66}$$

Это неравенство означает, грубо говоря, что только те периодические элементы $g(\mathbf{R}, \omega)$, которые больше, чем половина длины волны падающего света, дают вклад в поле рассеяния. Наоборот, из измерений спектральной плотности рассеянного поля для различных направлений рассеяния и при различных направлениях падения можно, в принципе, получить информацию о корреляциях диэлектрической восприимчивости некоторых твердых тел с точностью до порядка длины волны λ_0 падающего поля. В обычных газах и жидкостях, однако, длины корреляций обычно много меньше, чем длина волны. Тогда эксперименты такого рода по рассеянию менее удобны, хотя они могут дать информацию о дисперсии плотности флуктуаций из измерений интенсивности света, рассеянного в направлении вперед $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$ (ср. Van Kampen, 1969, разд. 3).

7.6.5. Рассеяние от простой жидкости

Теперь изучим случай рассеяния монохроматического света средой со случайными флуктуациями ее физических свойств. Мы рассмотрим классическую задачу, касающуюся рассеяния на флуктуациях плотности в простой жидкости, т.е. жидкости, состоящей только из одного типа молекул.

Когда свет проходит через прозрачную среду, часть его рассеивается даже в случае, когда среда является однородной. Смолуховский (Smoluchowski, 1908) предположил, что даже в совершенно однородной среде плотность не строго постоянна, а флуктуирует около равновесного значения, и что наблюдаемое рассеяние вызывается такими флуктуациями. Вскоре после этого Эйнштейн (Einstein, 1910) выполнил количественные расчеты, основанные на этом предположении. Фактически в это время мало было известно о

1968), внесли свой вклад в понимание рассеяния света. Эти исследования дали ценную информацию, например, о динамике флуктуаций и о переносе энергии и импульса в газах, жидкостях и твердых телах.

Применим формулу (7.6.50) к классической задаче рассеяния на флуктуациях плотности. Конкретно, мы рассматриваем рассеяние плоской, монохроматической, линейно поляризованной электромагнитной волны с частотой ω_0 и волновым вектором $k_0\mathbf{s}_0$ ($\mathbf{s}_0^2 = 1$) на моноатомной, непоглощающей однокомпонентной жидкости в условиях равновесия. Пусть

$$\Delta\hat{\eta}(\mathbf{r}, t; \omega_0) = \hat{\eta}(\mathbf{r}, t; \omega_0) - \langle\hat{\eta}\rangle_{\text{равн}} \tag{7.6.67}$$

представляет флуктуацию диэлектрической восприимчивости $\hat{\eta}$ относительно ее равновесного значения $\langle\hat{\eta}\rangle_{\text{равн}}$. Предположим, что $|\langle\hat{\eta}\rangle_{\text{равн}}|$ настолько мало, что его вкладом в рассеянное поле можно пренебречь. Если это не так, первое приближение Борна, на котором основывается наш анализ, не будет адекватно описывать рассеянное поле.

Согласно (7.6.55) спектральная плотность рассеянного поля задается в виде

$$S^{(\mathbf{s})}(r\mathbf{s}, \omega) = \frac{(2\pi)^3 k^4 I_0 V \sin^2\psi}{2r^2} \mathscr{G}^{(\Delta\hat{\eta})}(k\mathbf{s} - k_0\mathbf{s}_0, \omega - \omega_0; \omega_0), \tag{7.6.68}$$

где согласно (7.6.51а) и (7.6.28)

$$\mathscr{G}^{(\Delta\hat{\eta})}(\mathbf{K}, \Omega; \omega_0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_V d^3R \int_{-\infty}^{\infty} dT\, G^{(\Delta\hat{\eta})}(\mathbf{R}, T; \omega_0)\, e^{-i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{R} - \Omega T)}, \tag{7.6.69}$$

и

$$G^{(\Delta\hat{\eta})}(\mathbf{R}, T; \omega_0) = \langle\Delta\hat{\eta}^*(\mathbf{r}, t; \omega_0)\Delta\hat{\eta}(\mathbf{r} + \mathbf{R}, t + T; \omega_0)\rangle. \tag{7.6.70}$$

Считая, что флуктуации диэлектрической восприимчивости возникают из флуктуаций плотности ρ и температуры T, получим

$$\Delta\hat{\eta} = \left(\frac{\partial\hat{\eta}}{\partial\rho}\right)_T \Delta\rho + \left(\frac{\partial\hat{\eta}}{\partial T}\right)_\rho \Delta T. \tag{7.6.71}$$

При обычных условиях $(\partial\hat{\eta}/\partial\rho)_T \gg (\partial\hat{\eta}/\partial T)_\rho$ и, следовательно, вторым членом в правой части уравнения (7.6.71) можно пренебречь. Тогда можно записать

$$\Delta\hat{\eta}(\mathbf{r}, t; \omega_0) = \left(\frac{\partial\hat{\eta}}{\partial\rho}\right)_{\text{равн}} \Delta\rho(\mathbf{r}, t), \tag{7.6.72}$$

где производная $(\partial\hat{\eta}/\partial\rho)_{\text{равн}}$, будучи равновесной величиной, не зависит от $\mathbf{r}$ и t; однако, она зависит от частоты ω_0 падающего света.

Из (7.6.70) и (7.6.72) следует,что

$$G^{(\Delta\hat{\eta})}(\mathbf{R}, T; \omega_0) = \left(\frac{\partial\hat{\eta}}{\partial\rho}\right)^2_{\text{равн}} G^{(\Delta\rho)}(\mathbf{R}, T), \tag{7.6.73}$$

где

$$G^{(\Delta\rho)}(\mathbf{R}, T) = \langle\Delta\rho(\mathbf{r}, t)\Delta\rho(\mathbf{r} + \mathbf{R}, t + T)\rangle \tag{7.6.74}$$

— корреляционная функция флуктуаций плотности. Подставляя (7.6.73) в (7.6.69), мы сразу же получаем следующее выражение для $\mathscr{G}^{(\Delta\hat{\eta})}$:

$$\mathscr{G}^{(\Delta\hat{\eta})}(\mathbf{K}, \Omega) = \left(\frac{\partial\hat{\eta}}{\partial\rho}\right)^2_{\text{равн}} \mathscr{G}^{(\Delta\rho)}(\mathbf{K}, \Omega), \tag{7.6.75}$$

где

$$\mathscr{G}^{(\Delta\rho)}(\mathbf{K}, \Omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_V d^3R \int_{-\infty}^{\infty} dT\, G^{(\Delta\rho)}(\mathbf{R}, T)\, e^{-i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{R} - \Omega T)} \tag{7.6.76}$$

— структурная функция среды, выраженная через корреляционную функцию (7.6.74) флуктуаций плотности.

Подставляя (7.6.75) в (7.6.68), мы получим следующее выражение для спектральной плотности рассеянного света:

$$S^{(\mathbf{s})}(r\mathbf{s},\omega)=\frac{(2\pi)^3k^4I_0V\sin^2\psi}{2r^2}\left(\frac{\partial\hat{\eta}}{\partial\rho}\right)^2_{\text{равн}}\mathscr{G}^{(\Delta\rho)}(k\mathbf{s}-k_0\mathbf{s}_0,\omega-\omega_0). \tag{7.6.77}$$

Это выражение является небольшим обобщением основной формулы, используемой в теории рассеяния света на флуктуациях плотности при равновесных условиях.

Определение структурной функции $\mathscr{G}^{(\Delta\rho)}$ является довольно сложной задачей, которая может быть решена только приближенно на основе линеаризованных гидродинамических уравнений термодинамики необратимых процессов (Mountain, 1966). Этот предмет выходит за рамки этой книги, и поэтому мы просто сформулируем результат. Для простой жидкости в условиях локального термодинамического равновесия при температурах, не слишком близких к критическим точкам жидкости[1],

$$\mathscr{G}^{(\Delta\rho)}(\mathbf{K},\Omega)=g_0\left\{a_1\frac{\gamma_1K^2}{(\gamma_1K^2)^2+\Omega^2}+a_2\left[\frac{\gamma_2K^2}{(\gamma_2K^2)^2+(\Omega+vK)^2}+\frac{\gamma_2K^2}{(\gamma_2K^2)^2+(\Omega-vK)^2}\right]\right\}, \tag{7.6.78}$$

где g_0, a_1, a_2, γ_1 и γ_2 — константы и v — скорость звука в жидкости (выбранная постоянной).

Теперь согласно (7.6.77) нам необходимы значения структурных функций (7.6.78) для аргументов $\mathbf{K}=k\mathbf{s}-k_0\mathbf{s}_0$ и $\Omega=\omega-\omega_0$. Мы имеем

$$K^2=|k\mathbf{s}-k_0\mathbf{s}_0|^2=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2+\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2-2\left(\frac{\omega}{c}\right)\left(\frac{\omega_0}{c}\right)\cos\theta, \tag{7.6.79}$$

где θ — угол между направлением $\mathbf{s}$ рассеяния и направлением $\mathbf{s}_0$ падения. Если сдвиг частоты, получаемый при рассеянии достаточно мал, как это обычно бывает, то мы можем заменить ω на ω_0 в правой части (7.6.79), и тогда мы получим для K выражение

$$K=|k\mathbf{s}-k_0\mathbf{s}_0|\approx 2\left(\frac{\omega_0}{c}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{7.6.80}$$

Подставляя (7.6.80) в (7.6.78), мы найдем, что

$$\begin{aligned}\mathscr{G}^{(\Delta\rho)}(k\mathbf{s}-k_0\mathbf{s}_0,\omega-\omega_0)&=\\&=g_0\{a_1L[\omega-\omega_0;\Gamma_{\mathrm{R}}(\theta)]+a_2L[\omega-\omega_0+\omega_{\mathrm{B}}(\theta);\Gamma_{\mathrm{B}}(\theta)]+a_2L[\omega-\omega_0-\omega_{\mathrm{B}}(\theta);\Gamma_{\mathrm{B}}(\theta)]\},\end{aligned} \tag{7.6.81}$$

где $L[\omega-\omega_0;\Gamma]$ — функция Лоренца

$$L[\omega-\omega_0;\Gamma]=\frac{\Gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\Gamma^2}, \tag{7.6.82}$$

и

$$\Gamma_{\mathrm{R}}(\theta)=4\gamma_1\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \tag{7.6.83}$$

$$\Gamma_{\mathrm{B}}(\theta)=4\gamma_2\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \tag{7.6.84}$$

$$\omega_{\mathrm{B}}(\theta)=2\left(\frac{v}{c}\right)\omega_0\sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{7.6.85}$$

[1] Вблизи критической точки множитель g_0 в выражении (7.6.78) становится функцией K, отражая дальнодействующую корреляцию флуктуаций плотности, которая тогда происходит.

Из выражений (7.6.77) и (7.6.81) следует, что спектр рассеянного света в любом фиксированном направлении рассеяния состоит из лоренцевой линии с центром на частоте ω_0 падающего света и двух лоренцевых линий, расположенных симметрично по отношению к ней на частотах $\omega_0 \pm \omega_B(\theta)$. Центральная линия, которая имеет ширину $\Gamma_R(\theta)$, является линией Рэлея, а две другие линии, каждая с шириной $\Gamma(\theta)$, образуют дублет Бриллюэна. Пример такого наблюдавшегося спектра Рэлея — Бриллюэна показан на рис. 7.10.

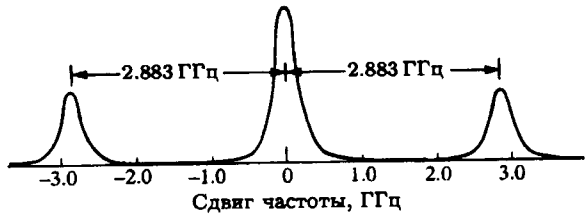


Рис. 7.10. Спектр Рэлея — Бриллюэна жидкого аргона при температуре $T = 84.97$ K для угла рассеяния $\theta = 90°14'$ при длине волны падающего лазерного света $\lambda_0 = 5145$ Å (Fleury and Boon, 1969)

На более элементарном уровне дублет Бриллюэна может рассматриваться, грубо говоря, как возникающий из-за сдвига Доплера падающей световой волны при отражении от движущихся звуковых волн (Benedek, 1968). Его происхождение также может быть понято на квантово-механическом уровне как следствие сохранения энергии и импульса между падающим фотоном, рассеянным фотоном и акустическим фононом. Линия Бриллюэна с центром на более низкой частоте также известна как *линия Стокса*, т.к. Стокс несколько ранее наблюдал люминесценцию на частоте, более низкой, чем возбуждающий свет. Другую линию с центром на более высокой частоте часто называют *антистоксовой линией*.

Приложение 7.1
Вычисление среднего значения $\langle\langle \mathscr{P}^*_{1l}(\mathbf{k},\omega)\mathscr{P}_{1m}(\mathbf{k}',\omega')\rangle\rangle$, (выражение (7.6.36))[1]

Из (7.6.26) следует, что

$$\langle\langle \mathscr{P}^*_{1l}(\mathbf{k},\omega)\mathscr{P}_{1m}(\mathbf{k}',\omega')\rangle\rangle = \frac{1}{(2\pi)^6}\int_V d^3r_1\int_V d^3r_2\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_1\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_2\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_2)}\times$$
$$\times\langle\bar{\eta}^*(\mathbf{r}_1,\omega-\omega_1;\omega_1)\bar{\eta}(\mathbf{r}_2,\omega'-\omega_2;\omega_2)\rangle\langle[\widetilde{\mathbf{E}}^{(i)}_l(\mathbf{r}_1,\omega_1)]^*\widetilde{\mathbf{E}}^{(i)}_m(\mathbf{r}_2,\omega_2)\rangle, \quad \text{(A7.1.1)}$$

где мы использовали предположение о том, что флуктуации среды и падающего поля статистически независимы. Второе среднее, которое появляется в правой части (A7.1.1) согласно (7.6.30) задается в виде

$$\langle[\widetilde{\mathbf{E}}^{(i)}_l(\mathbf{r}_1,\omega)]^*\widetilde{\mathbf{E}}^{(i)}_m(\mathbf{r}_2,\omega')\rangle = W^{(i)}_{lm}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\omega)\delta(\omega-\omega'). \quad \text{(A7.1.2)}$$

Подставляя (A7.1.2) в (A7.1.1) и выполняя тривиальное интегрирование по ω_2, мы найдем, что

$$\langle\langle \mathscr{P}^*_{1l}(\mathbf{k},\omega)\mathscr{P}_{1m}(\mathbf{k}',\omega')\rangle\rangle = \frac{1}{(2\pi)^6}\int_V d^3r_1\int_V d^3r_2\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_1\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_2)}\times$$
$$\times\langle[\bar{\eta}(\mathbf{r}_1,\omega-\omega_1;\omega_1)]^*\bar{\eta}(\mathbf{r}_2,\omega'-\omega_1;\omega_1)\rangle W^{(i)}_{lm}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\omega_1). \quad \text{(A7.1.3)}$$

Среднее в правой части (A7.1.3), которое включает в себя диэлектрическую восприимчивость, может быть выражено в следующем виде, что следует из (7.6.16a) и (7.6.28):

$$\langle[\bar{\eta}(\mathbf{r}_1,\Omega;\omega_1)]^*\bar{\eta}(\mathbf{r}_2,\Omega';\omega_1)\rangle = \overline{G}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\Omega;\omega_1)\delta(\Omega-\Omega'), \quad \text{(A7.1.4)}$$

где согласно (7.6.37)

$$\overline{G}(\mathbf{R},\Omega;\omega') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\mathbf{R},T;\omega')\,e^{i\Omega T}\,dT, \quad \text{(A7.1.5)}$$

[1] По Вольфу и Фолею (Wolf and Foley, 1989).

$G(\mathbf{R},T;\omega')$ — корреляционная функция, определенная выражением (7.6.28), диэлектрической восприимчивости, а именно,

$$G(\mathbf{R},T;\omega') = \langle \hat{\eta}^*(\mathbf{r},t;\omega')\hat{\eta}(\mathbf{r}+\mathbf{R},t+T;\omega')\rangle. \tag{A7.1.6}$$

Подставляя (A7.1.4) в (A7.1.3), мы получим формулу

$$\langle\langle \mathscr{P}^*_{1l}(\mathbf{k},\omega)\mathscr{P}_{1m}(\mathbf{k}',\omega')\rangle\rangle = \frac{\delta(\omega-\omega')}{(2\pi)^6}\int_V d^3r_1\int_V d^3r_2\, e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1\, \overline{G}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\omega-\omega_1;\omega_1)W^{(i)}_{lm}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\omega_1). \tag{A7.1.7}$$

Вследствие нашего предположения о том, что длина пространственной корреляции флуктуаций диэлектрической восприимчивости мала по сравнению с линейными размерами рассеивающего объема, можно показать, что выражение (A7.1.7) сразу же сводится к

$$\langle\langle \mathscr{P}^*_{1l}(\mathbf{k},\omega)\mathscr{P}_{1m}(\mathbf{k}',\omega')\rangle\rangle \approx \frac{V\delta(\omega-\omega')}{(2\pi)^6}\int_V d^3R\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1\, \overline{G}(\mathbf{R},\omega-\omega_1;\omega_1)W^{(i)}_{lm}(\mathbf{R},\omega_1), \tag{A7.1.8}$$

где V — это объем, занятый рассеивающей средой. Эта формула совпадает с выражением (7.6.36) в тексте.

Задачи

7.1 Двойная звезда состоит из двух компонент, имеющих одинаковый угловой диаметр 2α и угловое расстояние 2β. Звезды испускают свет с одинаковой средней длиной волны и могут рассматриваться как круговые объекты с постоянными интенсивностями. Отношение интенсивностей двух компонент равно $1:b$. Полученный свет пропускается через фильтр, так что он становится квазимонохроматическим.

(а) Выведите выражение для равновременно́й степени когерентности света звезды в плоскости наблюдения звездного интерферометра Майкельсона.

(б) Если $\beta \gg \alpha$, покажите как β может быть определено из кривой видности.

7.2 Спектр света состоит из N линий с одинаковым профилем, но с разными интенсивностями, с центральными частотами $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N$. Свет анализируется с помощью интерферометра Майкельсона. Выведите выражение для кривой видности.

7.3 Спектр светового луча состоит из двух линий с одинаковым гауссовским профилем с центрами на частотах ν_1 и ν_2. Полагая, что расстояние $\Delta\nu = |\nu_1-\nu_2|$ между двумя линиями велико по сравнению с их эффективными ширинами, покажите, как можно определить $\Delta\nu$ из кривой видности, когда свет проходит через интерферометр Майкельсона.

7.4 Интерферометр Майкельсона освещается квазимонохроматическим световым лучом, имеющим прямоугольное спектральное распределение с шириной $\Delta\nu$ и с центром на частоте $\bar{\nu}$. Интерференционные полосы в первый раз исчезают, когда одно из зеркал смещается на расстояние d_0 от своего «симметричного» положения по отношению к другому зеркалу. Определите ширину $\Delta\nu$ спектрального распределения.

7.5 Определите обобщенную структурную функцию $S(\mathbf{K},\Omega;\omega')$ [(7.6.51a)] рассеивающей среды, пространственно-временна́я корреляционная функция которой задается выражением

$$G(\mathbf{R},T;\omega') = \frac{B}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\, e^{-R^2/2\sigma^2}\, e^{-T^2/2\tau^2},$$

где B, σ и τ — положительные параметры, которые могут зависеть от частоты ω', и σ мало по сравнению с размерами рассеивающего объема.

7.6 Рассмотрим немонохроматическую линейно поляризованную плоскую электромагнитную волну, имеющую гауссовский спектральный профиль со среднеквадратичной шириной Γ_0 и с центром на частоте ω_0, т.е.

$$S^{(i)}(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\Gamma_0}[g(\omega - \omega_0; \Gamma_0) + g(\omega + \omega_0; \Gamma_0)],$$

где A, ω_0 и Γ_0 — положительные константы и

$$g(\omega \pm \omega_0; \Gamma_0) = \exp[-(\omega \pm \omega_0)^2/2\Gamma_0^2].$$

Эта волна падает на статистически однородную среду, пространственно-временна́я корреляционная функция которой задается выражением, приведенным в задаче 7.5. Полагая, что в эффективном спектральном диапазоне падающего света частотной зависимостью B, σ и τ можно пренебречь, определите с точностью первого борновского приближения спектр рассеянного света в дальней зоне среды.

7.7 Линейно поляризованная немонохроматическая плоская волна падает на однородную статическую среду, пространственная корреляционная функция которой [определенная выражением (7.6.56) в тексте] имеет функциональный вид

$$g_\eta(\mathbf{R}, \omega) = f(\omega)h(kR), \quad (k = \omega/c).$$

Покажите, что нормированный спектр рассеянного поля одинаков по всей дальней зоне, но в общем случае не равен нормированному спектру волны, падающей на рассеивающую среду.

Глава 8

КОРРЕЛЯЦИИ ОПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

8.1. Введение

В предыдущих главах мы, в основном, имели дело с простейшими когерентными эффектами оптических полей, а именно, с теми, которые зависят от корреляций полевой переменной в двух пространственно-временны́х точках $(\mathbf{r}_1, t_1)$ и $(\mathbf{r}_2, t_2)$. Как мы видели, к этим эффектам относятся наиболее простые когерентные явления, такие, как интерференция, дифракция и излучение флуктуирующих источников.

В этой главе мы обобщим теорию на более сложные ситуации, которые должны описываться корреляциями более высокого порядка, т.е. корреляциями полевых переменных в более чем двух пространственно-временны́х точках или математическими ожиданиями, содержащими различные степени и произведения полевых переменных[1]. Такие ситуации приобрели большое значение в связи с развитием лазерной и нелинейной оптики. Основное различие между статистическими свойствами теплового света и лазерного света можно в действительности понять, только выходя за рамки элементарной корреляционной теории второго порядка.

Многие когерентные явления высшего порядка наиболее четко проявляют себя в процессе фотоэлектрического детектирования, который может быть адекватно описан только квантовой теорией детектирования или с учетом квантовых свойств поля, что и будет сделано в последующих главах. Однако, в силу того, что поле все еще описывается классически в полуклассической теории детектирования света и также потому, что классическое описание поля создает естественное препятствие квантовому описанию полевых корреляций, мы теперь обсудим в общем корреляции поля всех порядков на основе классической теории флуктуирующего волнового поля. Целесообразность этого описания станет очевидной в гл. 12.

8.2. Пространственно-временны́е корреляционные функции произвольного порядка

Для начала вспомним определение (4.3.6) корреляционной функции второго порядка флуктуирующего скалярного волнового поля, представленного аналитическим сигналом $V(\mathbf{r}, t)$, а именно,

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1) V(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \tag{8.2.1}$$

где угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю. В более явной форме

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \iint V_1^* V_2 p_2(V_1, V_2; \mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)\, d^2V_1\, d^2V_2, \tag{8.2.2}$$

где p_2 — плотность совместной вероятности флуктуирующего поля в двух пространственно-временны́х точках $(\mathbf{r}_1, t_1)$ и $(\mathbf{r}_2, t_2)$. Хотя, как мы видели в предыдущих разделах, эта функция очень полезна для

[1] В рамках классической теории флуктуирующих волновых полей корреляционные функции высшего порядка были введены Вольфом (Wolf, 1963, 1964) и Манделем (Mandel, 1964).

анализа различных когерентных явлений, она не может, вообще говоря, дать какую-либо информацию об эффектах, которые используют плотности вероятности третьего и более высокого порядков (разд. 2.1.2).

Одними из наиболее важных величин, которые необходимы для объяснения когерентных явлений, зависящих от плотностей вероятности порядка выше, чем второй, являются корреляционные функции

$$\Gamma^{M,N}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};t_1,t_2,\ldots,t_{M+N}) = \\ = \langle V^*(\mathbf{r}_1,t_1)V^*(\mathbf{r}_2,t_2)\ldots V^*(\mathbf{r}_M,t_M)V(\mathbf{r}_{M+1},t_{M+1})V(\mathbf{r}_{M+2},t_{M+2})\ldots V(\mathbf{r}_{M+N},t_{M+N})\rangle \quad (8.2.3)$$

или, в более явной форме

$$\Gamma^{M,N}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};t_1,t_2,\ldots,t_{M+N}) = \int\limits_{(M+N)}\ldots\int V_1^*V_2^*\ldots V_M^*V_{M+1}V_{M+2}\ldots V_{M+N}\times \\ \times p_{M+N}(V_1,V_2,\ldots,V_{M+N};\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2;\ldots;\mathbf{r}_{M+N},t_{M+N})\,d^2V_1\,d^2V_2\ldots d^2V_{M+N}. \quad (8.2.4)$$

Мы будем называть $\Gamma^{(M,N)}$ *функцией взаимной корреляции (пространственно-временной)* порядка (M,N) случайного поля $V(\mathbf{r},t)$. По причинам, которые будут ясны позднее, корреляционные функции, для которых $N=M$, наиболее полезны. Их часто называют корреляционными функциями порядка $2M$. Эта терминология находится в согласии с той, которая использовалась в предыдущих разделах этой книги, но не является универсальной; некоторые авторы называют $\Gamma^{(M,N)}$ корреляционной функцией порядка M, а не $2M$.

Для упрощения обозначений мы положим

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_m,t_m &= x_m, \quad m=1,2,\ldots,M,\\ \mathbf{r}_{M+n},t_{M+n} &= y_n, \quad n=1,2,\ldots,N.\end{aligned} \quad (8.2.5)$$

Тогда формула (8.2.3) может быть переписана как

$$\Gamma^{(M,N)}(x_1,x_2,\ldots,x_M;y_1,y_2,\ldots,y_N) = \langle V^*(x_1)V^*(x_2)\ldots V^*(x_M)V(y_1)V(y_2)\ldots V(y_N)\rangle. \quad (8.2.6)$$

Отметим ряд свойств этих корреляционных функций. Во-первых, из определения мы сразу же видим, что

$$[\Gamma^{(M,N)}(x_1,x_2,\ldots,x_M;y_1,y_2,\ldots,y_N)]^* = \Gamma^{(N,M)}(y_1,y_2,\ldots,y_N;x_1,x_2,\ldots,x_M). \quad (8.2.7)$$

Далее легко показать с помощью неравенства Шварца, что

$$|\Gamma^{(M,N)}(x_1,x_2,\ldots,x_M;y_1,y_2,\ldots,y_N)|^2 \leqslant \\ \leqslant \Gamma^{(M,M)}(x_1,x_2,\ldots,x_M;x_1,x_2,\ldots,x_M)\Gamma^{(N,N)}(y_1,y_2,\ldots,y_N;y_1,y_2,\ldots,y_N). \quad (8.2.8)$$

Выражения в правой части неравенства (8.2.8) имеют простой смысл. Это можно показать, полагая $M=N$ и $y_j=x_j$, $(j=1,2,\ldots,M)$ в выражении (8.2.6). Тогда

$$\Gamma^{(M,M)}(x_1,x_2,\ldots,x_M;x_1,x_2,\ldots,x_M) = \langle I(x_1)I(x_2)\ldots I(x_M)\rangle, \quad (8.2.9)$$

где

$$I(x_j) = V^*(x_j)V(x_j), \quad (j=1,2,\ldots,M), \quad (8.2.10)$$

— мгновенная интенсивность в пространственно-временной точке x_j.

Корреляционная функция (8.2.6) удовлетворяет условиям неотрицательной определенности, которые могут быть выведены следующим образом. Рассмотрим выражение

$$F \equiv \sum_{i=1}^{r} a_i V(x_1^{(i)})V(x_2^{(i)})\ldots V(x_M^{(i)}), \quad (8.2.11)$$

где r — произвольное положительное целое число, $x_m^{(i)}$ $(m = 1, 2, \ldots, M;\ i = 1, 2, \ldots, r)$ — произвольные пространственно-временны́е точки, и a_i — произвольные (действительные или комплексные) константы. Так как очевидно, что $\langle F^* F \rangle \geqslant 0$, то

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_i^* a_j \Gamma^{(M,M)}(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_M^{(i)}; x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_M^{(j)}) \geqslant 0. \tag{8.2.12}$$

Когда поле стационарно, все корреляционные функции $\Gamma^{(M,N)}$, конечно, инвариантны по отношению к переносу начала отсчета времени. Тогда они зависят только от $M + N - 1$ временны́х аргументов, которые мы можем выбрать в виде

$$\tau_2 = t_2 - t_1, \quad \tau_3 = t_3 - t_1, \quad \ldots, \quad \tau_{M+N} = t_{M+N} - t_1. \tag{8.2.13}$$

До сих пор наше рассмотрение ограничивалось скалярными полями. Для векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, такого, как электрическое или магнитное поле, аналогичные пространственно-временны́е корреляционные функции будут представлять собой тензоры

$$\Gamma^{(M,N)}_{j_1, j_2, \ldots, j_M; k_1, k_2, \ldots, k_N}(x_1, x_2, \ldots, x_M; y_1, y_2, \ldots, y_N) = \\ = \langle V^*_{j_1}(x_1) V^*_{j_2}(x_2) \ldots V^*_{j_M}(x_M) V_{k_1}(y_1) V_{k_2}(y_2) \ldots V_{k_N}(y_N) \rangle, \tag{8.2.14}$$

где индексы $j_1, j_2, \ldots, k_1, k_2, \ldots$ обозначают декартовы компоненты векторного поля $\mathbf{V}$. Дальнейшее обобщение на электромагнитное поле, которое мы не будем обсуждать, будет включать в себя декартовы компоненты как электрического, так и магнитного полей в выражении типа того, что появляется в правой части (8.2.14). Мы встречались с такого рода корреляционными тензорами второго порядка в разд. 6.5.

На практике корреляционные функции с $M = N$, иногда называемые корреляционными функциями четного порядка, более важны, чем корреляционные функции «нечетного порядка», для которых $N \neq M$. Это происходит потому, что флуктуирующее поле часто ведет себя как гауссовский случайный процесс, а для такого процесса корреляционные функции нечетного порядка все равны нулю [(8.4.2а)]. Более того, как будет показано в следующем разделе, когда поле квазимонохроматично и статистический ансамбль, который характеризует флуктуации, стационарен, но не обязательно является гауссовским, корреляции нечетного порядка равны нулю, за исключением очень больших значений индексов порядка M и N.

8.3. Пространственно-частотные корреляционные функции произвольного порядка[1]

Корреляционные функции, которые мы обсуждали в двух предыдущих разделах, характеризуют корреляции поля в пространственно-временно́й области. Теперь обратим наше внимание на корреляции в пространственно-частотной области.

Рассмотрим вновь флуктуирующее скалярное поле, представленное аналитическим сигналом $V(\mathbf{r}, t)$, которое не обязательно стационарно, и представим его в виде интеграла Фурье:

$$V(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \tilde{V}(\mathbf{r}, \nu)\, \mathrm{e}^{-2\pi i \nu t}\, d\nu. \tag{8.3.1}$$

Если мы подставим (8.3.1) в (8.2.3), то получим для $\Gamma^{(M,N)}$ выражение

$$\Gamma^{(M,N)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_{M+N}; t_1, t_2, \ldots, t_{M+N}) = \\ = \int_0^\infty d\nu_1 \int_0^\infty d\nu_2 \ldots \int_0^\infty d\nu_{M+N}\, \Phi^{(M,N)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_{M+N}; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{M+N}) \times \\ \times \prod_{j=1}^{M} \exp(2\pi i \nu_j t_j) \prod_{k=M+1}^{M+N} \exp(-2\pi i \nu_k t_k), \tag{8.3.2}$$

[1] Некоторые из соотношений, представленных в этом разделе, впервые были получены Метой и Манделем (Mehta and Mandel, 1967).

где

$$\Phi^{(M,N)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{M+N}) = \\ = \langle \widetilde{V}^*(\mathbf{r}_1,\nu_1)\widetilde{V}^*(\mathbf{r}_2,\nu_2)\ldots\widetilde{V}^*(\mathbf{r}_M,\nu_M)\widetilde{V}(\mathbf{r}_{M+1},\nu_{M+1})\widetilde{V}(\mathbf{r}_{M+2},\nu_{M+2})\ldots\widetilde{V}(\mathbf{r}_{M+N},\nu_{M+N})\rangle. \quad (8.3.3)$$

Мы будем называть $\Phi^{(M,N)}$, определенную выражением (8.3.3), *взаимной спектральной корреляционной функцией порядка* (M,N) *поля в точках* $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ..., $\mathbf{r}_{M+N}$.

Если мы выполним обратное преобразование Фурье выражения (8.3.2), то получим следующее выражение для взаимной спектральной корреляционной функции через пространственно-временну́ю корреляционную функцию $\Gamma^{(M,N)}$:

$$\Phi^{(M,N)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{M+N}) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_{M+N}\, \Gamma^{(M,N)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};t_1,t_2,\ldots,t_{M+N})\times \\ \times \prod_{j=1}^{M} \exp(-2\pi i\nu_j t_j) \prod_{k=M+1}^{M+N} \exp(2\pi i\nu_k t_k). \quad (8.3.4)$$

Предположим далее, что ансамбль, представляющий флуктуирующее поле, *стационарен*. Тогда пространственно-временна́я корреляционная функция $\Gamma^{(M,N)}$ будет инвариантна по отношению к переносу начала отсчета времени. В частности, если, как раньше, мы положим

$$\tau_l = t_l - t_1, \quad (l = 2,3,\ldots,M+N), \quad (8.3.5)$$

то $\Gamma^{(M,N)}$ будет независима от t_1. Тогда мы получим

$$\Gamma^{(M,N)} \equiv \Gamma^{(M,N)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};\tau_2,\ldots,\tau_{M+N}). \quad (8.3.6)$$

Подставляя (8.3.6) в многократный интеграл в правой части (8.3.4) и проводя (тривиальное) интегрирование по t_1, мы получим следующее выражение для взаимной спектральной корреляционной функции $\Phi^{(M,N)}$:

$$\Phi^{(M,N)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{M+N}) = \\ = \delta(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_M-\nu_{M+1}-\nu_{M+2}-\cdots-\nu_{M+N})\times \\ \times W^{(M,N)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};\nu_2,\nu_3,\ldots,\nu_{M+N}), \quad (8.3.7)$$

где $\delta(\nu)$ — дельта-функция Дирака и

$$W^{(M,N)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};\nu_2,\nu_3,\ldots,\nu_{M+N}) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_3 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_{M+N}\, \Gamma^{(M,N)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};\tau_2,\tau_3,\ldots,\tau_{M+N})\times \\ \times \prod_{j=2}^{M} \exp(-2\pi i\nu_j\tau_j) \prod_{k=M+1}^{M+N} \exp(2\pi i\nu_k\tau_k). \quad (8.3.8)$$

Мы неявно предположили при выводе, что $M > 1$. Если $M = 1$, то первый сомножитель (с индексом j) в правой части (8.3.8) следует заменить единицей.

Выражения (8.3.3) и (8.3.7) означают, что любые $M+N$ (обобщенных) фурье-компонент $\widetilde{V}(\mathbf{r}_j,\nu_j)$, $(j = 1,2,\ldots,M+N)$, стационарного случайного поля δ-коррелированны в том смысле, что взаимная спектральная корреляционная функция

$$\Phi^{(M,N)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{M+N}) = 0, \quad (8.3.9)$$

если только не

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_M - \nu_{M+1} - \nu_{M+2} - \cdots - \nu_{M+N} = 0. \tag{8.3.10}$$

Когда $M+N$ частот удовлетворяют уравнению (8.3.10), компоненты $\widetilde{V}(\mathbf{r}_j, \nu_j)$ будут в общем случае коррелированы, и их корреляция будет характеризоваться функцией $W^{(M,N)}$.

Исключим $\Phi^{(M,N)}$ из выражений (8.3.3) и (8.3.7). Тогда мы получаем

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{V}^*(\mathbf{r}_1,\nu_1)\widetilde{V}^*(\mathbf{r}_2,\nu_2)\ldots\widetilde{V}^*(\mathbf{r}_M,\nu_M)\widetilde{V}(\mathbf{r}_{M+1},\nu_{M+1})\widetilde{V}(\mathbf{r}_{M+2},\nu_{M+2})\ldots\widetilde{V}(\mathbf{r}_{M+N},\nu_{M+N})\rangle = \\ = W^{(M,N)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};\nu_2,\ldots,\nu_{M+N})\delta(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_M-\nu_{M+1}-\nu_{M+2}-\cdots-\nu_{M+N}).\end{aligned} \tag{8.3.11}$$

Эта формула, которая, очевидно, является обобщением выражения (4.3.39) (относящегося к случаю $M = N = 1$), может рассматриваться как определение *функции взаимной спектральной плотности порядка* (M,N) *стационарного оптического поля* $V(\mathbf{r},t)$.

Если мы выполним преобразование Фурье выражения (8.3.8) по частотам $\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{M+N}$, то получим следующее выражение для $\Gamma^{(M,N)}$ через $W^{(M,N)}$:

$$\begin{aligned}\Gamma^{(M,N)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};\tau_2,\tau_3,\ldots,\tau_{M+N}) = \\ = \int_0^\infty d\nu_2 \int_0^\infty d\nu_3 \ldots \int_0^\infty d\nu_{M+N}\, W^{(M,N)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};\nu_2,\nu_3,\ldots,\nu_{M+N})\times \\ \times \prod_{j=2}^{M} \exp(2\pi i \nu_j \tau_j) \prod_{k=M+1}^{M+N} \exp(-2\pi i \nu_k \tau_k).\end{aligned} \tag{8.3.12}$$

Пара формул (8.3.8) и (8.3.12) для корреляций высшего порядка аналогична обобщенной *теореме Винера — Хинчина* [(2.4.37) и (2.4.38)].

Покажем, что когда свет квазимонохроматичен, $W^{(M,N)}$ имеет нулевое значение при $M \neq N$, если только M и N не большие числа. Из (8.3.7) следует, что для того, чтобы спектральная корреляция порядка (M,N) была ненулевой, должно выполняться условие (8.3.10). Для квазимонохроматического света обобщенные амплитуды Фурье $|\widetilde{V}(\mathbf{r}_j,\nu_j)|$ [см. (8.3.1)] значительно отличаются от нуля только тогда, когда ν_j заключены в интервале $\nu_0 - \frac{1}{2}\Delta\nu \leqslant \nu_j \leqslant \nu_0 + \frac{1}{2}\Delta\nu$, где ν_0 — средняя частота и $\Delta\nu \ll \nu_0$ — эффективная ширина полосы света.

Если мы положим

$$\nu_j = \nu_0 + \delta\nu_j, \quad (j = 1,2,\ldots,M+N), \tag{8.3.13}$$

то

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_M = M\nu_0 + (\delta\nu_1 + \delta\nu_2 + \cdots + \delta\nu_M), \tag{8.3.14а}$$

$$\nu_{M+1} + \nu_{M+2} + \cdots + \nu_{M+N} = N\nu_0 + (\delta\nu_{M+1} + \delta\nu_{M+2} + \cdots + \delta\nu_{M+N}). \tag{8.3.14б}$$

В силу того, что $|\delta\nu_j| \leqslant \frac{1}{2}\Delta\nu_j$, из (8.3.14а) следует, что

$$M(\nu_0 - \frac{1}{2}\Delta\nu) \leqslant \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_M \leqslant M(\nu_0 + \frac{1}{2}\Delta\nu), \tag{8.3.15а}$$

а из (8.3.14б) следует, что

$$N(\nu_0 - \frac{1}{2}\Delta\nu) \leqslant \nu_{M+1} + \nu_{M+2} + \cdots + \nu_{M+N} \leqslant N(\nu_0 + \frac{1}{2}\Delta\nu). \tag{8.3.15б}$$

Если теперь $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{M+N}$ — $M+N$ частот, которые удовлетворяют требованию (8.3.10), то из неравенств (8.3.15) получаем

$$|N-M|\nu_0 - \frac{1}{2}(N+M)\Delta\nu \leqslant 0 \leqslant |N-M|\nu_0 + \frac{1}{2}(N+M)\Delta\nu. \tag{8.3.16}$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} \geqslant \frac{2|M-N|}{M+N}. \tag{8.3.17}$$

Ясно, что для квазимонохроматического света ($\Delta\nu/\nu_0 \ll 1$) это неравенство может выполняться лишь тогда, когда либо $M = N$, либо как M, так и N велики по сравнению с единицей. Отсюда мы заключаем, что для квазимонохроматического света $W^{(M,N)}$ и, следовательно, $\Gamma^{(M,N)}$ могут быть не равны нулю только при этих обстоятельствах.

8.4. Корреляционные функции полей, подчиняющихся гауссовской статистике

Когда флуктуации поля могут быть описаны как гауссовский случайный процесс, часто говорят, что поле подчиняется гауссовской статистике. Тогда все корреляционные функции поля могут быть выражены через корреляционные функции низшего порядка с помощью теоремы моментов для таких процессов [(1.6.33)]. Сейчас мы кратко рассмотрим некоторые из важных формул, которые выполняются для полей этого вида.

8.4.1. Пространственно-временна́я область

Когда поле $V(\mathbf{r}, t)$ имеет нулевое среднее значение в каждой точке, т.е. когда

$$\langle V(\mathbf{r}, t)\rangle = 0 \tag{8.4.1}$$

для всех $\mathbf{r}$, из определения (8.2.3) пространственно-временно́й корреляционной функции $\Gamma^{(N,M)}$ и из теоремы моментов для гауссовского случайного процесса следует, что

$$\Gamma^{(M,N)}(x_1, x_2, \ldots, x_M; y_1, y_2, \ldots, y_N) = 0, \quad \text{если } N \neq M, \tag{8.4.2а}$$

$$\Gamma^{(M,M)}(x_1, x_2, \ldots, x_M; y_1, y_2, \ldots, y_M) = \sum_{\pi} \Gamma^{(1,1)}(x_{i_1}, y_{j_1})\Gamma^{(1,1)}(x_{i_2}, y_{j_2}) \ldots \Gamma^{(1,1)}(x_{i_M}, y_{j_M}), \tag{8.4.2б}$$

где индексы i_p и j_q, $(1 \leqslant i_p \leqslant M,\ 1 \leqslant j_q \leqslant M))$ — целые числа и $\sum_\pi$ означает суммирование по всем $M!$ возможным перестановкам индексов.

Некоторые следствия формулы (8.4.2б) для случая, когда $M = N = 2$, полезны на практике, и поэтому мы рассмотрим этот частный случай более подробно.

Когда $M = 2$, выражение (8.4.2б) имеет вид

$$\Gamma^{(2,2)}(x_1, x_2; x_3, x_4) = \Gamma^{(1,1)}(x_1, x_3)\Gamma^{(1,1)}(x_2, x_4) + \Gamma^{(1,1)}(x_1, x_4)\Gamma^{(1,1)}(x_2, x_3). \tag{8.4.3}$$

Положим $x_3 = x_1, x_4 = x_2$. В силу того, что согласно выражению (8.2.9) $\Gamma^{(1,1)}(x_j, x_j) = \langle I(x_j)\rangle$ — это среднее значение интенсивности в пространственно-временно́й точке x_j и в силу того, что согласно выражению (8.2.7) $\Gamma^{(1,1)}(x_2, x_1) = [\Gamma^{(1,1)}(x_1, x_2)]^*$ формула (8.4.3) принимает вид

$$\Gamma^{(2,2)}(x_1, x_2; x_1, x_2) = \langle I(x_1)\rangle\langle I(x_2)\rangle + |\Gamma^{(1,1)}(x_1, x_2)|^2. \tag{8.4.4}$$

Если к тому же поле стационарно, то $\Gamma^{(2,2)}(x_1, x_2; x_1, x_2)$ и $\Gamma^{(1,1)}(x_1, x_2)$ зависят от временны́х аргументов только через разность $t_2 - t_1$, и мы тогда запишем

$$\Gamma^{(2,2)}(x_1, x_2; x_1, x_2) \equiv \Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_2 - t_1),$$
$$\Gamma^{(1,1)}(x_1, x_2) \equiv \Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_2 - t_1).$$

Тогда выражение (8.4.4) сводится к

$$\Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_2 - t_1) = \langle I(\mathbf{r}_1, t)\rangle\langle I(\mathbf{r}_2, t)\rangle[1 + |\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_2 - t_1)|^2], \tag{8.4.5}$$

где

$$\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{[\langle I(\mathbf{r}_1, t)\rangle]^{1/2}[\langle I(\mathbf{r}_2, t)\rangle]^{1/2}} \tag{8.4.6}$$

— просто обычная (второго порядка) комплексная степень когерентности [(4.3.12б)]. Средние величины $\langle I(\mathbf{r}_j,t)\rangle$, $(j=1,2)$, интенсивностей теперь, конечно, не зависят от времени, потому что нами предполагалось, что поле стационарно.

Введем флуктуации интенсивностей

$$\Delta I_j = I(\mathbf{r}_j,t_j) - \langle I(\mathbf{r}_j,t_j)\rangle. \tag{8.4.7}$$

Тогда

$$\langle \Delta I_1 \Delta I_2\rangle \equiv \langle I(\mathbf{r}_1,t_1)I(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle - \langle I(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle\langle I(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle. \tag{8.4.8}$$

Теперь учтем, что

$$\langle I(\mathbf{r}_1,t_1)I(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle = \Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_2-t_1). \tag{8.4.9}$$

Из (8.4.5), (8.4.8) и (8.4.9) следует, что

$$\langle \Delta I_1 \Delta I_2\rangle = \langle I(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle\langle I(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle|\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_2-t_1)|^2. \tag{8.4.10}$$

В частности, если $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}$, $t_1=t_2=t$ и мы воспользуемся тем фактом, что $\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r},0)=1$, то выражение (8.4.10) сводится к

$$\langle(\Delta I)^2\rangle = \langle I(\mathbf{r},t)\rangle^2, \tag{8.4.11}$$

где $\Delta I \equiv \Delta I(\mathbf{r},t)$.

До сих пор мы рассматривали только скалярное поле $V(\mathbf{r},t)$, так что предыдущие формулы не могут учитывать поляризационные свойства электромагнитных полей. Сейчас мы обобщим формулу (8.4.10), чтобы включить в рассмотрение поляризационные эффекты.

Пусть $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ представляет векторное поле, например, вектор электрического поля плоской волны, чьи статистические свойства описываются гауссовским случайным процессом с нулевым средним. Пусть $V_x(\mathbf{r},t)$ и $V_y(\mathbf{r},t)$ компоненты $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$, представленные комплексными аналитическими сигналами, в двух взаимно ортогональных направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны. Тогда мгновенная интенсивность задается выражением

$$I(\mathbf{r},t) = I_x(\mathbf{r},t) + I_y(\mathbf{r},t), \tag{8.4.12}$$

где $I_x = V_x^* V_x$ и $I_y = V_y^* V_y$. Флуктуации интенсивности $\Delta I(\mathbf{r},t) = I(\mathbf{r},t) - \langle I(\mathbf{r},t)\rangle$, задаются с помощью простой формулы

$$\Delta I(\mathbf{r},t) = \Delta I_x(\mathbf{r},t) + \Delta I_y(\mathbf{r},t), \tag{8.4.13}$$

где $\Delta I_j(\mathbf{r},t) = I_j(\mathbf{r},t) - \langle I_j(\mathbf{r},t)\rangle$, $(j=x,y)$ — флуктуации интенсивностей двух компонент $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$. Используя (8.4.13), мы сразу же получим, что корреляция между флуктуациями интенсивности волны в любых двух пространственно-временны́х точках задается формулой

$$\langle \Delta I(\mathbf{r}_1,t)\Delta I(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle = \sum_i \sum_j \langle \Delta I_i(\mathbf{r}_1,t)\Delta I_j(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle, \quad (i=x,y;\ j=x,y). \tag{8.4.14}$$

Формула (8.4.14) справедлива в общем случае. Теперь рассмотрим ее для частного случая, когда статистические свойства у $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ такие же, как у гауссовского случайного процесса. Тогда мы сразу же найдем с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые мы использовали раньше для скалярного поля, что каждое слагаемое под знаками суммирования в (8.4.14) задается формулой, аналогичной (8.4.10). Следовательно, выражение (8.4.14) сводится к виду

$$\langle \Delta I(\mathbf{r}_1,t)\Delta I(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle = \sum_i \sum_j \langle I_i(\mathbf{r}_1,t)\rangle\langle I_j(\mathbf{r}_2,t)\rangle|\gamma_{ij}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)|^2, \tag{8.4.15}$$

где

$$\gamma_{ij}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \frac{\Gamma_{ij}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)}{[\langle I_i(\mathbf{r}_1,t)\rangle]^{1/2}[\langle I_j(\mathbf{r}_2,t)\rangle]^{1/2}}, \tag{8.4.16}$$

$$\Gamma_{ij}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \langle V_i^*(\mathbf{r}_1,t)V_j(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle. \tag{8.4.17}$$

Выражение (8.4.15) — это требуемое обобщение выражения (8.4.10).

Хотя формула (8.4.15) имеет вид, зависящий от выбора направлений x и y, она должна быть независима от этого, потому что величина в левой части — скаляр, что легко проверить, выражая правую часть этого уравнения в несколько другой форме. Для этого заметим, что каждое слагаемое под знаком суммирования в (8.4.15) согласно (8.4.16) равно $|\Gamma_{ij}^{(1.1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|^2$. Следовательно, формула (8.4.15) может быть выражена в виде

$$\langle \Delta I(\mathbf{r}_1, t) \Delta I(\mathbf{r}_2, t+\tau) \rangle = \mathrm{Tr}[\mathbf{J}(\tau)\mathbf{J}^\dagger(\tau)], \tag{8.4.18}$$

где

$$\mathbf{J}(\tau) = \begin{bmatrix} \Gamma_{xx}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) & \Gamma_{xy}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \\ \Gamma_{yx}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) & \Gamma_{yy}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \end{bmatrix}. \tag{8.4.19}$$

Если в качестве вектора поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ выбран вектор электрического поля, то эта матрица является, очевидно, обобщением равновременной 2×2-матрицы когерентности (или поляризации) (6.2.6) и $\mathbf{J}^\dagger$ — эрмитово сопряженная матрица. В силу того, что правая часть выражения (8.4.18) — это след матрицы, она в действительности не зависит от направлений x и y.

Теперь мы кратко рассмотрим некоторые частные случаи выражения (8.4.15), которые представляют практический интерес. Сначала предположим, что волна *линейно поляризована*, скажем, в направлении x. Тогда $\langle I_y(\mathbf{r}, t) \rangle \equiv 0$, и выражение (8.4.15) сводится к

$$\langle \Delta I(\mathbf{r}_1, t) \Delta I(\mathbf{r}_2, t+\tau) \rangle = \langle I_x(\mathbf{r}_1, t) \rangle \langle I_x(\mathbf{r}_2, t) \rangle |\gamma_{xx}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|^2. \tag{8.4.20}$$

Эта формула находится в согласии с выражением (8.4.10) для скалярного поля, что и предполагалось.

Далее предположим, что волна полностью *неполяризована*. Тогда x- и y-компоненты поля некоррелированны (ср. разд. 6.3.1), т.е.

$$\gamma_{xy}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = 0, \tag{8.4.21}$$

$$\langle I_x(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle I_y(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle. \tag{8.4.22}$$

Более того, поскольку направления неполяризованной волны x и y полностью эквивалентны, мы также получаем

$$\gamma_{xx}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \gamma_{yy}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau). \tag{8.4.23}$$

Используя (8.4.21), (8.4.22) и (8.4.23) в выражении (8.4.15) и опуская индексы у $\gamma_{xx}^{(1,1)}$ и $\gamma_{yy}^{(1,1)}$, мы получим формулу

$$\langle \Delta I(\mathbf{r}_1, t) \Delta I(\mathbf{r}_2, t+\tau) \rangle = \frac{1}{2} \langle I(\mathbf{r}_1, t) \rangle \langle I(\mathbf{r}_2, t) \rangle |\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|^2. \tag{8.4.24}$$

Сравнивая выражения (8.4.4) и (8.4.20), мы видим, что корреляция между флуктуациями интенсивности неполяризованной волны равна в точности половине корреляции поляризованной волны с такой же усредненной интенсивностью и с такой же степенью когерентности.

Формула (8.4.24) показывает, что, зная корреляции флуктуаций интенсивности неполяризованной, статистически стационарной волны, флуктуации которой определяются статистикой Гаусса, можно определить абсолютное значение степени когерентности волны второго порядка. Этот результат является основой для интерферометрии корреляций (или интенсивностей), которую мы будем обсуждать в разд. 9.9 и 9.10.

В качестве другого примера рассмотрим вариацию флуктуаций интенсивности частично поляризованной волны. Из общей формулы (8.4.15) при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, $\tau = 0$ получаем, что

$$\langle [\Delta I(\mathbf{r}, t)]^2 \rangle = \sum_i \sum_j \langle I_i(\mathbf{r}, t) \rangle \langle I_j(\mathbf{r}, t) \rangle |\gamma_{ij}^{(1,1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0)|^2, \tag{8.4.25}$$

а поскольку нормировка коэффициентов корреляции такова, что $\gamma_{xx}^{(1,1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0) = \gamma_{yy}^{(1,1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0) = 1$, формула (8.4.25) сводится к

$$\langle [\Delta I(\mathbf{r}, t)]^2 \rangle = \langle I_x(\mathbf{r}, t) \rangle^2 + \langle I_y(\mathbf{r}, t) \rangle^2 + 2 \langle I_x(\mathbf{r}, t) \rangle \langle I_y(\mathbf{r}, t) \rangle |\gamma_{xy}^{(1,1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0)|^2. \tag{8.4.26}$$

Теперь можно сразу же показать, используя преобразование (6.2.33) для элементов матрицы когерентности при повороте осей x и y вокруг направления распространения волны, что оси можно выбрать таким образом, что $\langle I_x \rangle = \langle I_y \rangle$; и из выражения (6.3.26) следует, что при этих условиях величина $|\gamma_{xy}^{(1,1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0)|$ как раз равна степени поляризации $P(\mathbf{r})$ волны. Следовательно, выражение (8.4.26) можно записать в виде

$$\langle [\Delta I(\mathbf{r}, t)]^2 \rangle = \frac{1}{2}[1 + P^2(\mathbf{r})]\langle I(\mathbf{r}, t)\rangle^2, \tag{8.4.27}$$

где было использовано выражение (8.4.22).

8.4.2. Пространственно-частотная область

Мы видели в разд. 8.4.1, что когда флуктуации поля могут быть описаны как гауссовский случайный процесс, пространственно-временные корреляционные функции $\Gamma^{(M,N)}$ могут быть выражены через $\Gamma^{(1,1)}$. Из этого результата сразу же следует, что взаимные спектральные корреляционные функции $\Phi^{(M,N)}$ могут быть выражены через $\Phi^{(1,1)}$. Для того чтобы увидеть это, нам нужно лишь подставить (8.4.2) в (8.3.4), и тогда сразу же получим, что

$$\Phi^{(M,N)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_M; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \ldots, \mathbf{r}'_N; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{M+N}) = 0, \quad \text{если } N \neq M, \tag{8.4.28а}$$

и

$$\Phi^{(M,M)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_M; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \ldots, \mathbf{r}'_M; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2M}) =$$
$$= \sum_{\pi} \Phi^{(1,1)}(\mathbf{r}_{i_1}, \mathbf{r}'_{j_1}; \nu_{i_1}, \nu_{j_1}) \Phi^{(1,1)}(\mathbf{r}_{i_2}, \mathbf{r}'_{j_2}; \nu_{i_2}, \nu_{j_2}) \ldots \Phi^{(1,1)}(\mathbf{r}_{i_M}, \mathbf{r}'_{j_M}; \nu_{i_M}, \nu_{j_M}). \tag{8.4.28б}$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда $M = N = 2$. Для этого случая формула (8.4.28б) принимает вид, если мы запишем $\mathbf{r}_3$ вместо $\mathbf{r}'_1$ и $\mathbf{r}_4$ вместо $\mathbf{r}'_2$:

$$\Phi^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) =$$
$$= \Phi^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3; \nu_1, \nu_3) \Phi^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4; \nu_2, \nu_4) + \Phi^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4; \nu_1, \nu_4) \Phi^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3; \nu_2, \nu_3). \tag{8.4.29}$$

Если поле стационарно, можно сразу же получить из (8.4.28) и (8.4.27) соответствующие выражения для взаимных спектральных плотностей высшего порядка через плотности низшего порядка. В частном случае, когда $M = N = 2$, мы, например, получим

$$W^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; \nu_2, \nu_3, \nu_4)\delta(\nu_1 + \nu_2 - \nu_3 - \nu_4) =$$
$$= W^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3; \nu_3) W^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4; \nu_4)\delta(\nu_3 - \nu_1)\delta(\nu_4 - \nu_2) +$$
$$+ W^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4; \nu_4) W^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3; \nu_3)\delta(\nu_4 - \nu_1)\delta(\nu_3 - \nu_2). \tag{8.4.30}$$

8.5. Представление по когерентным модам взаимных спектральных плотностей произвольного порядка[1]

8.5.1. Общие выражения

В разд. 4.7 мы показали, что взаимная спектральная плотность низшего порядка ($M = N = 1$), которую мы обозначали как $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$, стационарного оптического поля в конечной области D свободного пространства может быть выражена в следующем виде [см. (4.7.9)]:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \sum_n \alpha_n(\nu) \psi_n^*(\mathbf{r}_1, \nu) \psi_n(\mathbf{r}_2, \nu), \tag{8.5.1}$$

[1] Анализ, представленный в этом разделе, основан на исследованиях Агарвала и Вольфа (Agarwal and Wolf, 1993).

что иногда называется представлением по когерентным модам взаимной спектральной плотности. Здесь ψ_n — собственные функции (ортонормированные) и α_n — собственные значения интегрального уравнения

$$\int_D W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\psi_n(\mathbf{r}_1,\nu)\,d^3r_1 = \alpha_n(\nu)\psi_n(\mathbf{r}_2,\nu). \tag{8.5.2}$$

Мы также показали, что взаимная спектральная плотность $W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ может быть выражена как корреляционная функция в виде [см. (4.7.38)]

$$W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu) = \langle U^*(\mathbf{r}_1,\nu)U(\mathbf{r}_2,\nu)\rangle_\nu. \tag{8.5.3}$$

Здесь $\{U(\mathbf{r},\nu)\exp(-2\pi i\nu t)\}$ — ансамбль монохроматических полей с частотой ν каждое, и усреднение правой части (8.5.3) проводится по этому ансамблю. Поля $U(\mathbf{r},\nu)$ могут генерироваться из когерентной моды $\psi_n(\mathbf{r},\nu)$ с помощью формулы

$$U(\mathbf{r},\nu) = \sum_n a_n(\nu)\psi_n(\mathbf{r},\nu), \tag{8.5.4}$$

где $a_n(\nu)$ — случайные коэффициенты, такие, что

$$\langle a_n^*(\nu)a_m(\nu)\rangle_\nu = \alpha_n(\nu)\delta_{nm}, \tag{8.5.5}$$

δ_{nm} — символ Кронекера.

Представления (8.5.1) и (8.5.3) оказались очень полезными при рассмотрении различных проблем статистической оптики, как очевидно, например, из анализа некоторых задач распространения частично когерентного света, рассмотренного в гл. 5, и в связи с теорией мод лазерного резонатора, обсуждавшейся в разд. 7.4.

В этом разделе мы обобщим пространственно-частотное изложение на корреляции произвольного порядка. Однако, в отличие от ситуации с корреляциями низшего порядка оказывается, что строгая формулировка теории более высоких порядков требует использования обобщенных функций. Как и везде в этой книге, мы не будем использовать довольно сложный аппарат теории обобщенных функций, а вместо этого будем использовать эвристические рассуждения и дельта-функцию Дирака.

Начнем с формального разложения (обобщенного) фурье-образа $\widetilde{V}(\mathbf{r},\nu)$ флуктуирующей переменной поля $V(\mathbf{r},t)$ [(4.3.38)] по собственным функциям $\psi_n(\mathbf{r},\nu)$ интегрального уравнения (8.5.2)

$$\widetilde{V}(\mathbf{r},\nu) = \sum_n b_n(\nu)\psi_n(\mathbf{r},\nu). \tag{8.5.6}$$

Благодаря тому, что функции ψ_n образуют ортонормированную систему в области D, из разложения (8.5.6) сразу же следует, что коэффициенты разложения $b_n(\nu)$, выраженные через $\widetilde{V}$, задаются формулой

$$b_n(\nu) = \int_D \widetilde{V}(\mathbf{r},\nu)\psi_n^*(\mathbf{r},\nu)\,d^3r. \tag{8.5.7}$$

Важно отметить, что в нашем анализе фигурируют два разных статистических ансамбля: ансамбль случайных функций $U(\mathbf{r},\nu)$ и ансамбль случайных функций $\widetilde{V}(\mathbf{r},\nu)$. Первый характеризуется ансамблем коэффициентов разложения $a_n(\nu)$, второй — ансамблем коэффициентов разложения $b_n(\nu)$.

Можно сразу же установить связь между корреляциями ансамблей a_n и b_n. Используя формулу (8.5.7) и меняя местами порядок усреднения и интегрирования, мы получаем, что

$$\langle b_n^*(\nu)b_m(\nu')\rangle = \int_D\int_D \langle\widetilde{V}^*(\mathbf{r}_1,\nu)\widetilde{V}(\mathbf{r}_2,\nu')\rangle\psi_n(\mathbf{r}_1,\nu)\psi_m^*(\mathbf{r}_2,\nu')\,d^3r_1 d^3r_2. \tag{8.5.8}$$

Угловые скобки в левой части представляют, конечно, усреднение по ансамблю b_n. Нужно отличать это усреднение от усреднения по ансамблю a_n, которое обозначается угловыми скобками с индексом ν, как в выражении (8.5.5).

Теперь воспользуемся выражением (4.3.39), с помощью которого была введена взаимная спектральная функция плотности $W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$:

$$\langle\widetilde{V}^*(\mathbf{r}_1,\nu)\widetilde{V}(\mathbf{r}_2,\nu')\rangle = W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\delta(\nu-\nu'). \tag{8.5.9}$$

Подставляя (8.5.9) в (8.5.8), мы получаем формулу

$$\langle b_n^*(\nu) b_m(\nu')\rangle = \delta(\nu-\nu')\int_D\int_D W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)\psi_n(\mathbf{r}_1,\nu)\psi_m^*(\mathbf{r}_2,\nu')\,d^3r_1\,d^3r_2. \tag{8.5.10}$$

Согласно уравнению (8.5.2) интеграл по $\mathbf{r}_1$ просто равен $\alpha_n(\nu)\psi_n(\mathbf{r}_2,\nu)$, и, следовательно, выражение (8.5.10) сводится к

$$\langle b_n^*(\nu) b_m(\nu')\rangle = \alpha_n(\nu)\delta(\nu-\nu')\int_D \psi_n(\mathbf{r}_2,\nu)\psi_m^*(\mathbf{r}_2,\nu)\,d^3r_2. \tag{8.5.11}$$

В силу того, что собственные функции ψ_n образуют ортонормированную систему, интеграл справа просто равен символу Кронекера δ_{nm} и, следовательно,

$$\langle b_n^*(\nu) b_m(\nu')\rangle = \alpha_n(\nu)\delta_{nm}\delta(\nu-\nu'). \tag{8.5.12}$$

С учетом (8.5.5) выражение (8.5.12) приводит к следующему соотношению между корреляциями второго порядка случайных коэффициентов разложения b_n и a_n:

$$\langle b_n^*(\nu) b_m(\nu')\rangle = \langle a_n^*(\nu) a_m(\nu)\rangle_\nu \delta(\nu-\nu'). \tag{8.5.13}$$

Можно сразу же выразить взаимные спектральные плотности произвольного порядка через модовые функции ψ_n теории второго порядка. Тогда мы получим, подставляя в левую часть (8.3.11) для $\widetilde{V}$ разложение (8.5.6) и меняя порядок суммирования и усреднения, что

$$\begin{aligned} W^{(M,N)}&(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};\nu_2,\nu_3,\ldots,\nu_{M+N})\times \\ &\times\delta(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_M-\nu_{M+1}-\nu_{M+2}-\cdots-\nu_{M+N}) = \\ &=\sum_{n_j}\mathscr{B}^{(M,N)}_{n_1,n_2,\ldots,n_{N+M}}(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{M+N})\prod_{j=1}^{M}\psi_{n_j}^*(\mathbf{r}_j,\nu_j)\prod_{k=M+1}^{M+N}\psi_{n_k}(\mathbf{r}_k,\nu_k), \end{aligned} \tag{8.5.14}$$

где $\sum_{n_j}$ обозначает суммирование по всем возможным значениям целых чисел n_1, n_2, ..., n_{M+N} и

$$\mathscr{B}^{(M,N)}_{n_1,n_2,\ldots,n_{M+N}}(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{M+N}) = \left\langle \prod_{j=1}^{M} b_{n_j}^*(\nu_j)\prod_{k=M+1}^{M+N} b_{n_k}(\nu_k)\right\rangle \tag{8.5.15}$$

— моменты коэффициентов $b_n(\nu)$ в разложении (8.5.6). Из структуры выражения (8.5.14) очевидно, что моменты равны нулю, если только не удовлетворяется ограничение (8.3.10), и когда оно удовлетворяется, они имеют дельта-образные особенности.

Формула (8.5.14) может быть легко обращена, чтобы получить выражения для моментов $\mathscr{B}^{(M,N)}$ через функции взаимной спектральной плотности $W^{(M,N)}$. Для этого мы подставим (8.5.7) в (8.5.15) и используем (8.3.11). Тогда получим для $\mathscr{B}^{(M,N)}$ требуемую формулу:

$$\begin{aligned} \mathscr{B}^{(M,N)}&_{n_1,n_2,\ldots,n_{M+N}}(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{M+N}) = \\ &=\delta(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_M-\nu_{M+1}-\nu_{M+2}-\cdots-\nu_{M+N})\times \\ &\times\int_D d^3r_1\int_D d^3r_2\ldots\int_D d^3r_{M+N}\,W^{(M,N)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};\nu_2,\nu_3,\ldots,\nu_{M+N})\times \\ &\times\prod_{j=1}^{M}\psi_{n_j}(\mathbf{r}_j,\nu_j)\prod_{k=M+1}^{M+N}\psi_{n_k}^*(\mathbf{r}_k,\nu_k). \end{aligned} \tag{8.5.16}$$

8.5.2. Одномодовое поле

Сейчас мы кратко рассмотрим частный случай одномодового поля, т.е. поля, у которого взаимная спектральная плотность задается единственным слагаемым в разложении (8.5.1):

$$W(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)=\alpha_0(\nu)\psi_0^*(\mathbf{r}_1,\nu)\psi_0(\mathbf{r}_2,\nu). \tag{8.5.17}$$

У такого поля спектральная степень когерентности $\mu(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\nu)$ [(4.3.47)] унимодулярна, и, следовательно, поле полностью когерентно в пространственно-частотной области. В этом случае выражение (8.5.14) принимает вид

$$\begin{aligned}W^{(M,N)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{M+N};\nu_2,\nu_3,\ldots,\nu_{M+N})\times\\ \times\delta(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_M-\nu_{M+1}-\nu_{M+2}-\cdots-\nu_{M+N})=\\ =\mathscr{B}^{(M,N)}_{0,0,\ldots,0}(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{M+N})\prod_{j=1}^{M}\psi_0^*(\mathbf{r}_j,\nu_j)\prod_{k=M+1}^{M+N}\psi_0(\mathbf{r}_k,\nu_k).\end{aligned} \tag{8.5.18}$$

Из этой формулы следует, что *для одномодового поля взаимные спектральные плотности всех порядков факторизуются.*

8.5.3. Поля, подчиняющиеся гауссовской статистике

Наконец, рассмотрим частный случай, когда поле подчиняется гауссовской статистике. В этом случае все моменты $\mathscr{B}^{(M,N)}$ могут быть выражены через моменты второго порядка с помощью теоремы о моментах комплексного гауссовского случайного процесса [см. (1.6.33)]. Более того, согласно (8.5.12) моменты второго порядка могут быть выражены через собственные значения интегрального уравнения (8.5.2). Например, когда $M=N=2$, получаем

$$\langle b_j^*(\nu_1)b_k^*(\nu_2)b_l(\nu_3)b_m(\nu_4)\rangle=\langle b_j^*(\nu_1)b_l(\nu_3)\rangle\langle b_k^*(\nu_2)b_m(\nu_4)\rangle+\langle b_j^*(\nu_1)b_m(\nu_4)\rangle\langle b_k^*(\nu_2)b_l(\nu_3)\rangle. \tag{8.5.19}$$

Как видно из определения (8.5.15) и формулы (8.5.12), выражение (8.5.19) означает, что

$$\begin{aligned}\mathscr{B}^{(2,2)}_{jklm}(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)=\\ =\alpha_j(\nu_1)\delta_{jl}\delta(\nu_1-\nu_3)\alpha_k(\nu_2)\delta_{km}\delta(\nu_2-\nu_4)+\alpha_j(\nu_1)\delta_{jm}\delta(\nu_1-\nu_4)\alpha_k(\nu_2)\delta_{kl}\delta(\nu_2-\nu_3)=\\ =\alpha_j(\nu_1)\alpha_k(\nu_2)[\delta_{jl}\delta_{km}\delta(\nu_1-\nu_3)\delta(\nu_2-\nu_4)+\delta_{jm}\delta_{kl}\delta(\nu_1-\nu_4)\delta(\nu_2-\nu_3)].\end{aligned} \tag{8.5.20}$$

С помощью формального тождества[1]

$$\delta(\nu_1-\nu_3)\delta(\nu_2-\nu_4)=\delta(\nu_1+\nu_2-\nu_3-\nu_4)\delta(\nu_2-\nu_4), \tag{8.5.21}$$

выражение (8.5.20) для $\mathscr{B}^{(2,2)}_{jklm}$ принимает вид

$$\mathscr{B}^{(2,2)}_{jklm}(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)=\alpha_j(\nu_1)\alpha_k(\nu_2)\delta(\nu_1+\nu_2-\nu_3-\nu_4)[\delta(\nu_2-\nu_4)\delta_{jl}\delta_{km}+\delta(\nu_2-\nu_3)\delta_{jm}\delta_{kl}]. \tag{8.5.22}$$

Задачи

8.1 Пусть $V(t)$ — представление в виде аналитического сигнала линейно поляризованного стационарного теплового поля в некоторой фиксированной точке пространства. Если $I(t)=V^*(t)V(t)$ — мгновенная

[1] Это тождество может быть проверено умножением обеих частей выражения (8.5.21) на пробную функцию $f(\nu_1,\nu_2)$ и интегрированием по ν_1 и ν_2.

интенсивность, покажите, что спектр $S_{\Delta I}(\nu)$ флуктуаций интенсивности $\Delta I(t) = I(t) - \langle I(t)\rangle$ может быть выражен в виде

$$S_{\Delta I}(\nu) = \int_0^\infty S_V(\nu')S_V(\nu'+\nu)\,d\nu',$$

где $S_V(\nu)$ — спектральная плотность света. Опишите качественно общее поведение $S_{\Delta I}(\nu)$, когда $S_V(\nu)$ представляет спектральную линию.

8.2 Рассмотрим хорошо коллимированный однородный световой пучок, порожденный тепловым источником. Используя тот факт, что тепловой свет может моделироваться гауссовским случайным процессом, покажите, что степень поляризации пучка может быть выражена в виде

$$P = \left[1 - \frac{4\det\sigma}{(\mathrm{Tr}\,\sigma)^2}\right]^{1/2},$$

где $\det\sigma$ и $\mathrm{Tr}\,\sigma$ — это детерминант и след, соответственно, матрицы $\sigma_{ij} = (\mathscr{E}_{ij}\mathscr{E}_{ji})^{1/2}$, $\mathscr{E}_{ij}$ — равновременна́я матрица когерентности 2×2, обсуждавшаяся в разд. 6.2.

8.3 Пусть $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ — это представление в виде аналитического сигнала электрического поля плоской волны теплового света, которое распространяется в направлении z. Если $I(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}^*(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ — это мгновенная интенсивность волны и $\Delta I(\mathbf{r},t) = I(\mathbf{r},t) - \langle I(\mathbf{r},t)\rangle$ — это флуктуация интенсивности относительно своего среднего значения в пространственно-временно́й точке $(\mathbf{r},t)$, покажите, что корреляция флуктуаций интенсивности в любых пространственно-временны́х точках может быть выражена в виде

$$\langle \Delta I(\mathbf{r}_1,t_1)\Delta I(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathscr{E}^\dagger\mathscr{E}),$$

где $\mathscr{E}$ — это матрица когерентности электрического поля, т.е.

$$\mathscr{E}_{ij} = \langle E_i^*(\mathbf{r}_1,t_1)E_j(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle, \quad (i,j = x,y),$$

и $\mathscr{E}^\dagger$ — это эрмитово сопряженная $\mathscr{E}$ матрица.

8.4 Выведите выражение для функции корреляции интенсивности

$$\langle I(\mathbf{r}_1,t)I(\mathbf{r}_2,t+\tau_2)\ldots I(\mathbf{r}_N,t+\tau_N)\rangle$$

в N точках $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_N$ в статистически стационарном волновом поле через взаимную спектральную плотность $W^{(N,N)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_{2N};\nu_2,\ldots,\nu_{2N})$. Упростите выражение для случая, когда $N=2$ и поле подчиняется гауссовской статистике.

Глава 9

ПОЛУКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФОТОДЕТЕКТИРОВАНИЯ

9.1. Введение

С девятнадцатого века было известно, что когда свет падает на определенные металлические поверхности, электроны иногда высвобождаются из металла. Это явление известно как *фотоэлектрический эффект*, а испущенные частицы называются *фотоэлектронами*. Если положительно заряженный электрод помещен около фотоизлучающего катода так, чтобы притягивать фотоэлектроны, то можно добиться протекания электрического тока как отклика на падающий свет. Устройство, таким образом, становится *фотоэлектрическим детектором* оптического поля, и оно оказалось одним из наиболее важных фотоэлектрических приборов. Для усиления фотоэлектрического тока существуют различные способы. В одном важном устройстве, известном как *фотоумножитель*[1] и показанном схематически на рис. 9.1., фотоэлектроны ускоряются настолько, что, ударяя по положительному электроду, они вызывают выход нескольких вторичных электронов на каждый падающий первоначальный электрон, а эти электроны, затем ускоряясь, в свою очередь, ударяют по другим поверхностям вторичного испускания. После 10 или более таких стадий усиления испускание каждого фотоэлектрона катодом дает импульс из миллиона электронов на аноде, что достаточно для регистрации счетчиком электронов. Подсчитывая эти фотоэлектронные импульсы, мы получаем крайне чувствительный детектор света.

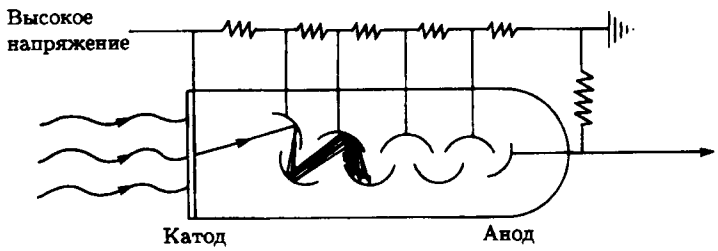


Рис. 9.1. Схема фотоумножителя

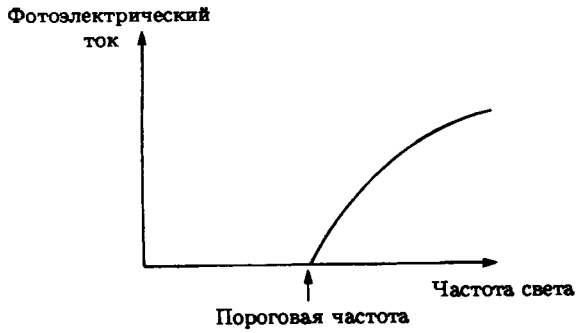


Рис. 9.2. Отклик фотокатода на свет с различными частотами

Экспериментально было обнаружено, что испускание фотоэлектронов с данной поверхности происходит только тогда, когда частота падающего света превосходит определенное пороговое значение (см. рис. 9.2). Как только критическая частота превзойдена, число фотоэлектронов, вылетающих за секунду, пропорционально интенсивности падающего света, в то время как средняя кинетическая энергия фотоэлектронов не зависит от интенсивности света. Это было непросто понять в рамках классической физики. Эйнштейн предположил (Einstein, 1905), что электроны внутри металла находятся в некоторой потенциальной яме с минимальной энергией связи E_0, а свет можно считать состоящим из дискретных частиц или *фотонов* с энергией $\hbar\omega$ на частоте ω ($\hbar$ — постоянная Планка, деленная на

[1] С принципами работы фотоприемников и фотоумножителей можно дополнительно ознакомиться в книге (*Левшин, Салецкий, 1994) — *ред. пер.*

2π). Поток фотонов пропорционален интенсивности света или потоку мощности. Когда фотон поглощается фотоэлектронной поверхностью, он может передать свою энергию $\hbar\omega$ электрону, но если только не выполняется неравенство $\hbar\omega > E_0$, этого недостаточно для высвобождения электрона. Испускание фотоэлектрона имеет место, если только $\omega > E_0/\hbar$, и тогда число электронов, высвобождающихся за секунду, будет пропорционально потоку фотонов или интенсивности света.

Хотя эта простая «квантовая» картина учитывает некоторые черты фотоэлектрического эффекта, подробное описание эффекта остается за более полно разработанной теорией квантовой механики и квантовой электродинамики, которая приводит к выражению для вероятности испускания фотоэлектронов в различные моменты времени. Мы займемся полностью квантовым описанием задачи в гл. 14. Однако, оказывается, что для многих целей квантование электромагнитного поля вовсе необязательно, и отклик фотодетектора может быть объяснен даже, если мы продолжим описывать поле в терминах классических электромагнитных волн, при условии, что фотоэлектроны описываются с помощью квантовой механики. Тогда поле просто ведет себя как внешний потенциал, который возмущает связанные электроны фотокатода. Такой подход к проблеме, иногда называемый *полуклассическим* (Mandel, Sudarshan and Wolf, 1964; Lamb and Scully, 1969, с. 363), существенно проще, чем полностью квантовое рассмотрение. Конечно, он имеет определенные ограничения, и при слишком широком использовании полуклассического рассмотрения обнаруживаются внутренние противоречия. Однако, это не умаляет его пользы во многих случаях. Как мы еще увидим, для тех электромагнитных полей, для которых существует адекватное классическое рассмотрение, полуклассическое и полностью квантовое описание задачи фотодетектирования дает фактически одинаковые решения. Наш подход в этой главе будет основан во многом на подходе, принятом Манделем, Сударшаном и Вольфом (Mandel, Sudarshan and Wolf, 1964).

9.2. Обзор элементарной квантовой механики

Предположим, что фотодетектор содержит большое число связанных электронов, сравнительно небольшое число которых может быть испущено под влиянием падающего электромагнитного поля. Предположим также, что различные акты испускания прямо не связаны друг с другом, и начнем с того, что сосредоточим наше внимание на отдельном электроне.

Согласно квантовой механике состояние электрона характеризуется определенным вектором состояния $|\psi\rangle$ в гильбертовом пространстве. Для простоты мы здесь не будем рассматривать состояния, относящиеся к внутренним координатам таким, как спин. Динамические переменные, такие как энергия, импульс и т.д., которые характеризуют электрон, представлены эрмитовыми операторами $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{p}}$ и т.д., которые действуют на вектор состояния. Эти операторы не обязательно коммутируют, и мы отличаем их от c-чисел значком $\hat{}$. В квантово-механической картине взаимодействия, которую мы здесь используем[1], состояние $|\psi(t)\rangle$ является функцией времени, которая эволюционирует согласно уравнению Шредингера

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)|\psi(t)\rangle, \tag{9.2.1}$$

где $\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)$ — энергия взаимодействия электрона, которая также, вообще говоря, зависит от времени. В картине взаимодействия любая динамическая переменная, такая как $\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)$ или импульс $\hat{\mathbf{p}}(t)$, эволюционирует во времени согласно общему правилу

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = \exp[i\hat{H}_0(t-t_0)/\hbar]\hat{\mathbf{p}}(t_0)\exp[-i\hat{H}_0(t-t_0)/\hbar], \tag{9.2.2}$$

где $\hat{H}_0$ — невзаимодействующая или свободная часть энергии электронов, а t_0 — время предполагаемого включения взаимодействия. Вид взаимодействия $\hat{H}_{\mathrm{I}}$ будет обсуждаться подробно в разд. 14.1. Для нерелятивистского электрона с зарядом e, массой m и импульсом $\hat{\mathbf{p}}(t)$, взаимодействующего с электромагнитной волной с векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$, энергия взаимодействия может быть записана (разд. 14.1) в единицах СИ как

$$\hat{H}_{\mathrm{I}}(t) = -\frac{e}{m}\hat{\mathbf{p}}(t)\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t), \tag{9.2.3}$$

[1] Для обзора квантовой механики, включая картину взаимодействия, см., например, Шифф (Schiff, 1955), Мессиа (Messiah, 1961) и Коэн-Таннуджи, Диу и Лалоэ (Cohen-Tannoudji, Diu and Laloë, 1977). Во всей этой книге мы отличаем операторы гильбертова пространства от c-чисел с помощью значка $\hat{}$.

для электронов, находящихся в сильно связанном состоянии в положении $\mathbf{r}$.

Подобно всем другим динамическим переменным $\hat{H}_0$ имеет полную ортонормированную систему собственных состояний $|E\rangle$ и соответствующие собственные значения E, удовлетворяющие соотношению

$$\hat{H}_0|E\rangle = E|E\rangle, \tag{9.2.4}$$

которые могут быть непрерывными или дискретными или частично теми и другими. Собственные значения E представляют собой возможные реализации измерений энергии невзаимодействующих электронов $\hat{H}_0$. Для простоты при записи общих соотношений мы будем рассматривать систему $|E\rangle$ как формально дискретную, так что мы можем выразить ортонормированность состояний соотношением для скалярного произведения

$$\langle E'|E\rangle = \delta_{EE'}, \tag{9.2.5}$$

и полноту суммой по проекторам

$$\sum_E |E\rangle\langle E| = 1. \tag{9.2.6}$$

Тогда вероятность того, что электрон находится в квантовом состоянии $|\psi(t)\rangle$ с энергией E, равна квадрату проекции $|\langle E|\psi(t)\rangle|^2$.

Для того чтобы определить $|\psi(t)\rangle$ по заданному начальному состоянию $|\psi(t_0)\rangle$, мы должны проинтегрировать уравнение (9.2.1) по времени от t_0 до t. Формальное интегрирование преобразует дифференциальное уравнение в интегральное

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \hat{H}_I(t_1)|\psi(t_1)\rangle\, dt_1, \tag{9.2.7}$$

которое является уравнением типа Вольтерра и может быть решено с помощью итераций. Таким образом, мы можем рассматривать начальное состояние $|\psi(t_0)\rangle$ как приближение нулевого порядка для $|\psi(t_1)\rangle$ и подставить его вместо $|\psi(t_1)\rangle$ под знаком интеграла. Это дает

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \hat{H}_I(t_1)|\psi(t_0)\rangle\, dt_1,$$

что может быть использовано в качестве приближения первого порядка для $|\psi(t_1)\rangle$ под знаком интеграла в уравнении (9.2.7). Подстановка этого выражения обратно в интеграл дает приближение второго порядка

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \hat{H}_I(t_1)|\psi(t_0)\rangle\, dt_1 + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, \hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)|\psi(t_0)\rangle. \tag{9.2.8}$$

Действуя таким образом, мы получаем бесконечный ряд, который, в принципе, является решением уравнения (9.2.7). Однако, если время взаимодействия $t - t_0$ существенно мало, и особенно если мы интересуемся проекцией $|\psi(t)\rangle$ на некоторое другое состояние, то может оказаться достаточным обрезание ряда на первом неисчезающем члене. Например, если мы хотим рассчитать вероятность перехода из начального состояния $|\psi(t_0)\rangle$ в некоторое новое состояние $|\Phi\rangle$ в момент времени t, и если $|\Phi\rangle$ ортогонально $|\psi(t_0)\rangle$, то

$$\text{Вероятность перехода} = |\langle\Phi|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{t_0}^{t} \langle\Phi|\hat{H}_I(t_1)|\psi(t_0)\rangle\, dt_1\right|^2 \tag{9.2.9}$$

в низшем неисчезающем порядке.

9.3. Дифференциальная вероятность фотодетектирования

Теперь применим вышеприведенные соображения к задаче первоначально связанного электрона, который взаимодействует с квазимонохроматической электромагнитной волной. Предположим, что начальное состояние электрона $|\psi(t_0)\rangle$ есть собственное состояние $|E_0\rangle$ невозмущенного гамильтониана электрона $\hat{H}_0$,

$$\hat{H}_0|E_0\rangle = E_0|E_0\rangle, \tag{9.3.1}$$

с собственным значением E_0, которое отрицательно для связанного электрона и порядка -1 эВ, что типично для многих фотоиспускающих поверхностей. Другими словами, если мы запишем $|E_0| = \hbar\omega_0$, то ω_0 — это некоторая оптическая частота порядка $10^{15}\,\text{с}^{-1}$. Под влиянием электромагнитной волны, представленной векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, электроны могут совершать индуцированные переходы из связанного состояния $|E_0\rangle$ в одно из состояний континуума с положительной энергией собственных состояний $|E\rangle$,

$$\hat{H}_0|E\rangle = E|E\rangle, \quad \text{при } E > 0, \tag{9.3.2}$$

с испусканием электрона. Предположим, что после некоторого усиления испущенные электроны регистрируются счетчиком. Искомая по формуле (9.2.9) вероятность перехода в свободное состояние за короткий интервал времени Δt принимает вид

$$\text{Вероятность перехода} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\langle E|\hat{H}_I(t_1)|E_0\rangle\, dt_1\right|^2, \tag{9.3.3}$$

где гамильтониан взаимодействия $\hat{H}_I(t_1)$ согласно (9.2.2) и (9.2.3) задается выражением

$$\hat{H}_I(t_1) = -\frac{e}{m}\exp\left[i\hat{H}_0(t_1 - t_0)/\hbar\right]\hat{\mathbf{p}}(t_0)\exp\left[-i\hat{H}_0(t_1 - t_0)/\hbar\right]\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}, t_1).$$

Следовательно,

$$\langle E|\hat{H}_I(t_1)|E_0\rangle = -\frac{e}{m}\langle E|\exp\left[i\hat{H}_0(t_1 - t_0)/\hbar\right]\hat{\mathbf{p}}(t_0)\exp\left[-i\hat{H}_0(t_1 - t_0)/\hbar\right]|E_0\rangle\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}, t_1) =$$
$$= -\frac{e}{m}\,\mathrm{e}^{i(E-E_0)(t_1-t_0)/\hbar}\,\langle E|\hat{\mathbf{p}}(t_0)|E_0\rangle\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}, t_1). \tag{9.3.4}$$

Мы использовали тот факт, заложенный в выражениях (9.3.1) и (9.3.2), что состояния $|E\rangle$, $|E_0\rangle$ являются как левыми, так и правыми собственными состояниями $\hat{H}_0$. Если поле квазимонохроматично и центрировано на частоте ω, и если интервал Δt выбран много длиннее периода $2\pi/\omega$, но все же короче, чем время когерентности света, то вполне законно представить $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t_1)$ под знаком интеграла в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t_1) = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t_0)\,\mathrm{e}^{-i\omega(t_1-t_0)} + \mathbf{V}^*(\mathbf{r}, t_0)\,\mathrm{e}^{i\omega(t_1-t_0)}. \tag{9.3.5}$$

Здесь $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ — это представление $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ в виде аналитического сигнала (разд. 3.1) и $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)\,\mathrm{e}^{i\omega t}$ — это медленно меняющаяся огибающая функция, которая не меняется значительно на временах, коротких по сравнению со временем когерентности, так что для малых δt

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t_0 + \delta t) = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t_0)\,\mathrm{e}^{-i\omega\delta t}. \tag{9.3.6}$$

Следовательно, с помощью выражения (9.3.5) мы получим

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt_1\,\langle E|\hat{H}_I(t_1)|E_0\rangle =$$
$$= -\frac{e}{m}\langle E|\hat{\mathbf{p}}(t_0)|E_0\rangle\cdot\int_0^{\Delta t} dt'\,\left\{\mathrm{e}^{i[(E-E_0)/\hbar-\omega]t'}\mathbf{V}(\mathbf{r}, t_0) + \mathrm{e}^{i[(E-E_0)/\hbar+\omega]t'}\mathbf{V}^*(\mathbf{r}, t_0)\right\}. \tag{9.3.7}$$

Теперь мы выбираем E положительным и считаем $-E_0/\hbar$ и ω оптическими частотами порядка $10^{15}\,\text{с}^{-1}$, так что слагаемое, пропорциональное $\mathbf{V}^*(\mathbf{r}, t_0)$, осциллирует с очень высокой частотой для всех положительных значений энергии E. Следовательно, его вклад в интеграл будет очень малым, если $\Delta t \gg 10^{-15}$ с. Слагаемое с $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t_0)$, с другой стороны, осциллирует гораздо медленнее и вносит значительный вклад, когда $(E - E_0)/\hbar \sim \omega$. Поэтому будет справедливо пренебречь слагаемым с $\mathbf{V}^*(\mathbf{r}, t_0)$ в уравнении (9.3.7), и мы получим после интегрирования

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt_1\,\langle E|\hat{H}_I(t_1)|E_0\rangle \approx -\frac{e}{m}\langle E|\hat{\mathbf{p}}(t_0)|E_0\rangle\cdot\mathbf{V}(\mathbf{r}, t_0)\,\mathrm{e}^{i[(E-E_0)/\hbar-\omega]\Delta t/2}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}[(E - E_0)/\hbar - \omega]\Delta t}{\frac{1}{2}[(E - E_0)/\hbar - \omega]}\right\},$$

так что из (9.3.3)

$$\text{Вероятность перехода} = \left(\frac{e}{m\hbar}\right)^2 |\langle E|\hat{\mathbf{p}}(t_0)|E_0\rangle \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r},t_0)|^2 \left\{\frac{\sin\frac{1}{2}[(E-E_0)/\hbar-\omega]\Delta t}{\frac{1}{2}[(E-E_0)/\hbar-\omega]}\right\}^2. \tag{9.3.8}$$

Эта формула описывает вероятность того, что фотоэлектрон совершает переход из связанного состояния $|E_0\rangle$ в свободное состояние $|E\rangle$ за время Δt. Если мы интересуемся только вероятностью того, что электрон становится свободным, не интересуясь конечным состоянием, то нам необходимо просуммировать это выражение по всем положительным состояниям. На практике обычно заменяют такую сумму интегралом по E с помощью плотности состояний $\sigma(E)$, так что $\sigma(E)\,dE$ дает число электронных состояний, лежащих внутри энергетического интервала dE. Более того, процесс детектирования может зависеть от энергии электронов, и мы должны учесть эту возможность с помощью умножения на некоторую функцию отклика $g(E)$ перед выполнением интегрирования. Тогда для вероятности детектирования электрона мы получим следующую формулу

$$\text{Вероятность фотодетектирования} = \left(\frac{e}{m\hbar}\right)^2 \int_0^\infty \sigma(E)g(E)\,|\langle E|\hat{\mathbf{p}}(t_0)|E_0\rangle \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r},t_0)|^2 \left\{\frac{\sin\frac{1}{2}[(E-E_0)/\hbar-\omega]\Delta t}{\frac{1}{2}[(E-E_0)/\hbar-\omega]}\right\}^2 dE.$$

Поведение подынтегрального выражения определяется последним множителем, который имеет пик при $E = E_0+\hbar\omega$ и быстро спадает к нулю с любой стороны от пика. Действительно, поведение этого множителя похоже на дельта-функцию, когда $(E_0 + \hbar\omega)\Delta t \gg 1$, и в первом приближении его можно заменить на $\delta(E - E_0 - \hbar\omega)$. При условии, что $E_0 + \hbar\omega > 0$, так что пик спадает в пределах интервала интегрирования и при условии, что $\sigma(E)$, $g(E)$, $\langle E|\hat{\mathbf{p}}(t_0)|E_0\rangle$ меняются медленно в окрестности $E = E_0 + \hbar\omega$, эти множители могут считаться имеющими примерно постоянные значения $\sigma(E_0 + \hbar\omega)$, $g(E_0 + \hbar\omega)$, $\langle E_0 + \hbar\omega|\hat{\mathbf{p}}(t_0)|E_0\rangle$ под знаком интеграла. Тогда интегрирование может быть проведено, и окончательно мы получим

$$\text{Вероятность фотодетектирования} \approx \begin{cases} \left(\frac{e}{m\hbar}\right)^2 \sigma(E_0+\hbar\omega)g(E_0+\hbar\omega)|\langle E_0+\hbar\omega|\hat{\mathbf{p}}(t_0)|E_0\rangle\cdot\boldsymbol{\varepsilon}|^2 2\pi\hbar I(\mathbf{r},t_0)\Delta t, & \text{если } E_0+\hbar\omega>0, \\ 0, & \text{если } E_0+\hbar\omega<0. \end{cases} \tag{9.3.9}$$

Когда $E_0 + \hbar\omega < 0$, вероятность детектирования очень мала, потому что главный пик дельта-подобной функции попадает за пределы области интегрирования. В (9.3.9) мы записали $\mathbf{V}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\varepsilon}V(\mathbf{r},t)$, где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — единичный вектор поляризации, характеризующий поляризацию падающего света, и $I(\mathbf{r},t)$ — мгновенная интенсивность света [ср. (3.1.88)]

$$I(\mathbf{r},t) \equiv |\mathbf{V}(\mathbf{r},t)|^2.$$

Поэтому вероятность фотодетектирования за короткое время Δt пропорциональна интенсивности света и времени Δt. Оставшиеся множители не зависят от силы оптического поля, хотя они могут зависеть от его частоты и от его поляризации. Если освещенная фотоэлектрическая поверхность содержит N связанных электронов, и если свет в виде плоской волны нормально падает на фотокатод, а также если связанные состояния незначительно истощены, и если различные фотовылеты не влияют друг на друга, то тогда следует ожидать, что вероятность фотодетектирования $P(t)\Delta t$ в пределах Δt будет пропорциональна множителю

$$P(t)\Delta t \sim \eta I(\mathbf{r},t)\Delta t. \tag{9.3.10}$$

Теперь $\mathbf{r}$ — это произвольная точка в пределах освещенной поверхности фотокатода, и

$$\eta = \begin{cases} \left(\frac{e}{m\hbar}\right)^2 N\sigma(E_0+\hbar\omega)g(E_0+\hbar\omega)|\langle E_0+\hbar\omega|\hat{\mathbf{p}}(t_0)|E_0\rangle\cdot\boldsymbol{\varepsilon}|^2 2\pi\hbar, & \text{если } E_0+\hbar\omega>0, \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases} \tag{9.3.11}$$

— константа, характеризующая эффективность детектора для определенной частоты и определенной поляризации. В гл. 14 мы увидим, что несколько более подробное полностью квантовое рассмотрение приводит

по сути к тем же результатам. Конечно, следует понимать, что $P(t)\Delta t$, заданная выражением (9.3.10), — это дифференциальная вероятность, которая имеет смысл лишь до тех пор, пока $\eta I(\mathbf{r},t)\Delta t \ll 1$. Если интенсивность света $I(\mathbf{r},t)$ столь высока, что это условие не выполняется, даже если мы выберем Δt лишь на порядок величины бо́льшим периода оптической волны, то, очевидно, разложение по теории возмущений, которое мы использовали для решения уравнения (9.2.7), не может быть завершено на низшем неисчезающем члене. В этом случае существуют значительные вклады высших порядков во взаимодействие, и вероятность детектирования не пропорциональна просто мгновенной интенсивности света $I(t)$. В дальнейшем мы не будем принимать во внимание эту возможность, реализация которой требует крайне высоких интенсивностей света.

Полезно указать ряд свойств простого решения (9.3.10):

(а) Фотоэлектрическое условие Эйнштейна $\hbar\omega > -E_0$, определяющее минимальную пороговую частоту фотоэмиссии, естественным образом возникает даже из полуклассического анализа без явного введения концепции фотонов.

(б) Когда условие $\hbar\omega > -E_0$ выполняется, существует ненулевая вероятность испускания фотоэлектронов в детекторе под действием света, независимо от того, как мало поле.

(в) Вероятность детектирования пропорциональна Δt после выполнения суммирования по конечным состояниям, так что можно говорить о мгновенной скорости фотоэлектрической эмиссии.

(г) Хотя изначально мы характеризовали электромагнитное поле с помощью действительного векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$, в ходе рассмотрения естественным образом возникает представление поля в виде *аналитического сигнала* (см. разд. 3.1) $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$. Полностью квантовый анализ в гл. 14 покажет, что это происходит, потому что $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ тесно связан с квантовым оператором, соответствующим поглощению фотона.

9.4. Совместные вероятности многократного фотодетектирования[1]

Получив выражение для дифференциальной вероятности $P(t)\Delta t$ фотоэлектрического детектирования, происходящего в определенном месте в момент времени t в интервале Δt, мы можем легко обобщить вывод на ситуацию, в которой несколько актов детектирования регистрируется в различные моменты времени и, возможно, различными детекторами. Для простоты начнем с двух детекторов, которые расположены в оптическом поле по-разному, но таким образом, что свет падает на поверхность каждого фотодетектора (см. рис. 9.3). Более того, предположим, что каждый освещенный фотокатод столь мал, что поле по всей его поверхности можно приближенно рассматривать как плоскую волну. Если $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ определяют центры двух фотокатодов, то дифференциальная вероятность для первого детектора в $\mathbf{r}_1$ зарегистрировать фотодетектирование в момент времени t_1 в интервале Δt_1 равна

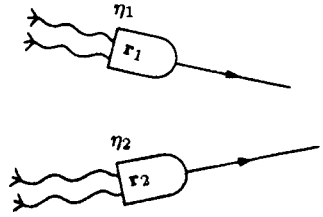


Рис. 9.3. Схема множественного фотоэлектрического детектирования с помощью двух детекторов

$$P(\mathbf{r}_1,t_1)\Delta t_1 = \eta_1 I(\mathbf{r}_1,t_1)\Delta t_1, \tag{9.4.1}$$

и дифференциальная вероятность для другого фотодетектора в $\mathbf{r}_2$ зарегистрировать фотон в момент времени t_2 в интервале Δt_2 равна

$$P(\mathbf{r}_2,t_2)\Delta t_2 = \eta_2 I(\mathbf{r}_2,t_2)\Delta t_2. \tag{9.4.2}$$

Обе константы η_1, η_2 характеризуют чувствительность обоих детекторов. Теперь, если два фотоэлектрических вылета никак не влияют друг на друга, то совместная или двойная дифференциальная вероятность $P_2(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)\Delta t_1\Delta t_2$ осуществиться двум актам детектирования — это произведение двух отдельных вероятностей детектирования или

$$P_2(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)\Delta t_1\Delta t_2 = \eta_1\eta_2 I(\mathbf{r}_1,t_1)I(\mathbf{r}_2,t_2)\Delta t_1\Delta t_2. \tag{9.4.3}$$

[1] см. также книги (*Клаудер, Сударшан, 1970; *Килин, 1990) — *ред. пер.*

Этот результат, очевидно, может быть обобщен на произвольно большое число актов фотоэлектрического детектирования, так что для случая N-кратного детектирования мы получаем формулу

$$P_N(\mathbf{r}_1,t_1;\ldots;\mathbf{r}_N,t_N)\Delta t_1\ldots\Delta t_N=\eta_1\ldots\eta_N I(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots I(\mathbf{r}_N,t_N)\Delta t_1\ldots\Delta t_N. \tag{9.4.4}$$

Более того, нет необходимости всем актам детектирования быть связанными с различными детекторами. Например, дифференциальная вероятность того, что один и тот же детектор, расположенный в точке $\mathbf{r}$, регистрирует акты детектирования в момент времени t_1 в интервале Δt_1 и в момент времени t_2 в интервале Δt_2, определяется формулой

$$P_2(\mathbf{r},t_1;\mathbf{r},t_2)\Delta t_1\Delta t_2=\eta_1^2 I(\mathbf{r},t_1)I(\mathbf{r},t_2)\Delta t_1\Delta t_2. \tag{9.4.5}$$

9.5. Интегральные вероятности детектирования

До сих пор мы имели дело с актами детектирования в одном или нескольких дифференциальных временны́х интервалах Δt. Мы нашли, что вероятность детектирования в интервале Δt равна $\eta I(\mathbf{r},t)\Delta t$. Эта же самая величина также равна ожидаемому числу актов детектирования (много меньше единицы) в интервале Δt. Однако, на практике мы можем интересоваться всеми n актами детектирования, происходящими в некотором конечном временно́м интервале от t до $t+T$, который не обязательно мал по сравнению со временем когерентности света. Далее следует предположить, что интенсивность света меняется во временно́м интервале T. Сейчас мы будем пренебрегать любой случайностью этого изменения и будем считать его предопределенным или детерминированным. На языке теории случайных процессов мы рассматриваем одиночную реализацию возможного ансамбля оптических полей с интенсивностью света $I(\mathbf{r},t)$.

Сначала разделим конечный временной интервал от t до $t+T$ на большое число дифференциальных интервалов шириной Δt. Ожидаемое или среднее число актов детектирования в каждом дифференциальном интервале известно и задано выражением (9.3.10). Среднее число актов детектирования $\langle n\rangle$, происходящих в течение временно́го интервала от t до $t+T$, тогда получается сложением средних для всех временны́х интервалов, и это, очевидно, дает

$$\langle n\rangle=\eta\int_t^{t+T} I(\mathbf{r},t')\,dt'. \tag{9.5.1}$$

Можно не говорить о том, что это среднее значение может быть гораздо больше 1, и оно не может интерпретироваться как вероятность.

Однако, нетрудно записать вероятность $p(n,t,T)$ того, что n актов фотоэлектрического детектирования происходят в течение интервала времени от t до $t+T$, когда ожидаемое значение $\langle n\rangle$ задано выражением (9.5.1). Если события независимы, как мы предположили, вероятность $p(n,t,T)$ должна подчиняться распределению Пуассона по n с параметром $\langle n\rangle$, и мы можем тогда записать

$$p(n,t,T)=\frac{1}{n!}\left[\eta\int_t^{t+T} I(\mathbf{r},t')\,dt'\right]^n\exp\left[-\eta\int_t^{t+T} I(\mathbf{r},t')\,dt'\right]. \tag{9.5.2}$$

Вывод $p(n,t,T)$ может быть сделан в более явной форме (Mandel, 1963, с. 181; см. также Loudon, 1983, разд. 6.6), но мы здесь не будем вдаваться в подробности. Эта задача будет решаться снова с помощью полного квантования позже в гл. 14. Заметим, однако, что распределение Пуассона справедливо лишь до тех пор, пока эволюция $I(\mathbf{r},t)$ детерминирована и когда не рассматриваются ансамбли, хотя изменения могут быть в любой форме. Как только ансамбли или временны́е средние вводятся в рассмотрение, выводы, как мы теперь покажем, существенно меняются.

9.6. Фотоэлектрическое детектирование во флуктуирующих полях

Теперь применим предшествующие результаты к более реальной ситуации, когда случайно флуктуирующие электромагнитные поля попадают на один или большее число фотодетекторов. В этом случае

мы должны ввести ансамбль реализаций оптического поля, и мы будем рассматривать предшествующие уравнения в применении только к одной реализации ансамбля. Однако, физически значимые результаты получаются только после того, как мы выполним усреднение по всем элементам ансамбля. Если мы обозначим среднее по ансамблю как $\langle\ \rangle$, то тогда из (9.3.10) можно записать дифференциальную вероятность фотоэлектрического детектирования в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t в интервале Δt флуктуирующего оптического поля

$$P_1(\mathbf{r},t)\Delta t = \eta\langle I(\mathbf{r},t)\rangle\Delta t. \tag{9.6.1}$$

Если поле стационарно, то среднее $\langle I(\mathbf{r},t)\rangle$, конечно, не зависит от времени t, и вероятность детектирования тоже.

Аналогично, после усреднения по ансамблю мы получим из (9.5.1) для среднего числа актов фотоэлектрического детектирования в конечном интервале времени от t до $t+T$

$$\langle n\rangle = \eta\int_t^{t+T}\langle I(\mathbf{r},t')\rangle\,dt'. \tag{9.6.2}$$

Снова, если поле стационарно, среднее $\langle I(\mathbf{r},t')\rangle$ не зависит от t' и может быть вынесено из-под интеграла, так что

$$\langle n\rangle = \eta\langle I(\mathbf{r})\rangle T, \tag{9.6.3}$$

которое строго пропорционально T.

Из выражения (9.4.4) для совместной вероятности N-кратного фотоэлектрического детектирования мы приходим к формуле

$$P_N(\mathbf{r}_1,t_1;\ldots;\mathbf{r}_N,t_N)\Delta t_1\ldots\Delta t_N = \eta_1\ldots\eta_N\langle I(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots I(\mathbf{r}_N,t_N)\rangle\Delta t_1\ldots\Delta t_N. \tag{9.6.4}$$

Отметим, что эта вероятность использует корреляционную функцию интенсивности N-ого порядка. В стационарном состоянии она зависит только от разности различных временны́х аргументов. В частности, когда $N=2$, мы имеем

$$P_2(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2) = \eta_1\eta_2\langle I(\mathbf{r}_1,t_1)I(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle. \tag{9.6.5}$$

Теперь учтем, что в общем случае для флуктуирующего поля

$$\langle I(\mathbf{r}_1,t_1)I(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle \neq \langle I(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle\langle I(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle,$$

откуда следует, что в общем случае

$$P_2(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2) \neq P_1(\mathbf{r}_1,t_1)P_1(\mathbf{r}_2,t_2). \tag{9.6.6}$$

Поэтому, в целом, различные акты фотоэлектрического детектирования не являются независимыми друг от друга. С первого взгляда это выглядит противоречащим допущению, которое было сделано в разд. 9.4, что не происходит влияния одного акта фотоэмиссии на другой. Однако, здесь нет противоречия. Хотя один акт фотоэмиссии не влияет на другой, они оба являются, вообще говоря, коррелированными через флуктуации общего электромагнитного поля.

В частном случае, когда поле излучения стационарно, поляризовано и гауссовское, из теоремы моментов Гаусса следует, что [ср. (8.4.5)]

$$\langle I(\mathbf{r}_1,t_1)I(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle = \langle I(\mathbf{r}_1)\rangle\langle I(\mathbf{r}_2)\rangle[1+|\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_2-t_1)|^2], \tag{9.6.7}$$

где $|\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_2-t_1)|$ — степень когерентности поля в точке $\mathbf{r}_1$ в момент времени t_1 и в точке $\mathbf{r}_2$ в момент времени t_2 (см. разд. 4.3.1). Поэтому акты фотоэлектрического испускания на детекторах, расположенных в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ оптического поля, будут коррелированными на временах, когда степень когерентности в этих точках не равна нулю. Впервые это было экспериментально продемонстрировано Брауном и Твиссом (Brown and Twiss, 1956a) на измерениях с двумя фотодетекторами (см. рис. 9.6 ниже). Позднее они применили тот же самый корреляционный метод для определения $|\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,0)|$ для света от удаленной звезды, из чего может быть выведен угловой размер звезды (Brown and Twiss, 1958a). Первоначальный эксперимент и метод, известный как ***звездная корреляционная интерферометрия интенсивностей***, будут описаны более подробно ниже в разд. 9.9 и 9.10.

9.6.1. Фотоэлектрическая группировка

Одним из следствий этих корреляций является эффект *фотоэлектрической группировки*, состоящий в том, что вероятность актов фотоэлектрического испускания, происходящих чаще во времени, больше, чем вероятность актов фотоэлектрического испускания, происходящих реже. Сфокусируем наше внимание на двух актах фотоэлектрического испускания в моменты времени t и $t+\tau$ одним фотодетектором в точке $\mathbf{r}$. Опуская пространственную переменную, получим из (9.6.5)

$$P_2(t,t+\tau)=\eta^2\langle I(t)I(t+\tau)\rangle. \tag{9.6.8}$$

Вновь заметим, что для стационарного поля корреляционная функция справа зависит только от разности времен τ, а не от t. Теперь из неравенства Шварца и стационарности следует, что

$$\langle I(t)I(t+\tau)\rangle \leqslant \langle I^2(t)\rangle,$$

так что

$$P_2(t,t+\tau)\leqslant P_2(t,t). \tag{9.6.9}$$

Поэтому два акта фотодетектирования с большей вероятностью произойдут в один и тот же момент времени или очень близко друг к другу, чем далеко друг от друга. Более того, при $\tau\to\infty$ из эргодической гипотезы следует, что $\langle I(t)I(t+\tau)\rangle\to\langle I\rangle^2$ или

$$P_2(t,t+\tau)\to P_1^2(t)\quad\text{при }\tau\to\infty, \tag{9.6.10}$$

так что акты детектирования становятся независимыми друг от друга, когда они далеко разделены во времени.

Поэтому график зависимости плотности совместной вероятности фотоэлектрического детектирования $P_2(t,t+\tau)$ от временно́го интервала τ, в общем, должен иметь форму, показанную на рис. 9.4. Величина $P_2(t,t+\tau)$ имеет наибольшее значение при $\tau=0$ и уменьшается до постоянного значения $P_1^2(t)$ для больших τ, хотя не обязательно монотонно. Точная форма, конечно, определяется статистическим характером оптического поля. Повышенная тенденция актам фотоэлектрического испускания происходить близко друг к другу в пределах времен порядка времени корреляции интенсивности T_c известна как *фотоэлектрическая группировка*. Она имеет место только для флуктуирующих полей, таких, как поля светового источника в тепловом равновесии, например, она наблюдалась с тепловым источником (Twiss, Little and Brown, 1957; Rebka and Pound, 1957; Morgan and Mandel, 1966; Arecchi, Gatti and Sona, 1966). Это явление было приписано бозонному характеру тепловых фотонов, которые имеют тенденцию группироваться таким образом (см. разд. 12.10 и 12.1). Однако, так как поле здесь описывается как классическая электромагнитная волна, фотоэлектрическая группировка имеет, очевидно, альтернативное объяснение в терминах флуктуаций интенсивности. Акты фотоэлектрического испускания с большей вероятностью происходят тогда, когда мгновенная интенсивность света высока, чем когда она мала. В разд. 14.7, где мы будем снова обсуждать явление группировки более подробно и несколько более строгим образом в терминах квантовых полей, мы обнаружим, что при определенных обстоятельствах также происходит явление фотоэлектрической антигруппировки. Однако, этот эффект противоречит выражению (9.6.9), которое справедливо только в рамках классической оптики.

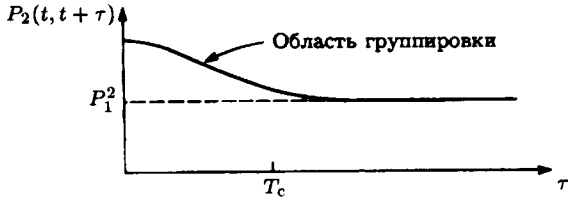


Рис. 9.4. Предполагаемая форма плотности совместной вероятности фотоэлектрического детектирования в два различных момента времени как функция промежутка времени τ между ними

9.7. Статистика фотоэлектрических отсчетов флуктуирующего поля

Когда оптическое поле флуктуирует и его следует рассматривать как случайный процесс, вероятность $p(n,t,T)$ детектирования n актов фотоэлектрического испускания в конечном интервале времени от t до

$t+T$, вообще говоря, не является распределением Пуассона. Для того чтобы найти соответствующую вероятность, мы начнем с выражения (9.5.2), которое справедливо для одиночной реализации, и снова усредним по ансамблю. Тогда мы получим

$$p(n,t,T)=\left\langle \frac{1}{n!}\left[\eta\int_t^{t+T} I(\mathbf{r},t')\,dt'\right]^n \exp\left[-\eta\int_t^{t+T} I(\mathbf{r},t')\,dt'\right]\right\rangle,$$

что может быть записано более компактно в виде

$$p(n.t,T)=\left\langle \frac{1}{n!}W^n\,\mathrm{e}^{-W}\right\rangle, \tag{9.7.1}$$

$$W\equiv\eta\int_t^{t+T} I(\mathbf{r},t')\,dt'. \tag{9.7.2}$$

Здесь множитель W, который в η раз больше, чем интегральная интенсивность света, может рассматриваться как новая случайная переменная, плотность вероятности $\mathscr{P}(W)$ которой может, в принципе, быть получена из известной статистики оптического поля. Тогда операция усреднения в (9.7.1) может быть формально выражена в форме интеграла, и мы можем записать

$$p(n,t,T)=\int_0^\infty \frac{1}{n!}W^n\,\mathrm{e}^{-W}\,\mathscr{P}(W)\,dW. \tag{9.7.3}$$

Эта формула, которая впервые была выведена в 1950-х (Mandel, 1958, 1959), ясно показывает, что статистика проявляется двумя различными путями в интегральной вероятности детектирования $p(n,t,T)$: как случайность актов индивидуального фотоэлектрического испускания, которая обязана квантовой механике, лежащей в основе фотоэлектрического процесса, и как флуктуации самого поля излучения. Но даже в отсутствии последних невозможно предсказать, когда и сколько актов фотоэлектрического испускания будет происходить, что уже ясно из выражений (9.3.10) и (9.5.2).

Усреднение по флуктуациям W, т.е. по флуктуациям электромагнитного поля, вообще говоря, вызывает отклонение $p(n,t,T)$ от распределения Пуассона, несмотря на формально пуассоновскую структуру выражений (9.7.1) и (9.7.3). Это особенно ясно, если мы сосредоточимся на первых двух моментах n. Мы находим для среднего числа актов фотоэлектрического детектирования, что

$$\langle n\rangle=\sum_{n=1}^\infty np(n,t,T)=\int_0^\infty dW\sum_{n=1}^\infty n\frac{W^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-W}\,\mathscr{P}(W)=\int_0^\infty W\,\mathscr{P}(W)\,dW=\langle W\rangle, \tag{9.7.4}$$

а для второго момента n получаем

$$\langle n(n-1)\rangle=\sum_{n=2}^\infty n(n-1)p(n,t,T)=$$

$$=\int_0^\infty dW\sum_{n=2}^\infty n(n-1)\frac{W^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-W}\,\mathscr{P}(W)=\int_0^\infty W^2\,\mathscr{P}(W)\,dW=\langle W^2\rangle, \tag{9.7.5}$$

так что дисперсия n определяется формулой

$$\langle(\Delta n)^2\rangle=\langle n(n-1)\rangle+\langle n\rangle-\langle n\rangle^2=\langle n\rangle+\langle(\Delta W)^2\rangle. \tag{9.7.6}$$

Сказанное ясно показывает, что число актов фотоэлектрического детектирования n не подчиняется распределению Пуассона, когда W флуктуирует, потому что дисперсия n превосходит среднее $\langle n\rangle$. Хотя выражение (9.7.6) наводит на мысль, что дисперсия $\langle(\Delta n)^2\rangle$ не может быть меньше $\langle n\rangle$, однако, как мы еще обнаружим в гл. 14, это все же может происходить для определенных квантовых состояний поля, хотя это и невозможно в классическом поле.

Следует изучить два предельных случая общей формулы (9.7.1). Сначала предположим, что интервал измерения T очень велик по сравнению со временем корреляции интенсивности света, так что $I(\mathbf{r},t')$

под знаком интеграла в (9.7.2) претерпевает много изменений во времени. Тогда интеграл по времени, деленный на T, может аппроксимироваться временны́м средним, и для эргодического процесса среднее по времени равно среднему по ансамблю. Следовательно,

$$W = \eta \int_t^{t+T} I(\mathbf{r}, t')\, dt' \approx \eta \langle I(\mathbf{r}, t)\rangle T, \tag{9.7.7}$$

из чего следует, что величина W флуктуирует очень мало, а W/T вовсе не флуктуирует в пределе $T \to \infty$. Значит $\mathscr{P}(W)$ может быть аппроксимировано дельта-функцией под интегралом в (9.7.3), и мы получим

$$p(n, t, T) \approx \frac{1}{n!}(\eta\langle I\rangle T)^n \exp(-\eta\langle I\rangle T) \tag{9.7.8}$$

для очень больших T. Распределение является пуассоновским, потому что флуктуации усреднены.

Далее рассмотрим другой предельный случай, в котором интервал T короче, чем время корреляции интенсивности света $I(\mathbf{r}, t)$. Тогда $I(\mathbf{r}, t')$ в (9.7.2) не меняется значительно в пределах интервала интегрирования, и мы можем аппроксимировать W, записав

$$W \approx \eta I(\mathbf{r}, t) T. \tag{9.7.9}$$

Значит, W пропорционально мгновенной интенсивности света $I(\mathbf{r}, t)$, и распределение вероятности W становится распределением вероятности I, не считая масштабного множителя. Поэтому вместо (9.7.3) мы можем записать для существенно коротких временны́х интервалов T выражение

$$p(n, t, T) = \int_0^\infty \frac{1}{n!}(\eta I T)^n \, \mathrm{e}^{-\eta I T} \, P(I)\, dI, \tag{9.7.10}$$

где $P(I)$ — это плотность вероятности интенсивности света I.

В качестве иллюстрации применим эту формулу к ситуации, в которой луч поляризованного света от источника в тепловом равновесии попадает на фотодетектор. Из центральной предельной теоремы (см. разд. 1.5.6) мы можем ожидать, что распределение аналитического сигнала V, представляющего это оптическое поле, является гауссовским, поскольку поле в каждой точке является суммой полей от многих независимых источников. Значит распределение $P(I)$ величины $I = |V|^2$ экспоненциально, т.е.

$$P(I) = \frac{1}{\langle I\rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I\rangle}\right). \tag{9.7.11}$$

При подстановке $P(I)$ в (9.7.10) мы получаем выражение

$$p(n, t, T) = \frac{1}{n!\langle I\rangle} \int_0^\infty (\eta I T)^n \exp[-I(\eta T + 1/\langle I\rangle)]\, dI = \\ = \frac{(\eta T)^n}{\langle I\rangle[\eta T + 1/\langle I\rangle]^n} = \frac{1}{[1 + \eta\langle I\rangle T][1 + 1/\eta\langle I\rangle T]^n}, \tag{9.7.12}$$

которое известно как *распределение Бозе — Эйнштейна* с параметром $\langle n\rangle = \eta\langle I\rangle T$. Это ясно указывает, что $p(n, t, T)$ не обязательно пуассоновское, несмотря на формально пуассоновскую структуру выражений (9.7.3) и (9.7.10).

Иногда считается, что формула для распределения вероятности (9.7.12) отражает флуктуационные свойства фотонов в тепловом равновесии, которые подчиняются аналогичному распределению вероятности [ср. (13.1.10) ниже]. Однако, мы вновь отмечаем, что здесь мы рассматриваем падающий свет в виде классической электромагнитной волны, которая порождает случайное испускание фотоэлектронов. Поэтому может оказаться некорректным делать какие-либо выводы из наших уравнений, которые применимы лишь к квантованному полю. Замечательное совпадение между предсказаниями полуклассического рассмотрения и полностью квантового рассмотрения привело к размышлениям, что квантовая электродинамика может оказаться ненужной даже для экспериментов по счету фотонов. Однако, как мы увидим позднее, все же существуют результаты измерений, которые нельзя описать в рамках полуклассического анализа, но можно описать полностью квантовым образом.

Из (9.7.1) и (9.7.2) следует, что производящие функции от n и интегральной интенсивности света W очень просто связаны. Например, производящая функция факториальных моментов определяется формулой (см. разд. 1.4.1)

$$F(\xi) = \langle (1+\xi)^n \rangle = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\xi^r}{r!} \langle n^{(r)} \rangle \tag{9.7.13}$$

и может быть представлена в виде

$$\langle (1+\xi)^n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (1+\xi)^n p(n,t,T) = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} (1+\xi)^n \frac{W^n \mathrm{e}^{-W}}{n!} \right\rangle = \langle \mathrm{e}^{W\xi} \rangle. \tag{9.7.14}$$

Если мы положим $\xi = ix$, то член в правой части принимает вид $\langle \mathrm{e}^{ixW} \rangle$, что является характеристической функцией $C_W(x)$ от W, и, если $1 + ix = \mathrm{e}^{iy}$, член слева принимает вид $\langle \mathrm{e}^{iyn} \rangle$, что является характеристической функцией $C_n(y)$ от n. Следовательно, мы имеем соотношение

$$C_n(y) = C_W(x), \tag{9.7.15}$$

и статистика W, в принципе, может быть получена из статистики n.

9.8. Флуктуации фотоэлектрического тока

Мы уже видели, что когда свет падает на фотоэмиссионный детектор, он заставляет некоторые электроны испускаться с фотоэлектрической поверхности. После некоторого усиления каждый электрон может давать измеримый импульс тока, и мы уже изучили статистику этих импульсов. Однако в некоторых экспериментах не было сделано попыток различить индивидуальные импульсы тока, а фотоэлектрический ток рассматривался как непрерывный случайный процесс $J(t)$. Так было в оригинальных корреляционных экспериментах Брауна и Твисса (Brown and Twiss, 1956a, 1957a, b). Поэтому сейчас мы изучим статистику $J(t)$ и свяжем ее с флуктуациями света.

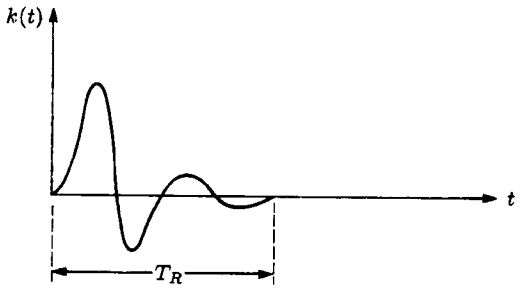


Рис. 9.5. Пример характерного импульса фотоэлектрического тока. T_R — это время отклика фотодетектора

Для простоты предположим, что каждый фотоэлектрон, испущенный в момент времени t', вызывает определенный импульс фотоэлектрического тока $k(t-t')$ (см. рис. 9.5), который исчезает при $t < t'$. Тогда имеем

$$J(t) = \sum_j k(t - t_j), \tag{9.8.1}$$

где суммирование должно быть проведено по различным временам случайного испускания t_j. Пусть $J_{n,T}(t)$ — фототок, вызванный эмиссией ровно n импульсов тока в пределах некоторого длительного интервала времени T,

$$J_{n,T} = \sum_{j=1}^{n} k(t - t_j) \quad (-T/2 \leqslant t_j \leqslant T/2). \tag{9.8.2}$$

Теперь мы воспользуемся теми же стандартными аргументами, как при выводе обобщенной теоремы Кемпбелла (Rice, 1944, разд. 1.2), для изучения корреляций $J(t)$. Для стационарного процесса вероятность того, что фотоэлектрон j испускается в момент времени t_j в пределах dt_j, равна dt_j/T, и мы можем использовать это для вычисления среднего значения $J_{n,T}(t)$ при условии, что число n фиксировано в пределах T. Таким образом,

$$\langle J_{n,T}(t) \rangle_n = \sum_{j=1}^{n} \int_{-T/2}^{T/2} k(t - t_j)(dt_j/T) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{n} \int_{t-T/2}^{t+T/2} k(t')\, dt' \approx \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{n} Q = \frac{nQ}{T}, \tag{9.8.3}$$

где

$$Q \equiv \int_{-\infty}^{\infty} k(t')\,dt' \tag{9.8.4}$$

— полный заряд, передаваемый каким-либо импульсом тока. Если $p(n,T)$ — вероятность того, что n электронов испускаются в пределах интервала T, то средний фототок $\langle J(t)\rangle$ получается из $\langle J_{n,T}(t)\rangle_n$ путем усреднения по n в пределе больших T. Таким образом, мы получаем

$$\langle J(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p(n,T)\frac{nQ}{T} = \langle n\rangle\frac{Q}{T} = \eta\langle I\rangle Q. \tag{9.8.5}$$

Мы использовали тот факт, что $\langle n\rangle/T$ — средняя интенсивность падающего света $\langle I\rangle$, выраженная в единицах фотонов за секунду, умноженная на квантовую эффективность η.

Далее мы рассчитаем автокорреляционную функцию $\langle J(t)J(t+\tau)\rangle$ фототока. Из (9.6.5) следует, что, когда n фотоэлектронов испускаются в пределах интервала времени T, совместная вероятность того, что электрон i испускается в момент времени t_i в пределах dt_i, и электрон j испускается в момент времени t_j в пределах dt_j, задается как

$$P_2(t_i,t_j) = \langle I(t_i)I(t_j)\rangle \Big/ \int_{-T/2}^{T/2}\!\!\int \langle I(t_i)I(t_j)\rangle\,dt_i\,dt_j. \tag{9.8.6}$$

Это выражение отражает двухвременные фотоэлектрические корреляции и нормировано на единицу в интервале T. Теперь мы используем (9.8.6) для расчета автокорреляционной функции $\langle J_{n,T}(t)J_{n,T}(t+\tau)\rangle_n$ при данном n в пределах T. Тогда мы имеем

$$\langle J_{n,T}(t)J_{n,T}(t+\tau)\rangle_n = \left\langle \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k(t-t_i)k(t-t_j+\tau)\right\rangle_n .$$

Удобно разделить двойное суммирование на две части, соответствующие одному акту детектирования ($i=j$) и двум отдельным актам детектирования ($i\neq j$). Тогда получаем

$$\begin{aligned}\langle J_{n,T}(t)J_{n,T}(t+\tau)\rangle_n &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} k(t-t_j)k(t-t_j+\tau)\right\rangle + \left\langle \sum_{i\neq j}^{n}\sum^{n} k(t-t_i)k(t-t_j+\tau)\right\rangle = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\int_{-T/2}^{T/2} k(t-t_j)k(t-t_j+\tau)\frac{dt_j}{T} + \frac{\displaystyle\sum_{i\neq j}^{n}\sum^{n}\int_{-T/2}^{T/2}\!\!\int k(t-t_i)k(t-t_j+\tau)\langle I(t_i)I(t_j)\rangle\,dt_i\,dt_j}{\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}\!\!\int \langle I(t_i)I(t_j)\rangle\,dt_i\,dt_j}.\end{aligned} \tag{9.8.7}$$

Когда T значительно больше длительности T_R импульса тока $k(t)$, это выражение упрощается до

$$\langle J_{n,T}(t)J_{n,T}(t+\tau)\rangle_n = \frac{n}{T}\int_{-\infty}^{\infty} k(t')k(t'+\tau)\,dt' + \frac{n(n-1)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int k(t')k(t'')\langle I(t)I(t+t'-t''+\tau)\rangle\,dt'\,dt''}{\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}\!\!\int \langle I(t')I(t'')\rangle\,dt'\,dt''},$$

где мы использовали стационарность $I(t)$. Наконец, мы усредняем по числу n в пределах T. Тогда получаем

$$\langle J(t)J(t+\tau)\rangle =$$

$$= \frac{\langle n\rangle_T}{T}\int_{-\infty}^{\infty} k(t')k(t'+\tau)\,dt' + \frac{\langle n(n-1)\rangle_T \iint_{-\infty}^{\infty} k(t')k(t'')\langle I(t)I(t+t'-t''+\tau)\rangle\,dt'\,dt''}{\iint_{-T/2}^{T/2}\langle I(t')I(t'')\rangle\,dt'\,dt''}. \quad (9.8.8)$$

Но из разд. 9.7 следует, что [ср. (9.7.4)]

$$\langle n\rangle_T = \eta\langle I\rangle T$$

и [ср. (9.7.5)]

$$\langle n(n-1)\rangle_T = \eta^2\iint_{-T/2}^{T/2}\langle I(t')I(t'')\rangle\,dt'\,dt''.$$

Подставляя эти выражения в (9.8.8), мы получаем

$$\langle J(t)J(t+\tau)\rangle = \eta\langle I\rangle\int_{-\infty}^{\infty} k(t')k(t'+\tau)\,dt' + \eta^2\iint_{-\infty}^{\infty} k(t')k(t'')\langle I(t)I(t+t'-t''+\tau)\rangle\,dt'\,dt''. \quad (9.8.9)$$

Теперь вычтем $\langle J(t)\rangle^2$ из обеих частей выражения с помощью (9.8.5) и придем к следующей автокорреляционной функции флуктуаций тока

$$\langle \Delta J(t)\Delta J(t+\tau)\rangle_n = \eta\langle I\rangle\int_{-\infty}^{\infty} k(t')k(t'+\tau)\,dt' +$$

$$+\eta^2\iint_{-\infty}^{\infty} k(t')k(t'')\langle \Delta I(t)\Delta I(t+t'-t''+\tau)\rangle\,dt'\,dt''. \quad (9.8.10)$$

Первое слагаемое отвечает за дробовой шум фототока или дискретность электронных зарядов, тогда как второе слагаемое связано с флуктуациями падающего оптического поля. То, какое слагаемое больше, определяется природой оптического поля и эффективностью детектирования η. Для света от известных нам тепловых источников первое слагаемое всегда доминирует.

Наконец, мы можем использовать аналогичные аргументы для расчета взаимной корреляции между двумя фотоэлектрическими токами $J_1(t)$, $J_2(t)$ от двух фотодетекторов, освещенных светом с интенсивностями $I_1(t)$, $I_2(t)$. Каждый ток задается выражением, похожим на то, что содержится в (9.8.1). Предположим, что оба фотодетектора одинаковы, за исключением, возможно, их квантовых эффективностей η_1, η_2. Далее мы можем продолжить расчет, как и при выводе уравнения (9.8.7), начиная с

$$\langle J_{1n,T}(t)J_{2n,T}(t+\tau)\rangle_n = \left\langle \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k(t-t_{1i})k(t-t_{2j}+\tau)\right\rangle_n,$$

за исключением того, что двойное суммирование не может быть больше разделено на слагаемое, включающее в себя только один акт фотодетектирования и слагаемое, включающее в себя два акта фотодетектирования, как раньше. Поэтому первое слагаемое в правой части (9.8.7) отсутствует. В остальном расчет производится как прежде, и мы получаем вместо (9.8.10) следующее выражение:

$$\langle \Delta J_1(t)\Delta J_2(t+\tau)\rangle = \eta_1\eta_2\iint_{-\infty}^{\infty} k(t')k(t'')\langle \Delta I_1(t)\Delta I_2(t+t'-t''+\tau)\rangle\,dt'\,dt''. \quad (9.8.11)$$

Отсюда следует, что флуктуации двух фотоэлектрических токов $J_1(t)$, $J_2(t)$, вообще говоря, коррелированны, если коррелированны флуктуации интенсивности света на двух фотодетекторах.

9.8.1. Частные случаи

Теперь рассмотрим несколько частных случаев, в которых предшествующие соотношения упрощаются.

(а) Фотодетектор с быстрым откликом

Если время отклика T_R (см. рис. 9.5) фотодетектора намного короче любого из времен корреляции падающего света, мы вправе аппроксимировать импульс тока $k(t)$ под знаком интеграла по времени функцией $\delta(t)$, умноженной на Q, по сравнению со слабо меняющимися функциями. Тогда выражения (9.8.10) и (9.8.11) сводятся к следующим

$$\langle \Delta J(t)\Delta J(t+\tau)\rangle \approx \eta\langle I\rangle Q\delta(\tau) + \eta^2 Q^2 \langle \Delta I(t)\Delta I(t+\tau)\rangle, \tag{9.8.12}$$

$$\langle \Delta J_1(t)\Delta J_2(t+\tau)\rangle \approx \eta_1\eta_2 Q^2 \langle \Delta I_1(t)\Delta I_2(t+\tau)\rangle. \tag{9.8.13}$$

(б) Фотодетектор с медленным откликом

Если отклик детектора медленнее, чем флуктуации интенсивности падающего поля, что часто случается на практике, то мы можем рассматривать функцию корреляции интенсивностей под знаком интеграла по времени как приблизительно пропорциональную дельта-функции. Тогда после подстановки $\langle \Delta I(t)\Delta I(t+\tau)\rangle = \langle (\Delta I)^2\rangle T_c\delta(\tau)$ мы получим из (9.8.10) выражение

$$\langle \Delta J(t)\Delta J(t+\tau)\rangle = \eta\langle I\rangle \int_{-\infty}^{\infty} k(t')k(t'+\tau)\,dt' + \eta^2\langle (\Delta I)^2\rangle T_c \int_{-\infty}^{\infty} k(t')k(t'+\tau)\,dt', \tag{9.8.14}$$

где T_c является мерой времени корреляции интенсивности света и $T_R \gg T_c$. В ходе аналогичных рассуждений мы получим из (9.8.11) выражение

$$\langle \Delta J_1(t)\Delta J_2(t+\tau)\rangle = \eta_1\eta_2\langle \Delta I_1\Delta I_2\rangle T_c \int_{-\infty}^{\infty} k(t')k(t'+\tau)\,dt'. \tag{9.8.15}$$

9.8.2. Свет от теплового источника

Теперь применим последние из полученных формул для медленных детекторов к неполяризованному свету от теплового источника. В разд. 8.4 было показано, что в этом случае

$$\langle (\Delta I)^2\rangle = \frac{1}{2}\langle I\rangle^2, \tag{9.8.16}$$

$$\langle \Delta I_1\Delta I_2\rangle = \frac{1}{2}\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle|\gamma_{12}|^2, \tag{9.8.17}$$

где $|\gamma_{12}| \equiv |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|$ — модуль равновременно́й степени когерентности между оптическими полями на двух фотодетекторах. При подстановке этих результатов выражения (9.8.14) и (9.8.15) принимают вид

$$\langle \Delta J(t)\Delta J(t+\tau)\rangle = (\eta\langle I\rangle + \frac{1}{2}\eta^2\langle I\rangle^2 T_c)\int_{-\infty}^{\infty} k(t')k(t'+\tau)\,dt', \tag{9.8.18}$$

$$\langle \Delta J_1(t)\Delta J_2(t+\tau)\rangle = \frac{1}{2}\eta_1\eta_2\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle|\gamma_{12}|^2 T_c \int_{-\infty}^{\infty} k(t')k(t'+\tau)\,dt'. \tag{9.8.19}$$

Последнее выражение описывает то, что теперь называется эффектом Брауна — Твисса, который впервые наблюдался для света от теплового источника (Brown and Twiss, 1956a, 1957b). Оно показывает, что корреляция между двумя фотоэлектрическими токами пропорциональна квадрату степени когерентности световых полей на двух фотодетекторах. В выражениии (9.8.18) для автокорреляционной функции первый или дробово-шумовой член доминирует, когда $\eta\langle I\rangle T_c \ll 1$, т.е. когда среднее число фотонов, детектируемых за время когерентности T_c, много меньше единицы. Это почти всегда выполняется, когда температура теплового источника много меньше 10^5 K.

9.8.3. Спектральная плотность фототока

Наконец, вернемся к более общей формуле (9.8.10) и выполним преобразование Фурье по τ в каждом слагаемом этой формулы. Как хорошо известно, преобразование Фурье функции автокорреляции фототока является спектральной плотностью $\chi(\omega)$ флуктуаций тока (разд. 2.4). После проведения следующих преобразований Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle \Delta J(t) \Delta J(t+\tau) \rangle \, e^{i\omega\tau} \, d\tau \equiv \chi(\omega), \tag{9.8.20}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t) \, e^{i\omega t} \, dt \equiv K(\omega), \tag{9.8.21}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) \, e^{i\omega\tau} \, d\tau \equiv \psi(\omega), \tag{9.8.22}$$

где

$$\lambda(\tau) \equiv \langle \Delta I(t) \Delta I(t+\tau) \rangle / \langle I \rangle^2 \tag{9.8.23}$$

— нормированная автокорреляция флуктуаций интенсивности света, мы сразу же получим из (9.8.10) формулу

$$\chi(\omega) = \eta \langle I \rangle |K(\omega)|^2 + \eta^2 \langle I \rangle^2 |K(\omega)|^2 \psi(\omega) = \eta \langle I \rangle |K(\omega)|^2 [1 + \eta \langle I \rangle \psi(\omega)]. \tag{9.8.24}$$

Это показывает, что спектральный анализ флуктуаций фототока, в принципе, дает информацию о спектре флуктуаций интенсивности света. Спектральная функция $\psi(\omega)$ центрирована на нулевой частоте, а не на высоких оптических частотах. Функция $K(\omega)$ может рассматриваться как частотный отклик фотодетектора и связанной с ним электроники.

Для частного случая, когда мы имеем дело с поляризованным тепловым светом, в разд. 8.4 [(8.4.20)] было показано, что

$$\lambda(\tau) \equiv \langle \Delta I(t) \Delta I(t+\tau) \rangle / \langle I \rangle^2 = |\gamma(\tau)|^2, \tag{9.8.25}$$

где $\gamma(\tau)$ — нормированная автокорреляционная функция второго порядка оптического поля. Тогда

$$\psi(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)|^2 \, e^{i\omega\tau} \, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega') \phi(\omega + \omega') \, d\omega', \tag{9.8.26}$$

где

$$\phi(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) \, e^{i\omega\tau} \, d\tau \tag{9.8.27}$$

— нормированная спектральная плотность оптического поля [обозначенная как $s(\omega)$, без учета возможного фактора 2π, в разд. 2.4.3, 4.3.3 и 5.8.2]. В этом случае при одинаковом вкладе фазовых и амплитудных флуктуаций в спектр света можно получать информацию о спектре падающего света из флуктуаций фототока.

9.9. Эффект Хэнбери Брауна — Твисса (полуклассическое рассмотрение)

Первое экспериментальное свидетельство существования корреляций между выходами двух фотоэлектрических детекторов, освещенных частично коррелированными световыми волнами, наблюдалось в некоторых классических экспериментах, выполненных Брауном и Твиссом в 50-ых годах с помощью установки, показанной на рис. 9.6*а* (Brawn and Twiss, 1956, 1957a, b). Вторичный источник света был сформирован круговым объективом, на котором изображение ртутной дуги фокусировалось линзой. Луч света из объектива разделялся полупрозрачным зеркалом для освещения катодов фотоумножителей P_1 и P_2. Фотоумножитель

P_2 монтировался на горизонтальном предметном стекле, которое могло поворачиваться в направлении, перпендикулярном к направлению распространения падающего света. Таким образом, апертуры катодов с точки зрения объектива могли накладываться или разделяться на любое расстояние вплоть до нескольких их ширин. Флуктуации $\Delta J_1(t)$ и $\Delta J_2(t)$ токов на анодах фотоумножителей передавались на коррелятор по коаксиальным кабелям равной длины. В каждом случае устанавливался фильтр между анодом и входом кабеля для удаления постоянной компоненты прямого тока. Нормированный коэффициент корреляции

$$C(d) = \frac{\langle \Delta J_1(t) \Delta J_2(t) \rangle}{(\langle [\Delta J_1(t)]^2 \rangle)^{1/2} (\langle [\Delta J_2(t)]^2 \rangle)^{1/2}} \tag{9.9.1}$$

флуктуаций фототока был измерен как функция эффективного расстояния между фотокатодами $d = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ с результатами, показанными на рис. 9.6*б*. Следует заметить, что нормированный коэффициент корреляции $C(d)$ имеет максимальное значение, когда фотокатоды оптически совмещены ($d = 0$) и что он падает с ростом расстояния d.

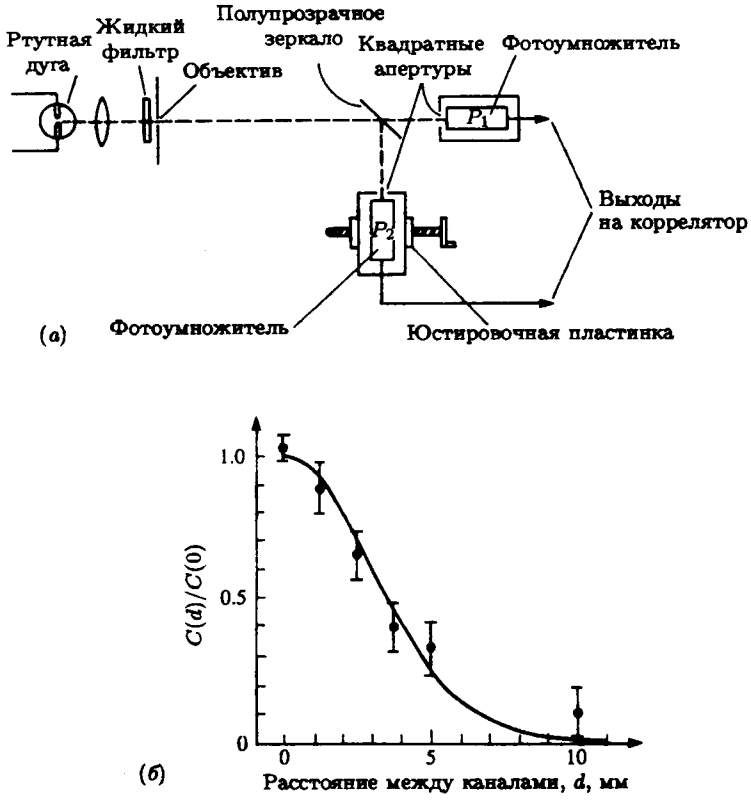


Рис. 9.6. *а* — Упрощенная схема установки для измерения корреляций между флуктуирующими токами на выходе двух фотодетекторов, освещенных частично когерентным светом от теплового источника; *б* — экспериментальные и теоретические значения нормированного коэффициента корреляции C(d)/C(0) [(9.9.1)] для различных эффективных расстояний между фотокатодами. Экспериментальные данные показаны как точки с вертикальными штрихами, показывающими диапазон возможных ошибок (Brown and Twiss, 1957b)

Сущность этого эффекта, теперь известного как *эффект Хэнбери Брауна — Твисса*, можно легко понять из теории, развитой в разд. 9.8. В силу того, что падающий (неполяризованный) свет испускается статистически стационарным тепловым источником, и флуктуации поля имеют очень большую скорость по сравнению с откликом детектора, корреляции флуктуаций тока задаются выражениями (9.8.18) и (9.8.19). Поэтому мы получаем

$$\langle (\Delta J_l(t))^2 \rangle = \eta_l \langle I_l \rangle [1 + \frac{1}{2} \eta_l \langle I_l \rangle T_c] \int_0^\infty k^2(t')\, dt' \quad (l = 1, 2), \tag{9.9.2}$$

$$\langle \Delta J_1(t) \Delta J_2(t) \rangle = \frac{1}{2} \eta_1 \eta_2 \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|^2 T_c \int_0^\infty k^2(t')\, dt', \tag{9.9.3}$$

откуда следует, что нормированный коэффициент взаимной корреляции $C(d)$, определенный выражением (9.9.1), задается в виде

$$C(d) = \frac{\frac{1}{2}(\eta_1 \eta_2 \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle)^{1/2} T_c}{(1 + \frac{1}{2}\eta_1 \langle I_1 \rangle T_c)^{1/2} (1 + \frac{1}{2}\eta_2 \langle I_2 \rangle T_c)^{1/2}} |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|^2. \tag{9.9.4}$$

Величина $\frac{1}{2}\eta_l \langle I_l \rangle T_c \equiv \delta$ ($l = 1, 2$) — это среднее число фотоэлектрических отсчетов, вызванных светом одной поляризации, зарегистрированных детектором в течение времени корреляции T_c. Для тепловых источников света с температурами много ниже 10^5 K величина δ всегда меньше единицы (см. разд. 13.1.4), и она была много меньше 1 в экспериментах Брауна и Твисса. Поэтому при $\eta_1 \langle I_1 \rangle \approx \eta_2 \langle I_2 \rangle$ мы можем еще

упростить выражение (9.9.4), и записать

$$C(d) \approx \delta|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|^2. \tag{9.9.5}$$

Эта формула показывает, что нормированный коэффициент корреляции флуктуаций выхода фотоэлектрического тока пропорционален квадрату модуля равновременно́й степени когерентности второго порядка света, падающего на два детектора. Для кругового однородного пространственно некогерентного источника, который был использован в экспериментах Брауна и Твисса, равновременна́я степень когерентности $|j(P_1, P_2)| \equiv |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|$ была рассчитана в разд. 4.4.4 с помощью теоремы Ван Циттерта — Цернике с результатами, описываемыми выражением (4.4.44). Квадрат ее модуля имеет форму коэффициента корреляции $C(d)$, измеренного Брауном и Твиссом и показанного на рис. 9.6*б*. Наличие очень малого множителя δ в (9.9.5) учитывает относительно большие ошибки в результатах, показанных на рис. 9.6*б*.

9.10. Звездная интерферометрия интенсивностей

В разд. 7.2 мы уже описывали классический метод Майкельсона по определению диаметра звезд. Он основывается на измерениях видности полос интерференционной картины, сформированной светом от звезды, который достигает плоскости детектора с помощью двух зеркал $M_1(\mathbf{r}_1)$ и $M_2(\mathbf{r}_2)$ или, что эквивалентно, на измерениях абсолютной величины равновременно́й степени когерентности $j(M_1, M_2) \equiv \equiv \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)$ света, достигающего этих двух зеркал. Согласно теореме Ван Циттерта — Цернике величина $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)$ для света в двух точках в дальней зоне некогерентного источника пропорциональна преобразованию Фурье распределения интенсивности по источнику. К сожалению, нужны очень большие базы интерферометра, чтобы различать звезды очень малого углового размера, и интерферометрия становится все более сложной. Слабый изгиб плеч телескопа может вызвать изменения разности хода в несколько длин волн, что вызывает передвижение интерференционных полос. Атмосферная турбулентность может вызвать даже бо́льшие отклонения полос. Существенно, что наименьшие угловые диаметры звезд (порядка 0,01 угловых секунд), измеренные с помощью этого метода, практически не уточнились за годы после измерений Майкельсона.

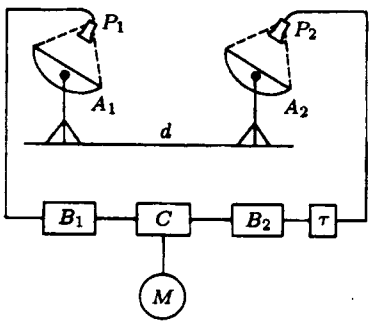


Рис. 9.7. Схема звездного интерферометра интенсивностей (А — зеркала; В — усилители; С — умножитель; М — интегратор; Р — фотоприемники; τ — время задержки) (Brown and Twiss, 1958a)

Метод фотоэлектрической корреляции, который мы только что обсуждали, является альтернативным способом, обладающим определенными преимуществами, для измерения абсолютного значения степени когерентности $|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|$ [см. (9.9.5)]. Поэтому становится возможным определение диаметров звезд другим путем. Схема системы, известной как *звездный интерферометр интенсивностей*, впервые сконструированный Брауном и Твиссом (Brown and Twiss, 1956b, 1958a, b), показана на рис. 9.7. Два параболических зеркала были нацелены на удаленную звезду, и свет, собранный каждым, направлялся на фотоумножитель в обоих фокусах. Фотоэлектрические сигналы усиливались и коррелировались, как раньше. Задержка в одном из кабелей компенсировала тот факт, что свет достигал одного фотодетектора раньше, чем другого. Затем расстояние между зеркалами изменялось, и корреляция измерялась как функция расстояния. Главное преимущество этого метода перед методом Майкельсона заключается в том, что световые лучи, падающие на два зеркала, не должны интерферировать. Фактически совмещаются лишь два фотоэлектрических сигнала. В результате оптическая разность путей не должна поддерживаться строго постоянной, и легкие движения зеркал и атмосферная турбулентность имеют очень слабое влияние. Поэтому достижима много большая база интерферометра. Более того, зеркала, собирающие свет, не должны быть очень высокого оптического качества, так как их единственной функцией является направление света на фотодетектор в фокусе, и поэтому становится также возможным использование очень больших собирающих зеркал. В результате Браун и Твисс смогли достигнуть лучшего углового разрешения, чем Майкельсон, с гораздо более грубым оптическим оборудованием. Результаты их первых опубликованных измерений показаны на рис. 9.8. Данные соответствуют значениям нормированного коэффициента корреляции $|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|^2$ света от звезды Сириус, с помощью которых был определен угловой диаметр $0.0068'' \pm 0.0005''$ в приемлемом согласии с величинами, полученными и методом интерферометра Майкельсона.

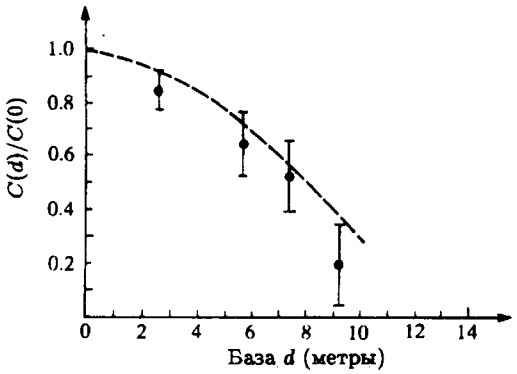


Рис. 9.8. Сравнение между измеренными значениями нормированного коэффициента корреляции $C(d)/C(0)|\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,0)|^2$ света от звезды Сириус и теоретическими значениями для звезды с угловым диаметром 0.0063″. Вертикальные штрихи показывают диапазон возможной ошибки наблюдения (из работы Brown and Twiss, 1956b)

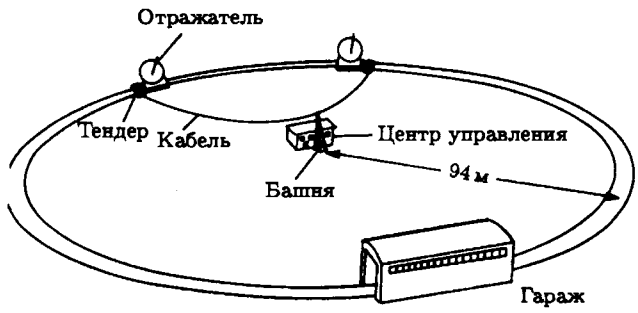


Рис. 9.9. Общая схема интерферометра интенсивности в обсерватории Наррабри (Brown, Davis and Allen, 1967a)

Позднее большой звездный интерферометр интенсивностей был построен в Наррабри, Австралия[1] (Brown, Davis and Allen, 1967a, b, 1974) (см. рис. 9.9). Он использует два зеркала диаметром 6.5 м, смонтированных на двух управляемых компьютером столах, которые движутся по круговому пути диаметром 188 м. Это создает базу интерферометра до $d = 188$ м и делает возможным измерения угловых диаметров звезд до 0.0004″ с разрешением около 0.00003″. Несмотря на то, что этот метод позволяет использовать большие зеркала, он, в конечном счете, ограничен количеством собранного света, потому что, как можно видеть из (9.9.3), измеряемая корреляция пропорциональна квадрату интенсивности света.

9.11. Спектроскопия флуктуаций

Техника измерений корреляций фотоэлектрических флуктуаций тока имеет другие применения. Для узкополосных световых пучков от тепловых источников она дает возможность получить информацию о спектральном распределении света без применения каких-либо дисперсионных элементов (ср. также разд. 7.3). Как ясно из выражения (9.8.24), производя спектральный анализ флуктуаций фотоэлектрического тока на выходе фотодетектора, мы можем вывести функцию $\psi(\omega)$, которая является спектральной плотностью флуктуаций интенсивности света. Конечно, в общем случае флуктуации интенсивности и фазы не обязательно должны быть коррелированны, так что может не быть никакого простого соотношения между спектральными плотностями интенсивности света и оптического поля. Однако, в частном случае света от теплового источника $\psi(\omega)$ просто связана с нормированной спектральной плотностью $\phi(\omega)$ оптического поля (обозначенной как $s(\omega)$ в предыдущих главах) с помощью свертки выражения (9.8.26). Поэтому у нас появляется интересная возможность получения информации о спектре оптических частот из измерений, сделанных на значительно более низких частотах электрического тока. Это связано с тем, что $\psi(\omega)$, заданная выражением (9.8.26), имеет центр на частоте $\omega = 0$, тогда как спектральная плотность $\phi(\omega)$ оптического поля имеет центр на некоторой высокой частоте порядка 10^{15} Гц.

В общем случае не существует однозначной процедуры обращения (9.8.26) и вывода $\phi(\omega)$ из измерений $\psi(\omega)$. Несмотря на это, некоторые свойства спектра $\phi(\omega)$ оптического поля могут быть получены из измерений $\psi(\omega)$. Например, когда $\phi(\omega)$ ограничена по ширине полосы шириной полосы $\Delta\omega$ с центром в ω_0, т.е. если $\phi(\omega) = 0$ за пределами диапазона $\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega < \omega < \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega$, из выражения (9.8.26) мы сразу же видим, что $\psi(\omega) = 0$, когда $|\omega| > \Delta\omega$, так что ψ ограничена по ширине полосы диапазоном $-\Delta\omega < \omega < \Delta\omega$.

[1] Прекрасный отчет о постройке и работе интерферометра в Наррабри с обилием соответствующей полезной информации приведен у Брауна (Brown, 1974).

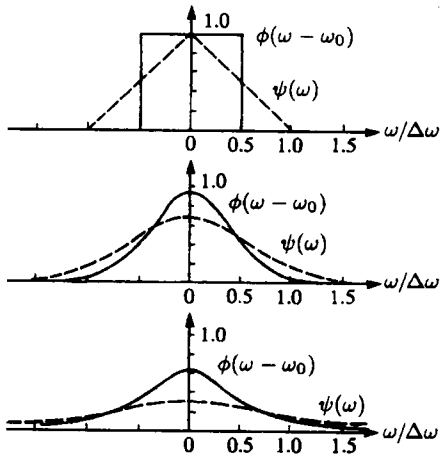


Рис. 9.10. Соотношение между нормированными спектральными плотностями $\phi(\omega)$ и $\psi(\omega)$ падающего теплового света и флуктуаций фототока, соответственно, когда ϕ имеет прямоугольный, гауссов и лоренцев профиль ($\Delta\omega$ — спектральная ширина $\phi(\omega)$ на полувысоте) (Из работы Mandel, 1963)

Если свет квазимонохроматичен ($\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$), то ψ содержит только низкочастотные компоненты, находящиеся внутри эффективной ширины полосы света $\Delta\omega$. На рис. 9.10 графически показано соотношение между нормированным спектром $\phi(\omega)$ света и $\psi(\omega)$ флуктуаций фототока для трех профилей спектра. Мы видим, что эффективные ширины ϕ и ψ в каждом случае одного порядка величины.

Этот метод получения информации об оптических спектрах, который известен как *спектроскопия флуктуаций*, был наиболее успешно применен для рассеянного лазерного света (Ford and Benedek, 1965), в частности, с гетеродинированием, когда некоторое количество нерассеянного лазерного света накладывается на рассеянное поле (Cummins, Knable and Yeh, 1964; Lastovka and Benedek, 1966). Эта тема описана Камминсом и Свини (Cummins and Swinney, 1970, с. 133).

Задачи

9.1 Лазер излучает свет одновременно с равными амплитудами на двух продольных модах с частотами ω_1 и ω_2. Обе моды имеют случайные фазы и не зависят друг от друга. Вычислите плотность вероятности $p(\tau)$ для одного акта детектирования в момент времени t и другого в момент времени $t+\tau$, когда свет лазера падает на фотодетектор с площадью поверхности S.

9.2 Когда фаза $\phi(t)$ каждой лазерной моды в задаче 9.1 испытывает одномерные случайные блуждания с $\langle[\phi(t+\tau)-\phi(t)]^2\rangle = 2D\tau$, где D — постоянная фазовой диффузии, вычислите $p(\tau)$.

9.3 Квазимонохроматический световой луч с гауссовской статистикой, представленный $V_1(t)$, и параллельный строго монохроматический луч $V_2(t) = A\,\mathrm{e}^{-i(\omega_2 t+\phi)}$, где A — постоянная, а фаза ϕ случайно распределена в диапазоне от 0 до 2π, совмещаются и падают на фотодетектор. Оба лазерных поля одинаково поляризованы. Вычислите дисперсию числа фотоэлектрических отсчетов, зарегистрированных фотодетектором в некотором интервале времени T, через средние интенсивности $\langle I_1\rangle$, $\langle I_2\rangle$, частоту ω_2 и нормированную спектральную плотность гауссовского поля, когда T много больше времени когерентности гауссовского поля.

9.4 По известной дифференциальной вероятности фотодетектирования $P(t)\Delta t$ и композиционному свойству

$$p(n,t,t+T+\Delta T) = p(n-1,t,t+T)P(t+T)\Delta T + p(n,t,t+T)[1-P(t+T)\Delta T],$$

выведите дифференциальное уравнение для $p(n,t,t+T)$ и решите его при $n=0$.

9.5 Докажите методом индукции или любым другим способом, что вероятность $p(n,t,t+T)$, заданная выражением (9.7.1), следует из решения для $p(0,t,t+T)$, полученного в предыдущей задаче.

Глава 10

КВАНТОВАНИЕ СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

10.1. Введение

До сих пор мы рассматривали электромагнитное поле как классическое поле, описываемое c-числовыми функциями. Существенный успех классической электромагнитной теории в объяснении различных оптических явлений, в частности связанных с распространением, интерференцией и дифракцией волн, подтвердил оправданность классического подхода. Более того, как мы видели в предыдущих главах, в некоторых случаях классическая волновая теория дает хорошие результаты при рассмотрении взаимодействия электромагнитных полей. Например, она в состоянии описать такие казалось бы неклассические эффекты, как группировка фотонов и статистика фотоотсчетов. На первый взгляд, для выхода за рамки классической волновой теории в оптике нет достаточных оснований.

С другой стороны, можно показать, что оптику следует рассматривать с квантовой точки зрения в том смысле, что мы часто имеем дело с малым числом квантов или фотонов. В микроволновом диапазоне электромагнитного спектра и на больших длинах волн число фотонов в каждой моде поля, как правило, достаточно велико. В этом случае у нас есть все основания рассматривать систему классически. Тем не менее, в оптическом диапазоне ситуация обычно как раз обратная. Как будет показано в разд. 13.1, для света, излучаемого почти всеми типами источников, за исключением лазеров, среднее число фотонов в моде значительно меньше единицы. Может показаться, что в этом случае классическое описание было бы безнадежно неадекватным и что оптику, следовательно, всегда следует рассматривать как раздел квантовой электродинамики. Действительно, в разд. 10.7 нами будет показано, что сама идея об осциллирующем поле с определенной фазой, что подразумевается, когда мы записываем оптическое возмущение в виде $v\,e^{-i\omega t}$, согласно квантовой теории излучения не имеет смысла, когда речь идет о столь малом числе фотонов.

Почему же тогда классическая оптика так хорошо работает во многих случаях? Дело в том, что мы редко пытаемся измерить неклассические характеристики света, такие, например, как беспорядочно меняющаяся абсолютная фаза волны. Разность фаз можно определить из интерференционных экспериментов, однако это уже совершенно другая задача. Во многих случаях достаточно иметь дело с интенсивностью света, которая чаще всего прекрасно описывается в рамках классической волновой оптики. На самом деле, классическая оптика позволяет объяснить некоторые явления даже при очень низких значениях интенсивности света.

Тем не менее, классическая оптика работает не всегда. Существует ряд оптических эффектов, часто (но не всегда) предполагающих малые числа фотонов, в которых поле следует рассматривать квантовомеханически. Квантовая электродинамика в этом случае играет существенную роль. Квантовая теория электромагнитного излучения является наиболее удачной и всеобъемлющей теорией оптики. До сих пор ни одно из ее предсказаний не было опровергнуто экспериментально.

В последующих параграфах мы рассмотрим задачу квантования свободного или невзаимодействующего электромагнитного поля и исследуем ряд его свойств. Обсудив некоторые принципиальные неклассические характеристики, мы приступим к изучению когерентных состояний квантового поля и покажем, что можно установить соответствие между свойствами когерентности поля в классической волновой теории и в квантовой теории.

10.2. Гамильтониан классического поля и канонические уравнения движения

Рассмотрим электромагнитное поле в пространстве, свободном от зарядов и токов. Поле, таким образом, удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла, которые в системе единиц СИ имеют вид[1]

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t), \tag{10.2.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \tag{10.2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0, \tag{10.2.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{10.2.4}$$

$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей в пространственно-временной точке $(\mathbf{r},t)$. Часто удобно представить свободное электромагнитное поле через поперечный[2] векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ в кулоновской калибровке, который удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{10.2.5}$$

и условию

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{10.2.6}$$

Электрическое и магнитное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ выражаются через $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ следующим образом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t), \tag{10.2.7}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t). \tag{10.2.8}$$

10.2.1. Разложение по плоским волнам

Чтобы получить гамильтоновы уравнения движения, полезно первоначально осуществить фурье-разложение $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ по пространственным координатам x, y, z. Разложение может быть выполнено как в виде интеграла Фурье, так и в виде ряда Фурье. Хотя на данном этапе нет особого преимущества в выборе того или иного метода, в конечном итоге мы обнаружим, что несколько проще иметь дело с квантованным полем в виде дискретного разложения $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$. Поэтому представим себе, что электромагнитное поле заключено в большой куб со стороной L, и наложим на поле периодические граничные условия. На соответствующей стадии вычислений мы будем считать величину L стремящейся к бесконечности[3]. Нет необходимости говорить, что любые результаты, имеющие физический смысл, не должны зависеть[4] от L.

Запишем трехмерное фурье-разложение $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ по плоским модам в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0^{1/2}L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k}} \mathscr{A}_{\mathbf{k}}(t)\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \tag{10.2.9}$$

[1] В книге используются как единицы СИ, так и гауссовские единицы, но измеряемые величины всегда представлены в единицах СИ.

[2] Мы напоминаем, что поперечная составляющая векторного потенциала является калибровочно-инвариантной.

[3] Действительно, можно показать, что наложение периодических граничных условий не является строго необходимым в пределе $L \to \infty$. Этот вопрос обсуждался в работах (Ledermann, 1944) и (Peierls, 1954) в связи с вопросом о нормальных модах кристалла.

[4] При $L \to \infty$ любая дискретная сумма по $\mathbf{k}$-векторам $\sum_{\mathbf{k}}()$ переходит в интеграл согласно правилу $\sum_{\mathbf{k}}() \to \to (L/2\pi)^3 \int() \, d^3k$, где $(L/2\pi)^3$ — плотность мод, которая может быть получена следующим образом. Из выражения (10.2.10) следует, что $\delta k_i = (2\pi/L)\delta n_i$ $(i = 1,2,3)$, т.е. количество мод, соответствующих δk_i, равно δn_i. Число мод, соответствующих трехмерному интервалу $\delta k_1 \delta k_2 \delta k_3$, равно $\delta n_1 \delta n_2 \delta n_3 = (L/2\pi)^3 \delta k_1 \delta k_2 \delta k_3$. Этих шагов можно избежать, непосредственно осуществив непрерывное разложение векторов поля. Непрерывное разложение по модам кратко обсуждается в разд. 10.10.

где компоненты вектора $\mathbf{k}$

$$\begin{aligned} k_1 &= 2\pi n_1/L, \quad n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ k_2 &= 2\pi n_2/L, \quad n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ k_3 &= 2\pi n_3/L, \quad n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned} \tag{10.2.10}$$

составляют дискретное множество, и сумма $\sum_{\mathbf{k}}$ понимается как сумма по целым числам n_1, n_2, n_3. Множитель $\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}$, где ε_0 — электрическая постоянная, введен для удобства дальнейших вычислений.

Учитывая условие поперечности (10.2.6), получаем

$$\frac{i}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathscr{A}_{\mathbf{k}}(t)\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 0$$

для всех $\mathbf{r}$, откуда следует, что

$$\mathbf{k} \cdot \mathscr{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0. \tag{10.2.11}$$

Кроме того, действительный характер $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ приводит к условию

$$\mathscr{A}_{-\mathbf{k}}(t) = \mathscr{A}_{\mathbf{k}}^*(t). \tag{10.2.12}$$

Поскольку $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению (10.2.5), отсюда следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \left(-k^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathscr{A}_{\mathbf{k}}(t)\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 0$$

для всех $\mathbf{r}$, и $\mathscr{A}_{\mathbf{k}}(t)$, таким образом, удовлетворяет уравнению движения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 \right) \mathscr{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0. \tag{10.2.13}$$

Мы ввели угловую частоту $\omega_{\mathbf{k}} = ck$, сокращенно обозначив ее как ω. Общее решение этого уравнения, удовлетворяющее также условию (10.2.12), имеет вид

$$\mathscr{A}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{c}_{\mathbf{k}}\, e^{-i\omega t} + \mathbf{c}_{-\mathbf{k}}^*\, e^{i\omega t}. \tag{10.2.14}$$

10.2.2. Единичные векторы поляризации

Удобно разложить вектор $\mathbf{c}_{\mathbf{k}}$ на две ортогональных компоненты, которые выбираются таким образом, чтобы соотношение (10.2.11) выполнялось автоматически. Проще всего сделать это, выбрав пару ортонормированных действительных базисных векторов $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} = 0 \quad (s = 1, 2), \\ &\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s'} = \delta_{ss'} \quad (s, s' = 1, 2), \\ &\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}^* \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2} = \mathbf{k}/k \equiv \boldsymbol{\kappa}, \end{aligned} \tag{10.2.15}$$

и положить

$$\mathbf{c}_{\mathbf{k}} = \sum_{s=1}^{2} c_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}. \tag{10.2.16}$$

Базисные векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}$ поперечны волновому вектору $\mathbf{k}$, ортонормированны и составляют вместе с вектором $\boldsymbol{\kappa}$ правую тройку векторов. Поскольку $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}$ — действительный вектор, знак комплексного сопряжения во втором соотношении (10.2.15), безусловно, не является обязательным и введен для удобства в дальнейших вычислениях. Два действительных базисных вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}$ отвечают двум ортогональным состояниям линейной поляризации, и выражение (10.2.16) соответствует разложению амплитуды поля на две ортогональные линейные поляризации. Условия (10.2.15), наложенные нами на два базисных вектора,

фактически определяют их не однозначно, а с точностью до поворота на произвольный угол относительно волнового вектора $\mathbf{k}$.

Однако, иногда полезнее разложить поле другим образом, например, на две ортогональные компоненты эллиптической поляризации. В общем случае, этим состояниям поляризации отвечают комплексные единичные базисные векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}$, на которые мы накладываем те же условия (10.2.15). В случае, когда $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}$ является комплексным вектором, выражение (10.2.16) представляет собой более общее разложение поля на две ортогональные компоненты поляризации.

Комплексные базисные векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}$ несложно построить, используя действительные базисные векторы, которые мы обозначим как $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}2}$. Представим каждую пару базисных векторов в виде матрицы-столбца

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2} \end{bmatrix}.$$

Тогда произведение любой матрицы $\mathbf{U}$ унитарного преобразования размера 2×2, для которой $\mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{1} = \mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U}$, на матрицу-столбец $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}}$ в общем случае есть матрица-столбец, элементы которой представляют собой пару комплексных базисных векторов,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{U}\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}}. \tag{10.2.17а}$$

Более того, если исходные базисные векторы удовлетворяют условиям (10.2.15), можно легко доказать, что и новые базисные векторы также удовлетворяют этим условиям. Например, если скалярное произведение исходных матриц-столбцов есть единичная матрица,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(\mathrm{R})\dagger}_{\mathbf{k}} = \mathbf{1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

что означает ортонормированность исходных базисных векторов, то, исходя из выражения (10.2.17а), соответствующее скалярное произведение для новых базисных векторов

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\dagger}_{\mathbf{k}} = \mathbf{U}\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(\mathrm{R})\dagger}_{\mathbf{k}}\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{1}$$

есть также единичная матрица. $\mathbf{U}$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{U} = \frac{1}{(1+|d|^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} 1 & d \\ -d^* & 1 \end{bmatrix}, \tag{10.2.17б}$$

где d — произвольное комплексное число. Тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1} = \frac{1}{(1+|d|^2)^{1/2}}[\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}1} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}2}], \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2} = \frac{1}{(1+|d|^2)^{1/2}}[-d^*\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}1} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}2}]. \tag{10.2.17в}$$

Выбирая различные значения комплексного числа d, мы формируем различные пары базисных векторов, отвечающих различным состояниям поляризации.

Покажем, что для произвольного комплексного числа d, преобразование $\mathbf{U}$, приведенное выше, формирует состояния эллиптической поляризации. Для этой цели мы проанализируем временну́ю зависимость действительной части выражения $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, e^{-i\omega t}$. Разлагая $d = d_r + id_i$ на действительную и мнимую части, из выражения (10.2.17в) получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}\, e^{-i\omega t}] &= \mathrm{Re}\,\frac{1}{(1+|d|^2)^{1/2}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}1} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}2})\, e^{-i\omega t} = \\ &= \frac{1}{(1+|d|^2)^{1/2}}[(\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}1} + d_r\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}2})\cos\omega t + d_i\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}2}\sin\omega t], \\ \mathrm{Re}\,[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}\, e^{-i\omega t}] &= \frac{1}{(1+|d|^2)^{1/2}}[(-d_r\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}1} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}2})\cos\omega t + d_i\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{R})}_{\mathbf{k}1}\sin\omega t]. \end{aligned} \tag{10.2.18}$$

Правые части этих выражений соответствуют движению по эллипсу в плоскости, перпендикулярной волновому вектору $\mathbf{k}$, так как амплитуды и направления колебаний $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ в общем случае различны. Кроме того, в одном случае движение происходит по часовой стрелке, а в другом — против.

В частном случае, когда d — действительное число и $d_i = 0$, движение переходит в два косинусоидальных колебания в направлениях двух ортогональных действительных единичных векторов

$$\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}^{(\mathrm{R})} + d\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}^{(\mathrm{R})}}{(1+|d|^2)^{1/2}} \quad \text{и} \quad \frac{-d\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}^{(\mathrm{R})} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}^{(\mathrm{R})}}{(1+|d|^2)^{1/2}},$$

что, очевидно, отвечает двум ортогональным состояниям линейной поляризации. Новые векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}$ повернуты на угол $\operatorname{arctg} d$ вокруг $\mathbf{k}$-оси по отношению к старым базисным векторам. В другом случае, когда $d = i$ и $d_r = 0$, из выражений (10.2.18) получаем

$$\operatorname{Re}[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}\, e^{-i\omega t}] = \frac{1}{\sqrt{2}}[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}^{(\mathrm{R})}\cos\omega t + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}^{(\mathrm{R})}\sin\omega t], \quad \operatorname{Re}[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}\, e^{-i\omega t}] = \frac{1}{\sqrt{2}}[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}^{(\mathrm{R})}\cos\omega t + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}^{(\mathrm{R})}\sin\omega t].$$

Эти выражения описывают движение по кругу в двух взаимно противоположных направлениях и, следовательно, отвечают ортогональным состояниям круговой поляризации. В общем случае можно показать из выражений (10.2.18), что квадраты большой a и малой b осей эллипса поляризации определяются выражениями

$$a^2 = \frac{2d_i^2}{(1+|d|^2)\{1+|d|^2-[(|d|^2-1)^2+4d_r^2]^{1/2}\}}, \quad b^2 = \frac{2d_i^2}{(1+|d|^2)\{1+|d|^2+[(|d|^2-1)^2+4d_r^2]^{1/2}\}},$$

а разность их квадратов

$$a^2 - b^2 = \frac{[(|d|^2-1)^2+4d_r^2]^{1/2}}{|d|^2+1} \leqslant 1.$$

Когда $b = 0$, эллипс переходит в линию, и разность принимает свое максимальное значение, равное 1, при действительных d, соответствующих линейной поляризации. В другом случае, эллипс переходит в круг с $a = b$, когда $d = i$, что соответствует круговой поляризации.

Иногда полезно иметь возможность определить набор базисных векторов, связанный с определенным волновым вектором $\mathbf{k}$, полярный и азимутальный углы которого равны, соответственно, θ и ϕ. Легко показать, что два ортогональных базисных вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1} &= \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{x}_1 + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{y}_1 - \sin\theta\,\mathbf{z}_1, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2} &= -\sin\phi\,\mathbf{x}_1 + \cos\phi\,\mathbf{y}_1 \end{aligned} \tag{10.2.19а}$$

удовлетворяют условиям (10.2.15) и, следовательно, отвечают двум ортогональным линейным поляризациям, соответствующим волновому вектору $\mathbf{k}$. Единичные векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_1$ направлены вдоль координатных осей. С другой стороны, комплексные базисные векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\cos\theta\cos\phi - i\sin\phi)\mathbf{x}_1 + (\cos\theta\sin\phi + i\cos\phi)\mathbf{y}_1 - \sin\theta\,\mathbf{z}_1], \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(i\cos\theta\cos\phi - \sin\phi)\mathbf{x}_1 + (i\cos\theta\sin\phi + \cos\phi)\mathbf{y}_1 - i\sin\theta\,\mathbf{z}_1] \end{aligned} \tag{10.2.19б}$$

отвечают правой и левой круговым поляризациям, соответствующим волновому вектору $\mathbf{k}$.

Время от времени мы будем сталкиваться с вычислением суммы по двум компонентам $s = 1$ и $s = 2$ тензорной комбинации $(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s})_i^*(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s})_j$. Отметим сначала, что, поскольку базис поляризаций определен с точностью до унитарного преобразования, мы можем выбрать $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}$ действительными, ортогональными, единичными векторами. Вместе с единичным вектором $\boldsymbol{\kappa}$, направленным вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$, эти единичные векторы $(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}, \boldsymbol{\kappa})$ формируют правый, ортогональный декартов базис. Компоненты $(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1})_i$, $(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2})_i$, $(\boldsymbol{\kappa})_i$ представляют собой три направляющих косинуса i-оси в этом базисе. Исходя из хорошо известных свойств направляющих косинусов, выражение для косинуса угла между i-осью и j-осью можно записать в виде

$$\delta_{ij} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1})_i(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1})_j + (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2})_i(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2})_j + \kappa_i\kappa_j$$

или

$$\sum_s (\varepsilon_{\mathbf{k}s})_i (\varepsilon_{\mathbf{k}s})_j = \delta_{ij} - \kappa_i \kappa_j. \tag{10.2.19в}$$

Поскольку разложение (10.2.16) справедливо независимо от того, как именно выбраны базисные векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}$, часто удобно умышленно оставить их неопределенными, вплоть до того момента, когда на некоторой стадии анализа станет ясно, что выбор конкретного набора базисных векторов упрощает вычисления. На этой стадии базисные векторы могут быть выбраны соответствующим образом.

Подставляя (10.2.16) в (10.2.14) и используя полученный результат в (10.2.9), получим разложение

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [c_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega t} + c^*_{-\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}^*_{-\mathbf{k}s} e^{i\omega t}] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [c_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + c^*_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}] = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [u_{\mathbf{k}s}(t) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + u^*_{\mathbf{k}s}(t) \boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}], \end{aligned} \tag{10.2.20}$$

где

$$u_{\mathbf{k}s}(t) = c_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega t}. \tag{10.2.21}$$

Выражение (10.2.20) представляет собой разложение $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ по основным векторным модовым функциям $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ с комплексными амплитудами $u_{\mathbf{k}s}$. Каждая мода характеризуется волновым вектором $\mathbf{k}$ и индексом поляризации s. Соответствующая модовая функция, очевидно, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0, \tag{10.2.22}$$

тогда как соответствующая модовая амплитуда $u_{\mathbf{k}s}(t)$ удовлетворяет тому же уравнению гармонического осциллятора (10.2.13), что и $\mathscr{A}_{\mathbf{k}}(t)$.

Можно сразу воспользоваться соотношением (10.2.20), чтобы с помощью выражений (10.2.7), (10.2.8) записать соответствующие разложения по модам для векторов $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Таким образом,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{i}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \omega [u_{\mathbf{k}s}(t) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \text{к.с.}], \tag{10.2.23}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{i}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [u_{\mathbf{k}s}(t) (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \text{к.с.}]. \tag{10.2.24}$$

10.2.3. Энергия электромагнитного поля

Воспользуемся полученными формулами для вычисления энергии H поля, которая определяется выражением

$$H = \frac{1}{2} \int_{L^3} \left[\varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r},t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r},t) \right] d^3r. \tag{10.2.25}$$

Интегрирование производится по пространству, заключенному в куб, объемом L^3.

Подставляя выражения для $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ и проводя интегрирование по пространственным координатам с помощью соотношений

$$\int_{L^3} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^3r = L^3 \delta^3_{\mathbf{k}\mathbf{k}'},$$

$$(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s}) \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s'}) = k^2 \boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s'} = k^2 \delta_{ss'},$$

получим компактное выражение

$$H = 2 \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \omega^2 |u_{\mathbf{k}s}(t)|^2, \tag{10.2.26}$$

в котором энергия представлена в виде суммы по модам.

В целях квантования поля желательно записать H в форме гамильтониана. Для этого введем пару действительных канонических переменных $q_{\mathbf{k}s}(t)$ и $p_{\mathbf{k}s}(t)$:

$$q_{\mathbf{k}s}(t) = [u_{\mathbf{k}s}(t) + u^*_{\mathbf{k}s}(t)], \tag{10.2.27}$$

$$p_{\mathbf{k}s}(t) = -i\omega[u_{\mathbf{k}s}(t) - u^*_{\mathbf{k}s}(t)]. \tag{10.2.28}$$

Исходя из временно́й зависимости $u_{\mathbf{k}s}(t)$, определенной формулой (10.2.21), переменные $q_{\mathbf{k}s}(t)$ и $p_{\mathbf{k}s}(t)$ синусоидально изменяются во времени с частотой ω и

$$\frac{\partial}{\partial t} q_{\mathbf{k}s}(t) = p_{\mathbf{k}s}(t), \tag{10.2.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{\mathbf{k}s}(t) = -\omega^2 q_{\mathbf{k}s}(t). \tag{10.2.30}$$

В переменных $q_{\mathbf{k}s}(t)$ и $p_{\mathbf{k}s}(t)$ выражение для энергии (10.2.26) принимает вид

$$H = \tfrac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s} [p^2_{\mathbf{k}s}(t) + \omega^2 q^2_{\mathbf{k}s}(t)]. \tag{10.2.31}$$

Полученное выражение представляет собой энергию *системы независимых гармонических осцилляторов*, каждый из которых соответствует $\mathbf{k}, s$-моде электромагнитного поля. Состояние классического поля излучения описывается множеством всех канонических переменных $q_{\mathbf{k}s}(t)$ и $p_{\mathbf{k}s}(t)$, которое, вообще говоря, является бесконечным. Однако, поскольку мы имеем дело с конечным объемом и дискретным набором мод, это бесконечное множество — счетное. В канонических переменных канонические уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial p_{\mathbf{k}s}} = \frac{\partial q_{\mathbf{k}s}}{\partial t}, \tag{10.2.32}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_{\mathbf{k}s}} = -\frac{\partial p_{\mathbf{k}s}}{\partial t}, \tag{10.2.33}$$

эквивалентный выражениям (10.2.29) и (10.2.30), соответственно.

Разложения (10.2.20), (10.2.23) и (10.2.24) для векторов поля $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ в канонических переменных принимают вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s} \left\{ \left[q_{\mathbf{k}s}(t) + \frac{i}{\omega} p_{\mathbf{k}s}(t) \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{к.с.} \right\}, \tag{10.2.34}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{i}{2\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s} \left\{ [\omega q_{\mathbf{k}s}(t) + i p_{\mathbf{k}s}(t)]\, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \text{к.с.} \right\}, \tag{10.2.35}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{i}{2\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s} \left\{ \left[q_{\mathbf{k}s}(t) + \frac{i}{\omega} p_{\mathbf{k}s}(t) \right] \mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \text{к.с.} \right\}. \tag{10.2.36}$$

10.3. Каноническое квантование поперечного поля

При описании электромагнитного поля в квантовой механике мы должны сопоставить динамическим переменным операторы гильбертова пространства, которые в общем случае не обязательно коммутируют друг с другом. Условимся обозначать операторы гильбертова пространства теми же символами, что и соответствующие классические переменные, но со значком $\hat{}$; например, операторы, соответствующие $q_{\mathbf{k}s}(t)$ и $p_{\mathbf{k}s}(t)$, будут обозначаться как $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$ и $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$. Согласно постулатам квантовой механики каждая пара канонически сопряженных операторов $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$, $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$ имеет отличный от нуля коммутатор $i\hbar$. Поскольку

классические переменные, относящиеся к двум различным модам, являются независимыми, соответствующие операторы гильбертова пространства коммутируют. Можно, следовательно, записать следующие коммутационные соотношения[1]

$$[\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}(t)] = i\hbar\delta^3_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}, \tag{10.3.1}$$

$$[\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{q}_{\mathbf{k}'s'}(t)] = 0, \tag{10.3.2}$$

$$[\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}(t)] = 0. \tag{10.3.3}$$

Состояние квантово-механической системы, т.е. электромагнитного поля в гильбертовом пространстве описывается вектором состояния $|\psi\rangle$. Результат измерения некоторой наблюдаемой физической величины, скажем, O, представляет собой одно из собственных значений оператора гильбертова пространства $\hat{O}$, соответствующего этой наблюдаемой. Если состояние $|\psi\rangle$ не является собственным вектором оператора $\hat{O}$, результат такого измерения неопределен, и можно говорить только о вероятностях различных результатов. Среднее значение наблюдаемой $\hat{O}$ определяется скалярным произведением вектора $\hat{O}|\psi\rangle$ и эрмитово сопряженного вектора $\langle\psi|$, т.е. выражением $\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$. Это выражение позволяет нам также вычислить вероятность некоторого определенного результата измерения наблюдаемой $\hat{O}$, скажем, O_i. Для определения этой вероятности мы должны найти собственный вектор $|O_i\rangle$, построить проекционный оператор $|O_i\rangle\langle O_i|$ и вычислить его среднее значение $|\langle\psi|O_i\rangle|^2$ в состоянии $|\psi\rangle$. Поскольку наблюдаемым физическим величинам всегда сопоставляются эрмитовы операторы, соответствующие собственные значения представляют собой действительные числа. Но если для операторов $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$, $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$ и, следовательно, для различных операторов поля $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)$, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$ и т.д., являющихся линейными функциями $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$ и $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$, спектр собственных значений непрерывен, то (как мы увидим в дальнейшем) для других операторов, таких, как оператор энергии $\hat{H}$, спектр собственных значений является дискретным. Все предыдущие разложения (10.2.20), (10.2.23), (10.2.24), и уравнения движения (10.2.13), (10.2.29), (10.2.30) справедливы и в качестве операторных выражений. Однако, необходимо учесть, что динамические переменные в них заменяются операторами гильбертова пространства, которые, вообще говоря, не обязательно коммутируют друг с другом. Таким образом, гамильтониан квантованного поля излучения имеет вид[2]

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s}[\hat{p}^2_{\mathbf{k}s}(t) + \omega^2\hat{q}^2_{\mathbf{k}s}(t)]. \tag{10.3.4}$$

Заметим, что $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$, $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$, а также векторы поля $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)$, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$ являются динамическими переменными, а пространственно-временны́е переменные $\mathbf{r}$, t играют роль параметров.

Во многих случаях вместо действительных динамических переменных или эрмитовых операторов $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$ и $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$ удобнее ввести неэрмитовы операторы

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}}[\omega\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) + i\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)], \tag{10.3.5}$$

$$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}(t) = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}}[\omega\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) - i\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)], \tag{10.3.6}$$

второй из которых эрмитово сопряжен первому. Эти выражения можно сразу же переписать, выразив $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$ и $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$ через операторы $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$ и $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}(t)$:

$$\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) = (\hbar/2\omega)^{1/2}[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}(t)], \tag{10.3.7}$$

$$\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t) = i(\hbar\omega/2)^{1/2}[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}(t) - \hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)]. \tag{10.3.8}$$

[1] По существу, мы следуем методике, впервые изложенной Дираком (Dirac, 1927). См. также (Dirac,1958; Heilter, 1954; Louisell, 1973; Power, 1964).

[2] Соответствие между классическими переменными и операторами гильбертова пространства может оказаться неоднозначным, если эти операторы не коммутируют. Следовательно, неочевидно, какой именно оператор следует сопоставить классической переменной qp: $\hat{q}\hat{p}$, $\hat{p}\hat{q}$, $(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q})/2$ или какое-либо другое выражение. Однако, подобная неоднозначность не возникает для гамильтониана, определенного формулой (10.3.4).

С помощью формул (10.3.1)—(10.3.3) получим соответствующие коммутационные соотношения для операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$ и $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t)$:

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'s'}(t)] = \delta^3_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}, \tag{10.3.9}$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'s'}(t)] = 0, \tag{10.3.10}$$

$$[\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'s'}(t)] = 0. \tag{10.3.11}$$

За исключением множителя $(\hbar/2\omega)^{1/2}$, операторы $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$, $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t)$, очевидно, соответствуют комплексным амплитудам $u_{\mathbf{k}s}(t)$, $u^{*}_{\mathbf{k},s}(t)$ и имеют аналогичную временну́ю зависимость [ср. (10.2.21)],

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k}s}(0)\, e^{-i\omega t}, \tag{10.3.12}$$

$$\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t) = \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(0)\, e^{i\omega t}. \tag{10.3.13}$$

Произведения операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t)$ и $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$, следовательно, не зависят от времени. Но в силу некоммутативности операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$ и $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t)$ неочевидно, какова должна быть операторная форма c-числового выражения для энергии (10.2.26). Тем не менее, воспользовавшись гамильтонианом (10.3.4) и подставив $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t)$ и $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)$ из (10.3.7) и (10.3.8), получим выражение

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s}\hbar\omega[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t) + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)], \tag{10.3.14}$$

в котором операторы представлены симметрично по отношению к их порядку. Или же, применяя коммутационное соотношение (10.3.9), можно представить $\hat{H}$ в нормально упорядоченной форме

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}}\sum_{s}\hbar\omega[\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) + \tfrac{1}{2}], \tag{10.3.15}$$

где операторы $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t)$ расположены слева от операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$.

Вклад $\frac{1}{2}\hbar\omega$ в энергию каждой $(\mathbf{k}, s)$-ой осцилляторной моды представляет собой так называемую *энергию нулевых колебаний*. Наличие этого вклада отражает тот факт, что согласно принципу неопределенности Гейзенберга квантово-механический гармонический осциллятор никогда не может прийти в состояние покоя, даже в основном энергетическом состоянии. В случае неограниченного числа мод учет энергии нулевых колебаний приводит к бесконечно большому вкладу в энергию. Это одна из трудностей квантовой электродинамики, которая так и не была удовлетворительным образом разрешена. Можно доказать, что бесконечно большие волновые числа не имеют физического смысла и что для всех физически обоснованных задач сумма в выражении (10.3.15), в действительности, должна быть конечной. Такой довод становится совершенно несостоятельным, когда мы замечаем, что для достаточно больших ω только один член $\frac{1}{2}\hbar\omega$ в сумме может превысить энергию всей Вселенной. Оперируя конечной суммой, мы иногда находим, что влияние вкладов энергий нулевых колебаний компенсируется, а решение остается конечным и регулярным, тогда число мод устремляется к бесконечности на последующей стадии вычислений.

С другой стороны, можно рассматривать энергию нулевых колебаний как прямое следствие того, что мы сопоставляем квантово-механические операторы $\hat{q}$, $\hat{p}$ классическим переменным q, p, руководствуясь исключительно принципом соответствия (см. ссылку на с. 376). Этот принцип требует, чтобы результаты квантовомеханической теории в классическом пределе, т.е. в случае сильных возбуждений, согласовались с результатами классической теории. В этом пределе $\frac{1}{2}$ можно пренебречь в сравнении с членом $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$ в выражении (10.3.15), так что принцип соответствия позволяет нам записать следующее выражение для энергии

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}}\sum_{s}\hbar\omega\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t). \tag{10.3.16}$$

В дальнейшем мы будем иногда прибегать к этому упрощенному выражению, свободному от вышеупомянутых проблем. В случаях, когда нас не интересует зависимость оператора от времени, мы будем опускать временно́й аргумент, полагая, что все операторы определены для одного и того же момента времени.

10.4. Энергетический спектр; фотоны

Важные различия между классической и квантовой теориями излучения выявляются при анализе спектра оператора энергии, определяемого выражениями (10.3.4) или (10.3.16) (Messiah, 1961, гл. 12). Соответствующее классическое выражение (10.2.31) допускает всевозможные неотрицательные значения энергии, что неверно в случае операторного выражения для $\hat{H}$. Эрмитов оператор $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}s}$ в выражении (10.3.16) имеет особое значение и будет в дальнейшем обозначаться как $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$. Мы увидим, что его спектр представляет собой множество целых чисел $0, 1, 2, \ldots$ и т.д. Из коммутационных соотношений (10.3.9) и (10.3.10) получим

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \hat{n}_{\mathbf{k}'s'}] = \hat{a}_{\mathbf{k}s}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}\hat{a}_{\mathbf{k}s} = [\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}]\hat{a}_{\mathbf{k}'s'} = \hat{a}_{\mathbf{k}s}\delta^3_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}, \tag{10.4.1}$$

и, по аналогии,

$$[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}, \hat{n}_{\mathbf{k}'s'}] = -\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\delta^3_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}. \tag{10.4.2}$$

Рассмотрим теперь собственные значения оператора $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$, зная которые можно сразу определить собственные значения оператора $\hat{H}$. Пусть $n_{\mathbf{k}s}$ — собственное значение оператора $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$, а $|n_{\mathbf{k}s}\rangle$— соответствующее нормированное собственное состояние, тогда

$$\hat{n}_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = n_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle. \tag{10.4.3}$$

Так как $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$ — эрмитов оператор, число $n_{\mathbf{k}s}$, безусловно, действительное.

Далее мы рассмотрим состояние $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle$. С помощью выражения (10.4.2) можно записать

$$\hat{n}_{\mathbf{k}s}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}(\hat{n}_{\mathbf{k}s} + 1)|n_{\mathbf{k}s}\rangle$$

и, используя (10.4.3), находим

$$\hat{n}_{\mathbf{k}s}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = (n_{\mathbf{k}s} + 1)\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle. \tag{10.4.4}$$

Сравнение выражений (10.4.4) и (10.4.3) показывает, что если $|n_{\mathbf{k}s}\rangle$— собственное состояние оператора $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$, относящееся к собственному значению $n_{\mathbf{k}s}$, то состояние $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle$ также является собственным состоянием оператора $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$, относящимся к собственному значению$(n_{\mathbf{k}s} + 1)$. Следовательно, с точностью до некоторой нормировочной константы $g_{\mathbf{k}s}$, мы имеем

$$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = g_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s} + 1\rangle.$$

Отсюда следует, что оператор $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}$, действующий на собственное состояние оператора $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$, приводит к увеличению соответствующего собственного значения на единицу. Значение нормировочной константы $g_{\mathbf{k}s}$ легко определить. Пронормируем обе части последнего выражения

$$\langle n_{\mathbf{k}s}|\hat{a}_{\mathbf{k}s}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = |g_{\mathbf{k}s}|^2\langle n_{\mathbf{k}s} + 1|n_{\mathbf{k}s} + 1\rangle = |g_{\mathbf{k}s}|^2$$

и воспользуемся коммутационным соотношением (10.3.9) и выражением (10.4.3). Получим

$$|g_{\mathbf{k}s}|^2 = \langle n_{\mathbf{k}s}|\hat{n}_{\mathbf{k}s} + 1|n_{\mathbf{k}s}\rangle = n_{\mathbf{k}s} + 1$$

или

$$|g_{\mathbf{k}s}| = (n_{\mathbf{k}s} + 1)^{1/2}.$$

Отсюда, опуская унимодулярный множитель, получаем

$$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = (n_{\mathbf{k}s} + 1)^{1/2}|n_{\mathbf{k}s} + 1\rangle. \tag{10.4.5}$$

Повторное проведение этих рассуждений приводит нас к выводу, что если $n_{\mathbf{k}s}$ — собственное значение оператора $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$, то $n_{\mathbf{k}s} + 1$, $n_{\mathbf{k}s} + 2$, $n_{\mathbf{k}s} + 3$, ..., и т.д. также являются собственными значениями оператора $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$, и

$$(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s})^r|n_{\mathbf{k}s}\rangle = [(n_{\mathbf{k}s} + 1)\ldots(n_{\mathbf{k}s} + r + 1)]^{1/2}|n_{\mathbf{k}s} + r\rangle, \quad r = 1, 2, 3 \text{ и т.д.} \tag{10.4.6}$$

Спектр собственных значений оператора $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$, таким образом, неограничен сверху.

Далее рассмотрим состояние $\hat{a}_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle$. Используя (10.4.1), получим

$$\hat{n}_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = \hat{a}_{\mathbf{k}s}(\hat{n}_{\mathbf{k}s}-1)|n_{\mathbf{k}s}\rangle$$

и с помощью (10.4.3) находим

$$\hat{n}_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = (n_{\mathbf{k}s}-1)\hat{a}_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle. \tag{10.4.7}$$

Отсюда следует, что $\hat{a}_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle$ также является собственным состоянием оператора $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$, относящимся к собственному значению $n_{\mathbf{k}s}-1$, и, таким образом,

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = d_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}-1\rangle,$$

где $d_{\mathbf{k}s}$— другая нормировочная константа. Как и ранее, нормируя обе части полученного выражения, можно найти значение $d_{\mathbf{k}s}$: $|d_{\mathbf{k}s}| = \sqrt{n_{\mathbf{k}s}}$. Опуская унимодулярный множитель, получаем

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}s}}|n_{\mathbf{k}s}-1\rangle. \tag{10.4.8}$$

Повторно применяя оператор $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$, получаем, что $n_{\mathbf{k}s}-1$, $n_{\mathbf{k}s}-2$, ..., и т.д. также являются собственными значениями оператора $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$ и

$$(\hat{a}_{\mathbf{k}s})^r|n_{\mathbf{k}s}\rangle = [n_{\mathbf{k}s}(n_{\mathbf{k}s}-1)\ldots(n_{\mathbf{k}s}-r+1)]^{1/2}|n_{\mathbf{k}s}-r\rangle, \quad r=1,2,3 \text{ и т.д.} \tag{10.4.9}$$

Последовательность чисел $n_{\mathbf{k}s}$, $n_{\mathbf{k}s}-1$, $n_{\mathbf{k}s}-2$, ... и т.д., вообще говоря, должна содержать и отрицательные члены, однако легко показать, что собственные значения оператора $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$ на самом деле не могут быть отрицательными. Пусть $|m_{\mathbf{k}s}\rangle$ — произвольное собственное состояние оператора $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$, относящееся к собственному значению $m_{\mathbf{k}s}$, тогда для нормы вектора $\hat{a}_{\mathbf{k}s}|m_{\mathbf{k}s}\rangle$, найдем

$$0 \leqslant \langle m_{\mathbf{k}s}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}s}|m_{\mathbf{k}s}\rangle = \langle m_{\mathbf{k}s}|\hat{n}_{\mathbf{k}s}|m_{\mathbf{k}s}\rangle = m_{\mathbf{k}s}. \tag{10.4.10}$$

Последовательность собственных значений ..., $n_{\mathbf{k}s}-1$, $n_{\mathbf{k}s}$, $n_{\mathbf{k}s}+1$, ..., таким образом, ограничена снизу и не может содержать отрицательные числа. Это требование согласуется с выражениями (10.4.8) и (10.4.9) только при условии, что наименьшее собственное значение равно нулю. Из выражения (10.4.10) мы видим, что $\hat{a}_{\mathbf{k}s}|0_{\mathbf{k}s}\rangle$ представляет собой нулевой вектор

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}|0_{\mathbf{k}s}\rangle = 0, \tag{10.4.11}$$

так что последовательность ограничивается автоматически. Спектр оператора $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$, таким образом, представляет собой множество целых неотрицательных чисел $0, 1, 2, \ldots$ и т.д. Оператор $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$ известен как *оператор числа частиц* $\mathbf{k}$, s-моды.

10.4.1. Фоковские состояния

До сих пор мы рассматривали только одну моду поля излучения. Все вместе операторы $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$ формируют полный набор коммутирующих наблюдаемых для поля. Так как операторы, соответствующие различным $\mathbf{k}$, s-модам, действуют на различных подпространствах гильбертова пространства, мы можем сформировать вектор состояния, характеризующий поле в целом, как прямое произведение векторов состояния $|n_{\mathbf{k}s}\rangle$ по всем модам:

$$\prod_{\mathbf{k},s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle.$$

Такое состояние известно как *фоковское состояние* поля излучения, характеризующееся бесконечным множеством чисел заполнения $n_{\mathbf{k}_1 s_1}$, $n_{\mathbf{k}_2 s_2}$, ... для всех мод. Используя сокращенное обозначение $\{n\}$ для множества всех $n_{\mathbf{k}s}$, запишем

$$|\{n\}\rangle = \prod_{\mathbf{k},s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle. \tag{10.4.12}$$

Отсюда следует, что фоковское состояние $|\{n\}\rangle$ является собственным состоянием оператора числа частиц $\mathbf{k}$, s-моды, т.е.

$$\hat{n}_{\mathbf{k}s}|\{n\}\rangle = n_{\mathbf{k}s}|\{n\}\rangle. \tag{10.4.13}$$

Определив *оператор полного числа частиц* $\hat{n}$ как сумму $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$ по всем модам

$$\hat{n} \equiv \sum_{\mathbf{k},s} \hat{n}_{\mathbf{k}s}, \tag{10.4.14}$$

находим

$$\hat{n}|\{n\}\rangle = \left(\sum_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k}s}\right)|\{n\}\rangle \equiv n|\{n\}\rangle, \tag{10.4.15}$$

так что фоковское состояние $|\{n\}\rangle$ является также собственным состоянием оператора $\hat{n}$, а соответствующее собственное значение представляет собой полное число заполнения n.

Состояние $|\{0\}\rangle$, для которого все числа заполнения равны нулю и которому соответствует наименьшее собственное значение оператора $\hat{n}$, известно как *вакуумное состояние* $|\mathrm{vac}\rangle$. Любое фоковское состояние можно получить, неоднократно действуя оператором $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}$ на вакуумное состояние. Следовательно, из выражения (10.4.6) получим

$$|\{m\}\rangle = \prod_{\mathbf{k},s}\left[\frac{(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s})^{m_{\mathbf{k}s}}}{\sqrt{m_{\mathbf{k}s}!}}\right]|\mathrm{vac}\rangle. \tag{10.4.16}$$

Так как энергия поля, определяемая выражением (10.3.16), представляет собой линейную комбинацию множества операторов $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$, отсюда сразу следует, что фоковские состояния являются также собственными состояниями оператора энергии $\hat{H}$, т.е.

$$\hat{H}|\{n\}\rangle = \left(\sum_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k}s}\hbar\omega\right)|\{n\}\rangle. \tag{10.4.17}$$

Собственные значения оператора энергии определяются выражением $\sum_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k}s}\hbar\omega$. Эти собственные значения являются вырожденными, и, в общем случае, каждому собственному значению соответствует много фоковских состояний. В пределе непрерывного разложения по модам, вырождение становится бесконечно большим.

Дискретные возбуждения или кванты электромагнитного поля, соответствующие числам заполнения $\{n\}$, обычно называют *фотонами*. Таким образом, состояние $|\ldots 0,0,1_{\mathbf{k}s},0,0,\ldots\rangle$ соответствует одному фотону с волновым вектором $\mathbf{k}$ и поляризацией s. Иногда бывает удобно обозначить это состояние $|1_{\mathbf{k}s},\{0\}\rangle$, выражая этим то, что число заполнения для явно выделенной $\mathbf{k}, s$-моды равно 1, тогда как все остальные моды не заполнены. Операторы $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$ и $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}$, уменьшающие либо увеличивающие число заполнения состояния на единицу, называются понижающим оператором или *оператором уничтожения* фотонов и повышающим оператором или *оператором рождения* фотонов, соответственно. Собственные значения оператора числа фотонов $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$ неограничены, так что в одном и том же квантовом состоянии может находится сколь угодно большое число фотонов, откуда следует, что фотоны являются бозонами и подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна. Выражение для собственного значения энергии $\sum_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k}s}\hbar\omega$ в формуле (10.4.17) означает, что каждый из $n_{\mathbf{k}s}$ фотонов $\mathbf{k}, s$-моды несет энергию $\hbar\omega$. Эта энергия не зависит ни от поляризации фотона s, ни от направления его волнового вектора $\mathbf{k}$; она зависит только от частоты ω.

10.4.2. Псевдолокализованные фотоны

Мы определили фотоны как квантовые возбуждения нормальных мод электромагнитного поля, которым соответствуют плоские волны с определенными волновым вектором $\mathbf{k}$ и поляризацией s.

Теперь учтем, что плоская волна не локализована в пространстве и во времени, и, следовательно, возбуждение в однофотонном состоянии $|1_{\mathbf{k}s},\{0\}\rangle$ распределено по всему пространству-времени. Однако иногда приходится иметь дело с возбуждениями электромагнитного поля или фотонами, локализованными в определенной области и распространяющимися со скоростью света. Такие локализованные фотоны можно, в некотором смысле, рассматривать как частицы, хотя подобная интерпретация не лишена риска, так как у фотонов отсутствуют некоторые свойства частиц. Например, фотон не имеет точного положения в каком бы то ни было состоянии (Newton and Wigner, 1949; Amrein, 1969); понятие "положения" фотона имеет значение только в ограниченном смысле и будет рассмотрено в разд. 12.11.

Тем не менее, нетрудно ввести состояние, соответствующее псевдолокализованному фотону в заданный момент времени. В качестве примера рассмотрим состояние

$$|\psi\rangle = C\sum_{\mathbf{k}} e^{-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^2/2\sigma^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0}|1_{\mathbf{k}s},\{0\}\rangle,$$

которое представляет собой линейную суперпозицию однофотонных фоковских состояний с различными волновыми векторами $\mathbf{k}$, соответственно нормированных благодаря надлежащему выбору константы C. Видно, что $|\psi\rangle$ является собственным состоянием оператора полного числа фотонов $\hat{n}$ с собственным значением 1 и, следовательно, представляет собой однофотонное состояние. Однако, в этом состоянии волновой вектор $\mathbf{k}$ не имеет определенного значения, а распределен по гауссовскому закону относительно $\mathbf{k}_0$. Соответствующий фотон можно считать псевдолокализованным в виде волнового пакета с центром в точке $\mathbf{r}_0$ в заданный момент времени.

10.4.3. Базис фоковских состояний

Поскольку фоковские состояния $|\{n\}\rangle$ являются собственными состояниями полного набора коммутирующих наблюдаемых, они формируют полную систему, служащую базисом для представления произвольных состояний и операторов. Полнота системы отражается в разложении единичного оператора по проекторам на фоковские состояния:

$$1 = \sum_{\{n\}} |\{n\}\rangle\langle\{n\}|. \tag{10.4.18}$$

Кроме того, поскольку состояния $|\{n\}\rangle$ являются собственными состояниями эрмитовых операторов $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$, различные фоковские состояния ортонормированы, так что

$$\langle\{n\}|\{m\}\rangle = \prod_{\mathbf{k},s} \delta_{n_{\mathbf{k}s}m_{\mathbf{k}s}}. \tag{10.4.19}$$

Воспользовавшись этими соотношениями, можно получить представление любого состояния поля и любого оператора поля.

В качестве примера рассмотрим оператор плотности $\hat{\rho}$ поля. Этот оператор удобен для описания состояния системы, которая не находится в чистом квантовом состоянии, а описывается с помощью ансамбля квантовых состояний $|\psi_i\rangle$ с вероятностями p_i. Оператор $\hat{\rho}$ представляет собой усредненный по ансамблю проекционный оператор

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \tag{10.4.20}$$

Поскольку состояния полей излучения, встречающихся на практике, как правило, никогда не являются чистыми, уместно описывать их с помощью соответствующих операторов плотности. Чтобы получить представление оператора плотности $\hat{\rho}$ в базисе фоковских состояний, просто умножим $\hat{\rho}$ с двух сторон на единичный оператор (10.4.18). Тогда

$$\hat{\rho} = \sum_{\{n\}}\sum_{\{m\}} \langle\{n\}|\hat{\rho}|\{m\}\rangle|\{n\}\rangle\langle\{m\}|. \tag{10.4.21}$$

В качестве другого примера рассмотрим фоковское представление операторов уничтожения $\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}$ и рождения $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}$. Снова умножим $\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}$ справа и слева на единичный оператор (10.4.18) и, используя выражение (10.4.8), получим

$$\hat{a}_{\mathbf{k}'s'} = \sum_{\{n\}} (n_{\mathbf{k}'s'})^{1/2}|n_{\mathbf{k}'s'}-1\rangle\langle n_{\mathbf{k}'s'}| \prod_{\mathbf{k},s\neq\mathbf{k}',s'} |n_{\mathbf{k},s}\rangle\langle n_{\mathbf{k},s}|. \tag{10.4.22}$$

Аналогично, с помощью выражения (10.4.5) получим

$$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'} = \sum_{\{n\}} (n_{\mathbf{k}'s'}+1)^{1/2}|n_{\mathbf{k}'s'}+1\rangle\langle n_{\mathbf{k}'s'}| \prod_{\mathbf{k},s\neq\mathbf{k}',s'} |n_{\mathbf{k},s}\rangle\langle n_{\mathbf{k},s}|. \tag{10.4.23}$$

Заметим, что эти представления полностью недиагональны для $\mathbf{k}', s'$-моды, так что средние значения $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$ и $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}$ в фоковском состоянии обращаются в нуль

$$\langle\{n\}|\hat{a}_{\mathbf{k}s}|\{n\}\rangle = 0 = \langle\{n\}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}|\{n\}\rangle. \tag{10.4.24}$$

Вычисляя сумму и разность разложений (10.4.22) и (10.4.23) для $\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}$ и $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'s'}$, получим с помощью выражений (10.3.7) и (10.3.8) фоковские представления для операторов $\hat{q}_{\mathbf{k}'s'}$ и $\hat{p}_{\mathbf{k}'s'}$. Средние значения этих операторов в фоковском состоянии также равны нулю

$$\langle\{n\}|\hat{q}_{\mathbf{k}s}|\{n\}\rangle = 0 = \langle\{n\}|\hat{p}_{\mathbf{k}s}|\{n\}\rangle. \tag{10.4.25}$$

Это является следствием того, что собственные значения операторов $\hat{q}_{\mathbf{k}'s'}$ и $\hat{p}_{\mathbf{k}'s'}$ с одинаковой вероятностью принимают отрицательные и положительные значения, когда поле находится в фоковском состоянии. Моменты второго порядка, безусловно, не обращаются в нуль. Из выражений (10.3.7) и (10.3.8) и коммутационного соотношения (10.3.9) получаем

$$\langle\{n\}|\hat{q}^2_{\mathbf{k}s}|\{n\}\rangle = (\hbar/2\omega)\langle\{n\}|\hat{a}^2_{\mathbf{k}s} + \hat{a}^{\dagger 2}_{\mathbf{k}s} + 2\hat{n}_{\mathbf{k}s} + 1|\{n\}\rangle = (\hbar/\omega)(\hat{n}_{\mathbf{k}s} + \tfrac{1}{2}), \tag{10.4.26}$$

$$\langle\{n\}|\hat{p}^2_{\mathbf{k}s}|\{n\}\rangle = (\hbar\omega/2)\langle\{n\}| - \hat{a}^{\dagger 2}_{\mathbf{k}s} - \hat{a}^2_{\mathbf{k}s} + 2\hat{n}_{\mathbf{k}s} + 1|\{n\}\rangle = \hbar\omega(\hat{n}_{\mathbf{k}s} + \tfrac{1}{2}), \tag{10.4.27}$$

так что произведение среднеквадратичных отклонений $[\langle(\Delta\hat{q}_{\mathbf{k}s})^2\rangle]^{1/2}$ и $[\langle(\Delta\hat{p}_{\mathbf{k}s})^2\rangle]^{1/2}$ имеет вид

$$[\langle(\Delta\hat{q}_{\mathbf{k}s})^2\rangle]^{1/2}[\langle(\Delta\hat{p}_{\mathbf{k}s})^2\rangle]^{1/2} = [\langle\hat{q}^2_{\mathbf{k}s}\rangle]^{1/2}[\langle\hat{p}^2_{\mathbf{k}s}\rangle]^{1/2} = \hbar(n_{\mathbf{k}s} + \tfrac{1}{2}). \tag{10.4.28}$$

Произведение неопределенностей, таким образом, тем больше, чем больше степень возбуждения состояния, и достигает наименьшего возможного значения, равного $\hbar/2$, в случае нулевого возбуждения. Стоит отметить, что $\hat{q}_{\mathbf{k}s}$ и $\hat{p}_{\mathbf{k}s}$ флуктуируют, т.е. не имеют определенного значения даже в основном состоянии.

10.4.4. q-представление фоковских состояний

В общем случае можно определить плотность вероятности $P(q_{\mathbf{k}s})$ собственных значений $q_{\mathbf{k}s}$ для фоковского состояния, характеризуемого набором чисел заполнения фотонов $\{n\}$. Эта вероятность представляет собой среднее значение проекционного оператора на состояние $|q_{\mathbf{k}s}\rangle$, соответствующее собственному значению $q_{\mathbf{k}s}$:

$$P(q_{\mathbf{k}s}) = \langle n_{\mathbf{k}s}|q_{\mathbf{k}s}\rangle\langle q_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = |\langle q_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle|^2. \tag{10.4.29}$$

Плотность вероятности поэтому известна, если определено скалярное произведение $\langle q_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle$. Это скалярное произведение представляет собой амплитуду состояния $|n_{\mathbf{k}s}\rangle$ в q-представлении, или так называемую шредингеровскую волновую амплитуду.

Чтобы получить ее, заметим сначала, что из выражений (10.3.5) и (10.4.11) следует

$$\langle q_{\mathbf{k}s}|\hat{a}_{\mathbf{k}s}|0_{\mathbf{k}s}\rangle = 0 = (\omega/2\hbar)^{1/2}\langle q_{\mathbf{k}s}|[\hat{q}_{\mathbf{k}s} + (i/\omega)\hat{p}_{\mathbf{k}s}]|0_{\mathbf{k}s}\rangle = (\hbar/2\omega)^{1/2}[(\omega/\hbar)q_{\mathbf{k}s} + \partial/\partial q_{\mathbf{k}s}]\langle q_{\mathbf{k}s}|0_{\mathbf{k}s}\rangle, \tag{10.4.30}$$

где мы воспользовались хорошо известным свойством канонически сопряженных операторов $\hat{q}_{\mathbf{k}s}$, $\hat{p}_{\mathbf{k}s}$, позволяющим записать для любого вектора состояния $|\psi\rangle$ в гильбертовом пространстве, связанном с этими операторами, следующее выражение

$$\langle q_{\mathbf{k}s}|\hat{p}_{\mathbf{k}s}|\psi\rangle = (\hbar/i)(\partial/\partial q_{\mathbf{k}s})\langle q_{\mathbf{k}s}|\psi\rangle. \tag{10.4.31}$$

Видно, что $\langle q_{\mathbf{k}s}|0\rangle$ можно найти из выражения (10.4.30) путем решения простого линейного дифференциального уравнения первого порядка. Решение имеет вид

$$\langle q_{\mathbf{k}s}|0\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\tfrac{1}{2}q^2_{\mathbf{k}s}\omega/\hbar\right), \tag{10.4.32}$$

если нормировочная константа выбирается таким образом, чтобы удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\langle q_{\mathbf{k}s}|0\rangle|^2\,dq_{\mathbf{k}s} = 1.$$

Выражение (10.4.32) определяет амплитуду или шредингеровскую волновую функцию основного состояния в q-представлении, которая имеет гауссовскую форму. Согласно выражениям (10.4.16), (10.4.31), (10.4.32) и (10.3.6) $\langle q_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle$ можно записать в виде

$$\langle q_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}s}!}}\langle q_{\mathbf{k}s}|(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s})^{n_{\mathbf{k}s}}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}s}!}}\left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{n_{\mathbf{k}s}/2}\left[\frac{\omega}{\hbar}q_{\mathbf{k}s} - \frac{\partial}{\partial q_{\mathbf{k}s}}\right]^{n_{\mathbf{k}s}}\langle q_{\mathbf{k}s}|0\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}s}!}}\left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{n_{\mathbf{k}s}/2}\left[\frac{\omega}{\hbar}q_{\mathbf{k}s} - \frac{\partial}{\partial q_{\mathbf{k}s}}\right]^{n_{\mathbf{k}s}}\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp(-\tfrac{1}{2}q^2_{\mathbf{k}s}\omega/\hbar). \quad (10.4.33)$$

$n_{\mathbf{k}s}$-кратное применение дифференциального оператора $[(\omega/\hbar)q_{\mathbf{k}s} - \partial/\partial q_{\mathbf{k}s}]$ к функции $\exp(-\frac{1}{2}q^2_{\mathbf{k}s}\omega/\hbar)$ приводит к эрмитовым функциям $n_{\mathbf{k}s}$-го порядка, и мы в итоге получим

$$\langle q_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = \frac{1}{(2^{n_{\mathbf{k}s}}n_{\mathbf{k}s}!)^{1/2}}\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}H_{n_{\mathbf{k}s}}[\sqrt{\omega/\hbar}q_{\mathbf{k}s}]\exp(-\tfrac{1}{2}q^2_{\mathbf{k}s}\omega/\hbar), \quad (10.4.34)$$

где $H_n(x)$ — полином Эрмита n-го порядка от x.

10.4.5. Зависимость операторов поля от времени

В заключение, рассмотрим уравнения движения для операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$ и $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t)$ и убедимся, что их временна́я зависимость имеет вид, определенный выражениями (10.3.12) и (10.3.13). Гейзенберговское уравнение движения для произвольного оператора поля $\hat{O}$, не зависящего явно от времени, имеет вид

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{O}, \hat{H}], \quad (10.4.35)$$

где $\hat{H}$ определяется выражением (10.3.15) или (10.3.16). Отсюда следует, что операторы числа частиц $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$ и $\hat{n}$ не зависят от времени, поскольку они коммутируют с $\hat{H}$. Для операторов уничтожения и рождения $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$ и $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t)$ из выражений (10.4.1) и (10.4.2) получаем

$$\frac{d\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)}{dt} = -i\omega\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t), \quad (10.4.36)$$

$$\frac{d\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t)}{dt} = i\omega\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t), \quad (10.4.37)$$

откуда следуют решения (10.3.12) и (10.3.13). Исходя из c-числовых выражений (10.2.34)—(10.2.36), разложения для операторов поля $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)$, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$ можно записать в виде [ср. (10.2.20), (10.2.23) и (10.2.24)]

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2}[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(0)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \text{э.с.}], \quad (10.4.38)$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s}\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2}[i\hat{a}_{\mathbf{k}s}(0)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \text{э.с.}], \quad (10.4.39)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2}[i\hat{a}_{\mathbf{k}s}(0)(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s})\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \text{э.с.}]. \quad (10.4.40)$$

Здесь «э.с.» означает эрмитово сопряжение предыдущего члена. Нетрудно показать непосредственно из гейзенберговских уравнений движения для $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$ и коммутационных соотношений между различными операторами поля $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$, $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)$, которые будут обсуждаться в разд. 10.8, что квантованные

поля связаны теми же уравнениями Максвелла, что и соответствующие классические поля, т.е.

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \tag{10.4.41}$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{10.4.42}$$

Такой же вывод следует из разложений по модам (10.4.38)—(10.4.40). В заключение отметим, что первый член справа в каждом из выражений (10.4.38)—(10.4.40) иногда обозначается как $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$, $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$, $\hat{\mathbf{B}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$, соответственно, поскольку он зависит только от положительных частот. Эти положительно-частотные составляющие полей соответствуют комплексным аналитическим сигналам, которые были введены в разд. 3.1.

10.5. Импульс квантованного поля

В классической электродинамике полный импульс поля $\mathbf{P}$ пропорционален интегралу по объему от вектора Пойнтинга, который может быть выражен через $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ в единицах СИ в виде

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \int_{L^3} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\, d^3r. \tag{10.5.1}$$

В квантовой теории динамические переменные следует заменить на эрмитовы операторы гильбертова пространства. Мы уже встречались с операторными формами электрического (10.4.39) и магнитного (10.4.40) полей. К сожалению, замена $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ операторами гильбертова пространства в выражении (10.5.1) не приводит к эрмитову оператору, поскольку $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$ не коммутируют (см. разд. 10.8). Однако, простейший эрмитов оператор может быть построен из (10.5.1) путем симметризации. Таким образом, мы принимаем следующее выражение для импульса квантованного поля

$$\hat{\mathbf{P}} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{L^3} [\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) \times \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) - \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)]\, d^3r. \tag{10.5.2}$$

С помощью разложений (10.4.39) и (10.4.40) для $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$ получим

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{2L^3}\sum_{\mathbf{k},s}\sum_{\mathbf{k}',s'}\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{\hbar}{2\omega'}\right)^{1/2}\int_{L^3}[i\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - i\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{\mathbf{k}s}\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}]\times$$

$$\times\, [i\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}(\mathbf{k}'\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'s'})\, e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega' t)} - i\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'s'}(\mathbf{k}'\times\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{\mathbf{k}'s'})\, e^{-i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega' t)}]\, d^3r + \text{э.с.}$$

Интегралы по объему легко вычисляются и дают $L^3\delta^3_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ и $L^3\delta^3_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$. Теперь распишем тройные векторные произведения, которые приводятся к виду

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\times(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{\mathbf{k}s'}) = (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{\mathbf{k}s'})\mathbf{k} = \delta_{ss'}\mathbf{k} \tag{10.5.3}$$

и т.д., поскольку $\mathbf{k}$ перпендикулярен $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}$. Члены, содержащие $\hat{a}_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{-\mathbf{k}s'}$ и $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}\hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}s'}$ обращаются в нуль, поскольку они меняют знак при замене переменных $\mathbf{k}\longrightarrow -\mathbf{k}$, $s\longrightarrow s'$, $s'\longrightarrow s$. И, наконец, с помощью (10.5.3) объединим члены таким образом, чтобы получить выражение

$$\hat{\mathbf{P}} = \tfrac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},s}\hbar\mathbf{k}(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}s} + \hat{a}_{\mathbf{k}s}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}), \tag{10.5.4}$$

которое мы сравним с выражением (10.3.14) для энергии. За исключением того, что вместо угловой частоты ω появляется волновой вектор $\mathbf{k}$, выражения для $\hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{H}$ схожи. Используя коммутационное соотношение (10.3.9), можно также записать $\hat{\mathbf{P}}$ в нормально упорядоченной форме

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{k},s}\hbar\mathbf{k}(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}s} + \tfrac{1}{2}). \tag{10.5.5}$$

На этот раз вклад нулевых колебаний в импульс обращается в нуль, поскольку, при суммировании по всем модам, для каждого члена $\frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}$ находится член $-\frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}$. Таким образом, мы можем записать импульс в упрощенном виде:

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\mathbf{k}\hat{n}_{\mathbf{k}s}. \tag{10.5.6}$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что оператор $\hat{\mathbf{P}}$, как и $\hat{H}$, может быть представлен как функция операторов числа частиц $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$ и что $\hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{H}$ коммутируют. Фоковские состояния $|\{n\}\rangle$, таким образом, также являются собственными состояниями оператора $\hat{\mathbf{P}}$, а соответствующие собственные значения определяются выражением

$$\hat{\mathbf{P}}|\{n\}\rangle = \left(\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s} \hbar\mathbf{k}n_{\mathbf{k}s}\right)|\{n\}\rangle. \tag{10.5.7}$$

Собственные значения оператора $\hat{\mathbf{P}}$ также, как и собственные значения оператора $\hat{H}$, вырождены. Собственное значение $\sum_{\mathbf{k}}\sum_{s} n_{\mathbf{k}s}\hbar\mathbf{k}$ можно интерпретировать в том смысле, что каждый из $n_{\mathbf{k}s}$ фотонов $\mathbf{k}, s$-моды поля имеет импульс $\hbar\mathbf{k}$, который не зависит от поляризации. Поскольку уравнение движения Гейзенберга для любого оператора $\hat{O}$, не зависящего явно от времени, имеет вид

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{O}, \hat{H}], \tag{10.5.8}$$

коммутативность $\hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{H}$ означает, что импульс является интегралом движения для свободного поля.

10.6. Момент количества движения квантованного поля.

В классической электродинамике полный момент количества движения $\mathbf{J}(\mathbf{r}_0)$ электромагнитного поля в вакууме относительно точки $\mathbf{r}_0$ определяется интегралом

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\mathbf{r}_0) &= \varepsilon_0 \int_{L^3} (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)]\,d^3r = \\ &= \varepsilon_0 \int_{L^3} \mathbf{r}\times[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)]\,d^3r - \mathbf{r}_0\times\varepsilon_0\int_{L^3}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\,d^3r = \mathbf{J}(0)-\mathbf{r}_0\times\mathbf{P}.\end{aligned} \tag{10.6.1}$$

Здесь $\mathbf{P}$ — полный импульс электромагнитного поля, который мы только что обсуждали. Из выражения (10.6.1) видно, что $\mathbf{J}(\mathbf{r}_0)$ в общем случае зависит от $\mathbf{r}_0$. Если поле квантовано, а $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$ представляют собой некоммутирующие операторы гильбертова пространства, то мы можем определить квантовый оператор момента количества движения $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_0)$ аналогичным образом при условии, что мы, как и ранее, симметризируем операторы для того, чтобы оператор $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_0)$ был эрмитовым. Следовательно, мы запишем

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_0) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\int_{L^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times[\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)\times\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) - \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)\times\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)]\,d^3r = \hat{\mathbf{J}}(0)-\mathbf{r}_0\times\hat{\mathbf{P}}, \tag{10.6.2}$$

где $\hat{\mathbf{P}}$ — оператор импульса, определяемый выражениями (10.5.2) и (10.5.6).

10.6.1. Момент количества движения как интеграл движения

Рассмотрим вопрос: является ли полный момент количества движения $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_0)$ интегралом движения для квантованного поля? Поскольку мы уже показали, что $\hat{\mathbf{P}}$ является интегралом движения, то достаточно

доказать то же самое для $\hat{\mathbf{J}}(0)$. Из определения и с помощью уравнений Максвелла (10.4.41) и (10.4.42) найдем

$$\frac{d\hat{\mathbf{J}}(0)}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{L^3} \mathbf{r} \times \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial t} \times \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{E}} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial t} \times \hat{\mathbf{E}} - \hat{\mathbf{B}} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial t} \right] d^3r =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{L^3} \mathbf{r} \times \left[\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \hat{\mathbf{B}}) \times \hat{\mathbf{B}} - \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{B}} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{B}}) - \varepsilon_0 \hat{\mathbf{E}} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{E}}) + \varepsilon_0 (\nabla \times \hat{\mathbf{E}}) \times \hat{\mathbf{E}} \right] d^3r =$$

$$= -\int_{L^3} \mathbf{r} \times \left[\frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{B}} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{B}}) + \varepsilon_0 \hat{\mathbf{E}} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{E}}) \right] d^3r, \quad (10.6.3)$$

где ε_0, μ_0 — вакуумная диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость, соответственно. Последняя строка следует из предыдущей на основании того, что, как будет показано в разд. 10.8, все операторы $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$, взятые в один и тот же момент времени, коммутируют. Это также верно и для $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$. Распишем тройные векторные произведения следующим образом:

$$\hat{\mathbf{B}} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{B}}) = \hat{\mathbf{B}}_i \nabla \hat{\mathbf{B}}_i - \hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{B}} = \tfrac{1}{2} \nabla (\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}) - \nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}},$$

т.к. $\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{r} \times (\hat{\mathbf{B}} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{B}})) = \tfrac{1}{2} (\mathbf{r} \times \nabla) \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}} - \mathbf{r} \times (\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}}) = -\tfrac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{r} \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}) - \nabla \cdot (\hat{\mathbf{B}} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{B}}).$$

Такое же разложение может быть записано для члена, содержащего $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ в выражении (10.6.3). Подставим полученные выражения в (10.6.3) и применим обобщенную теорему Гаусса, чтобы перейти от интегралов по объему к интегралам по поверхности нормировочного куба. Таким образом, мы получаем

$$\frac{d\hat{\mathbf{J}}(0)}{dt} = \frac{1}{2} \oint d\mathbf{s} \times \mathbf{r} \left(\frac{\hat{\mathbf{B}}^2}{\mu_0} + \varepsilon_0 \hat{\mathbf{E}}^2 \right) + \oint d\mathbf{s} \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{B}} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{B}}}{\mu_0} + \varepsilon_0 \hat{\mathbf{E}} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{E}} \right). \quad (10.6.4)$$

Первый интеграл обращается в нуль, что становится очевидным, если, например, объединить вклады от элементов поверхности $(-\frac{1}{2}L, y, z)$ и $(\frac{1}{2}L, y, z)$. Ибо из периодических граничных условий следует, что $\hat{\mathbf{B}}(-\frac{1}{2}L, y, z) = \hat{\mathbf{B}}(\frac{1}{2}L, y, z)$ и $\hat{\mathbf{E}}(-\frac{1}{2}L, y, z) = \hat{\mathbf{E}}(\frac{1}{2}L, y, z)$ и т.д., тогда как векторы $d\mathbf{s} \times \mathbf{r}$ равны по модулю и противоположны по направлению в точках $(-\frac{1}{2}L, y, z)$ и $(\frac{1}{2}L, y, z)$ и т.д. Таким образом, выражение (10.6.4) принимает вид

$$\frac{d\hat{\mathbf{J}}(0)}{dt} = \oint \mathbf{r} \times \left[\frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}} + \varepsilon_0 \hat{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{E}} \right] \cdot d\mathbf{s}. \quad (10.6.5)$$

Произведения $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ и $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ — диадики, и данное слагаемое не равно нулю. Однако, интеграл берется по границе нормировочного объема, который, в конечном итоге, принимается сколь угодно большим.

В классической электродинамике такие поверхностные члены обычно отбрасываются, если мы имеем дело с пространственно ограниченными полями, на том основании, что поле на границе можно считать пренебрежимо малым. Но с этим аргументом нужно обходиться с большой осмотрительностью в случае, когда поля представлены операторами гильбертова пространства. Мы уже сталкивались с вкладом нулевых колебаний, который появляется в некоторых операторных произведениях и среднее значение которого не зависит от квантового состояния поля. Запишем выражение (10.6.5) через составляющие

$$\frac{d\hat{J}_l(0)}{dt} = \epsilon_{lmn} \oint r_m \times \left(\frac{1}{\mu_0} \hat{B}_n \hat{B}_p + \varepsilon_0 \hat{E}_n \hat{E}_p \right) ds_p, \quad (10.6.6)$$

подразумевая суммирование по повторяющимся индексам, где ϵ_{lmn} — полностью антисимметричный единичный тензор Леви-Чивита, т.е. $\epsilon_{lmn} = 1$ или -1, соответственно, если подстрочные индексы (l, m, n) образуют четную или нечетную перестановку (x, y, z), и $\epsilon_{lmn} = 0$, когда два индекса равны. Отсюда видно, что члены с $m \neq p$ также обращаются в нуль из соображений симметрии на границе нормировочного

объема. Если же $m = p$ в выражении (10.6.6), то тогда ненулевой вклад должны давать только члены с $n \neq p$, из-за наличия антисимметричного тензора ϵ_{lmn}.

Рассмотрим подробнее операторное произведение вида $\hat{E}_n\hat{E}_p$. Из разложения по модам (10.4.39) можно видеть, что оператор $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ всегда можно представить в виде суммы двух взаимосопряженных операторов $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$, где $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ содержит только операторы уничтожения, а $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$ — только операторы рождения. Эти операторы рождения и уничтожения конфигурационного пространства рассматриваются подробнее в гл. 11 и 12. Произведение $\hat{E}_n(\mathbf{r},t)\hat{E}_p(\mathbf{r},t)$ может быть записано в виде

$$\hat{E}_n(\mathbf{r},t)\hat{E}_p(\mathbf{r},t) = \hat{E}_n^{(+)}(\mathbf{r},t)\hat{E}_p^{(+)}(\mathbf{r},t) + E_n^{(-)}(\mathbf{r},t)\hat{E}_p^{(-)}(\mathbf{r},t) + \\ + E_n^{(-)}(\mathbf{r},t)\hat{E}_p^{(+)}(\mathbf{r},t) + E_n^{(+)}(\mathbf{r},t)\hat{E}_p^{(-)}(\mathbf{r},t). \quad (10.6.7)$$

Из четырех членов в правой части этого выражения, первые три имеют *нормальный порядок*, т.е. операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения. Их средние значения, следовательно, равны нулю для любого состояния поля $|\psi\rangle$, в котором фотоны расположены далеко от точки $(\mathbf{r},t)$, лежащей на границе нормировочного объема, т.е. $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)|\psi\rangle = 0$. Последний член в выражении (10.6.7) не является нормально упорядоченным. Однако, из разложений по модам можно показать, что $\hat{E}_n^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{E}_p^{(-)}(\mathbf{r},t)$ коммутируют при условии, что $n \neq p$, так что этот член можно записать в нормальном порядке $\hat{E}_p^{(-)}(\mathbf{r},t)\hat{E}_n^{(+)}(\mathbf{r},t)$. Все сказанное применимо и к члену $\hat{B}_n\hat{B}_p$ в выражении (10.6.6). Таким образом, мы показали, что $d\hat{\mathbf{J}}(0)/dt$ обращается в нуль, за исключением нескольких нормально упорядоченных членов на границе нормировочного объема, матричные элементы которых между состояниями, соответствующими возбуждениям, локализованным внутри объема, равны нулю. При этих ограничениях полный момент количества движения можно считать интегралом движения (Lenstra and Mandel, 1982).

10.6.2. Разложение полного момента количества движения

Из классической электродинамики известно, что полный момент количества движения поля $\mathbf{J}(\mathbf{r}_0)$ всегда может быть представлен в виде суммы двух слагаемых, одно из которых представляет собой орбитальную, а другое — собственную составляющую полного момента количества движения (ср., например, Gottfried, 1966 и Jackson, 1975). Чтобы осуществить классическое разложение, запишем сначала n-ую компоненту вектора Пойнтинга в виде

$$\varepsilon_0(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_n = \varepsilon_0[\mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})]_n.$$

Расписывая тройное векторное произведение и учитывая, что $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0$, можно переписать это выражение следующим образом

$$\varepsilon_0(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_n = \varepsilon_0(E_i\nabla_n A_i - E_i\nabla_i A_n) = \varepsilon_0 E_i\nabla_n A_i - \varepsilon_0\nabla_i(E_i A_n),$$

подразумевая суммирование по повторяющимся индексам. Воспользовавшись полностью антисимметричным тензором для записи компонент векторного произведения, получим

$$\varepsilon_0[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})]_l = \varepsilon_0\epsilon_{lmn}(r_m - r_{0m})(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_n = \varepsilon_0\epsilon_{lmn}(r_m - r_{0m})[E_i\nabla_n A_i - \nabla_i E_i A_n] = \\ = \varepsilon_0\epsilon_{lmn}(r_m - r_{0m})E_i\nabla_n A_i - \varepsilon_0\epsilon_{lmn}\nabla_i(r_m - r_{0m})E_i A_n + \varepsilon_0\epsilon_{lmn}(\nabla_i(r_m - r_{0m}))E_i A_n.$$

Учитывая, что $\nabla_i(r_m - r_{0m}) = \delta_{im}$, получим

$$\varepsilon_0[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})]_l = \varepsilon_0 E_i[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\boldsymbol{\nabla}]_l A_i - \varepsilon_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times A]_l + \varepsilon_0(\mathbf{E}\times\mathbf{A})_l.$$

Выражение (10.6.1) для полного момента количества движения $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_0)$ можно, следовательно, записать в виде

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}_0) = \varepsilon_0\int_{L^3}\{E_i[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\boldsymbol{\nabla}]A_i - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{A})\}\,d^3r + \varepsilon_0\int_{L^3}(\mathbf{E}\times\mathbf{A})\,d^3r = \\ = \varepsilon_0\int_{L^3}E_i[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\boldsymbol{\nabla}]A_i\,d^3r - \varepsilon_0\oint\mathbf{E}((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{ds} + \varepsilon_0\int_{L^3}(\mathbf{E}\times\mathbf{A})\,d^3r, \quad (10.6.8)$$

где мы использовали теорему Гаусса для превращения второго интеграла по объему в интеграл по поверхности нормировочного куба с ребром L. В пределе достаточно больших L для электромагнитного поля полностью локализованного внутри куба, поверхностным членом часто пренебрегают, и полный момент количества движения разлагается на две составляющие

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{J}_o(\mathbf{r}_0) + \mathbf{J}_s, \tag{10.6.9}$$

где

$$\mathbf{J}_s = \varepsilon_0 \int_{L^3} (\mathbf{E} \times \mathbf{A})\, d^3r \tag{10.6.10}$$

и

$$\mathbf{J}_o(\mathbf{r}_0) = \varepsilon_0 \int_{L^3} E_i[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla] A_i\, d^3r. \tag{10.6.11а}$$

Составляющая $\mathbf{J}_s$ не зависит от $\mathbf{r}_0$ или от выбора начала координат и, таким образом, представляет собой *собственный или спиновый момент количества движения* электромагнитного поля. Составляющая $\mathbf{J}_o(\mathbf{r}_0)$ зависит от выбора $\mathbf{r}_0$ и содержит хорошо знакомый дифференциальный оператор $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla$, ассоциирующийся с моментом количества движения относительно $\mathbf{r}_0$ и, следовательно, представляет собой *орбитальный момент количества движения* поля. Сравнение выражений (10.6.1) и (10.6.11а) показывает, что орбитальный момент количества движения всегда можно представить в виде

$$\mathbf{J}_o(\mathbf{r}_0) = \mathbf{J}_o(0) - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{P}. \tag{10.6.11б}$$

В случае квантованного электромагнитного поля мы аналогичным образом можем разложить полный момент количества движения. Определим соответствующие эрмитовы операторы спинового и орбитального моментов количества движения с помощью симметризованных выражений

$$\hat{\mathbf{J}}_s = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{L^3} (\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{E}})\, d^3r \tag{10.6.12}$$

и

$$\hat{\mathbf{J}}_o(\mathbf{r}_0) = \hat{\mathbf{J}}_o(0) - \mathbf{r}_0 \times \hat{\mathbf{P}}, \tag{10.6.13а}$$

где

$$\hat{\mathbf{J}}_o(0) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{L^3} \{\hat{E}_i(\mathbf{r} \times \nabla)\hat{A}_i + [(\mathbf{r} \times \nabla)\hat{A}_i]\hat{E}_i\}\, d^3r. \tag{10.6.13б}$$

Мы пренебрегли вкладом интеграла по поверхности в $\hat{\mathbf{J}}_o(0)$ по тем же причинам, что и раннее, при рассмотрении $d\hat{\mathbf{J}}/dt$, так как этот член может быть записан в виде нормально упорядоченного оператора, среднее значение которого обращается в нуль для любого состояния, в котором возбуждения поля локализованы внутри нормировочного куба. Длина стороны этого куба L, в конечном счете, полагается стремящейся к бесконечности.

10.6.3. Собственный (спиновый) момент количества движения

Рассмотрим собственный, или спиновый момент количества движения $\hat{\mathbf{J}}_s$ несколько подробнее. С помощью разложений по модам (10.4.38) и (10.4.39) находим

$$\hat{\mathbf{J}}_s = \frac{1}{2L^3} \sum_{\mathbf{k},s} \sum_{\mathbf{k}',s'} \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{\hbar}{2\omega'}\right)^{1/2} \times \int_{L^3} [i\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \text{э.с.}][\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'s'}\, e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega' t)} + \text{э.с.}]\, d^3r + \text{э.с.}$$

Интегралы по объему дают $L^3\delta^3_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ и $L^3\delta^3_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$. Члены, содержащие $\delta^3_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ обращаются в нуль, что можно видеть, осуществив замену переменных $\mathbf{k} \longrightarrow -\mathbf{k}$, $s \longrightarrow s'$, $s' \longrightarrow s$. С помощью коммутационных соотношений (10.3.9)—(10.3.11) между операторами рождения и уничтожения найдем

$$\hat{\mathbf{J}}_s = i\hbar \sum_{\mathbf{k},s} \sum_{s'} (\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s'}\hat{a}_{\mathbf{k}s} + \tfrac{1}{2}\delta_{ss'})(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} \times \boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s'}). \tag{10.6.14}$$

Это общее выражение справедливо для любого базиса из двух комплексных векторов поляризации $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}$ ($s = 1, 2$). Конечно, с целью упрощения выражения для $\hat{\mathbf{J}}_s$ желательно выбрать базис таким образом, чтобы векторное произведение $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} \times \boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s'}$ имело очень простой вид.

Рассмотрим два возможных варианта таких базисов. Если $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}$ — действительные, ортогональные единичные векторы, соответствующие ортогональным линейным поляризациям, то тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} \times \boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s'} = \pm\boldsymbol{\kappa}(1 - \delta_{ss'}), \tag{10.6.15}$$

где $\boldsymbol{\kappa}$ — единичный вектор в направлении волнового вектора $\mathbf{k}$. Подставляя (10.6.15) в (10.6.14), получим

$$\hat{\mathbf{J}}_s = i\sum_{\mathbf{k}} \hbar\boldsymbol{\kappa}(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}2}\hat{a}_{\mathbf{k}1} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}1}\hat{a}_{\mathbf{k}2}), \tag{10.6.16}$$

откуда видно, что в базисе ортогональных линейных поляризаций $\hat{\mathbf{J}}_s$ — полностью недиагонален в представлении фоковских состояний. Более того, каждая компонента $\mathbf{J}_s$ ориентирована вдоль своего волнового вектора.

Немедленно возникает вопрос: существует ли базис поляризаций, в котором $\hat{\mathbf{J}}_s$ диагонален в представлении фоковских состояний? Для этого необходимо, чтобы векторное произведение $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} \times \boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s'}$ было пропорционально $\delta_{ss'}$. Такой базис представляют собой ортогональные векторы круговой поляризации $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\lambda}$, ($\lambda = \pm 1$), которые выражаются через действительные ортогональные единичные векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}$ следующим образом

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1} + i\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}). \tag{10.6.17}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},+1}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},-1}$ соответствуют свету с правой и левой круговыми поляризациями, соответственно. Эти векторы удовлетворяют условию

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},\lambda} \times \boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k},\lambda'} = -i\lambda\boldsymbol{\kappa}\delta_{\lambda\lambda'}, \quad (\lambda, \lambda' = \pm 1), \tag{10.6.18}$$

что позволяет упростить выражение (10.6.14) так, что оно принимает вид

$$\hat{\mathbf{J}}_s = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar\boldsymbol{\kappa}\lambda(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}\lambda}\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} + \tfrac{1}{2}) = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\boldsymbol{\kappa}[\hat{n}_{\mathbf{k},+1} - \hat{n}_{\mathbf{k},-1}]. \tag{10.6.19}$$

Отсюда видно, что в базисе круговых поляризаций оператор $\hat{\mathbf{J}}_s$ в представлении чисел заполнения диагонален и что собственный момент количества движения, соответствующий каждому волновому вектору $\mathbf{k}$, равен разности между числом фотонов с правой и левой круговыми поляризациями, умноженной на $\hbar\boldsymbol{\kappa}$. Таким образом, для плоской световой волны собственный момент количества движения ориентирован исключительно в направлении распространения. Для однофотонного состояния, соответствующего плоской волне с волновым вектором $\mathbf{k}$, составляющая собственного момента количества движения в направлении распространения имеет собственные значения $\pm\hbar\boldsymbol{\kappa}$. Проекция собственного момента количества движения на направление распространения известна как *спиральность*, а квантовое число $\lambda = \pm 1$ известно как *спин* фотона. Частица с нулевой массой и спином, равным 1, характеризуется двумя собственными значениями спиральности. Справедливость этих соотношений была доказана. Момент количества движения пучка поляризованного по кругу света был измерен в эксперименте, в котором пучок падал на двупреломляющую пластину, которая могла свободно вращаться относительно направления распространения пучка (Beth, 1936).

Согласно (10.6.19) спиновый момент количества движения $\hat{\mathbf{J}}_s$, так же, как $\hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{H}$, может быть представлен в виде функции операторов числа частиц $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$ в базисе круговых поляризаций. Следовательно, $\hat{\mathbf{J}}_s$ коммутирует с $\hat{H}$ и является еще одним интегралом движения свободного электромагнитного поля.

10.6.4. Орбитальный момент количества движения

Мы уже отмечали, что полный момент количества движения $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_0)$ является интегралом движения в приближенном смысле, и мы только что показали, что $\hat{\mathbf{J}}_s$ является таковым в буквальном смысле. Поскольку $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_0)$ можно представить в виде суммы собственной и орбитальной составляющих $\hat{\mathbf{J}}_s$ и $\hat{\mathbf{J}}_o(\mathbf{r}_0)$,

то, следовательно, орбитальный момент количества движения свободного поля должен быть интегралом движения в приближенном смысле.

Можно попытаться использовать разложения по модам (10.4.38) и (10.4.39), чтобы представить выражение (10.6.136) для $\hat{\mathbf{J}}_o(0)$ в виде суммы по модам; однако, в случае дискретного разложения, результат не прост. Это связано с тем, что наш объем квантования с дискретными модами навязывает нам выделенные направления в пространстве. Последствия этого были более подробно рассмотрены Ленстра и Манделем (Lenstra and Mandel, 1982). В разд. 10.10 мы кратко обсуждаем непрерывное разложение по модам операторов поля, где $\mathbf{k}$ является непрерывной переменной, и никакой нормировочный объем не вводится. Если мы запишем

$$\hat{\mathscr{A}}(\mathbf{k},t)=\sum_s \hat{a}(\mathbf{k},s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k},s)\,e^{-i\omega t} \tag{10.6.20}$$

в этом непрерывном фоковском пространстве, то можно показать (Simmons and Cuttmann, 1970, прил. VI), что орбитальный момент количества движения можно представить в виде

$$\hat{\mathbf{J}}_o(0)=\frac{-i\hbar}{2}\int[\hat{\mathscr{A}}_i^{\dagger}(\mathbf{k},t)(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{k}})\hat{\mathscr{A}}_i(\mathbf{k},t)-\text{э.с.}]\,d^3k, \tag{10.6.21}$$

где $\boldsymbol{\nabla}_k$ — дифференциальный оператор градиента по $\mathbf{k}$.

10.7. Операторы фазы квантованного поля

Мы уже видели, что каждая $\mathbf{k},s$-мода свободного электромагнитного поля ведет себя как гармонический осциллятор. Для классического гармонического осциллятора с комплексной амплитудой $v_{\mathbf{k}s}$ каноническая переменная $q_{\mathbf{k}s}(t)$ определяется формулой [ср. (10.2.27)]

$$q_{\mathbf{k}s}(t)=v_{\mathbf{k}s}\,e^{-i\omega t}+v_{\mathbf{k}s}^{*}\,e^{i\omega t}=2\mid v_{\mathbf{k}s}\mid\cos(\omega t-\phi_{\mathbf{k}s}). \tag{10.7.1}$$

Фаза $\phi_{\mathbf{k}s}$ связана с комплексной амплитудой $v_{\mathbf{k}s}$ соотношением

$$v_{\mathbf{k}s}=\mid v_{\mathbf{k}s}\mid e^{i\phi_{\mathbf{k}s}}. \tag{10.7.2}$$

Теперь зададимся вопросом: существует ли аналогичная квантовомеханическая наблюдаемая для фазы, определяемая некоторым эрмитовым оператором $\hat{\phi}_{\mathbf{k}s}$? Для получения этой наблюдаемой заманчиво применить тот же подход, что и в классическом выводе, приведенном выше. Тогда, по аналогии с выражением (10.7.2), желательно представить оператор уничтожения следующим образом

$$\hat{a}=\hat{g}\,e^{i\hat{\phi}}. \tag{10.7.3}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только одну моду поля, и, следовательно, мы временно опустим индексы моды $\mathbf{k},s$. Если разложение (10.7.3) должно привести нас к наблюдаемым $\hat{g}$ и $\hat{\phi}$, то соответствующие операторы должны быть эрмитовыми. В действительности выяснилось, что построить эрмитов оператор фазы таким образом невозможно, но осознание этого пришло совсем недавно[1].

10.7.1. Первые попытки построения оператора фазы

Предположим, что разложение (10.7.3), где $\hat{g}$ и $\hat{\phi}$ — эрмитовы, справедливо, и рассмотрим некоторые его следствия.

Осуществив эрмитово сопряжение (10.7.3)

$$\hat{a}^{\dagger}=e^{-i\hat{\phi}}\hat{g} \tag{10.7.4}$$

[1] Оператор фазы $\hat{\phi}$ вида (10.7.3) был впервые введен Дираком (Dirac, 1927); см. также (Heitler, 1954). Неэрмитов характер $\hat{\phi}$ был отмечен Луиселлом (Louisell, 1963). Эрмитовы операторы синуса и косинуса фазы были впервые введены в работах (Susskind and Glogower,1964 и Carruthers and Nieto, 1965, 1968). Операторы фазы и их измерение рассмотрены подробнее в книге (Vogel and Welsch, 1994).

и перемножая выражения (10.7.3) и (10.7.4), получим $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{n} + 1 = \hat{g}^2$ или $\hat{g} = (\hat{n}+1)^{1/2}$. Следовательно,

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{n} = e^{-i\hat{\phi}}(\hat{n}+1)e^{i\hat{\phi}}, \tag{10.7.5}$$

или

$$[\hat{n}, e^{i\hat{\phi}}] = -e^{i\hat{\phi}}. \tag{10.7.6}$$

Более того, используя теорему об операторном разложении[1]

$$\exp(\hat{A})\hat{B}\exp(-\hat{A}) = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \ldots, \tag{10.7.7}$$

из (10.7.5) получим

$$\hat{n} - 1 = e^{-i\hat{\phi}}\hat{n}\,e^{i\hat{\phi}} = \hat{n} - i[\hat{\phi}, \hat{n}] + \frac{(-i)^2}{2!}[\hat{\phi}, [\hat{\phi}, \hat{n}]] + \ldots,$$

откуда следует, что должно выполняться равенство

$$[\hat{n}, \hat{\phi}] \stackrel{?}{=} i. \tag{10.7.8}$$

Таким образом, $\hat{n}$ и $\hat{\phi}$ ведут себя как канонически сопряженные наблюдаемые, и выражение (10.7.8) предполагает существование соотношения неопределенности для дисперсий $\hat{n}$ и $\hat{\phi}$

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle^{1/2}\langle(\Delta\hat{\phi})^2\rangle^{1/2} \stackrel{?}{\geqslant} \tfrac{1}{2}. \tag{10.7.9}$$

На этом этапе должны бы возникнуть подозрения, поскольку модуль фазы обычно ограничен величиной 2π, так что ее неопределенность не может быть сколь угодно большой, как это следует из выражения (10.7.9) в случае, если $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle^{1/2}$ очень мало. Действительно, поскольку $\hat{n}$ имеет дискретный спектр, тогда как фаза ϕ непрерывна и ограничена, выражение (10.7.8) неправдоподобно. Неявное противоречие, заключенное в нем, становится очевидным, если рассмотреть матричные элементы, полученные путем умножения этого выражения на собственное состояние оператора числа частиц $|n\rangle$ справа и $\langle m|$ слева. Мы придем к соотношению

$$(m-n)\langle m|\hat{\phi}|n\rangle \stackrel{?}{=} i\delta_{mn},$$

которое, безусловно, неверно, т.к. при $m = n$ левая его часть обращается в нуль, а правая равна i. Следовательно, оба выражения (10.7.8) и (10.7.9), на самом деле, неверны, хотя каждый отдельный этап вывода был непротиворечивым. Трудности возникли из-за того, что $e^{i\hat{\phi}}$ и $e^{-i\hat{\phi}}$, несмотря на их вид, не являются унитарными операторами, так что $\hat{\phi}$ не является эрмитовым оператором фазы.

Неунитарность оператора $e^{i\hat{\phi}}$, который мы будем обозначать как $\hat{\mathscr{E}}$, может быть доказана следующим образом. Из определения $\hat{a} = (\hat{n}+1)^{1/2}\hat{\mathscr{E}}$ следует, что

$$\hat{\mathscr{E}} = \frac{1}{(\hat{n}+1)^{1/2}}\hat{a}, \quad \hat{\mathscr{E}}^\dagger = \hat{a}^\dagger\frac{1}{(\hat{n}+1)^{1/2}}.$$

Тогда

$$\hat{\mathscr{E}}\hat{\mathscr{E}}^\dagger = \frac{1}{(\hat{n}+1)^{1/2}}\hat{a}\hat{a}^\dagger\frac{1}{(\hat{n}+1)^{1/2}} = \frac{1}{(\hat{n}+1)^{1/2}}(\hat{n}+1)\frac{1}{(\hat{n}+1)^{1/2}} = 1, \tag{10.7.10а}$$

как и требуется для унитарного оператора. Но

$$\hat{\mathscr{E}}^\dagger\hat{\mathscr{E}} = \hat{a}^\dagger\frac{1}{\hat{n}+1}\hat{a}, \tag{10.7.10б}$$

и этот оператор не является единичным, так как он дает нуль при воздействии как справа, так и слева на вакуумное состояние. Определив матричные элементы $\hat{\mathscr{E}}^\dagger\hat{\mathscr{E}}$ в базисе фоковских состояний, можно легко показать, что $\hat{\mathscr{E}}^\dagger\hat{\mathscr{E}} = 1 - |0\rangle\langle 0|$, так что $\hat{\mathscr{E}}$ не является унитарным оператором, а $\hat{\phi}$ не является эрмитовым оператором.

[1] Эта теорема легко может быть доказана, если записать $\hat{f}(x) = \exp(\hat{A}x)\hat{B}\exp(-\hat{A}x)$ и осуществить разложение $\hat{f}(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$. Производные от $\hat{f}(x)$ дают коммутаторы. Доказательство теоремы см. в разд. 10.11.

10.7.2. Операторы косинуса и синуса

Как было показано в работах (Susskind and Glogower, 1964) и (Carruthers and Nieto, 1965, 1968), уйти от трудностей можно, избегая операторов $\hat{\phi}$ и вводя вместо них операторы $\hat{C}$ и $\hat{S}$, которые являются аналогами косинуса и синуса $\hat{\phi}$. Положим

$$\hat{C} \equiv \frac{1}{2}[\widehat{\exp(i\phi)} + \widehat{\exp(i\phi)}^\dagger], \quad \hat{S} \equiv \frac{1}{2i}[\widehat{\exp(i\phi)} - \widehat{\exp(i\phi)}^\dagger], \tag{10.7.11}$$

где $\widehat{\exp(i\phi)}$ задается, как и ранее, оператором $\hat{\mathscr{E}} = [1/(\hat{n}+1)^{1/2}]\hat{a}$. Как $\hat{C}$, так и $\hat{S}$ явно являются эрмитовыми операторами, несмотря на то, что $\widehat{\exp(i\phi)}$ не унитарен, и $\hat{C} + i\hat{S} = \widehat{\exp(i\phi)}$.

Из соотношений (10.4.1) и (10.4.2), подставляя $\hat{a} = (\hat{n}+1)^{1/2}(\hat{C}+i\hat{S})$ и $\hat{a}^\dagger = (\hat{C}-i\hat{S})(\hat{n}+1)^{1/2}$, находим

$$[(\hat{n}+1)^{1/2}(\hat{C}+i\hat{S}), \hat{n}] = (\hat{n}+1)^{1/2}(\hat{C}+i\hat{S})$$

и, умножая слева на $1/(\hat{n}+1)^{1/2}$, чтобы исключить квадратный корень, получим

$$[\hat{C}+i\hat{S}, \hat{n}] = \hat{C}+i\hat{S}. \tag{10.7.12}$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$[\hat{C}-i\hat{S}, \hat{n}] = -(\hat{C}-i\hat{S}). \tag{10.7.13}$$

Суммируя и вычитая эти выражения, получим

$$[\hat{C}, \hat{n}] = i\hat{S}, \tag{10.7.14}$$

$$[\hat{S}, \hat{n}] = -i\hat{C}. \tag{10.7.15}$$

Эти коммутационные соотношения сразу же приводят к соотношениям неопределенности

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle^{1/2}\langle(\Delta\hat{C})^2\rangle^{1/2} \geqslant \tfrac{1}{2}|\langle\hat{S}\rangle|, \tag{10.7.16}$$

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle^{1/2}\langle(\Delta\hat{S})^2\rangle^{1/2} \geqslant \tfrac{1}{2}|\langle\hat{C}\rangle|, \tag{10.7.17}$$

которые приходят на смену выражению (10.7.9). Из (10.7.12) также следует, что выражение (10.7.6), на самом деле, верно, несмотря на то, что $\widehat{\exp(i\phi)}$ — неунитарный оператор.

Можно показать, что операторы $\hat{C}$ и $\hat{S}$ имеют непрерывный спектр в пределах от -1 до 1, чего и следовало ожидать для операторов косинуса и синуса. Однако, $\hat{C}$ и $\hat{S}$ не коммутируют, что предполагает существование двух различных операторов фазы

$$\hat{\phi}_C = \arccos\hat{C}, \quad \hat{\phi}_S = \arccos\hat{S}, \tag{10.7.18}$$

которые не коммутируют друг с другом. Несмотря на некоммутативность $\hat{n}$ и $\hat{C}$, $\hat{S}$ и $\widehat{\exp(i\phi)}$ и вытекающие отсюда затруднения в определении абсолютной фазы, можно показать, что разность фаз между двумя модами поля может быть, в принципе, определена с произвольной точностью, даже если полное число фотонов определено точно, но при условии, что $\hat{n}_1$ и $\hat{n}_2$ не заданы по отдельности. Допустим, что двум модам соответствуют две плоские электромагнитные волны, распространяющиеся под углом друг к другу. В этом случае разность фаз может быть определена из интерференционного эксперимента. Сопоставим индексы 1 и 2 двум модам и напомним, что операторы, относящиеся к различным модам, коммутируют. Рассмотрим оператор $\exp(i\hat{\phi}_1)[\exp(i\hat{\phi}_2)]^\dagger$, который является квантовомеханическим аналогом выражения $\exp i(\phi_1 - \phi_2)$. Его коммутатор с оператором полного числа фотонов $\hat{n}_1 + \hat{n}_2$, с учетом выражений (10.7.12) и (10.7.13), имеет вид

$$[\exp(i\hat{\phi}_1)[\exp(i\hat{\phi}_2)]^\dagger, \hat{n}_1 + \hat{n}_2] = [(\hat{C}_1 + i\hat{S}_1)(\hat{C}_2 - i\hat{S}_2), \hat{n}_1 + \hat{n}_2] = 0. \tag{10.7.19}$$

10.7.3. Оператор фазы на основе проекционного оператора на фазовые состояния

Некоммутативность $\hat{C}$ и $\hat{S}$ и отсутствие ясной, интуитивной интерпретации их собственных состояний привели к тому, что ряд исследователей занялись изучением других возможных форм оператора фазы (Lerner, 1968; Zak, 1969; Turski, 1972; Paul, 1974; Schubert and Vogel, 1978; Barnett and Pegg, 1986, 1989; Sanders, Barnett and Knight, 1986; Lynch, 1986, 1987; Pegg and Barnett, 1988, 1989; Shapiro, Shepard and Wong, 1989; Schleich, Horowicz and Varro, 1989; Bandilla, Paul and Ritze, 1991; Vogel and Schleich, 1991; Noh, Fougères and Mandel, 1991, 1992a, b). В частности, Пегг и Барнетт (Pegg and Barnett, 1988) попытались построить эрмитов оператор фазы, основанный на состоянии $|\theta\rangle$ с определенной фазой θ в усеченном гильбертовом пространстве, а именно, в $(s+1)$-размерном подпространстве фоковского пространства. Состояние $|\theta\rangle$, определенное разложением по фоковским состояниям

$$|\theta\rangle = \frac{1}{(s+1)^{1/2}} \sum_{n=0}^{s} e^{in\theta}|n\rangle, \tag{10.7.20}$$

в некоторых отношениях ведет себя как состояние с определенной фазой θ при условии, что s — велико. Напомним, что если состояние свободного поля в картине Шредингера в момент времени $t = 0$ есть $|\psi(0)\rangle$, то в момент времени t

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-i\hat{H}_0 t/\hbar)|\psi(0)\rangle.$$

Возьмем в качестве начального состояния $|\psi(0)\rangle$ состояние $|\theta\rangle$, заданное выражением (10.7.20). Тогда при $\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{n}$ получим

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t\hat{n}}|\theta\rangle = \frac{1}{(s+1)^{1/2}} \sum_{n=0}^{s} e^{in(\theta-\omega t)}|n\rangle = |\theta - \omega t\rangle. \tag{10.7.21}$$

Далее естественно попытаться ввести эрмитов оператор фазы $\hat{\phi}$ через проекционные операторы типа $|\theta\rangle\langle\theta|$. Однако, строго говоря, предел $s \longrightarrow \infty$ в выражении (10.7.20) не существует, и состояние $|\theta\rangle$ в пределе ненормируемо. Различные фазовые состояния неортогональны и образуют переполненное множество.

Пегг и Барнетт (Pegg and Barnett, 1988) преодолели проблему переполненности, вводя дискретное, ортонормированное и полное множество фазовых состояний $|\theta_m\rangle$

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{s+1}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, s, \tag{10.7.22}$$

где θ_0 — произвольная фиксированная опорная фаза. Из определения легко находим

$$\langle\theta_m|\theta_{m'}\rangle = \frac{1}{s+1} \sum_{n=0}^{s} \sum_{n'=0}^{s} e^{i(n'\theta_{m'} - n\theta_m)}\langle n|n'\rangle =$$

$$= \frac{1}{s+1} \sum_{n=0}^{s} e^{in(\theta_{m'} - \theta_m)} = \frac{1 - e^{i2\pi(m'-m)}}{(s+1)[1 - e^{i2\pi(m'-m)/(s+1)}]} = \delta_{mm'},$$

что и требовалось доказать. Они попытались преодолеть проблему предела, оперируя конечными s и полагая $s \longrightarrow \infty$ только тогда, когда средние значения уже вычислены. Исходя из этого, они рассматривают физически осуществимые состояния, числа заполнения фотонов которых ограничены и не превышают s. Оператор фазы в таком случае имеет вид

$$\hat{\phi} = \sum_{m=0}^{s} \theta_m|\theta_m\rangle\langle\theta_m|. \tag{10.7.23}$$

Очевидно, что состояния $|\theta_m\rangle$ являются собственными состояниями оператора $\hat{\phi}$ с собственными значениями θ_m.

Распределение вероятности $P(\theta_m)$ дискретного фазового угла θ_m можно получить с помощью оператора плотности $\hat{\rho}$, записав

$$P(\theta_m) = \langle \theta_m | \hat{\rho} | \theta_m \rangle \tag{10.7.24a}$$

с нормировкой $\sum_{m=0}^{s} P(\theta_m) = 1$. С другой стороны, можно построить непрерывную плотность вероятности $p(\phi)$, выраженную через непрерывные фазовые состояния $|\phi\rangle$, записав

$$p(\phi) = \frac{s+1}{2\pi} \langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{s} \sum_{n'=0}^{s} e^{i(n'-n)\phi} \langle n | \hat{\rho} | n' \rangle, \tag{10.7.24б}$$

которая нормирована таким образом, что $\int_{-\pi}^{\pi} p(\phi)\, d\phi = 1$. Результаты вычислений, основанных на операторе фазы $\hat{\phi}$, в некоторых случаях согласуются с результатами, полученными в работе (Susskind and Glogower, 1964).

10.7.4. Операционно определенные фазовые операторы

Совершенно другой подход к проблеме фазы был изложен в работе (Noh, Fougères and Mandel, 1991, 1992a, b). Авторы проанализировали, что именно измеряется в эксперименте, а затем ввели операторы, описывающие измерение, основываясь на соответствии с классической оптикой. Поскольку измерения всегда подразумевают разность между двумя фазами и поскольку эксперименты по интерференции или гомодинированию обычно дают косинус или синус разности фаз, они вводят операторы $\hat{C}_M$ и $\hat{S}_M$ для косинуса и синуса разности фаз, соответствующие конкретной схеме измерения. В качестве примера, рассмотрим схему измерения, приведенную на рис. 10.1. Два входных поля, обозначенные соответственно 1 и 2, смешиваются с помощью делителей пучка, а четыре детектора D_3, D_4, D_5, D_6 в выходных портах интерферометра регистрируют появляющиеся фотоны. С помощью 90-градусного фазовращателя, помещенного в одно из плеч интерферометра, возможно одновременно получить значения для косинуса и синуса разности фаз из разностей между числами фотонов n_3 и n_4, n_5 и n_6, зарегистрированных детекторами D_3 и D_4, D_5 и D_6, соответственно. Операторы косинуса и синуса имеют вид

$$\hat{C}_M = (\hat{n}_4 - \hat{n}_3)[(\hat{n}_4 - \hat{n}_3)^2 + (\hat{n}_6 - \hat{n}_5)^2]^{-1/2}, \quad \hat{S}_M = (\hat{n}_6 - \hat{n}_5)[(\hat{n}_4 - \hat{n}_3)^2 + (\hat{n}_6 - \hat{n}_5)^2]^{-1/2} \tag{10.7.25}$$

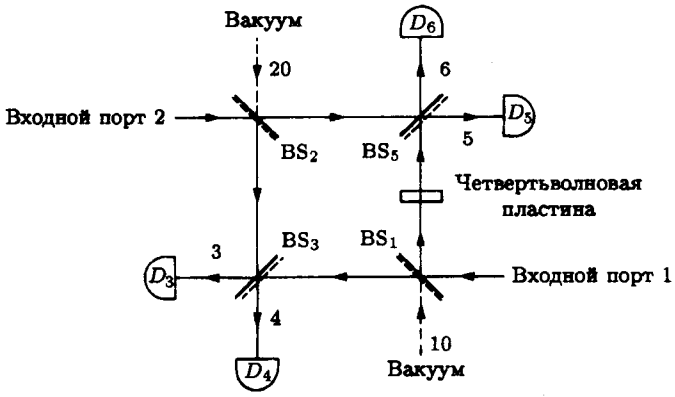


Рис. 10.1. Схема интерферометра, используемого для измерения разности фаз световых пучков, подаваемых на входные порты 1 и 2 (Noch, Fougères and Mandel, 1991)

и могут быть выражены через операторы поля на входных портах аппаратуры, изображенной на рис. 10.1. Можно показать, что $\hat{C}_M$ и $\hat{S}_M$ коммутируют, что является следствием того факта, что измерения косинуса и синуса совместимы и не мешают друг другу. Все средние и моменты операторов $\hat{C}_M$ и $\hat{S}_M$ вычисляются с помощью этих выражений. Однако, различные схемы измерения, вообще говоря, ведут к различным операторам, которые могут не коммутировать.

Из выражений (10.7.25) можно показать, что для полей с $\langle \hat{n}_1 \rangle, \langle \hat{n}_2 \rangle \ll 1$ дисперсии операторов $\hat{C}_M$ и $\hat{S}_M$ удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\langle (\Delta \hat{C}_M)^2 \rangle^{1/2}}{\langle \hat{C}_M \rangle} \geqslant 1, \quad \frac{\langle (\Delta \hat{S}_M)^2 \rangle^{1/2}}{\langle \hat{S}_M \rangle} \geqslant 1, \tag{10.7.26}$$

т.е. косинус и синус разности фаз являются, таким образом, плохо определенными.

Если формализм, заданный выражениями (10.7.25), верен, то различные моменты операторов $\hat{C}_M$ и $\hat{S}_M$, полученные из этих выражений, в таком случае должны согласоваться с результатами измерений, в которых четверка чисел n_3, n_4, n_5, n_6 регистрируется неоднократно и используется для вычисления C_M и S_M. Экспериментальными четверками с $n_4 = n_3$ и $n_6 = n_5$ следует пренебречь, так как они не дают значения C_M, S_M. Это требует перенормировки теоретических моментов для сравнения с экспериментом.

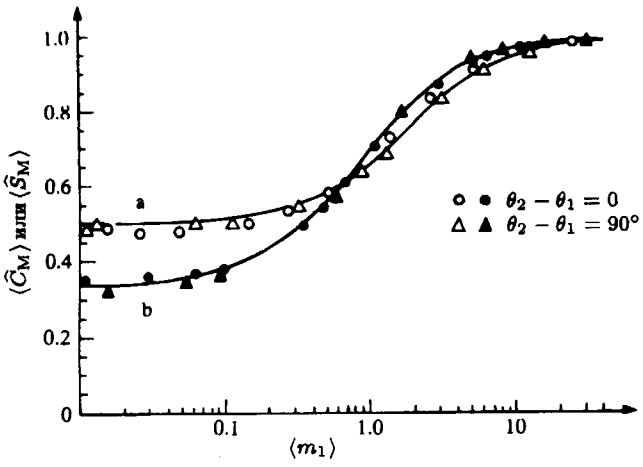


Рис. 10.2. Результаты измерений средних значений операторов косинуса $\hat{C}_M$ и синуса $\hat{S}_M$ разности фаз как функций среднего числа фотоотсчетов $\langle m_1 \rangle$, совмещенные с теоретическими кривыми, полученными из выражений (10.7.25). ○, ●: $\theta_2 - \theta_1 = 0°$; △, ▲: $\theta_2 - \theta_1 = 90°$, (Noh, Fougères and Mandel, 1991)

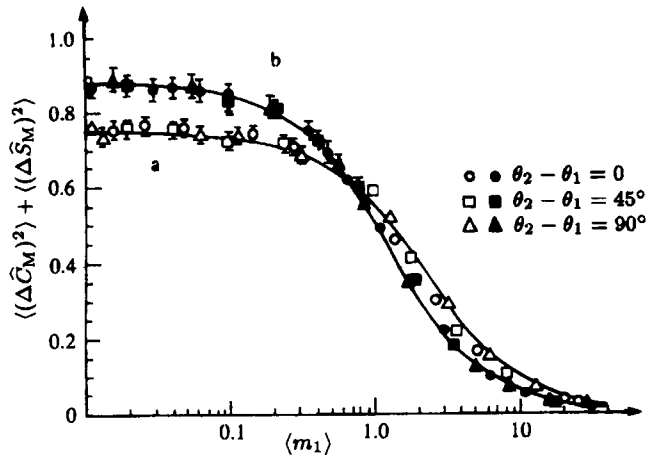


Рис. 10.3. Результаты измерения суммы дисперсий $\langle (\Delta \hat{C}_M)^2 \rangle + \langle (\Delta \hat{S}_M)^2 \rangle$ как функции среднего числа фотоотсчетов $\langle m_1 \rangle$, совмещенные с теоретическими кривыми, полученными из выражений (10.7.25) ○, ●: $\theta_2 - \theta_1 = 0°$; □, ■: $\theta_2 - \theta_1 = 45°$; △, ▲: $\theta_2 - \theta_1 = 90°$, (Noh, Fougères and Mandel, 1991)

На рис. 10.2 и 10.3 показана теоретическая зависимость $\langle \hat{C}_M \rangle$ и $\langle (\Delta \hat{C}_M)^2 \rangle + \langle (\Delta \hat{S}_M)^2 \rangle$ от $\langle \hat{n}_1 \rangle$ для различных значений отношения $\langle \hat{n}_2 \rangle / \langle \hat{n}_1 \rangle$ и для различных разностей фаз $\theta_2 - \theta_1$. Поле на входе представляет собой двухмодовое когерентное состояние $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$ (см. гл. 11) с $v_1 = \langle \hat{n}_1 \rangle^{1/2} e^{i\theta_1}$, $v_2 = \langle \hat{n}_2 \rangle^{1/2} e^{i\theta_2}$. Экспериментально измеренные величины, полученные для двух пучков света от гелий-неонового лазера на входе, наложены на теоретические кривые (Noh, Fougères and Mandel, 1991, 1992). Рисунки демонстрируют хорошее согласие между теорией, основанной на выражениях (10.7.25), и экспериментом.

Хотя эта процедура дает средние значения и моменты более высоких порядков операторов $\hat{C}_M$ и $\hat{S}_M$, возможно получить выражение для распределения вероятности $p(\phi_2 - \phi_1)$ разности фаз с помощью видоизмененного эксперимента (Noh, Fougères and Mandel, 1993). Для этой цели полю на входном порте 2 интерферометра, изображенного на рис. 10.1, сознательно придают фазовый сдвиг θ и проводят измерения для различных значений θ в интервале от $-\pi$ до π. Тогда характеристическая функция разности фаз $\phi_2 - \phi_1$, при условии, что сдвиг равен θ, определяется формулой

$$C(x|\theta) = \langle (\hat{C}_M + i\hat{S}_M)^x \rangle', \qquad (10.7.27)$$

где $\langle\ \rangle'$ означает квантовое среднее в состоянии на входе, измененном внесенным фазовым сдвигом θ. Следовательно, с помощью обратного преобразования Фурье для плотности вероятности $p(\phi_2 - \phi_1|\theta)$ при условии, что сдвиг равен θ, получим

$$p(\phi_2 - \phi_1|\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(x|\theta)\, e^{-i(\phi_2 - \phi_1 - \theta)x}\, dx. \qquad (10.7.28)$$

При усреднении по всем значениям θ, это выражение позволяет получить искомую плотность вероятности

$$P(\phi_2 - \phi_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(\phi_2 - \phi_1|\theta)\, d\theta. \qquad (10.7.29)$$

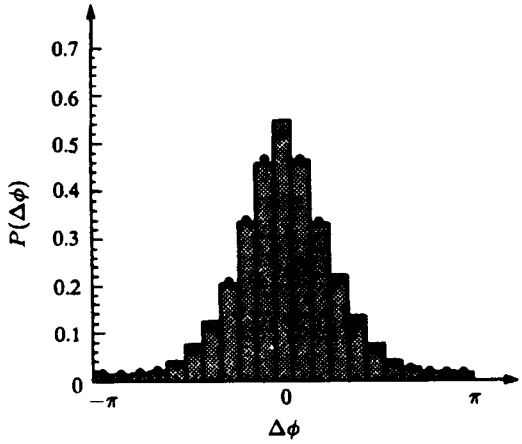


Рис. 10.4. Измеренное распределение вероятности разности фаз для двухмодового когерентного состояния $|v_1 = 1\rangle|v_2 = 2.36\rangle$ на входах интерферометра. Черные точки соответствует значениям, предсказанным теоретически с помощью выражения (10.7.30) (Noh, Fougères and Mandel, 1993)

На рис. 10.4. показана гистограмма экспериментально измеренного распределения вероятности

$$P_N \equiv \int_{(N-\frac{1}{2})B}^{(N+\frac{1}{2})B} P(\phi_2 - \phi_1)\, d(\phi_2 - \phi_1) \tag{10.7.30}$$

с интервалом округления шириной $B = 18°$ для двухмодового когерентного состояния $|v_1 = 1\rangle_1 |v_2 = 2{,}36\rangle_2$ на входах интерферометра. Черными точками отмечены теоретические значения, полученные из (10.7.30). Здесь мы видим вполне приемлемое согласие между теорией и экспериментом, в то время, как между экспериментом и теоретическими подходами, описанными ранее в разд. 10.7.2 и 10.7.3, имеются явные несоответствия.

10.8. Пространственно-временны́е коммутационные соотношения

В силу того, что неэрмитовы операторы $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$ и $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}$ не коммутируют друг с другом, операторы поля $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)$, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$, в общем случае, тоже не будут коммутировать. Мы можем вычислить любой из коммутаторов поля, которые, безусловно, будут представлять собой тензоры, с помощью разложений (10.4.38)—(10.4.40) и коммутационных соотношений (10.3.9)—(10.3.11). Таким образом, мы, например, получим

$$\begin{aligned}[\hat{E}_i(\mathbf{r}_1,t_1), \hat{E}_j(\mathbf{r}_2,t_2)] &= \frac{1}{\varepsilon_0 L^3} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \sum_{s,s'} \left(\frac{\hbar\omega}{2}\frac{\hbar\omega'}{2}\right)^{1/2} [\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}] \times \\ &\times \{(\varepsilon_{\mathbf{k}s})_i (\varepsilon^*_{\mathbf{k}'s'})_j \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_2 - \omega t_1 + \omega' t_2)] - \text{к.с.}\} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0 L^3} \sum_{\mathbf{k},s} \frac{\hbar\omega}{2} (\varepsilon_{\mathbf{k}s})_i (\varepsilon^*_{\mathbf{k}s})_j [\exp i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega(t_1 - t_2)] - \text{к.с.}]. \end{aligned} \tag{10.8.1}$$

За суммой по s от тензорной комбинации $(\varepsilon_{\mathbf{k}s})_i (\varepsilon^*_{\mathbf{k}s})_j$ мы обратимся к разд. 10.2.2., где было показано, что

$$\sum_s (\varepsilon_{\mathbf{k}s})_i (\varepsilon^*_{\mathbf{k}s})_j = \delta_{ij} - \kappa_i \kappa_j. \tag{10.8.2}$$

С учетом этого результата, выражение (10.8.1) приобретает вид

$$[\hat{E}_i(\mathbf{r}_1,t_1), \hat{E}_j(\mathbf{r}_2,t_2)] = \frac{1}{\varepsilon_0 L^3} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right) (\delta_{ij} - \kappa_i\kappa_j) \times \{\exp i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega(t_1 - t_2)]\} - \text{к.с.} \tag{10.8.3}$$

Когда размер L^3 нормировочного объема становится очень большим, сумма, очевидно, может быть приближенно заменена интегралом. Из выражений (10.2.10) для компонент волнового вектора $\mathbf{k}$ следует, что число мод, для которых волновое число лежит в интервале $\Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3$, приблизительно равно $(L/2\pi)^3 \Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3$, так что плотность мод равна $(L/2\pi)^3$. Мы можем, следовательно, заменить сумму по дискретным переменным k_1, k_2, k_3 в выражении (10.8.3) интегралом по непрерывным переменным с плотностью мод в качестве весового коэффициента согласно общему правилу

$$\sum_{\mathbf{k}} \to \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3k. \tag{10.8.4}$$

Таким образом, выражение (10.8.3) принимает вид

$$\begin{aligned}[\hat{E}_i(\mathbf{r}_1,t_1), \hat{E}_j(\mathbf{r}_2,t_2)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0} (\delta_{ij} - \kappa_i\kappa_j) \{\exp i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega(t_1 - t_2)] - \text{к.с.}\}\, d^3k = \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0} (\delta_{ij} - \kappa_i\kappa_j) \{\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \sin\omega(t_1 - t_2)\}\, d^3k, \end{aligned} \tag{10.8.5}$$

где вторая строка получена из первой путем замены переменных $\mathbf{k} \longrightarrow -\mathbf{k}$ в комплексно-сопряженном члене. Мы увидим, что решение, действительно, не зависит от размера нормировочного объема L^3, что справедливо для результата, имеющего физический смысл. Нет необходимости говорить, что эта интегральная форма коммутатора была бы сразу же получена, предпочти мы интегральное разложение оператора поля разложению в ряд.

Иногда удобно представить (10.8.5) в другом виде, вводя сингулярную функцию[1]

$$D(\mathbf{r},t) \equiv -\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\sin\omega t\frac{d^3k}{k}. \tag{10.8.6}$$

Переходя к сферическим координатам согласно соотношениям

$$k_1 = k\sin\theta\cos\phi, \quad k_2 = k\sin\theta\sin\phi, \quad k_3 = k\cos\theta \tag{10.8.7}$$

и интегрируя по θ и ϕ, можно легко показать, что эта функция может быть также представлена в виде

$$D(\mathbf{r},t) = \frac{1}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)}]\,dk = \frac{1}{4\pi r}[\delta(r+ct) - \delta(r-ct)], \tag{10.8.8}$$

где $r \equiv |\mathbf{r}|$. Отсюда следует, что $D(\mathbf{r},t)$ обращается в нуль вне поверхности светового конуса $r = \pm ct$. С помощью этой функции коммутатор (10.8.5) можно переписать в виде

$$[\hat{E}_i(\mathbf{r}_1,t_1),\hat{E}_j(\mathbf{r}_2,t_2)] = \frac{i\hbar c}{\varepsilon_0}\left[\frac{\delta_{ij}}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2} - \frac{\partial^2}{\partial r_{1i}\partial r_{2j}}\right]D(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,t_1-t_2). \tag{10.8.9}$$

То, что $D(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,t_1-t_2)$ равна нулю вне поверхности светового конуса, связывающего точки $(\mathbf{r}_1,t_1)$ и $(\mathbf{r}_2,t_2)$, означает, что электрические поля в двух различных пространственно-временны́х точках могут быть одновременно измерены, только если эти точки не могут быть связаны световым сигналом. Если же две пространственно-временны́е точки могут быть связаны подобным образом, то одно измерение может повлиять на результат другого. В частности, заметим, что электрические поля коммутируют в любых двух фиксированных точках пространства *в один и тот же момент времени*.

Начав с разложения в ряд (10.4.40) для магнитного поля $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$ и рассуждая аналогичным образом, можно легко показать, что магнитные поля удовлетворяют почти идентичному коммутационному соотношению

$$[\hat{B}_i(\mathbf{r}_1,t_1),\hat{B}_j(\mathbf{r}_2,t_2)] = \frac{i\hbar}{\varepsilon_0 c}\left[\frac{\delta_{ij}}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2} - \frac{\partial^2}{\partial r_{1i}\partial r_{2j}}\right]D(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,t_1-t_2), \tag{10.8.10}$$

а коммутатор электрического и магнитного полей может быть записан в виде

$$[\hat{E}_i(\mathbf{r}_1,t_1),\hat{B}_j(\mathbf{r}_2,t_2)] = \frac{\hbar}{\varepsilon_0}\epsilon_{ijl}\frac{1}{(2\pi)^3}\int k_l\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]\cos\omega(t_1-t_2)\,d^3k =$$
$$= -\frac{i\hbar}{\varepsilon_0 c}\epsilon_{ijl}\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial r_{1l}}D(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,t_1-t_2). \tag{10.8.11}$$

Мы снова видим, что поля не коммутируют только в пространственно-временны́х точках, которые могут быть связаны световым сигналом. При этом проекции векторов $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1,t_1)$ и $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_2,t_2)$ на одно направление коммутируют даже в этих точках. Однако, равновременно́й коммутатор между электрическим и магнитным полями не обращается в нуль, а имеет вид

$$[\hat{E}_i(\mathbf{r}_1,t),\hat{B}_j(\mathbf{r}_2,t)] = \frac{\hbar}{i\varepsilon_0}\epsilon_{ijl}\frac{\partial}{\partial r_{1l}}\delta^3(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \tag{10.8.12}$$

В заключение аналогичным образом определим коммутатор для векторного потенциала в кулоновской калибровке

$$[\hat{A}_i(\mathbf{r}_1,t_1),\hat{A}_j(\mathbf{r}_2,t_2)] = \frac{i\hbar}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{\omega}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]\sin\omega(t_1-t_2)\,d^3k, \tag{10.8.13}$$

[1] Для более полного рассмотрения сингулярной D-функции см. (Heitler, 1954, гл. 2).

который равен нулю при $t_1 = t_2$, тогда как смешанный коммутатор определяется выражением

$$[\hat{E}_i(\mathbf{r}_1,t_1),\hat{A}_j(\mathbf{r}_2,t_2)] = \frac{i\hbar}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]\cos\omega(t_1-t_2)\,d^3k. \tag{10.8.14}$$

В частном случае, когда времена t_1, t_2 равны, интеграл имеет вид одного из представлений поперечной дельта-функции $\delta^T_{ij}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$, и можно записать

$$[\hat{E}_i(\mathbf{r}_1,t),\hat{A}_j(\mathbf{r}_2,t)] = \frac{i\hbar}{\varepsilon_0}\delta^T_{ij}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \tag{10.8.15}$$

Заметим, что это выражение не равно нулю даже вне поверхности светового конуса, когда события $(\mathbf{r}_1,t)$ и $(\mathbf{r}_2,t)$ «не соединимы». Это следствие того, что векторный потенциал не является имеющей физический смысл наблюдаемой. По аналогии находим равновременно́й коммутатор для векторного потенциала $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)$ и магнитного поля $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$

$$[\hat{A}_i(\mathbf{r}_1,t),\hat{B}_j(\mathbf{r}_2,t)] = 0. \tag{10.8.16}$$

10.8.1. Уравнения движения для $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{B}}$

В заключение отметим, что коммутатор (10.8.12) позволяет упростить уравнения движения Гейзенберга для векторов электромагнитного поля $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$. Из квантованного гамильтониана поля

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int\left[\varepsilon_0\hat{\mathbf{E}}^2(\mathbf{r},t)+\frac{1}{\mu_0}\hat{\mathbf{B}}^2(\mathbf{r},t)\right]d^3r, \tag{10.8.17}$$

находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{E}_i(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{E}_i(\mathbf{r},t),\frac{1}{2}\int\left\{\varepsilon_0\hat{\mathbf{E}}^2(\mathbf{r}',t)+\frac{1}{\mu_0}\hat{\mathbf{B}}^2(\mathbf{r}',t)\right\}d^3r'\right] = \\ &= \frac{1}{2i\hbar\mu_0}\int\{[\hat{E}_i(\mathbf{r},t),\hat{B}_j(\mathbf{r}',t)]\hat{B}_j(\mathbf{r}',t)+\hat{B}_j(\mathbf{r}',t)[\hat{E}_i(\mathbf{r},t),\hat{B}_j(\mathbf{r}',t)]\}\,d^3r' = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\int\epsilon_{ijk}\left[\frac{\partial}{\partial r_k}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right]\hat{B}_j(\mathbf{r}',t)\,d^3r' = \\ &= -c^2\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial r_k}\hat{B}_j(\mathbf{r},t) = c^2(\nabla\times\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t))_i,\end{aligned} \tag{10.8.18}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{B}_i(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{B}_i(\mathbf{r},t),\frac{1}{2}\int\left\{\varepsilon_0\hat{\mathbf{E}}^2(\mathbf{r}',t)+\frac{1}{\mu_0}\hat{\mathbf{B}}^2(\mathbf{r}',t)\right\}d^3r'\right] = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2i\hbar}\int\{[\hat{B}_i(\mathbf{r},t),\hat{E}_j(\mathbf{r}',t)]\hat{E}_j(\mathbf{r}',t)+\hat{E}_j(\mathbf{r}',t)[\hat{B}_i(\mathbf{r},t),\hat{E}_j(\mathbf{r}',t)]\}\,d^3r' = \\ &= \int\epsilon_{ijk}\left[\frac{\partial}{\partial r'_k}\delta^3(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\right]\hat{E}_j(\mathbf{r}',t)\,d^3r' = -(\nabla\times\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t))_i.\end{aligned} \tag{10.8.19}$$

Полученные гейзенберговские уравнения движения в точности совпадают с уравнениями Максвелла для свободного поля.

10.9. Вакуумные флуктуации

Мы уже столкнулись с некоторыми существенными различиями в квантовой и классической теориях поля. Мы обнаружили, что для каждой моды квантового поля собственные значения энергии, импульса

и момента количества движения принимают только определенные дискретные значения и что некоторые компоненты поля в пространственно-временны́х точках, разделенных определенным интервалом, не могут быть одновременно измерены. Еще более ярким проявлением квантованного электромагнитного поля служит явление вакуумных флуктуаций.

Вакуумное состояние поля $|\mathrm{vac}\rangle$ представляет собой состояние с наименьшей энергией, и мы показали в разд. 10.4 [см. (10.4.24)], что средние значения операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$ и $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}$ в вакуумном состоянии обращаются в нуль, так как

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}|\mathrm{vac}\rangle = 0 = \langle\mathrm{vac}|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}. \tag{10.9.1}$$

Пусть $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},t)$ — произвольный вектор поля, который может представлять собой электрическое поле, магнитное поле или векторный потенциал, имеющий разложение по модам общего вида [ср. (10.4.38)—(10.4.40)]

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s} l(\omega)\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \text{э.с.}, \tag{10.9.2}$$

где $l(\omega)$ — некоторая медленно меняющаяся функция частоты, различная для каждого конкретного вектора поля. Тогда, исходя из выражения (10.9.1), получаем

$$\langle\mathrm{vac}|\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},t)|\mathrm{vac}\rangle = 0. \tag{10.9.3}$$

В то же время можно легко показать, что среднее значение квадрата оператора поля не равно нулю. Это означает, что флуктуации электромагнитного поля существуют даже в состоянии с наименьшей энергией.

Если воспользоваться разложением по модам (10.9.2) и учесть, что

$$\langle\mathrm{vac}|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}|\mathrm{vac}\rangle = 0, \quad \langle\mathrm{vac}|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}|\mathrm{vac}\rangle = 0, \quad \langle\mathrm{vac}|\hat{a}_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}|\mathrm{vac}\rangle = 0,$$

то мы сразу же находим, что

$$\langle\mathrm{vac}|\hat{\mathbf{F}}^2(\mathbf{r},t)|\mathrm{vac}\rangle = \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k}s}\sum_{\mathbf{k}'s'} l(\omega)l^*(\omega')\langle\mathrm{vac}|\hat{a}_{\mathbf{k}s}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}|\mathrm{vac}\rangle(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}'s'})\, e^{i[(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}-(\omega-\omega')t]}.$$

С помощью коммутационного соотношения (10.3.9) находим

$$\langle\mathrm{vac}|\hat{a}_{\mathbf{k}s}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}|\mathrm{vac}\rangle = \langle\mathrm{vac}|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}\hat{a}_{\mathbf{k}s} + \delta^3_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}|\mathrm{vac}\rangle = \delta^3_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}$$

и, следовательно,

$$\langle\mathrm{vac}|\hat{\mathbf{F}}^2(\mathbf{r},t)|\mathrm{vac}\rangle = \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}|l(\omega)|^2 = \frac{2}{L^3}\sum_{\mathbf{k}}|l(\omega)|^2 \to \frac{2}{(2\pi)^3}\int|l(\omega)|^2\, d^3k. \tag{10.9.4}$$

Ясно, что это выражение не равно нулю и, безусловно, равно бесконечности для неограниченного числа мод. Так как $\langle\mathrm{vac}|(\Delta\hat{\mathbf{F}})^2|\mathrm{vac}\rangle = \langle\mathrm{vac}|\hat{\mathbf{F}}^2|\mathrm{vac}\rangle$, где $\Delta\hat{\mathbf{F}} \equiv \hat{\mathbf{F}} - \langle\hat{\mathbf{F}}\rangle$ — отклонение от среднего, то мы видим, что поле в вакуумном состоянии флуктуирует. На первый взгляд, бесконечные флуктуации представляются абсолютно лишенными физического смысла и, безусловно, могут вызвать сомнения в обоснованности всего метода квантования. Однако, из выражения (10.9.4) видно, что бесконечность является следствием бесконечно больших частот и волновых чисел в разложении по модам, что не встречается на практике.

Временно отложив в сторону вопрос о бесконечностях, вкратце обсудим, почему вообще должны существовать вакуумные флуктуации. В силу коммутационных соотношений (10.4.1), (10.4.2) вектор поля $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},t)$ не коммутирует с числом заполнения фотонов $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$ и, следовательно, не коммутирует с энергией $\hat{H}$. Отсюда следует, что в любом состоянии с определенной энергией, примером которого является вакуумное состояние, должна иметь место ненулевая дисперсия $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},t)$, т.е. $\langle(\Delta\hat{\mathbf{F}})^2\rangle_{\mathrm{vac}} \neq 0$. Напомним, что канонические переменные квантовомеханического осциллятора продолжают флуктуировать в основном состоянии, и каждая $\mathbf{k}$, s-мода поля, таким образом, проявляет свою квантовую природу.

10.9.1. Флуктуации локально усредненных полей

Чтобы получить имеющую физический смысл меру величины флуктуаций, заметим, что при любом измерении существуют ограничения на $\mathbf{k}, s$-моды, которым соответствует аппаратура. Можно доказать, что в пространственно-временно́й области никакое измерение поля $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$ нельзя осуществить в конкретной точке пространства и в определенный момент времени. Поле определяется через воздействие на пробный заряд, что подразумевает усреднение воздействия по конечной области пространства и времени. Но, усредняя по конечной области, мы обнаружим, что высокочастотные вклады в сумме дают нуль, так что мы получаем конечное решение.

Этим рассуждениям можно придать количественный характер, вводя действительную, неотрицательную, интегрируемую усредняющую функцию $g(\mathbf{r},t)$, значение которой фактически равно нулю вне малой пространственно-временно́й области с линейными размерами $l_1 l_2 l_3 t_0$ (см. рис. 10.5). Предположим, что $g(\mathbf{r},t)$ нормирована таким образом, что

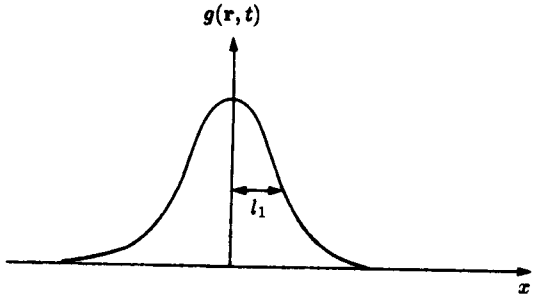


Рис. 10.5. Возможный вид $g(\mathbf{r},t)$ как функции одной из пространственных координат

$$\int g(\mathbf{r},t)\, d^3r\, dt = 1. \tag{10.9.5}$$

Точный вид $g(\mathbf{r},t)$ временно оставим неопределенным. С помощью усредняющей функции $g(\mathbf{r},t)$ мы можем выразить действие поля в окрестности пространственно-временно́й точки $(\mathbf{r},t)$ в виде свертки

$$\hat{\bar{\mathbf{F}}}(\mathbf{r},t) = \int \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}+\mathbf{r}', t+t') g(\mathbf{r}',t')\, d^3r'\, dt', \tag{10.9.6}$$

которая представляет собой некий вид локального усреднения $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},t)$ в малой области. Тогда с помощью разложения (10.9.2) получим выражение

$$\hat{\bar{\mathbf{F}}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s} \left[l(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \int e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'-\omega t')} g(\mathbf{r}',t')\, d^3r'\, dt' + \text{э.с.} \right] =$$

$$= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s} [l(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} G(\mathbf{k}) + \text{э.с.}], \tag{10.9.7}$$

где $G(\mathbf{k})$ — четырехмерный фурье-образ функции $g(\mathbf{r},t)$

$$G(\mathbf{k}) \equiv \int g(\mathbf{r},t)\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\, d^3r\, dt \quad (\omega = ck). \tag{10.9.8}$$

Таким образом, вычисление локального пространственно-временно́го среднего от $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},t)$ с усредняющей функцией $g(\mathbf{r},t)$ сводится к приданию веса $G(\mathbf{k})$ амплитудам соответствующих фурье-компонент $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},t)$

Из выражения (10.9.7) следует, что среднее значение $\hat{\bar{\mathbf{F}}}(\mathbf{r},t)$ в вакуумном состоянии, так же как и среднее значение $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},t)$, обращается в нуль, т.е.

$$\langle \text{vac} | \hat{\bar{\mathbf{F}}} | \text{vac} \rangle = 0, \tag{10.9.9}$$

и из сравнения с выражением (10.9.4) получим

$$\langle \text{vac} | \hat{\bar{\mathbf{F}}}^2 | \text{vac} \rangle = \frac{2}{(2\pi)^3} \int |l(\omega)|^2 |G(\mathbf{k})|^2\, d^3k. \tag{10.9.10}$$

Мы видим, что если $G(\mathbf{k})$ убывает достаточно быстро при больших k, среднее значение $\hat{\bar{\mathbf{F}}}^2$ в вакуумном состоянии, в отличие от среднего значения $\hat{\mathbf{F}}^2$, конечно. Грубо говоря, чем менее резко спадает рассеивающая

функция $g(\mathbf{r},t)$, тем более быстро будет убывать $G(\mathbf{k})$ при больших $\mathbf{k}$. В действительности, ограничение на возможный вид $g(\mathbf{r},t)$ очень невелико. Даже очень резко меняющаяся функция

$$g(\mathbf{r},t)=\begin{cases}1/(\xi_1\xi_2\xi_3t_0), & \text{для } |x|\leqslant\frac{1}{2}\xi_1,\quad |y|\leqslant\frac{1}{2}\xi_2,\quad |z|\leqslant\frac{1}{2}\xi_3,\quad |t|\leqslant\frac{1}{2}t_0,\\ 0, & \text{во всех других случаях,}\end{cases}\tag{10.9.11}$$

четырехмерный фурье-образ которой имеет вид

$$G(\mathbf{k})=\prod_{j=1,2,3}\left[\frac{\sin(\frac{1}{2}k_j\xi_j)}{\frac{1}{2}k_j\xi_j}\right]\left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\omega t_0)}{\frac{1}{2}\omega t_0}\right),\tag{10.9.12}$$

приводит к конечному значению $\langle\hat{\tilde{\mathbf{F}}}^2\rangle$. Менее резко меняющаяся функция, вероятно, приведет к лучшей сходимости интеграла. Фактически, если область, в которой усредняющая функция $g(\mathbf{r},t)$ существенно отлична от нуля, имеет линейные размеры порядка ξ в пространстве и порядка ξ/c — во времени, то соответствующая область отличных от нуля значений для $G(\mathbf{k})$ имеет размер порядка $1/\xi$ по каждой из переменных k_1, k_2, k_3.

На практике, ограничения часто налагаются на волновые числа k_1, k_2, k_3 или на частоту ω, так что удобнее считать $G(\mathbf{k})$ основной численной характеристикой некоего фильтра и с ее помощью определять $g(\mathbf{r},t)$. Мы можем рассматривать $G(\mathbf{k})$ как функцию отклика приемника.

10.9.2. Порядок величины вакуумных флуктуаций

Интересно выяснить, играют ли вакуумные флуктуации (нулевые колебания) поля, например, электрического, значительную роль в измерениях или ими можно полностью пренебречь. На практике, электрическое поле в оптическом диапазоне обычно не измеряется, но подобные измерения очень схожи с измерениями в микроволновом диапазоне.

Предположим, что антенна приемника настроена на измерение входного оптического квазимонохроматического поля средней частоты ω_0. Приемник, безусловно, должен иметь определенную полосу частот приема и определенный телесный угол приема, определяемые продольной и поперечной длинами когерентности входящего света. Предположим, что свет распространяется вдоль некоторого z-направления, но с небольшим угловым расхождением. Тогда частоты приема лежат в пределах от $\omega_0-c\delta k_3/2$ до $\omega_0+c\delta k_3/2$, а направления приема — от $-\delta k_1/2$ до $\delta k_1/2$ и от $-\delta k_2/2$ до $\delta k_2/2$. В этом случае в качестве основного соотношения для среднеквадратичного поля естественно выбрать выражение (10.9.10), в котором фигурирует $G(\mathbf{k})$, а не $g(\mathbf{r},t)$. Для простоты положим, что $|G(\mathbf{k})|$ имеет прямоугольную форму:

$$|G(\mathbf{k})|=\begin{cases}1, & \text{когда } -\frac{1}{2}\delta k_1\leqslant k_1\leqslant\frac{1}{2}\delta k_1, -\frac{1}{2}\delta k_2\leqslant k_2\leqslant\frac{1}{2}\delta k_2,\\ & \qquad \omega_0/c-\frac{1}{2}\delta k_3\leqslant k_3\leqslant\omega_0/c+\frac{1}{2}\delta k_3\\ 0, & \text{во всех других случаях.}\end{cases}\tag{10.9.13}$$

Если поле когерентно в принимаемой области спектра, то тогда $2\pi/\delta k_3$ должно быть примерно равно продольной длине когерентности l_3 входящего света, а $2\pi/\delta k_1$, $2\pi/\delta k_2$ должны быть равны поперечным длинам когерентности l_1, l_2, соответственно. Произведение $l_1l_2l_3=V_c$ известно как объем когерентности, где l_1, l_2, l_3 велики по сравнению с средней длиной волны $2\pi c/\omega_0$. Полагая $|l(\omega)|^2=\hbar\omega/2\varepsilon_0$ для случая, когда $\hat{\mathbf{F}}$ в выражении (10.9.10) представляет собой электрическое поле $\hat{\mathbf{E}}$, и, используя (10.9.13), получим для флуктуаций $\hat{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{r},t)$ в пределах интервала $(\delta k_1)(\delta k_2)(\delta k_3)$ следующее выражение:

$$\langle\text{vac}|\hat{\tilde{\mathbf{E}}}^2(\mathbf{r},t)|\text{vac}\rangle\approx\frac{2}{(2\pi)^3}\int_{-\delta k_1/2}^{\delta k_1/2}dk_1\int_{-\delta k_2/2}^{\delta k_2/2}dk_2\int_{\omega_0/c-\delta k_3/2}^{\omega_0/c+\delta k_3/2}\frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0}dk_3\approx$$
$$\approx\frac{2}{(2\pi)^3}\frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0}(\delta k_1)(\delta k_2)(\delta k_3)\approx\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0}\frac{1}{V_c}.\tag{10.9.14}$$

Сравним полученное выражение с измеренным среднеквадратичным значением электрического поля $\langle \tilde{E}^2_{\text{свет}} \rangle$ падающего квазимонохроматического света. Пусть $\mathcal{N}$ — средняя плотность фотонов в световом пучке средней частоты ω_0. Тогда, приравнивая плотности энергий, получим

$$\varepsilon_0 \langle \tilde{E}^2_{\text{свет}} \rangle = \mathcal{N} \hbar \omega_0. \tag{10.9.15}$$

Отношение $\langle \tilde{E}^2_{\text{свет}} \rangle$ к $\langle \text{vac} | \hat{\tilde{\mathbf{E}}}^2 | \text{vac} \rangle$ дает нам грубую оценку отношения сигнала к шуму, возникающему в результате вакуумных флуктуаций. Из выражений (10.9.14) и (10.9.15) получим:

$$\frac{\langle \tilde{E}^2_{\text{свет}} \rangle}{\langle \text{vac} | \hat{\tilde{\mathbf{E}}}^2 | \text{vac} \rangle} \approx \mathcal{N} V_c. \tag{10.9.16}$$

Отсюда следует, что среднее число фотонов в пределах объема когерентности является ключевым параметром, определяющим относительную важность вакуумных флуктуаций. Пока это число достаточно велико, мы имеем дело с полями, которые можно рассматривать с классической точки зрения и для которых вакуумные флуктуации незначительны.

Ранее уже указывалось и будет доказано в разд. 13.1, что для излучения от привычных тепловых источников в видимом диапазоне среднее число фотонов в объеме когерентности обычно много меньше единицы. Фактически, только с развитием лазеров были получены оптические поля с большими значениями этого параметра. Из выражения (10.9.16) следует, что вакуумные флуктуации должны доминировать на выходе аппаратуры, предназначенной для детектирования электрического поля светового пучка от большинства обычных источников. Безусловно, наше доказательство упрощено и надлежащее обсуждение проблемы должно на самом деле включать измерительную аппаратуру и ее взаимодействие с полем.

Несмотря на вездесущий характер электромагнитного вакуума, мы увидим, что существуют некоторые квантовые состояния, в которых одна квадратурная компонента поля флуктуирует менее, чем в вакуумном состоянии, за счет роста флуктуаций другой квадратурной компоненты поля. Эти так называемые эффекты сжатия уже экспериментально наблюдались и будут обсуждаться более подробно в гл. 21.

10.9.3. Сила Казимира между проводниками

Ряд физических явлений иногда связывают с вакуумными флуктуациями. Одним из наиболее замечательных примеров является сила притяжения между двумя параллельными, незаряженными, проводящими пластинами в вакууме (см. рис. 10.6). Эта сила, именуемая также притяжением Ван дер Ваальса, была вычислена Казимиром (Casimir, 1949; Casimir and Polder, 1948). Интересно отметить, что можно найти ей объяснение и получить приблизительное значение ее величины, предположив, что эта сила связана с энергией вакуумного поля, заключенного между двумя пластинами (Power, 1964, разд. 7.5). Если пластины имеют форму квадрата со стороной L и разнесены на расстояние z, то можно предположить, что система представляет собой резонатор, поддерживающий моды с волновым числами k, наименьшее из которых $\sim 1/z$. Следовательно, энергию вакуумного поля, заключенную между двумя пластинами, можно приближенно записать в виде

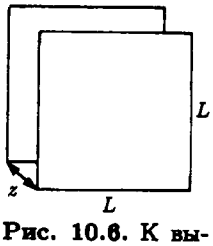


Рис. 10.6. К выводу (10.9.18)

$$U = \sum_{\substack{\mathbf{k},s \\ k > 1/z}} \tfrac{1}{2}\hbar\omega \approx (L^2 z) \int_{1/z}^{K} \hbar c k \, k^2 \, dk \approx \tfrac{1}{4} L^2 \hbar c \left[z K^4 - \frac{1}{z^3} \right] = U_{\text{верхн}} - U_{\text{нижн}}. \tag{10.9.17}$$

Мы, как обычно, заменили сумму интегралом и ввели высокочастотный порог K для того, чтобы энергия была конечной. Скорость изменения нижней пороговой энергии $U_{\text{нижн}}$ в зависимости от разделяющего расстояния z, взятую с обратным знаком, можно рассматривать как силу притяжения, величина которой F на единицу площади определяется формулой

$$F = -\frac{1}{L^2} \frac{dU_{\text{нижн}}}{dz} \sim \frac{\hbar c}{z^4}. \tag{10.9.18}$$

Более тщательное рассмотрение приводит к масштабному множителю $\pi/480$ перед $\hbar c/z^4$ в выражении (10.9.18). Интересно отметить, что, исходя из структуры выражения (10.9.18), сила пропорциональна $\hbar$ и,

следовательно, является квантово-механической, но, очевидно, не имеет ничего общего с силой, действующей между заряженными или поляризованными частицами, т.к. заряд электрона в формуле отсутствует. Величина силы, которая была измерена (Derjaguin, Abrikosova and Lifshitz, 1956; Kitchener and Prosser, 1957), не является незначительной для малых z, и справедливость полученного выражения для силы была подтверждена.

10.9.4. Лэмбовский сдвиг

В 1948 Велтону удалось объяснить *лэмбовский сдвиг* между s и p уровнями энергии атома водорода за счет возмущения орбиты электрона, вызванного вакуумными флуктуациями (Welton, 1948; см., также Series, 1957, гл. 9). Смещение $\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}$ положения электрона, вообще говоря, приводит к изменению потенциальной энергии δV, определяемому выражением

$$\delta V = V(\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla} V \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial r_j}V\right)\delta r_i \delta r_j + \dots .$$

При усреднении этого выражения по случайным смещениям $\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}$ основным ненулевым оказывается член, содержащий $\langle(\boldsymbol{\delta}\mathbf{r})^2\rangle$, и мы получаем, что

$$\langle \delta V\rangle = \tfrac{1}{6}(\nabla^2 V)\langle(\boldsymbol{\delta}\mathbf{r})^2\rangle. \tag{10.9.19}$$

Заметим, что радиус-вектор электрона, на который действует электрическое поле $\mathbf{E}_\omega$ частоты ω, удовлетворяет уравнению движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E}_\omega \cos\omega t.$$

Тогда среднеквадратичное смещение электрона относительно положения равновесия может быть записано в виде

$$\langle(\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}_\omega)^2\rangle = \frac{\frac{1}{2}e^2}{m^2\omega^4}\langle E_\omega^2\rangle_{\text{vac}}.$$

Пусть вакуумное среднее $\langle E_\omega^2\rangle_{\text{vac}}$ на частоте ω равно $\hbar\omega/\varepsilon_0 L^3$. Суммируя по всем модам с частотами, превышающими атомную частоту ω_0, и заменяя суммирование интегрированием, получим полное среднеквадратичное смещение

$$\langle(\boldsymbol{\delta}\mathbf{r})^2\rangle = \frac{\hbar e^2}{(2\pi)^3\varepsilon_0 m^2}\int\frac{d^3k}{\omega^3} = \frac{\hbar e^2}{2\pi^2\varepsilon_0 m^2 c^3}\int_{\omega_0}^{\Omega}\frac{d\omega}{\omega}. \tag{10.9.20}$$

Интеграл логарифмически расходится в верхнем пределе. Поэтому необходимо ввести верхний порог Ω, который обычно выбирается порядка $mc^2/\hbar$. Подставляя выражение для $\langle(\boldsymbol{\delta}\mathbf{r})^2\rangle$ в (10.9.19) и усредняя $\nabla^2 V(\mathbf{r})$ по орбите электрона с помощью волновой функции $\psi(\mathbf{r})$, мы в итоге получим смещение уровней энергии атома

$$\langle\delta V\rangle = \frac{\hbar e^2}{12\pi^2\varepsilon_0 m^2 c^3}\int d^3r \nabla^2 V(\mathbf{r})|\psi(\mathbf{r})|^2\int_{\omega_0}^{\Omega}\frac{d\omega}{\omega}. \tag{10.9.21}$$

Если мы примем потенциальную энергию $V(\mathbf{r})$, равной $-e^2/4\pi\varepsilon_0 r$, то тогда $\nabla^2 V(\mathbf{r}) = (e^2/\varepsilon_0)\delta^3(\mathbf{r})$, и интеграл по объему дает $(e^2/\varepsilon_0)|\psi(0)|^2$. Это выражение обращается в нуль в p-состоянии, но имеет конечное значение для s-состояния. Разность энергий между s и p уровнями, следовательно, равна

$$\Delta E = \frac{\hbar e^4}{12\pi^2\varepsilon_0 m^2 c^3}|\psi_s(0)|^2\ln(mc^2/\hbar\omega_0). \tag{10.9.22}$$

Из этого выражения получаем $\Delta E/\hbar \sim 1040$ МГц для $2s$-состояния водорода, что хорошо согласуется с измерениями Лэмба и Резерфорда (Lamb and Retherford, 1947). Решение схоже с выражением Бете (Bethe, 1947), полученном на основе идеи о перенормировке масс, которая прямо не ссылается на электромагнитное вакуумное поле. Вопрос о том, насколько вакуумные флуктуации «в действительности» достойны доверия, по крайней мере, в части, касающейся лэмбовского сдвига, обсуждался различными авторами (Ackerhalt, Knight and Eberly, 1973; Milonni, Ackerhalt and Smith, 1973; Senitzky, 1973; Dalibard, Dupont-Roc and Cohen-Tannoudji, 1982; Milonni, 1988). Позже, в разд. 15.5, мы рассмотрим лэмбовский сдвиг с другой точки зрения.

10.9.5. Вакуумные эффекты в делителе пучка

В качестве еще одной иллюстрации важной роли, которую иногда играет вакуумное поле, рассмотрим делитель пучка, изображеный на рис. 10.7. Разложив все поля обычным образом на плоские моды, мы рассмотрим отдельно падающую моду 1, которая порождает отраженную моду 2 и проходящую моду 3. Если r, t — комплексные амплитуды коэффициентов отражения и пропускания света, падающего с одной стороны, и r', t' — для света, падающего с другой стороны, и в делителе пучка нет потерь, то тогда эти параметры должны удовлетворять следующим условиям взаимности (Stokes, 1849):

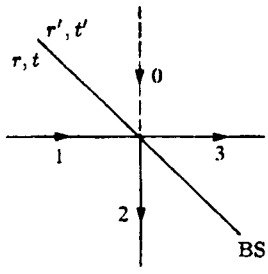


Рис. 10.7. Входящая и выходящая моды в делителе пучка (BS)

$$|r| = |r'|, \quad |t| = |t'|, \quad |r|^2 + |t|^2 = 1, \quad rt^* + r'^* t' = 0. \tag{10.9.23}$$

Отсюда следует, что падающая классическая волна с комплексной амплитудой v_1 порождает волну отраженную v_2 и волну прошедшую v_3, причем

$$v_2 = rv_1, \tag{10.9.24}$$

$$v_3 = tv_1. \tag{10.9.25}$$

Из этих соотношений следует, что

$$|v_2|^2 + |v_3|^2 = (|t|^2 + |r|^2)|v_1|^2 = |v_1|^2, \tag{10.9.26}$$

так что входящая энергия сохраняется. Теперь предположим, что те же рассуждения мы хотим применить к рассмотрению квантового поля. Тогда v_1, v_2, v_3 необходимо заменить операторами комплексных амплитуд $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger] = 1, \quad j = 1, 2, 3, \tag{10.9.27}$$

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] = 0. \tag{10.9.28}$$

Последнее соотношение отражает тот факт, что поле на одном из выходов может быть измерено независимо от другого. Однако, если просто заменить v_1, v_2, v_3 в выражениях (10.9.24) и (10.9.25) операторами $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$, мы легко обнаружим, что соотношения (10.9.27) и (10.9.28) для $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$ не выполняются. Вместо этого мы получаем:

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] = |r|^2 [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = |r|^2, \quad [\hat{a}_3, \hat{a}_3^\dagger] = |t|^2 [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = |t|^2, \quad [\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] = rt^* [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = rt^*.$$

Причина расхождения заключается в том, что мы проигнорировали четвертый входной порт делителя пучка на рис. 10.7, которым оправданно пренебрегают в классическом рассмотрении, поскольку никакой свет с этой стороны не поступает. Однако, даже если никакая энергия не поступает через моду 0, в трактовке квантованного поля существует вакуумное поле, которое поступает через этот вход и вносит вклады в две выходящие моды. Соответственно, вместо выражений (10.9.24) и (10.9.25) необходимо записать

$$\hat{a}_2 = r\hat{a}_1 + t'\hat{a}_0, \tag{10.9.29}$$

$$\hat{a}_3 = t\hat{a}_1 + r'\hat{a}_0, \tag{10.9.30}$$

где $\hat{a}_0$ удовлетворяет коммутационному соотношению (10.9.27) для $j = 0$, а операторы, относящиеся к модам 0 и 1, коммутируют. Тогда находим, что

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] = |r|^2 [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] + |t|^2 [\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = |r|^2 + |t|^2 = 1 \tag{10.9.31}$$

и аналогично для $\hat{a}_3$, тогда как с помощью выражения (10.9.23) получим

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] = rt^* [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] + r'^* t' [\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = rt^* + r'^* t' = 0, \tag{10.9.32}$$

что и требовалось доказать.

Мы вновь увидели, что вакуумное поле играет основную роль и оно необходимо для внутренней согласованности теории. Поле вакуума имеет некоторые следствия в квантовой электродинамике, которые не имеют классического аналога, и им нельзя пренебрегать. Делитель пучка будет подробнее рассматриваться нами в разд. 12.12.

10.10. Непрерывное фоковское пространство

До сих пор мы имели дело исключительно с дискретными модами электромагнитного поля, которые мы получили в рамках искусственного предположения, что поле заключено в воображаемый куб с ребром L и на него наложены периодические граничные условия. Фактически ни один результат, имеющий физический смысл, не зависит от размера куба, и на определенной стадии вычислений этот размер устремляют к бесконечности. Однако, эта процедура не является обязательной для квантования поля и можно иметь дело непосредственно с бесконечной областью пространства. В некоторых отношениях, очевидно, более естественно и элегантно поступить именно так, хотя непрерывное представление, на самом деле, оказывается менее компактным. Прежде, чем закончить формальное изложение квантовой теории излучения, кратко рассмотрим случай, когда поле разлагается на непрерывное множество мод[1], и векторы поля представляются в виде интегралов Фурье, а не рядов Фурье, как в выражениях (10.4.38)—(10.4.40).

Волновой вектор $\mathbf{k}$ теперь представляет собой непрерывный векторный индекс, компоненты которого принимают любые значения от $-\infty$ до ∞, хотя индекс поляризации по-прежнему имеет только два возможных значения в силу поперечности векторов поля. Тогда запишем

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{\varepsilon_0^{1/2}(2\pi)^{3/2}}\sum_s\int\left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2}[\hat{a}(\mathbf{k},s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k},s)\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}+\text{э.с.}]\,d^3k, \tag{10.10.1}$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)=\frac{i}{\varepsilon_0^{1/2}(2\pi)^{3/2}}\sum_s\int\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2}[\hat{a}(\mathbf{k},s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k},s)\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}-\text{э.с.}]\,d^3k, \tag{10.10.2}$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)=\frac{i}{\varepsilon_0^{1/2}(2\pi)^{3/2}}\sum_s\int\left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2}[\hat{a}(\mathbf{k},s)(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k},s))\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}-\text{э.с.}]\,d^3k. \tag{10.10.3}$$

Единичные векторы поляризации $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k},s)$ удовлетворяют тем же условиям ортонормированности (10.2.15), что и ранее. Операторы $\hat{a}(\mathbf{k},s)$ и $\hat{a}(\mathbf{k},s)^\dagger$ вновь играют роль операторов уничтожения и рождения фотонов с волновым вектором $\mathbf{k}$ и поляризацией s, но коммутационные соотношения (10.3.9)—(10.3.11) необходимо заменить выражениями

$$[\hat{a}(\mathbf{k},s),\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}',s')]=\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{ss'},\quad [\hat{a}(\mathbf{k},s),\hat{a}(\mathbf{k}',s')]=0,\quad [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k},s),\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}',s')]=0. \tag{10.10.4}$$

Как очевидно из этих соотношений, операторы $\hat{a}(\mathbf{k},s)$ и $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k},s)$ не являются безразмерными, в отличие от соответствующих операторов в дискретном фоковском пространстве. С помощью коммутационных соотношений легко показать, что коммутаторы операторов $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$ и т.д. имеют значения, полученные в разд. 10.8.

Как и ранее, мы можем ввести фоковские состояния поля, соответствующие дискретному числу возбуждений или фотонов. Однако, понятие числа возбуждений в одной моде более не имеет строгого смысла, так как отдельно взятая мода непрерывного спектра имеет нулевую меру. Теперь при обозначении фоковских состояний волновой вектор и поляризация каждого возбуждения записываются в явном виде. Например, n-фотонное фоковское состояние могло бы быть записано в виде

$$|\mathbf{k}_1s_1,\mathbf{k}_2s_2,\ldots,\mathbf{k}_ns_n\rangle,$$

где индексы мод могут повторяться. Из-за непрерывности мод состояния ненормируемы в обычном смысле, но они могут быть нормированы на дельта-функцию. Ортонормированность выражается условием

$$\langle\mathbf{k}'_ms'_m,\ldots,\mathbf{k}'_1s'_1|\mathbf{k}_1s_1,\ldots,\mathbf{k}_ns_n\rangle=\delta_{nm}\frac{1}{n!}\sum_P\delta^3(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}'_1)\delta_{s_1s'_1}\delta^3(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}'_2)\delta_{s_2s'_2}\cdots, \tag{10.10.5}$$

где $\sum_P$ означает сумму по всем $n!$ парным комбинациям индексов мод кет-вектора с индексами мод бра-вектора. Скалярное произведение обращается в нуль, если все индексы мод не совпадают, но различные векторы состояний более не являются безразмерными.

[1] Для более полного рассмотрения непрерывного фоковского пространства см., например, (Schweber, 1961, гл. 7).

Как и ранее, мы можем получить фоковские состояния, неоднократно действуя операторами рождения на вакуумное состояние, которое обозначено как $|\text{vac}\rangle$. Например,

$$|\mathbf{k}_1 s_1, \ldots, \mathbf{k}_n s_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_n, s_n) \ldots \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, s_1)|\text{vac}\rangle. \tag{10.10.6}$$

Действие операторов рождения или уничтожения на произвольное фоковское состояние задается соотношениями

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, s)|\mathbf{k}_1 s_1, \ldots, \mathbf{k}_n s_n\rangle = (n+1)^{1/2}|\mathbf{k}s, \mathbf{k}_1 s_1, \ldots, \mathbf{k}_n s_n\rangle, \tag{10.10.7}$$

$$\hat{a}(\mathbf{k}, s)|\mathbf{k}_1 s_1, \ldots, \mathbf{k}_n s_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_i) \times \delta_{ss'}|\mathbf{k}_1 s_1, \ldots, \mathbf{k}_{i-1} s_{i-1}, \mathbf{k}_{i+1} s_{i+1}, \ldots, \mathbf{k}_n s_n\rangle, \tag{10.10.8}$$

которые следует сравнить с выражениями (10.4.5) и (10.4.8), соответственно. Более сложный вид выражения (10.10.8) связан с необходимостью учета возможного совпадения $\mathbf{k}, s$-моды с каждой из множества мод $\mathbf{k}_1 s_1, \ldots, \mathbf{k}_n s_n$. Последнее выражение можно получить, записав фоковское состояние $|\mathbf{k}_1 s_1, \ldots, \mathbf{k}_n s_n\rangle$ в виде (10.10.6) и применив коммутационные соотношения (10.10.4) для последовательного перемещения оператора $\hat{a}(\mathbf{k}, s)$ вправо, а затем воспользоваться результатом $\hat{a}(\mathbf{k}, s)|\text{vac}\rangle = 0$. Если $(\mathbf{k}, s)$ не совпадает ни с одной модой множества $\mathbf{k}_1 s_1, \ldots, \mathbf{k}_n s_n$, то получаем

$$\hat{a}(\mathbf{k}, s)|\mathbf{k}_1 s_1, \ldots, \mathbf{k}_n s_n\rangle = 0. \tag{10.10.9}$$

Оператор числа частиц $\hat{n}_s(D)$, соответствующий числу фотонов с поляризацией s, волновые векторы которых находятся в пределах некоторой области D, определяется выражением

$$\hat{n}_s(D) = \int_D \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, s)\hat{a}(\mathbf{k}, s)\, d^3k. \tag{10.10.10}$$

Он подчиняется коммутационному соотношению

$$[\hat{a}(\mathbf{k}, s), \hat{n}_{s'}(D)] = \hat{a}(\mathbf{k}, s)\delta_{ss'}U(\mathbf{k}, D), \tag{10.10.11}$$

где $U(\mathbf{k}, D)$ равно 1, если $\mathbf{k} \in D$, и нулю — в противном случае. В результате действия оператора $\hat{n}_s(D)$ на фоковское состояние $|\mathbf{k}_1 s_1, \ldots, \mathbf{k}_n s_n\rangle$ получаем то же состояние, умноженное на собственное значение, равное числу фотонов с поляризацией s и волновыми векторами, лежащими в пределах области D.

Непрерывные фоковские состояния образуют полное множество, так что мы можем осуществить разложение единичного оператора обычным образом в виде суммы по всем возможным проекционным операторам на фоковские состояния

$$1 = |\text{vac}\rangle\langle\text{vac}| + \sum_{s1} \int |\mathbf{k}_1 s_1\rangle\langle\mathbf{k}_1 s_1|\, d^3k_1 + \sum_{s1}\sum_{s2} \iint |\mathbf{k}_1 s_1, \mathbf{k}_2 s_2\rangle\langle\mathbf{k}_2 s_2, \mathbf{k}_1 s_1|\, d^3k_1\, d^3k_2 +$$
$$+ \sum_{s1}\sum_{s2}\sum_{s3} \iiint |\mathbf{k}_1 s_1, \mathbf{k}_2 s_2, \mathbf{k}_3 s_3\rangle\langle\mathbf{k}_3 s_3, \mathbf{k}_2 s_2, \mathbf{k}_1 s_1|\, d^3k_1\, d^3k_2\, d^3k_3 + \ldots . \tag{10.10.12}$$

С помощью этого разложения можно получить фоковское представление любого состояния или оператора электромагнитного поля, умножив его справа на выражение (10.10.12). Очевидно, что результирующее выражение в общем случае значительно менее компактно, чем соответствующее дискретное фоковское представление, например, приведенное в выражении (10.4.21). Частично по этой причине в последующих параграфах мы предпочитаем оперировать дискретным множеством мод.

10.11. Некоторые теоремы операторной алгебры

При вычислениях в квантовой электродинамике часто необходимо оперировать определенными комбинациями операторов гильбертова пространства. По этой причине мы в этом параграфе собрали вместе несколько наиболее часто употребляемых операторных теорем[1]. Некоторые из них уже встречались, другие будут использоваться в последующих главах.

[1] Для более полного рассмотрения нескольких операторных теорем см. (Louisell, 1973, гл. 3). При доказательстве многих из приведенных здесь теорем мы следуем его выводам.

10.11.1. Теорема об операторном разложении

Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — два оператора, которые не обязательно коммутируют между собой, и пусть

$$\hat{f}(x) \equiv \exp(x\hat{A})\hat{B}\exp(-x\hat{A}).$$

Разложим $\hat{f}(x)$ в ряд Тейлора по x в окрестности начала координат. Из определения

$$\hat{f}'(x) = \exp(x\hat{A})(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\exp(-x\hat{A}),$$

так что

$$\hat{f}'(0) = [\hat{A}, \hat{B}].$$

Аналогично,

$$\hat{f}''(x) = \exp(x\hat{A})(\hat{A}[\hat{A}, \hat{B}] - [\hat{A}, \hat{B}]\hat{A})\exp(-x\hat{A}),$$

так что

$$\hat{f}''(0) = [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]],$$

и т.д. Теперь запишем ряд Тейлора для $\hat{f}(x)$

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(0) + x\hat{f}'(0) + \frac{x^2}{2!}\hat{f}''(0) + \ldots$$

и подставим выражение для $\hat{f}^{(n)}(0)$, что сразу же приведет нас к следующему разложению:

$$\exp(x\hat{A})\hat{B}\exp(-x\hat{A}) = \hat{B} + x[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{x^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \ldots. \tag{10.11.1}$$

Это так называемая *теорема об операторном разложении*, которая особенно полезна в отношении унитарных преобразований.

В частном случае, когда коммутатор $[\hat{A}, \hat{B}] = c$ — c-число, ряд обрывается после второго члена, и мы получаем

$$\exp(x\hat{A})\hat{B}\exp(-x\hat{A}) = \hat{B} + cx. \tag{10.11.2}$$

В этом случае $\exp(x\hat{A})$ действует на $\hat{B}$ как оператор трансляции. Например, если $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — канонически сопряженные операторы, и $\hat{B} = \hat{q}$, а $\hat{A} = i\hat{p}/\hbar$, то тогда $[\hat{A}, \hat{B}] = 1$, и

$$e^{i\hat{p}x/\hbar}\hat{q}\,e^{-i\hat{p}x/\hbar} = \hat{q} + x. \tag{10.11.3}$$

Другой важный пример выражения (10.11.2) имеет место при $x = 1$ и $\hat{A} = -v\hat{a}^\dagger + v^*\hat{a}$, где $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ — операторы уничтожения и рождения, а v — произвольное комплексное число. Тогда, полагая $\hat{B} = \hat{a}$ или $\hat{B} = \hat{a}^\dagger$, получим $[\hat{A}, \hat{B}] = v$ или $[\hat{A}, \hat{B}] = v^*$, соответственно, и

$$e^{-v\hat{a}^\dagger + v^*\hat{a}}\hat{a}\,e^{v\hat{a}^\dagger - v^*\hat{a}} = \hat{a} + v, \quad e^{-v\hat{a}^\dagger + v^*\hat{a}}\hat{a}^\dagger\,e^{v\hat{a}^\dagger - v^*\hat{a}} = \hat{a}^\dagger + v^*. \tag{10.11.4}$$

Оператор $\exp(v\hat{a}^\dagger - v^*\hat{a})$ называется *оператором смещения* и будет подробно обсуждаться в разд. 11.3.

Если $\hat{A}$ в выражении (10.11.1) представляет собой оператор числа частиц $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, а в качестве $\hat{B}$ выбирается $\hat{a}$ или $\hat{a}^\dagger$, то мы получаем масштабирующее преобразование для $\hat{a}$ или $\hat{a}^\dagger$. Так как $[\hat{n}, \hat{a}] = -\hat{a}$, и все коммутаторы более высоких порядков также дают $\hat{a}$ с чередующимися знаками, из теоремы об операторном разложении следует, что

$$e^{x\hat{n}}\hat{a}\,e^{-x\hat{n}} = \hat{a} - x\hat{a} + \frac{x^2}{2!}\hat{a} - \frac{x^3}{3!}\hat{a} + \ldots = \hat{a}\,e^{-x} \tag{10.11.5}$$

и по аналогии

$$e^{x\hat{n}}\hat{a}^\dagger\,e^{-x\hat{n}} = \hat{a}^\dagger\,e^{x}. \tag{10.11.6}$$

Теорема об операторном разложении применима также для дифференциальных операторов. Например, если $\hat{A} = \frac{1}{2}q^2$ и $\hat{B} = d/dq$, то тогда $[\hat{A}, \hat{B}] = -q$, и из выражения (10.11.2) получаем

$$e^{xq^2/2}\frac{d}{dx}\,e^{-xq^2/2} = \frac{d}{dq} - xq. \tag{10.11.7}$$

В дальнейшем мы еще встретим другие примеры применения теоремы об операторном разложении.

10.11.2. Теоремы о преобразовании подобия

Если $\hat{A}$, $\hat{B}$ — два оператора, которые необязательно коммутируют друг с другом, и n — положительное целое число, то тогда в результате прямого перемножения получаем

$$[\exp(x\hat{A})\hat{B}\exp(-x\hat{A})]^n = \exp(x\hat{A})\hat{B}\exp(-x\hat{A})\exp(x\hat{A})\hat{B}\exp(-x\hat{A})\ldots$$
$$\ldots\exp(x\hat{A})\hat{B}\exp(-x\hat{A}) = \exp(x\hat{A})\hat{B}^n\exp(-x\hat{A}). \quad (10.11.8)$$

Отсюда сразу же следует, что для любой операторной функции $f(\hat{B})$, разложимой в степенной ряд по $\hat{B}$, справедливо

$$\exp(x\hat{A})f(\hat{B})\exp(-x\hat{A}) = f(\exp(x\hat{A})\hat{B}\exp(-x\hat{A})). \quad (10.11.9)$$

Объединяя выражения (10.11.2) и (10.11.9), для произвольной пары операторов, коммутатор которых представляет собой c-число c, получим

$$\exp(x\hat{A})f(\hat{B})\exp(-x\hat{A}) = f(\hat{B}+cx). \quad (10.11.10)$$

Можно обобщить выражения (10.11.8) и (10.11.9), заменив $\exp(x\hat{A})$ некоторым оператором $\hat{G}$, для которого существует обратный оператор. Тогда получим

$$(\hat{G}\hat{B}\hat{G}^{-1})^n = \hat{G}\hat{B}^n\hat{G}^{-1}$$

и

$$\hat{G}f(\hat{B})\hat{G}^{-1} = f(\hat{G}\hat{B}\hat{G}^{-1}). \quad (10.11.11)$$

Объединяя, например, выражения (10.11.7) и (10.11.9), находим

$$e^{xq^2/2}f\left(\frac{d}{dq}\right)e^{-xq^2/2} = f\left(\frac{d}{dq}-qx\right), \quad (10.11.12)$$

и из выражений (10.11.4) и (10.11.9)

$$e^{-v\hat{a}^\dagger+v^*\hat{a}}f(\hat{a},\hat{a}^\dagger)e^{v\hat{a}^\dagger-v^*\hat{a}} = f(\hat{a}+v,\hat{a}^\dagger+v^*). \quad (10.11.13)$$

Также

$$e^{-v\hat{a}^\dagger}f(\hat{a},\hat{a}^\dagger)e^{v\hat{a}^\dagger} = f(\hat{a}+v,\hat{a}^\dagger), \quad e^{v^*\hat{a}}f(\hat{a},\hat{a}^\dagger)e^{-v^*\hat{a}} = f(\hat{a},\hat{a}^\dagger+v^*) \quad (10.11.14)$$

и, объединяя выражения (10.11.5) и (10.11.6) с выражением (10.11.9), получим

$$e^{x\hat{n}}f(\hat{a},\hat{a}^\dagger)e^{-x\hat{n}} = f(\hat{a}e^{-x},\hat{a}^\dagger e^{x}). \quad (10.11.15)$$

10.11.3. Теоремы о производных

Пусть $f(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$ — некоторая функция операторов рождения и уничтожения, разложимая в степенной ряд. Из выражения (10.11.14) при малых v, v^* получим

$$\frac{\partial f(\hat{a},\hat{a}^\dagger)}{\partial\hat{a}} = \lim_{\delta v\to 0}\frac{f(\hat{a}+\delta v,\hat{a}^\dagger)-f(\hat{a},\hat{a}^\dagger)}{\delta v} =$$
$$= \lim_{\delta v\to 0}\frac{(1-\delta v\hat{a}^\dagger)f(\hat{a},\hat{a}^\dagger)(1+\delta v\hat{a}^\dagger)-f(\hat{a},\hat{a}^\dagger)}{\delta v} = -[\hat{a}^\dagger,f(\hat{a},\hat{a}^\dagger)] \quad (10.11.16)$$

и по аналогии

$$\frac{\partial f(\hat{a},\hat{a}^\dagger)}{\partial\hat{a}^\dagger} = [\hat{a},f(\hat{a},\hat{a}^\dagger)]. \quad (10.11.17)$$

В качестве непосредственного применения этих соотношений, рассмотрим случай, когда $f(\hat{a},\hat{a}^\dagger) = \hat{a}^n$ или $f(\hat{a},\hat{a}^\dagger) = \hat{a}^{\dagger n}$, $n = 1,2,\ldots$. Тогда

$$[\hat{a}^\dagger,\hat{a}^n] = -n\hat{a}^{n-1}, \quad [\hat{a},\hat{a}^{\dagger n}] = n\hat{a}^{\dagger n-1}. \quad (10.11.18)$$

А если $f(\hat{a},\hat{a}^\dagger) = e^{v\hat{a}^\dagger}$ или $e^{-v^*\hat{a}}$, то получим

$$[\hat{a},e^{v\hat{a}^\dagger}] = v\,e^{v\hat{a}^\dagger}, \quad [\hat{a}^\dagger,e^{-v^*\hat{a}}] = v^*e^{-v^*\hat{a}}. \quad (10.11.19)$$

10.11.4. Нормальный и антинормальный порядок

Некоторые из вышеприведенных соотношений оказываются время от времени полезными для приведения определенных произведений операторов рождения и уничтожения к нормальному или антинормальному порядку. В ***нормальном порядке*** все операторы рождения $\hat{a}^\dagger$ расположены слева от всех операторов уничтожения $\hat{a}$, а обратная ситуация соответствует ***антинормальному порядку***. Предположим, что функция $f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$ уже нормально упорядочена. Тогда произведение $e^{v^*\hat{a}}f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$ не является нормально упорядоченным. Однако, можно привести его к нормальному порядку, умножая обе части второго выражения в (10.11.14) на $e^{v^*\hat{a}}$ справа и получая выражение

$$e^{v^*\hat{a}}f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)=f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger+v^*)\,e^{v^*\hat{a}}, \tag{10.11.20}$$

правая часть которого теперь нормально упорядочена. По аналогии

$$e^{-v\hat{a}^\dagger}f^{(A)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)=f^{(A)}(\hat{a}+v,\hat{a}^\dagger)\,e^{-v\hat{a}^\dagger}. \tag{10.11.21}$$

Правая часть выражения антинормально упорядочена, если $f^{(A)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$ является антинормально упорядоченной функцией.

Произведение $\hat{a}f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$ также не является нормально упорядоченным. Однако, из (10.11.17) получим

$$\hat{a}f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)=f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)\hat{a}+\frac{\partial}{\partial\hat{a}^\dagger}f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger). \tag{10.11.22}$$

Правая часть этого выражения приводится в нормальный порядок, если $f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$ нормально упорядочена. Противоположное, антинормальное упорядочение достигается, если с помощью выражения (10.11.16) записать для антинормально упорядоченной функции $f^{(A)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$

$$\hat{a}^\dagger f^{(A)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)=f^{(A)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)\hat{a}^\dagger-\frac{\partial}{\partial\hat{a}}f^{(A)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger). \tag{10.11.23}$$

В более общем виде

$$\hat{a}^n f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)=:\left(\hat{a}+\frac{\partial}{\partial\hat{a}^\dagger}\right)^n f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger):,\quad n=1,2,\ldots \tag{10.11.24}$$

где $::$ — символ операции нормального упорядочения оператора без использования коммутационных соотношений. Например $:\hat{a}\hat{a}^\dagger:=\hat{a}^\dagger\hat{a}$. Выражение (10.11.24) можно доказать более просто индуктивным методом, полагая, что оно справедливо для некоторого n. Тогда из выражения (10.11.22) получим

$$\hat{a}^{n+1}f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)=\hat{a}^n\hat{a}f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)=\hat{a}^n:\left(\hat{a}+\frac{\partial}{\partial\hat{a}^\dagger}\right)f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger):$$

и, так как $\hat{a}^n$ умножается справа на нормально упорядоченную функцию, то из (10.11.24) получаем

$$\hat{a}^{n+1}f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)=:\left(\hat{a}+\frac{\partial}{\partial\hat{a}^\dagger}\right)^{n+1}f^{(N)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger):.$$

Таким образом, выражение (10.11.24) остается в силе при замене n на $n+1$ и, так как оно справедливо для $n=1$, то, следовательно, оно справедливо и для всех целых положительных n.

10.11.5. Теорема Кемпбелла — Бейкера — Хаусдорфа.

Пусть $\hat{A}$, $\hat{B}$ — два оператора, которые в общем случае не коммутируют друг с другом, но коммутатор $[\hat{A},\hat{B}]$ коммутирует как с $\hat{A}$, так и с $\hat{B}$, т.е.

$$[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]=0=[\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]]. \tag{10.11.25}$$

Тогда

$$\exp[x(\hat{A}+\hat{B})] = \exp(x\hat{A})\exp(x\hat{B})\exp(-x^2[\hat{A},\hat{B}]/2) = \exp(x\hat{B})\exp(x\hat{A})\exp(x^2[\hat{A},\hat{B}]/2). \qquad (10.11.26)$$

Эта формула известна как *теорема Кемпбелла — Бейкера — Хаусдорфа* (Campbell, 1898; Baker, 1902, 1903; Hausdorff, 1906). Эта теорема может быть доказана следующим образом[1]. Запишем

$$\exp(x\hat{A})\exp(x\hat{B}) \equiv \hat{C}(x)$$

и продифференцируем обе части этого выражения по x. Тогда

$$\frac{d\hat{C}(x)}{dx} = \hat{A}\exp(x\hat{A})\exp(x\hat{B}) + \exp(x\hat{A})\hat{B}\exp(x\hat{B}) = \{\hat{A} + \exp(x\hat{A})\hat{B}\exp(-x\hat{A})\}\hat{C}(x)$$

и с помощью теоремы об операторном разложении (10.11.1) получаем

$$\frac{d\hat{C}(x)}{dx} = \{(\hat{A}+\hat{B}) + x[\hat{A},\hat{B}]\}\hat{C}(x), \qquad (10.11.27)$$

так как коммутаторы более высоких порядков обращаются в нуль. Поскольку $(\hat{A}+\hat{B})$ коммутирует с $[\hat{A},\hat{B}]$, два члена в фигурных скобках можно рассматривать как c-числа и порядок операторов не имеет значения.

Но из определения $\hat{C}(x)$ мы также можем записать

$$\frac{d\hat{C}(x)}{dx} = \exp(x\hat{A})\hat{A}\exp(x\hat{B}) + \exp(x\hat{A})\exp(x\hat{B})\hat{B} =$$
$$= \exp(x\hat{A})\exp(x\hat{B})[\exp(-x\hat{B})\hat{A}\exp(x\hat{A}) + \hat{B}] = \hat{C}(x)\{\hat{A}+\hat{B}+x[\hat{A},\hat{B}]\}. \qquad (10.11.28)$$

Из сравнения выражений (10.11.27) и (10.11.28) следует, что $\hat{C}(x)$ и $\hat{A}+\hat{B}+x[\hat{A},\hat{B}]$ коммутируют. Тогда выражение можно проинтегрировать по x как обычное дифференциальное уравнение и получить

$$\hat{C}(x) = \exp\{x(\hat{A}+\hat{B}) + x^2[\hat{A},\hat{B}]/2\} = \exp[x(\hat{A}+\hat{B})]\exp(x^2[\hat{A},\hat{B}]/2). \qquad (10.11.29)$$

Правильность решения можно подтвердить непосредственным дифференцированием. Подставляя выражение для $\hat{C}(x)$, приходим к выражению (10.11.26).

Задачи

10.1 Используя разложения по модам, покажите, что уравнения движения Гейзенберга для свободных полей $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$ сводятся к двум из уравнений Максвелла.

10.2 Покажите, что компоненты квантованного электрического поля $\hat{E}_i(\mathbf{r}_1,t_1)$ и $\hat{E}_j(\mathbf{r}_2,t_2)$ коммутируют в случае, когда события $(\mathbf{r}_1,t_1)$ и $(\mathbf{r}_2,t_2)$ не связаны световым конусом.

10.3 Покажите, что операторы квантованного поля $\hat{E}_i(\mathbf{r}_1,t_1)$ и $\hat{A}_j(\mathbf{r}_2,t_2)$ в общем случае не коммутируют, даже если события $(\mathbf{r}_1,t_1)$ и $(\mathbf{r}_2,t_2)$ разделены пространственноподобно.

10.4 Вычислите среднеквадратичную дисперсию локально усредненного электрического поля $\hat{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{r},t)$ в вакуумном состоянии при условии, что усредняющая функция имеет вид:

(а) $g(\mathbf{r},t) \propto e^{-r^2/2l^2}\delta(t)$;

(б) $g(\mathbf{r},t) \propto \delta^{(3)}(\mathbf{r})\, e^{-t^2/2T^2}$.

[1] Здесь мы следуем доказательству, предложенному Хэли (Healy, 1982, прил. D).

10.5 Вычислите и сравните между собой вакуумные средние квадратичного локально усредненного электрического поля для случая, когда усредняющая функция $g(\mathbf{r})$ зависит только от положения $\mathbf{r}$ и имеет вид

(а) $g(\mathbf{r}) \propto e^{-r/D}, \quad D > 0,$

(б) $g(\mathbf{r}) \propto \dfrac{1}{(r^2 + D^2)^2}.$

10.6 Используя разложения векторов поля по плоским волнам, покажите, что орбитальный момент количества движения электромагнитного поля относительно точки $\mathbf{r}_0$ отличается от орбитального момента количества движения относительно начала координат на величину $\mathbf{r}_0 \times \sum_{\mathbf{k}s} \hbar \mathbf{k} \hat{n}_{\mathbf{k}s}$.

10.7 Используя фоковское представление, определите, имеет ли оператор рождения для одномодового электромагнитного поля правое собственное состояние.

10.8 Покажите, что в пределе $s \longrightarrow \infty$ фазовые состояния $|\theta\rangle$, определяемые формулой (10.7.20), образуют полное ортонормированное множество.

Глава 11

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

11.1. Введение

При обсуждении классического электромагнитного поля оказалось удобным описывать его при помощи комплексной амплитуды, как в частотной, так и во временно́й области. Комплексное представление удобно, частично, потому, что оно содержит информацию об амплитуде и фазе электромагнитного возмущения, и, частично, вследствие своих аналитических особенностей. Последние оказываются особенно полезными при описании свойств оптической когерентности поля.

Мы увидим, что существует аналогичное квантовое состояние поля, приводящее к интересному представлению — представлению по когерентным состояниям, которое также является удобным для описания оптической когерентности. Это представление приводит к близкому соответствию между квантовыми и классическими корреляционными функциями. Когерентные состояния поля близки, насколько это вообще возможно, к классическим состояниям с определенной комплексной амплитудой. Мы убедимся, что когерентные состояния особенно подходят для описания электромагнитных полей, создаваемых когерентными источниками, такими как лазеры и параметрические осцилляторы. Действительно, оказывается, что поле, создаваемое любым детерминированным источником тока, есть поле в когерентном состоянии. В последующих параграфах мы рассмотрим некоторые свойства когерентных состояний, а затем перейдем к обсуждению представлений, основанных на этих состояниях.

Когерентные состояния были впервые открыты Шредингером (Schrödinger, 1926) при рассмотрении квантового гармонического осциллятора и определялись им как состояния с минимальной неопределенностью. Они считались экзотическими до сравнительно недавнего времени, пока их свойства не изучил более глубоко Клаудер (Klauder, 1960). Позже Бергманн (Bergmann, 1961) ввел функциональное представление квантовых состояний, имеющее много общего с представлением по когерентным состояниям. Осознание того, что когерентные состояния особенно важны и пригодны для квантового описания оптической когерентности, и перенесение их в область квантовой оптики произошли, в значительной степени, благодаря работе Глаубера (Glauber, 1963a, b, 1965), который и ввел термин «когерентное состояние». Многие из обсуждаемых в данной главе свойств этих состояний были впервые рассмотрены Глаубером в цитированных выше статьях[1].

11.2. Фоковское представление когерентных состояний

Знакомясь с когерентными состояниями, удобно сосредоточить наше внимание сначала только на одной $\mathbf{k}, s$-моде электромагнитного поля. Поэтому, исходя из предположения, что мы рассматриваем только одну моду, упростим наши обозначения и отбросим пока индекс моды.

Предположим, что оператор уничтожения $\hat{a}$ имеет правое собственное состояние. Поскольку $\hat{a}$ не является эрмитовым, его собственное значение, в общем случае, будет некоторым комплексным числом v, и мы будем обозначать тем же комплексным числом соответствующее собственное состояние $|v\rangle$. Таким

[1] см. также книги (*Клышко, 1980; *Килин, 1990) — *ред. пер.*

образом, можно записать

$$\hat{a}|v\rangle = v|v\rangle. \tag{11.2.1}$$

Сопряженное состояние $\langle v|$ есть, очевидно, левое собственное состояние оператора рождения $\hat{a}^\dagger$, что видно после применения операции эрмитового сопряжения к уравнению (11.2.1)

$$\langle v|\hat{a}^\dagger = v^*\langle v|. \tag{11.2.2}$$

Введенное таким образом состояние $|v\rangle$ будем называть когерентным состоянием, хотя обоснование этого термина появится лишь позже. Уравнение (11.2.1) и сопряженное ему являются пока совершенно формальными, и мы не имеем доказательства того, что существуют их нетривиальные решения. Однако, нетрудно найти точное представление для $|v\rangle$ в базисе фоковских состояний $|n\rangle$, различающихся числом заполнения n. Поскольку фоковские состояния образуют полное множество [см. формулу (10.4.18)], их можно использовать для представления $|v\rangle$ в виде

$$|v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle, \tag{11.2.3}$$

где c_n — комплексные числа, которые нужно определить. Подставляя разложение (11.2.3) в (11.2.1) и используя формулы (10.4.8) и (10.4.11), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\sqrt{n}|n-1\rangle = v\sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle.$$

Так как $|n\rangle$ являются ортогональными векторами состояния, последнее уравнение удовлетворяется только в том случае, когда равны коэффициенты при соответствующих векторах фоковских состояний в левой и правой частях уравнения. Таким образом, приравнивая коэффициенты при $|n-1\rangle$, получаем

$$c_n = \frac{v}{\sqrt{n}}c_{n-1}. \tag{11.2.4}$$

Многократно используя данное рекуррентное соотношение, связывающее c_n и c_{n-1}, получаем

$$c_n = \frac{v^2}{[n(n-1)]^{1/2}}c_{n-2} = \cdots = \frac{v^n}{\sqrt{n!}}c_0, \tag{11.2.5}$$

так что

$$|v\rangle = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{11.2.6}$$

Множитель $|c_0|$ можно определить из требования нормировки состояния $|v\rangle$ на единицу, что означает

$$\langle v|v\rangle = 1 = |c_0|^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{v^{*n}v^m}{\sqrt{n!m!}}\langle n|m\rangle = |c_0|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|v|^{2n}}{n!} = |c_0|^2\,\mathrm{e}^{|v|^2}, \tag{11.2.7}$$

где использовалось свойство ортогональности (10.4.19) фоковских состояний. Таким образом,

$$|c_0| = \mathrm{e}^{-|v|^2/2} \tag{11.2.8}$$

и, с точностью до унимодулярного множителя,

$$|v\rangle = \mathrm{e}^{-|v|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \tag{11.2.9}$$

$$\langle v| = \mathrm{e}^{-|v|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^{*n}}{\sqrt{n!}}\langle n|. \tag{11.2.10}$$

Интересно отметить, что для каждого комплексного числа v, не равного нулю, когерентное состояние $|v\rangle$ имеет ненулевую проекцию на каждое фоковское состояние $|n\rangle$. Таким образом,

$$\langle n|v\rangle = \mathrm{e}^{-|v|^2/2}\frac{v^n}{\sqrt{n!}}. \tag{11.2.11}$$

Если $v = 0$, то когерентное состояние $|v\rangle$ становится вакуумным состоянием $|\mathrm{vac}\rangle$, которое можно рассматривать и как когерентное, и как фоковское состояние. Квадрат модуля проекции $|v\rangle$ на $|n\rangle$ есть вероятность $p(n)$ того, что n фотонов будут обнаружены в когерентном состоянии $|v\rangle$. Следовательно,

$$p(n) = |\langle n|v\rangle|^2 = \frac{|v|^{2n}}{n!}\mathrm{e}^{-|v|^2}, \tag{11.2.12}$$

что можно рассматривать как распределение Пуассона относительно n с параметром $|v|^2$. Следовательно, среднее число фотонов в случае, когда поле находится в когерентном состоянии $|v\rangle$, равно

$$\sum_{n=0}^{\infty} np(n) = |v|^2 = \langle v|\hat{a}^\dagger\hat{a}|v\rangle, \tag{11.2.13}$$

и оно тем меньше, чем меньше $|v|$. Но как бы мало ни было $|v|$ (исключая случай $v = 0$), существует некоторая ненулевая вероятность $p(n)$ того, что поле содержит некоторое число фотонов n, каким бы большим оно ни было. В некотором смысле, число фотонов является настолько случайной величиной, насколько это возможно в когерентном состоянии, имеющем определенное среднее число $|v|^2$. Отличительной чертой комбинации фоковских состояний (11.2.9) является именно то, что данное состояние не меняется при воздействии оператора уничтожения $\hat{a}$. Возможность неоднократного поглощения фотонов из электромагнитного поля в когерентном состоянии без какого-нибудь изменения этого состояния говорит о возможной связи между когерентным состоянием квантового поля и классическим полем.

С первого взгляда может показаться, что поскольку когерентное состояние не является собственным состоянием какой-нибудь наблюдаемой, оно не соответствует никакой, легко измеримой, характеристике электромагнитного поля. Однако, это не так, ибо фактически большинство измерений оптических полей основаны на фотоэлектрическом детектировании. При этом используются такие инструменты, как фотоумножитель, фотопроводник, фотопластинка и глаз. Эти инструменты работают за счет поглощения фотонов, и поэтому именно оператор поглощения наиболее близко соответствует измерению поля. Отчасти, именно вследствие того, что когерентные состояния являются собственными состояниями оператора поглощения, они оказываются особенно удобными для описания многих свойств поля, которые встречаются в ходе фотоэлектрических измерений.

11.3. Когерентное состояние как смещенное вакуумное состояние. Оператор смещения

Объединяя разложение (11.2.9) с представлением (10.4.16) для фоковского состояния $|n\rangle$, можно записать

$$|v\rangle = \mathrm{e}^{-|v|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^n\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|\mathrm{vac}\rangle = \mathrm{e}^{-|v|^2/2}\mathrm{e}^{v\hat{a}^\dagger}|\mathrm{vac}\rangle. \tag{11.3.1}$$

Это означает, что когерентное состояние $|v\rangle$ можно еще рассматривать как смещенное вакуумное состояние (Glauber, 1963b).

Мы можем выразить это в более симметричном виде, вставив оператор $e^{-v^*\hat{a}}$ между $e^{v\hat{a}^\dagger}$ и $|\mathrm{vac}\rangle$ в формуле (11.3.1). Таким образом,

$$|v\rangle = \mathrm{e}^{-|v|^2/2}\mathrm{e}^{v\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-v^*\hat{a}}|\mathrm{vac}\rangle. \tag{11.3.2}$$

Возможность вставки $e^{-v^*\hat{a}}$ может быть доказана при помощи разложения экспоненциального оператора, что приводит к результату

$$\mathrm{e}^{-v^*\hat{a}}|\mathrm{vac}\rangle = \left[1 - v^*\hat{a} + \frac{(v^*\hat{a})^2}{2!} - \ldots\right]|\mathrm{vac}\rangle = |\mathrm{vac}\rangle. \tag{11.3.3}$$

Теперь воспользуемся операторным тождеством Кемпбелла — Бейкера — Хаусдорфа (см. разд. 10.11) для двух операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$

$$\exp(\hat{A}+\hat{B}) = \exp\hat{A}\exp\hat{B}\exp(-[\hat{A},\hat{B}]/2) \tag{11.3.4а}$$

при условии, что

$$[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = 0 = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]]. \tag{11.3.4б}$$

Условие (11.3.4б), очевидно, удовлетворяется для любой пары операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$, коммутатор которых $[\hat{A},\hat{B}]$ является c-числом. Если теперь положить $\hat{A} = v\hat{a}^\dagger$, $\hat{B} = -v^*\hat{a}$ и воспользоваться коммутационным соотношением (10.3.9), то получим $[\hat{A},\hat{B}] = |v|^2$ и

$$e^{v\hat{a}^\dagger - v^*\hat{a}} = e^{v\hat{a}^\dagger}e^{-v^*\hat{a}}e^{-|v|^2/2}, \tag{11.3.5}$$

что позволяет нам переписать (11.3.2) в более компактном виде:

$$|v\rangle = \hat{D}(v)|0\rangle, \tag{11.3.6}$$

где

$$\hat{D}(v) = e^{v\hat{a}^\dagger - v^*\hat{a}}. \tag{11.3.7}$$

Оператор $\hat{D}(v)$ есть *оператор смещения*, который создает когерентное состояние $|v\rangle$ из вакуумного состояния $|0\rangle = |\mathrm{vac}\rangle$. Анализ выражения (11.3.7) показывает, что $\hat{D}(v)$ представляет собой унитарный оператор, так что

$$\hat{D}^\dagger(v)\hat{D}(v) = 1 = \hat{D}(v)\hat{D}^\dagger(v), \tag{11.3.8}$$

$$\hat{D}^\dagger(v) = \hat{D}(-v). \tag{11.3.9}$$

11.3.1. Свойства оператора смещения

Приведем некоторые принципиальные свойства оператора смещения, полученные Глаубером (Glauber, 1963b):

(а) Унитарное преобразование оператора $\hat{a}$ или $\hat{a}^\dagger$ приводит к комплексному смещению v или v^*, соответственно. Таким образом,

$$\hat{D}^\dagger(v)\hat{a}\hat{D}(v) = \hat{a} + v, \tag{11.3.10}$$

$$\hat{D}^\dagger(v)\hat{a}^\dagger\hat{D}(v) = \hat{a}^\dagger + v^*. \tag{11.3.11}$$

Эти свойства следуют непосредственно из теоремы об операторном разложении (10.7.7), если заметить, что коммутаторы

$$[-v\hat{a}^\dagger + v^*\hat{a},\hat{a}] = v, \quad [-v\hat{a}^\dagger + v^*\hat{a},\hat{a}^\dagger] = v^* \tag{11.3.12}$$

сводятся к c-числам. В этом случае получаем

$$e^{-v\hat{a}^\dagger + v^*\hat{a}}\hat{a}\,e^{v\hat{a}^\dagger - v^*\hat{a}} = \hat{a} + v.$$

(б) Из (11.3.10) и (11.3.11) следует, что для любой функции $f(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$ операторов $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, которую можно разложить в степенной ряд, выполняется соотношение

$$\hat{D}^\dagger(v)f(\hat{a},\hat{a}^\dagger)\hat{D}(v) = f(\hat{a}+v,\hat{a}^\dagger+v^*). \tag{11.3.13}$$

Для доказательства этого разложим функцию $f(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$ в степенной ряд и вставим единичный оператор $\hat{D}(v)\hat{D}^\dagger(v)$ между каждой парой соседних операторов. Таким образом, для типичного элемента $\hat{a}^2\hat{a}^\dagger$ разложения получим

$$\hat{D}^\dagger(v)\hat{a}^2\hat{a}^\dagger\hat{D}(v) = \hat{D}^\dagger(v)\hat{a}\hat{D}(v)\hat{D}^\dagger(v)\hat{a}\hat{D}(v)\hat{D}^\dagger(v)\hat{a}^\dagger\hat{D}(v) = (\hat{a}+v)(\hat{a}+v)(\hat{a}^\dagger+v^*),$$

откуда непосредственно следует (11.3.13).

(в) Произведение двух операторов смещения есть, с точностью до фазового множителя, другой оператор смещения, полное смещение которого равно сумме смещений сомножителей.

Для доказательства этого результата заметим, что из тождества Кемпбелла — Бейкера — Хаусдорфа (11.3.4) следует

$$\hat{D}(v)\hat{D}(v') = e^{v\hat{a}^\dagger - v^*\hat{a}}\, e^{v'\hat{a}^\dagger - v'^*\hat{a}} = e^{(v+v')\hat{a}^\dagger - (v^*+v'^*)\hat{a}}\, e^{(vv'^* - v^*v')/2} = e^{(vv'^* - v^*v')/2}\hat{D}(v+v'). \quad (11.3.14)$$

Поскольку $vv'^* - v^*v'$ является чисто мнимой величиной, множитель перед $\hat{D}(v+v')$ есть просто фазовый множитель. Отсюда непосредственно следует, что результатом действия оператора смещения $\hat{D}(v')$ на когерентное состояние $|v\rangle$ является «смещение» последнего в состояние $|v+v'\rangle$. Так как из (11.3.14) следует, что

$$\hat{D}(v')|v''\rangle = \hat{D}(v')\hat{D}(v'')|\mathrm{vac}\rangle = e^{(v'v''^* - v'^*v'')/2}\hat{D}(v'+v'')|\mathrm{vac}\rangle = e^{(v'v''^* - v'^*v'')/2}|v'+v''\rangle. \quad (11.3.15)$$

(г) Два различных оператора смещения $\hat{D}(v)$ и $\hat{D}(v')$ ортогональны в том смысле, что

$$\mathrm{Tr}\,[\hat{D}(v)\hat{D}^\dagger(v')] = \pi\delta^2(v-v'), \quad (11.3.16)$$

где $\delta^2(v)$ есть сокращенное обозначение для $\delta(\mathrm{Re}\,[v])\delta(\mathrm{Im}\,[v])$.

Для доказательства воспользуемся соотношениями (10.3.5) и (10.3.6) с тем, чтобы выразить $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ через операторы $\hat{q}$, $\hat{p}$. Теперь отметим, что

$$\mathrm{Tr}\,[\hat{D}(v)] = \int \langle q|\exp\left\{\frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}}[(v-v^*)\omega\hat{q} - i(v+v^*)\hat{p}]\right\}|q\rangle\, dq, \quad (11.3.17)$$

где $|q\rangle$ есть собственное состояние оператора $\hat{q}$. Используя тождество Кемпбелла — Бейкера — Хаусдорфа и коммутатор (10.3.1), последнее соотношение можно переписать в виде

$$\mathrm{Tr}\,[\hat{D}(v)] = e^{(v^2 - v^{*2})/4}\int \langle q|\exp\left[\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}(v-v^*)\hat{q}\right]\exp\left[\frac{-i}{(2\hbar\omega)^{1/2}}(v+v^*)\hat{p}\right]|q\rangle\, dq.$$

Вспоминая, что $e^{ix\hat{p}/\hbar}$ является для состояния $|q\rangle$ оператором смещения, так что $e^{ix\hat{p}/\hbar}|q\rangle = |q+x\rangle$, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,[\hat{D}(v)] &= e^{(v^2 - v^{*2})/4}\int \exp\left[\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}(v-v^*)q\right]\langle q|q - (v+v^*)\left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2}\rangle\, dq = \\ &= e^{(v^2 - v^{*2})/4}\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}\delta(\mathrm{Re}\,[v])\int \exp\left[\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}(v-v^*)q\right] dq = \\ &= e^{(v^2 - v^{*2})/4}\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}\delta(\mathrm{Re}\,[v])2\pi\left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2}\delta(\mathrm{Im}\,[v]) = \pi\delta^2(v). \quad (11.3.18)\end{aligned}$$

Отсюда, с учетом закона умножения (11.3.14), следует формула (11.3.16). Тот же результат можно доказать более элегантно с помощью свойства полноты когерентных состояний, которое будет выведено в разд. 11.6.

11.4. q-представление когерентных состояний

Для того, чтобы найти q-представление (называемое также координатным представлением, или шредингеровской волновой функцией) $\psi_v(q)$ когерентного состояния $|v\rangle$, необходимо вычислить матричный элемент $\langle q|v\rangle$, где $|q\rangle$ — собственное состояние оператора $\hat{q}$. Из (11.2.1) получим

$$\langle q|\hat{a}|v\rangle = v\langle q|v\rangle \equiv v\psi_v(q). \quad (11.4.1)$$

Выражая $\hat{a}$ через $\hat{q}$ и $\hat{p}$ по формуле (10.3.5) и используя дифференциальный вид для $\hat{p}$, из (11.4.1) получаем

$$\frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}}\left[q\omega+\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right]\psi_v(q)=v\psi_v(q), \tag{11.4.2}$$

что является дифференциальным уравнением первого порядка относительно $\psi_v(q)$. Общее решение можно записать в виде

$$\psi_v(q)=A\exp\left\{\frac{-\omega}{2\hbar}\left[q-\left(\frac{2\hbar}{\omega}\right)^{1/2}v\right]^2\right\}, \tag{11.4.3}$$

где A — нормировочный множитель, выбираемый так, чтобы выполнялось условие

$$\int|\psi_v(q)|^2\,dq=1. \tag{11.4.4}$$

Видно, что $\psi_v(q)$ имеет вид гауссовской функции от q, пик которой смещен на комплексное расстояние $(2\hbar/\omega)^{1/2}v$ от начала системы координат. Поскольку при $v=0$ получается вакуумное состояние, опять видим, что когерентное состояние возникает в результате смещения вакуумного состояния. Условие нормировки (11.4.4) дает

$$|A|=\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\mathrm{e}^{(\operatorname{Im}v)^2},$$

так что, с точностью до фазового множителя,

$$\psi_v(q)=\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\mathrm{e}^{(\operatorname{Im}v)^2}\exp\left\{\frac{-\omega}{2\hbar}\left[q-\left(\frac{2\hbar}{\omega}\right)^{1/2}v\right]^2\right\}. \tag{11.4.5}$$

В дальнейшем мы не будем использовать данное представление когерентного состояния.

11.5. Эволюция во времени и соотношения неопределенностей

В картине Шредингера любое состояние $|\psi(t)\rangle$ эволюционирует во времени по закону

$$|\psi(t)\rangle=\exp(-i\hat{H}t/\hbar)|\psi(0)\rangle,$$

где $\exp(-i\hat{H}t/\hbar)$ — оператор эволюции во времени. Если $|\psi(0)\rangle$ является собственным состоянием гамильтониана $\hat{H}$, то оператор эволюции можно заменить простым фазовым множителем, и состояние квантовой системы не будет меняться. В общем случае, однако, система эволюционирует со временем в различные состояния. Пусть начальное состояние $|\psi(0)\rangle$ представляет собой когерентное состояние $|v\rangle$. Поскольку последнее не является собственным состоянием гамильтониана $\hat{H}$, следует ожидать, что система перейдет со временем в другие состояния. Если воспользоваться явным выражением для гамильтониана $\hat{H}$ (10.3.15) и ограничиться, как и прежде, рассмотрением только одной моды поля, так что $\hat{H}=\hbar\omega(\hat{n}+\frac{1}{2})$, то получим

$$|\psi(t)\rangle=\mathrm{e}^{-i\omega t/2}\,\mathrm{e}^{-i\omega t\hat{n}}|v\rangle, \tag{11.5.1}$$

где ω — частота моды. Временна́я эволюция легче всего рассчитывается с использованием фоковского представления (11.2.9) для $|v\rangle$, и мы находим, что

$$|\psi(t)\rangle=\mathrm{e}^{-i\omega t/2}\,\mathrm{e}^{-|v|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^n}{\sqrt{n!}}\,\mathrm{e}^{-i\omega t\hat{n}}|n\rangle=\mathrm{e}^{-i\omega t/2}\,\mathrm{e}^{-|v|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(v\,\mathrm{e}^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle=\mathrm{e}^{-i\omega t/2}|v\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\rangle. \tag{11.5.2}$$

Данное состояние, с точностью до фазового множителя $e^{-i\omega t/2}$, представляет собой другое когерентное состояние, соответствующее комплексному собственному значению $v\,e^{-i\omega t}$. Таким образом, когерентное состояние непрерывно и периодически переходит со временем в другие когерентные состояния, так что цикл повторяется с интервалом $2\pi/\omega$.

Рассмотрим теперь зависимость от времени средних значений некоторых простых полевых операторов в случае, когда поле находится в когерентном состоянии. Здесь обычно удобнее работать в картине Гейзенберга. Таким образом, с учетом формулы (10.3.12) и определяющего соотношения (11.2.1), которое, как мы будем полагать, справедливо в момент времени $t = 0$, найдем

$$\langle v|\hat{a}(t)|v\rangle = \langle v|\hat{a}(0)|v\rangle\, e^{-i\omega t} = v\, e^{-i\omega t}. \tag{11.5.3}$$

Этот результат, конечно, можно было получить, анализируя выражение (11.5.2). Аналогичным образом находим среднее значение оператора рождения $\hat{a}^\dagger(t)$

$$\langle v|\hat{a}^\dagger(t)|v\rangle = \langle v|\hat{a}^\dagger(0)|v\rangle\, e^{i\omega t} = v^*\, e^{i\omega t}. \tag{11.5.4}$$

Объединяя два этих результата и используя выражения (10.3.7) и (10.3.8) для канонически сопряженных операторов $\hat{q}(t)$ и $\hat{p}(t)$, можно также записать средние значения операторов $\hat{q}(t)$ и $\hat{p}(t)$ в когерентном состоянии. Стоит отметить, что эти операторы являются аналогами канонически сопряженных переменных $\hat{A}(t)$ и $-\varepsilon_0\hat{E}(t)$ для одномодового электромагнитного поля. Таким образом, находим

$$\langle v|\hat{q}(t)|v\rangle = \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2}[v\,e^{-i\omega t} + v^*\,e^{i\omega t}] = \left(\frac{2\hbar}{\omega}\right)^{1/2}|v|\cos(\omega t - \arg v), \tag{11.5.5}$$

$$\langle v|\hat{p}(t)|v\rangle = i\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2}[-v\,e^{-i\omega t} + v^*\,e^{i\omega t}] = -(2\hbar\omega)^{1/2}|v|\sin(\omega t - \arg v). \tag{11.5.6}$$

Эти результаты напоминают движение классического гармонического осциллятора частоты ω, имеющего точно определенную комплексную амплитуду v. Более того, в силу соотношений (11.2.1) и (11.2.2) дисперсии $\langle v|(\Delta\hat{a}(t))^2|v\rangle$ и $\langle v|(\Delta\hat{a}^\dagger(t))^2|v\rangle$ обращаются в нуль в когерентном состоянии. Таким образом, кажется, что поле, находящееся в когерентном состоянии $|v\rangle$, ведет себя, как классическая волна с определенной амплитудой и фазой, и что $\hat{a}$ является оператором комплексной амплитуды.

11.5.1. Произведение канонических неопределенностей

Однако, классическая аналогия не может быть распространена слишком далеко, поскольку квантовый осциллятор в когерентном состоянии имеет некоторые свойства, которые совсем не похожи на классические. Если комплексная амплитуда классического осциллятора имеет определенное значение $v\,e^{-i\omega t}$ в любой момент времени t, то его действительная амплитуда также точно определена и равна $|v|\cos(\omega t - \arg v)$. Но, несмотря на то, что комплексная амплитуда $\hat{a}$ квантового осциллятора в когерентном состоянии $|v\rangle$ имеет определенное значение $v\,e^{-i\omega t}$, для действительной амплитуды $\hat{q}(t) = (\hbar/2\omega)^{1/2}(\hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t))$ это не верно, так как состояние $|v\rangle$ не является собственным состоянием оператора $\hat{q}$. Используя правило коммутации (10.3.9), из (10.3.7) легко находим, что

$$\hat{q}^2(t) = \frac{\hbar}{2\omega}[\hat{a}^2(t) + \hat{a}^{\dagger 2}(t) + \hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t) + \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)] = \frac{\hbar}{2\omega}[\hat{a}^2(t) + \hat{a}^{\dagger 2}(t) + 2\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) + 1], \tag{11.5.7}$$

так что

$$\langle v|\hat{q}^2(t)|v\rangle = \frac{\hbar}{2\omega}[v^2\,e^{-2i\omega t} + v^{*2}\,e^{2i\omega t} + 2v^*v + 1]. \tag{11.5.8}$$

Из (11.5.8) и (11.5.5) получаем для дисперсии переменной $\hat{q}(t)$ следующее выражение:

$$\langle v|(\Delta\hat{q}(t))^2|v\rangle = \langle v|\hat{q}^2(t)|v\rangle - \langle v|\hat{q}(t)|v\rangle^2 = \frac{\hbar}{2\omega}. \tag{11.5.9}$$

Подобным же образом для канонически сопряженной переменной $\hat{p}(t) = i(\hbar\omega/2)^{1/2}[\hat{a}^\dagger(t) - \hat{a}(t)]$ можно показать, что

$$\langle v|(\Delta\hat{p}(t))^2|v\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}. \tag{11.5.10}$$

Следовательно, действительная (эрмитовая) и мнимая (антиэрмитовая) части комплексной амплитуды $\hat{a}$ не имеют точно определенных значений в когерентном состоянии, несмотря на то, что сама комплексная амплитуда точно определена. Однако, эрмитовые канонические переменные $\hat{q}(t)$ и $\hat{p}(t)$, соответствующие в одномодовой задаче векторному потенциалу и напряженности электрического поля, являются точно определенными в той мере, в какой это позволяет квантовая механика, ибо произведение неопределенностей равно

$$\langle v|(\Delta\hat{q}(t))^2|v\rangle^{1/2}\langle v|(\Delta\hat{p}(t))^2|v\rangle^{1/2} = \frac{1}{2}\hbar, \tag{11.5.11}$$

что является наименьшим возможным значением. Таким образом, действительное поле ведет себя почти как классическое поле в той степени, в какой это возможно, когда поле находится в когерентном состоянии. Стоит отметить, что хотя дисперсии обеих канонических переменных не равны нулю, они не зависят от собственного значения v, характеризующего когерентное состояние. Какова бы ни была величина $\langle(\Delta\hat{q}(t))^2\rangle$ по сравнению с $\langle\hat{q}(t)\rangle^2$, последняя, очевидно, зависит от амплитуды $|v|$, что видно из формул (11.5.5) и (11.5.9). Отклонение от классического поведения, следовательно, незначительно, когда $|v| \gg 1$, но довольно существенно, когда $|v| \lesssim 1$, особенно для вакуумного состояния.

Стоит подчеркнуть, что эти свойства когерентных состояний, а именно то, что эти состояния соответствуют классическим состояниям с точно определенной амплитудой и что действительная амплитуда точно определена настолько, насколько это возможно, имеют силу независимо от среднего числа имеющихся фотонов. Когерентные состояния не нужно связывать с классическим пределом $n \to \infty$ электромагнитного поля, хотя, как мы увидим в разд. 11.12, они связаны с классическими источниками тока. Состояние поля, которое создается одномодовым лазером, работающим существенно выше своего порога, также близко к когерентному, какой бы ослабитель ни устанавливался перед источником.

11.5.2. Более общие состояния с минимальной неопределенностью

Нетрудно показать, что когерентные состояния являются представителями более широкого класса состояний, имеющих минимальное произведение дисперсий переменных $\hat{q}$ и $\hat{p}$. Для демонстрации этого, введем унитарный оператор (Stoler, 1970, 1971; Yuen, 1976)

$$\hat{U}(\theta) = \mathrm{e}^{\theta(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})/2}, \tag{11.5.12}$$

где θ — некоторое действительное число, и воздействуем им на когерентное состояние $|v\rangle$. В результате получим состояние

$$|v,\theta\rangle \equiv \hat{U}(\theta)|v\rangle, \tag{11.5.13}$$

которое также является состоянием с минимальным произведением неопределенностей.

Вычислим моменты величины

$$\hat{q} \equiv \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

в состоянии $|v,\theta\rangle$. Из (11.5.13) получим

$$\langle v,\theta|\hat{a}|v,\theta\rangle = \langle v|\hat{U}^\dagger(\theta)\hat{a}\hat{U}(\theta)|v\rangle. \tag{11.5.14}$$

Теперь, используя теорему об операторном разложении, находим

$$\hat{U}^\dagger(\theta)\hat{a}\hat{U}(\theta) = \mathrm{e}^{-\theta(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})/2}\hat{a}\,\mathrm{e}^{\theta(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})/2} =$$
$$= \hat{a}\left(1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots\right) - \hat{a}^\dagger\left(\theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots\right) = \hat{a}\,\mathrm{ch}\,\theta - \hat{a}^\dagger\,\mathrm{sh}\,\theta \tag{11.5.15}$$

и после прибавления сопряженного выражения получаем

$$\hat{U}^\dagger(\theta)(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\hat{U}(\theta) = (\hat{a}+\hat{a}^\dagger)(\operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta) = (\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\,\mathrm{e}^{-\theta}. \tag{11.5.16}$$

Следовательно,

$$\langle v,\theta|\hat{q}|v,\theta\rangle = \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2}\langle v|\hat{U}^\dagger(\theta)(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\hat{U}(\theta)|v\rangle = \mathrm{e}^{-\theta}\langle v|\hat{q}|v\rangle. \tag{11.5.17}$$

Аналогичным образом из (11.5.16) для второго момента получаем

$$\langle v,\theta|\hat{q}^2|v,\theta\rangle = \frac{\hbar}{2\omega}\langle v|\hat{U}^\dagger(\theta)(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\hat{U}(\theta)\hat{U}^\dagger(\theta)(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\hat{U}(\theta)|v\rangle = \mathrm{e}^{-2\theta}\langle v|\hat{q}^2|v\rangle, \tag{11.5.18}$$

так что

$$\langle v,\theta|(\Delta\hat{q})^2|v,\theta\rangle = \mathrm{e}^{-2\theta}\langle v|(\Delta\hat{q})^2|v\rangle. \tag{11.5.19}$$

Таким же образом для канонически сопряженной переменной $\hat{p} = i(\hbar\omega/2)^{1/2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ можно показать, что

$$\langle v,\theta|(\Delta\hat{p})^2|v,\theta\rangle = \mathrm{e}^{2\theta}\langle v|(\Delta\hat{p})^2|v\rangle. \tag{11.5.20}$$

Из (11.5.19) и (11.5.20) следует, что произведение неопределенностей равно

$$\langle v,\theta|(\Delta\hat{q})^2|v,\theta\rangle^{1/2}\langle v,\theta|(\Delta\hat{p})^2|v,\theta\rangle^{1/2} = \langle v|(\Delta\hat{q})^2|v\rangle^{1/2}\langle v|(\Delta\hat{p})^2|v\rangle^{1/2} = \frac{1}{2}\hbar. \tag{11.5.21}$$

Следовательно, состояния $|v,\theta\rangle$ также являются состояниями с минимальной неопределенностью. Однако, в отличие от случая когерентных состояний, канонические дисперсии являются теперь функциями состояния.

Как показывают формулы (11.5.19) и (11.5.20), дисперсия одной из переменных $\hat{q}$ или $\hat{p}$ может быть сделана произвольно малой подходящим выбором θ за счет соответствующего увеличения дисперсии второй канонической переменной. Такие состояния являются примером так называемых «сжатых состояний» или «двухфотонных когерентных состояний», которые будут подробно рассматриваться в гл. 21.

11.6. Когерентные состояния как базис. Неортогональность и переполненность

До настоящего момента мы рассматривали свойства когерентных состояний, представляя их через другие, более знакомые состояния. Но одной из главных причин важности когерентных состояний в квантовой оптике является то, что они сами образуют базис для представления произвольных квантовых состояний. Поскольку когерентные состояния являются собственными состояниями неэрмитового оператора, представление по когерентным состояниям имеет некоторые необычные свойства, которые мы сейчас и изучим.

Рассмотрим скалярное произведение двух когерентных состояний $|v_1\rangle$ и $|v_2\rangle$. С учетом разложений (11.2.9) и (11.2.10) по фоковским состояниям получаем

$$\langle v_2|v_1\rangle = \mathrm{e}^{-|v_1|^2/2}\,\mathrm{e}^{-|v_2|^2/2}\sum_n\sum_m \frac{v_2^{*n}v_1^m}{\sqrt{n!\,m!}}\langle n|m\rangle = \mathrm{e}^{-|v_1|^2/2}\,\mathrm{e}^{-|v_2|^2/2}\sum_n \frac{(v_2^*v_1)^n}{n!} =$$

$$= \mathrm{e}^{-(|v_1|^2+|v_2|^2-2v_2^*v_1)/2} = \mathrm{e}^{-|v_1-v_2|^2/2}\,\mathrm{e}^{(v_2^*v_1-v_2v_1^*)/2}, \tag{11.6.1}$$

где последнее выражение имеет вид произведения действительного числа $\mathrm{e}^{-|v_1-v_2|^2/2}$ и унимодулярного фазового множителя. Очевидно, что $\mathrm{e}^{-|v_1-v_2|^2/2}$ есть модуль величины $\langle v_2|v_1\rangle$, т.е.

$$|\langle v_2|v_1\rangle|^2 = \mathrm{e}^{-|v_1-v_2|^2}. \tag{11.6.2}$$

Поскольку не существует значений v_1 и v_2, при которых это выражение обращается в нуль, два когерентных состояния никогда не будут ортогональными, в отличие от более привычной ситуации с собственными

векторами эрмитовых операторов. Если $v_1 = v_2$, то правая часть выражения (11.6.1) равна единице, что согласуется с условием нормировки.

Хотя скалярное произведение двух когерентных состояний $|v_1\rangle$ и $|v_2\rangle$ никогда не обращается в нуль, оно может оказаться очень малым даже при довольно небольших разностях между комплексными числами v_1 и v_2. В качестве примера рассмотрим два когерентных состояния с собственными значениями $v_1 = 23 + 20i$ и $v_2 = 21 + 23i$. С точки зрения статистики фотонов два состояния $|v_1\rangle$ и $|v_2\rangle$ довольно близки, так как средние числа фотонов и моменты числа фотонов низшего порядка почти одинаковы. Тем не менее, модуль скалярного произведения $|\langle v_2|v_1\rangle| \approx 10^{-3}$, так что состояния почти ортогональны. Это есть отражение того факта, что при больших v_1 и v_2 функция $\mathrm{e}^{-|v_1-v_2|^2/2}$ становится похожей на $\delta^2(v_1 - v_2)$-функцию.

Несмотря на свою неортогональность, когерентные состояния накрывают полное гильбертово пространство векторов состояний и образуют удобный базис для представления других состояний. Чтобы это показать, осуществим разложение единичного оператора 1 по проекционным операторам на когерентные состояния. Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int |v\rangle\langle v|\, d^2v,$$

где интегрирование производится по всей комплексной v-плоскости. Символ d^2v есть сокращенное обозначение для $d(\mathrm{Re}\, v)\, d(\mathrm{Im}\, v)$. Записывая $v = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, так что $d^2v = r\, dr\, d\theta$, и используя разложения (11.2.9) и (11.2.10), получаем

$$\frac{1}{\pi}\int |v\rangle\langle v|\, d^2v = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\frac{r^{n+m+1}}{\sqrt{n!\,m!}}\,\mathrm{e}^{i(n-m)\theta}|n\rangle\langle m|. \tag{11.6.3}$$

Если формально поменять местами суммирование и интегрирование[1] и выполнить интегрирование по θ, то получим множитель $2\pi\delta_{mn}$, который сводит двойное суммирование к одинарному. В результате найдем, что

$$\frac{1}{\pi}\int |v\rangle\langle v|\, d^2v = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}|n\rangle\langle n|\int_0^\infty 2\,\mathrm{e}^{-r^2}r^{2n+1}\, dr = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1 \tag{11.6.4}$$

в силу полноты множества фоковских состояний. Следовательно, мы показали, что когерентные состояния также удовлетворяют условию полноты, так что они образуют базис для представления других состояний.

Таким образом, если $|\psi\rangle$ представляет собой некоторое произвольное состояние, то после умножения его слева на единичный оператор в виде (11.6.4), получаем

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int |v\rangle\langle v|\psi\rangle\, d^2v. \tag{11.6.5}$$

Это есть разложение $|\psi\rangle$ по когерентным состояниям $|v\rangle$ с амплитудами $(1/\pi)\langle v|\psi\rangle$. Далее, как правило, будем считать, что по умолчанию интегрирование производится по всей комплексной v-плоскости.

11.6.1. Линейная зависимость когерентных состояний

Эта особенность, которая возникает при использовании неортогонального, но полного (в действительности, переполненного) множества состояний в качестве базиса, становится очевидной, если отождествить $|\psi\rangle$ в выражении (11.6.5) с одним из когерентных состояний, скажем $|v'\rangle$. Тогда с учетом (11.6.1) получим

$$|v'\rangle = \frac{1}{\pi}\int |v\rangle\langle v|v'\rangle\, d^2v = \frac{1}{\pi}\int |v\rangle\,\mathrm{e}^{-|v-v'|^2/2}\,\mathrm{e}^{(v^*v'-vv'^*)/2}\, d^2v. \tag{11.6.6}$$

Таким образом, получаем разложение одного из когерентных состояний по всем когерентным состояниям. Такое разложение, конечно, было бы в принципе невозможным, если бы состояния были ортогональными.

[1] Более строгое доказательство и подробное обсуждение приведены в работе (Klauder, 1960) и в книге (Klauder and Sudarshan, 1968, разд. 8).

Из выражения (11.6.6) следует, что различные когерентные состояния не являются линейно независимыми. Более того, можно формально использовать это выражение для разложения нуля в виде

$$\int |v\rangle \left[\frac{1}{\pi}\,\mathrm{e}^{-|v-v'|^2/2}\,\mathrm{e}^{(v^*v'-vv'^*)/2} - \delta^2(v-v')\right] d^2v = 0. \tag{11.6.7}$$

Поскольку v' — произвольное комплексное число, существует бесконечно много различных интегральных представлений нуля через когерентные состояния. Любой из этих интегралов можно добавить в правую часть формулы (11.6.5), не нарушая ее справедливости. Следовательно, очевидно, что разложение типа (11.6.5) по когерентным состояниям не однозначно. Более того, разложение (11.6.7) не является единственно возможным разложением нуля. Рассмотрим, например, интеграл $\int v^n|v\rangle\, d^2v$, где $n = 1, 2, 3$ и т.д. Разлагая когерентное состояние $|v\rangle$ по фоковским состояниям, переходя к полярным координатам $v = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ и интегрируя по θ, сразу видим, что интеграл обращается в нуль. Следовательно, для произвольной функции $f(|v|)$

$$\int f(|v|)v^n|v\rangle\, d^2v = 0, \quad \text{для } n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{11.6.8}$$

если интеграл существует. Это опять иллюстрирует линейную зависимость когерентных состояний.

11.6.2. Переполненность

Множество когерентных состояний обычно называют *переполненным* в том смысле, что эти состояния образуют базис и, кроме того, выражаются друг через друга. Необходимо подчеркнуть, однако, что данное множество состояний нельзя сделать точно полным, удаляя из него некоторое счетное множество когерентных состояний (Cahill, 1965). Да это и не требуется, поскольку, как мы увидим, именно переполненность является причиной некоторых наиболее интересных и важных свойств представления по когерентным состояниям.

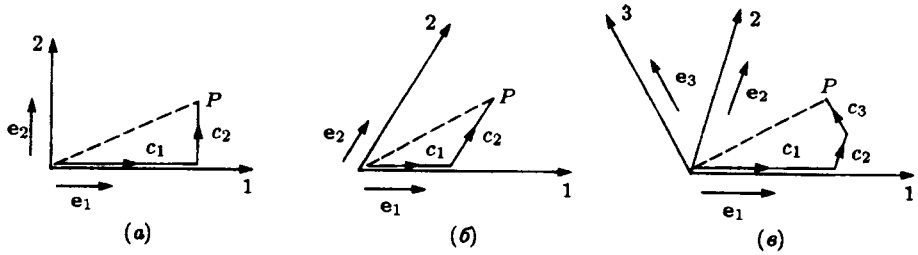


Рис. 11.1. Примеры представления положения точки P на плоскости составляющими радиус-вектора: *а* — базис является полным и ортогональным; *б* — базис является полным и неортогональным; *в* — базис является переполненным и неортогональным

Неортогональность, переполненность множества когерентных состояний и неоднозначность данного представления иногда при первом ознакомлении являются источником путаницы, так что может оказаться полезной простая геометрическая аналогия. Рассмотрим задачу представления радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки P на плоскости (рис. 11.1). Один из способов достижения этого состоит в том, что вводится пара ортогональных осей, как показано на рис. 11.1*а*, а вектор $\mathbf{r}$ разлагается по единичным векторам $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, направленным вдоль этих осей. В этом случае

$$\mathbf{r} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2,$$

где пара чисел (c_1, c_2) является представителем точки P. Данное представление основано на полностью ортогональном, линейно независимом множестве векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и является однозначным.

С другой стороны, можно использовать систему координат, показанную на рис. 11.1*б*, в которой оси не являются ортогональными. Мы опять получаем представление, основанное на паре чисел (c_1, c_2), так что

$$\mathbf{r} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2,$$

где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — единичные векторы, направленные вдоль осей. На этот раз множество базисных векторов не ортогонально, однако эти векторы по-прежнему линейно независимы, а их множество по-прежнему полное, ибо любой вектор можно представить данным способом. Более того, данное представление опять является однозначным.

С другой стороны, можно выбрать координатную систему с тремя осями, показанную на рис. 11.1*в*. На этот раз положение точки P представляется тройкой чисел (c_1, c_2, c_3), так что

$$\mathbf{r} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3,$$

где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — единичные векторы, направленные вдоль соответствующих осей. Данное представление основано на неортогональном и переполненном множестве базисных векторов, и один из них можно представить в виде некоторой комбинации других. Базисные вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ не являются больше линейно независимыми, поскольку условие

$$l_1\mathbf{e}_1 + l_2\mathbf{e}_1 + l_3\mathbf{e}_1 = 0$$

не означает, что $l_1 = l_2 = l_3 = 0$. Более того, вследствие линейной зависимости и переполненности представление точки P посредством тройки чисел (c_1, c_2, c_3) больше не является однозначным, что ясно видно из рисунка. Конечно, в данном примере базис является конечным, и переполненность может быть устранена удалением одного из базисных векторов. В случае бесконечного (вдвойне) базиса, образованного множеством когерентных состояний, ситуация не такая простая.

Имея дело с неортогональным множеством состояний, следует соблюдать некоторую осторожность при интерпретации проекционных операторов или скалярных произведений, типа $\langle v|\psi\rangle$, между некоторым состоянием $|\psi\rangle$ и когерентным состоянием $|v\rangle$. Напомним, что соответствующее скалярное произведение $\langle n|\psi\rangle$ между состоянием $|\psi\rangle$ и фоковским состоянием $|n\rangle$ рассматривают обычно, как амплитуду вероятности состояния $|\psi\rangle$ в n-представлении, ибо $|\langle n|\psi\rangle|^2$ есть вероятность обнаружения n фотонов. Поскольку фоковские состояния ортогональны, вероятности $|\langle n|\psi\rangle|^2$ являются взаимоисключающими для различных n и, кроме того, нормированными на единицу, так что

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\langle n|\psi\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\langle\psi|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

С другой стороны, неортогональность когерентных состояний $|v\rangle$ проявляется в том, что квадраты модулей скалярных произведений $|\langle v|\psi\rangle|^2$ не являются взаимоисключающими вероятностями (или, точнее, плотностями вероятностей) и их интеграл не равен единице. Вместо этого получаем

$$\int|\langle v|\psi\rangle|^2\,d^2v = \langle\psi|\int|v\rangle\langle v|\,d^2v|\psi\rangle = \pi \tag{11.6.9}$$

в силу (11.6.4). Если $|\langle v|\psi\rangle|^2$ интерпретируется, как плотность вероятности обнаружить комплексную амплитуду v, то дифференциальные вероятности, очевидно, не являются взаимоисключающими, и правая часть выражения (11.6.9) дает представление о степени перекрытия. Однако, как мы уже видели, неортогональность существенна, главным образом, для соседних когерентных состояний. Два состояния, отвечающие двум существенно различным собственным значениям, почти ортогональны. Аналогично, невзаимоисключаемость плотностей вероятности $|\langle v|\psi\rangle|^2$ относится, главным образом, к соседним когерентным состояниям, и если v_1 и v_2 существенно различны, то $|\langle v_1|\psi\rangle|^2\,d^2v/\pi$ и $|\langle v_2|\psi\rangle|^2\,d^2v/\pi$ играют роль почти взаимоисключающих дифференциальных вероятностей.

11.6.3. Представление операторов по когерентным состояниям

Соотношение полноты (11.6.4) можно также использовать для представления операторов по когерентным состояниям. Пусть $\hat{A}$ — некоторый произвольный оператор. Умножая его слева и справа на единичный оператор (11.6.4), получаем

$$\hat{A} = \frac{1}{\pi^2}\iint\langle v'|\hat{A}|v''\rangle|v'\rangle\langle v''|\,d^2v'\,d^2v'', \tag{11.6.10}$$

что является интегральным представлением оператора $\hat{A}$ по когерентным состояниям. По тем же, что и раньше причинам, это представление не является однозначным, ибо можно добавить произвольный интеграл вида

$$\iint f(|v'|)g(|v''|)v'^n v''^{*m}|v'\rangle\langle v''|\,d^2v'\,d^2v'', \quad n,m=1,2,3,\ldots,$$

в правую часть формулы (11.6.10) без нарушения ее справедливости.

11.6.4. Вычисление матричных элементов нормально упорядоченных операторов

Задача вычисления матричных элементов $\langle v'|\hat{A}|v''\rangle$, появляющихся в (11.6.10), становится особенно простой в случае операторов, для которых когерентные состояния являются правыми или левыми собственными состояниями. Например, в силу (11.2.1) и (11.2.2), сразу получаем

$$\langle v'|\hat{a}|v''\rangle = v''\langle v'|v''\rangle = v''\,\mathrm{e}^{-|v'-v''|^2/2}\,\mathrm{e}^{(v'^*v''-v'v''^*)/2}, \tag{11.6.11}$$

$$\langle v'|\hat{a}^\dagger|v''\rangle = v'^*\langle v'|v''\rangle = v'^*\,\mathrm{e}^{-|v'-v''|^2/2}\,\mathrm{e}^{(v'^*v''-v'v''^*)/2}, \tag{11.6.12}$$

$$\langle v'|\hat{n}|v''\rangle = \langle v'|\hat{a}^\dagger\hat{a}|v''\rangle = v'^*v''\,\mathrm{e}^{-|v'-v''|^2/2}\,\mathrm{e}^{(v'^*v''-v'v''^*)/2}. \tag{11.6.13}$$

Из этих результатов ясно видно, что вычисление матричных элементов становится очень простым всякий раз, когда оператор $\hat{A}$ выражается через сумму произведений операторов рождения и уничтожения, в которых операторы рождения всегда находятся слева от операторов уничтожения. Оператор, упорядоченный таким образом, называют *нормально упорядоченным*. Примерами нормально упорядоченных операторов являются $\hat{n}$, $\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^3$, $\hat{n}+2\hat{a}^{\dagger 2}$, $\hat{a}^\dagger\hat{n}$, $\sum_{n=0}^\infty \hat{a}^{\dagger n}\hat{a}^n x^n/n!$. Мы убедимся, что нормально упорядоченные операторы естественно возникают при описании фотоэлектрических измерений электромагнитного поля и, таким образом, являются особенно важными в квантовой оптике. Если $f^{(\mathrm{N})}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$ — произвольная функция операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$, которая нормально упорядочена и представляется в виде степенного ряда, то, используя те же аргументы, что и при выводе выражений с (11.6.11) по (11.6.13), получаем

$$\langle v'|f^{(\mathrm{N})}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)|v''\rangle = f^{(\mathrm{N})}(v'',v'^*)\,\mathrm{e}^{-|v'-v''|^2/2}\,\mathrm{e}^{v'^*v''-v'v''^*/2}. \tag{11.6.14}$$

В частности, если $v'=v''$, то

$$\langle v|f^{(\mathrm{N})}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)|v\rangle = f^{(\mathrm{N})}(v,v^*), \tag{11.6.15}$$

так что среднее значение нормально упорядоченного оператора в когерентном состоянии получается заменой всех операторов рождения и уничтожения на их левые и правые собственные значения, соответственно.

11.7. Представление состояний и операторов целыми функциями

Мы видели, что разложение произвольного состояния $|\psi\rangle$ по когерентным состояниям в виде (11.6.5) не является однозначным, и тот же недостаток свойственен разложению произвольного оператора $\hat{A}$ в виде (11.6.10). Однако, нетрудно получить однозначное представление по когерентным состояниям.

Рассмотрим матричный элемент $\langle v|\psi\rangle$, который является представителем состояния $|\psi\rangle$. Воспользовавшись фоковским разложением (11.2.10) состояния $\langle v|$, можно записать

$$\langle v|\psi\rangle = \mathrm{e}^{-|v|^2/2}\sum_{n=0}^\infty \frac{v^{*n}}{\sqrt{n!}}\langle n|\psi\rangle \equiv \mathrm{e}^{-|v|^2/2}F_\psi(v^*). \tag{11.7.1}$$

Поскольку $|\langle v|\psi\rangle| \leqslant 1$, ряд абсолютно сходится для всех $|\psi\rangle$ и всех v^*. Теперь учтем, что функция $F_\psi(v^*)$ сама является представлением состояния $|\psi\rangle$ и может быть рассмотрена как элемент гильбертова пространства. Кроме того, $F_\psi(v^*)$ есть целая аналитическая функция от v^*. Следовательно, мы получаем простое

представление состояния $|\psi\rangle$ через целые функции, которое является однозначным. Оно тесно связано с представлениями, которые были введены Бергманном (Bergmann, 1961, 1962).

Рассмотрим сразу одно из замечательных свойств данного представления по когерентным состояниям. В общем случае, произвольное состояние $|\psi\rangle$ определяется своим представлением по всем элементам базиса. Например, в фоковском представлении состояние $|\psi\rangle$ определено только тогда, когда величина $\langle n|\psi\rangle$ задана для всех целых значений n от 0 до ∞, а в q-представлении оно определяется величиной $\langle q|\psi\rangle$, заданной для всех значений q от $-\infty$ до ∞. Однако, целая функция определяется своими значениями только в некоторой конечной области, какой бы малой она ни была. Таким образом, в представлении по когерентным состояниям произвольное состояние $|\psi\rangle$ ***полностью задается своими матричными элементами*** $\langle v|\psi\rangle$ ***в некоторой произвольно малой, но конечной области значений*** v^*. Сразу видно, что не существует состояния, которое ортогонально группе когерентных состояний, принадлежащих некоторой малой области[1]. Ибо, если целая аналитическая функция $\langle v|\psi\rangle\, \mathrm{e}^{|v|^2/2}$ обращается в нуль для некоторого значения v^*, то она должна быть равна нулю для всех v^*, а такое возможно только для нулевого вектора $|\psi\rangle$. Излишне говорить, что этот результат является следствием переполненности множества когерентных состояний. Теперь становится очевидной сила данного представления и преимущество переполненности.

Рассмотрим аналогичную проблему представления по когерентным состояниям положительно определенного, эрмитового оператора $\hat{A}$ с конечным следом. Используя опять разложения по фоковским состояниям (11.2.9) и (11.2.10), записываем

$$\langle v|\hat{A}|v'\rangle = \mathrm{e}^{-|v|^2/2}\,\mathrm{e}^{-|v'|^2/2} \sum_{n=0}\sum_{m=0} \frac{v^{*n}}{\sqrt{n!}}\frac{v'^m}{\sqrt{m!}}\langle n|\hat{A}|m\rangle \equiv \mathrm{e}^{-(|v|^2+|v'|^2)/2} F_A(v^*, v'). \tag{11.7.2}$$

Теперь учтем, что в случае эрмитового, положительно определенного оператора $\hat{A}$ с конечным следом модуль $|\langle n|\hat{A}|m\rangle|$ ограничен сверху. Возможно, наиболее простой способ убедиться в этом — разложить $\hat{A}$ по его собственным состояниям $|\lambda_i\rangle$, где λ_i — соответствующее собственное значение, которое действительно и неотрицательно. Тогда

$$\hat{A} = \sum_i \lambda_i |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|, \quad \langle n|\hat{A}|m\rangle = \sum_i \lambda_i \langle n|\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|m\rangle,$$

так что

$$|\langle n|\hat{A}|m\rangle| \leqslant \sum_i \lambda_i |\langle n|\lambda_i\rangle||\langle\lambda_i|m\rangle| \leqslant \sum_i \lambda_i = \operatorname{Tr}\hat{A}.$$

Отсюда следует, что двойной ряд в (11.7.2) абсолютно сходится для всех v^* и v', так что $F_A(v^*, v')$ является целой аналитической функцией двух переменных v^*, v', и мы можем опять рассматривать функцию $F_A(v^*, v')$ как однозначное представление оператора $\hat{A}$.

Для того, чтобы функция $F_A(v^*, v')$ была задана для всех значений v^*, v' и определяла оператор $\hat{A}$, достаточно, вследствие ее аналитичности, задать ее в некоторой произвольно малой области значений v^* и v'. В частности, чтобы определить весь оператор $\hat{A}$, достаточно знать значения диагонального матричного элемента $\langle v|\hat{A}|v\rangle$ для некоторых v^*, v (Jordan, 1964). Таким образом, для построения представления оператора и изучения его свойств можно сконцентрироваться только на диагональных матричных элементах. Действительно, пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ есть два оператора, диагональные матричные элементы которых $\langle v|\hat{A}|v\rangle$ и $\langle v|\hat{B}|v\rangle$ равны на некотором интервале v. Тогда на этом интервале

$$\langle v|\hat{A} - \hat{B}|v\rangle = 0, \tag{11.7.3}$$

и, поскольку функция $\langle v|\hat{A} - \hat{B}|v'\rangle\, \mathrm{e}^{(|v|^2+|v'|^2)/2}$ согласно (11.7.2) есть целая функция v^* и v', она должна обращаться в нуль для всех v^*, v', если обращается в нуль в некотором интервале v^* и v'. Таким образом,

$$\hat{A} = \hat{B}. \tag{11.7.4}$$

[1] Состояние $|\psi\rangle$, которое не является когерентным, конечно, может быть ортогональным отдельно взятому когерентному состоянию $|v\rangle$. Например, если $|\psi\rangle = (1/v^*)|1\rangle - (\sqrt{2}/v^{*2})|2|$, то $\langle v|\psi\rangle = 0$.

То есть *операторы определяются только своими диагональными матричными элементами*, заданными в некоторой произвольно малой, но конечной области значений v. Это замечательное следствие еще раз подчеркивает силу представления по когерентным состояниям. Данный результат не имеет аналога ни в каком представлении, основанном на полном множестве состояний.

Зная $\langle v|\hat{A}|v\rangle$, нетрудно получить матричные элементы оператора $\hat{A}$ в некотором другом представлении. Например, если формально рассматривать v и v^* как независимые переменные, то из (11.7.2) получим

$$\frac{1}{\sqrt{n!\,m!}}\left[\frac{\partial^{n+m}\langle v|\hat{A}|v\rangle\,\mathrm{e}^{|v|^2}}{\partial v^{*n}\,\partial v^m}\right]_{\substack{v^*=0\\ v=0}} = \langle n|\hat{A}|m\rangle. \tag{11.7.5}$$

Таким образом, диагонального матричного элемента $\langle v|\hat{A}|v\rangle$ достаточно для порождения всех матричных элементов $\langle n|\hat{A}|m\rangle$. Более того, для этого достаточно знать $\langle v|\hat{A}|v\rangle$ только в окрестности $v=0$. Как только определен $\langle n|\hat{A}|m\rangle$, можно подставить его в (11.7.2) и получить любой недиагональный элемент $\langle v'|\hat{A}|v''\rangle$.

11.8. Диагональное представление оператора плотности по когерентным состояниям (P-представление Глаубера — Сударшана)

В предыдущем разд. 11.7 было показано, что оператор с конечным следом, такой как оператор плотности $\hat{\rho}$, описывающий состояние системы, можно представить целиком в виде разложения по проекционным операторам $|v\rangle\langle v|$ на когерентные состояния, не прибегая к слишком длинному выражению (11.6.10). Таким образом, можно записать

$$\hat{\rho} = \int \phi(v)|v\rangle\langle v|\,d^2v, \tag{11.8.1}$$

где $\phi(v)$ — некоторая действительная функция v. Поскольку $d^2v \equiv d(\mathrm{Re}\,v)\,d(\mathrm{Im}\,v)$, данное представление все еще задается двойным интегралом, но оно содержит только проекционные операторы и существенно проще представления (11.6.10) через четырехкратный интеграл. Формальный вывод (11.8.1) будет сделан ниже, в разд. 11.8.4 и 11.10.

Данное представление впервые было введено независимо Сударшаном (Sudarshan, 1963)[1] и Глаубером (Glauber, 1963c, 1970) и позже было сформулировано в математически строгом виде Клаудером с коллегами (Klauder, McKenna and Currie, 1965; Klauder, 1966; см. также Rocca, 1966; Miller and Mishkin, 1967; Klauder and Sudarshan, 1968). Элемент поверхности $d^2v \equiv d(\mathrm{Re}\,v)d(\mathrm{Im}\,v)$ иногда называют элементом фазового пространства. При этом интеграл в (11.8.1) становится интегралом по всему фазовому пространству, где $\phi(v)$ играет роль плотности вероятности в фазовом пространстве или весовой функции. Выражение (11.8.1) также называют *P-представлением* состояния $\hat{\rho}$, и весовая функция в этом случае обозначается через $P(v)$. Данное представление предполагает, что состояние электромагнитного поля можно рассматривать как смесь когерентных состояний с относительным весом[2] $P(v)$ или $\phi(v)$. Поскольку $\hat{\rho}$ — эрмитов оператор, то $\phi(v)$ — действительная величина. Требование, что $\hat{\rho}$ имеет след, равный единице, означает, что $\phi(v)$ нормирована на единицу, так как

$$1 = \mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = \mathrm{Tr}\int \phi(v)|v\rangle\langle v|\,d^2v = \int \phi(v)\,d^2v. \tag{11.8.2}$$

[1] Сударшан (Sudarshan, 1963) выразил $\phi(v)$ через матричные элементы $\langle n|\hat{\rho}|m\rangle$ оператора $\hat{\rho}$ в фоковском представлении в виде бесконечного ряда сильно сингулярных функций

$$\phi(v) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\langle n|\hat{\rho}|m\rangle\frac{\sqrt{n!\,m!}}{(n+m)!}\frac{1}{2\pi r}\,\mathrm{e}^{r^2-i\theta(n-m)}\left(-\frac{\partial}{\partial r}\right)^{n+m}\delta(r),$$

где $v = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, и дельта-функция нормирована так, что $\int_0^\infty \delta(r)\,dr = 1$.

[2] Символ $P(v)$, впервые использованный Глаубером в работе (Glauber, 1963c), послужил причиной возникновения термина «P-представление». Однако, мы будем использовать $\phi(v)$, поскольку обозначение P очень часто использовалось нами для других величин.

Оба этих свойства согласуются с интуитивным представлением о том, что $\phi(v)$ играет роль плотности вероятности в фазовом пространстве.

Определим классическое состояние света как состояние, в котором $\phi(v)$ является плотностью вероятности. Однако, интерпретация $\phi(v)$ в общем случае более сложная. Прежде всего, различные когерентные состояния не ортогональны, так что даже если $\phi(v)$ вела бы себя, как истинная плотность вероятности, она не могла бы описывать вероятности взаимоисключающих состояний. В действительности, существуют состояния поля, называемые неклассическими состояниями, для которых $\phi(v)$ менее регулярна, чем плотность вероятности, которая должна быть неотрицательной и не может быть более сингулярной, чем дельта-функция. Далее мы увидим, что нетрудно найти примеры, когда $\phi(v)$ принимает отрицательные значения и становится более сингулярной, чем дельта-функция. В качестве примера весовой функции, которая не всегда является плотностью вероятности, рассмотрим распределение Вигнера (Wigner, 1932).

11.8.1. Плотности квазивероятности. Распределение Вигнера

В 1932 году Вигнер ввел функцию распределения $W(q,p)$, называемую сейчас распределением Вигнера, для характеристики состояния $|\psi\rangle$ квантовой системы в фазовом пространстве. В одномерном случае, когда $\hat{\rho}$ есть оператор плотности системы, а $|q\rangle$ и $|p\rangle$ — собственные состояния операторов координаты и импульса, соответственно, распределение Вигнера имеет вид

$$W(q,p) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \langle q+\tfrac{1}{2}\hbar x|\hat{\rho}|q-\tfrac{1}{2}\hbar x\rangle\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xp}\,dx. \tag{11.8.3а}$$

В частности, если $|\psi\rangle$ является чистым состоянием, то $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ и $\psi(q) = \langle q|\psi\rangle$ — волновая функция Шредингера, так что

$$\langle q+\tfrac{1}{2}\hbar x|\hat{\rho}|q-\tfrac{1}{2}\hbar x\rangle = \psi^*(q-\tfrac{1}{2}\hbar x)\psi(q+\tfrac{1}{2}\hbar x). \tag{11.8.3б}$$

Определенная таким образом $W(q,p)$ является действительной и нормированной на единицу. Можно показать, что среднее значение некоторой симметричной или вейлевски упорядоченной функции $F^{(\mathrm{W})}(\hat{q},\hat{p})$ от $\hat{q}\,,\hat{p}$ определяется выражением[1]

$$\langle F^{(\mathrm{W})}(\hat{q},\hat{p})\rangle = \int F^{(\mathrm{W})}(q,p)W(q,p)\,dq\,dp. \tag{11.8.4}$$

Правая часть этого выражения имеет структуру классического среднего по ансамблю, где q, p являются случайными переменными с плотностью вероятности или плотностью распределения в фазовом пространстве $W(q,p)$.

Несмотря на формальное сходство между $W(q,p)$ и совместной плотностью вероятностей, $W(q,p)$ не обладает всеми характеристиками плотности вероятности и может принимать отрицательные значения. Ее называют *плотностью квазивероятности*. Конечно, $W(q,p)$ не соответствует никакой непосредственно измеримой величине, поскольку совместная вероятность пары канонически сопряженных переменных не может быть измерена и фактически не имеет смысла в квантовой механике. Однако, интеграл

$$\int W(q,p)\,dp = \frac{1}{2\pi}\int dp\int dx\psi^*(q-\frac{1}{2}\hbar x)\psi(q+\frac{1}{2}\hbar x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xp} = \int \psi^*(q-\frac{1}{2}\hbar x)\psi(q+\frac{1}{2}\hbar x)\delta(x)\,dx = \psi^*(q)\psi(q)$$

является истинной плотностью вероятности величины q. Подобным же образом можно показать, что

$$\int W(q,p)\,dq = \tilde{\psi}^*(p)\tilde{\psi}(p)$$

есть плотность вероятности величины p, где $\tilde{\psi}(p)$ представляет собой волновую функцию в p-пространстве. Таким образом, распределение Вигнера обладает некоторыми, но не всеми свойствами плотности вероятности. Это является отражением того факта, что квантовая механика допускает состояния, не имеющие классического аналога.

[1] Вейлевски упорядоченная функция операторов $\hat{q}$, $\hat{p}$ есть функция, которая симметрична по отношению к порядку операторов. Примерами вейлевски упорядоченных функций от $\hat{q}$, $\hat{p}$ являются: $\hat{q}\hat{p}+\hat{p}\hat{q}$, $\hat{q}^2\hat{p}+\hat{q}\hat{p}\hat{q}+\hat{p}\hat{q}^2$.

Аналогичным образом, весовая функция $\phi(v)$, которая возникла в диагональном представлении оператора плотности $\hat{\rho}$, является плотностью квазивероятности. Поскольку не существует измерений поля, непосредственно дающих весовую функцию $\phi(v)$, последняя не обязательно имеет все характеристики плотности вероятности. Как мы увидим, для некоторых состояний поля весовая функция $\phi(v)$ ведет себя намного хуже и является намного более сингулярной, чем распределение Вигнера. Однако, $\phi(v)$ имеет одно очень ценное преимущество по сравнению со всеми остальными весовыми функциями: она позволяет с первого взгляда определить, имеет ли состояние поля классическое описание.

11.8.2. Два достоинства диагонального представления

Поскольку когерентное состояние $|v\rangle$ является аналогом классического поля с комплексной амплитудой v, то в случае, когда $\phi(v)$ представляет собой истинную плотность вероятности, выражение (11.8.1) описывает ансамбль когерентных состояний и, таким образом, соответствует ансамблю классических полей с плотностью вероятности $\phi(v)$. С другой стороны, если $\phi(v)$ не является плотностью вероятности, вследствие того, что она становится отрицательной при некоторых v или более сингулярной, чем дельта-функция, то не существует классического ансамбля, соответствующего квантовому состоянию (11.8.1). В этом случае мы имеем дело с чисто квантовомеханическим состоянием, не имеющим классического аналога. Тем не менее, интегралы, содержащие $\phi(v)$, могут иметь смысл и являться точно определенными. Мы увидим, что свет, излучаемый лазерами и многими привычными тепловыми источниками, имеет классический аналог, поскольку в этих случаях $\phi(v)$ является плотностью вероятности.

Тот факт, что $\phi(v)$ неотрицательна для классического состояния, позволяет нам разработать несколько простых тестов для распознавания неклассического состояния. Например, если $f(v)$ есть некоторая действительная положительная функция v, то $\int \phi(v) f(v)\, d^2v$ может обращаться в нуль, только если $\phi(v)$ описывает неклассическое состояние. Таким образом, если $p(n)$ есть вероятность обнаружения n фотонов в квантовом состоянии $\hat{\rho}$, то $p(n) = \mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}|n\rangle\langle n|)$, и с помощью (11.8.1) и (11.2.12) находим

$$p(n) = \int \phi(v)\, \mathrm{e}^{-|v|^2} \frac{|v|^{2n}}{n!}\, d^2v. \tag{11.8.5}$$

Поскольку $\mathrm{e}^{-|v|^2}|v|^{2n}/n! > 0$ при $v \neq 0$, $p(n)$ не может быть равна нулю ни при каких n, если $\phi(v)$ является плотностью вероятности. Исключением является случай вакуумного состояния, для которого $\phi(v) = \delta^2(v)$ и $p(0) = 1$. Если не считать вакуумного состояния, то любое состояние, для которого $p(n) = 0$, не имеет классического аналога и является чисто квантово-механическим состоянием. Это является отражением того факта, что когерентное состояние $|v\rangle$ содержит вклады фоковских состояний, все числа заполнения которых положительны.

Второе важное свойство представления (11.8.1) — то, что оно позволяет очень просто вычислять средние значения нормально упорядоченных операторов (в которых операторы рождения располагаются всегда слева от операторов уничтожения), используя способ, который полностью аналогичен способу вычисления среднего в классической теории вероятностей (см. разд. 11.9).

11.8.3. Диагональное представление $\hat{\rho}$ с помощью последовательности функций

Как было показано Клаудером и др. (Klauder, McKenna and Currie, 1965; Klauder, 1966; см. также Rocca, 1966), можно избежать использования сингулярных функций $\phi(v)$, вводя вместо них последовательность операторов плотности $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \ldots$ и последовательность весовых функций $\phi_1(v), \phi_2(v), \ldots$, таких что

$$\hat{\rho}_N = \int \phi_N(v)|v\rangle\langle v|\, d^2v, \quad N = 1, 2, \ldots .$$

Здесь $\phi_1(v), \phi_2(v), \ldots$ может быть последовательностью регулярных функций или последовательностью умеренных распределений, или некоторой другой последовательностью. Для каждого из $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \ldots$ можно вычислить $\mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}_N\hat{O})$, что является средним значением оператора $\hat{O}$ в состоянии $\hat{\rho}_N$. Тогда последовательность $\phi_1(v), \phi_2(v), \ldots$ сходится к представлению $\hat{\rho}$ в фазовом пространстве, если

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}_N\hat{O}) = \mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}\hat{O}) \tag{11.8.6}$$

для любого, имеющего среднее значение оператора $\hat{O}$. Характер последовательности $\phi_1(v)$, $\phi_2(v)$, ... определяет характер сходимости $\hat{\rho}_N$ к $\hat{\rho}$, а также диапазон допустимых операторов. В частности, Клаудером было показано (Klauder, 1966), что существует последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\phi_1(v)$, $\phi_2(v)$, ..., убывающих на бесконечности быстрее любой отрицательной степени, такая что $\hat{\rho}_N$ сходится к $\hat{\rho}$ по «следовой» (trace-class) норме[1], и что упомянутое выше условие удовлетворяется для любого ограниченного оператора $\hat{O}$.

На первый взгляд, требование ограниченности операторов кажется жестким и сужающим область применимости данного представления. Однако, используя представление оператора по его собственным состояниям, можно вычислить также среднее значение неограниченного оператора $\hat{O}$. Например, предположим, что $\hat{O}$ записывается в виде

$$\hat{O} = \sum_n \beta_n |\beta_n\rangle\langle\beta_n|, \tag{11.8.7а}$$

где β_n, $|\beta_n\rangle$, $n = 1, 2, \ldots$, образуют полное множество собственных значений и собственных состояний оператора $\hat{O}$. Теперь учтем, что все операторы проектирования $|\beta_n\rangle\langle\beta_n|$ ограничены единицей, и их средние значения $p_n \equiv \mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}|\beta_n\rangle\langle\beta_n|)$, следовательно, вычисляются с помощью диагонального представления. Тогда можно использовать соотношение

$$\langle\hat{O}\rangle = \mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}\hat{O}) = \sum_n \beta_n p_n \tag{11.8.7б}$$

для оператора $\hat{O}$, который не обязательно ограничен, но среднее значение которого существует. Данная процедура позволяет избежать использования сингулярных функций, однако при этом теряется возможность определять с первого взгляда наличие неклассического состояния. В дальнейшем мы не будем использовать представление с помощью последовательностей функций.

Теперь рассмотрим несколько методов определения весовой функции $\phi(v)$ в диагональном представлении по когерентным состояниям (11.8.1). Мы увидим, что иногда будут появляться сингулярные функции, но это не будет сказываться на полезности соотношений типа (11.8.5).

11.8.4. Диагональное представление антинормально упорядоченного оператора плотности

Предположим, что оператор плотности $\hat{\rho}$ выражается в виде функции операторов рождения и уничтожения следующим образом

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{(\mathrm{A})}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \sum_{n,m} C_{nm} \hat{a}^n \hat{a}^{\dagger m}, \tag{11.8.8}$$

где операторы уничтожения в каждом слагаемом располагаются слева от операторов рождения. Такой порядок операторов называется ***антинормальным порядком*** и обозначается верхним индексом A в выражении $\rho^{(\mathrm{A})}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$. Для того чтобы воспользоваться диагональным представлением $\hat{\rho}$ по когерентным состояниям, мы просто вставим единичный оператор в виде (11.6.4) между операторами рождения и уничтожения в каждое слагаемое из (11.8.8). В результате, используя (11.2.1), (11.2.2) и меняя местами суммирование и интегрирование, находим

$$\hat{\rho} = \rho^{(\mathrm{A})}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \\ = \sum_{n,m} C_{nm} \frac{1}{\pi} \int \hat{a}^n |v\rangle\langle v| \hat{a}^{\dagger m}\, d^2 v = \int \frac{1}{\pi} \sum_{n,m} C_{nm} v^n v^{*m} |v\rangle\langle v|\, d^2 v = \int \frac{1}{\pi} \rho^{(\mathrm{A})}(v, v^*) |v\rangle\langle v|\, d^2 v. \tag{11.8.9}$$

Таким образом, нам удалось построить диагональное представление оператора $\hat{\rho}$ с весовой функцией $\phi(v) = (1/\pi)\rho^{(\mathrm{A})}(v, v^*)$, что можно рассматривать как формальный вывод представления (11.8.1). Ту же процедуру можно использовать и для других операторов, хотя интеграл в правой части выражения (11.8.9) может не всегда сходиться.

[1] Обсуждение сходимости и в том числе определение «следовой» нормы см. в книге (Klauder and Sudarshan, 1968, разд. 8.4)

11.8.5. Интегральное представление функции $\phi(v)$

Альтернативным методом нахождения функции $\phi(v)$ является выражение ее с помощью фурье-интеграла через характеристическую функцию (Mehta and Sudarshan, 1965). Излагаемый ниже подход принадлежит Мета (Mehta, 1967). Предположим, что $\hat{\rho}$ можно записать в диагональном виде (11.8.1) и умножим обе части выражения на вектор когерентного состояния $\langle -u|$ слева и на вектор когерентного состояния $|u\rangle$ справа, где u — некоторое комплексное число. Тогда получим

$$\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle = \int \phi(v)\langle -u|v\rangle\langle v|u\rangle\, d^2v.$$

С учетом выражения (11.6.1) для скалярного произведения двух когерентных состояний данное выражение принимает вид

$$\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle = \mathrm{e}^{-|u|^2}\int \phi(v)\,\mathrm{e}^{-|v|^2}\,\mathrm{e}^{uv^*-u^*v}\,d^2v. \tag{11.8.10}$$

Формула (11.8.10) выражает $\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle\,\mathrm{e}^{|u|^2}$ в виде фурье-преобразования от $\phi(v)\,\mathrm{e}^{-|v|^2}$, поскольку ядро $\mathrm{e}^{uv^*-u^*v}$ есть как раз ядро двумерного преобразования Фурье. Возможно, это станет более очевидным, если записать $u = p + iq$, $v = P + iQ$, так что $\mathrm{e}^{uv^*-u^*v} = \mathrm{e}^{2i(qP-pQ)}$. Если теперь формально обратить фурье-преобразование в (11.8.10), не уделяя слишком много внимания вопросам сходимости, то получим

$$\phi(v)\,\mathrm{e}^{-|v|^2} = \frac{1}{\pi^2}\int \mathrm{e}^{|u|^2}\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle\,\mathrm{e}^{uv^*-u^*v}\,d^2u. \tag{11.8.11}$$

Таким образом, мы формально решили задачу определения весовой функции $\phi(v)$ для заданного оператора плотности $\hat{\rho}$. Однако, наличие в (11.8.11) множителя $\mathrm{e}^{|u|^2}$ под знаком интеграла, говорит о возможных математических трудностях, связанных со сходимостью. Если матричный элемент $\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle$ не спадает с ростом u при больших u быстрее $\mathrm{e}^{-|u|^2}$, то данный интеграл не существует в смысле теории обычных функций и его можно рассматривать только как обобщенную функцию. Действительно, нетрудно найти примеры состояний, для которых этот интеграл не существует. Однако, интеграл сходится для всех оптических полей, имеющих классический аналог, если не считать возможную δ-сингулярность, ибо в этих случаях $\phi(v)$ является плотностью вероятности. Другое интегральное представление $\phi(v)$ будет дано в следующем параграфе [см. (11.9.12)].

Если $\phi(v)$ не существует как обычная функция, ее можно рассматривать как обобщенную функцию, которая определяется выражением (11.8.11). Легко показать, что матричный элемент $\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle$ существует и ограничен единицей. Действительно, оператор плотности всегда можно выразить в виде линейной комбинации операторов проектирования следующим образом

$$\hat{\rho} = \sum_r p_r|\psi_r\rangle\langle\psi_r|,$$

где p_r действительны и неотрицательны и $\sum_r p_r = 1$, так что

$$|\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle| \leqslant \sum_r p_r|\langle -u|\psi_r\rangle\langle\psi_r|u\rangle| \leqslant \sum_r p_r = 1. \tag{11.8.12}$$

Более того, $\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle$ и, следовательно, $\mathrm{e}^{|u|^2}\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle$ можно дифференцировать произвольное число раз по u и $-u^*$. Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих данный интегральный метод определения весовой функции $\phi(v)$.

11.8.6. Примеры $\phi(v)$

(а) Когерентное состояние

Предположим, что поле находится в когерентном состоянии $|v'\rangle$, так что $\hat{\rho} = |v'\rangle\langle v'|$. Тогда из (11.6.1) получаем для матричного элемента выражение

$$\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle = \langle -u|v'\rangle\langle v'|u\rangle = \mathrm{e}^{-|u|^2-|v'|^2}\,\mathrm{e}^{uv'^*-u^*v'},$$

подставляя которое в (11.8.11), находим

$$\phi(v)\,\mathrm{e}^{-|v|^2} = \frac{1}{\pi^2}\int \mathrm{e}^{-|v'|^2}\,\mathrm{e}^{u(v'^*-v^*)-u^*(v'-v)}\,d^2u = \mathrm{e}^{-|v'|^2}\delta^2(v-v'),$$

откуда

$$\phi(v) = \delta^2(v-v'). \tag{11.8.13}$$

Таким образом, весовая функция в случае когерентного состояния представляет собой двумерную дельта-функцию, и

$$|v'\rangle\langle v'| = \int \delta^2(v-v')|v\rangle\langle v|\,d^2v.$$

Этот результат, конечно, можно было бы написать сразу, но мы привели вычисление для иллюстрации метода. В данном случае функция $\phi(v)$ имеет характер классической плотности вероятности. Действительно, классическому осциллятору с комплексной амплитудой v' была бы приписана в классическом интегральном представлении такая же функция распределения в фазовом пространстве.

(б) Модель лазера со случайной фазой

Как будет показано позже (в гл. 18), оптическое поле лазера, генерирующего в одномодовом режиме при существенном превышении порога, находится в состоянии, которое во многих отношениях близко к когерентному состоянию $|v\rangle$. Интенсивность поля почти не имеет флуктуаций и остается постоянной, благодаря свойствам насыщения лазера. С другой стороны, фаза генерации может флуктуировать и в общем случае дрейфует случайно во времени. С точки зрения последовательности измерений, выполненных на одном и том же лазере, состояние поля представляется в виде смеси когерентных состояний $|v = r_0\,\mathrm{e}^{i\theta}\rangle$, имеющих одинаковое значение $|v|$, но равномерно распределенную в интервале от 0 до 2π фазу θ комплексной амплитуды v. Иногда в качестве лучшей аппроксимации лазерного поля в чистом когерентном состоянии выбирают следующую весовую функцию $\phi(v)$ [ср. (18.5.16) ниже]

$$\phi(v) = \frac{1}{2\pi r_0}\delta(|v|-r_0). \tag{11.8.14}$$

Поскольку θ не присутствует явно в данном выражении, угол θ распределен равномерно по всей области возможных значений. Множитель $1/2\pi r_0$ нужен для того, чтобы плотность вероятности фазы, как и требуется, равнялась $\int \phi(v)|v|\,d|v| = \frac{1}{2\pi}$. Эта весовая функция идентична плотности вероятности, которая приписывалась бы смеси классических осцилляторов со случайными фазами. Стоит отметить, что в состоянии (11.8.14), в отличие от чистого когерентного состояния поля, средние значения операторов уничтожения и рождения $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$ обращаются в нуль, так как

$$\langle\hat{a}\rangle = \int v\frac{1}{2\pi|v|}\delta(|v|-r_0)\,d^2v = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r_0\,\mathrm{e}^{i\theta}\,d\theta = 0$$

и аналогично для среднего значения $\hat{a}^\dagger$.

Интересно сравнить распределения вероятности действительной части комплексной амплитуды v в когерентном состоянии $|v'\rangle$ и в смешанном состоянии (11.8.14)[1]. Если записать $v = x + iy$, то плотность вероятности величины x, которую обозначим через $p(x)$, равна

$$p(x) = \int \phi(x,y)\,dy.$$

[1] Отметим, что это не тоже самое, что распределение вероятности действительной, или эрмитовой, части динамической переменной $\hat{a}$, которое обсуждалось в разд. 11.5.

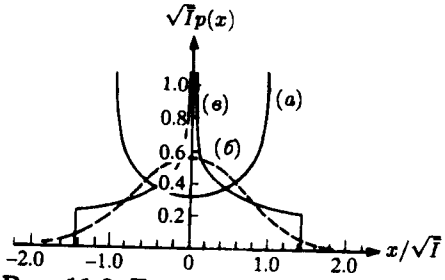


Рис. 11.2. Теоретическая форма плотности вероятности $x = \mathrm{Re}\, v$, соответствующая: *а* — полю одномодового лазера со случайной фазой [(11.8.11)], *б* — излучению теплового источника [(11.8.19)], *в* — суперпозиции двух полей одномодовых лазеров [(11.8.29)] (Mandel, 1965)

В случае когерентного состояния $|v'\rangle$ с $v' = x' + iy'$ и функции $\phi(v)$, задаваемой формулой (11.8.13), получим

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x')\delta(y - y')\, dy = \delta(x - x'), \tag{11.8.15}$$

так что x имеет точно определенное значение x'. Однако, ситуация совершенно другая для смеси состояний, описываемой выражением (11.8.14). В этом случае находим

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta[(x^2 + y^2)^{1/2} - r_0]}{(x^2 + y^2)^{1/2}}\, dy = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(r_0^2 - x^2)^{1/2}}, & \text{для } |x| < r_0, \\ 0, & \text{для } |x| > r_0. \end{cases} \tag{11.8.16}$$

Здесь мы воспользовались обычным свойством дельта-функции

$$\delta[f(y)] = \sum_i \delta(y - y_i) \Big/ \left|\frac{df}{dy}\right|_{y=y_i}, \tag{11.8.17}$$

где y_i, $i = 1, 2, \ldots$ — нули функции $f(y)$. Функция $p(x)$, задаваемая выражением (11.8.16), показана на рис. 11.2 (кривая *а*). Она имеет вид, ожидаемый для классического распределения вероятности величины $\mathrm{Re}\,(r_0\, e^{i\theta})$, когда θ является случайным фазовым углом, и приблизительно соответствует распределению действительной амплитуды одномодового лазера.

(в) Тепловое излучение

В разд. 13.1 будет показано, что для теплового излучения и вообще для плоской световой волны, создаваемой произвольным тепловым источником, каждая мода поля имеет весовую функцию

$$\phi(v) = \frac{1}{\pi\langle n\rangle}\, e^{-|v|^2/\langle n\rangle}, \tag{11.8.18}$$

где $\langle n\rangle$ — среднее число фотонов в данной моде. Это есть гауссовское распределение комплексной переменной v, которое, как видно, тождественно по форме соответствующему распределению вероятности, возникающему при классическом описании теплового света. Распределение $p(x)$ действительной части v получается сразу из (11.8.18), если последнее проинтегрировать по $\mathrm{Im}\,(v)$. Результат имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{(\pi\langle n\rangle)^{1/2}}\, e^{-|x|^2/\langle n\rangle}. \tag{11.8.19}$$

Эта функция также показана на рис. 11.2 (кривая *б*). Все эти примеры показывают, что в случае, когда состояние поля имеет классический аналог, функция $\phi(v)$ совпадает с соответствующей классической плотностью вероятности.

(г) Фоковское состояние

В качестве менее тривиального примера рассмотрим диагональное представление оператора плотности по когерентным состояниям для поля, находящегося в фоковском состоянии $|n\rangle$, когда $\hat\rho = |n\rangle\langle n|$. Матричный элемент $\langle -u|\hat\rho|u\rangle$ легко вычисляется с помощью (11.2.11), и мы находим

$$\langle -u|\hat\rho|u\rangle = \langle -u|n\rangle\langle n|u\rangle = \frac{e^{-|u|^2}(-|u|^2)^n}{n!}.$$

Подставляя этот результат в (11.8.11), получаем

$$\phi(v)\,\mathrm{e}^{-|v|^2} = \frac{1}{n!}\frac{1}{\pi^2}\int(-|u|^2)^n\,\mathrm{e}^{-uv^*+u^*v}\,d^2u.$$

Этот интеграл расходится и не существует в виде обычной функции. Более того, интеграл более сингулярен, чем дельта-функция, когда $n \neq 0$. Однако, пренебрегая сингулярным поведением и продолжая рассуждения чисто формально, множитель $(-|u|^2)^n$ под знаком интеграла можно представить как результат дифференцирования экспоненты и записать

$$\phi(v) = \frac{\mathrm{e}^{|v|^2}}{n!}\frac{\partial^{2n}}{\partial v^{*n}\partial v^n}\frac{1}{\pi^2}\int\mathrm{e}^{-uv^*+u^*v}\,d^2u = \frac{\mathrm{e}^{|v|^2}}{n!}\frac{\partial^{2n}}{\partial v^{*n}\,\partial v^n}\delta^2(v). \tag{11.8.20}$$

Следовательно, функция $\phi(v)$ выражается в виде $2n$-ой производной от дельта-функции и существенно сингулярнее любой классической плотности вероятности. Данная функция принадлежит классу умеренных распределений (Bremerman, 1965, разд. 8.8; Nussenzveig, 1972, прил. A.10). Это говорит о том, что фоковское состояние $|n\rangle$ представляет собой квантовое состояние поля, не имеющее классического аналога. Как мы уже отмечали, в общем случае, функция $\phi(v)$ не является плотностью вероятности для таких состояний. Конечно, в частном случае фоковского состояния — вакуумном состоянии, $n = 0$ и из (11.8.20) следует, что $\phi(v) = \delta^2(v)$, в соответствии с (11.8.13), поскольку вакуум также является примером когерентного состояния.

(д) Суперпозиция двух когерентных состояний

Рассмотрим теперь пример еще более сингулярной весовой функции $\phi(v)$. Пусть состояние $|\psi\rangle$ есть суперпозиция когерентных состояний $|v'\rangle$ и $|v''\rangle$

$$|\psi\rangle = c'|v'\rangle + c''|v''\rangle,$$

где комплексные числа c', c'' выбираются соответствующим образом для соблюдения нормировки $|\psi\rangle$. Хотя каждое когерентное состояние $|v'\rangle$ и $|v''\rangle$ отдельно можно интерпретировать классически, сопоставив ему оптическое поле с определенной комплексной амплитудой v' или v'', суперпозиционное состояние $|\psi\rangle$ не имеет классической интерпретации. Оно не описывает поле, получаемое в результате физической суперпозиции или интерференции двух оптических полей, которое будет обсуждаться ниже, а представляет собой типично квантовомеханическое состояние. Оператор плотности равен $\hat\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, и его матричный элемент задается выражением

$$\begin{aligned}\langle -u|\hat\rho|u\rangle = (c'\langle -u|v'\rangle + c''\langle -u|v''\rangle)(c'^*\langle v'|u\rangle + c''^*\langle v''|u\rangle) = \\ = |c'|^2\,\mathrm{e}^{-(|u|^2+|v'|^2)}\,\mathrm{e}^{uv'^*-u^*v'} + |c''|^2\,\mathrm{e}^{-(|u|^2+|v''|^2)}\,\mathrm{e}^{uv''^*-u^*v''} + \\ + \mathrm{e}^{-(|u|^2+|v'|^2/2+|v''|^2/2)}[c'c''^*\,\mathrm{e}^{uv''^*-u^*v'} + c''c'^*\,\mathrm{e}^{uv'^*-u^*v''}].\end{aligned}$$

Следовательно, из (11.8.11) для весовой функции получим

$$\begin{aligned}\phi(v) = \frac{\mathrm{e}^{|v|^2}}{\pi^2}\int[|c'|^2\,\mathrm{e}^{-|v'|^2}\,\mathrm{e}^{u(v'^*-v^*)-u^*(v'-v)} + |c''|^2\,\mathrm{e}^{-|v''|^2}\,\mathrm{e}^{u(v''^*-v^*)-u^*(v''-v)} + \\ + c'c''^*\,\mathrm{e}^{-(|v'|^2+|v''|^2)/2}\,\mathrm{e}^{u(v''^*-v'^*)/2+u^*(v''-v')/2}\,\mathrm{e}^{u(v'^*/2+v''^*/2-v^*)-u^*(v'/2+v''/2-v)} + \\ + c''c'^*\,\mathrm{e}^{-(|v'|^2+|v''|^2)/2}\,\mathrm{e}^{u(v'^*-v''^*)/2+u^*(v'-v'')/2}\,\mathrm{e}^{u(v'^*/2+v''^*/2-v^*)-u^*(v'/2+v''/2-v)}]\,d^2u.\end{aligned}$$

Первые два члена могут быть выражены, как и раньше, через дельта-функции. Однако, каждый из оставшихся двух членов под знаком интеграла содержит ядро фурье-преобразования, умноженное на *действительную* экспоненциальную функцию переменных u, u^*, и при некоторых значениях аргументов v', v'' растет быстрее любой степени u, u^*. Данные интегралы, таким образом, еще более сингулярны, чем те, с которыми мы сталкивались при построении представления для фоковского состояния. Тем не менее, продолжая вывод чисто формально, разложим экспоненциальные множители $\mathrm{e}^{u(v''^*-v'^*)/2}$, $\mathrm{e}^{u^*(v''-v')/2}$ и

др. в степенной ряд по u, u^* и затем представим каждую степень, дифференцируя фурье-ядро под знаком интеграла. В результате получим

$$\phi(v) = |c'|^2\delta^{(2)}(v-v') + |c''|^2\delta^{(2)}(v-v'') +$$
$$+ c'c''^* \exp(|v|^2 - \tfrac{1}{2}|v'|^2 - \tfrac{1}{2}|v''|^2) \exp\left[\tfrac{1}{2}(v'^* - v''^*)\frac{\partial}{\partial(v^* - \frac{1}{2}v'^* - \frac{1}{2}v''^*)}\right] \times$$
$$\times \exp\left[\tfrac{1}{2}(v'' - v')\frac{\partial}{\partial(v - \frac{1}{2}v' - \frac{1}{2}v'')}\right] \delta^{(2)}(v - \tfrac{1}{2}v' - \tfrac{1}{2}v'') +$$
$$+ c''c'^* \exp(|v|^2 - \tfrac{1}{2}|v'|^2 - \tfrac{1}{2}|v''|^2) \exp\left[\tfrac{1}{2}(v''^* - v'^*)\frac{\partial}{\partial(v^* - \frac{1}{2}v'^* - \frac{1}{2}v''^*)}\right] \times$$
$$\times \exp\left[\tfrac{1}{2}(v' - v'')\frac{\partial}{\partial(v - \frac{1}{2}v' - \frac{1}{2}v'')}\right] \delta^{(2)}(v - \tfrac{1}{2}v' - \tfrac{1}{2}v''). \quad (11.8.21)$$

Данное выражение содержит производные от дельта-функции бесконечно большого порядка и не принадлежит к обычным классам распределений. Тем не менее, связывая эту весовую функцию с достаточно регулярными (бесконечно дифференцируемыми) пробными функциями, можно получить имеющие смысл, конечные ответы, формально применяя правила дифференцирования и интегрирования.

В качестве примера, рассмотрим следующий интеграл, который имеет простую физическую интерпретацию

$$\int |v|^2 \phi(v)\, d^2v,$$

где $\phi(v)$ задается выражением (11.8.21). Вклады первых двух слагаемых сразу вычисляются из (11.8.21) и равны $|c'|^2|v'|^2$ и $|c''|^2|v''|^2$. Чтобы вычислить член, пропорциональный $c'c''^*$, разложим каждый экспоненциальный оператор в степенной ряд и проинтегрируем по частям. Удобно сделать замену переменных $v - \frac{1}{2}v' - \frac{1}{2}v'' = V$. Тогда

$$\text{третий член} = c'c''^* \int \left\{ \exp\left[-\tfrac{1}{2}(v'^* - v''^*)\frac{\partial}{\partial V^*}\right] \exp\left[-\tfrac{1}{2}(v'' - v')\frac{\partial}{\partial V}\right] \mathrm{e}^{A} \right\} |V + \tfrac{1}{2}v' + \tfrac{1}{2}v''|^2 \delta^2(V)\, d^2V,$$

где

$$A \equiv |V|^2 + \frac{1}{2}V(v'^* + v''^*) + \frac{1}{2}V^*(v' + v'') + \frac{1}{4}(-|v'|^2 - |v''|^2 + v'v''^* + v'^*v'').$$

Выражение в скобках { } упрощается с помощью тождества Кемпбелла — Бейкера — Хаусдорфа

$$\mathrm{e}^{B}\,\mathrm{e}^{A} = \mathrm{e}^{[B,A]}\,\mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{B},$$

применяя его для дифференциальных операторов, при условии, что как A, так и B коммутируют с $[B, A]$. Полагая $B = -\frac{1}{2}(v'' - v')\partial/\partial V$, легко найдем, что

$$[B, A] \equiv C = -\frac{1}{2}(v'' - v')V^* - \frac{1}{4}(v'' - v')(v'^* + v''^*),$$

так что $[C, B] = 0 = [C, A]$, и

$$\text{третий член} = c'c''^* \int \left\{ \exp\left[-\tfrac{1}{2}(v'^* - v''^*)\frac{\partial}{\partial V^*}\right] \mathrm{e}^{C+A} \exp\left[-\tfrac{1}{2}(v'' - v')\frac{\partial}{\partial V}\right] \right\} \times$$
$$\times |V + \tfrac{1}{2}v' + \tfrac{1}{2}v''|^2 \delta^2(V)\, d^2V.$$

Второе применение тождества Кемпбелла — Бейкера — Хаусдорфа приводит к результату

$$\text{третий член} = c'c''^* \int \mathrm{e}^{(v''^* - v'^*)(V+v')/2}\, \mathrm{e}^{C+A} \exp\left[-\tfrac{1}{2}(v'^* - v''^*)\frac{\partial}{\partial V^*}\right] \exp\left[-\tfrac{1}{2}(v'' - v')\frac{\partial}{\partial V}\right] \times$$
$$\times |V + \tfrac{1}{2}v' + \tfrac{1}{2}v''|^2 \delta^2(V)\, d^2V.$$

Подынтегральное выражение можно легко вычислить, разлагая экспоненциальные операторы в степенной ряд. В каждом разложении дают вклад только первые два члена, и после объединения их с дельта-функцией под знаком интеграла получим

$$\text{третий член} = c'c''^{*}(v'v''^{*})\,\mathrm{e}^{-|v'|^2/2-|v''|^2/2+v'v''^{*}}.$$

Слагаемое, пропорциональное $c'^{*}c''$, вычисляется таким же образом, так что окончательно, объединяя все четыре выражения, получаем

$$\int |v|^2\phi(v)\,d^2v = |c'|^2|v'|^2 + |c''|^2|v''|^2 + (c'c''^{*}v'v''^{*}\,\mathrm{e}^{-|v'|^2/2-|v''|^2/2+v'v''^{*}} + \text{к.с.}). \tag{11.8.22}$$

Это есть совершенно определенное и регулярное решение задачи, несмотря на чрезвычайно сингулярный характер $\phi(v)$. В следующем параграфе станет ясно, что вычисленный нами интеграл есть не что иное, как среднее значение оператора числа фотонов $\hat{n}$ в состоянии $|\psi\rangle$. Конечно, непосредственно его можно вычислить намного проще.

(е) Интерферирующие поля

В оптике часто встречаются ситуации, когда два или более световых пучка совмещаются для получения интерференционных эффектов. В этих случаях полное электромагнитное поле в каждой точке пространства и времени есть сумма полей, создаваемых отдельными пучками, и, аналогично, полное возбуждение каждой моды есть сумма отдельных возбуждений, создаваемых каждой составляющей полного поля.

Рассмотрим теперь представление в фазовом пространстве состояния суммарного поля. Предположим, что один пучок сам по себе можно рассматривать как возбуждение поля в когерентное состояние $|v_1\rangle = \hat{D}(v_1)|0\rangle$, тогда как другой пучок сам по себе можно рассматривать как возбуждение в когерентное состояние $|v_2\rangle = \hat{D}(v_2)|0\rangle$. Если два пучка или два возбуждения присутствуют одновременно, то полное возбуждение характеризуется произведением $\hat{D}(v_2)\hat{D}(v_1)$ двух операторов смещения, действующих на вакуумное состояние. Теперь учтем, что произведение двух операторов смещения есть другой оператор смещения $\hat{D}(v_1+v_2)$, с точностью до фазового множителя [см. (11.3.14)], так что оператор плотности суммарного поля задается выражением

$$\hat{\rho} = \hat{D}(v_2)\hat{D}(v_1)|0\rangle\langle 0|\hat{D}^{\dagger}(v_1)\hat{D}^{\dagger}(v_2) = \hat{D}(v_1+v_2)|0\rangle\langle 0|\hat{D}^{\dagger}(v_1+v_2) = |v_1+v_2\rangle\langle v_1+v_2|.$$

Теперь рассмотрим более общую ситуацию, когда состояния полей не обязательно являются чистыми когерентными состояниями, а могут быть произвольными. Тогда, можно построить диагональное представление оператора $\hat{\rho}$ по когерентным состояниям, объединяя вышеуказанные проекционные операторы на когерентные состояния и записывая

$$\hat{\rho} = \int \phi_{12}(v_1,v_2)|v_1+v_2\rangle\langle v_1+v_2|\,d^2v_1\,d^2v_2, \tag{11.8.23}$$

где $\phi_{12}(v_1,v_2)$ есть некоторая совместная плотность распределения v_1 и v_2 в фазовом пространстве. Конечно, такое представление через функцию двух отдельных комплексных переменных v_1 и v_2 имеет смысл только в том случае, когда два возбуждения могут существовать отдельно, например, когда любой из пучков можно по очереди блокировать. В этом случае два отдельных поля можно описать операторами плотности $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$, такими, что

$$\hat{\rho}_1 = \int \phi_{12}(v_1,v_2)|v_1\rangle\langle v_1|\,d^2v_1\,d^2v_2 = \int \phi_1(v_1)|v_1\rangle\langle v_1|\,d^2v_1,$$

где

$$\phi_1(v_1) \equiv \int \phi_{12}(v_1,v_2)\,d^2v_2,$$

и

$$\hat{\rho}_2 = \int \phi_{12}(v_1,v_2)|v_2\rangle\langle v_2|\,d^2v_1\,d^2v_2 = \int \phi_2(v_2)|v_2\rangle\langle v_2|\,d^2v_2,$$

где

$$\phi_2(v_2) \equiv \int \phi_{12}(v_1, v_2)\, d^2v_1.$$

Используя замену переменных $v_1 + v_2 = v$, можно переписать (11.8.23) в виде

$$\hat{\rho} = \int \phi_{12}(v_1, v - v_1)|v\rangle\langle v|\, d^2v_1\, d^2v = \int \phi(v)|v\rangle\langle v|\, d^2v,$$

где

$$\phi(v) \equiv \int \phi_{12}(v_1, v - v_1)\, d^2v_1, \tag{11.8.24}$$

что имеет обычный вид диагонального представления по когерентным состояниям.

В частном случае, когда два возбуждения поля независимы, совместная весовая функция $\phi_{12}(v_1, v_2)$ в (11.8.23) разбивается на произведение отдельных весовых функций для отдельных возбуждений, и мы получаем

$$\phi_{12}(v_1, v_2) = \phi_1(v_1)\phi_2(v_2). \tag{11.8.25}$$

В этом случае выражение (11.8.24) сводится к

$$\phi(v) = \int \phi_1(v_1)\phi_2(v - v_1)\, d^2v_1. \tag{11.8.26}$$

Таким образом, весовая функция диагонального представления суммарного поля есть свертка весовых функций диагональных представлений отдельных полей.

Очевидно, что если каждое возбуждение имеет вид когерентного состояния, так что $\phi_1(v) = \delta^2(v - v')$ и $\phi_2(v) = \delta^2(v - v'')$, то

$$\phi(v) = \int \delta^2(v_1 - v')\delta^2(v - v_1 - v'')\, d^2v_1 = \delta^2(v - v' - v''). \tag{11.8.27}$$

Полученное выражение, как и следовало ожидать, соответствует когерентному состоянию $|v' + v''\rangle$.

Менее тривиальная для применения выражения (11.8.26) ситуация получается при совмещении световых пучков двух одномодовых лазеров (Mandel, 1965). Предположим, что два лазера одинаковы, но независимы, и что каждая весовая функция задается выражением (11.8.14). Тогда из (11.8.26) следует, что весовая функция результирующего поля равна

$$\phi(v) = \frac{1}{(2\pi r_0)^2} \int \delta(|v'| - r_0)\delta(|v - v'| - r_0)\, d^2v'.$$

Полагая $v' = |v'|\, e^{i\theta'}$, $v = |v|\, e^{i\theta}$, можно проинтегрировать по $|v'|$ и получить

$$\phi(v) = \frac{1}{(2\pi)^2 r_0} \int_0^{2\pi} \delta[[|v|^2 + r_0^2 - 2|v| r_0 \cos(\theta - \theta')]^{1/2} - r_0]\, d\theta' =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi^2 |v| (4r_0^2 - |v|^2)^{1/2}}, & \text{для } |v| < 2r_0, \\ 0, & \text{для } |v| > 2r_0, \end{cases} \tag{11.8.28}$$

если воспользоваться свойством (11.8.17) дельта-функции. Отметим, что величина $|v|$ для суммарного поля не имеет больше точно определенного значения, а распределена в интервале от 0 до $2r_0$. Действительно, распределение величины $|v|$ имеет тот же вид, что и распределение действительной части v, задаваемое выражением (11.8.16) для одного лазерного пучка (если не считать того, что $|v|$ всегда ограничено условием $|v| \geqslant 0$). Этот результат можно понять следующим образом. Для каждого лазерного пучка абсолютная амплитуда $|v| = r_0$ постоянна, но случайный характер фазы приводит к тому, что $\mathrm{Re}\, v$ распределяется в интервале от $-r_0$ до r_0 с плотностью (11.8.16). При пересечении двух пучков имеет место интерференция,

и результирующая абсолютная амплитуда изменяется в зависимости от разности фаз между пучками в интервале от 0 до $2r_0$. Случайный характер фазы является причиной подобного распределения результирующей абсолютной амплитуды.

Записывая $v = x + iy$ и интегрируя распределение $\phi(x, y)$, определяемое формулой (11.8.28), по всем y, приходим к следующему выражению для распределения только x

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi^2} \displaystyle\int_{-(4r_0^2-x^2)^{1/2}}^{(4r_0^2-x^2)^{1/2}} \frac{dy}{(x^2+y^2)^{1/2}(4r_0^2-x^2-y^2)^{1/2}}, & \text{для } |x| \leqslant 2r_0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Этот интеграл выражается в виде полного эллиптического интеграла K первого рода, и мы получаем

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi^2 r_0} K\left(1 - \dfrac{x^2}{4r_0^2}\right)^{1/2}, & \text{для } |x| \leqslant 2r_0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{11.8.29}$$

Это распределение также показано на рис. 11.2 (кривая *в*). Оно имеет сингулярность в точке $x = 0$, но обладает с гауссовским распределением тем общим свойством, что наиболее вероятное значение x равно нулю. Если совмещаются несколько таких пучков, то распределение действительной части результирующей комплексной амплитуды довольно быстро стремится к гауссовскому, что следует из центральной предельной теоремы.

11.9. Оптическая теорема эквивалентности для нормально упорядоченных операторов

До сих пор диагональное представление оператора плотности $\hat{\rho}$ по когерентным состояниям являлось лишь компактным представлением для $\hat{\rho}$. Его основные преимущества становятся очевидными, если воспользоваться им для вычисления средних значений операторов, особенно тех, которые являются наиболее важными в квантовой оптике.

Как мы увидим в разд. 12.2, большинство лабораторных измерений оптического поля описываются средними значениями некоторых простых нормально упорядоченных произведений операторов рождения и уничтожения, т.е. произведениями, в которых все операторы рождения располагаются слева от операторов уничтожения. Средние значения таких операторов особенно удобно вычислять с помощью диагонального представления (Sudarshan, 1963; Glauber, 1963b; Klauder, 1966; Klauder and Sudarshan, 1968, разд. 8.4). Кроме того, этот метод подчеркивает, что функция $\phi(v)$ в разложении $\hat{\rho}$ ведет себя как весовая функция в фазовом пространстве или как плотность квазивероятности.

Рассмотрим произвольную нормально упорядоченную функцию $g^{(\mathrm{N})}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ операторов уничтожения и рождения $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, которую можно разложить в степенной ряд следующим образом:

$$g^{(\mathrm{N})}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \sum_{n,m} c_{nm} \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m. \tag{11.9.1}$$

Среднее значение $g^{(\mathrm{N})}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ в состоянии, характеризуемом оператором плотности $\hat{\rho}$, определяется выражением

$$\langle g^{(\mathrm{N})}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle = \mathrm{Tr}\,[\hat{\rho} g^{(\mathrm{N})}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)]. \tag{11.9.2}$$

Подставим в (11.9.2) диагональное представление (11.8.1) оператора $\hat{\rho}$ и разложение (11.9.1) для $g^{(\mathrm{N})}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$. В результате получим

$$\langle g^{(\mathrm{N})}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle = \mathrm{Tr} \int \phi(v) \sum_{n,m} c_{nm} |v\rangle\langle v| \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m \, d^2 v = \int \phi(v) \sum_{n,m} c_{nm} \langle v| \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m |v\rangle \, d^2 v,$$

где было использовано тождество $\mathrm{Tr}\,|A\rangle\langle B| = \langle B|A\rangle$. Теперь учтем, что $\langle v|$ есть левый собственный вектор оператора $\hat{a}^\dagger$, а $|v\rangle$ — правый собственный вектор оператора $\hat{a}$. Поэтому

$$\langle v|\hat{a}^{\dagger n}\hat{a}^m|v\rangle = v^{*n}v^m, \tag{11.9.3}$$

$$\langle g^{(\mathrm{N})}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)\rangle = \int \phi(v)\sum_{n,m} c_{nm}v^{*n}v^m\,d^2v = \int \phi(v)g^{(N)}(v,v^*)\,d^2v. \tag{11.9.4}$$

Таким образом, среднее значение нормально упорядоченного оператора $g^{(\mathrm{N})}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$ можно найти, заменяя операторы $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ на их правые и левые собственные значения v, v^*, соответственно, и усредняя полученную c-числовую функцию $g^{(\mathrm{N})}(v,v^*)$ по всей комплексной v-плоскости, используя $\phi(v)$ как весовую функцию. Среднее значение квантово-механического оператора, следовательно, определяется таким же образом, как и среднее значение соответствующей c-числовой функции в классической оптике. Если рассматривать v как комплексную случайную переменную с "плотностью вероятностей" $\phi(v)$, то среднее значение функции $g^{(\mathrm{N})}(v,v^*)$ правильнее обозначить следующим образом:

$$\int \phi(v)g^{(\mathrm{N})}(v,v^*)\,d^2v \equiv \langle g^{(\mathrm{N})}(v,v^*)\rangle_\phi, \tag{11.9.5}$$

где $\langle\ \ \rangle_\phi$ означает усреднение по ансамблю с весовой функцией $\phi(v)$. Выражение (11.9.4), таким образом, можно записать в более компактном виде:

$$\langle g^{(\mathrm{N})}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)\rangle = \langle g^{(\mathrm{N})}(v,v^*)\rangle_\phi. \tag{11.9.6}$$

Отметим, что угловые скобки в левой части данного выражения обозначают квантово-механическое среднее, тогда как те же скобки в правой части обозначают среднее по ансамблю с весовой функцией $\phi(v)$.

Этот результат, полученный Сударшаном (Sudarshan, 1963), был назван Клаудером (Klauder, 1966) ***оптической теоремой эквивалентности***, поскольку он означает формальную эквивалентность между средними значениями нормально упорядоченных операторов в квантовой оптике и средними значениями соответствующих c-числовых функций в классической оптике. Излишне говорить, как подчеркивал Сударшан (Sudarshan, 1963b), что эта теорема не означает эквивалентность квантовой электродинамики и классической оптики. Мы видели, что $\phi(v)$ относится к перекрывающимся квантовым состояниям и не обязательно имеет характер классической плотности вероятности. Однако, в тех случаях, когда $\phi(v)$ ведет себя как классическая плотность вероятности, действительно имеется незначительная разница между вычислением квантовых и соответствующих классических средних значений.

Функция $\phi(v)$ не единственная весовая функция, которая позволяет вычислять средние значения операторов как классические средние. Мы уже сталкивались с распределением Вигнера в разд. 11.8.1. Однако, $\phi(v)$ отличается от других весовых функций тем, что она совпадает с соответствующей классической плотностью вероятности всякий раз, когда существует классическое описание поля. Довольно капризное поведение $\phi(v)$ в случае строго неклассических состояний есть цена, которую необходимо уплатить за соответствие с классической оптикой.

В качестве простого примера применения оптической теоремы эквивалентности, вычислим среднее число фотонов поля. Поскольку оператор числа частиц равен $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, сразу находим

$$\langle\hat{n}\rangle = \langle|v|^2\rangle_\phi. \tag{11.9.7}$$

Вычисленный нами интеграл в формуле (11.8.22) имел точно такой же вид. В частности, в случае когерентного состояния поля, для которого $\phi(v)$ имеет вид (11.8.13), получаем

$$\langle\hat{n}\rangle = \int |v|^2\delta^2(v-v')\,d^2v = |v'|^2, \tag{11.9.8}$$

что согласуется с (11.2.13).

11.9.1. Квантовые характеристические функции

Среди нормально упорядоченных операторов, которые будут представлять для нас особый интерес в квантовой оптике, есть генератор $e^{u\hat{a}^\dagger}\,e^{-u^*\hat{a}}$, среднее значение которого представляет собой характеристическую функцию $C_N(u,u^*)$, отвечающую нормальному упорядочению. Таким образом,

$$C_N(u,u^*) \equiv \langle e^{u\hat{a}^\dagger}\,e^{-u^*\hat{a}}\rangle = \mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}\,e^{u\hat{a}^\dagger}\,e^{-u^*\hat{a}}]. \tag{11.9.9}$$

Производные от этой характеристической функции по u и u^* порождают нормально упорядоченные моменты операторов рождения и уничтожения[1]. Например,

$$\left[\frac{\partial^{n+m}C_N(u,u^*)}{\partial u^n(\partial(-u^*))^m}\right]_{\substack{u=0\\u^*=0}} = \langle \hat{a}^{\dagger n}\hat{a}^m\rangle. \tag{11.9.10}$$

С учетом теоремы эквивалентности получаем

$$C_N(u,u^*) = \langle e^{uv^*-u^*v}\rangle_\phi = \int \phi(v)\,e^{uv^*-u^*v}\,d^2v. \tag{11.9.11}$$

Поскольку $e^{uv^*-u^*v}$ является двумерным фурье-ядром, мы видим, что $C_N(u,u^*)$ является характеристической функцией, связанной с весовой функцией $\phi(v)$ в обычном смысле теории вероятностей (если не считать возможный неклассический характер $\phi(v)$). При помощи обратного фурье-преобразования выражения (11.9.11) получаем другое интегральное представление для $\phi(v)$ в виде

$$\phi(v) = \frac{1}{\pi^2}\int C_N(u,u^*)\,e^{-uv^*+u^*v}\,d^2u. \tag{11.9.12}$$

Излишне говорить, что существование этого интеграла в обычном смысле, или положительная определенность $\phi(v)$, обеспечивается данным выражением не больше, чем выражением (11.8.11).

Для того чтобы немного глубже изучить поведение $C_N(u,u^*)$, отметим, что характеристическая функция $C_N(u,u^*)$ — это лишь одна из возможных квантовых характеристических функций, определяемых различными порядками операторов. Например, если операторы упорядочены антинормально, получаем характеристическую функцию

$$C_A(u,u^*) \equiv \langle e^{-u^*\hat{a}}\,e^{u\hat{a}^\dagger}\rangle. \tag{11.9.13}$$

Две функции $C_N(u,u^*)$ и $C_A(u,u^*)$ просто связаны между собой. Действительно, из тождества Кемпбелла — Бейкера — Хаусдорфа (11.3.4) следует, что

$$e^{-|u|^2/2}\,e^{u\hat{a}^\dagger}\,e^{-u^*\hat{a}} = e^{u\hat{a}^\dagger-u^*\hat{a}} = e^{|u|^2/2}\,e^{-u^*\hat{a}}\,e^{u\hat{a}^\dagger}, \tag{11.9.14}$$

так что

$$C_N(u,u^*) = e^{|u|^2}\,C_A(u,u^*). \tag{11.9.15}$$

Ясно, что функция $C_N(u,u^*)$ растет намного быстрее при увеличении u, чем функция $C_A(u,u^*)$.

Мы придем к интересному выражению для $C_A(u,u^*)$, если вставим единичный оператор в виде (11.6.4) в определение (11.9.13). Тогда

$$C_A(u,u^*) = \mathrm{Tr}\int \frac{1}{\pi}\hat{\rho}\,e^{-u^*\hat{a}}|v\rangle\langle v|\,e^{u\hat{a}^\dagger}\,d^2v.$$

Видно, что операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$ находятся слева и справа от соответствующих собственных векторов под знаком интеграла, так что их можно заменить на собственные значения v и v^*. Взяв след, приходим к выражению

$$C_A(u,u^*) = \int \frac{1}{\pi}\langle v|\hat{\rho}|v\rangle\,e^{-u^*v+uv^*}\,d^2v, \tag{11.9.16}$$

[1] Мы записали $C_N(u,u^*)$, а не $C_N(u)$, чтобы подчеркнуть то, что u, u^* могут рассматриваться как независимые переменные по отношению к дифференцированию.

из которого видно, что $C_{\mathrm{A}}(u,u^*)$ является фурье-образом абсолютно интегрируемой функции $(1/\pi)\langle v|\hat{\rho}|v\rangle$.

Другая возможная характеристическая функция есть симметризованная, или вейлевски упорядоченная характеристическая функция

$$C_{\mathrm{W}}(u,u^*) \equiv \langle \mathrm{e}^{u\hat{a}^\dagger - u^*\hat{a}}\rangle = \langle \hat{D}(u)\rangle, \tag{11.9.17}$$

которая равна среднему значению оператора смещения $\hat{D}(u)$, рассмотренного в разд. 11.3. Поскольку $\hat{D}(u)$ унитарен, получаем

$$|C_{\mathrm{W}}(u,u^*)| \leqslant 1. \tag{11.9.18}$$

С помощью тождеств Кемпбелла — Бейкера — Хаусдорфа (11.3.4) находим

$$\mathrm{e}^{|u|^2/2}C_{\mathrm{A}}(u,u^*) = C_{\mathrm{W}}(u,u^*) = \mathrm{e}^{-|u|^2/2}C_{\mathrm{N}}(u,u^*), \tag{11.9.19}$$

откуда получаем следующие ограничения для $C_{\mathrm{N}}(u,u^*)$ и $C_{\mathrm{A}}(u,u^*)$:

$$|C_{\mathrm{A}}(u,u^*)| \leqslant \mathrm{e}^{-|u|^2/2}, \quad |C_{\mathrm{N}}(u,u^*)| \leqslant \mathrm{e}^{|u|^2/2}. \tag{11.9.20}$$

Сразу видно, что ограничение для $C_{\mathrm{N}}(u,u^*)$ очень слабое и в общем случае слишком слабое, чтобы гарантировать во всех случаях существование интеграла (11.9.12), представляющего весовую функцию $\phi(v)$ в виде обычной функции. К счастью, во многих практически интересных случаях $C_{\mathrm{N}}(u,u^*)$ растет намного медленнее при увеличении u, чем верхняя граница $\mathrm{e}^{|u|^2/2}$.

11.10. Более общие представления в фазовом пространстве

11.10.1. Введение

Обратимся теперь к более общему, единому рассмотрению представлений в фазовом пространстве и упорядочения операторов, из которого многие из предыдущих результатов следуют как частные случаи. Для начала вспомним так называемую оптическую теорему эквивалентности, выраженную формулой (11.9.4) для произвольной нормально упорядоченной функции $g^{(\mathrm{N})}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$ операторов рождения и уничтожения. Объединяя формулу (11.8.9) для весовой функции и (11.9.4), можно записать

$$\langle g^{(\mathrm{N})}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)\rangle = \int \frac{1}{\pi}\rho^{(\mathrm{A})}(v,v^*)g^{(\mathrm{N})}(v,v^*)\,d^2v, \tag{11.10.1}$$

где функция $\rho^{(\mathrm{A})}(v,v^*)$ получена из оператора плотности $\hat{\rho}$ посредством его нормального упорядочения с последующей заменой операторов $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ на v, v^*, соответственно. Таким образом, можно вычислить квантовое среднее нормально упорядоченного оператора $g^{(\mathrm{N})}(\hat{a},\hat{a}^*)$, вычисляя c-числовой интеграл с некоторой весовой функцией фазового пространства.

Этот результат имеет интересное обобщение для другого операторного упорядочения Ω. Пусть $\bar{\Omega}$ означает порядок, который противоположен Ω (смысл этого будет уточнен ниже). Можно показать, что для Ω-упорядоченного оператора $g^{(\Omega)}(\hat{a},\hat{a}^*)$

$$\langle g^{(\Omega)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger)\rangle = \int \frac{1}{\pi}\rho^{(\bar{\Omega})}(v,v^*)g^{(\Omega)}(v,v^*)\,d^2v. \tag{11.10.2}$$

Тогда оптическая теорема эквивалентности (11.10.1) представляет собой просто частный случай выражения (11.10.2), где $\bar{\Omega}$ отождествляется с нормальным порядком N, а противоположный порядок $\bar{\Omega}$ — с антинормальным порядком A.

Тема обобщенных распределений в фазовом пространстве и ассоциированного упорядочения операторов была раскрыта в работе Вигнера (Wigner, 1932), которая упоминалась в разд. 11.8.1. Мойал (Moyal, 1949) развил эту концепцию еще дальше и показал, что распределение Вигнера соответствует вычислению средних значений операторов в симметричном или вейлевском порядке. Важные обобщения, применимые к другим упорядочениям операторов, были сделаны Лэксом (Lax, 1968), Агарвалом и Вольфом (Agarwal and Wolf, 1968, 1970a, b, c), а также Кэхиллом и Глаубером (Cahill and Glauber, 1969a, b). Нижеприведенный анализ основан, главным образом, на работе Агарвала и Вольфа (для обзора см. также Peřina, 1985, гл. 16 и 1991, разд. 4.8).

11.10.2. Упорядочение операторов

Начнем с того, что введем упорядоченную операторную дельта-функцию, которая играет основную роль в дальнейшем изложении. Двумерный фурье-интеграл

$$\frac{1}{\pi^2}\int e^{\beta(\hat{a}^\dagger - v^*)-\beta^*(\hat{a}-v)}\,d^2\beta$$

можно отождествить с дельта-функцией $\delta^2(\hat{a}-v)_W$, где операторы $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ находятся в симметричном или вейлевском порядке (W) в силу того, что разложение в степенной ряд порождает операторные произведения в симметричном порядке. С другой стороны, как мы видели в разд. 11.9.1 при обсуждении характеристических функций различных упорядочений, имеются соотношения

$$e^{-|\beta|^2/2}\,e^{\beta(\hat{a}^\dagger - v^*)-\beta^*(\hat{a}-v)} = e^{-\beta^*(\hat{a}-v)}\,e^{\beta(\hat{a}^\dagger - v^*)},$$
$$e^{|\beta|^2/2}\,e^{\beta(\hat{a}^\dagger - v^*)-\beta^*(\hat{a}-v)} = e^{\beta(\hat{a}^\dagger - v^*)}\,e^{-\beta^*(\hat{a}-v)}.$$

Таким образом, для Ω-упорядоченной дельта-функции можно записать в более общем виде, что

$$\frac{1}{\pi}\int \Omega(\beta,\beta^*)\,e^{\beta(\hat{a}^\dagger - v^*)-\beta^*(\hat{a}-v)}\,d^2\beta \equiv \pi\delta^2(\hat{a}-v)_\Omega \equiv \hat{\Delta}(v,\Omega), \tag{11.10.3}$$

исходя из предположения, что Ω означает вейлевский порядок (W), когда $\Omega(\beta,\beta^*)=1$, Ω означает нормальный порядок (N), когда $\Omega(\beta,\beta^*)=e^{|\beta|^2}$ и Ω означает антинормальный порядок (A), когда $\Omega(\beta,\beta^*)=e^{-|\beta|^2/2}$. Другие упорядочения операторов, ассоциированные с различными $\Omega(\beta,\beta^*)$, были определены Агарвалом и Вольфом (Agarwal and Wolf, 1968, 1970a, b, c), но мы не будем их здесь рассматривать. Говорят, что порядок $\bar{\Omega}$ является обратным по отношению к Ω, если $\bar{\Omega}(\beta,\beta^*)\Omega(\beta,\beta^*)=1$. Таким образом, нормальный и антинормальный порядки являются обратными друг другу, а вейлевский порядок является обратным самому себе.

Некоторые свойства операторных $\hat{\Delta}$-функций сразу следуют из определения, если вспомнить оператор смещения $\hat{D}(v)$ и его свойства, рассмотренные в разд. 11.3.1. Например, из (11.10.3) найдем

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,[\hat{\Delta}(v,\Omega)] &= \\ &= \mathrm{Tr}\,\frac{1}{\pi}\int \hat{D}(\beta)\,e^{-\beta v^*+\beta^* v}\Omega(\beta,\beta^*)\,d^2\beta = \int \delta^2(\beta)\,e^{-\beta v^*+\beta^* v}\Omega(\beta,\beta^*)\,d^2\beta = \Omega(0,0)=1\end{aligned} \tag{11.10.4}$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,[\hat{\Delta}(\alpha,\Omega)\hat{\Delta}(\gamma,\bar{\Omega})] &= \mathrm{Tr}\,\frac{1}{\pi^2}\int \hat{D}(\beta)\hat{D}(\beta')\,e^{-\beta\alpha^*+\beta^*\alpha}\,e^{-\beta'\gamma^*+\beta'^*\gamma}\Omega(\beta,\beta^*)\bar{\Omega}(\beta',\beta'^*)\,d^2\beta\,d^2\beta' = \\ &= \frac{1}{\pi}\int \delta^2(\beta+\beta')\,e^{-\beta(\alpha^*-\gamma^*)+\beta^*(\alpha-\gamma)}\Omega(\beta,\beta^*)\bar{\Omega}(-\beta,-\beta^*)\,d^2\beta\,d^2\beta' = \\ &= \frac{1}{\pi}\int e^{-\beta(\alpha^*-\gamma^*)+\beta^*(\alpha-\gamma)}\,d^2\beta = \pi\delta^2(\alpha-\gamma).\end{aligned} \tag{11.10.5}$$

Также

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int \hat{\Delta}(v,\Omega)\,d^2v &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{\pi^2}\int \Omega(\beta,\beta^*)\,e^{\beta\hat{a}^\dagger-\beta^*\hat{a}}\,e^{\beta^* v-\beta v^*}\,d^2v\,d^2\beta = \int \Omega(\beta,\beta^*)\,e^{\beta\hat{a}^\dagger-\beta^*\hat{a}}\delta^2(\beta)\,d^2\beta = \Omega(0,0)=1.\end{aligned} \tag{11.10.6}$$

Можно использовать упорядоченную операторную $\hat{\Delta}$-функцию для того, чтобы привести произвольный оператор $\hat{A}=A(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$ в порядок Ω. Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{Tr}\,[\hat{\Delta}(\beta,\bar{\Omega})A(\hat{a},\hat{a}^\dagger)]\hat{\Delta}(\beta,\Omega)\,d^2\beta$$

и воспользуемся (11.10.3) и (11.10.4). В результате получим

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{Tr}\,[\hat{\Delta}(\beta,\bar{\Omega})A(\hat{a},\hat{a}^\dagger)]\hat{\Delta}(\beta,\Omega)\,d^2\beta = \int \mathrm{Tr}\,[\delta^2(\hat{a}-\beta)_{\Omega}A(\hat{a},\hat{a}^\dagger)]\hat{\Delta}(\beta,\Omega)\,d^2\beta = \\ = \int A^{(\bar{\Omega})}(\beta,\beta^*)\delta^2(\hat{a}-\beta)_{\Omega}\,d^2\beta = A^{(\Omega)}(\hat{a},\hat{a}^\dagger). \quad (11.10.7)$$

Таким образом, преобразование оператора $\hat{A}$, представленное интегралом в левой части, воспроизводит $\hat{A}$, но в Ω-упорядоченном виде. Аналогично, если $A(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$ и $B(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$ есть два оператора, то используя (11.10.3) и (11.10.5), тем же способом найдем, что

$$\mathrm{Tr}\,[A(\hat{a},\hat{a}^\dagger)B(\hat{a},\hat{a}^\dagger)] = \frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{Tr}\int \mathrm{Tr}\,[\hat{\Delta}(v,\bar{\Omega})A(\hat{a},\hat{a}^\dagger)]\mathrm{Tr}\,[\hat{\Delta}(v',\Omega)B(\hat{a},\hat{a}^\dagger)]\hat{\Delta}(v,\Omega)\hat{\Delta}(v',\bar{\Omega})\,d^2v\,d^2v' = \\ = \frac{1}{\pi}\int \mathrm{Tr}\,[\hat{\Delta}(v,\bar{\Omega})A(\hat{a},\hat{a}^\dagger)]\mathrm{Tr}\,[\hat{\Delta}(v,\Omega)B(\hat{a},\hat{a}^\dagger)]\,d^2v = \frac{1}{\pi}\int A^{(\bar{\Omega})}(v,v^*)B^{(\Omega)}(v,v^*)\,d^2v. \quad (11.10.8)$$

11.10.3. Приложение к квантовым средним и диагональному представлению по когерентным состояниям

Применим (11.10.8) к частному случаю, когда $\hat{A}$ представляет собой оператор плотности $\hat{\rho}$, так что $A(\hat{a},\hat{a}^\dagger) = \rho(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$. Тогда

$$\mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}\hat{B}) = \langle\hat{B}\rangle = \frac{1}{\pi}\int \rho^{(\bar{\Omega})}(v,v^*)B^{(\Omega)}(v,v^*)\,d^2v. \quad (11.10.9)$$

Если Ω означает нормальное упорядочение N, то в данном выражении можно распознать оптическую теорему эквивалентности, в которой весовая функция $\phi(v)$ выражена в виде $(1/\pi)\rho^{(\mathrm{A})}(v,v^*)$ [ср. (11.8.9)]. Очевидно, данная теорема применима также и к другим типам упорядочений.

Наконец, воспользуемся (11.10.7) для вывода диагонального представления по когерентным состояниям (11.8.1). Сначала отождествим Ω с антинормальным упорядочением A. Тогда по определению

$$\hat{\Delta}(v,\Omega^{(\mathrm{A})}) = \frac{1}{\pi}\int \Omega^{(\mathrm{A})}(\beta,\beta^*)\,\mathrm{e}^{\beta\hat{a}^\dagger-\beta^*\hat{a}}\,\mathrm{e}^{-v^*\beta+v\beta^*}\,d^2\beta = \\ = \frac{1}{\pi}\int \mathrm{e}^{-|\beta|^2/2}\,\mathrm{e}^{\beta\hat{a}^\dagger-\beta^*\hat{a}}\,\mathrm{e}^{-v^*\beta+v\beta^*}\,d^2\beta = \frac{1}{\pi}\int \mathrm{e}^{-\beta^*\hat{a}}\,\mathrm{e}^{\beta\hat{a}^\dagger}\,\mathrm{e}^{-v^*\beta+v\beta^*}\,d^2\beta.$$

Теперь вставим единичный оператор в виде $1 = \frac{1}{\pi}\int |v'\rangle\langle v'|\,d^2v'$ между множителями $\mathrm{e}^{-\beta^*\hat{a}}$ и $\mathrm{e}^{\beta\hat{a}^\dagger}$ и воспользуемся тем, что $|v'\rangle$ является правым собственным состоянием оператора $\hat{a}$. Тогда получим

$$\hat{\Delta}(v,\Omega^{(\mathrm{A})}) = \frac{1}{\pi^2}\int \mathrm{e}^{\beta(v'^*-v^*)-\beta^*(v'-v)}|v'\rangle\langle v'|\,d^2\beta\,d^2v' = \int \delta^2(v'-v)|v'\rangle\langle v'|\,d^2v' = |v\rangle\langle v|. \quad (11.10.10)$$

Подставляя данный результат в (11.10.7), отождествляя оператор $\hat{A}$ с оператором плотности $\hat{\rho}$ и осуществляя замену $\Omega \to \Omega^{(\mathrm{A})}$, находим

$$\hat{\rho} = \int \frac{1}{\pi}\mathrm{Tr}\,[\hat{\Delta}(v,\Omega^{(\mathrm{N})})\hat{\rho}]|v\rangle\langle v|\,d^2v = \int \frac{1}{\pi}\rho^{(\mathrm{A})}(v,v^*)|v\rangle\langle v|\,d^2v. \quad (11.10.11)$$

Данные рассуждения можно рассматривать как формальный вывод диагонального или P-представления оператора плотности $\hat{\rho}$.

11.11. Многомодовые поля

До сих пор рассмотрение когерентных состояний и основанных на них представлений ограничивалось случаем одномодового электромагнитного поля. Теперь наступил момент возвращения к более общей ситуации, когда имеется неограниченное множество мод, различающихся волновым вектором $\mathbf{k}$ и индексом поляризации s.

Когерентное состояние, принадлежащее этому большому гильбертову пространству, различается теперь множеством комплексных чисел $v_{\mathbf{k}s}$, по одному для каждой моды, и задается в виде прямого произведения состояний $|v_{\mathbf{k}s}\rangle$ по всем модам

$$\prod_{\mathbf{k}s} |v_{\mathbf{k}s}\rangle.$$

Этот общий вариант, очевидно, содержит частный случай, когда заселена только одна мода поля, а остальные являются незаполненными. Удобно опять воспользоваться обозначением $\{v\}$ для множества комплексных чисел $v_{\mathbf{k}s}$. Тогда можно обозначить когерентное состояние через $|\{v\}\rangle$ и записать

$$|\{v\}\rangle = \prod_{\mathbf{k},s} |v_{\mathbf{k}s}\rangle = \tag{11.11.1а}$$

$$= \prod_{\mathbf{k},s} \mathrm{e}^{(v_{\mathbf{k}s}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s} - v^*_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}s})}|0_{\mathbf{k}s}\rangle = \tag{11.11.1б}$$

$$= \prod_{\mathbf{k},s} \mathrm{e}^{-|v^2_{\mathbf{k}s}|/2} \sum_{n_{\mathbf{k}s}} \frac{(v_{\mathbf{k}s})^{n_{\mathbf{k}s}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k}s}!}} |n_{\mathbf{k}s}\rangle. \tag{11.11.1в}$$

Состояние $|\{v\}\rangle$ и сопряженное ему состояние $\langle\{v\}|$ являются, кроме того, правым и левым собственными состояниями операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$ и $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}$, так что

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}|\{v\}\rangle = v_{\mathbf{k}s}|\{v\}\rangle, \tag{11.11.2}$$

$$\langle\{v\}|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s} = v^*_{\mathbf{k}s}\langle\{v\}|. \tag{11.11.3}$$

Из (11.6.1) следует, что скалярное произведение двух когерентных состояний равно

$$\langle\{v'\}|\{v''\}\rangle = \prod_{\mathbf{k},s} \mathrm{e}^{-|v'_{\mathbf{k}s} - v''_{\mathbf{k}s}|^2/2}\, \mathrm{e}^{(v'^*_{\mathbf{k}s}v''_{\mathbf{k}s} - v'_{\mathbf{k}s}v'^*_{\mathbf{k}s})/2}, \tag{11.11.4}$$

так что

$$|\langle\{v'\}|\{v''\}\rangle|^2 = \prod_{\mathbf{k},s} \mathrm{e}^{-|v'_{\mathbf{k}s} - v''_{\mathbf{k}s}|^2/2} = \exp\left(-\sum_{\mathbf{k}s} |v'_{\mathbf{k}s} - v''_{\mathbf{k}s}|^2\right). \tag{11.11.5}$$

Сразу ясно, что эти выражения не будут обращаться в нуль, так же, как для одномодовых полей, только если

$$\sum_{\mathbf{k}s} |v'_{\mathbf{k}s} - v''_{\mathbf{k}s}|^2 < \infty. \tag{11.11.6}$$

Так как

$$\sum_{\mathbf{k}s} |v'_{\mathbf{k}s} - v''_{\mathbf{k}s}|^2 \leqslant \sum_{\mathbf{k}s} (|v'_{\mathbf{k}s}| + |v''_{\mathbf{k}s}|)^2 \leqslant 2\sum_{\mathbf{k}s} (|v'_{\mathbf{k}s}|^2 + |v''_{\mathbf{k}s}|^2),$$

условие (11.11.6) будет удовлетворено, если для каждого когерентного состояния

$$\sum_{\mathbf{k}s} |v_{\mathbf{k}s}|^2 < \infty, \tag{11.11.7}$$

что означает согласно (11.2.13), что среднее число фотонов конечно.

Разложение единичного оператора по когерентным состояниям $|\{v\}\rangle$ можно представить в виде произведения операторов в (11.6.4) по всем модам. В результате получим

$$1 = \prod_{\mathbf{k}s} \left[\frac{1}{\pi} \int |v_{\mathbf{k}s}\rangle\langle v_{\mathbf{k}s}| \, d^2 v_{\mathbf{k}s} \right]. \tag{11.11.8}$$

Удобно ввести обозначение

$$d\{v\} \equiv \prod_{\mathbf{k}s} [d^2 v_{\mathbf{k}s}] \tag{11.11.9а}$$

для произведения дифференциалов и использовать обозначение

$$d\mu\{v\} \equiv \prod_{\mathbf{k}s} [\frac{1}{\pi} d^2 v_{\mathbf{k}s}] \tag{11.11.9б}$$

для произведения перенормированных дифференциалов. Это позволяет записать (11.11.8) в компактном виде

$$1 = \int |\{v\}\rangle\langle\{v\}| \, d\mu\{v\}, \tag{11.11.10}$$

что выражает полноту когерентных состояний.

Для оператора плотности $\hat{\rho}$ можно опять задать диагональное представление по когерентным состояниям, которое принимает вид

$$\hat{\rho} = \int \phi(\{v\}) |\{v\}\rangle\langle\{v\}| \, d\{v\}, \tag{11.11.11}$$

где ϕ является теперь функционалом на множестве $\{v\}$, который называется весовым функционалом.

Для любого функционала $g^{(\mathrm{N})}(\{\hat{a}\}, \{\hat{a}^\dagger\})$ нормально упорядоченных операторов рождения и уничтожения можно сформулировать оптическую теорему эквивалентности, которая является точным аналогом (11.9.4), и мы записываем

$$\langle g^{(\mathrm{N})}(\{\hat{a}\}, \{\hat{a}^\dagger\})\rangle = \int \phi(\{v\}) g^{(\mathrm{N})}(\{v\}, \{v^*\}) \, d\{v\} = \langle g^{(N)}(\{v\}, \{v^*\})\rangle_\phi. \tag{11.11.12}$$

Например, рассмотрим нормально упорядоченный характеристический функционал

$$C_{\mathrm{N}}(\{u\}) \equiv \left\langle \prod_{\mathbf{k}s} [\mathrm{e}^{u_{\mathbf{k}s}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}} \, \mathrm{e}^{-u^*_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}s}}] \right\rangle = \left\langle \prod_{\mathbf{k}s} [\mathrm{e}^{u_{\mathbf{k}s}v^*_{\mathbf{k}s} - u^*_{\mathbf{k}s}v_{\mathbf{k}s}}] \right\rangle_{\phi\{v\}}, \tag{11.11.13}$$

который формально является многократным фурье-образом весового функционала. Обратное преобразование Фурье выражения (11.11.13) дает весовой функционал

$$\phi(\{v\}) = \int C_{\mathrm{N}}(\{u\}) \prod_{\mathbf{k}s} \left[\frac{1}{\pi^2} \mathrm{e}^{u^*_{\mathbf{k}s}v_{\mathbf{k}s} - u_{\mathbf{k}s}v^*_{\mathbf{k}s}} \, d^2 u_{\mathbf{k}s} \right]. \tag{11.11.14}$$

Как и раньше, фурье-образ может не существовать в смысле теории обычных функций, но может существовать как обобщенный функционал.

Различные операторы электромагнитного поля типа $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$, $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$ имеют особенно простые средние значения, если поле находится в когерентном состоянии. Воспользовавшись разложениями по модам (10.4.38)—(10.4.40) и соотношениями для собственных значений (11.11.2) и (11.11.3), сразу найдем

$$\langle\{v\}|\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)|\{v\}\rangle = \frac{1}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}s} \left(\frac{\hbar}{2\omega} \right)^{1/2} [v_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot r - \omega t)} + \text{к.с.}], \tag{11.11.15}$$

$$\langle\{v\}|\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)|\{v\}\rangle = \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}s} \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^{1/2} [v_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot r - \omega t)} - \text{к.с.}], \tag{11.11.16}$$

$$\langle\{v\}|\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)|\{v\}\rangle = \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}s} \left(\frac{\hbar}{2\omega} \right)^{1/2} [v_{\mathbf{k}s} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot r - \omega t)} - \text{к.с.}]. \tag{11.11.17}$$

Видно, что каждое из этих разложений, в точности, имеет вид разложения по модам соответствующего классического поля. Тем не менее, как уже было показано в случае одной моды, дисперсия векторов поля в когерентном состоянии не обращается в нуль, несмотря на то, что полученные выражения для средних значений каждых из векторов предполагает наличие сильного сходства с классическим полем, имеющим точно определенную комплексную амплитуду. Это еще один пример различия между классическим и квантовым описаниями электромагнитного поля.

В разд. 11.8 мы обратили внимание на то, что поле лазера, генерирующего одну моду при существенном превышении порога, можно рассматривать как смесь одномодовых когерентных состояний $|v\rangle$ с одинаковым значением $|v|$, но со случайно распределенными значениями $\arg v$. Рассмотрим соответствующий функционал фазового пространства $\phi(\{v\})$ во многомодовом обозначении. Если $\mathbf{k}'$, s' соответствуют возбужденной моде поля, а все остальные моды не возбуждены, и если возбуждение моды характеризуется выражением (11.8.14), то, очевидно, получаем

$$\phi(\{v\}) = \frac{1}{2\pi|v_{\mathbf{k}'s'}|}\delta(|v_{\mathbf{k}'s'}| - r_0) \prod_{\mathbf{k},s\neq\mathbf{k}',s'} \delta^2(v_{\mathbf{k},s}). \tag{11.11.18}$$

Данное представление состояния все еще излишне упрощает действительную физическую ситуацию, поскольку, фактически, частота света не постоянна, а дрейфует в пределах некоторого узкого диапазона $c\Delta k'$. Однако, с точки зрения последовательности случайно распределенных во времени измерений, каждое из которых занимает интервал времени меньший, чем $1/\Delta k'$, дрейф частоты не наблюдается. В этом случае экспериментальная ситуация довольно хорошо описывается весовым функционалом (11.11.18).

11.11.1. Когерентные состояния в непрерывном представлении

Если полевые векторы задаются разложениями в интеграл Фурье, как в формулах (10.10.1)—(10.10.3), и $\mathbf{k}$-моды образуют континуум, то мы по-прежнему можем ввести когерентные состояния как собственные состояния оператора уничтожения $\hat{a}(\mathbf{k}, s)$ (Kibble, 1968). Состояния $|(\mathbf{k}, s)\rangle$ теперь являются функционалами от непрерывной функции $v(\mathbf{k}, s)$ от $\mathbf{k}$, и можно записать

$$\hat{a}(\mathbf{k}, s)|v(\mathbf{k}, s)\rangle = v(\mathbf{k}, s)|v(\mathbf{k}, s)\rangle. \tag{11.11.19}$$

Используя соотношение полноты (10.10.12) для непрерывных фоковских состояний, можно построить непрерывное фоковское представление когерентного состояния $|v(\mathbf{k}, s)\rangle$, соответствующего состоянию, задаваемому формулой (11.11.1в). Вычисление, аналогичное тому, которое было сделано в разд. 11.2, приводит к результату

$$|v(\mathbf{k}, s)\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_s \int |v(\mathbf{k}, s)|^2\, d^3k\right]\left\{|\text{vac}\rangle + \frac{1}{\sqrt{1!}}\sum_{s_1}\int v(\mathbf{k}_1, s_1)|\mathbf{k}_1, s_1\rangle\, d^3k_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2!}}\sum_{s_1}\sum_{s_2}\iint v(\mathbf{k}_1, s_1)v(\mathbf{k}_2, s_2)|\mathbf{k}_1, s_1, \mathbf{k}_2, s_2\rangle\, d^3k_1\, d^3k_2 + \ldots\right\}. \tag{11.11.20}$$

Очевидно, с когерентными состояниями немного легче обращаться в случае дискретных мод[1].

11.12. Положительно- и отрицательно-частотные операторы поля

В разд. 10.4 мы уже сталкивались с модовыми разложениями операторов электромагнитного поля [см. (10.4.38), (10.4.39) и (10.4.40)]. Все они имеют общий вид

$$\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k}s}[l(\omega)\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + l^*(\omega)\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s}\,e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}],$$

[1] Более строгое изложение этого вопроса содержится в книге (Klauder and Sudarshan, 1968, разд. 7.4).

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},s}$ — единичный вектор поляризации, ортогональный вектору $\mathbf{k}$, и $l(\omega)$ — некоторая простая функция ω, такая как $(\hbar/2\omega\varepsilon_0)^{1/2}$ для векторного потенциала. Часто удобно объединить эти разложения, записывая

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t) + \hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t), \tag{11.12.1}$$

где $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},t)$ — любой из полевых векторов, и

$$\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}s} l(\omega)\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}. \tag{11.12.2}$$

Приписывая различные значения величине $l(\omega)$, можно, таким образом, определить весь диапазон линейно связанных полевых векторов. Данное разложение подчеркивает тот факт, что каждое поле $\hat{\mathbf{F}}$ можно рассматривать как сумму двух операторов, сопряженных друг другу, каждый из которых есть комбинация только операторов уничтожения или только операторов рождения. Как мы увидим в гл. 14, неэрмитовые операторы $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$, в некоторой степени, играют роль операторов (конфигурационного пространства) рождения и уничтожения в пространственно-временно́й точке $(\mathbf{r},t)$. Более того, $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ есть положительно-частотная часть поля $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},t)$, в том смысле, что она зависит от времени только через множители $\mathrm{e}^{-i\omega t}$ в разложении, тогда как $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$ есть отрицательно-частотная часть поля, временна́я зависимость которой определяется множителями $\mathrm{e}^{i\omega t}$. Очевидно, $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и сопряженный ему оператор $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$ очень близко соответствуют аналитическим сигналам, которые использовались при классическом рассмотрении оптической когерентности (гл. 4 и 6), если не считать того, что они являются операторами гильбертова пространства. Мы скоро увидим, что данное соответствие не является просто формальным, и что интерпретация $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$ через операторы уничтожения и рождения дает еще одно объяснение появлению аналитических сигналов при рассмотрении оптической когерентности.

Стоит напомнить, что реальное поле часто трудно поддается измерению как в оптическом диапазоне, так и за его пределами. Большинство наблюдений в оптике основаны на поглощении света либо с помощью фотодетектора, либо с помощью фотопластинки, либо с помощью глаза. Таким образом, не удивительно, что оператор поглощения $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$, а не оператор реального поля $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},t)$ играет основную роль при описании экспериментов.

Мы видим, что вследствие (11.11.2) и (11.11.3), когерентное состояние также является правым или левым собственным состоянием операторов $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ или $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$, соответственно. Ибо

$$\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)|\{v\}\rangle = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}s} l(\omega)v_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}|\{v\}\rangle = \mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t)|\{v\}\rangle, \tag{11.12.3}$$

где

$$\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t) \equiv \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}s} l(\omega)v_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{11.12.4}$$

и, аналогично,

$$\langle\{v\}|\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t) = \mathbf{F}^{(-)}(\mathbf{r},t)\langle\{v\}|. \tag{11.12.5}$$

Здесь $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{F}^{(-)}(\mathbf{r},t)$ есть просто положительно-частотные и отрицательно-частотные части классических c-числовых полей, имеющих множество фурье-амплитуд $\{v\}$. Очевидно, $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{F}^{(-)}(\mathbf{r},t)$ оба являются аналитическими сигналами в том же смысле, что и в разд. 3.1. Они аналитичны в противоположных половинах комплексной t-плоскости.

11.12.1. Коммутационные соотношения

Мы видим, что аналитические сигналы, которые так широко использовались при классическом описании оптической когерентности, можно рассматривать как правые и левые собственные значения положительно- и отрицательно-частотных частей полевых операторов, принадлежащие соответствующему когерентному состоянию. Поэтому не удивительно, что обнаруживается довольно близкое соответствие между классическими корреляционными функциями электромагнитного поля, выраженными через аналитические сигналы, и квантовыми корреляционными функциями, выраженными через положительно- и

отрицательно-частотные части операторов поля. Квантовые корреляционные функции будут просто средними значениями произведений операторов $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$, взятых в разных точках пространства-времени. Однако, вследствие некоммутативности операторов $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$, для одного и того же множества операторов можно определить много различных корреляционных функций.

Коммутатор операторов $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$ легко вычисляется с помощью коммутационного соотношения (10.3.9). Из разложения (11.12.2) получаем

$$
\begin{aligned}
[\hat{F}_i^{(+)}(\mathbf{r}_1,t_1),\hat{F}_j^{(-)}(\mathbf{r}_2,t_2)] &= \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k}s}\sum_{\mathbf{k}'s'} l(\omega)l^*(\omega')[\hat{a}_{\mathbf{k}s},\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}](\varepsilon_{\mathbf{k}s})_i(\varepsilon^*_{\mathbf{k}'s'})_j\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_2-\omega t_1+\omega' t_2)} = \\
&= \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k}s}|l(\omega)|^2(\varepsilon_{\mathbf{k}s})_i(\varepsilon^*_{\mathbf{k}s})_j\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)-\omega(t_1-t_2)]} = \\
&= \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k}}|l(\omega)|^2\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)-\omega(t_1-t_2)]} \to \\
&\to \frac{1}{(2\pi)^3}\int|l(\omega)|^2\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)-\omega(t_1-t_2)]}\,d^3k, \qquad (11.12.6)
\end{aligned}
$$

где мы воспользовались тензорным соотношением (10.8.2) и правилом (10.8.4) для замены суммы на интеграл. Конечно, в случае свободного поля различные операторы $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ коммутируют между собой, в силу коммутирования операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$. То же самое относится и к операторам $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$.

11.12.2. Нормально упорядоченные корреляционные функции

Среди всех корреляционных функций поля, которые мы можем записать, наибольший практический интерес представляют нормально упорядоченные корреляционные функции типа

$$
\Gamma^{(N,M)} \equiv \langle \hat{F}^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}^{(-)}_{i_2}(\mathbf{r}_2,t_2)\ldots\hat{F}^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)\hat{F}^{(+)}_{j_M}(\mathbf{r}'_M,t'_M)\ldots\hat{F}^{(+)}_{j_2}(\mathbf{r}'_2,t'_2)\hat{F}^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1)\rangle.
$$

С помощью оптической теоремы эквивалентности получаем

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(N,M)} &\equiv \langle \hat{F}^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}^{(-)}_{i_2}(\mathbf{r}_2,t_2)\ldots\hat{F}^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)\hat{F}^{(+)}_{j_M}(\mathbf{r}'_M,t'_M)\ldots\hat{F}^{(+)}_{j_2}(\mathbf{r}'_2,t'_2)\hat{F}^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1)\rangle = \\
&= \langle F^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)F^{(-)}_{i_2}(\mathbf{r}_2,t_2)\ldots F^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)F^{(+)}_{j_M}(\mathbf{r}'_M,t'_M)\ldots F^{(+)}_{j_2}(\mathbf{r}'_2,t'_2)F^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1)\rangle_\phi, \qquad (11.12.7)
\end{aligned}
$$

что подчеркивает близкое соответствие между классическими и квантовыми корреляциями (см. также Wolf, 1963).

В заключение вычислим явно эту корреляционную функцию в случае, когда поле находится в когерентном состоянии $|\{v'\}\rangle$. Если $\mathbf{F}'^{(+)}(\mathbf{r},t)$ есть собственное значение оператора $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$, принадлежащее состоянию $|\{v'\}\rangle$, то, учитывая, что все операторы в $\Gamma^{(N,M)}$ можно заменить на их правые и левые собственные значения, сразу получим

$$
\Gamma^{(N,M)} = F'^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)F'^{(-)}_{i_2}(\mathbf{r}_2,t_2)\ldots F'^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)F'^{(+)}_{j_M}(\mathbf{r}'_M,t'_M)\ldots F'^{(+)}_{j_2}(\mathbf{r}'_2,t'_2)F'^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1). \qquad (11.12.8)
$$

Таким образом, корреляционная функция распадается на произведение комплексных функций, что характерно для полностью когерентного поля (см. разд. 4.5). Теперь появилось обоснование термина «когерентное состояние поля», поскольку все нормально упорядоченные корреляционные функции факторизуются таким же образом. В частности, вычисляя степень (нормально упорядоченной) когерентности второго порядка для двух произвольных точек пространства-времени $\mathbf{r}_1$, t_1 и $\mathbf{r}_2$, t_2 в когерентном состоянии $|\{v'\}\rangle$, находим

$$
\frac{|\langle\{v'\}|\hat{F}^{(-)}_i(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}^{(+)}_j(\mathbf{r}_2,t_2)|\{v'\}\rangle|}{\langle\{v'\}|\hat{F}^{(-)}_i(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}^{(+)}_i(\mathbf{r}_1,t_1)|\{v'\}\rangle^{1/2}\langle\{v'\}|\hat{F}^{(-)}_j(\mathbf{r}_2,t_2)\hat{F}^{(+)}_j(\mathbf{r}_2,t_2)|\{v'\}\rangle^{1/2}} = 1, \qquad (11.12.9)
$$

как и следовало ожидать в случае когерентного поля.

11.13. Поле, создаваемое классическим током

До сих пор мы обсуждали когерентные состояния электромагнитного поля только математически. Мы показали, что они имеют интересные свойства и образуют полезное представление. Однако, мы пока еще не указали, как можно создавать такие состояния. Перед тем, как закончить обсуждение когерентных состояний, мы исправим эту ситуацию, рассмотрев, по крайней мере, один пример, в котором источник излучения создает когерентное состояние поля. Мы покажем, что классическое, заданное распределение тока всегда создает электромагнитное поле в когерентном состоянии. Это впервые было показано Глаубером (Glauber, 1963b). Хотя тема взаимодействия излучения с веществом относится к последующим главам, вычисление будет очень простым и даст хорошую иллюстрацию развитого формализма.

Рассмотрим квантовое электромагнитное поле, задаваемое векторным потенциалом $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)$, которое взаимодействует с классическим электрическим током, описываемым векторной плотностью тока $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$. Тогда, как хорошо известно из электромагнитной теории, гамильтониан взаимодействия $\hat{H}_I(t)$ определяется интегралом по всему пространству

$$\hat{H}_I(t) = -\int_{L^3} \mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)\,d^3r. \tag{11.13.1}$$

Мы будем считать ток классическим c-числовым током, который не изменяется при взаимодействии с полем. С другой стороны, поле будем рассматривать как квантованную систему, в которой полевые векторы являются операторами гильбертова пространства. Удобно перейти в картину взаимодействия, в которой полевые операторы эволюционируют во времени точно также, как эволюционировали бы в отсутствии взаимодействия. Используя разложение (10.4.38) для $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)$, получаем для $\hat{H}_I(t)$ следующее выражение

$$\hat{H}_I(t) = -\frac{1}{\varepsilon_0^{1/2}L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2}[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},s}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{k},t)\hat{a}_{\mathbf{k},s}\,e^{-i\omega t} + \boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k},s}\cdot\mathbf{J}^*(\mathbf{k},t)\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},s}\,e^{i\omega t}], \tag{11.13.2}$$

где

$$\mathbf{J}(\mathbf{k},t) \equiv \int_{L^3}\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,d^3r \tag{11.13.3}$$

можно рассматривать как фурье-образ плотности тока. Теперь учтем, что инфинитезимальный оператор эволюции в картине взаимодействия, описывающий эволюцию состояния между моментами времени t и $t+\Delta t$, задается выражением

$$\hat{U}(t+\Delta t,t) = \exp(-i\hat{H}_I(t)\Delta t/\hbar). \tag{11.13.4}$$

Используя разложение (11.13.2) для $\hat{H}_I$ и вводя обозначение

$$-\frac{i}{\hbar}\frac{1}{\varepsilon_0^{1/2}L^{3/2}}\left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},s}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{k},t)\,e^{-i\omega t} \equiv u^*_{\mathbf{k}s}(t), \tag{11.13.5}$$

можно выразить $\hat{U}(t+\Delta t,t)$ в компактном виде

$$\hat{U}(t+\Delta t,t) = \exp\left(\Delta t\sum_{\mathbf{k},s}[-u^*_{\mathbf{k}s}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}s} + u_{\mathbf{k}s}(t)\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}]\right) =$$

$$= \prod_{\mathbf{k},s}\exp[\Delta t(-u^*_{\mathbf{k}s}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}s} + u_{\mathbf{k}s}(t)\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s})] = \prod_{\mathbf{k},s}\hat{D}[\Delta t\,u_{\mathbf{k}s}(t)], \tag{11.13.6}$$

где $\hat{D}$ есть уже известный оператор смещения, определяемый выражением (11.3. 7). Следовательно, оператор плотности $\hat{\rho}(t+\Delta t)$ в момент времени $t+\Delta t$ связан с оператором плотности $\hat{\rho}(t)$ в момент t соотношением

$$\hat{\rho}(t+\Delta t) = \prod_{\mathbf{k},s}\hat{D}[\Delta t\,u_{\mathbf{k}s}(t)]\hat{\rho}(t)\prod_{\mathbf{k},s}\hat{D}^\dagger[\Delta t\,u_{\mathbf{k}s}(t)]. \tag{11.13.7}$$

Мы уже показали, что состояние, возникающее в результате действия оператора смещения $\hat{D}(v)$ на вакуумное состояние $|\text{vac}\rangle$, является когерентным состоянием $|v\rangle$, и что состояние, возникающее при воздействии $\hat{D}(v)$ на когерентное состояние $|v'\rangle$, есть когерентное состояние $|v+v'\rangle$, с точностью до фазового множителя [см. (11.3.15)]. Применяя эти результаты к многомодовому случаю (11.13.7), мы сразу видим, что если начальное состояние электромагнитного поля при $t=0$ представляет собой вакуумное состояние

$$\hat{\rho}(0) = |\text{vac}\rangle\langle\text{vac}|,$$

и если в этот момент времени включается классический ток, то в момент Δt

$$\hat{\rho}(\Delta t) = \prod_{\mathbf{k},s} |\Delta t\, u_{\mathbf{k}s}(0)\rangle\langle\Delta t\, u_{\mathbf{k}s}(0)|. \tag{11.13.8}$$

Действуя многократно дифференциальными операторами смещения, находим, что через конечный промежуток времени t оператор плотности будет иметь вид

$$\hat{\rho}(t) = |\{v(t)\}\rangle\langle\{v(t)\}|, \tag{11.13.9}$$

где $|\{v(t)\}\rangle$ — многомодовое когерентное состояние, а $v_{\mathbf{k}s}(t)$ задается выражением

$$v_{\mathbf{k}s}(t) \equiv \int_0^t u_{\mathbf{k}s}(t')\,dt'. \tag{11.13.10}$$

Состояние поля зависит от тока непрерывным образом, но всегда остается когерентным, если источник представляет собой заданный классический ток.

Мы видим, таким образом, что когерентное состояние поля является не только математической конструкцией, обладающей интересными свойствами, но оно и довольно ясно реализуемо. Более того, данный пример опять показывает, что когерентное состояние является квантовым состоянием, которое тесно связано с классическими полями через классические источники. Если начальный ток определен не полностью, а только статистически, так что каждую реализацию ансамбля можно рассматривать как заданный классический ток, то оператор плотности $\hat{\rho}(t)$ будет представлять собой смесь когерентных состояний

$$\hat{\rho}(t) = \int \phi(\{v(t)\})|\{v(t)\}\rangle\langle\{v(t)\}|\,d\{v\}, \tag{11.13.11}$$

где весовой функционал $\phi(\{v(t)\})$ есть теперь истинный функционал классической вероятности. Причина этого, конечно, в том, что он отражает неопределенность в описании классического тока, а не квантовые неопределенности, возникающие из-за взаимодействия квантовых систем.

Задачи

11.1 Используя аналитические свойства проекции когерентного состояния на другое состояние, определите, имеет ли оператор рождения фотона $\hat{a}^\dagger$ для одномодового поля правый собственный вектор.

11.2 Сударшаном (Sudarshan, 1963) было получено следующее выражение для плотности распределения в фазовом пространстве (или P-представление) $\phi(v)$:

$$\phi(v) = \frac{1}{2\pi r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\rho_{nm}\frac{\sqrt{n!\,m!}}{(n+m)!}\exp[r^2 + i\theta(m-n)]\left(-\frac{\partial}{\partial r}\right)^{n+m}\delta(r).$$

Здесь $\rho_{mn} = \langle n|\hat{\rho}|m\rangle$, $v = r\,e^{i\theta}$, а радиальная дельта-функция нормирована таким образом, что $\int_0^\infty \delta(r)dr = 1$. Покажите, что формально это является решением задачи построения диагонального представления оператора плотности $\hat{\rho}$ по когерентным состояниям.

11.3 Лазер генерирует одновременно две независимые аксиальные моды с частотами ω_1, ω_2, которые имеют одинаковую линейную поляризацию, характеризуемую единичным вектором $\boldsymbol{\varepsilon}$, и одинаковую плотность энергии. Рассмотрим сокращенное гильбертово пространство только с этими двумя модами и предположим, что каждую моду можно рассматривать как одномодовый лазер со случайной фазой. Каково P-представление лазерного поля? Вычислите характеристическую функцию $\langle \exp(i\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\hat{\mathbf{E}}\xi)\rangle$ эрмитового оператора электрического поля $\hat{\mathbf{E}}$.

11.4 Найдите все правые собственные значения оператора $\hat{a}\operatorname{ch}\theta + \hat{a}^\dagger \operatorname{sh}\theta$ для действительных θ.

11.5 Электромагнитное поле имеет следующее гейзенберговское уравнение движения для оператора уничтожения фотона $\hat{a}_l(t)$, соответствующего l-ой моде поля:

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_l(t) = f_l(\{\hat{a}(t)\}, t).$$

Здесь f_l есть некоторый функционал на множестве $\{\hat{a}(t)\}$, зависящий от времени t. Покажите, что состояние этого поля в картине Шредингера, которое было когерентным в момент $t = 0$, остается когерентным для всех t.

11.6 Многомодовое оптическое поле находится в квантовом состоянии $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\{n'\}\rangle + |\{n''\}\rangle)$, где $|\{n'\}\rangle$, $|\{n''\}\rangle$ — два различных фоковских состояния с полными числами фотонов $N' = \sum_{\mathbf{k},s} n'_{\mathbf{k},s}$, $N'' = \sum_{\mathbf{k},s} n''_{\mathbf{k},s}$. Покажите, что $|\psi\rangle$ не является классическим, если $(N' - N'')^2/(N' + N'') < 2$. Может ли $|\psi\rangle$ быть неклассическим, даже если последнее условие не выполняется?

11.7 Одномодовое оптическое поле имеет характеристическую функцию

$$\langle \mathrm{e}^{-u^*\hat{a}}\, \mathrm{e}^{u\hat{a}^\dagger}\rangle = \mathrm{e}^{-|u|^2(1+m)}\, \mathrm{e}^{uv^*G^* - u^*vG},$$

где G, m — действительные числа, а u, v — комплексные. Определите диагональное представление поля по когерентным состояниям (P-представление).

11.8 Вычислите среднее значение оператора $\hat{A}^\dagger\hat{A}$ в когерентном состоянии $|v\rangle$, когда $\hat{A} \equiv (\hat{n}+1)^{-1/2}\hat{a}$.

11.9 Рассмотрим одномодовое поле в состоянии $|\psi\rangle = c_1|v_1\rangle + ic_2|v_2\rangle$, которое является линейной суперпозицией двух различных когерентных состояний $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$ с условием $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Все четыре числа c_1, c_2, v_1, v_2 являются действительными. Может ли статистика фотонов в состоянии $|\psi\rangle$ быть субпуассоновской? При каких условиях дисперсия фотонов становится пуассоновской?

11.10 Постройте одномодовое квантовое состояние, ортогональное двум когерентным состояниям $|v'\rangle$ и $|v''\rangle$, когда $v' \neq v''$.

Глава 12

КВАНТОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ И ФОТОННАЯ СТАТИСТИКА

12.1. Введение

Теперь мы готовы перейти к рассмотрению задач оптики в рамках квантового подхода. Мы уже изучили некоторые основные свойства квантованного поля и успешно использовали представление о когерентном состоянии и его преимущества. До настоящего момента рассуждения оставались, главным образом, формальными, так как мы не особенно интересовались тем, что в действительности измеряется в эксперименте и как квантованное поле взаимодействует с другими системами.

В последующих главах мы обратим внимание на некоторые теоретические параметры квантованного поля, которые представляют особый интерес в квантовой оптике и играют важную роль при измерении поля. Наши рассуждения в настоящей главе все же останутся отчасти формальными в том смысле, проблема взаимодействия поля с прибором не будет затронута в полной мере. Эта задача подробно будет рассмотрена в гл. 14. Пока же мы продолжим упрощение, считая поле свободным. Тем не менее, в рамках такой идеализированной ситуации свободного поля будут рассмотрены некоторые вопросы, относящиеся к проблеме измерения в квантовой оптике. Будет показано, что нормально упорядоченные корреляционные функции играют главенствующую роль и рассмотрим некоторые их свойства. Антинормально упорядоченные корреляционные функции появляются в гораздо менее общих и менее полезных типах измерений поля. Мы также изучим явления, когда можно говорить, что фотон локализуется при измерении во время регистрации фотоэлектрической эмиссии. И, наконец, мы обсудим проблему нарушения локальности в квантовой оптике и результаты оптических проверок неравенств Белла.

12.2. Фотоэлектрическое измерение оптического поля; нормальное упорядочение

В основе большей части измерений электромагнитного поля в оптической области лежит процесс поглощения фотонов посредством фотоэлектрического эффекта. Такое утверждение справедливо не только в силу использования фотодиодов, фотоумножителей и т. п., но и благодаря таким обыденным приборам как фотографическая пластинка и глаз. Все они функционируют, используя абсорбцию фотона. Хотя мы будем рассматривать вопросы фотоэлектрического детектирования более тщательно и подробно в гл. 14, уже сейчас можно получить выражения для вероятности детектирования путем простого эвристического доказательства, которое впервые было приведено Глаубером (Glauber, 1963a).

Мы уже встречались с оператором поглощения фотона $\hat{F}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$, определенным в конфигурационном пространстве и задаваемым выражением (11.12.2), и сопряженным ему оператором рождения $\hat{F}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$,

$$\hat{\mathbf{F}}^{+}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k},s} l(k) \hat{a}_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{12.2.1}$$

$$\hat{\mathbf{F}}^{-}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k},s} l^{*}(k) \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{\mathbf{k}s} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (\omega = ck). \tag{12.2.2}$$

Эти операторы, соответственно, являются положительно-частотной и отрицательно-частотной частями соответствующих эрмитовых векторов поля. В разд. 12.11 будет показано, что состояние $\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t)|\text{vac}\rangle$ [$\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}=\hat{\mathbf{F}}^{(-)}$ при $l^{*}(\boldsymbol{k})=1$ в (12.2.2)] есть состояние, при котором фотон приблизительно локализован[1] в пространственно-временно́й точке $\mathbf{r},t$. Таким образом, оператор $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$ описывает рождение фотона в окрестности $\mathbf{r},t$ из вакуума. Аналогично $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ соответствует поглощению фотона в окрестности $\mathbf{r},t$.

Предположим теперь, что имеется детектор, расположенный в точке $\mathbf{r}$ оптического поля, и что он регистрирует поглощение посредством эмиссии фотоэлектрона в момент времени t. Мы называем этот процесс поглощением фотона и задаемся вопросом о его вероятности. Конечно, на практике фотодетекторы — приборы с достаточно большими размерами, и вряд ли возможно локализовать их в точке. Но пока что предположим, что мы экранировали фотокатод узкоапертурной диафрагмой. Более того, предполагаем далее, что перед диафрагмой помещен поляризатор так, что детектор реагирует на свет только одной поляризации, скажем типа s. В таком случае, оператор, соответствующий детектированию фотона с поляризацией s в точке $\mathbf{r},t$ будет иметь вид

$$\hat{\mathbf{F}}^{+}(s,\mathbf{r},t)=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}l(k)\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)},\quad(\omega=ck).\tag{12.2.3}$$

Пока мы специально оставляем множитель $l(k)$, равно как и природу соответствующего вектора поля $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s,\mathbf{r},t)$, неопределенным. Если взаимодействие электронов детектора с полем можно определить как взаимодействие вида $-\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{A}}$ (см. разд. 14.1), то $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s,\mathbf{r},t)$ будет положительно-частотной частью оператора векторного потенциала $\hat{\mathbf{A}}$ и т.д. Следует отметить особый случай, когда базисные векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}$ соответствуют ортогональным линейным поляризациям и лежат вдоль двух координатных осей, тогда $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s,\mathbf{r},t)$ может соответствовать одной из декартовых компонент $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$.

Обсудим фотоэлектрическое детектирование оптического поля в рамках квантово-механической картины взаимодействия. Если электромагнитное поле первоначально находится в некотором квантовом состоянии $|\psi_1\rangle$ и впоследствии, после детектирования, в квантовом состоянии $|\psi_2\rangle$, то амплитуда вероятности данного процесса (Glauber, 1963a), при котором фотон детектируется в $\mathbf{r},t$, есть матричный элемент $\langle\psi_2|\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s,\mathbf{r},t)|\psi_1\rangle$, а вероятность перехода пропорциональна $|\langle\psi_2|\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s,\mathbf{r},t)|\psi_1\rangle|^2$. Если нас не интересует конечное состояние, а мы хотим знать вероятность фотодетектирования безотносительно к конечному состоянию поля, то следует просуммировать эту вероятность по всему набору конечных состояний $|\psi_2\rangle$, а именно,

$$\sum_{\text{по всем }\psi_2}|\langle\psi_2|\hat{\mathbf{F}}^{+}(s,\mathbf{r},\mathbf{t})|\psi_1\rangle|^2.$$

В более общем случае, если начальное состояние не является чистым состоянием $|\psi_1\rangle$, а представляет некоторый ансамбль состояний, определяемый оператором плотности $\hat{\rho}$, таким, что

$$\hat{\rho}=\sum_{\psi_1}p(\psi_1)|\psi_1\rangle\langle\psi_1|,\tag{12.2.4}$$

где $p(\psi_1)$ — вероятность, относящаяся к состоянию $|\psi_1\rangle$, то мы должны усреднить вышеприведенное выражение по ансамблю всех ψ_1 с весом $\rho(\psi_1)$. Тогда

$$\text{Скорость фотодетектирования}=C_1\sum_{\psi_1}\rho(\psi_1)\sum_{\text{по всем }\psi_2}|\langle\psi_2|\hat{\mathbf{F}}^{+}(s,\mathbf{r},\mathbf{t})|\psi_1\rangle|^2,\tag{12.2.5}$$

где C_1 некоторая константа, характеризующая детектор. Для малого интервала времени Δt, в течение которого скорость детектирования заметно не изменяется, можно написать дифференциальное соотношение для вероятности

$$\text{Вероятность фотодетектирования при поляризации } s \text{ в } \mathbf{r},\ t \text{ за } \Delta t\equiv$$

$$\equiv P_1(s,\mathbf{r},t)\Delta t=C_1\sum_{\psi_1}\rho(\psi_1)\sum_{\text{по всем }\psi_2}|\langle\psi_2|\hat{\mathbf{F}}^{+}(s,\mathbf{r},t)|\psi_1\rangle|^2,\tag{12.2.6}$$

[1] Не существует оператора координаты для фотона. Таким образом, фотон не может быть локализован в точке пространства-времени. Однако приблизительная локализация возможна в области, линейные размеры которой велики по сравнению с длиной волны. Этот вопрос обсуждается в разд. 12.11.

считая, что Δt достаточно мало, чтобы правая часть в (12.2.6) была много меньше единицы. Нижний индекс 1 в $P_1(s,\mathbf{r},t)$ указывает на то, что мы рассматриваем единичный акт фотодетектирования. Если теперь квадрат в (12.2.6) представить в виде

$$P_1(s,\mathbf{r},t)\Delta t = C_1\Delta t\sum_{\psi_1}\rho(\psi_1)\sum_{\text{по всем }\psi_2}|\langle\psi_1\hat{F}_i^{(-)}(s,\mathbf{r},t)|\psi_2\rangle\langle\psi_2\hat{F}_i^{(+)}(s,\mathbf{r},t)|\psi_1\rangle,$$

где также предполагается суммирование по повторяющимся декартовым индексам, то будет видно, что в правой части содержится сумма по полному набору операторов проектирования на конечные состояния $|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$. По определению эта сумма есть единичный оператор, и выражение сводится к

$$P_1(s,\mathbf{r},t)\Delta t = C_1\Delta t\sum_{\psi_1}\rho(\psi_1)\langle\psi_1|\hat{\mathbf{F}}_i^{(-)}(s,\mathbf{r},t)\hat{\mathbf{F}}_i^{(+)}(s,\mathbf{r},t)|\psi_1\rangle =$$

$$= C_1\Delta t\ \mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}\hat{F}_i^{(-)}(s,\mathbf{r},t)\hat{F}_i^{(+)}(s,\mathbf{r},t)] = C_1\Delta t\langle\hat{F}_i^{(-)}(s,\mathbf{r},t)\hat{F}_i^{(+)}(s,\mathbf{r},t)\rangle. \quad (12.2.7)$$

Таким образом, вероятность детектирования пропорциональна ожидаемому значению нормально упорядоченного скалярного произведения $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(s,\mathbf{r},t)$ на $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s,\mathbf{r},t)$. Нормальное упорядочение возникает здесь естественным образом как следствие того факта, что в основе процесса детектирования лежит поглощение, характеризуемое оператором поглощения $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s,\mathbf{r},t)$.

Как и при классическом рассмотрении детектирования, представляется удобным ввести понятие *интенсивности* поля, которое определяется как скалярное произведение

$$\hat{I}(s,\mathbf{r},t) \equiv \hat{\mathbf{F}}^{(-)}(s,\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s,\mathbf{r},t). \quad (12.2.8)$$

Определенный таким образом оператор $\hat{I}(\mathbf{r},t)$, конечно же, представляет интенсивность, связанную с s компонентой поляризации вектора поля $\hat{\mathbf{F}}$. По аналогии, можно определить оператор полной интенсивности $\hat{I}(\mathbf{r},t)$ через суммарный оператор $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$, записывая

$$\hat{I}(\mathbf{r},t) \equiv \hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t). \quad (12.2.9)$$

Отметим также, что существует целый набор различных интенсивностей, каждая из которых относится к своему вектору поля $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}.t)$, в соответствии с нашим выбором $l(k)$ в (12.2.1). Как и в классическом случае, часто бывает удобно не уточнять действительный выбор, чтобы иметь возможность работать с различными ситуациями. Благодаря введению оператора интенсивности можно переписать (12.7.2) в более компактной форме

$$P_1(s,\mathbf{r},t) = C_1\Delta t\langle\hat{I}(s,\mathbf{r},t)\rangle = C_1\Delta t\langle I(s,\mathbf{r},t)\rangle_\phi. \quad (12.2.10)$$

Это выражение следует из оптической теоремы эквивалентности, при $I(s,\mathbf{r},t)\equiv\mathbf{F}^{(-)}(s,\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{F}^{(+)}(s,\mathbf{r},t)$, где $\mathbf{F}^{(+)}(s,\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{F}^{(-)}(s,\mathbf{r},t)$ — правые и левые собственные значения операторов $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s,\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(s,\mathbf{r},t)$, соответственно. Когда поляризатор удален и детектор может свободно реагировать на любой тип поляризации, мы получаем вероятность детектирования $P_1(\mathbf{r},t)\,\Delta t$, исходя из аналогичных рассуждений, где только используется суммарный оператор поглощения $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$, и получаем

$$P_1(\mathbf{r},t) = C_1\Delta t\langle\hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle = C_1\Delta t\langle I(\mathbf{r},t)\rangle_\phi, \quad (12.2.11)$$

где C_1 необязательно является той же самой константой, что и в (12.2.10).

Схожесть этого результата с (9.6.1), полученным в полуклассическом приближении, сразу заметна. Конечно, не следует забывать, что решение было получено исходя из простых эвристических рассуждений, но в разд. 14.5 мы увидим, что идентичное выражение может быть получено, когда взаимодействие квантованного поля с детектором рассматривается точно. Приведенные простые рассуждения не дают информации о величине константы C_1 в формулах (12.2.10) и (12.2.11), хотя нетрудно догадаться, что она зависит от геометрии детектора. Мы вернемся к этому вопросу в разд. 12.3.

12.2.1. Детектирование нескольких фотонов; корреляционные функции высшего порядка

До настоящего момента мы рассматривали только единичное событие фотодетектирования. Теперь же займемся изучением более общей ситуации, когда наблюдается ряд фотоэлектрических регистраций, и мы хотим знать совместную вероятность для всех этих событий. Очевидно, что эта совместная вероятность содержит информацию о возможных корреляциях между эмиссиями фотоэлектронов. Различные события фотодетектирования могут быть зафиксированы либо одним детектором в различные моменты времени, либо различными детекторами, расположенными в различных точках пространства. В целях общности изложения, рассмотрим группу фотодетекторов, экранированных поляризаторами s_1, s_2 и т.д. и расположенных в точках $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и т.д., как показано на рис. 12.1. Нас интересует совместная вероятность того, что регистрации происходят в позиции $\mathbf{r}_1$ в момент времени t_1, в течении короткого интервала времени Δt_1, в позиции $\mathbf{r}_2$ в момент времени t_2, в течении Δt_2, и т.д. Если имеет место N регистраций упорядоченных так, что

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_N,$$

то амплитуда вероятности перехода из начального состояния поля $|\psi_1\rangle$ в конечное состояние $|\psi_2\rangle$, после обнаружения фотонов, имеет вид

$$\langle\psi_2|\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s_N,\mathbf{r}_N,t_N)\ldots\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s_2,\mathbf{r}_2,t_2)\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s_1,\mathbf{r}_1,t_1)|\psi_1\rangle,$$

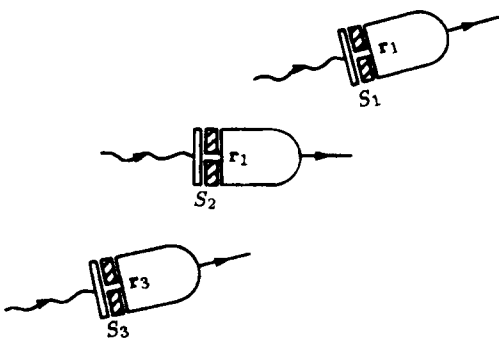


Рис. 12.1. Фотодетектирование тремя детекторами

где оператор поглощения применяется N раз подряд. Прямое произведение векторных операторов следует рассматривать как тензорный оператор. Чтобы прийти к дифференциальной совместной N-кратной вероятности фотодетектирования, поступим точно так же, как прежде. Умножим амплитуду вероятности на ее комплексно-сопряженную величину и просуммируем по всему ортогональному набору конечных состояний $|\psi_2\rangle$. Если начальное состояние не является обязательно чистым состоянием, а характеризуется оператором плотности $\hat{\rho}$ (12.2.4), то суммируем также и по ψ_1 с весовой функцией $\rho(\psi_1)$. Таким образом, находим, что

совместная N-кратная вероятность фотодетектирования
для поляризации s_1 в $\mathbf{r}_1$, t_1 за Δt_1,
для поляризации s_2 в $\mathbf{r}_2$, t_2 за Δt_2,

$\vdots$

для поляризации s_N в $\mathbf{r}_N$, t_N за $\Delta t_N \equiv$

$$\equiv P_N(s_1,\mathbf{r}_1,t_1;s_2,\mathbf{r}_2,t_2;\ldots;s_N,\mathbf{r}_N,t_N)\Delta t_1\Delta t_2\ldots\Delta t_N =$$

$$= C_N\Delta t_1\ldots\Delta t_N\sum_{\psi_1}p(\psi_1)\sum_{\text{по всем }\psi_2}\langle\psi_1|\hat{F}^{(-)}_{i_1}(s_1,\mathbf{r}_1,t_1)\ldots\hat{F}^{(-)}_{i_N}(s_N,\mathbf{r}_N,t_N)|\psi_2\rangle\times$$

$$\times\langle\psi_2|\hat{F}^{(+)}_{i_1}(s_N,\mathbf{r}_N,t_N)\ldots\hat{F}^{(+)}_{i_1}(s_1,\mathbf{r}_1,t_1)|\psi_1\rangle =$$

$$= C_N\Delta t_1\ldots\Delta t_N\sum_{\psi_1}p(\psi_1)\langle\psi_1|\hat{F}^{(-)}_{i_1}(s_1,\mathbf{r}_1,t_1)\ldots\hat{F}^{(-)}_{i_N}(s_N,\mathbf{r}_N,t_N)\hat{F}^{(+)}_{i_1}(s_N,\mathbf{r}_N,t_N)\ldots\hat{F}^{(+)}_{i_1}(s_1,\mathbf{r}_1,t_1)|\psi_1\rangle =$$

$$= C_N\Delta t_1\ldots\Delta t_N\,\mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}\hat{F}^{(-)}_{i_1}(s_1,\mathbf{r}_1,t_1)\ldots\hat{F}^{(-)}_{i_N}(s_N,\mathbf{r}_N,t_N)\hat{F}^{(+)}_{i_1}(s_N,\mathbf{r}_N,t_N)\ldots\hat{F}^{(+)}_{i_1}(s_1,\mathbf{r}_1,t_1)] =$$

$$= C_N\Delta t_1\ldots\Delta t_N\,\langle\hat{F}^{(-)}_{i_1}(s_1,\mathbf{r}_1,t_1)\ldots\hat{F}^{(-)}_{i_N}(s_N,\mathbf{r}_N,t_N)\hat{F}^{(+)}_{i_1}(s_N,\mathbf{r}_N,t_N)\ldots\hat{F}^{(+)}_{i_1}(s_1,\mathbf{r}_1,t_1)\rangle, \quad (12.2.12)$$

где вновь подразумевается суммирование по повторяющимся декартовым индексам, а C_N есть некоторая константа, отвечающая N детекторам.

Теперь видно, что вычисление вероятности детектирования $P_N\Delta t_1\ldots\Delta t_N$ приводит к квантовомеханической нормально-упорядоченной корреляционной функции, аргументы которой повторяются. Здесь стоит

еще раз отметить, что нормальное упорядочение возникает потому, что фундаментальным процессом измерения является поглощение фотона, а упорядочение по времени возникает естественным образом в виде прямого расположения операторов рождения и обратного расположения операторов уничтожения. Однако, до тех пор, пока имеет смысл рассматривать поле в качестве свободного, можно изменять временно́й порядок в операторном произведении, так как различные $\hat{F}_i^{(+)}(s,\mathbf{r},t)$, равно как и различные $\hat{F}_i^{(-)}(s,\mathbf{r},t)$, коммутируют между собой. В заключение еще раз отметим, что нормально упорядоченные корреляционные функции тесно связаны с фотоэлектрическими измерениями поля.

12.2.2. Символы и операторы упорядочения

Мы опять можем сократить выражение для P_N, если введем оператор интенсивности. Однако, в силу наличия нормального упорядочения и упорядочения по времени, операторное произведение в выражении (12.2.12) нельзя записать как простое произведение операторов интенсивности. Чтобы разрешить эту ситуацию вводятся несколько различных элементов обозначения. Двоеточия, окружающие оператор (например, $:\hat{0}:$), иногда используются в качестве символа нормального упорядочения, который приводит оператор в нормальный порядок, не используя коммутационные соотношения. Например, $:\hat{a}\hat{a}^\dagger:$ означает оператор $\hat{a}^\dagger\hat{a}$, тогда как $:\hat{a}\hat{a}^\dagger:=\hat{a}\hat{a}^\dagger$, поскольку $\hat{a}\hat{a}^\dagger$ уже нормально упорядочен. Также $:\hat{n}^2:=\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2$, и т.п.

Обозначим через $\mathscr{T}$ символ упорядочения по времени, который переставляет операторы рождения в прямой временно́й порядок, а операторы уничтожения в обратный временно́й порядок так, что если $t_1<t_2<t_3<t_4\ldots$, то мы имеем, например,

$$\mathscr{T}\hat{F}_i^{(-)}(\mathbf{r}_2,t_2)\hat{F}_j^{(-)}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}_k^{(+)}(\mathbf{r}_3,t_3)\hat{F}_l^{(+)}(\mathbf{r}_4,t_4)=\hat{F}_j^{(-)}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}_i^{(-)}(\mathbf{r}_2,t_2)\hat{F}_l^{(+)}(\mathbf{r}_4,t_4)\hat{F}_k^{(+)}(\mathbf{r}_3,t_3).$$

С помощью таких обозначений можно переписать формулу (12.2.12) в более компактном виде

$$\begin{aligned}P_N(s_1,\mathbf{r}_1,t_1;\ldots;s_N,\mathbf{r}_N,t_N)\Delta t_1\ldots\Delta t_N&=\\&=C_N\Delta t_1\ldots\Delta t_N\,\langle\mathscr{T}:\hat{I}(s_1,\mathbf{r}_1,t_1)\ldots\hat{I}(s_N,\mathbf{r}_N,t_N):\rangle=\\&=C_N\Delta t_1\ldots\Delta t_N\,\langle I(s_1,\mathbf{r}_1,t_1)\ldots I(s_N,\mathbf{r}_N,t_N)\rangle_\phi,\end{aligned}\quad(12.2.13)$$

из которого видно, что совместная вероятность детектирования пропорциональна нормально и хронологически упорядоченной корреляционной функции интенсивности оптического поля. Последнее выражение выполняется для свободного поля и вновь является следствием оптической теоремы эквивалентности. Если каждый детектор реагирует на все направления поляризации, то мы получим совместную N-кратную вероятность, используя операторы суммарного поглощения. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}P_N(\mathbf{r}_1,t_1;\ldots;\mathbf{r}_N,t_N)\Delta t_1\ldots\Delta t_N&=\\&=C_N\Delta t_1\ldots\Delta t_N\,\langle\mathscr{T}:\hat{I}(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots\hat{I}(\mathbf{r}_N,t_N):\rangle=\\&=C_N\Delta t_1\ldots\Delta t_N\,\langle I(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots I(\mathbf{r}_N,t_N)\rangle_\phi,\end{aligned}\quad(12.2.14)$$

причем опять последняя строка выполняется для свободного поля. Это выражение похоже на полуклассическое (9.6.4), полученное в случае, когда электромагнитное поле не квантовано. Если функционал в фазовом пространстве $\phi(\{v\})$, который входит в расчеты ожидаемых значений, имеет характер классического вероятностного функционала, то не существует никакой разницы между выражениями, полученными в рамках квантовой электродинамики и в рамках полуклассического подхода. В разд. 14.5 мы увидим, что формулы (12.2.13), (12.2.14) могут быть получены при точном рассмотрении взаимодействия поля с детектором.

Символ нормального упорядочения $::$, используемый в (12.2.13) и (12.2.14), не следует рассматривать как линейный оператор, а просто как элемент обозначения. Хотя операция $::$ и имеет свойство линейности $:\hat{A}+\hat{B}:=:\hat{A}:+:\hat{B}:$, это равенство может не выполняться, если $\hat{A}=\hat{B}$, что вовсе не означает $:\hat{A}:=:\hat{B}:$. К примеру, в соответствии с коммутационным соотношением для операторов рождения и уничтожения, мы имеем $\hat{a}\hat{a}^\dagger=\hat{a}^\dagger\hat{a}+1$, но $:\hat{a}\hat{a}^\dagger:\neq:\hat{a}^\dagger\hat{a}+1:$, потому что $:\hat{a}\hat{a}^\dagger:=\hat{a}^\dagger\hat{a}\neq\hat{a}^\dagger\hat{a}+1$.

Однако можно ввести линейный оператор, который действует на c-числовой функционал набора комплексных чисел $\{v\}$ и приводит к нормально упорядоченному оператору, в котором каждая v заменяется

на $\hat{a}$, а каждая v^* на $\hat{a}^\dagger$ (Agarwal and Wolf, 1970a, b, c). Мы обозначим линейный оператор нормального упорядочения как $\hat{\Lambda}^{(\mathrm{N})}$ и определим его соотношением

$$\hat{\Lambda}^{(\mathrm{N})} f(\{v\},\{v^*\}) = f^{(\mathrm{N})}(\{\hat{a}\},\{\hat{a}^\dagger\}), \tag{12.2.15}$$

где $f^{(\mathrm{N})}(\{\hat{a}\},\{\hat{a}^\dagger\})$ — нормально упорядоченный функционал набора операторов рождения и уничтожения. Например, $\hat{\Lambda}^{(\mathrm{N})}(vv^*) = \hat{a}^\dagger\hat{a}$. Мы получили явное выражение для $\hat{\Lambda}^{(\mathrm{N})}$ (а также и для других операторов упорядочивания) в разд. 11.10. С его помощью мы также можем записать (12.2.14) в виде

$$P_N(\mathbf{r}_1,t_1\ldots,\mathbf{r}_N,t_N)\Delta t_1\ldots\Delta t_N = C_N\Delta t_1\ldots\Delta t_N\,\langle\mathscr{T}\hat{\Lambda}^{(\mathrm{N})}[I(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots I(\mathbf{r}_N,t_N)]\rangle. \tag{12.2.16}$$

12.3. Оператор фотонной плотности

Как мы уже видели, бывает удобно вводить оператор интенсивности $\hat{I}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$, определяя его для каждого оператора уничтожения в конфигурационном пространстве $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$. Из всех операторов поля $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$, которые могут быть определены разложениями по плоским волнам (12.2.1) и (12.2.2), те операторы, для которых $l(k)=1$, представляют особое значение. Соответствующая интенсивность играет роль фотонной плотности и часто непосредственно связана с фотоэлектрическими измерениями.

Определим положительно-частотный оператор $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)$ в виде разложения

$$\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t) \equiv \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (\omega = ck) \tag{12.3.1}$$

и рассмотрим интеграл от соответствующей интенсивности $\hat{I}(\mathbf{r},t)\equiv\hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)$ по всему пространству. Имеем

$$\int_{L^3}\hat{I}(\mathbf{r},t)\,d^3r = \frac{1}{L^3}\int_{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}\sum_{\mathbf{k}',s'}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}(\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'s'})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}-(\omega'-\omega)t]}\,d^3r.$$

После формального изменения порядка суммирования и интегрирования, можно проинтегрировать по всему пространству, что дает $L^3\delta^3_{\mathbf{k}'}$. Таким образом, имеем

$$\int_{L^3}\hat{I}(\mathbf{r},t)\,d^3r = \sum_{\mathbf{k},s}\sum_{s'}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}s'}(\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s'}),$$

что, в силу ортонормированности базисных векторов, сводится к

$$\int_{L^3}\hat{I}(\mathbf{r},t)\,d^3r = \sum_{\mathbf{k},s}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}s}\equiv\hat{n}, \tag{12.3.2}$$

где $\hat{n}$ — оператор общего числа фотонов. Таким образом, $\hat{I}(\mathbf{r},t)$ играет роль числа фотонов в единице объема или, другими словами, фотонной плотности.

В разд. 12.11 мы еще увидим, что, хотя и не совсем точное, отождествление $\hat{I}(\mathbf{r},t)$ с фотонной плотностью является более, чем чисто формальным, потому что интеграл от $\hat{I}(\mathbf{r},t)$ по некоторому объему, меньшему чем L^3 (но имеющему пространственные размеры большие, чем длина волны), в определенной степени играет роль оператора в конфигурационном пространстве, а именно, оператора локального числа фотонов. Однако, не следует рассматривать $\hat{I}(\mathbf{r},t)$ как оператор, который локализует фотоны точно в позиции $\mathbf{r}$ в момент времени t.

Во многих ситуациях в оптике поля́, представляющие интерес, являются квазимонохроматическими с небольшими отклонениями частот от средней частоты. В такой ситуации функция $l(k)$ в модовом разложении (12.2.1)—(12.2.3) не изменяется заметным образом в диапазоне заполненных мод поля и при

суммировании по заполненным модам ведет себя, главным образом, как постоянная величина. При таких условиях нормально упорядоченные корреляционные функции от операторов $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)$, задаваемые выражением (12.3.1), и им сопряженные, отличаются только на константу от нормально упорядоченных корреляционных функций от общих операторов (12.2.1) и (12.2.2). Причина этого заключается в том, что незаполненные моды поля не вносят никакого вклада в нормально упорядоченные корреляционные функции. Подобные замечания также относятся и к ожидаемой величине интенсивности света $\langle\hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle$, которая является частным случаем нормально упорядоченной корреляционной функции. Поэтому для квазимонохроматического поля мы можем использовать среднюю фотонную плотность в качестве меры средней интенсивности поля.

Данный выбор единиц для $\langle\hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle$ особенно удобен при описании фотоэлектрических измерений квазимонохроматического света, так как это приводит к простой интерпретации константы C_1 в выражениях (12.2.10) или (12.2.11) для дифференциальной вероятности детектирования. Рассмотрим типичную экспериментальную ситуацию, показанную на рис. 12.2. Фоточувствительная поверхность фотодетектора представляет собой очень тонкий слой, расположенный в плоскости, нормальной к падающему полю. Облучаемая область чувствительной поверхности с площадью S делается достаточно малой для того, чтобы поле на детекторе имело вид плоской волны во всей области S. При таких условиях, каждый электрон детектора, принадлежащий облучаемому фотокатоду, главным образом, чувствует одно и то же поле и в (12.2.11) можно выбрать точку $\mathbf{r}$ в качестве любой точки облучаемого фотокатода. Тогда можно ожидать, что константа C_1 в (12.2.11) будет пропорциональна числу облученных электронов или площади катода S, подвергаемой облучению. Если записать для дифференциальной вероятности детектирования

$$P_1(\mathbf{r},t)\Delta t = \alpha c S \Delta t \langle\hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle, \tag{12.3.3}$$

где α есть некоторая другая константа, а $\langle\hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle$ — ожидаемое значение фотонной плотности, то мы увидим, что α должна быть безразмерной величиной. Член $cS\Delta t\langle\hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle$ является средним числом фотонов, содержащихся в цилиндре с основанием S и высотой $c\Delta t$, равной расстоянию, проходимому светом за короткое время измерения Δt (см. рис. 12.2). Но это есть просто число фотонов, которые, как можно было ожидать, столкнутся с облучаемой областью фотокатода в среднем, если бы мы рассматривали фотоны как частицы, движущиеся перпендикулярно фотокатоду со скоростью c. Очевидно, что константа α описывает вероятность того, что любой из этих фотонов детектируется. Она часто называется *квантовым выходом* и выражается в единицах числа фотоэлектронов на фотон (при условии, что подавляющее число эмиссий представляют собой эмиссии отдельных электронов).

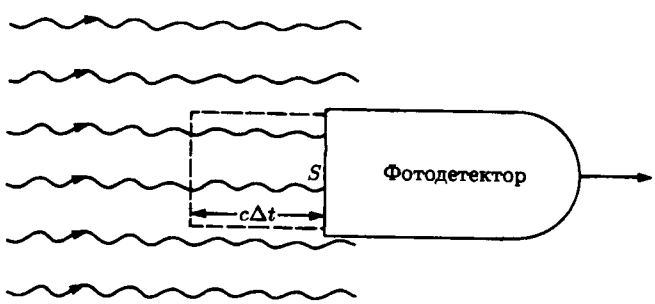


Рис. 12.2. Фотодетектор с площадью поверхности S, которая расположена нормально к падающему полю и облучается в течении времени Δt. Видно, что детектор измеряет число фотонов в цилиндре с объемом $cS\Delta t$

Аналогичным образом, рассматривая группу детекторов, освещаемых под прямым углом к поверхности фотокатода, мы можем предположить, что константа C_N в (12.2.13) задается в виде

$$C_N = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_N S_1 S_2 \ldots S_N c^N, \tag{12.3.4}$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_N, S_1\ldots S_N$ представляют собой квантовые выходы и площади областей облучения детекторов, при условии, что операторы $\hat{I}(\mathbf{r},t)$ представляют фотонные плотности.

Однако в случае, когда поле немонохроматическое и обладает широким спектром, нарушается локальное соответствие между числом фотонов в определенной области и вероятностью детектирования и мы сталкиваемся с нелокальными соотношениями. Эта ситуации будет обсуждаться в разд. 12.11.

12.4. Интерференционные эксперименты; корреляционные функции второго порядка

Корреляционные функции, возникающие в связи с фотоэлектрическими измерениями поля, являются функциями особого рода. Они нормально упорядочены, имеют одинаковое число операторов рождения

и уничтожения, и каждый аргумент у них повторяется, появляясь один раз при операторе рождения и один раз при операторе уничтожения. Однако в интерференционных экспериментах, в которых складываются два или более пучка и измеряется результирующая интенсивность, мы, как и при классическом рассмотрении в разд. 4.3, сталкиваемся с корреляционной функцией второго порядка.

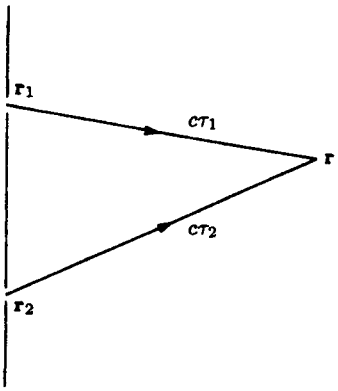


Рис. 12.3. Схема простого интерференционного эксперимента, в котором световые волны из точек $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ накладываются в точке $\mathbf{r}$

Рассмотрим простой интерференционный эксперимент, показанный на рис. 12.3, в котором оптическое поле в некоторой точке $\mathbf{r}$ содержит вклады от двух пучков, исходящих из небольших отверстий в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Если каждый из этих лучей можно по очереди блокировать, не возмущая другой, то мы можем описать суммарное поле с помощью совместного весового функционала $\phi_{12}(\{v_1\},\{v_2\})$ (см. разд. 11.8). Далее, интегрируя по одному или другому набору комплексных чисел $\{v_1\}$ или $\{v_2\}$, можно получить весовой функционал $\phi(\{v_1\})$ или $\phi(\{v_1\})$ для поля, связанного с одним или другим пучком в отдельности. Таким образом,

$$\phi_1(\{v_1\}) = \int \phi_{12}(\{v_1\},\{v_2\})\, d\{v_2\}, \tag{12.4.1}$$

$$\phi_2(\{v_2\}) = \int \phi_{12}(\{v_1\},\{v_2\})\, d\{v_1\}, \tag{12.4.2}$$

в то время, как весовой функционал для суммарного поля складывающихся пучков представляется выражением [ср. (11.8.24)]

$$\phi(\{v\}) = \int \phi_{12}(\{v_1\},\{v-v_1\})\, d\{v_1\}. \tag{12.4.3}$$

Предположим, что мы хотим измерить интенсивность света $\hat{I}(\mathbf{r},t)$ в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t. Соответствующая ожидаемое значение есть

$$\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle = \operatorname{Tr}\,[\hat{\rho}\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)] = \int \phi(\{v\})\mathbf{F}^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)\, d\{v\}, \tag{12.4.4}$$

в соответствии с оптической теоремой эквивалентности, где $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{F}^{(-)}(\mathbf{r},t)$ — правые и левые собственные значения, принадлежащие когерентному состоянию $|\{v\}\rangle$ операторов $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$, соответственно. После подстановки $\phi(\{v\})$ из (12.4.3) в (12.4.4), полагая $v - v_1 = v_2$, получаем

$$\begin{aligned}\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle = \int \phi_{12}(\{v_1\},\{v_2\})[\mathbf{F}_1^{(-)}(\mathbf{r},t)+\mathbf{F}_2^{(-)}(\mathbf{r},t)]\cdot[\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r},t)+\mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r},t)]\, d\{v_1\}\, d\{v_2\} = \\ = \langle \mathbf{F}_1^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle_{\phi_{12}} + \langle \mathbf{F}_2^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle_{\phi_{12}} + \\ + \langle \mathbf{F}_1^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle_{\phi_{12}} + \langle \mathbf{F}_2^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle_{\phi_{12}}.\end{aligned} \tag{12.4.5}$$

Здесь $\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r},t)$ — собственные значения оператора $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$, принадлежащие когерентным состояниям $|\{v_1\}\rangle$ и $|\{v_2\}\rangle$, т.е. эти значения являются комплексными функциями, получаемыми при подстановке $v = v_1$ или $v = v_2$ в разложении $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t)$. Понятно, что $\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r},t)$ относятся к полям, создаваемым каждым пучком в отдельности.

Как и прежде первые два члена в правой части (12.4.5) описывают средние интенсивности света в $\mathbf{r},t$ от каждого пучка в отдельности, в то время как член $\langle \mathbf{F}_1^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle_{\phi_{12}}$ описывает корреляцию в $\mathbf{r},t$ между этими двумя полями.

В соответствии с оптическим законами распространения волн, которые непосредственно следуют из уравнений Максвелла, $\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r},t)$ просто относятся к полям $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}_1,t-\tau_1)$ и $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}_2,t-\tau_2)$ в $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ в более ранние моменты времени, где $c\tau_1 = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|$ и $c\tau_2 = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|$. Для приблизительно квазимонохроматических полей, имеющих вид плоской волны, имеем

$$\mathbf{F}_1^{(+)}(\mathbf{r},t) \approx K_1\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}_1,t-\tau_1), \tag{12.4.6}$$

$$\mathbf{F}_2^{(+)}(\mathbf{r},t) \approx K_2\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}_2,t-\tau_2), \tag{12.4.7}$$

исходя из тех же рассуждений, что и в разд. 4.3. В таком случае взаимная корреляционная функция, появляющаяся в выражении (12.4.5), имеет вид

$$\Gamma \equiv \langle \mathbf{F}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t-\tau_1)\cdot \mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t-\tau_2)\rangle_{\phi_{12}} \equiv \langle \hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t-\tau_1)\cdot \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t-\tau_2)\rangle \tag{12.4.8}$$

и представляет собой нормально упорядоченную корреляционную функцию второго порядка, все пространственные и временны́е аргументы которой в общем случае различны, что в точности соответствует классической теории.

В таком случае с помощью (12.4.6) и (12.4.7) выражние (12.4.5) для ожидаемого значения суммарной интенсивности принимает вид

$$\langle \hat{I}(\mathbf{r}, t)\rangle = |K_1|^2\langle \hat{I}(\mathbf{r}_1, t-\tau_1)\rangle + |K_2|^2\langle \hat{I}(\mathbf{r}_2, t-\tau_2)\rangle + 2\,\mathrm{Re}[K_1^* K_2\langle \hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t-\tau_1)\rangle \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t-\tau_2)]. \tag{12.4.9}$$

Здесь схожесть (12.4.9) с соответствующим классическим результатом (4.3.5) сразу заметна. Для небольших τ_1 и τ_2 выражение (12.4.9) предсказывает синусоидальную модуляцию относительной амплитуды модуляции по отношению к τ_1 и τ_2

$$\frac{2}{[\langle \hat{I}(\mathbf{r}_1, t-\tau_1)\rangle/\langle \hat{I}(\mathbf{r}_2, t-\tau_2)\rangle]^{1/2} + [\langle \hat{I}(\mathbf{r}_2, t-\tau_2)\rangle/\langle \hat{I}(\mathbf{r}_1, t-\tau_1)\rangle]^{1/2}} \times$$

$$\times \frac{|\langle \hat{\mathbf{F}}(-)(\mathbf{r}_1, t-\tau_1)\cdot \hat{\mathbf{F}}(+)(\mathbf{r}_2, t-\tau_2)\rangle|}{[\langle \hat{I}(\mathbf{r}_1, t-\tau_1)\rangle\langle \hat{I}(\mathbf{r}_2, t-\tau_2)\rangle]^{1/2}},$$

что также типично и для соответствующего уравнения в классическом случае. Второй множитель представляет степень когерентности второго порядка. Конечно же, для стационарного поля средние интенсивности поля не зависят от времени, а корреляционная функция зависит только от разности $\tau_1 - \tau_2$ между временны́ми аргументами.

12.5. Корреляционные функции и взаимные спектральные плотности произвольного порядка

Теперь объединим результаты предыдущего параграфа с выводами, полученными в разд. 12.2 относительно многократных фотоэлектрических детектирований. Несложно видеть, что описание фотоэлектрического корреляционного эксперимента, включающего два фотодетектора, когда поле на каждом детекторе является суперпозицией двух или более световых лучей, будет приводить к членам вида

$$\langle \hat{F}_i^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1)\hat{F}_j^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2)\hat{F}_j^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3)\hat{F}_i^{(+)}(\mathbf{r}_4, t_4)\rangle.$$

Это нормально упорядоченная корреляционная функция четвертого порядка, в которой все аргументы различны. Аналогично, корреляционные эксперименты, основанные на использовании N фотодетекторов, будут включать нормально упорядоченную корреляционную функцию порядка $2N$ с (возможно) различными аргументами. Таким образом, при общем рассмотрении корреляционных функций мы должны полагать аргументы произвольными.

Уместно еще одно обобщение. Все нормально упорядоченные корреляционные функции, с которыми мы сталкивались до настоящего времени, имели четный порядок, т.е. число операторов рождения в выражении равнялось числу операторов уничтожения. Это ограничение также должно быть снято, если мы рассматриваем нелинейные диэлектрические среды, в которых создаются оптические гармоники.

Обычный нелинейный диэлектрик характеризуется набором тензоров восприимчивости χ таких, что индуцированная поляризация $\mathbf{P}$ связана с падающим электрическим полем $\mathbf{E}$ уравнением[1]

$$P_i = \varepsilon_0[\chi_{ij}E_j + \chi_{ijk}E_jE_k + \chi_{ijkl}E_jE_kE_l + \ldots], \tag{12.5.1}$$

[1] Обсуждение нелинейных сред и особенностей распространения в них см., например, в (Bloembergen, 1965; Shen, 1984; Boyd, 1992).

в котором члены далее первого, представляют собой отклонения от линейности. В результате поле, прошедшее через диэлектрик, связано с падающим полем тензорным соотношением. Если мы, как и прежде, разделим реальное поле на положительно-частотную и отрицательно-частотную составляющие, то выражение для величины квантового ожидания интенсивности $\hat{I}(\mathbf{r},t)$ будет включать, помимо других вкладов, вклады от членов вида

$$\langle \hat{F}_i^{(-)}(\mathbf{r},t)\hat{F}_j^{(+)}(\mathbf{r},t)\hat{F}_k^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle, \quad \langle \hat{F}_i^{(-)}(\mathbf{r},t)\hat{F}_j^{(-)}(\mathbf{r},t)\hat{F}_l^{(+)}(\mathbf{r},t)\hat{F}_m^{(+)}(\mathbf{r},t)\hat{F}_n^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle.$$

Это корреляционные функции нечетного порядка, в которых число операторов рождения не совпадает с числом операторов уничтожения, и в которых все декартовы индексы могут быть различными.

Теперь понятно, что самым общим типом корреляционной функции, которая может встретиться при измерении с помощью фотодетекторов в ситуации, когда присутствуют и интерференционные эффекты и тензорные нелинейности, является нормально упорядоченная корреляционная функция порядка (N, M)

$$\Gamma^{(N,M)}_{i_1,\ldots,i_N;j_M,\ldots,j_1}(\mathbf{r}_1,t_1,\ldots,\mathbf{r}_N,t_N;\mathbf{r}'_M,t'_M,\ldots,\mathbf{r}'_1,t'_1) \equiv$$
$$\equiv \langle \hat{F}^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}^{(-)}_{i_2}(\mathbf{r}_2,t_2)\ldots\hat{F}^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)\hat{F}^{(+)}_{j_M}(\mathbf{r}'_M,t'_M)\ldots\hat{F}^{(+)}_{j_2}(\mathbf{r}'_2,t'_2)\hat{F}^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1)\rangle. \quad (12.5.2)$$

Это функция $N+M$ пространственно-временны́х точек и $N+M$ индексов.

Иногда удобно сокращать обозначения, определяя, например, одним коллективным символом x_l пространственную координату $\mathbf{r}_l$, время t_l и декартову компоненту i_l. Тогда (12.5.2) может быть записано в более компактной форме

$$\Gamma^{(N,M)}(x_1,x_2,\ldots,x_N;y_M,\ldots,y_2,y_1) \equiv$$
$$\equiv \langle \hat{F}(-)(x_1)\hat{F}^{(-)}(x_2)\ldots\hat{F}^{(-)}(x_N)\hat{F}^{(+)}(y_M)\ldots\hat{F}^{(+)}(y_2)\hat{F}^{(+)}(y_1)\rangle. \quad (12.5.3)$$

12.5.1. Свойства корреляционных функций

Рассмотрим теперь некоторые свойства нормально упорядоченных корреляционных функций в полной аналогии с тем, как это было сделано в гл. 8 для классических функций[1]. Действительно, многие свойства квантовых и классических корреляционных функций являются схожими. Проанализировав (12.5.3), мы видим, что

$$\Gamma^{(N,M)*}(x_1,\ldots,x_N;y_M,\ldots,y_1) =$$
$$= \langle \hat{F}^{(-)}(y_1)\ldots\hat{F}^{(-)}(y_M)\hat{F}^{(+)}(x_N)\ldots\hat{F}^{(+)}(x_1)\rangle = \Gamma^{(M,N)}(y_1\ldots,y_M;x_N,\ldots,x_1). \quad (12.5.4)$$

В силу того, что для свободного поля операторы рождения коммутируют между собой, равно, как и операторы уничтожения, следует, что

$$\Gamma^{(N,M)}(P[x_1,\ldots,x_N];P[y_M,\ldots,y_1]) = \Gamma^{(N,M)}(x_1,\ldots,x_N;y_M,\ldots,y_1), \quad (12.5.5)$$

где $P[x_1,\ldots,x_N]$ означает любую перестановку упорядоченного набора $x_1,\ldots,x_N$.

Когда $N=M$ и коллективные координаты повторяются таким образом, что $x_i = y_i$ $(i=1,2,\ldots)$, то, как мы уже видели, получающаяся корреляционная функция имеет характер совместной вероятности детектирования. Из этого следует, что она должна быть вещественной и неотрицательной, т.е.

$$\Gamma^{(N,M)}(x_1,\ldots,x_N;x_N,\ldots,x_1) \geqslant 0. \quad (12.5.6)$$

Из неравенства Шварца, примененного к операторному произведению в (12.5.3), мы можем получить неравенство

$$|\Gamma^{(N,M)}(x_1,\ldots,x_N;y_M,\ldots,y_1)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \Gamma^{(N,N)}(x_1,\ldots,x_N;x_N,\ldots,x_1)\Gamma^{(M,M)}(y_1,\ldots,y_M;y_M,\ldots,y_1), \quad (12.5.7)$$

[1]Различные свойства корреляционных функций обсуждаются в работах (Glauber, 1963a, b; Mehta, 1966, 1967; Mehta, Mandel, 1967; Mandel, Mehta, 1969).

которое при $N = M = 1$ сводится к известному результату

$$|\Gamma^{(1,1)}(x;y)|^2 \leqslant \langle \hat{I}(x)\rangle\langle \hat{I}(y)\rangle. \tag{12.5.8}$$

Корреляционные функции второго порядка также удовлетворяют более общему условию неотрицательной определенности, чем (12.5.8). Если мы положим, что

$$\hat{O} \equiv \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \hat{F}^{(+)}(x_i), \tag{12.5.9}$$

где λ_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — произвольные комплексные числа, а x_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — произвольные параметры, и отметим, что $\hat{O}^\dagger\hat{O}$ — неотрицательно определенный оператор, то тогда

$$0 \leqslant \langle \hat{O}^\dagger\hat{O}\rangle = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \lambda_i^*\lambda_j \Gamma^{(1,1)}(x_i;x_j). \tag{12.5.10}$$

Правая часть представляет собой неотрицательно определенную квадратичную форму по λ. Следовательно, детерминант, построенный из коэффициентов $\Gamma^{(1,1)}(x_i, x_j)$, также должен быть неотрицательно определенным и можно записать

$$\det\,[\Gamma^{(1,1)}(x_i;x_j)] \geqslant 0. \tag{12.5.11}$$

При $r = 1$ выражение (12.5.11) является частным случаем выражения (12.5.6), а при $r = 2$ оно сводится к (12.5.8). Когда $r = 3$, (12.5.11) означает соотношение

$$\langle \hat{I}(x_1)\rangle\langle \hat{I}(x_2)\rangle\langle \hat{I}(x_3)\rangle - \langle \hat{I}(x_1)\rangle|\Gamma^{(1,1)}(x_2;x_3)|^2 - \langle \hat{I}(x_2)\rangle|\Gamma^{(1,1)}(x_3;x_1)|^2 - \\ - \langle \hat{I}(x_3)\rangle|\Gamma^{(1,1)}(x_1;x_2)|^2 + \Gamma^{(1,1)}(x_1;x_2)\Gamma^{(1,1)}(x_2;x_3)\Gamma^{(1,1)}(x_3;x_1) + \text{к.с.} \geqslant 0, \tag{12.5.12}$$

и смысл выражений очень быстро усложняется с ростом числа r. Условие неотрицательной определенности формы (12.5.10) также должно удовлетворяться для высших корреляционных функций четного порядка. Если мы положим, что

$$\hat{O} \equiv \sum_{i=1}^{r} \hat{F}^{(+)}(x_1^{(i)}) \ldots \hat{F}^{(+)}(x_N^{(i)}),$$

где $x_n^{(i)}$ $(n = 1, 2, \ldots, N; i = 1, 2, \ldots, r)$ — произвольные аргументы, то условие $\langle \hat{O}^\dagger\hat{O}\rangle \geqslant 0$ означает, что

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \lambda_i^*\lambda_j \Gamma^{(N,N)}(x_1^{(i)}, \ldots, x_N^{(i)}; x_N^{(j)}, \ldots, x_1^{(j)}) \geqslant 0. \tag{12.5.13}$$

При $r = 1$ и $r = 2$ это выражение, соответственно, воспроизводит условия (12.5.6) и (12.5.7) при $N = M$. При $r = 3$ выражение (12.5.13) приводит к естественному обобщению выражения (12.5.12) и структура формул становится все менее и менее очевидной при больших значениях r. Приведенные соотношения между квантовыми корреляционными функциями не отражают никаких особых свойств поля и все они эквивалентны соответствующим соотношениям в классической теории когерентности.

Корреляционные функции нечетного порядка, когда $N \neq M$, как правило, играют гораздо менее значимую роль, чем функции, имеющие четный порядок. Мы уже знаем, что они могут появиться в случае нелинейных сред. В разд. 12.8 мы покажем, что когда электромагнитное поле является стационарным и квазимонохроматическим, как это часто бывает на практике, корреляционные функции нечетного порядка могут обратится в нуль, если только N и M не являются слишком большими[1]. Доказательство этого утверждения для соответствующих классических корреляционных функций было приведено в разд. 8.3. Как в классическом, так и в квантово-механическом случаях корреляционные функции нечетного порядка обращаются в нуль для электромагнитного поля с ограниченной полосой частот, если только не выполняется соотношение

$$\frac{|N - M|}{N + M} \leqslant \frac{1}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}, \tag{12.5.14}$$

[1] Другое доказательство и обсуждение данного вопроса приводится в статье (Mandel and Mehta, 1969).

где ω_0 — центральная частота, а $\Delta\omega$ — ширина полосы частот поля. В частности, при $N = 0$ или $M = 0$ мы, соответственно, получаем

$$\langle \hat{F}^{(+)}(x_1)\hat{F}^{(+)}(x_2)\dots\hat{F}^{(+)}(x_M)\rangle = 0, \tag{12.5.15a}$$

$$\langle \hat{F}^{(-)}(x_1)\hat{F}^{(-)}(x_2)\dots\hat{F}^{(-)}(x_N)\rangle = 0 \tag{12.5.15б}$$

для стационарного поля. Квантовый смысл понятия стационарности будет обсуждаться позже, в разд. 12.8. Пока же мы можем просто думать о стационарности, как об условии, при котором все корреляционные функции являются инвариантными по отношению к смещению начала отсчета времени.

Хотя многие свойства корреляционных функций тесно связаны со свойствами корреляционных функций в классической теории, существуют некоторые свойства квантовых корреляционных функций, которые не имеют классической аналогии. Например, так как операторы нормально упорядочены, то последовательное применение операторов уничтожения справа или операторов рождения слева приведет к обращению корреляционной функции в нуль, если состояние содержит число фотонов меньшее, чем число операторов. Или, точнее,

$$\Gamma^{N,M}(x_1,\dots,x_N;y_M,\dots,y_1) = 0, \quad \text{если } \langle m|\hat{\rho}|n\rangle = 0 \text{ для всех } n \geqslant N,\ m \geqslant M, \tag{12.5.16}$$

где $|n\rangle$ состояние с общим числом фотонов n.

12.5.2. Взаимные спектральные плотности произвольного порядка

Иногда также представляется удобным вводить нормально упорядоченные взаимные спектральные плотности порядка (N, M). Они определяются формулой

$$G^{(N,M)}(\mathbf{k}_1,s_1,\dots,\mathbf{k}_N,s_N;\mathbf{k}'_M,s'_M,\dots,\mathbf{k}'_1,s'_1) \equiv \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1,s_1}\dots\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_N,s_N}\hat{a}_{\mathbf{k}'_M,s'_M}\dots\hat{a}_{\mathbf{k}'_1,s'_1}\rangle \tag{12.5.17}$$

и являются скалярными функциями $(N + M)$ волновых векторов и $(N + M)$ индексов поляризации. При определенных состояниях поля $G^{(N+M)}$ может не быть конечной величиной и в некоторых случаях из $G^{(N+M)}$ можно выделить ряд множителей, которые представляют собой произведения дельта-функции от разности двух волновых векторов. Эти спектральные плотности высшего порядка удовлетворяют нескольким условиям, которые аналогичны условиям, которым удовлетворяют корреляционные функции $\Gamma^{(N+M)}$, например, условию сопряженности

$$G^{(N,M)^*}(\mathbf{k}_1,s_1,\dots,\mathbf{k}_N,s_N;\mathbf{k}'_M,s'_M,\dots,\mathbf{k}'_1,s'_1) \equiv G^{(M,N)}(\mathbf{k}'_1,s'_1,\dots,\mathbf{k}'_M,s'_M;\mathbf{k}_N,s_N,\dots,\mathbf{k}_1,s_1), \tag{12.5.18}$$

условию неотрицательности

$$G^{(N,N)}(\mathbf{k}_1,s_1,\dots,\mathbf{k}_N,s_N;\mathbf{k}_N,s_N,\dots,\mathbf{k}_1,s_1) \geqslant 0 \tag{12.5.19}$$

и неравенству

$$|G^{(N,M)}(\mathbf{k}_1,s_1,\dots,\mathbf{k}_N,s_N;\mathbf{k}_M,s_M,\dots,\mathbf{k}'_1,s'_1|^2 \leqslant \leqslant G^{(N,N)}(\mathbf{k}_1,s_1,\dots,\mathbf{k}_N,s_N;\mathbf{k}_N,s_N,\dots,\mathbf{k}_1,s_1)\times \times G^{(M,M)}(\mathbf{k}'_1,s'_1,\dots,\mathbf{k}'_M,s'_M;\mathbf{k}'_M,s'_M,\dots,\mathbf{k}'_1,s'_1). \tag{12.5.20}$$

С помощью разложений (12.2.1) и (12.2.2) операторов $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$ по операторам $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$ и $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}$ мы можем выразить корреляционную функцию $\Gamma^{(N+M)}$ через многократное фурье-преобразование спектральной плотности $G^{(N+M)}$ (в пределе, когда ряд Фурье можно заменить интегралом), и наоборот. Например, преобразуя (12.2.1), получаем

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s} = \frac{1}{L^{3/2}}\frac{1}{l(k)}\int \boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s}\cdot\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)\,e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,d^3r \tag{12.5.21}$$

и если теперь использовать этот результат в определении $\Theta^{(N+M)}$ (12.5.17), то получаем соотношение

$$\Theta^{(N,M)}(\mathbf{k}_1,s_1,\ldots,\mathbf{k}_N,s_N;\mathbf{k}'_M,s'_M,\ldots,\mathbf{k}'_1,s'_1) = \\ = \frac{1}{L^{3/2}}^{N+M}\int \Gamma^{(N,M)}(\mathbf{r}_1,t_1,i_1,\ldots,\mathbf{r}_N,t_N,i_N;\mathbf{r}'_M,t'_M,j'_M,\ldots,\mathbf{r}'_1,t'_1,j'_1)\times \\ \times\prod_{n=1}^{N}\prod_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{l^*(k_n)}\frac{1}{l(k'_m)}(\varepsilon_{\mathbf{k}_n s_n})_{i_n}(\varepsilon^*_{\mathbf{k}'_m s'_m})_{j_m}\exp i(\mathbf{k}_n\cdot\mathbf{r}_n-\mathbf{k}'_m\cdot\mathbf{r}'_m-\omega_n t_n+\omega'_m t'_m)\,d^3r_n\,d^3r'_m\right]. \quad (12.5.22)$$

Отсюда следует, что $\Theta^{(N+M)}$ обращается в нуль всякий раз, когда обращается в нуль $\Gamma^{(N+M)}$, и наоборот.

12.5.3. Независящие от фазы весовые функции

Особенно интересна ситуация, когда $\Theta^{(N+M)}$ $(\mathbf{k}_1,s_1,\ldots,\mathbf{k}_N,s_N;\mathbf{k}'_M,s'_M\ldots\mathbf{k}'_1,s'_1)$ отлична от нуля только в случае повторных индексов, т.е. при $N=M$, и $\mathbf{k}_i=\mathbf{k}'_i$, $s_i=s'_i$, $i=1,2,\ldots,N$. Несложно показать, что это означает определенное предположение о состоянии поля, которое легче всего выразить в виде условия на весовой функционал $\phi(\{v\})$ в представлении по диагональным когерентным состояниям оператора плотности. Еще одно доказательство и обсуждение данного вопроса приводится в работе (Mandel and Mehta, 1969).

Рассмотрим нормально упорядоченный характеристический функционал $C_{\mathrm{N}}(\{u\})$, определяемый выражением (11.11.13). Последовательно дифференцируя $C_{\mathrm{N}}(\{u\})$, мы можем получить функцию спектральной плотности произвольного порядка[1]

$$\Theta^{(N,M)}(\mathbf{k}_1,s_1,\ldots,\mathbf{k}_N,s_N;\mathbf{k}'_M,s'_M,\ldots,\mathbf{k}'_1,s'_1) = \\ = \prod_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial u_{\mathbf{k}_n s_n}}\right)\prod_{m=1}^{M}\left(-\frac{\partial}{\partial u^*_{\mathbf{k}'_m s'_m}}\right)C_{\mathrm{N}}(\{u\})\Big|_{\{u\}=0,\{u^*\}=0}, \quad (12.5.23)$$

таким образом, $C_{\mathrm{N}}(\{u\})$ является производящим функционалом для нормально упорядоченных спектральных плотностей. Наоборот, разлагая экспоненциальные члены в определении $C_{\mathrm{N}}(\{u\})$, мы можем выразить $C_{\mathrm{N}}(\{u\})$ в виде ряда, содержащего функции спектральной плотности. Таким образом,

$$C_{\mathrm{N}}(\{u\}) = \sum_{\{n\}}\sum_{\{m\}}\left\langle :\prod_{\mathbf{k},s}\frac{u_{\mathbf{k}s}^{n_{\mathbf{k}s}}(-u^*_{\mathbf{k}s})^{m_{\mathbf{k}s}}}{n_{\mathbf{k}s}!m_{\mathbf{k}s}!}(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s})^{n_{\mathbf{k}s}}(\hat{a}_{\mathbf{k}s})^{m_{\mathbf{k}s}}:\right\rangle. \quad (12.5.24)$$

Если все спектральные плотности обращаются в нуль, за исключением тех, которые имеют повторяющиеся индексы, то двойное суммирование сводится к одинарному суммированию, и мы имеем

$$C_{\mathrm{N}}(\{u\}) = \sum_{\{n\}}\left\langle :\prod_{\mathbf{k},s}\frac{(-|u_{\mathbf{k}s}|^2)^{n_{\mathbf{k}s}}}{(n_{\mathbf{k}s}!)^2}(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s})^{n_{\mathbf{k}s}}(\hat{a}_{\mathbf{k}s})^{n_{\mathbf{k}s}}:\right\rangle. \quad (12.5.25)$$

Из этого выражения видно, что характеристический функционал $C_{\mathrm{N}}(\{u\})$ фактически является функционалом только набора модулей $\{|u|\}$ и не зависит от фаз $\{u\}$. Но, так как весовой функционал $\phi(\{v\})$ можно выразить, в соответствии с (11.11.4), в виде многомерного фурье-образа от $C_{\mathrm{N}}(\{u\})$, то отсюда следует, что $\phi(\{v\})$, аналогичным образом, является функционалом только набора модулей $\{|v|\}$. То есть

$$\phi(\{u\}) = \int C_{\mathrm{N}}(\{u\})\prod_{\mathbf{k},s}\left\{\frac{1}{\pi^2}\exp\left(u^*_{\mathbf{k}s}v_{\mathbf{k}s}-u_{\mathbf{k}s}v^*_{\mathbf{k}s}\right)du_{\mathbf{k}s}\right\} = \\ = \int_{\{r\}=0}^{\infty}\int_{\{\theta\}=0}^{2\pi}C_{\mathrm{N}}(\{r\})\prod_{\mathbf{k},s}\left\{\frac{1}{\pi^2}\exp\left[2ir_{\mathbf{k}s}|v_{\mathbf{k}s}|\sin(\arg v_{\mathbf{k}s}-\theta_{\mathbf{k}s})\right]r_{\mathbf{k}s}\,dr_{\mathbf{k}s}\,d\theta_{\mathbf{k}s}\right\}, \quad (12.5.26)$$

[1] Индекс N при $C_{\mathrm{N}}(\{u\})$ обозначает «нормальное упорядочение» и не имеет ничего общего с индексами (N,M) при $\Theta^{(N,M)}$

где $u_{ks} = r_{ks}e^{i\theta_{ks}}$. Интегрируя по $\{\theta\}$, мы сразу видим, что $\phi(\{v\})$ не зависит от фаз $\{v\}$. Обратное также верно, и все спектральные плотности без повторяющихся индексов обращаются в нуль, когда $\phi(\{v\})$ является функционалом только набора модулей $\{|v|\}$. Проще всего это можно понять, если выразить с помощью оптической теоремы эквивалентности спектральные плотности в виде c-числовых интегралов. В частности, и спектральные плотности $\Theta^{(N,M)}$, и корреляционные функции $\Gamma^{(N,M)}$ должны обратиться в нуль при $N \neq M$, если ϕ имеет вид $\phi(\{|v|\})$.

В разд. 12.8 мы обнаружим, что если весовой функционал имеет вид $\phi(\{|v|\})$, то это означает, что электромагнитное поле является и стационарным и однородным. Поэтому обращение спектральных плотностей в нуль, за исключением плотностей с повторяющимися индексами, является достаточным для того, чтобы обеспечить стационарность и однородность. Конечно, на практике эти условия вряд ли можно точно удовлетворить во всех порядках. Тем не менее, в силу особенности разложения (12.5.24), которое содержит множители $n_{ks}!m_{ks}!$ в знаменателе, мы могли бы ожидать, что вклады от членов высшего порядка будут менее значительными, чем вклады от членов низшего порядка. В таком случае спектральные плотности низшего порядка будут доминировать в поведении $C_N(\{u\})$, а $C_N(\{u\})$ почти не будет зависеть от фазы, если все спектральные плотности низшего порядка обращаются в нуль, кроме тех, которые имеют повторяющиеся индексы.

12.6. Степень и порядок когерентности

При обсуждении в разд. 4.3 и 12.4 интерференции двух световых лучей мы естественным образом пришли к нормированной корреляционной функции второго порядка

$$\frac{\Gamma^{(1,1)}(x,y)}{[\Gamma^{(1,1)}(x,x)\Gamma^{(1,1)}(y,y)]^{1/2}} \equiv \gamma^{(1,1)}(x,y), \tag{12.6.1}$$

при условии, что $\Gamma^{(1,1)}(x,x)$ и $\Gamma^{(1,1)}(y,y)$ не обращаются в нуль. Величина $|\gamma^{(1,1)}(x,y)|$ обеспечивает естественную меру степени когерентности определенных декартовых компонент в пространственно-временны́х точках x и y, которая, в контексте корреляций второго порядка, просто связана к видностью сформированных интерференционных полос. В силу неравенства (12.5.7) $\gamma^{(1,1)}(x,y)$ автоматически является нормированной так, что

$$0 \leqslant |\gamma^{(1,1)}(x,y)| \leqslant 1. \tag{12.6.2}$$

Более того, как мы уже обнаружили при классическом рассмотрении когерентности в разд. 4.5 и как будет показано в разд. 12.7, условие $|\gamma^{(1,1)}(x,y)| = 1$ означает возможность представления $\Gamma^{(1,1)}(x,y)$ в виде произведения $U^*(x)U(y)$, и поэтому оно согласуется с интуитивным понятием о том, что подразумевается под когерентностью.

Было сделано несколько попыток ввести нормированные корреляционные функции высшего порядка и, опосредованным образом, определить степень когерентности произвольного порядка (N,M). Когда нормированная функция является унимодулярной, это означает, что поле обладает степенью когерентности «единица» для порядка (N,M). Но ни одна из этих нормированных корреляционных функций не содержит такой важной интерпретации, которую содержит корреляционная функция второго порядка. Рассмотрим некоторые из этих функций.

Для корреляционных функций четного порядка типа $\Gamma^{(N,N)}$ Глаубер (Glauber, 1963a) расширил определение $\gamma^{(1,1)}$ (12.6.1). Он ввел нормированную величину[1]

$$g^{(N,N)}(x_1,\ldots,x_N;y_N,\ldots,y_1) \equiv \frac{\Gamma^{(N,N)}(x_1,\ldots,x_N;y_N,\ldots,y_1)}{\prod_{r=1}^{N}[\Gamma^{(1,1)}(x_r;x_r)\Gamma^{(1,1)}(y_r;y_r)]^{1/2}}. \tag{12.6.3}$$

Откладывая пока в сторону математическую значимость данной величины, мы видим, что, если бы $g^{(N,N)}$ равнялась единице при $x_r = y_r$, $r = 1,2,\ldots,N$, то $\Gamma^{(N,N)}(x_1,\ldots x_N;x_N,\ldots x_1)$ представлялась бы в виде

[1] Глаубер (Glauber, 1963a) рассматривал только корреляционные функции четного порядка типа $\Gamma^{(N,N)}$, которые он называл корреляционными функциями порядка N.

произведения $\prod_{r=1}^{N}\langle\hat{I}(x_r)\rangle$. Но $\Gamma^{(N,N)}(x_1,\dots x_N;x_N,\dots x_1)$ является нормально упорядоченной корреляционной функцией интенсивности, которая пропорциональна совместной вероятности фотодетектирования в N пространственно-временны́х точках [ср. (12.2.14)]. Поэтому представление в виде произведения означает, что совместная вероятность N-кратного детектирования сводится к произведению N отдельных вероятностей детектирования и, таким образом, события фотодетектирования являются независимыми. Условие $g^{(N,N)}(x_1,\dots x_N;x_N,\dots x_1)=1$, другими словами, гарантирует, что не существует никаких фотоэлектрических корреляций интенсивностей порядка N в N пространственно-временны́х точках.

Представляется заманчивым попытаться интерпретировать $|g^{(N,N)}(x_1,\dots x_N;y_N,\dots y_1)|$, по аналогии с $|\gamma^{(1,1)}|$, как *степень когерентности порядка* (N,N). Тогда про поле можно было бы сказать, что оно когерентно до порядка (N,N), если $|g^{(r,r)}(x_1,\dots x_r;y_r,\dots y_1)|$ равно единице для всех $r\leq N$, в том смысле, что не существует никаких корреляций интенсивности до N-го порядка. Когерентность при любом порядке (N,N) тогда автоматически означала бы когерентность при любом меньшем порядке (r,r) для $r<N$. К сожалению, $|g^{(N,N)}|$, в общем случае не удовлетворяет неравенству типа (12.6.2), за исключением случая, когда $N=1$ и, таким образом, интерпретация $|g^{(N,N)}|$ в качестве степени когерентности порядка (N,N) не имеет основания. Более того, условие $|g^{(N,N)}|=1$, в общем случае, не означает, что корреляционная функция $\Gamma^{(N,N)}$ может быть представлена в виде произведения комплексных сомножителей, как это имеет место при $N=1$, равно, как $g^{(N,N)}(x,\dots x;x,\dots x)$, в общем случае, не равна единице. Тем не менее, мы можем считать, что представление $\Gamma^{(r,r)}$ в виде следующего произведения

$$\Gamma^{(r,r)}(x_1,\dots,x_r;y_r,\dots,y_1)=U^*(x_1)\dots U^*(x_r)U(y_r)\dots U(y_1)\quad\text{для всех } r\leqslant N, \tag{12.6.4}$$

является условием когерентности до порядка (N,N), и это автоматически подразумевает, что $|g^{(N,N)}|=1$.

В разд. 13.3 будет показано (соответствующий классический результат также может быть получен — см. разд. 8.4), что для поляризованного света от всех тепловых источников имеем

$$\Gamma^{(N,N)}(x,\dots,x;x,\dots,x)\equiv\langle:\hat{I}(x)^N:\rangle=N!\,\langle\hat{I}(x)\rangle^N, \tag{12.6.5}$$

так, что

$$g^{(N,N)}(x,\dots,x;x,\dots,x)=N! \tag{12.6.6}$$

На основе этого определения когерентности порядка (N,N) следует, что никакое поле теплового излучения не может быть когерентным выше второго порядка.

Другая попытка введения нормированной корреляционной функции произвольного порядка (N,M), которая удовлетворяла бы тому же неравентству, что и $\gamma^{(1,1)}$, была предпринята Метой (Mehta, 1966, 1967). Он определил

$$\gamma^{(N,M)}(x_1,\dots,x_N;y_M,\dots,y_1)\equiv$$
$$\equiv\frac{\Gamma^{(N,M)}(x_1,\dots,x_N;y_M,\dots,y_1)}{\prod_{r=1}^{N}[\Gamma^{(N,N)}(x_r,\dots,x_r;x_r,\dots,x_r)]^{1/2N}\prod_{r=1}^{M}[\Gamma^{(M,M)}(y_r,\dots,y_r;y_r,\dots,y_r)]^{1/2M}}, \tag{12.6.7}$$

при условии, что корреляционные функции в знаменателе отличны от нуля. Очевидно, что эта функция удовлетворяет соотношению

$$\gamma^{(N,N)}(x,\dots,x;x,\dots,x)=1. \tag{12.6.8}$$

Более того, можно показать, что при $|\gamma^{(N,N)}(x_1,\dots x_N;y_N,\dots y_1)|=1$ функция $\Gamma^{(N,N)}(x_1,\dots x_N;y_N,\dots y_1)$ может быть представлена в виде произведения вида (12.6.4) так, что условие $|\gamma^{(N,N)}|=1$, действительно, представляется в интуитивно приемлемом смысле условием когерентности порядка (N,N). Доказательство возможности представления в виде произведения, в основе которого лежат рассуждения Титулайра и Глаубера (Titulaer and Glauber, 1965), приводится в разд. 12.7. Для полей, у которых весовой функционал $\phi(\{v\})$ в диагональном представлении по когерентным состояниям является неотрицательным и ведет себя как классическая плотность вероятности, также можно показать, что

$$0\leqslant|\gamma^{(N,M)}(x_1,\dots,x_N;y_M,\dots,y_1)|\leqslant 1, \tag{12.6.9}$$

так что $|\gamma^{(N,M)}|$ можно, в определенном смысле, интерпретировать как степень когерентности порядка (N,M).

К сожалению, это неравенство не удовлетворяется в общем случае квантованного поля, когда, по-видимому, не существует верхней границы для $|\gamma^{(N,M)}|$. Более того, когерентность при любом четном порядке (N,N) автоматически подразумевает когерентность во всех высших четных порядках в том случае, когда нет ограничения на число фотонов и во всех высших четных порядках до (M,M), при $M \leq n$, когда имеется n фотонов (в таком случае $\Gamma^{(r,r)}$ обращается в нуль и $\gamma^{(r,r)}$ не определена при $r > n$). При таком определении когерентности высших порядков, когерентность второго порядка является наиболее сильной формой когерентности, которая имеет значение для когерентности высших порядков, а не наоборот. Как мы покажем в следующем разделе, когерентность второго порядка действительно имеет важное значение для корреляционных функций высшего порядка.

Еще одна нормированная корреляционная функция рассматривалась Сударшаном (Sudarshan, 1969; см. также Klauder and Sudarshan, 1968, гл. 8, выражение (8–84), который ввел

$$s^{(N,M)}(x_1,\ldots,x_N;y_M,\ldots,y_1) \equiv$$

$$\equiv \frac{\Gamma^{(N,M)}(x_1,\ldots,x_N;y_M,\ldots,y_1)}{[\Gamma^{(N,N)}(x_1,\ldots,x_N;x_N,\ldots,x_1)\Gamma^{(M,M)}(y_1,\ldots,y_M;y_M,\ldots,y_1)]^{1/2}}, \quad (12.6.10)$$

при условии, что корреляционные функции, входящие в знаменатель, не обращаются в нуль. Эти функции удовлетворяют условию

$$s^{(N,N)}(x,\ldots,x;x,\ldots,x) = 1 \quad (12.6.11)$$

и неравенству

$$0 \leqslant |s^{(N,M)}(x_1,\ldots,x_N;y_M,\ldots,y_1)| \leqslant 1 \quad (12.6.12)$$

для всех полей. Кроме того, они демонстрируют свойство $|\gamma^{(N,M)}|$, состоящее в том, что $|s^{(1,1)}(x;y)| = 1$ означает, что $|s^{(N,N)}(x_1,\ldots x_N;y_N,\ldots y_1)| = 1$ для всех N, при условии, что число фотонов не ограничено. Однако, конечно, условие $s^{(N,N)}(x_1,\ldots x_N;x_N,\ldots x_1) = 1$ делает интерпретации $s^{(N,N)}$ и $\gamma^{(N,N)}$, в целом, различными.

Следует сказать, что хотя, без всякого сомнения, корреляционные функции высших порядков являются важными для полного описания электромагнитного поля и его когерентных свойств, полезность введения понятия когерентности высшего порядка и степени когерентности высшего порядка можно оспорить. Общепризнано, что когерентное состояние поля когерентно во всех порядках и нормированные корреляционные функции являются унимодулярными практически при всех определениях. Однако не известно никаких примеров полей, которые были бы когерентными только для каких-то некоторых порядков (за исключением второго), а не для других. Вызывает сомнение, что такие поля когда-нибудь могут быть встречены на практике, и что они вообще существуют. Вполне может быть, что представление о когерентности второго порядка, которое было отправной точкой при развитии теории когерентности, является, в конечном счете, единственно реально значимым представлением.

12.7. Значение когерентности второго порядка

В этом разделе будут рассмотрены некоторые следствия условия для когерентности второго порядка

$$|\langle\gamma^{(1,1)}(x;y)\rangle| = 1, \quad (12.7.1)$$

и будет показано, как это впервые было продемонстрировано работе (Titulaer, Glauber, 1965, 1966), что данное условие имеет определенные последствия для состояний электромагнитного поля и корреляционных функций высшего порядка. Мы покажем, что не только $\Gamma^{(1,1)}(x,y)$, но и вообще все корреляционные функции $\Gamma^{(N,M)}(x_1,\ldots x_N;y_M,\ldots y_1)$ могут быть представлены в виде произведения функций, связанных с каждой пространственно-временной составляющей $x_r(r = 1,2,\ldots,N)$ и $y_r(r = 1,2,\ldots,M)$. Мы также обнаружим, что некоторые следствия полной когерентности сходны со следствиями, которые рассматривались в разд. 4.7 и 8.5.2 для классических полей.

12.7.1. Факторизация корреляционных функций[1]

Мы начнем с общего операторного неравенства Шварца

$$|\langle \hat{A}^\dagger \hat{B}\rangle|^2 \leqslant \langle \hat{A}^\dagger \hat{A}\rangle\langle \hat{B}^\dagger \hat{B}\rangle, \tag{12.7.2}$$

которое выполняется для любых двух операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, имеющих различные ожидаемые значения. В частности,

$$\text{если} \quad \langle \hat{A}^\dagger \hat{A}\rangle = 0, \quad \text{то} \quad \langle \hat{A}^\dagger \hat{B}\rangle = 0 = \langle \hat{B}^\dagger \hat{A}\rangle \tag{12.7.3}$$

для любого оператора $\hat{B}$. Ожидаемые значения можно расписать явно через оператор плотности $\hat{\rho}$, так что мы имеем

$$\mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}\hat{A}^\dagger \hat{B}) = 0 = \mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}\hat{B}^\dagger \hat{A}) = \mathrm{Tr}\,(\hat{A}^\dagger \hat{\rho}\hat{B}),$$

и, поскольку $\hat{B}$ является полностью произвольным,

$$\hat{\rho}\hat{A}^\dagger = 0 = \hat{A}\hat{\rho}, \quad \text{если} \quad \mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}\hat{A}^\dagger \hat{A}) = 0. \tag{12.7.4}$$

Примером оператора $\hat{A}$, удовлетворяющего условию $\langle \hat{A}^\dagger \hat{A}\rangle = 0$, является

$$\hat{A} \to \hat{F}^{(+)}(x) = \frac{\Gamma^{(1,1)*}(x;y)}{\Gamma^{(1,1)}(y;y)}\hat{F}^{(+)}(y), \tag{12.7.5}$$

при условии, что $\Gamma^{(1,1)}(y;y) \neq 0$ и справедливо (12.7.1). При этом

$$|\Gamma^{(1,1)}(x;y)|^2 = \Gamma^{(1,1)}(x;x)\Gamma^{(1,1)}(y;y), \tag{12.7.6}$$

что можно легко проверить. При данном выборе $\hat{A}$ соотношения (12.7.4) переходят в

$$\hat{F}^{(+)}(x)\hat{\rho} = \frac{\Gamma^{(1,1)*}(x;y)}{\Gamma^{(1,1)}(y;y)}\hat{F}^{(+)}(y)\hat{\rho}, \tag{12.7.7}$$

$$\hat{\rho}\hat{F}^{(-)}(x) = \frac{\Gamma^{(1,1)}(x;y)}{\Gamma^{(1,1)}(y;y)}\hat{\rho}\hat{F}^{(-)}(y). \tag{12.7.8}$$

Теперь применим эти выражения для расчета корреляционной функции $\Gamma^{(1,1)}(x;y)$. Сперва предположим, что существует третий параметр z, для которого $\Gamma^{(1,1)}(z,z) \neq 0$, такой, что степень когерентности равна единице между любыми из двух параметров x, y, z. Тогда можно заменить x или y на z в любом из вышеприведенных выражений. Из определения

$$\Gamma^{(1,1)}(x;y) \equiv \mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}\hat{F}^{(-)}(x)\hat{F}^{(+)}(y)],$$

и из (12.7.8), заменяя y на z, получаем

$$\Gamma^{(1,1)}(x;y) = \frac{\Gamma^{(1,1)}(x;z)}{\Gamma^{(1,1)}(z;z)}\mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}\hat{F}^{(-)}(x)\hat{F}^{(+)}(y)] = \Gamma^{(1,1)}(x;z)\Gamma^{(1,1)}(z;y)/\Gamma^{(1,1)}(z;z). \tag{12.7.9}$$

Если z фиксированная точка, то согласно полученному выражению корреляционная функция представляется в виде произведения функции только от x на функцию только от y. Конечно, если бы x и y были фиксированными точками, то этот вывод не имел бы особого значения, но мы можем предположить, что существует, по крайней мере, окрестность точек x и y, для которых (12.7.9) выполняется. Определяя

$$U(y) \equiv \frac{\Gamma^{(1,1)}(z;y)}{[\Gamma^{(1,1)}(z;z)]^{1/2}}, \tag{12.7.10}$$

[1] В этой разделе мы, главным образом, следуем рассуждениям, приведенным в работе (Titulaer and Glauber, 1965).

мы можем переписать этот результат в компактной форме

$$\Gamma^{(1,1)}(x;y) = U^*(x)U(y), \tag{12.7.11}$$

точно так же, как для классических полей, обладающих когерентностью второго порядка (см. разд. 4.5). Однако следует подчеркнуть, что функции $U^*(x)$, $U(y)$ в общем случае не являются ожидаемыми значениями $\hat{F}^{(-)}(x)$ и $\hat{F}^{(+)}(y)$, как это было бы, если бы поле находилось в когерентном состоянии. Когерентное состояние является довольно частным примером поля, обладающего когерентностью второго порядка.

Функция $U(x)$ представляется зависящей от выбора фиксированной точки z таким образом, что другая фиксированная точка z' порождает новую функцию $U'(x)$. Но, поскольку мы должны иметь

$$U^*(x)U(y) = U'^*(x)U'(y) \tag{12.7.12}$$

для множества значений x и y, $U(x)$ и $U'(x)$ должны быть связаны между собой постоянным унимодулярным множителем, который не имеет особого значения.

12.7.2. Корреляции произвольного порядка

Можно применить аналогичные рассуждения для расчета корреляционной функции произвольного порядка $\Gamma^{(N,N)}$ свободного поля

$$\Gamma^{(N,M)}(x_1,\ldots,x_N;y_M,\ldots,y_1) = \mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}\hat{F}^{(-)}(x_1)\ldots\hat{F}^{(-)}(x_N)\hat{F}^{(+)}(y_M)\ldots\hat{F}^{(+)}(y_1)]. \tag{12.7.13}$$

Так как операторы рождения коммутируют друг с другом, что также верно и для операторов уничтожения, а след инвариантен по отношению к циклической перестановке операторов, каждый оператор в (12.7.13) можно, по очереди, поставить рядом с $\hat{\rho}$. Если поле когерентно во втором порядке между любыми из точек $x_1,\ldots x_N;y_1,\ldots y_M$ и опорной точкой z, то мы просто применяем соотношение (12.7.8) N раз при $y=z$ и $x=x_1,x_2,\ldots,x_N$ по очереди и соотношение (12.7.7) M раз при $y=z$ и $x=y_1,y_2,\ldots,y_M$ по очереди. Тогда получаем формулу

$$\begin{aligned}\Gamma^{(N,M)}(x_1,\ldots,x_N;y_M,\ldots,y_1) &= \\ &= \prod_{r=1}^{N}\left[\frac{\Gamma^{(1,1)}(x_r;z)}{\Gamma^{(1,1)}(z;z)}\right]\prod_{r=1}^{M}\left[\frac{\Gamma^{(1,1)*}(y_r;z)}{\Gamma^{(1,1)}(z;z)}\right]\ \mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}(\hat{F}^{(-)}(z))^N(\hat{F}^{(+)}(z))^M] = \\ &= \frac{\Gamma^{(N,M)}(z,\ldots,z;z,\ldots,z)}{[\Gamma^{(1,1)}(z;z)]^{(N+M)/2}}U^*(x_1)\ldots U^*(x_N)U(y_M)\ldots U(y_1) = \\ &= g^{(N,M)}U^*(x_1)\ldots U^*(x_N)U(y_M)\ldots U(y_1),\end{aligned} \tag{12.7.14}$$

где введены функции U, определяемые формулой (12.7.10), и полагается

$$g^{(N,M)} \equiv \Gamma^{(N,M)}(z,\ldots,z;z,\ldots,z)/[\Gamma^{(1,1)}(z;z)]^{(N+M)/2}. \tag{12.7.15}$$

Мы вновь видим, что $\Gamma^{(N,M)}$ представляется в виде произведения функций одного параметра в таком виде, который мы могли бы интуитивно предположить для когерентного поля, хотя, в общем случае, $U(x)$ $U^*(x)$ не являются ожидаемыми значениями $\hat{F}^{(+)}(x)$ и $\hat{F}^{(-)}(x)$. Действительно, представляется удивительным, что условие когерентности второго порядка имеет такое глубокое значение для корреляционных функций высшего порядка. Однако в общем случае комплексная величина $g^{(N,M)}$, не зависящая от $x_1,\ldots x_N;y_1,\ldots y_M$, зависит от порядка (N,M). И, хотя $g^{(N,M)}$ является постоянной величиной, ее модуль в общем случае отличен от единицы. В определенном смысле $|g^{(N,M)}|$ представляет собой меру отклонения поля от полностью когерентного состояния, для которого $|g^{(N,M)}|=1$, и для которого представление $\Gamma^{(N,M)}$ в виде произведения следует из первых принципов. Для такого когерентного состояния $|\{v\}\rangle$ функция $U(y)$ в формуле (12.7.10) сводится к

$$U(y) = \exp\,[-i\arg F^{(+)}(z)]F^{(+)}(y), \tag{12.7.16}$$

где $F^{(+)}(y)$ и $F^{(+)}(z)$ — собственные значения операторов $\hat{F}^{(+)}(y)$ и $\hat{F}^{(+)}(z)$, принадлежащие когерентному состоянию $|\{v\}\rangle$.

12.7.3. Оператор плотности для поля

Теперь мы посмотрим, что означает условие когерентности второго порядка (12.7.1) для состояния электромагнитного поля. Начнем с простых примеров полей, обладающих когерентностью второго порядка, а затем покажем, что обобщение этих примеров приводит к интересной классификации поля, в соответствии с которой в нем присутствует только один тип возбуждения (ср. также разд. 4.7 и 8.5.2). Мы исходим из тех же рассуждений, которые приведены в работах (Titulaer and Glauber, 1966).

Рассмотрим следующее состояние поля[1] $|0,\ldots,0,1_{\mathbf{k}s},0,\ldots 0\rangle$, когда в нем имеется только один фотон типа $\mathbf{k},s$. Используя разложения (12.2.1) и (12.2.2) для $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$, мы легко находим, что

$$\Gamma^{(1,1)}_{i;j}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)=\langle 0,\ldots,0,1_{\mathbf{k}s},0,\ldots,0|\hat{F}^{(-)}_i(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}^{(+)}_j(\mathbf{r}_2,t_2)|0,\ldots,0,1_{\mathbf{k}s},0,\ldots,0\rangle=$$
$$=\frac{1}{L^3}|l(k)|^2(\epsilon^*_{\mathbf{k},s})_i(\epsilon_{\mathbf{k},s})_j\,\mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1-\omega t_1)}\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2-\omega t_2)}. \quad (12.7.17)$$

Из этого выражения видно, что $\Gamma^{(1,1)}$ представима в виде произведения функции от $\mathbf{r}_1,t_1,i$ и функции от $\mathbf{r}_2,t_2,j$, что и требуется для удовлетворения условию когерентности второго порядка. Таким образом, поле, которое является вакуумным, за исключением одного фотона в одной моде, является когерентным во втором порядке.

Мы сразу можем сделать два различных обобщения этого результата. Прежде всего, рассмотрим произвольное однофотонное состояние, при котором фотон необязательно связан лишь с одной модой $\mathbf{k},s$. Оператор плотности для чистого однофотонного состояния данного типа задается выражением

$$\hat{\rho}=\sum_{\mathbf{k},s}\sum_{\mathbf{k}',s'}\alpha(\mathbf{k},s)\alpha^*(\mathbf{k}',s')|0,\ldots,0,1_{\mathbf{k}s},0,\ldots,0\rangle\langle 0,\ldots,0,1_{\mathbf{k}'s'},0,\ldots,0|, \quad (12.7.18а)$$

где $\alpha(\mathbf{k},s)$ — некоторая комплексная функция от $\mathbf{k},s$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{\mathbf{k},s}|\alpha(\mathbf{k},s)|^2=1. \quad (12.7.18б)$$

Для этого состояния

$$\Gamma^{(1,1)}_{i;j}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)=\sum_{\mathbf{k},s}\sum_{\mathbf{k}',s'}\alpha(\mathbf{k},s)\alpha^*(\mathbf{k}',s')\langle 0,\ldots,0,1_{\mathbf{k}'s'},0,\ldots,0|\times$$
$$\times\hat{F}^{(-)}_i(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}^{(+)}_j(\mathbf{r}_2,t_2)|0,\ldots,0,1_{\mathbf{k}s},0,\ldots,0\rangle. \quad (12.7.19)$$

То есть действие оператора уничтожения $\hat{F}^{(+)}_j(\mathbf{r}_2,t_2)$ на однофотонное состояние $|0,\ldots,0,1_{\mathbf{k}s},0,\ldots 0\rangle$, помимо мультипликативного множителя, приводит к образованию вакуумного состояния $|\mathrm{vac}\rangle$, что также справедливо для $\hat{F}^{(-)}_i(\mathbf{r}_1,t_1)$, действующего на $\langle 0,\ldots,0,1_{\mathbf{k}'s'},0,\ldots 0|$. Если определить

$$\sum_{\mathbf{k},s}\alpha(\mathbf{k},s)\hat{F}^{(+)}_j(\mathbf{r}_2,t_2)|0,\ldots,0,1_{\mathbf{k}'s'},0,\ldots,0\rangle\equiv U_j(\mathbf{r}_2,t_2)|\mathrm{vac}\rangle, \quad (12.7.20)$$

то можно переписать (12.7.19) в виде

$$\Gamma^{(1,1)}_{i;j}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)=U^*_i(\mathbf{r}_1,t_1)U_j(\mathbf{r}_2,t_2), \quad (12.7.21)$$

откуда видно, что любое чистое однофотонное состояние удовлетворяет условию когерентности второго порядка. Ограничение чистого состояния здесь необходимо.

[1] Подчеркнем тот факт, который возможно затенен данным обозначением состояния, что число мод, в действительности, не ограничено.

Можно сделать альтернативное обобщение (12.7.12), полагая одну $\mathbf{k}', s'$-моду возбужденной совершенно произвольным образом, а все остальные моды — незаполненными. Оператор плотности для такого состояния имеет вид произведения

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{\mathbf{k}'s'} \prod_{\mathbf{k},s\neq\mathbf{k}',s'} |0_{\mathbf{k}s}\rangle\langle 0_{\mathbf{k}s}|, \tag{12.7.22}$$

где $\hat{\rho}_{\mathbf{k}'s'}$ — произвольный оператор плотности для заполненной $\mathbf{k}', s'$-моды в отдельности. При таком выборе $\hat{\rho}$ мы находим для корреляционной функции

$$\Gamma^{(1,1)}_{i;j}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2) = \frac{1}{L^3}|l(k')|^2(\varepsilon^*_{\mathbf{k}'s'})_i(\varepsilon_{\mathbf{k}'s'})_j\, \mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_1-\omega' t_1)}\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_2-\omega' t_2)}\mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}_{\mathbf{k}'s'}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}). \tag{12.7.23}$$

Она опять представляется в виде произведения вида (12.7.21), что и требуется для когерентности второго порядка, если мы положим

$$U_i(\mathbf{r},t) \equiv \frac{1}{L^{3/2}} l(k')(\varepsilon_{\mathbf{k}'s'})_i[\Theta^{(1,1)}(\mathbf{k}',s';\mathbf{k}',s')]^{1/2}\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega' t)}. \tag{12.7.24}$$

Действительно, несложно видеть, что в этом случае все корреляционные функции произвольного порядка должны аналогичным образом факторизоваться. Таким образом имеем

$$\begin{aligned}\Gamma^{(N,M)}_{i_1,\ldots,i_N;j_M,\ldots,j_1}(\mathbf{r}_1,t_1,\ldots,\mathbf{r}_N,t_N;\mathbf{r}'_M,t'_M\ldots,\mathbf{r}'_1,t'_1) = \\ = \Theta^{(N,M)}(\mathbf{k}',s',\ldots,\mathbf{k}',s';\mathbf{k}',s',\ldots,\mathbf{k}',s')\times \\ \times W^*_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots W^*_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)W_{j_M}(\mathbf{r}'_M,t'_M)\ldots W_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1),\end{aligned} \tag{12.7.25}$$

если положить

$$W_i(\mathbf{r},t) \equiv \frac{1}{L^{3/2}} l(k')(\varepsilon_{\mathbf{k}'s'})_i\, e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega' t)}. \tag{12.7.26}$$

Таким образом, поле, содержащее только одну возбужденную моду, удовлетворяет условию представления в виде произведения, хотя в общем случае множители $\Theta^{(N,M)}$ зависят от порядка $N+M$.

12.7.4. Волновые пакеты в качестве мод

Моды, которые мы рассматривали до настоящего момента, являлись плоскими волнами с определенным волновым вектором $\mathbf{k}$ и определенной поляризацией s. Однако, можно использовать линейные комбинации плоско-волновых мод и создать разного рода волновые пакеты, которые также будут решениями волнового уравнения. Если эти различные волновые пакеты образуют полный набор, то они образуют базис для представления волновых векторов, и мы можем рассматривать их в качестве альтернативного набора мод электромагнитного поля. Мы снова убедимся в справедливости утверждения, что если поле содержит только одну возбужденную моду данного нового типа, то оно когерентно во всех порядках.

Рассмотрим волновые пакеты, которые сформированы в виде линейной комбинации мод плоских волн

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{r},t) \equiv \frac{1}{L^{3/2}} \sum_\lambda \alpha_{m\lambda} l(k_\lambda)\varepsilon_\lambda\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_\lambda\cdot\mathbf{r}-\omega_\lambda t)}, \tag{12.7.27}$$

где индекс λ использован для обозначения комбинации индексов $\mathbf{k}, s$ волнового вектора и поляризации. Коэффициенты $\alpha_{m\lambda}$ выбираются как элементы унитарной матрицы так, чтобы

$$\sum_m \alpha^*_{m\lambda}\alpha_{m\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} = \sum_m \alpha_{\lambda m}\alpha^*_{\lambda' m}. \tag{12.7.28}$$

Множитель $l(k_\lambda)$ в (12.7.27) есть тот же самый коэффициент, который входит в разложение (11.12.3) комплексного вектора поля $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и является различным для различных векторов. Таким образом,

функции $\mathbf{u}_m(\mathbf{r},t)$ тесно связаны с выбором отдельного полевого вектора $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$. Но, подобно плоским волновым модам, они удовлетворяют уравнению Гельмгольца во всем пространстве, и поэтому составляют набор мод поля. Мы можем разложить $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ по этим модам, используя (12.7.27) и (12.7.28), и записать

$$\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\lambda}\hat{a}_\lambda l(k_\lambda)\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}_\lambda\cdot\mathbf{r}-\omega_\lambda t)} =$$

$$= \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{m}\sum_{\lambda'}\sum_{\lambda}\hat{a}_{\lambda'}\alpha^*_{m\lambda'}\alpha_{m\lambda}l(k_\lambda)\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}_\lambda\cdot\mathbf{r}-\omega_\lambda t)} = \sum_{m}\sum_{\lambda'}\hat{a}_{\lambda'}\alpha^*_{m\lambda'}\mathbf{u}_m(\mathbf{r},t). \quad (12.7.29)$$

Если определить новый оператор $\hat{c}_m$ как линейную комбинацию операторов уничтожения

$$\hat{c}_m \equiv \sum_{\lambda}\alpha^*_{m\lambda}\hat{a}_\lambda, \quad (12.7.30)$$

то можно выразить $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ в более компактной форме

$$\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t) = \sum_{m}\hat{c}_m\mathbf{u}_m(\mathbf{r},t). \quad (12.7.31)$$

Несложно увидеть, что операторы $\hat{c}_m$ и сопряженные им $\hat{c}^\dagger_m$ играют роль операторов уничтожения и рождения бозонов для возбуждений, характеризуемых модовыми функциями $\mathbf{u}_m(\mathbf{r},t)$. Из коммутационных соотношений (10.3.9)—(10.3.11) для операторов $\hat{a}_\lambda$, $\hat{a}^\dagger_\lambda$ следует, что операторы $\hat{c}_m$, $\hat{c}^\dagger_m$ подчиняются коммутационным соотношениям

$$[\hat{c}_m,\hat{c}_n] = 0 = [\hat{c}^\dagger_m,\hat{c}^\dagger_n], \quad (12.7.32)$$

$$[\hat{c}_m,\hat{c}^\dagger_n] = \sum_{\lambda}\alpha_{\lambda m}\alpha^*_{\lambda n} = \delta_{mn}, \quad (12.7.33)$$

которые представляют собой типичные правила коммутации для операторов уничтожения и рождения бозонов. В силу этих соотношений возбуждения поля, соответствующие различным функциям мод $\mathbf{u}_m(\mathbf{r},t)$, могут быть созданы независимо[1].

Рассмотрим теперь поле, в котором возбуждена только одна из мод $\mathbf{u}_n(\mathbf{r},t)$, в то время как все остальные являются незаполненными. В таком случае оператор плотности для поля $\hat{\rho}$ должен иметь форму произведения

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_n\prod_{m\neq n}|0_m\rangle\langle 0_m|. \quad (12.7.34)$$

Так как $\hat{c}_m|0_m\rangle$ для $m\neq n$, из (12.7.31) следует, что корреляционная функция $\Gamma^{(1,1)}_{i;j}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)$ задается выражением

$$\Gamma^{(1,1)}_{i;j}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2) = [u^*_n(\mathbf{r}_1,t_1)]_i[u_n(\mathbf{r}_2,t_2)]_j\mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}_n\hat{c}^\dagger_n\hat{c}_n), \quad (12.7.35)$$

которое является произведением функции от $\mathbf{r}_1,t_1,i$ и функции от $\mathbf{r}_2,t_2,j$. В более общем случае для нормально упорядоченной функции любого порядка (N,M) мы имеем

$$\Gamma^{(N,M)}(x_1,\ldots,x_N,y_M,\ldots,y_1) = u^*_n(x_1)\ldots u^*_n(x_N)u_n(y_M)\ldots u_n(y_1)\mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}_n\hat{c}^{\dagger N}_n\hat{c}^M_n], \quad (12.7.36)$$

где использованы сокращенные обозначения разд. 12.5. Из этого выражения видно, что корреляционные функции произвольного порядка удовлетворяют условию представления в виде произведения, и что степень когерентности второго порядка равна единице, когда возбуждена только одна мода поля, даже тогда, когда эта мода является модой дпнного более общего вида. Если мы воспользуемся определением (12.6.7)

[1] Не учитывая коэффициент $l(k_\lambda)$ в разложении (12.7.27), мы конечно могли бы создать модовые функции, которые не зависят от выбора полевого оператора, и сформировать полный ортогональный набор. Тогда любой оператор мог бы быть разложен по модовым функциям типа (12.7.31). Однако, результирующие операторы $\hat{c}_m$, $\hat{c}^\dagger_m$ не подчиняются такому простому набору коммутационных правил, как (12.7.32) и (12.7.33).

для $\gamma^{(N,M)}$, то увидим, что степень когерентности $|\gamma^{(N,M)}|$ любого четного порядка (N,N) в этом случае также равна единице. Так как вид оператора плотности $\hat{\rho}_n$, связанного с одним возбуждением n, был оставлен совершенно произвольным, ясно, что существует огромное множество различных состояний, удовлетворяющих условию когерентности.

Утверждение, обратное данному результату, также верно. Поле, удовлетворяющее условию (12.7.1) когерентности второго порядка, должно иметь оператор плотности вида (12.7.34), соответствующий возбуждению только одной моды произвольной формы[1]. Для того, чтобы показать это, мы начнем с соотношения (12.7.7), которое выполняется для любого поля, обладающего когерентностью второго порядка, и которое запишем в виде

$$\hat{F}_i^{(+)}(\mathbf{r},t)\hat{\rho} = \frac{\Gamma_{j;i}^{(1,1)}(\mathbf{r}_0,t_0;\mathbf{r},t)}{\Gamma_{j;j}^{(1,1)}(\mathbf{r}_0,t_0;\mathbf{r}_0,t_0)}\hat{F}_j^{(+)}(\mathbf{r}_0,t_0)\hat{\rho}, \tag{12.7.37}$$

где $\mathbf{r}_0, t_0$ — некоторая фиксированная пространственно-временна́я точка, а j — некоторый фиксированный декартовый индекс. В этом уравнении мы не подразумеваем никакого суммирования. Теперь мы умножим обе части этого уравнения на

$$\frac{1}{L^{3/2}}\frac{1}{l(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^*)_i\,\mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)},$$

суммируя по i и интегрируя по $\mathbf{r}$ по всему пространству. Тогда с помощью (12.5.21) результат можно записать как

$$\hat{a}_\lambda\hat{\rho} = \beta_\lambda\hat{F}^{(+)}(z)\hat{\rho}, \tag{12.7.38}$$

где z обозначает $(\mathbf{r}_0,t_0,j)$, λ обозначает $\mathbf{k},s$, а β_λ определяется формулой

$$\beta_\lambda \equiv \frac{1}{\Gamma^{(1,1)}(z,z)}\frac{1}{L^{3/2}}\frac{1}{l(k)}\sum_i\int\Gamma_{j;i}^{(1,1)}(\mathbf{r}_0,t_0;\mathbf{r},t)(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^*)_i\,\mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,d^3r. \tag{12.7.39}$$

Зависимость от t пропадает при интегрировании, и β_λ, таким образом, является постоянной величиной.

Рассмотрим теперь оператор плотности $\hat{\rho}$ в фоковском представлении. Он может быть записан в виде

$$\hat{\rho} = \sum_{\{n\}}\sum_{\{m\}}|\{n\}\rangle\langle\{n\}|\hat{\rho}|\{m\}\rangle\langle\{m\}| =$$

$$= \sum_{\{n\}}\sum_{\{m\}}\prod_\lambda\left[\frac{\hat{a}_\lambda^{\dagger n_\lambda}}{\sqrt{n_\lambda!}}\right]|\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}|\prod_\lambda\left[\frac{\hat{a}_\lambda^{n_\lambda}}{\sqrt{n_\lambda!}}\right]\hat{\rho}\prod_\lambda\left[\frac{\hat{a}_\lambda^{\dagger m_\lambda}}{\sqrt{m_\lambda!}}\right]|\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}|\prod_\lambda\left[\frac{\hat{a}_\lambda^{m_\lambda}}{\sqrt{m_\lambda!}}\right], \tag{12.7.40}$$

если используется представление по фоковским состояниям (10.4.16). С помощью (12.7.38) и эрмитово сопряженного ему выражения мы можем упростить (12.7.40) и выразить его в виде

$$\hat{\rho} = \sum_{\{n\}}\sum_{\{m\}}\prod_\lambda\left[\frac{(\hat{a}_\lambda^\dagger\beta_\lambda)^{n_\lambda}}{n_\lambda!}\right]|\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}|[\hat{F}^{(+)}(z)]^n\hat{\rho}[\hat{F}^{(-)}(z)]^m|\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}|\prod_\lambda\left[\frac{(\hat{a}_\lambda\beta_\lambda^*)^{m_\lambda}}{m_\lambda!}\right], \tag{12.7.41}$$

где

$$n \equiv \sum_\lambda n_\lambda, \quad m \equiv \sum_\lambda m_\lambda. \tag{12.7.42}$$

Теперь воспользуемся полиномиальной теоремой в виде

$$\sum_{\{n\}}\prod_\lambda\left[\frac{(\hat{a}_\lambda^\dagger\beta_\lambda)^{n_\lambda}}{n_{\lambda!}}\right]\delta_{nn'} = \frac{1}{n'!}\left(\sum_\lambda\hat{a}_\lambda^\dagger\beta_\lambda\right)^{n'}$$

[1] См. (Titulaer and Glauber, 1966). Мы следуем их рассуждениям. Некоторые сходные черты одномодовых квантованного и классического поля коротко обсуждаются в разд. 8.5.2.

и выполним частное суммирование в (12.7.41) при фиксированных n и m. В результате получим

$$\hat{\rho} = \sum_n \sum_m \frac{\left(\sum_\lambda \hat{a}_\lambda^\dagger \beta_\lambda\right)^n}{n!} |\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}| [\hat{F}^{(+)}(z)]^n \hat{\rho} [\hat{F}^{(-)}(z)]^m |\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}| \frac{\left(\sum_\lambda \hat{a}_\lambda \beta_\lambda^*\right)^m}{m!}. \tag{12.7.43}$$

Появившийся в этом выражении оператор $\sum_\lambda \hat{a}_\lambda^\dagger \beta_\lambda$ определяет новый оператор рождения для новой немонохроматической моды поля. Если в (12.7.30) задать $\alpha_{\lambda m}$ в виде

$$\alpha_{\lambda r} = \begin{cases} \dfrac{\beta_\lambda^*}{\sum_\lambda |\beta_\lambda|^2} \equiv \dfrac{\beta_\lambda^*}{B} & \text{для } r = 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{12.7.44}$$

где B остается конечной, пока конечно среднее число фотонов в поле, то можно переписать (12.7.43) следующим образом

$$\hat{\rho} = \sum_n \sum_m \frac{\hat{c}_1^{\dagger n}}{n!} |\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}| \frac{\hat{c}_1^m}{n!} B^{n+m} \langle\mathrm{vac}| [\hat{F}^{(+)}(z)]^n \hat{\rho} [\hat{F}^{(-)}(z)]^m] |\mathrm{vac}\rangle. \tag{12.7.45}$$

Анализ этого выражения показывает, что оно соответствует полю, в котором из нового набора мод возбуждена только первая, тогда как все остальные моды незаполнены. Таким образом, мы показали, что условие когерентности второго порядка означает, что единственный существующий тип возбуждения, т.е. фотон, можно связать лишь с одной модой поля. Однако природа этого возбуждения является достаточно произвольной. Это состояние может быть либо состоянием дискретного возбуждения, т.е. фоковским состоянием, либо когерентным состоянием, либо некоторым произвольным нечистым состоянием. В особом случае, когда состояние соответствует когерентному возбуждению одной моды, т.е. собственному состоянию оператора $\hat{c}_m$, также можно показать, что это состояние является когерентным состоянием в базисе, создаваемым любым другим набором мод (Titulaer and Glauber, 1966).

12.8. Стационарность, однородность, изотропность

12.8.1. Стационарность

При обсуждении классических функций когерентности мы уже встречались с понятием стационарного поля. Вообще говоря, стационарным является поле, статистические свойства которого не изменяются во времени и это находит свое отражение в том, что ожидаемое значение любой функции или функционала полевых операторов инвариантно по отношению к смещению начала отсчета времени. Этот же критерий непосредственно применим и к квантованному полю, состояние которого описывается оператором плотности $\hat{\rho}$. В картине Шредингера $\hat{\rho}$ удовлетворяет уравнению движения

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}], \tag{12.8.1}$$

где $\hat{H}$ представляет полную энергию поля. В картине Шредингера, для стационарности требуется, чтобы оператор плотности $\hat{\rho}$ не изменялся во времени. В этом случае, ожидаемое значение любой динамической переменной остается независящим от времени. Тогда из (12.8.1) следует, что для стационарного поля

$$[\hat{H}, \hat{\rho}] = 0. \tag{12.8.2}$$

Но раз коммутатор обращается в нуль в картине Шредингера, то он обращается в нуль и в картине Гейзенберга, и в любом другом представлении тоже. Поэтому мы можем считать (12.8.2) определяющим условием стационарности поля[1].

[1] Значение стационарности для квантового поля обсуждалось в работах (Kano, 1964; Eberly and Kujawski, 1967; Dialetis and Mehta, 1969). Последние две работы содержат обсуждение однородности, а вторая статья также посвящена рассмотрению изотропности.

Теперь $\hat{H}$ является также генератором сдвига во времени. В общем случае из теоремы об операторном разложении мы получаем для любого оператора поля $\hat{O}(t)$ в картине Гейзенберга, что

$$\exp(i\hat{H}\tau/\hbar)\hat{O}(t)\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar) =$$
$$= \hat{O}(t)\frac{i\tau}{\hbar}[\hat{H},\hat{O}(t)] + \left(\frac{i\tau}{\hbar}\right)^2\frac{1}{2!}[\hat{H},[\hat{H},\hat{O}(t)]] + \ldots = \hat{O}(t) + \tau\frac{d\hat{O}(t)}{dt} + \frac{\tau^2}{2!}\frac{d^2\hat{O}(t)}{dt^2} + \ldots = \hat{O}(t+\tau). \quad (12.8.3)$$

Эта свойство представляет условие стационарности (12.8.2) в перспективе и оно иллюстрирует очень важный общий результат. *Состояние поля является инвариантным по отношению к некоторой трансформации (в данном случае — сдвигу во времени), если оператор плотности $\hat{\rho}$ коммутирует с генератором данной трансформации.*

Рассмотрим в качестве примера корреляционную функцию порядка (N, M)

$$\Gamma^{(N,M)} \equiv \langle \hat{F}^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1, t_1+\tau)\ldots\hat{F}^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N, t_N+\tau)\hat{F}^{(+)}_{j_M}(\mathbf{r}'_M, t'_M+\tau)\ldots\hat{F}^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1, t'_1+\tau)\rangle.$$

Используя свойство операции сдвига во времени (12.8.3), можно выразить ее в виде

$$\Gamma^{(N,M)} = \mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}\exp(i\hat{H}\tau/\hbar)\hat{F}^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar)\ldots\exp(i\hat{H}\tau/\hbar)\hat{F}^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar)\times$$
$$\times\exp(i\hat{H}\tau/\hbar)\hat{F}^{(+)}_{j_M}(\mathbf{r}'_M,t'_M)\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar)\ldots\exp(i\hat{H}\tau/\hbar)\hat{F}^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1)\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar)] =$$
$$= \mathrm{Tr}\,[\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar)\hat{\rho}\exp(i\hat{H}\tau/\hbar)\hat{F}^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots\hat{F}^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)\hat{F}^{(+)}_{j_M}(\mathbf{r}'_M,t'_M)\ldots\hat{F}^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1)]. \quad (12.8.4)$$

Здесь последняя строка получается из предыдущей путем перемещения оператора $\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar)$ из конца в начало, что допустимо в силу инвариантности следа по отношению к циклической перестановке операторов. Если поле стационарно, то из (12.8.2) следует, что

$$\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar)\hat{\rho}\exp(i\hat{H}\tau/\hbar) = \hat{\rho}, \quad (12.8.5)$$

таким образом,

$$\langle \hat{F}^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1+\tau)\ldots\hat{F}^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N+\tau)\hat{F}^{(+)}_{j_M}(\mathbf{r}'_M,t'_M+\tau)\ldots\hat{F}^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1+\tau)\rangle =$$
$$= \langle \hat{F}^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots\hat{F}^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)\hat{F}^{(+)}_{j_M}(\mathbf{r}'_M,t'_M)\ldots\hat{F}^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1)\rangle. \quad (12.8.6)$$

Следовательно, как и ожидалось, корреляционные функции инвариантны по отношению к любому временно́му сдвигу τ. Более того, полагая в (12.8.6) $\tau = -t_1$, мы получаем выражение для $\Gamma^{(N,M)}$

$$\Gamma^{(N,M)} = \langle \hat{F}^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,0)\hat{F}^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_2-t_1)\ldots\hat{F}^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N-t_1)\hat{F}^{(+)}_{j_M}(\mathbf{r}'_M,t'_M-t_1)\ldots\hat{F}^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1-t_1)\rangle, \quad (12.8.7)$$

из которого видно, что в тех случаях, когда поле стационарно, $\Gamma^{(N,M)}$ в действительности представляет собой функцию $(N+M-1)$ разностей различных временны́х параметров. Мы можем записать подобные и эквивалентные соотношения, выбирая $\tau = -t_r$ $(r = 2,3,\ldots,N)$ или $\tau = -t'_r$ $(r = 2,3,\ldots,M)$.

Обратное утверждение также верно. Если (12.8.6) выполняется для всех значений τ и для любой корреляционной функции $\Gamma^{(N,M)}$, то поле должно быть стационарным. Чтобы показать это, вернемся к (12.8.4) и непосредственно применим теорему об операторном разложении (10.7.7). В этом случае мы имеем

$$\langle \hat{F}^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1+\tau)\ldots\hat{F}^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N+\tau)\hat{F}^{(+)}_{j_M}(\mathbf{r}'_M,t'_M+\tau)\ldots\hat{F}^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1+\tau)\rangle =$$
$$= \mathrm{Tr}\left\{\left(\hat{\rho} + \frac{-i\tau}{\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}] + \left(\frac{-i\tau}{\hbar}\right)^2\frac{1}{2!}[\hat{H},[\hat{H},\hat{\rho}]] + \ldots\right)\times\right.$$
$$\left.\times\,\hat{F}^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots\hat{F}^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)\hat{F}^{(+)}_{j_M}(\mathbf{r}'_M,t'_M)\ldots\hat{F}^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1)\right\}. \quad (12.8.8)$$

Так как правая часть этого выражения представляет собой степенной ряд по τ, она не будет зависеть от τ для произвольной корреляционной функции только тогда, когда коэффициент при τ^r равен нулю для $r = 1, 2\ldots$, т.е. если выполняется (12.8.2).

Так как каждый из множителей в определении $\Gamma^{(N,M)}$, будучи положительной и отрицательной частотной частью оператора поля, удовлетворяет волновому уравнению,то ясно, что сама $\Gamma^{(N,M)}$ удовлетворяет набору $N+M$ волновых уравнений для $N+M$ различных наборов пространственно-временных переменных.

$$(\nabla_i^2 - \partial^2/\partial t_i^2)\Gamma^{(N,M)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{12.8.9}$$

$$(\nabla_i'^2 - \partial^2/\partial t_i'^2)\Gamma^{(N,M)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, M, \tag{12.8.10}$$

где ∇_i и ∇_i' обозначают векторные градиенты по координатам $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_i'$, соответственно. Эти уравнения в определенном смысле означают, что сами корреляционные функции распространяются в пространстве подобно электромагнитному полю.

12.8.2. Условие для оператора плотности

Часто бывает очень удобно сразу определить, является ли поле, описываемое данным оператором плотности $\hat{\rho}$, стационарным или нет. Очевидно, что для стационарного поля $\hat{\rho}$ является диагональным в энергетическом представлении. Это положение можно элементарно представить в виде условия для матричных элементов оператора $\hat{\rho}$ в фоковском представлении. Если мы положим

$$\hat{\rho} = \sum_{\{n\}} \sum_{\{n'\}} \rho_{\{n\}\{n'\}} |\{n\}\rangle\langle\{n'\}|$$

и обозначим собственные значения энергии, принадлежащие состояниям $|\{n\}\rangle$ и $|\{n'\}\rangle$, через E и E', соответственно, то мы можем записать

$$[\hat{H}, \hat{\rho}] = 0 = \sum_{\{n\}} \sum_{\{n'\}} (E - E')\rho_{\{n\}\{n'\}} |\{n\}\rangle\langle\{n'\}|. \tag{12.8.11}$$

Так как фоковские состояния ортогональны, каждый коэффициент в этом разложении должен по отдельности обращаться в нуль, и мы имеем условие

$$(E - E')\rho_{\{n\}\{n'\}} = 0. \tag{12.8.12}$$

Из этого следует, что все матричные элементы $\rho_{\{n\},\{n'\}}$, относящиеся к фоковским состояниям с неравными энергиями, должны обращаться в нуль для стационарного поля. Непосредственным выводом из этого результата является утверждение, что оператор плотности, диагональный в фоковском представлении, соответствует стационарному полю.

Сложнее выразить условие стационарности для весового функционала $\phi(\{v\})$, используя представление, диагональное по когерентным состояниям. Тем не менее, существует одна форма $\phi(\{v\})$, которая довольно часто встречается на практике и которой достаточно, чтобы гарантировать стационарность. Рассмотрим поле, для которого весовой функционал зависит только от набора модулей $\{|v|\}$, а не от фаз набора комплексных чисел $\{v\}$. В разд. 12.5 мы уже показали, что спектральные плотности, связанные с таким полем, обращаются в нуль, за исключением слагаемых, содержащих повторяющиеся индексы. Вычислим теперь коммутатор от $\hat{\rho}$ и оператора числа частиц $\hat{n}_{\mathbf{k}',\mathbf{s}'}$ для некоторой моды $\mathbf{k}', \mathbf{s}'$. После записи $\hat{\rho}$ в диагональном представлении и выражения проекционного оператора по когерентным состояниям $|v_{\mathbf{k}',\mathbf{s}'}\rangle\langle v_{\mathbf{k}',\mathbf{s}'}|$ через фоковские состояния, мы находим, что

$$[\hat{\rho}, \hat{n}_{\mathbf{k}'\mathbf{s}'}] = \int \phi(\{|v|\})\, d^2 v_{\mathbf{k}'\mathbf{s}'} \prod_{\mathbf{k}\mathbf{s} \neq \mathbf{k}'\mathbf{s}'} [|v_{\mathbf{k}\mathbf{s}}\rangle\langle v_{\mathbf{k}\mathbf{s}}|\, d^2 v_{\mathbf{k}\mathbf{s}}] \times$$

$$\times\, \mathrm{e}^{-|v_{\mathbf{k}'\mathbf{s}'}|^2} \sum_{n_{\mathbf{k}'\mathbf{s}'}} \sum_{m_{\mathbf{k}'\mathbf{s}'}} \frac{(v_{\mathbf{k}'\mathbf{s}'})^{n_{\mathbf{k}'\mathbf{s}'}} (v^*_{\mathbf{k}'\mathbf{s}'})^{m_{\mathbf{k}'\mathbf{s}'}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k}'\mathbf{s}'}!}\sqrt{m_{\mathbf{k}'\mathbf{s}'}!}} [|n_{\mathbf{k}'\mathbf{s}'}\rangle\langle m_{\mathbf{k}'\mathbf{s}'}|, n_{\mathbf{k}'\mathbf{s}'}]. \tag{12.8.13}$$

Коммутатор под знаком интеграла обращается в нуль, когда $n_{\mathbf{k}',s'} = m_{\mathbf{k}',s'}$. С другой стороны, полагая $v_{\mathbf{k}',s'} \equiv r\,e^{i\theta}$, $d^2v_{\mathbf{k}',s'} = r\,dr\,d\theta$ и выполняя интегрирование по θ, мы сразу видим, что интеграл по θ обращается в нуль в тех случаях, когда $n_{\mathbf{k}',s'} \neq m_{\mathbf{k}',s'}$. Следовательно, правая часть всегда равна нулю, из чего следует, что

$$[\hat{\rho}, \hat{n}_{\mathbf{k}'s'}] = 0, \tag{12.8.14}$$

и что $\hat{\rho}$ является диагональным в фоковском представлении. Таким образом, оператор плотности $\hat{\rho}$ представляет стационарное поле всегда, когда $\phi(\{v\})$ зависит только от набора модулей $\{|v|\}$. И мы, таким образом, нашли условие, которое является достаточным, хотя и не необходимым, для стационарности. В следующей главе мы увидим, что операторы плотности, имеющие такой общий вид, являются довольно распространенными.

12.8.3. Свойства взаимных спектральных плотностей в случае стационарных полей

Рассмотрим дальнейшие следствия из условия стационарности, а именно, как оно влияет на взаимные спектральные плотности. Из коммутационных правил (10.4.1) и (10.4.1) следует, что

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \hat{H}] = \hbar\omega\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \tag{12.8.15}$$

и что

$$[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}, \hat{H}] = -\hbar\omega\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}, \quad (\omega = ck). \tag{12.8.16}$$

Теперь мы воспользуемся этими соотношениями, чтобы преобразовать общую функцию взаимной спектральной плотности порядка $N + M$, которая определяется выражением (12.5.17). Подставляя $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1 s_1}$ из (12.8.16), мы получаем соотношение

$$\begin{aligned}
\Theta^{(N,M)}(\mathbf{k}_1, s_1, \ldots, \mathbf{k}_N, s_M; \mathbf{k}'_M, s'_M, \ldots, \mathbf{k}'_1, s'_1) &\equiv \mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1 s_1} \ldots \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_N s_N} \hat{a}_{\mathbf{k}'_M s'_M} \ldots \hat{a}_{\mathbf{k}'_1 s'_1}] = \\
&= \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\left(-\frac{1}{\hbar\omega_1}\right)[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1 s_1}, \hat{H}]\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_2 s_2} \ldots \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_N s_N} \hat{a}_{\mathbf{k}'_M s'_M} \ldots \hat{a}_{\mathbf{k}'_1 s'_1}\right\} = \\
&= \frac{1}{\hbar\omega_1}\mathrm{Tr}\,\{\hat{\rho}\hat{H}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1 s_1} \ldots \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_N s_N} \hat{a}_{\mathbf{k}'_M s'_M} \ldots \hat{a}_{\mathbf{k}'_1 s'_1}\} - \\
&- \frac{1}{\hbar\omega_1}\mathrm{Tr}\,\{\hat{\rho}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1 s_1}(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_2 s_2}\hat{H} + \hbar\omega_2\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_2 s_2})\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_3 s_3} \ldots \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_N s_N} \hat{a}_{\mathbf{k}'_M s'_M} \ldots \hat{a}_{\mathbf{k}'_1 s'_1}\}.
\end{aligned} \tag{12.8.17}$$

Многократно применяя формулы (12.8.15) и (12.8.16) к последнему члену, можно шаг за шагом переместить оператор $\hat{H}$ вправо от всех операторов рождения и уничтожения. При каждом таком шаге создается дополнительный член типа

$$\mp\frac{\hbar\omega_r}{\hbar\omega_1}\Theta^{(N,M)}(\mathbf{k}_1, s_1, \ldots, \mathbf{k}_N, s_N; \mathbf{k}'_M, s'_M, \ldots, \mathbf{k}'_1, s'_1), \quad r = 2, 3, \ldots.$$

Эта формула следует из анализа (12.8.17). Верхний знак применяется тогда, когда $\hat{H}$ перемещается через оператор рождения, а нижний, когда $\hat{H}$ перемещается через оператор уничтожения. Так как след инвариантен относительно циклической перестановки операторов, то член, в котором в конечном итоге оператор $\hat{H}$ появится в самой правой части, можно скомбинировать с первым членом в правой части (12.8.17) и окончательно получить

$$\begin{aligned}
\Theta^{(N,M)}(\mathbf{k}_1, s_1, \ldots, \mathbf{k}_N, s_N; \mathbf{k}'_M, s'_M, \ldots, \mathbf{k}'_1, s'_1) &= \\
&= \frac{1}{\hbar\omega_1}\mathrm{Tr}\,\{[\hat{\rho}, \hat{H}]\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1 s_1} \ldots \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_N s_N} \hat{a}_{\mathbf{k}'_M s'_M} \ldots \hat{a}_{\mathbf{k}'_1 s'_1}\} + \\
&+ (-\hbar\omega_2 - \hbar\omega_3 - \ldots - \hbar\omega_N + \hbar\omega'_M + \ldots + \hbar\omega'_1)\frac{1}{\hbar\omega_1} \times \\
&\times \Theta^{(N,M)}(\mathbf{k}_1, s_1, \ldots, \mathbf{k}_N, s_N; \mathbf{k}'_M, s'_M, \ldots, \mathbf{k}'_1, s'_1),
\end{aligned}$$

т.е.

$$\hbar(\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_N-\omega'_M-\ldots-\omega'_1)\Theta^{(N,M)}(\mathbf{k}_1,s_1,\ldots,\mathbf{k}_N,s_N;\mathbf{k}'_M,s'_M,\ldots,\mathbf{k}'_1,s'_1)=$$
$$=\mathrm{Tr}\{[\hat{\rho},\hat{H}]\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_1 s_1}\ldots\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}_N s_N}\hat{a}_{\mathbf{k}'_M s'_M}\ldots\hat{a}_{\mathbf{k}'_1 s'_1}\}. \quad (12.8.18)$$

Это полезное общее соотношение. Сразу заключаем, что когда поле стационарное, и коммутатор справа обращается в нуль, мы должны иметь

$$(\omega_1+\ldots+\omega_N-\omega'_M-\ldots-\omega'_1)\Theta^{(N,M)}(\mathbf{k}_1,s_1,\ldots,\mathbf{k}_N,s_N;\mathbf{k}'_M,s'_M,\ldots,\mathbf{k}'_1,s'_1)=0. \quad (12.8.19)$$

Из (12.8.19) следует ряд соотношений. Мы видим, что взаимная спектральная плотность стационарного поля может быть отличной от нуля, только если

$$(\omega_1+\ldots+\omega_N-\omega'_M-\ldots-\omega'_1)=0, \quad (12.8.20)$$

что является условием, которое также вытекает из классического анализа [ср. (8.3.10)]. Когда взаимная спектральная плотность $\Theta^{(N,M)}$ имеет четный порядок при $N=M$, то (12.8.20) легко удовлетворить выбором повторяющихся аргументов, т.е. полагая $\omega_r=\omega'_r$, $r=1,2,\ldots,N$, хотя это и не является единственным способом. Однако в тех случаях, когда $N\neq M$, число положительных членов в левой части (12.8.20) не совпадает с числом отрицательных членов и удовлетворить данному уравнению гораздо более сложно. Если поле имеет ограниченный частотный диапазон и взаимные спектральные плотности обращаются в нуль всякий раз, когда каждая частота ω не лежит внутри диапазона $\omega_0-\frac{1}{2}\Delta\omega\leq\omega\leq\omega_0+\frac{1}{2}\Delta\omega$, то (12.8.20) можно удовлетворить только если

$$|N-M|\omega_0-\tfrac{1}{2}(N+M)\Delta\omega\leqslant 0\leqslant|N-M|\omega_0+\tfrac{1}{2}(N+M)\Delta\omega,$$

т.е. [ср. (8.3.17)]

$$\frac{|N-M|}{(N+M)}\leqslant\frac{1}{2}\frac{\Delta\omega}{2\omega_0}. \quad (12.8.21)$$

Если поле квазимонохроматическое, т. е. $\Delta\omega\ll\omega_0$, это условие может быть выполнено только тогда, когда $N=M$, или для неравных N и M, если N и M очень большие, что означает равенство нулю всех взаимных спектральных плотностей низших порядков $N\neq M$. Так как корреляционные функции могут быть представлены через многомерные фурье-образы спектральных плотностей, то соответствующие корреляционные функции нечетного порядка также должны обратиться в нуль. К аналогичным выводам можно прийти и из классического анализа стационарного поля (ср. разд. 8.3).

В частном случае, когда все частотные аргументы $\Theta^{(N,M)}$ равны, уравнению (12.8.20) нельзя вообще удовлетворить при $N\neq M$, и в стационарном поле, при $N\neq M$, соответствующая взаимная спектральная плотность обращается в нуль. Как следствие этого результата, мы имеем при $N\neq M$

$$\langle(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s})^N(\hat{a}_{\mathbf{k}s'})^M\rangle=0 \quad \text{для } N\neq M \quad (12.8.22)$$

в стационарном поле. В частности, если либо $N=0$, либо $M=0$, то мы приходим к выводу, что

$$\langle(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s})^N\rangle=0, \quad (12.8.23)$$
$$\langle(\hat{a}_{\mathbf{k}s})^N\rangle=0 \quad (12.8.24)$$

для любого положительного, целого N в стационарном поле. Так как различные операторы поля могут быть выражены в виде линейных комбинаций операторов уничтожения или рождения, либо обоих этих операторов вместе, то мы имеем

$$\langle\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle=0=\langle\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)\rangle, \quad (12.8.25)$$

и ожидаемое значение любого эрмитового оператора $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},\mathbf{t})$ поля также обращается в нуль, когда поле стационарное.

Еще один частный случай выражения (12.8.19) возникает, когда $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_N = \omega$, $\omega_1' = \omega_2' = \ldots = \omega_N' = \omega'$ и $N = M$. В этом случае (12.8.20) опять не может быть удовлетворено, и соответствующая взаимная спектральная плотность обращается в нуль. Как следствие, мы приходим к выводу, что

$$\langle (\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s})^N (\hat{a}_{\mathbf{k}'s'})^N \rangle = 0, \quad \text{для } \omega \neq \omega' \ (\omega = c|\mathbf{k}|) \tag{12.8.26}$$

в стационарном поле, из чего можно заключить, что фурье-амплитуды поля, связанные с различными частотами, не коррелируют во всех порядках.

Рассмотрим несколько примеров. Фоковское состояние поля, будучи собственным состоянием энергии, очевидно, соответствует стационарному состоянию. Когерентное состояние $|\{v\}\rangle$ имеет оператор плотности, матричные элементы которого в фоковском представлении имеют вид [ср. (11.2.11)]

$$\rho_{\{n\}\{n'\}} = \langle \{n\}|\{v\}\rangle\langle\{v\}|\{n'\}\rangle = \prod_{\mathbf{k},s} \left[\mathrm{e}^{-|v_{\mathbf{k}s}|^2} \frac{v_{\mathbf{k}s}^{n_{\mathbf{k}s}}}{(n_{\mathbf{k}s}!)} \frac{(v_{\mathbf{k}s}^{n_{\mathbf{k}s}})^*}{(n'_{\mathbf{k}s}!)} \right]. \tag{12.8.27}$$

Эти матричные элементы не удовлетворяют условию (12.8.12), кроме случая, когда $v_{\mathbf{k}s} = 0$ для всех $\mathbf{k}, s$, и когерентное состояние является в общем случае нестационарным состоянием поля. Единственным исключением является вакуумное состояние $|\mathrm{vac}\rangle$, которое одновременно является собственным состоянием оператора энергии и оператора уничтожения. Как мы уже видели [ср. (11.11.8)], когда поле находится в когерентном состоянии, любая корреляционная функция может быть представлена в виде произведения, причем каждый множитель явно зависит от одного из временны́х аргументов данной корреляционной функции, которая, таким образом, не будет является инвариантной относительно сдвига начала отсчета времени. С другой стороны, усредненная по фазе смесь когерентных состояний, задаваемая выражением (11.11.18), которая иногда используется для представления поля одномодового лазера, является функционалом только модулей $\{|v|\}$ и, следовательно, в соответствии с вышеприведенными результатами, она соответствует стационарному полю[1].

12.8.4. Однородность

Понятие статистической однородности связано по смыслу с изменением электромагнитного поля в пространстве, подобно тому, как понятие стационарности связано с изменением во времени. Мы описываем поле как статистически однородное, если ожидаемое значение любого оператора, который является функцией координат, инвариантно относительно смещения начала координат.

Теперь генератором пространственного смещения является полный импульс поля $\hat{\mathbf{P}}$. Если $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ — некоторый произвольный неэрмитовый оператор поля (12.2.1), а $\mathbf{r}_0$ — некоторое произвольное смещение, то мы имеем из теоремы об операторном разложении (10.7.7), что

$$\exp(i\mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{P}}/\hbar)\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{P}}/\hbar) =$$
$$= \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \frac{i}{\hbar}[\mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)] + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{2!}[\mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{P}}, [\mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)]] + \ldots . \tag{12.8.28}$$

Из разложений $\hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$, а также из коммутационных соотношений (10.4.1) и (10.4.2) следует, что

$$\frac{i}{\hbar}[\mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k},s} l(k)(i\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} \, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (\omega = ck),$$

и, аналогично, для коммутатора порядка n имеем

$$\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n [\mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{P}}, [\mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{P}}, [\ldots [\mathbf{r}_0 \cdot \hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)]] \ldots]] = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k},s} l(k)(i\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{k})^n \hat{a}_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} \, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \tag{12.8.29}$$

[1] Следует отметить, что дифференциальная вероятность в фазовом пространстве $\delta^2(v_{\mathbf{k}s})\, d^2 v_{\mathbf{k}s}$ формально эквивалентна величине $(1/2\pi|v_{\mathbf{k}s}|)\delta(|v_{\mathbf{k}s}|)|v_{\mathbf{k}s}|\, d|v_{\mathbf{k}s}|\, d\theta_{\mathbf{k}s}$, где $v_{\mathbf{k}s} = |v_{\mathbf{k}s}|\, \mathrm{e}^{i\theta_{\mathbf{k}s}}$.

После подстановок из (12.8.29) в (12.8.28) мы находим, что

$$\exp(i\mathbf{r}_0\cdot\hat{\mathbf{P}}/\hbar)\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)\exp(-i\mathbf{r}_0\cdot\hat{P}/\hbar)=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}l(k)\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{k})^n}{n!}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}=$$

$$=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}l(k)\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}e^{i(\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)-\omega t)}=\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0,t),\quad(12.8.30)$$

что подтверждает роль $\hat{\mathbf{P}}$ в качестве генератора пространственного сдвига.

Отсюда следует, что если ожидаемое значение некоторого произвольного произведения операторов рождения и уничтожения $\hat{F}_{i_1}^{(-)}(\mathbf{r}_1,t)\hat{F}_{i_2}^{(-)}(\mathbf{r}_2,t)\ldots$, которое встречается в обсуждавшихся ранее корреляционных функциях $\Gamma^{(N,M)}$ является инвариантным относительно сдвига $\mathbf{r}_0$, то мы должны иметь

$$\mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}\hat{F}_{i_1}^{(-)}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}_{i_2}^{(-)}(\mathbf{r}_2,t_2)\ldots]=\mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}\hat{F}_{i_1}^{(-)}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_0,t_1)\hat{F}_{i_2}^{(-)}(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_0,t_2)\ldots]=$$

$$=\mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}\exp(i\mathbf{r}_0\cdot\hat{\mathbf{P}}/\hbar)\hat{\mathbf{F}}_{i_1}^{(-)}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{\mathbf{F}}_{i_2}^{(-)}(\mathbf{r}_2,t_2)\ldots\exp(-i\mathbf{r}_0\cdot\hat{P}/\hbar)]=$$

$$=\mathrm{Tr}\,[\exp(i\mathbf{r}_0\cdot\hat{\mathbf{P}}/\hbar)\hat{\rho}\exp(-i\mathbf{r}_0\cdot\hat{P}/\hbar)\hat{\mathbf{F}}_{i_1}^{(-)}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{\mathbf{F}}_{i_2}^{(-)}(\mathbf{r}_2,t_2)\ldots],\quad(12.8.31)$$

если вспомнить, что след инвариантен относительно циклической перестановки операторов. Это уравнение будет выполняться для произвольной корреляционной функции и произвольного сдвига $\mathbf{r}_0$, в том случае, если $\hat{\rho}$ коммутирует с $\hat{\mathbf{P}}$. Следовательно, мы можем рассматривать условие

$$[\hat{\rho},\hat{\mathbf{P}}]=0\quad(12.8.32)$$

в качестве условия однородности поля. Полагая в (12.8.31) $\mathbf{r}_0=-\mathbf{r}_1$ или $-\mathbf{r}_2$, и т.д., видим, что ожидаемое значение $\hat{F}_{i_1}^{(-)}(\mathbf{r}_1,t)\hat{F}_{i_2}^{(-)}(\mathbf{r}_2,t)\ldots$, в действительности, является лишь функцией разностей между пространственными переменными $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и т.д. Условие (12.8.32) полностью аналогично условию стационарности (12.8.2). Действительно, из приведенных выше рассуждений должно быть понятно, что ожидаемые значения операторов, в общем случае, остаются инвариантными относительно некоторой трансформации, если оператор плотности коммутирует с генератором данной трансформации.

Из (10.5.7) имеем

$$\hat{\mathbf{P}}=\sum_{\mathbf{k},s}\hbar\mathbf{k}\hat{n}_{\mathbf{k}s},$$

так что $\hat{\mathbf{P}}$ коммутирует с оператором полной энергии $\hat{H}$, и условия, при которых $\hat{\rho}$ удовлетворяет (12.8.32), как правило, достаточно близко соответствуют найденным ранее условиям, при которых оператор $\hat{\rho}$ удовлетворяет формуле (12.8.2). В соответствии с (12.8.12), условие однородности может быть выражено в фоковском представлении через матричные элементы $\rho_{\{n\},\{n'\}}$ оператора $\hat{\rho}$, в виде

$$(\mathbf{P}-\mathbf{P}')\rho_{\{n\}\{n'\}}=0,\quad(12.8.33)$$

где $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ — ожидаемые значения импульса в фоковских состояниях $|\{n\}\rangle$ и $|\{n'\}\rangle$, соответственно. Очевидно, что фоковское состояние соответствует полю, которое и однородно и стационарно. Следуя тем же рассуждениям, которые мы использовали, чтобы вывести (12.8.14), мы видим, что состояние, весовой функционал которого в диагональном представлении по когерентным состояниям зависит только от набора модулей $\{|\upsilon|\}$, является однородным и стационарным.

С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые привели к (12.8.19), можно показать, что условие однородности для взаимной спектральной плотности порядка (N,M) имеет вид

$$(\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_N-\mathbf{k}'_M-\ldots-\mathbf{k}'_1)\Theta^{(N,M)}(\mathbf{k}_1,s_1,\ldots,\mathbf{k}_N,s_N,\mathbf{k}'_M,s'_M,\ldots,\mathbf{k}'_1,s'_1)=0.\quad(12.8.34)$$

Очевидно, что взаимная спектральная плотность $\Theta^{(N,M)}$ может быть отлична от нуля для однородного поля, только если

$$\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_N-\mathbf{k}'_M-\ldots-\mathbf{k}'_1=0.\quad(12.8.35)$$

Так как это векторное уравнение, ему можно удовлетворить большим множеством комбинаций $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_N, \mathbf{k}'_M, \ldots, \mathbf{k}'_1$, даже в том случае, когда $N \neq M$, и когда N и M не являются слишком большими. Полагая $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \ldots = \mathbf{k}_N = \mathbf{k} = \mathbf{k}'_1 = \mathbf{k}'_2 = \ldots = \mathbf{k}'_M$, находим, что уравнение (12.8.22) также должно удовлетворяться для однородного поля, и это справедливо для (12.8.23), (12.8.24) и (12.8.25). Соотношение (12.8.26) для стационарного поля заменяется более общим соотношением

$$\langle (\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s})^N (\hat{a}_{\mathbf{k}'s'})^M \rangle = 0, \quad \text{если } \mathbf{k} \text{ не параллелен } \mathbf{k}', \tag{12.8.36}$$

для однородного поля.

12.8.5. Изотропность

Понятие статистической изотропности имеет то же отношение к пространственным поворотам, как понятие статистической однородности к пространственным смещениям. С наиболее общей точки зрения, в изотропном поле средние полевых операторов не изменяются при повороте относительно некоторой точки. Центром изотропности может служить одна преимущественная точка в пространстве, точно так же, как может существовать преимущественное направление в однородном поле. Однако, если поле однородно, то оно с необходимостью является изотропным во всех точках пространства, если оно изотропно в одной.

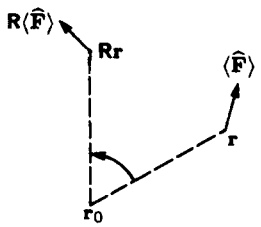


Рис. 12.4. Иллюстрация понятия изотропности поля в окрестности точки $\mathbf{r}_0$

Сделаем наши рассуждения немного более количественными. Если поле изотропно относительно точки $\mathbf{r}_0$, то ожидаемое значение любого полевого вектора $\hat{\mathbf{F}}$ в точке пространства, получаемой вращением радиус-вектора $\mathbf{r}$ относительно $\mathbf{r}_0$, равно результату такого же вращения, применяемого к ожиданию вектора $\hat{\mathbf{F}}$ в точке $\mathbf{r}$ (см. рис. 12.4). Если $\mathbf{R}$ представляет матрицу поворота, которая выполняет желаемый поворот вокруг $\mathbf{r}_0$, то мы можем выразить это, записывая

$$\langle \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{Rr}) \rangle = \mathbf{R} \langle \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \rangle$$

или

$$\mathbf{R} \langle \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \rangle = \langle \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \rangle. \tag{12.8.37}$$

В более общем виде, если $\Gamma^{(N,M)}_{i_1,\ldots,i_N;j_M,\ldots j_1}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N; \mathbf{r}'_M, \ldots, \mathbf{r}'_1)$ — корреляционный тензор порядка N, M [ср. (12.5.2)], то поле изотропно, когда

$$\mathsf{R}_{i_1 p_1} \ldots \mathsf{R}_{i_N p_N} \mathsf{R}_{j_M q_M} \ldots \mathsf{R}_{j_1 q_1} \Gamma^{(N,M)}_{i_1,\ldots,i_N;j_M,\ldots,j_1}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_N; \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}'_M, \ldots, \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}'_1) = \\ = \Gamma^{(N,M)}_{p_1,\ldots,p_N;q_M,\ldots q_1}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N; \mathbf{r}'_M, \ldots, \mathbf{r}'_1). \tag{12.8.38}$$

Временны́е аргументы здесь опускаются, поскольку они здесь не играют значимой роли.

Для того, чтобы трансформировать это условие симметрии в условие на оператор плотности поля $\hat{\rho}$ нам необходим, как и прежде, генератор вращения относительно $\mathbf{r}_0$. Можно показать (Simmons and Guttmann, 1970; Lenstra and Mandel, 1982), что требуемым оператором является общий угловой момент $\mathbf{J}(\mathbf{r}_0)$ (10.6.2). Для того чтобы показать это, начнем со следующего коммутационного соотношения (Lenstra and Mandel, 1982) (которое мы не будем доказывать) между положительно-частотной частью $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ любого полевого вектора и общим угловым моментом $\mathbf{J}(\mathbf{r}_0)$,

$$[\hat{F}^{(+)}_m(\mathbf{r}, t), \hat{J}_n(\mathbf{r}_0)] = i\hbar \left[\epsilon_{mnp} \hat{F}^{(+)}_p(\mathbf{r}, t) - \epsilon_{nqp}(r_q - r_{0q}) \frac{\partial}{\partial r_p} \hat{F}^{(+)}_m(\mathbf{r}, t) \right]. \tag{12.8.39}$$

Совершим бесконечно малое унитарное преобразование над векторным оператором $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$

$$\hat{\mathbf{F}}^{(+)'} = \exp(i\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_0) \cdot \boldsymbol{\delta\theta}/\hbar) \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_0) \cdot \boldsymbol{\delta\theta}/\hbar),$$

где $\boldsymbol{\delta\theta}$ является малым векторным углом поворота. Тогда в первом порядке по $\boldsymbol{\delta\theta}$ имеем

$$\hat{F}^{(+)'}_m = \hat{F}^{(+)}_m(\mathbf{r}, t) + \frac{i\delta\theta_n}{\hbar} [\hat{J}_n(r_0), \hat{F}^{(+)}_m(\mathbf{r}, t)]$$

и, с помощью (12.8.39), после осуществления циклической перестановки индексов в последнем члене получаем

$$\hat{F}_m^{(+)\prime} = \hat{F}_m^{(+)}(\mathbf{r},t) + \epsilon_{mnp}\delta\theta_n\hat{F}_p^{(+)}(\mathbf{r},t) - \epsilon_{pnq}\delta\theta_n(r_q - r_{0q})\frac{\partial}{\partial r_p}\hat{F}_m^{(+)}(\mathbf{r},t).$$

В первом порядке по $\delta\theta$ это выражение может быть записано как векторное соотношение, включающее одновременное вращение $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}$ и координаты $\mathbf{r}$, связанной с $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}$

$$\hat{\mathbf{F}}^{(+)\prime} = (1 + \boldsymbol{\delta\theta}\times)\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta\theta}\times(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), t). \tag{12.8.40}$$

Символически это можно выразить в виде

$$\hat{\mathbf{F}}^{(+)\prime} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}, t), \tag{12.8.41}$$

если мы связываем $\mathbf{R}$ с поворотом $\boldsymbol{\delta\theta}$ вокруг $\mathbf{r}_0$. Из этого следует, что $\mathbf{J}(\mathbf{r}_0)$ является генератором поворота относительно $\mathbf{r}_0$ и, в соответствии с теми же рассуждениями, которые использовались для вывода (12.8.12), это налагает условие на оператор плотности $\hat{\rho}$. Например, из (12.8.6) условие (12.8.38) изотропности требует, чтобы $\mathbf{J}(\mathbf{r}_0)$ коммутировал с оператором плотности, т.е.

$$[\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_0, \hat{\rho})] = 0. \tag{12.8.42}$$

Смысл изотропности и полученного условия для $\hat{\rho}$ не являются настолько интуитивно очевидными, как смысл условий стационарности и однородности, с которыми мы встретились ранее. Поэтому здесь мы не будем заниматься этим вопросом. Однако в следующей главе мы встретимся с примером поля излучения (излучение черного тела), которое является одновременно стационарным, однородным и изотропным во всех точках пространства.

12.9. Антинормально упорядоченные корреляционные функции

До настоящего времени наше обсуждение квантовых корреляционных функций почти полностью ограничивалось рассмотрением нормально упорядоченных произведений операторов рождения и уничтожения. Такое внимание к нормальному упорядочению совершенно закономерно, ибо, как мы показали в разд. 12.2, измерения, проводимые с помощью оптических детекторов, функционирующих на основе поглощения фотонов, приводят естественным образом к нормально упорядоченным корреляционным функциям. Если бы существовали измерительные инструменты, которые вместо этого функционировали бы на основе испускания фотонов, то результаты измерений, осуществленных с помощью этих приборов, естественным образом описывались бы антинормально упорядоченными корреляционными функциями. Хотя такие приборы нечасто встречаются в лаборатории, их, несомненно, можно было бы сконструировать. Мы будем именовать их *квантовыми счетчиками*[1] и изучим в данной главе некоторые их свойства. Мы узнаем, что квантовые счетчики по сравнению с фотоэлектрическими детекторами страдают некоторыми серьезными недостатками, которые делают их непривлекательными в качестве практических приборов. Тем не менее, исследование некоторых их основных свойств окажется полезным в том смысле, что это позволит лучше понять характер квантовых корреляций. В основе большей части данного материала лежит работа Манделя (Mandel, 1966b).

12.9.1. Квантовый счетчик

Рассмотрим атомную систему, имеющую структуру энергетических уровней как показано на рис. 12.5. Здесь a представляет основное состояние системы или какой-то другой конечный уровень энергии, а b — метастабильный уровень, который излучательно связан с широкой полосой c, соответствующей короткоживущему состоянию. Мы предполагаем, что атомная система делает спонтанные излучательные переходы с

[1] Атомные счетные приборы, которые также были названы квантовыми счетчиками, описаны в работах (Bloembergen, 1959) и (Basov, Prokhorov and Popov, 1960). Однако, их рабочая частота заметно отличается от частоты приборов, которые мы обсуждаем здесь. Мы приняли название "квантовый счетчик" для того, чтобы отличить приборы, функционирующие на основе эмиссии фотонов, от фотодетектров, работающих на основе абсорбции фотонов.

полосы c на конечный уровень a, и что энергетический скачок из c на a значительно больше перехода с b на c, т.е.

$$E_c - E_a \gg E_b - E_c. \tag{12.9.1}$$

Для того, чтобы действовать в качестве квантового счетчика, система сначала должна быть приготовлена в состоянии b. Метод приготовления, в действительности, не особо нас здесь интересует, но если над уровнем b имелась бы широкая энергетическая полоса d, которая безызлучательно связана с b, то мы могли бы приготовить состояние b путем оптической накачки с помощью интенсивного источника света на уровень d, с которого система спонтанно и безизлучательно релаксирует на уровень b. Как мы увидим, некоторые свойства такой представленной энергетической схемы квантового счетчика напоминают структуру энергетических уровней рубинового лазера.

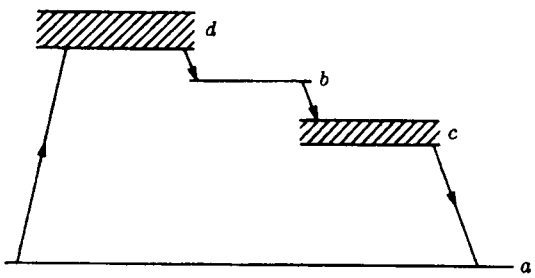


Рис. 12.5. Возможная схема энергетических уровней квантового счетчика. Счетчик реагирует на частоты в диапазоне от $(E_b - E_{c\,\min})/\hbar$ до $(E_b - E_{c\,\max})/\hbar$. (Воспроизводится из работы Mandel, 1966a)

Предположим далее, что у нас есть такая система, приготовленная в метастабильном состоянии b в положении $\mathbf{r}$ и в момент времени t. Под влиянием внешнего электромагнитного поля произойдет заполнение мод в диапазоне частот $(E_b - E_{c\,\max})/\hbar$ и $(E_b - E_{c\,\min})/\hbar$, и атомная система будет вынуждена совершить переход на более низкий уровень c, с вынужденным испусканием фотона[1]. Таким образом, система отвечает на внешнее поле испусканием, а не поглощением фотона. Однако, для того, чтобы этот прибор работал в качестве счетчика, необходимо как-то зарегистрировать это излучение. Для этой цели служит второй нижний переход, так как состояние c, будучи очень короткоживущим, очень быстро, спонтанно вызовет переход на уровень a с излучением второго фотона более высокой частоты. Так как второй фотон можно достоверно отличить от первого, мы можем представить, что наша атомная система содержит тонкий прилегающий фотоэлектрический слой, который имеет достаточно высокий фотоэлектрический порог так, что пропускает частоты в диапазоне от $(E_b - E_{c\,\max})/\hbar$ до $(E_b - E_{c\,\min})/\hbar$, но действует как фотоэмиссионный поглотитель для второго фотона. В таком случае, комбинация атомной системы, или ряда таких атомных систем, с таким фотодетектором играет роль квантового счетчика, который функционирует на основе вынужденного излучения фотонов и регистрирует время эмиссии каждого фотона. Фотодетектор здесь играет лишь вспомогательную роль для регистрации вторичного фотона, а внешнее поле измеряется посредством вызванного перехода.

Рассуждения, схожие с теми, которые были приведены в разд. 12.2 и которые привели нас к тому, что мы отождествили оператор поглощения $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ в конфигурационном пространстве с оператором, который наиболее точно соответствует измерению с помощью фотодетектора, теперь указывают на то, что оператор рождения фотона $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$ (12.2.2) соответствует измерению с помощью квантового счетчика в точке $\mathbf{r}$. Тем не менее, существует несколько важных отличий между этими двумя случаями. Первое связано с тем фактом, что отклик квантового счетчика ограничен частотами в рамках конечного диапазона, который определяется частотной структурой энергетических уровней, показанных на рис. 12.5. Следовательно, в конечном нормировочном объеме L^3 квантовый счетчик связан только с конечным числом мод поля[2]. Во-вторых, излучение фотона, в отличие от поглощения, может произойти спонтанно, или в присутствии поля вакуума, что сказывается в тех случаях, когда оператор $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$ действует на вакуумное состояние $|\mathrm{vac}\rangle$; это приводит к состоянию, в котором все моды, участвующие в разложении $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$, являются частично заполненными. В связи с этим, соответствующий оператор рождения фотонов $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$ должен быть определен так, чтобы он содержал вклады только от тех мод поля, которые связаны с квантовым счетчиком и возбуждались им. Кроме того, удобно допустить, что $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r},\mathbf{t})\cdot\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},\mathbf{t})$ имеет размерность плотности фотонов (см. разд. 12.3). Таким образом, мы считаем, что оператором, который соответствует

[1] Вопрос вынужденного и спонтанного излучения атомов более полно рассматривается в разд. 15.4 и 15.5.

[2] Часто предполагается, что частотный отклик фотодетектора имеет нижний предел и не имеет верхнего предела. В действительности, это не так, и существует верхняя граница, связанная с конечным размером потенциальной ямы, удерживающей электрон. Как было показано в работе (Mandel and Meltzer, 1969), это приводит к отрезанию нескольких частот, кратных пороговой частоте.

измерению поля с помощью квантового счетчика, является

$$\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t) \equiv \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{[\mathbf{k},s]} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{\mathbf{k}s}\, \mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{12.9.2}$$

где символ $[\mathbf{k}, s]$ означает конечный набор мод, которые могут быть возбуждены квантовым счетчиком. Другие моды электромагнитного поля не играют никакой роли в измерении, и мы можем предположить, что они не заполнены.

Теперь воспользуемся теми же самыми рассуждениями, что и в разд. 12.2 , чтобы вывести дифференциальное выражение для вероятности $P_1(\mathbf{r},t)\Delta t$ того, что в точке $\mathbf{r}$, за некоторый короткий временно́й промежуток Δt, регистрируется щелчок. Пусть квантовый счетчик подвергается действию электромагнитного поля, описываемого оператором плотности

$$\hat{\rho} = \sum_{\psi_1} p(\psi_1)|\psi_1\rangle\langle\psi_1|, \tag{12.9.3}$$

где состояния $|\psi_1\rangle$ являются произвольными, а $p(\psi_1)$ есть вероятность состояния $|\psi_1\rangle$. Тогда в картине взаимодействия, выражая P_1 через амплитуду вероятности перехода, мы имеем

$$P_1(\mathbf{r},t)\Delta t = C_2 \Delta t \sum_{\psi_1} p(\psi_1) \sum_{\text{все } \psi_2} |\langle\psi_2|\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t)|\psi_1\rangle|^2, \tag{12.9.4}$$

где C_2 — некоторая константа, характеризующая детальную конструкцию квантового счетчика. Матричный элемент $\langle\psi_2|\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t)|\psi_1\rangle$ представляет амплитуду вероятности перехода из состояния $|\psi_1\rangle$ в некоторое конечное состояние $|\psi_2\rangle$ под влиянием фотонной эмиссии $\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t)$, а сумма по полному набору конечных состояний $|\psi_2\rangle$ приводит к независимости $P_1(\mathbf{r},t)$ от конечного состояния $|\psi_2\rangle$. Расписывая квадрат и осуществляя суммирование по ψ_2 в (12.9.4), мы приходим к выражению

$$P_1(\mathbf{r},t)\Delta t = C_2 \Delta t \sum_{\psi_1} p(\psi_1)\langle\psi_1|\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t)|\psi_1\rangle =$$

$$= C_2 \Delta t \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t)\right] = C_2\Delta t\langle\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t)\rangle, \tag{12.9.5}$$

которое надо сравнить с (12.2.7) для вероятности фотодетектирования. Как можно увидеть, эти выражения похожи, за исключением того, что оператор в правой части теперь появляется в антинормальном порядке. Такой порядок характеризует измерение с помощью квантового счетчика, в основе которого лежит испускание фотонов. Конечно, разложение для $\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t)$ в (12.2.7) содержит вклады от всех мод поля, а не от ограниченного набора $[\mathbf{k}, s]$ в (12.9.2), но это не имеет особого значения, когда заполнен лишь ограниченный набор мод, поскольку незаполненные моды не вносят никакого вклада в ожидаемое значение нормально упорядоченного произведения операторов. Если чувствительная поверхность квантового счетчика нормальна к падающему свету и имеет площадь поверхности S, то мы можем предположить, что C_2 пропорциональна S и, подобно тому, как было сделано в (12.3.3), записать,

$$P_1(\mathbf{r},t) = c\beta S\langle\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t)\rangle, \tag{12.9.6}$$

где β — некоторое безразмерное число, которое можно определить как квантовый выход квантового счетчика.

Для того, чтобы сравнить при одинаковых условиях эффективность квантового счетчика с эффективностью фотодетектора, нам необходим коммутатор скалярного произведения $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t)$. Из выражения (12.9.2) и сопряженного ему, мы имеем

$$\left[\hat{V}_i(\mathbf{r},t), \hat{V}_i^{\dagger}(\mathbf{r},t)\right] = \frac{1}{L^3} \sum_{[\mathbf{k},s]} \sum_{[\mathbf{k}',s']} [\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'s'}]\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{\mathbf{k}'s'}\, \mathrm{e}^{i[(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}-(\omega-\omega')t]},$$

и, с помощью (10.2.6) и (10.3.9), получаем, что

$$\left[\hat{V}_i(\mathbf{r},t), \hat{V}_i^{\dagger}(\mathbf{r},t)\right] = \frac{1}{L^3}\sum_{[\mathbf{k},s]} 1 = \frac{\mu}{L^3}, \tag{12.9.7}$$

где через μ мы обозначаем общее число мод, вносящих вклад в ограниченный набор $[\mathbf{k}, s]$. Тогда (12.6.9) можно переписать в виде

$$P_1(\mathbf{r},t) = c\beta S\left[\langle \hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)\rangle + \frac{\mu}{L^3}\right] = c\beta S\left[\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle + \frac{\mu}{L^3}\right], \tag{12.9.8}$$

где $\hat{I}(\mathbf{r},t) \equiv \hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)$ — как и прежде, фотонная плотность. Сравнение этого выражения с (12.3.3) показывает, что при одном и том же состоянии поля с модами, которые незаполнены вне набора $[\mathbf{k}, s]$, и при одинаковых квантовых выходах α и β, квантовый счетчик будет считать с большей скоростью, чем фотоэлектрический детектор. Разница между этими двумя скоростями счета $c\beta S\mu/L^3$ не зависит от состояния поля. Так как число мод μ пропорционально L^3, то $c\beta S\mu/L^3$, в действительности, не зависит от нормировочного объема L^3, как это и должно быть для величины, имеющей физический смысл. Кроме того, $c\beta S\mu/L^3$ из (12.9.8) является скоростью счета квантового счетчика в вакууме; таким образом, она очевидно отражает вклад, который можно приписать фотонной эмиссии при спонтанном переходе системы с уровня b на уровень c. Именно данный спонтанный счет, главным образом, отличает квантовый счетчик от фотоэлектрического детектора.

Значимость скорости спонтанного счета очевидным образом зависит от относительных величин $\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle$ и μ/L^3. Как мы уже видели в разд. 12.3, $\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle$ представляет собой среднее число фотонов в единице объема. Так как μ/L^3 есть число мод в единице объема, то отношение первого члена ко второму является средним числом фотонов в моде в пределах полосы отклика детектора. Когда данное среднее число заполнения становится большим, поведение квантованного поля приближается к поведению классического поля в силу принципа соответствия и скорость спонтанного счета становится пренебрежимо малой по сравнению со скоростью стимулированного счета. В такой ситуации не существует принципиальной разницы в выборе в качестве более эффективного средства измерения квантового счетчика или фотоэлектрического детектора. Кроме того, в такой ситуации ожидаемые значения нормально и антинормально упорядоченных произведений в (12.2.7) и (12.9.5) приблизительно равны, и наше рассмотрение полевых векторов в качестве с-чисел оправдано. С другой стороны, когда среднее число заполнения фотонами моды мало, то $\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle \ll \mu/L^3$ и выход квантового счетчика, главным образом, определяется спонтанным счетом. В этом случае его скорость счета, фактически, постоянна и не зависит от состояния поля. Конечно, трудно представить, чтобы такого рода прибор пользовался широким спросом в качестве измерительного прибора в лабораториях. К сожалению, оказывается, что для света, испускаемого всеми известными тепловыми источниками, среднее число заполнения фотонами моды гораздо меньше единицы (см. разд. 13.3). Лишь тогда, когда температура источника много выше 100000 К, среднее число заполнения фотонами действительно становится заметно больше единицы. Таким образом, квантовый счетчик мало пригоден для измерения интенсивности света от теплового источника. Однако для поля, создаваемого лазером или параметрическим осциллятором, ситуация совершенно иная. Здесь среднее число заполнения фотонами моды действительно может быть очень большим, таким, что поле можно описывать классически и измерять как квантовым счетчиком, так и фотоэлектрическим детектором.

Уравнение (12.9.6) можно легко обобщить для случая N различных квантовых счетчиков. Несложно видеть, что рассуждения, которые привели к (12.2.12), теперь дают

$$P_N(\mathbf{r}_1,t_1,\ldots,\mathbf{r}_N,t_N) = \beta_1\ldots\beta_N S_1\ldots S_N c^N\langle \hat{V}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots\hat{V}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)\hat{V}^\dagger_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)\ldots\hat{V}^\dagger_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle \tag{12.9.9}$$

для плотности N кратной совместной вероятности того, что квантовым счетчиком регистрируется N фотоотсчетов в $\mathbf{r}_1,t_1,\ldots,\mathbf{r}_N,t_N$, соответственно. Здесь $\beta_1,\ldots\beta_N$ и $S_1,\ldots,S_N$ — квантовые выходы и площади облучаемых поверхностей N квантовых счетчиков, которые необязательно должны быть различными. Очевидно, что измерения с помощью квантовых счетчиков соответствуют антинормально упорядоченным корреляционным функциям, так же, как измерения с помощью фотоэлектрических детекторов соответствуют нормально упорядоченным функциям. Значимость последних, по сравнению с первыми, является наглядным отражением факта большего использования фотодетекторов.

Как и в разд. 12.2, удобно ввести обозначения, которые позволяют записать корреляционную функцию (12.9.9) в сокращенном виде. В разд. 12.2 мы встречались с символом и оператором упорядочения, которые служили для нормального упорядочения, здесь мы также введем аналогичные обозначения. Будем использовать символ "$\hat{O}$", чтобы обозначить приведение оператора $\hat{O}$ в антинормальный порядок без учета коммутационных соотношений. Например, "$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{a}\hat{a}^\dagger$", "$\hat{n}^2 = \hat{a}^2\hat{a}^{\dagger 2}$". Как и прежде, символ " " не следует рассматривать как оператор, а просто как элемент обозначения. С его помощью мы можем переписать

(12.9.9) в виде

$$P_N(\mathbf{r}_1,t_1,\ldots,\mathbf{r}_N,t_N)=\beta_1\ldots\beta_N S_1\ldots S_N\langle{}^n\hat{I}(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots\hat{I}(\mathbf{r}_N,t_N)^n\rangle. \tag{12.9.10}$$

С другой стороны, можно ввести линейный оператор упорядочения $\hat{\Omega}^{(\mathrm{A})}$ (ср. разд. 11.10), который преобразует с-числовой функционал в антинормально упорядоченный функционал для операторов рождения и уничтожения, в соответствии с правилом

$$\hat{\Omega}^{(\mathrm{A})}f(\{v\},\{v^*\})=f^{(\mathrm{A})}(\{\hat{a}\},\{\hat{a}^\dagger\}), \tag{12.9.11}$$

где $f^{(\mathrm{A})}(\{\hat{a}\},\{\hat{a}^\dagger\})$ является антинормально упорядоченным функционалом. Оператор $\hat{\Omega}^{(\mathrm{A})}$ позволяет нам выразить (12.9.9) в виде

$$P_N(\mathbf{r}_1,t_1,\ldots,\mathbf{r}_N,t_N)=\beta_1\ldots\beta_N S_1\ldots S_N c^N\langle\hat{\Omega}^{(\mathrm{A})}[\hat{I}(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots\hat{I}(\mathbf{r}_N,t_N)]\rangle, \tag{12.9.12}$$

где $I(\mathbf{r}_1,t_1)\equiv\mathbf{V}^*(\mathbf{r}_1,t_1)\cdot\mathbf{V}(\mathbf{r}_1,t_1)$ и т.д. представляют с-числовые интенсивности, в которых $\mathbf{V}(\mathbf{r}_1,t)$ и $\mathbf{V}^*(\mathbf{r}_1,t)$ являются правыми и левыми собственными значениями операторов $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{t})$ и $\hat{\mathbf{V}}^*(\mathbf{r}_1,\mathbf{t})$.

Теперь вернемся к вопросу о вычислении антинормально упорядоченных корреляционных функций. Мы уже видели, что для нормально упорядоченных корреляционных функций эта проблема сводится к вычислению интеграла, содержащего только с-числовые функции. Мы можем показать, что это также справедливо и в случае антинормально упорядоченных корреляционных функций, что, вообще говоря, можно было бы ожидать из общего соотношения (11.10.9). Однако, диагональное представление по когерентным состояниям оператора плотности, которое оказалось весьма ценным для нормально упорядоченных корреляционных функций, не будет полезно здесь непосредственно. Оно позволяет записать

$$\langle\hat{V}(x_1)\ldots\hat{V}(x_N)\hat{V}^\dagger(y_M)\ldots\hat{V}^\dagger(y_1)\rangle=$$
$$=\mathrm{Tr}\int\phi(\{v\})\hat{V}(x_1)\ldots\hat{V}(x_N)\hat{V}^\dagger(y_M)\ldots\hat{V}^\dagger(y_1)|\{v\}\rangle\langle\{v\}|\,d\{v\}, \tag{12.9.13}$$

где $x_1,\ldots$, как и прежде, обозначают $r_1,t_1,i_1,\ldots$, но так как ни один из операторов в правой части этого уравнения не стоит рядом со своим левым или правым собственным состоянием, то даже после циклической перестановки эти операторы нельзя непосредственно исключить. Конечно, мы можем переставить операторы, многократно применяя коммутационные соотношения, после чего воспользоваться оптической теоремой эквивалентности, но окончательное выражение будет довольно сложным.

12.9.2. Замена дифференциальными операторами



Рассмотрим другую процедуру, позволяющую заменить операторы рождения и уничтожения, стоящие под знаком интеграла в (12.9.13), дифференциальными операторами (Louisell, 1969). Сперва отметим, что произведение полевых операторов под знаком интеграла имеет общий вид

$$f^{(\mathrm{A})}(\{\hat{a}\},\{\hat{a}^\dagger\})\equiv\sum_{\lambda_1}\cdots\sum_{\lambda_N}\sum_{\lambda'_1}\cdots\sum_{\lambda'_M}c_{1\lambda_1}\ldots c_{N\lambda_N}c'_{M\lambda'_N}\ldots c'_{1\lambda'_1}\hat{a}_{\lambda_1}\ldots\hat{a}_{\lambda_N}\hat{a}^\dagger_{\lambda'_M}\ldots\hat{a}^\dagger_{\lambda'_1}, \tag{12.9.14}$$

где $\lambda_r(r=1,2,\ldots,N)$ и $\lambda'_r(r=1,2,\ldots,M)$ — обозначения для мод $\mathbf{k},\mathbf{s}$, а $c_{r\lambda_r}$ $(r=1,2,\ldots,N)$ и $c'_{r\lambda'r}$ $(r=1,2,\ldots,N)$ — коэффициенты, которые в общем случае зависят от пространственных и временных параметров. Верхний индекс (A) подчеркивает, что функционал $f^{(\mathrm{A})}$ находится в антинормальном порядке. Кроме того, вспомним, что когерентное состояние можно рассматривать, в соответствии с (11.3.1), как смещенное вакуумное состояние и, таким образом, можно записать для проекционного оператора по когерентным состояниям $|\{v\}\rangle\langle\{v\}|$

$$|\{v\}\rangle\langle\{v\}|=\exp(-|v_{\lambda_r}|^2)\exp(v_{\lambda_r}\hat{a}^\dagger_{\lambda_r})|0_{\lambda_r}\rangle\langle 0_{\lambda_r}|\exp(v^*_{\lambda_r}\hat{a}_{\lambda_r})\prod_{m\neq r}|v_{\lambda_m}\rangle\langle v_{\lambda_m}|. \tag{12.9.15}$$

Следовательно, произведение $\hat{a}^{\dagger}_{\lambda_r}$ и $|\{v\}\rangle\langle\{v\}|$ может быть формально записано в виде

$$\hat{a}^{\dagger}_{\lambda_r}|\{v\}\rangle\langle\{v\}| = \exp(-|v_{\lambda_r}|^2)\frac{\partial}{\partial v_{\lambda_r}}\exp(v_{\lambda_r}\hat{a}^{\dagger}_{\lambda_r})|0_{\lambda_r}\rangle\langle 0_{\lambda_r}|\exp(v^*_{\lambda_r}\hat{a}_{\lambda_r})\prod_{m\neq r}|v_{\lambda_m}\rangle\langle v_{\lambda_m}| =$$

$$= \exp(-|v_{\lambda_r}|^2)\frac{\partial}{\partial v_{\lambda_r}}[\exp(|v_{\lambda_r}|^2)|\{v\}\rangle\langle\{v\}|] = \left(v^*_{\lambda_r} + \frac{\partial}{\partial v_{\lambda_r}}\right)|\{v\}\rangle\langle\{v\}|, \quad (12.9.16)$$

где $\partial/\partial v_{\lambda_r}$ обозначает частное дифференцирование по v_{λ_r}, а $v^*_{\lambda_r}$ является независимой переменной. Из выражения (12.9.16) видно, что можно исключить оператор $\hat{a}^{\dagger}_{\lambda_r}$ в гильбертовом пространстве, заменяя его дифференциальным оператором $(v^*_{\lambda_r} + \partial/\partial v_{\lambda_r})$, когда он стоит слева от проекционного оператора $|\{v\}\rangle\langle\{v\}|$. Таким же образом мы можем показать, что

$$|\{v\}\rangle\langle\{v\}|\hat{a}_{\lambda_r} = \exp(-|v_{\lambda_r}|^2)\frac{\partial}{\partial v^*_{\lambda_r}}[\exp(|v_{\lambda_r}|^2)|\{v\}\rangle\langle\{v\}|] = \left(v_{\lambda_r} + \frac{\partial}{\partial v^*_{\lambda_r}}\right)|\{v\}\rangle\langle\{v\}|, \quad (12.9.17)$$

т. е. оператор уничтожения $\hat{a}_{\lambda_r}$, стоящий справа от $|\{v\}\rangle\langle\{v\}|$, можно заменить дифференциальным оператором $(v_{\lambda_r} + \partial/\partial v^*_{\lambda_r})$. Эти результаты легко объединяются, так что имеем, например

$$\hat{a}^{\dagger}_{\lambda_r}|\{v\}\rangle\langle\{v\}|\hat{a}_{\lambda_r} = \left(v^*_{\lambda_r} + \frac{\partial}{\partial v_{\lambda_r}}\right)\left(v_{\lambda_r} + \frac{\partial}{\partial v^*_{\lambda_r}}\right)|\{v\}\rangle\langle\{v\}|, \quad (12.9.18)$$

$$\hat{a}^{\dagger}_{\lambda_r}\hat{a}_{\lambda_r}|\{v\}\rangle\langle\{v\}| = \hat{a}^{\dagger}_{\lambda_r}|\{v\}\rangle\langle\{v\}|v_{\lambda_r} = v_{\lambda_r}\left(v^*_{\lambda_r} + \frac{\partial}{\partial v_{\lambda_r}}\right)|\{v\}\rangle\langle\{v\}|, \quad (12.9.19)$$

$$|\{v\}\rangle\langle\{v\}|\hat{a}^{\dagger}_{\lambda_r}\hat{a}_{\lambda_r} = v^*_{\lambda_r}|\{v\}\rangle\langle\{v\}|\hat{a}_{\lambda_r} = v^*_{\lambda_r}\left(v_{\lambda_r} + \frac{\partial}{\partial v^*_{\lambda_r}}\right)|\{v\}\rangle\langle\{v\}|. \quad (12.9.20)$$

Используя формулы (12.9.16) и (12.9.17) для определения ожидаемого значения $f^{(A)}(\{\hat{a}\},\{\hat{a}^{\dagger}\})$, задаваемого выражением (12.9.14), приходим к формуле

$$\langle f^{(A)}(\{\hat{a}\},\{\hat{a}^{\dagger}\})\rangle = \mathrm{Tr}\int \phi(\{v\})f^{(A)}(\{\hat{a}\},\{\hat{a}^{\dagger}\})|\{v\}\rangle\langle\{v\}|\,d\{v\} =$$

$$= \mathrm{Tr}\int \phi(\{v\})f^{(A)}\left(\{\hat{a}\},\left\{v + \frac{\partial}{\partial v^*}\right\}\right)|\{v\}\rangle\langle\{v\}|\,d\{v\} =$$

$$= \mathrm{Tr}\int \phi(\{v\})f^{(A)}\left(\left\{v^* + \frac{\partial}{\partial v}\right\},\left\{v + \frac{\partial}{\partial v^*}\right\}\right)|\{v\}\rangle\langle\{v\}|\,d\{v\}, \quad (12.9.21)$$

где последняя строчка получается из предыдущей после циклической перестановки операторов под знаком следа. Таким образом, нам удалось исключить под знаком интеграла все операторы в гильбертовом пространстве (кроме проекционного оператора $|\{v\}\rangle\langle\{v\}|$). Выполняя интегрирование по частям, мы, как правило, можем переместить дифференциальные операторы от проекционного оператора $|\{v\}\rangle\langle\{v\}|$ к весовому функционалу, после чего след сводится к обычному интегралу от c-числовых функций. Эта процедура редко используется для непосредственного вычисления корреляционной функции. Однако далее, при приведении основного операторного кинетического уравнения движения взаимодействующего поля к дифференциальному уравнению, это окажется полезным (см. разд. 18.5).

12.9.3. Весовой функционал для антинормально упорядоченных корреляционных функций

Ожидаемое значение антинормально упорядоченного операторного произведения может быть сведено непосредственно к интегралу от c-числовых функций, в соответствии с тем же методом, который был

принят в разд. 11.9 и 11.10. Весовой функционал при антинормальном упорядочении обсуждается в работах (Kano, 1965; Mehta and Sudarshan, 1965). Более исчерпывающие, современные обсуждения этого вопроса приводятся в работах (Cahill and Glauber, 1969a, b; Agarwal and Wolf, 1970a, b, c). Мы используем разложение (11.10.8) единичного оператора через проекционные операторы по когерентным состояниям, ограничивая при этом произведение по модам набором $[\mathbf{k}, s]$. Более того, будем предполагать, что моды вне набора $[\mathbf{k}, s]$ незаполнены, и что след оператора плотности $\hat{\rho}$ по этим незаполненным модам, которые не имеют особого значения для данного обсуждения, уже найден. Вставим между операторами уничтожения и рождения в определении корреляционной функции единичный оператор и получим формулу

$$\langle \hat{V}(x_1)\dots\hat{V}(x_N)\hat{V}^\dagger(y_M)\dots\hat{V}^\dagger(y_1)\rangle = \\ = \mathrm{Tr}\int \hat{\rho}\hat{V}(x_1)\dots\hat{V}(x_N)\prod_{[\mathbf{k},s]}[|v_{\mathbf{k}s}\rangle\langle v_{\mathbf{k}s}|]\hat{V}^\dagger(y_M)\dots\hat{V}^\dagger(y_1)\prod_{[\mathbf{k},s]}\frac{d^2v_{\mathbf{k}s}}{\pi}. \quad (12.9.22)$$

Итак, мы видим, что каждый оператор рождения и уничтожения под знаком интеграла стоит слева или справа от своего собственного состояния. Следовательно, можно заменить операторы их собственными значениями. Если теперь вычислить след под знаком интеграла, то получается выражение

$$\langle \hat{V}(x_1)\dots\hat{V}(x_N)\hat{V}^\dagger(y_M)\dots\hat{V}^\dagger(y_1)\rangle = \\ = \int \langle\{v\}|\hat{\rho}|\{v\}\rangle\prod_{[\mathbf{k},s]}\left[\frac{1}{\pi}\right]V(x_1)\dots V(x_N)V^*(y_M)\dots V^*(y_1)\,d\{v\} = \\ = Q(\{v\})V(x_1)\dots V(x_N)V^*(y_M)\dots V^*(y_1)\,d\{v\} = \langle V(x_1)\dots V(x_N)V^*(y_M)\dots V^*(y_1)\rangle_Q, \quad (12.9.23)$$

где

$$Q(\{v\}) \equiv \langle\{v\}|\hat{\rho}|\{v\}\rangle\prod_{[\mathbf{k},s]}\left[\frac{1}{\pi}\right]. \quad (12.9.24)$$

Таким образом, мы смогли, точно так же, как и ранее для нормально упорядоченных операторных произведений, выразить антинормально упорядоченную корреляционную функцию в виде взвешенного среднего от соответствующей c-численной функции. Понятно, что такой результат должен быть справедлив для любого антинормально упорядоченного функционала $f^{(\mathrm{A})}(\{\hat{a}\},\{\hat{a}^\dagger\})$ операторов уничтожения и рождения, имеющих разложение в степенной ряд. Таким образом, мы имеем

$$\langle f^{(\mathrm{A})}(\{\hat{a}\},\{\hat{a}^\dagger\})\rangle = \int Q(\{v\})f^{(\mathrm{A})}(\{v\},\{v^*\})\,d\{v\} \equiv \langle f^{(\mathrm{A})}(\{v\},\{v^*\})\rangle_Q. \quad (12.9.25)$$

Весовой функционал, или функционал в фазовом пространстве, на этот раз является функционалом $Q(\{v\})$, задаваемым выражением (12.9.24), [известным как $Q(\{v\})$-функционал], а не функционалом $\phi(\{v\})$ [или $P(\{v\})$-функционалом], фигурирующим в диагональном представлении $\hat{\rho}$ по когерентным состояниям. Таким образом, различие между ожидаемыми значениями нормально упорядоченного и антинормально упорядоченного операторов должно заключаться в характере двух функционалов $\phi(\{v\})$ и $Q(\{v\})$. Мы уже исследовали некоторые свойства весового функционала $\phi(\{v\})$ и показали, что, хотя он имеет некоторые свойства вероятностного функционала, иногда он может быть более сингулярным, нежели классический вероятностный функционал.

Рассмотрим теперь соответствующие свойства $Q(\{v\})$. Ниже мы приводим четыре принципиальных свойства $Q(\{v\})$:

(a) $Q(\{v\})$ является действительным.

Поскольку, помимо действительного коэффициента пропорциональности, $Q(\{v\})$ равен ожидаемому значению эрмитова оператора, то $Q(\{v\})$ должен быть действительным, т.е.

$$Q^*(\{v\}) = Q(\{v\}). \quad (12.9.26)$$

(б) $Q(\{v\})$ нормирован на единицу.

Восстанавливая некоторые шаги, использованные при выводе (12.9.23), получаем

$$\int Q(\{v\})\,d\{v\} = \int \langle\{v\}|\hat{\rho}\prod_{[\mathbf{k},s]}\left[\frac{1}{\pi}|v_{\mathbf{k}s}\rangle\,d^2v_{\mathbf{k}s}\right] = \operatorname{Tr}\hat{\rho}\int\prod_{[\mathbf{k},s]}\left[\frac{1}{\pi}|v_{\mathbf{k}s}\rangle\langle v_{\mathbf{k}s}|\,d^2v_{\mathbf{k}s}\right] = \operatorname{Tr}\hat{\rho} = 1. \quad (12.9.27)$$

Из этого результата видно, что $Q(\{v\})$ нормирован на единицу.

Свойствами (а) и (б) также обладает и $\phi(\{v\})$. Однако в общем случае $\phi(\{v\})$ не обладает приводимыми ниже свойствами.

(в) $Q(\{v\})$ не отрицателен.

Поскольку $Q(\{v\})$ пропорционален ожидаемому значению неотрицательного оператора $\hat{\rho}$, то и он сам должен быть неотрицателен. Если мы выразим $\hat{\rho}$ в виде

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i|s_i\rangle\langle s_i|, \quad \sum_i p_i = 1, \quad (12.9.28)$$

где $|s_i\rangle$ — произвольное состояние поля, а p_i — вероятность этого состояния, то имеем

$$Q(\{v\}) = \sum_i p_i|\langle s_i|\{v\}\rangle|^2\prod_{[\mathbf{k},s]}\left(\frac{1}{\pi}\right) \geqslant 0, \quad (12.9.29)$$

так как $|\langle s_i|\{v\}\rangle|^2 \geqslant 0$ и $p_i \geqslant 0$ для всех i.

Свойства (а), (б) и (в) являются важнейшими свойствами всех классических плотностей вероятности. Таким образом, $Q(\{v\})$, в отличие от $\phi(\{v\})$, относится к классу плотностей вероятности. Четвертое свойство (г), которое приводится ниже, определяет $Q(\{v\})$ в качестве особого подкласса плотностей вероятности.

(г) $Q(\{v\})$ ограничен сверху.

Из (12.9.29) мы имеем

$$Q(\{v\}) = \sum_i p_i|\langle s_i|\{v\}\rangle|^2\prod_{[\mathbf{k},s]}\left(\frac{1}{\pi}\right) \leqslant \prod_{[\mathbf{k},s]}\left(\frac{1}{\pi}\right), \quad (12.9.30)$$

откуда видно, что $Q(\{v\})$ ограничен сверху и снизу, поскольку $|\langle s_i|\{v\}\rangle|^2 \leqslant 1$ и $\sum_i p_i = 1$. В этом отношении $Q(\{v\})$ даже более регулярный, чем классическая весовая функция в фазовом пространстве, т.е. плотность вероятности, которая может быть сингулярной, как дельта-функция.

Несмотря на такое замечательное математическое поведение $Q(\{v\})$ и на тот факт, что он представляет собой подкласс классических плотностей вероятностей, $Q(\{v\})$ далек, по смыслу, от плотности вероятности. В этом отношении он совершенно отличается от $\phi(\{v\})$, который, как правило, совпадает с классической плотностью вероятности, если существует классических аналог для данного конкретного состояния. Проиллюстрируем эту ситуацию несколькими примерами.

Если состояние является когерентным состоянием $|\{v'\}\rangle$, то

$$Q(\{v\}) = \operatorname{Tr}\prod_{[\mathbf{k},s]}\frac{1}{\pi}|\langle v_{\mathbf{k}s}|v'_{\mathbf{k}s}\rangle|^2 = \prod_{[\mathbf{k},s]}\frac{1}{\pi}\,\mathrm{e}^{-|v_{\mathbf{k}s}-v'_{\mathbf{k}s}|^2}, \quad (12.9.31)$$

что есть гауссовское распределение по $\{v\}$ относительно $\{v'\}$ с единичной дисперсией. Эту формулу следует сравнить с соответствующей формой $\phi(\{v\})$

$$\phi(\{v\}) = \prod_{[\mathbf{k},s]}\delta^2(v_{\mathbf{k}s} - v'_{\mathbf{k}s}) \quad (12.9.32)$$

для того же самого состояния. Видно, что, несмотря на хорошее математическое поведение, $Q(\{v\})$ не соответствует классической весовой функции для электромагнитного поля с вполне определенной комплексной

амплитудой, тогда как $\phi(\{v\})$, наоборот, соответствует. Различие между $Q(\{v\})$ и $\phi(\{v\})$ является очень большим при малых $v'_{\mathbf{k}s}$ и становится еще более выраженным для вакуумного состояния, у которого $v'_{\mathbf{k}s} = 0$ для всех значений $\mathbf{k}, s$. Однако, когда все действительные и мнимые части $v'_{\mathbf{k}s}$ представляют собой большие числа, $Q(\{v\})$, определяемый формулой (12.9.31), имеет резкий максимум для $\{v\}$ в окрестности $\{v'\}$ и начинает приобретать некоторые свойства дельта-функции.

В качестве еще одного примера, рассмотрим фоковское состояние $|\{n\}\rangle$, для которого

$$Q(\{v\}) = \prod_{[\mathbf{k},s]} \left[\frac{1}{\pi}|\langle v_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle|^2\right] = \prod_{[\mathbf{k},s]} \left[\frac{1}{\pi}\frac{|v_{\mathbf{k}s}|^{2n_{\mathbf{k}s}}\, e^{-|v_{\mathbf{k}s}|^2}}{n_{\mathbf{k}s}!}\right]. \tag{12.9.33}$$

Это произведение γ-распределений по $v_{\mathbf{k}s}$ (см. разд. 1.5), представляющих собой регулярные функции, которые, приблизительно являются гауссовскими для больших $n_{\mathbf{k}s}$ и сильно отличаются от соответствующего $\phi(\{v\})$, определяемого формулой (11.8.20). В этом случае для данного состояния не существует никакого классического аналога, что обусловлено очень сингулярным видом $\phi(\{v\})$. Однако из вида $Q(\{v\})$, определяемого выражением (12.9.33), сложно предположить, что $Q(\{v\})$ представляет неклассическое состояние.

Несложно получить явное соотношение между функционалами $Q(\{v\})$ и $\phi(\{v\})$. Связь между ними уже подразумевается при очевидном обобщении на многомодовый случай в фурье-разложении (11.9.16) характеристической функции для антинормально упорядоченных операторов. Но проще исходить непосредственно из определения (12.9.24). Перейдя к диагональному представлению $\hat{\rho}$ по когерентным состояниям, с помощью (11.11.5) находим, что

$$Q(\{v\}) = \int \phi(\{v'\}) \prod_{[\mathbf{k},s]} \left[\frac{1}{\pi}|\langle v_{\mathbf{k}s}|v'_{\mathbf{k}s}\rangle|^2\, d^2v'_{\mathbf{k}s}\right] = \int \phi(\{v'\}) \prod_{[\mathbf{k},s]} \left[\frac{1}{\pi}\, e^{-|v_{\mathbf{k}s}-v\mathbf{k}s'|^2}\, d^2v'_{\mathbf{k}s}\right]. \tag{12.9.34}$$

Таким образом, функционал $Q(\{v\})$ представляет собой своего рода гладкую форму функционала $\phi(\{v\})$, в которой сглаживающий функционал является произведением по модам гауссовских функций. Мы уже видели, что для больших $v_{\mathbf{k}s}$, $\exp(-|v_{\mathbf{k}s} - v'_{\mathbf{k}s}|^2)$ имеет характер $\delta^2(v_{\mathbf{k}s} - v'_{\mathbf{k}s})$-функции. Если $\phi(\{v'\})$ сам является гладкой и регулярной функцией, то мы можем рассматривать его в качестве пробной функции под знаком интеграла и заключить, что для больших $\{v\}$,

$$Q(\{v\}) \approx \int \phi(\{v'\}) \prod_{[\mathbf{k},s]} [\delta^2(v_{\mathbf{k}s} - v'_{\mathbf{k}s})\, d^2v'_{\mathbf{k}s}] = \phi(\{v\}). \tag{12.9.35}$$

Таким образом, мы показали, что для состояний, имеющих классический предел, функционалы в фазовом пространстве $Q(\{v\})$ и $\phi(\{v\})$ стремятся стать равными в классическом пределе. Это означает, что в классическом пределе различия между нормально упорядоченными и антинормально упорядоченными корреляционными функции исчезают тогда, когда полевые векторы можно рассматривать в качестве c-чисел. В таком случае различия между результатами измерений, проведенных с помощью фотоэлектрических детекторов и с помощью квантовых счетчиков, также исчезают.

Весовые функционалы или квазивероятностные функционалы $Q(\{v\})$ и $\phi(\{v\})$ являются лишь двумя примерами широкого класса возможных функционалов, которые можно связать с различными упорядочениями операторов (ср. разд. 11.10).

12.10. Фотонная статистика

В разд. 10.4 мы встречались с фоковским состоянием поля, которое представляет собой состояние с определенным числом заполнения фотонами каждой моды. Мы показали, что фоковские состояния также являются собственными состояниями энергии, импульса, а также, для мод с круговой поляризацией, спиральности. Но, с другой стороны, в фоковском состоянии, которое является крайне неклассическим по характеру, операторы поля имеют нулевые ожидания, а не определенные значения. Далее мы познакомились с когерентными состояниями поля, которые более схожи с классическими состояниями, и для которых положительно- и отрицательно-частотные части полевых операторов являются вполне определенными, но

для которых числа фотонов не имеют определенных значений. Состояния электромагнитного поля, которые мы встречаем на практике, почти всегда являются состояниями с неопределенным числом фотонов, которое может задаваться только в рамках статистического описания. Ниже мы обратим наше внимание на проблему статистики фотонов. Мы узнаем, что фотонные флуктуации достаточно хорошо проявляются во флуктуациях щелчков, которые регистрируют фотодекторы, помещенные в поле.

12.10.1. Вероятности

Если $\{n\}$ обозначает некоторый определенный набор чисел заполнения фотонами, то вероятностью обнаружения $p(\{n\})$ набора $\{n\}$, когда электромагнитное поле находится в некотором произвольном состоянии, описываемом оператором плотности $\hat{\rho}$, является просто ожидаемое значение оператора проектирования на фоковское состояние $|\{n\}\rangle\langle\{n\}|$ или

$$p(\{n\}) = \mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}|\{n\}\rangle\langle\{n\}|]. \tag{12.10.1}$$

С помощью диагонального представления $\hat{\rho}$ по когерентным состояниям (11.11.11) и ранее выведенного скалярного произведения когерентного состояния на фоковское состояние [(11.2.12)], находим, что

$$\begin{aligned} p(\{n\}) &= \mathrm{Tr} \int \phi(\{v\})|\{v\}\rangle\langle\{v\}||\{n\}\rangle\langle\{n\}\, d\{v\} = \int \phi(\{v\})|\langle\{n\}|\{v\}\rangle|^2\, d\{v\} = \\ &= \int \phi(\{v\}) \prod_{\mathbf{k},s} \left[\frac{|v_{\mathbf{k}s}|^{2n_{\mathbf{k}s}}\, \mathrm{e}^{-|v_{\mathbf{k}s}|^2}}{n_{\mathbf{k}s}!}\right] d\{v\} = \\ &= \left\langle \prod_{\mathbf{k},s} \left[\frac{|v_{\mathbf{k}s}|^{2n_{\mathbf{k}s}}\, \mathrm{e}^{-|v_{\mathbf{k}s}|^2}}{n_{\mathbf{k}s}!}\right] \right\rangle_{\phi} = \qquad (12.10.2\text{а}) \\ &= \left\langle : \prod_{\mathbf{k},s} \left[\frac{\hat{n}_{\mathbf{k}s}^{n_{\mathbf{k}s}}\, \mathrm{e}^{-\hat{n}_{\mathbf{k}s}}}{n_{\mathbf{k}s}!}\right] : \right\rangle. \qquad (12.10.2\text{б}) \end{aligned}$$

Последнее выражение следует из предыдущего ввиду оптической теоремы эквивалентности. Соотношение (12.10.2а) имеет интересную структуру. Оно выражает $p(\{n\})$ как произведение пуассоновских распределений по числам заполнения $n_{\mathbf{k}s}$, которое затем должно быть усреднено по весовому функционалу $\phi(\{v\})$ (Ghielmetti, 1964). Однако, в общем случае, процедура усреднения по $\phi(\{v\})$ не будет сохранять структуру $p(\{n\})$ в виде произведения пуассоновских распределений. Конечное выражение может выглядеть совершенно иначе и не иметь вид произведения по модам.

Тем не менее, в частных случаях $p(\{n\})$ может иметь вид пуассоновского распределения. Например, если состояние является когерентным состоянием $|\{v'\}\rangle$, то $\phi(\{v\})$ задается соотношением

$$\phi(\{v\}) = \prod_{\mathbf{k},s} \delta^2(v_{\mathbf{k}s} - v'_{\mathbf{k}s}), \tag{12.10.3}$$

и из (12.10.2) мы имеем

$$p(\{n\}) = \prod_{\mathbf{k},s} \left[\frac{|v'_{\mathbf{k}s}|^{2n_{\mathbf{k}s}}\, \mathrm{e}^{-|v'_{\mathbf{k}s}|^2}}{n_{\mathbf{k}s}!}\right], \tag{12.10.4}$$

что, как и ожидалось, является произведением пуассоновских распределений для каждой моды. Для весового функционала $\phi(\{v\})$ (11.11.18), соответствующего случаю одномодового лазера, мода которого имеет случайную фазу, получаем

$$p(\{n\}) = \frac{r^{2n_{\mathbf{k}'s'}}\, \mathrm{e}^{-r^2}}{n_{\mathbf{k}'s'}} \prod_{\mathbf{k},s\neq\mathbf{k}',s'} \delta_{n_{\mathbf{k}s}0}, \tag{12.10.5}$$

откуда видно, что число фотонов в $\mathbf{k}', s'$-моде имеет пуассоновское распределение, в то время как все остальные моды являются незаполненными. В разд. 13.2 мы покажем, что для равновесного теплового

состояния поля, для которого $\phi(\{v\})$ является гауссовским, выражение (12.10.2) приводит к произведению распределений Бозе — Эйнштейна.

Иногда распределение вероятности набора чисел заполнения $\{n\}$ интересует нас меньше, чем распределение вероятности $P(n)$ общего числа фотонов n, где

$$n \equiv \sum_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k}s}. \tag{12.10.6}$$

Легко вывести выражение для $P(m)$ из $p(\{n\})$, если просуммировать $p(\{n\})$ по всем комбинациям $\{n\}$, для которых общее число $n = m$. Тогда с помощью (12.10.2) имеем

$$P(m) = \sum_{\{n\}} p(\{n\})\delta_{mn} = \sum_{\{n\}} \left\langle \prod_{\mathbf{k},s} \left[\frac{|v_{\mathbf{k}s}|^{2n_{\mathbf{k}s}} \mathrm{e}^{-|v_{\mathbf{k}s}|^2}}{n_{\mathbf{k}s}!} \right] \right\rangle_{\phi} \delta_{nm}.$$

Меняя местами порядки суммирования, произведения и усреднения по фазовому пространству и используя полиномиальную теорему в виде

$$\left[\sum_{\mathbf{k},s} |v_{\mathbf{k}s}|^2 \right]^m = \sum_{\{n\}} \prod_{\mathbf{k},s} \left[\frac{|v_{\mathbf{k}s}|^{2n_{\mathbf{k}s}}}{n_{\mathbf{k}s}!} \right] m!\, \delta_{nm}, \tag{12.10.7}$$

приходим к выражению

$$P(m) = \left\langle \frac{1}{m!} \left[\sum_{\mathbf{k},s} |v_{\mathbf{k}s}|^2 \right]^m \exp\left[-\sum_{\mathbf{k},s} |v_{\mathbf{k}s}|^2 \right] \right\rangle_{\phi} = \left\langle \frac{U^m \mathrm{e}^{-U}}{m!} \right\rangle_{\phi} = \left\langle : \frac{\hat{n}^m \mathrm{e}^{-\hat{n}}}{m!} : \right\rangle, \tag{12.10.8}$$

где

$$U \equiv \sum_{\mathbf{k},s} |v_{\mathbf{k}s}|^2 = \int_{L^3} V^*(\mathbf{r},t) V(\mathbf{r},t)\, d^3x, \tag{12.10.9}$$

а произведение $\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{V}$ является фотонной плотностью. Последняя форма (12.10.8) получается из предыдущей по оптической теореме эквивалентности. Мы видим, что $P(m)$ также может быть формально записана как среднее по пуассоновским распределениям и функционал в фазовом пространстве $\phi(\{v\})$ играет роль весового функционала. Для когерентного состояния $|\{v'\}\rangle$, при $\phi(\{v\})$ задаваемым выражением (12.10.3), и для одномодового лазера, при $\phi(\{v\})$ задаваемым выражением (11.11.18), $P(m)$ фактически является пуассоновским распределением по m. Хотя в общем случае операция усреднения в фазовом пространстве может привести к совершенно иной форме $P(m)$.

Параметр U в (12.10.9) является c-числовой интенсивностью света, проинтегрированной по всему пространству и, в определенном смысле, представляет собой аналог общего числа фотонов $\hat{n}$. Правую часть в (12.10.8) также можно трактовать как среднее от $U^m e^{-U}/m!$ по некоторой случайной переменной U с плотностью квазивероятности $\mathscr{P}(U)$, задаваемой выражением

$$\mathscr{P}(U') = \int \phi(\{v\})\delta(U' - U)\, d\{v\}. \tag{12.10.10}$$

Для того, чтобы увидеть это, отметим, что (12.10.8) также может быть записано в виде

$$P(m) = \int \phi(\{v\}) \frac{U^m \mathrm{e}^{-U}}{m!} d\{v\} = \iint \phi(\{v\})\delta(U - U') \frac{U^m \mathrm{e}^{-U}}{m!} dU\, d\{v\} =$$
$$= \iint \phi(\{v\})\delta(U - U') \frac{U'^m \mathrm{e}^{-U'}}{m!} dU'\, d\{v\} = \int \mathscr{P}(U') \frac{U'^m e^{-U'}}{m!} dU', \tag{12.10.11}$$

где правая часть имеет обычный вид классического среднего. Однако, в тех случаях, когда $\phi(\{v\})$ лежит вне области классической плотности в фазовом пространстве, $\mathscr{P}(U')$ также может не обладать особенностями классической плотности вероятности.

12.10.2. Условия для неклассических состояний

В разд. 11.8 уже было указано, что вероятность счета фотонов $P(m)$ не может обратится в нуль для любого состояния, за исключением вакуумного состояния, для которого существует классический аналог, т.е. для которого плотность в фазовом пространстве $\phi(\{v\})$ неотрицательна. Это становится понятным после изучения (12.10.11). Достаточное условие неклассического состояния поля (Hilleri, 1985) можно выразить по-другому. Обозначим через $P_{\text{ч}}$ и $P_{\text{н}}$ вероятности для четного и нечетного числа фотонов, соответственно. Затем, из (12.10.11), после перестановки местами суммирования и интегрирования, мы имеем

$$P_{\text{ч}} = \sum_{m=0}^{\infty} P(2m) = \int_0^{\infty} \mathscr{P}(U')\,\mathrm{e}^{-U'} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{U'^{2m}}{(2m)!}\,dU' =$$

$$= \int_0^{\infty} \mathscr{P}(U')\,\mathrm{e}^{-U'}\,\mathrm{ch}\,U'\,dU' = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \mathscr{P}(U')(1+\mathrm{e}^{-2U'})\,dU',$$

$$P_{\text{н}} = \sum_{m=0}^{\infty} P(2m+1) = \int_0^{\infty} \mathscr{P}(U')\,\mathrm{e}^{-U'} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{U'^{2m+1}}{(2m+1)!}\,dU' =$$

$$= \int_0^{\infty} \mathscr{P}(U')\,\mathrm{e}^{-U'}\,\mathrm{sh}\,U'\,dU' = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \mathscr{P}(U')(1-\mathrm{e}^{-2U'})\,dU'.$$

Анализ этого выражения показывает, что $P_{\text{н}}$ должна быть меньше $1/2$, а $P_{\text{ч}}$ больше $1/2$, для любого состояния, имеющего классический аналог, для которого $P(U') \geqslant 0$. И наоборот, если $P_{\text{н}} > 1/2$, то квантовое состояние не имеет классического аналога, и поскольку $P_{\text{н}} + P_{\text{ч}} = 1$, то же самое верно, если $P_{\text{ч}} < 1/2$.

12.10.3. Моменты $\hat{n}$

С помощью (12.10.8) или (12.10.11) мы можем легко связать моменты полного числа фотонов $\hat{n}$ с моментами U. После вычисления производящей функции факториальных моментов $F(\xi)$ от $P(m)$, находим

$$F(\xi) \equiv \langle(1-\xi)^{\hat{n}}\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} P(m)(1-\xi)^m = \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} \frac{U^m(1-\xi)^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-U} \right\rangle_{\phi} = \langle \mathrm{e}^{-\xi U}\rangle_{\phi} = \langle :\mathrm{e}^{-\xi\hat{n}}: \rangle. \qquad (12.10.12)$$

Разложение $F(\xi)$ в степенной ряд дает факториальные моменты $\hat{n}$ и, сравнивая коэффициенты при $\xi^r/r!$ в обеих частях уравнения, получаем

$$\langle \hat{n}^{(r)} \rangle \equiv \langle \hat{n}(\hat{n}-1)\ldots(\hat{n}-r+1)\rangle = \langle U^r\rangle_{\phi} = \langle :\hat{n}^r: \rangle. \qquad (12.10.13\text{а})$$

Этот результат справедлив для любого квантового состояния поля, поэтому в (12.11.13а) фактически подразумевается операторное равенство

$$\hat{n}^{(r)} =: \hat{n}^r : \qquad (12.10.13\text{б})$$

В частности, когда $r = 1$ или 2, имеем

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle U \rangle_{\phi}, \qquad (12.10.14)$$

$$\langle (\Delta\hat{n})^2 \rangle = \langle \hat{n}(\hat{n}-1)\rangle + \langle \hat{n}\rangle - \langle \hat{n}\rangle^2 = \langle \hat{n}\rangle + \langle (\Delta U)^2\rangle_{\phi}. \qquad (12.10.15)$$

Последнее соотношение особенно интересно, так как оно напоминает хорошо известную формулу, полученную Эйнштейном (Einstein, 1909) для флуктуации энергии при излучении черного тела (см. также Mandel, Sudarshan and Wolf, 1964). Он показал, что выражение для дисперсии можно представить в виде суммы двух слагаемых, которые можно, соответственно, трактовать как результаты флуктуаций классических частиц и классических волн. Таким образом, согласно Эйнштейну электромагнитное излучение представляется как странное сочетание частиц и волн. Интересно отметить, что подобная трактовка может быть дана и выражению (12.10.15), которое соблюдается в весьма общих случаях для любого состояния поля, поскольку первый член справа является дисперсией случайным образом флуктуирующих частиц,

тогда как второй член представляет дисперсию флуктуирующих волн. Но такую трактовку не следует распространять слишком далеко, ибо $\langle(\Delta U)^2\rangle_\phi$ необязательно должна являться положительной величиной, как это имело бы место для классических волн. В качестве примера можно просто рассмотреть фоковское состояние поля, для которого число фотонов является определенным и, таким образом, $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = 0$. Из (12.10.15) находим, что

$$-\langle\hat{n}\rangle = \langle(\Delta U)^2\rangle_\phi = \mathscr{P}(U')(\Delta U')^2\,dU'.$$

Очевидно, что для фоковского состояния функция $\mathscr{P}(U')$, задаваемая выражением (12.10.10), не является неотрицательной. В более общем случае из (12.10.15) следует, что всегда, когда дисперсия числа фотонов меньше среднего значения, так что статистика фотонов является субпуассоновой, $\phi(\{v\})$ не может быть вероятностным функционалом, и состояние поля в таком случае является чисто квантово-механическим, не имеющим классического аналога. Представляется удобным характеризовать неклассическое состояние с помощью параметра Q, который определяется формулой (Mandel, 1979)

$$Q \equiv \frac{\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle}{\langle\hat{n}\rangle}. \tag{12.10.16}$$

Этот параметр становится отрицательным всегда, когда статистика является субпуассоновская. Для фоковского состояния параметр Q принимает наибольшее отрицательное значение, равное -1.

Несмотря на то, что общее число фотонов в бесконечной области пространства недоступно для непосредственного измерения, можно показать, что соотношения, весьма схожие с вышеприведенными, соблюдаются для числа фотонов в конечном объеме (Mandel, 1966a), если его линейные размеры являются большими по сравнению с длинами волн заполненных мод. Мы коротко обсудим эту проблему в разд. 12.11. Когда в гл. 14 мы займемся детальным рассмотрением проблемы фотоэлектрического счета фотонов, мы обнаружим, что фотоэлектрические щелчки также подчиняются распределению вероятности, очень похожему на (12.10.8). Таким образом, мы имеем дело с соотношениями довольно общей применимости. На практике с субпауссоновской статистикой исследователи впервые встретились в экспериментах по фотоэлектрическому счету для флуоресценции от отдельного атома (Short and Mandel, 1983).

12.10.4. Производящие функции для числа фотонов при нормальном и антинормальном порядке

Те же самые уравнения, связывающие моменты $\hat{n}$ и U, можно получить, вычисляя характеристическую функцию $C(\xi)$ от $P(m)$. Тогда из (12.10.8) имеем

$$C(\xi) \equiv \langle e^{i\xi\hat{n}}\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} P(m)\,\mathrm{e}^{i\xi m} = \langle e^{U(e^{i\xi}-1)}\rangle_\phi = \langle{:}\,\mathrm{e}^{\hat{n}(e^{i\xi}-1)}\,{:}\rangle. \tag{12.10.17}$$

Разлагая обе части этого уравнения в степенной ряд по ξ и сравнивая коэффициенты, установим связь между моментами $\hat{n}$ и U. Ясно, что результат должен получится тот же, что и прежде, поскольку (12.10.17) идентично (12.10.12), если сделать замену $\mathrm{e}^{i\xi} - 1 \to -\xi$. Оба эти уравнения также можно рассматривать в качестве формул упорядочения, поскольку они предоставляют возможность связать нормально упорядоченные произведения $\hat{n}$ с прямыми произведениями, как и в (12.10.13).

Иногда полезно иметь под рукой соответствующее соотношение для антинормально упорядоченных произведений оператора числа частиц $\hat{n}$. Хотя вопрос упорядочения операторов в более общем виде будет рассмотрен в гл. 14, легко получить требуемое соотношение, исходя из определения антинормально упорядоченного произведения порядка r для $\hat{n}$,

$$"\hat{n}^r" \equiv \sum_{\lambda_1}\cdots\sum_{\lambda_r} \hat{a}_{\lambda_1}\ldots\hat{a}_{\lambda_r}\hat{a}^\dagger_{\lambda_r}\ldots\hat{a}^\dagger_{\lambda_1}, \tag{12.10.18}$$

где $" "$, как и прежде, означает антинормальное упорядочение, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — обозначения мод, соответствующих $\mathbf{k}_1, s_1$, $\mathbf{k}_2, s_2$, $\ldots$ $\mathbf{k}_r, s_r$. Далее из коммутационных соотношений (10.3.9) следует, что

$$"\hat{n}" \equiv \sum_\lambda \hat{a}_\lambda\hat{a}^\dagger_\lambda = \sum_\lambda(\hat{a}^\dagger_\lambda\hat{a}_\lambda + 1) = \hat{n} + \mu, \tag{12.10.19}$$

где μ представляет общее число мод, вносящих вклад в сумму. Как и при нашем предыдущем обсуждении антинормально упорядоченных корреляционных функций в разд. 12.9, мы должны считать это число, в силу тех же причин, конечным и приготовиться встретить его в уравнениях в явном виде. С помощью (12.10.19), выражение (12.10.18) можно записать следующим образом:

$$:\hat{n}^r: \equiv \sum_{\lambda_1} \cdots \sum_{\lambda_{r-1}} \hat{a}_{\lambda_1} \ldots \hat{a}_{\lambda_{r-1}} (\hat{n} + \mu) \hat{a}^\dagger_{\lambda_{r-1}} \ldots \hat{a}^\dagger_{\lambda_1}. \tag{12.10.20}$$

Теперь воспользуемся коммутационным соотношением (10.4.2) в виде

$$[\hat{a}^\dagger_\lambda, \hat{n}] = -\hat{a}^\dagger_\lambda \tag{12.10.21}$$

для последовательного перемещения оператора $\hat{n}$ в (12.10.20) вправо. В этом случае получаем формулу

$$:\hat{n}^r: \equiv \sum_{\lambda_1} \cdots \sum_{\lambda_{r-1}} \hat{a}_{\lambda_1} \ldots \hat{a}_{\lambda_{r-1}} \hat{a}^\dagger_{\lambda_{r-1}} \ldots \hat{a}^\dagger_{\lambda_1} (\hat{n} + \mu + r - 1) = :\hat{n}^{r-1}:(\hat{n} + \mu + r - 1), \tag{12.10.22}$$

которая является рекуррентным соотношением. Многократное применение указанного соотношения приводит к результату

$$:\hat{n}^r: - (\hat{n} + \mu)(\hat{n} + \mu + 1) \ldots (\hat{n} + \mu + r - 1) \tag{12.10.23а}$$

или, после нахождения ожидаемых значений обеих частей,

$$\langle :\hat{n}^r: \rangle = \langle (\hat{n} + \mu)(\hat{n} + \mu + 1) \ldots (\hat{n} + \mu + r - 1) \rangle. \tag{12.10.23б}$$

Таким образом, мы пришли к разложению антинормально упорядоченных моментов оператора числа частиц. Конечные формулы (12.10.23) следует сравнить с (12.10.13) для нормально упорядоченных моментов. Мы видим, что структура выражений связана с лежащей в их основе физической картиной, когда поле может быть измерено либо с помощью фотодетекторов, либо с помощью квантовых счетчиков. Напомним, что нормальная упорядоченность соответствует последовательному поглощению фотонов, тогда как антинормальная упорядоченность соответствует последовательному испусканию фотонов. Также интересно отметить, что, в соответствии с (12.10.23б), $\langle :\hat{n}^r: \rangle$ не может обратиться в нуль для любого состояния поля, тогда как $\langle : \hat{n}^r : \rangle$ обращается в нуль всегда, когда поле содержит менее чем r фотонов.

Из (12.10.23б) непосредственно выводится характеристическая производящая функция для антинормально упорядоченных моментов

$$\langle :e^{i\xi\hat{n}}: \rangle = \left\langle \sum_r \frac{(i\xi)^r}{r!} :\hat{n}^r: \right\rangle = \left\langle \sum_r \frac{(i\xi)^r}{r!} (\hat{n} + \mu)(\hat{n} + \mu + 1) \ldots (\hat{n} + \mu + r - 1) \right\rangle =$$

$$= \langle (1 - i\xi)^{-(\hat{n}+\mu)} \rangle, \tag{12.10.24}$$

которую можно сравнить с (12.10.12). Осуществляя замену $(1 - i\xi) = e^{-ix}$ в (12.10.24) и $1 - \xi = e^{ix}$ в (12.10.12), можно объединить оба результата и записать выражение

$$\langle : \exp[(e^{ix} - 1)\hat{n}] : \rangle = \langle e^{ix\hat{n}} \rangle = :\exp[(1 - e^{-ix})\hat{n}]: e^{-i\mu x}, \tag{12.10.25}$$

которое непосредственно связано с нормально и антинормально упорядоченными моментами.

12.11. Проблема локализации фотонов[1]

До настоящего момента мы имели дело с оператором числа частиц $\hat{n}$, который относится к общему числу фотонов во всем пространстве. Таким образом, это число предполагается недоступным для непосредственного измерения. Для установления связи с экспериментом, по-видимому, наиболее подходящим

[1] Рассмотрение в этой разделе основано на работе Манделя (Mandel, 1966a)

является введение такого описания, в котором фотоны были бы локализованы. Однако, стремясь локализовать фотоны в пространстве, мы сталкиваемся с несколькими фундаментальными трудностями. Так, для фотонов не существует оператора координаты (Newton and Wigner, 1949), а максимально точное положение определяется формой волнового фронта (Acharya and Sudarshan, 1960). Хотя в разд. 12.3 мы уже познакомились с оператором интенсивности $\hat{I}(\mathbf{r},t)=\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)$, который имеет размерность числа фотонов в единице объема, попытки рассматривать данный оператор в строгом смысле как оператор, который локализует фотоны в пространственно-временно́й точке $\mathbf{r},t$, приводят к противоречиям. Например, в общем случае, интенсивности $\hat{I}(\mathbf{r}_1,t_1)$ и $\hat{I}(\mathbf{r}_2,t_2)$, связанные с двумя различными пространственно-временны́ми точками $\mathbf{r}_1,t_1$ и $\mathbf{r}_2,t_2$, не коммутируют. Тем не менее, представляется заманчивым интерпретировать регистрируемый фотодетектором электронный сигнал, в определенном смысле, как сигнал от локализованного фотона. В этом разделе мы посмотрим более внимательно на предел, до которого такая интерпретация, по крайней мере, приблизительно, может быть оправданной.

Как было показано в разд. 12.3, щелчки, регистрируемые детектором, поверхность которого нормальна к падающему полю и подвергается его воздействию в течение некоторого конечного промежутка времени Δt, наиболее естественно интерпретировать как измерение числа фотонов в объеме цилиндра, основанием которого служит чувствительная поверхность детектора, а высота равна $c\Delta t$ (см. рис. 12.2). Далее будет показано, что интеграл от интенсивности $\hat{I}(\mathbf{r},t)$ по такому объему можно трактовать, по крайней мере приблизительно, как оператор числа фотонов, определенный в конфигурационном пространстве, при условии, что все линейные размеры данного объема велики по сравнению с длинами волн присутствующих мод[1].

12.11.1. Оператор числа фотонов, определяемый в конфигурационном пространстве

Мы начнем с введения оператора поглощения фотонов $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)$, который, как и в разд. 12.3, определяется разложением

$$\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{[\mathbf{k},s]}\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{12.11.1}$$

за исключением того, что представляется удобным явно ограничить сумму конечным набором мод $[\mathbf{k},s]$, на которые реагирует детектор. Поскольку сейчас мы рассматриваем оптический детектор, разумно предположить, что он реагирует лишь на оптические частоты из некоторого диапазона и на определенные направления поляризации. Другие частоты в данном анализе не играют никакой роли, и можно считать соответствующие им моды незаполненными. Если мы возьмем оператор $\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t)$, сопряженный оператору $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)$, который определяется выражением (12.11.1), то интенсивность, определяемая скалярным произведением $\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)$, будет иметь размерность числа фотонов в единице объема. Определим теперь оператор числа фотонов $\hat{n}(\mathscr{V},t)$ в конфигурационном пространстве через соотношение

$$\hat{n}(\mathscr{V},t)=\int_{\mathscr{V}}\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)\,d^3r, \tag{12.11.2}$$

где интеграл берется по всему конечному объему $\mathscr{V}$ типа прямоугольного параллелепипеда со сторонами l_1, l_2, l_3. Легко показать, что $\hat{n}(\mathscr{V},t)$ коммутирует с оператором полного числа частиц $\hat{n}$, в котором соответствующий интеграл берется по всему пространству. Чтобы убедится в этом, мы разложим под знаком интеграла в (12.11.2) $\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)$ и, в силу (10.4.1) и (10.4.2), заметим, что

$$[\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'s'}\hat{a}_{\mathbf{k}''s''},\hat{n}]=0. \tag{12.11.3}$$

В дальнейшем мы будем изучать некоторые свойства $\hat{n}(\mathscr{V},t)$ в рамках определенных приближений, и поэтому, большинство соотношений, получаемых ниже, будут выполняются лишь приблизительно.

[1] Немного отличный оператор числа частиц, определенный в конфигурационном пространстве, но имеющий некоторые свойства, общие с $\hat{n}(\mathscr{V},t)$ (12.11.2), был введен в работе (Cook, 1982, см. также Cook, 1984). Проблема локализации фотонов была рассмотрена более строго в работах (Jauch and Piron, 1967; Amrein, 1969; Pike and Sarkar, 1986).

12.11.2. Коммутационные соотношения

Вычисление коммутатора $\hat{n}(\mathscr{V}_1,t)$ и $\hat{n}(\mathscr{V}_2,t)$, где $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$ обозначают две различные области пространства, полезно начать с изучения коммутатора $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{n}(\mathscr{V},t)$ с одинаковыми временны́ми аргументами. Здесь мы ограничимся для простоты одинаковыми временами. Более общий коммутатор вычисляется в работе (Mandel, 1966a). Из (12.11.1) и (12.11.2) имеем

$$[\hat{V}_i(\mathbf{r},t),\hat{n}(\mathscr{V},t)]=\int_{\mathscr{V}}[\hat{V}_i(\mathbf{r},t),\hat{V}_j^\dagger(\mathbf{r}',t)\hat{V}_j(\mathbf{r}',t)]\,d^3r'=\int_{\mathscr{V}}[\hat{V}_i(\mathbf{r},t),\hat{V}_j^\dagger(\mathbf{r}',t)]\hat{V}_j(\mathbf{r}',t)\,d^3r'. \tag{12.11.4}$$

Воспользуемся коммутационным соотношением (11.12.6) в виде

$$[\hat{V}_i(\mathbf{r},t),\hat{V}_j^\dagger(\mathbf{r}',t)]=\frac{1}{L^3}\sum_{[\mathbf{k}]}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}, \tag{12.11.5}$$

с тем, чтобы преобразовать интеграл в (12.11.4). Тогда получаем соотношение

$$\begin{aligned}[\hat{V}_i(\mathbf{r},t),\hat{n}(\mathscr{V},t)]&=\frac{1}{L^{9/2}}\sum_{[\mathbf{k}]}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\sum_{[\mathbf{k}',s']}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}(\varepsilon_{\mathbf{k}'s'})_j\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega't)}\int_{\mathscr{V}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}'}\,d^3r'=\\
&=\frac{1}{L^3}\sum_{[\mathbf{k}]}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{[\mathbf{k}',s']}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}(\varepsilon_{\mathbf{k}'s'})_j\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega't)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}_0}\prod_{m=1}^{3}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(k'_m-k_m)l_m}{\frac{1}{2}(k'_m-k_m)}\right]=\\
&=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{[\mathbf{k}',s']}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}(\varepsilon_{\mathbf{k}'s'})_j\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega't)}\frac{1}{L^3}\sum_{[\mathbf{k}]}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}\prod_{m=1}^{3}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(k'_m-k_m)l_m}{\frac{1}{2}(k'_m-k_m)}\right],\end{aligned} \tag{12.11.6}$$

где $\mathbf{r}_0$ определяет центр объема $\mathscr{V}$. Рассмотрим теперь суммирование по $[\mathbf{k}]$. Наличие произведений в (12.11.6) означает, что основной вклад в сумму вносят те значения $\mathbf{k}$, для которых

$$|k_1-k'_1|\lesssim 1/l_1,\quad |k_2-k'_2|\lesssim 1/l_2,\quad |k_3-k'_3|\lesssim 1/l_3. \tag{12.11.7}$$

Как $\mathbf{k}$, так и $\mathbf{k}'$ являются волновыми векторами, соответствующими оптическим или еще более высоким частотам. Если все длины l_1,l_2,l_3, определяющие объем интегрирования, больше, чем оптические длины волн, то (12.11.7) в хорошем приближении означает равенство между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$. В таком случае основной вклад в сумму по $[\mathbf{k}]$ в (12.11.6) будут вносить значения $\mathbf{k}$, близкие к $\mathbf{k}'$. Если мы положим $\mathbf{k}=\mathbf{k}'$ в члене k_ik_j/k^2, который медленно меняется при суммировании по $\mathbf{k}$, то увидим, что этот член вносит небольшой вклад, так как $k'_j(\varepsilon_{\mathbf{k}'s'})_j=0$. Следовательно, выражение можно упростить и представить в виде

$$[\hat{V}_i(\mathbf{r},t),\hat{n}(\mathscr{V},t)]\approx\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{[\mathbf{k}',s']}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}(\varepsilon_{\mathbf{k}'s'})_i\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega't)}\frac{1}{L^3}\sum_{[\mathbf{k}]}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}\prod_{m=1}^{3}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(k_m-k'_m)l_m}{\frac{1}{2}(k_m-k'_m)}\right]. \tag{12.11.8}$$

На этом этапе, как обычно, удобно заменить суммирование по $[\mathbf{k}]$ интегралом

$$\frac{1}{L^3}\sum_{[\mathbf{k}]}\to\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{[\mathbf{k}]}d^3k$$

и ввести новую переменную интегрирования $\mathbf{k}''=\mathbf{k}-\mathbf{k}'$. Из-за наличия в (12.11.8) множителя, имеющего вид произведения, который жестко ограничивает вклады в интеграл малыми значениями $\mathbf{k}''$, мы можем фактически положить, что пределы интегрирования по $\mathbf{k}''$ являются бесконечными. Тогда имеем

$$[\hat{V}_i(\mathbf{r},t),\hat{n}(\mathscr{V},t)]\approx\hat{V}_i(\mathbf{r},t)\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}''\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}\prod_{m=1}^{3}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}k''_ml_m}{\frac{1}{2}k''_m}\right]d^3k''. \tag{12.11.9}$$

Этот интеграл является трехмерной версией хорошо известного интеграла Дирихле (Bracewell, 1979, с. 99, 129), имеющего разрыв

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\frac{\sin\frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k}\,dk = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leqslant \frac{1}{2}l, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{12.11.10}$$

Таким образом, (12.11.9) можно записать в виде

$$[\hat{V}_i(\mathbf{r},t),\hat{n}(\mathscr{V},t)] \approx \begin{cases} \hat{V}_i(\mathbf{r},t), & \text{если } \mathbf{r}\in\mathscr{V}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{12.11.11}$$

где $\mathbf{r}\in\mathscr{V}$ означает, что $\mathbf{r}$ лежит внутри объема $\mathscr{V}$.

Этот результат совершенно аналогичен соответствующему коммутационному соотношению для $\mathbf{k},s$-пространства

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \sum_{[\mathbf{k},s]}\hat{n}_{\mathbf{k}s}\right] = \begin{cases} \hat{a}_{\mathbf{k}s}, & \text{если } \mathbf{k},s\in[\mathbf{k},s], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{12.11.12}$$

и предполагает, что $\hat{n}(\mathscr{V},t)$ играет роль оператора числа частиц, относящихся к объему $\mathscr{V}$ в момент времени t. Однако, не следует забывать, что при выводе (12.11.11) мы использовали приближения. В частности, различие между точками внутри и снаружи объема $\mathscr{V}$ становится слабым для точек, лежащих близко к границе $\mathscr{V}$, на расстояниях порядка оптической длины волны[1]. Осуществляя эрмитово сопряжение от (12.11.11), мы получаем следующий результат.

$$[\hat{V}_i(\mathbf{r},t),\hat{n}(\mathscr{V},t)] \approx \begin{cases} -\hat{V}_i^\dagger, & \text{если } \mathbf{r}\in\mathscr{V}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{12.11.13}$$

С помощью этих результатов можно легко вычислить коммутатор от двух операторов в конфигурационном пространстве для числа частиц, связанных с двумя различными объемами $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$. Мы находим, что

$$\begin{aligned}[\hat{n}(\mathscr{V},t),\hat{n}(\mathscr{V}',t)] &\approx \int_{\mathscr{V}} [\hat{V}_i^\dagger(\mathbf{r},t)\hat{V}_i(\mathbf{r},t)\hat{n}(\mathscr{V}',t) - \hat{n}(\mathscr{V}',t)\hat{V}_i^\dagger(\mathbf{r},t)\hat{V}_i(\mathbf{r},t)]\,d^3r = \\ &= \int_{\mathscr{V}} \{\hat{V}_i^\dagger(\mathbf{r},t)[\hat{n}(\mathscr{V}',t)+U(\mathbf{r},\mathscr{V}')]\hat{V}_i(\mathbf{r},t) - \hat{V}_i^\dagger(\mathbf{r},t)[\hat{n}(\mathscr{V}',t)+U(\mathbf{r},\mathscr{V}')]\hat{V}_i(\mathbf{r},t)\}\,d^3r = 0, \end{aligned} \tag{12.11.14}$$

где $U(\mathbf{r},\mathscr{V})$ функция, которая равна единице или нулю, в зависимости от того, лежит ли $\mathbf{r}$ внутри или снаружи $\mathscr{V}$. Таким образом, коммутатор двух операторов в конфигурационном пространстве для числа фотонов обращается в нуль, по крайней мере, приблизительно, в полной аналогии с соответствующим результатом для $\mathbf{k},s$-пространства, где мы имеем

$$\left[\sum_{[\mathbf{k},s]}\hat{n}_{\mathbf{k}s}, \sum_{[\mathbf{k},s]'}\hat{n}_{\mathbf{k}s}\right] = 0, \tag{12.11.15}$$

безотносительно к тому, перекрываются ли эти два набора мод $[\mathbf{k},s]$ и $[\mathbf{k},s]'$ или нет.

[1] Коммутационное соотношение, соответствующее выражению (12.11.11) для неравных времен, более сложное. Когда две пространственно-временные области $\mathbf{r},t$ и $\mathscr{V},t$ являются непересекающимися, коммутатор обращается в нуль, а когда они заметно перекрываются, коммутатор равен $\hat{V}_i(\mathbf{r},t)$. Но для промежуточных областей коммутатор не имеет простой интерпретации.

12.11.3. Собственные состояния $\hat{n}(\mathscr{V}, t)$

Рассмотрим теперь собственные состояния оператора $\hat{n}(\mathscr{V}, t)$, которые, в определенном смысле, соответствуют локализованным возбуждениям электромагнитного поля. Рассмотрим состояние $\hat{n}(\mathscr{V}, t)|\text{vac}\rangle$ возникающее, когда оператор рождения $\hat{V}_i^\dagger(\mathbf{r}, t)$ действует на вакуум. С помощью (12.11.13) имеем

$$\hat{n}(\mathscr{V}, t)\hat{V}_i^\dagger(\mathbf{r}, t)|\text{vac}\rangle = \hat{V}_i^\dagger(\mathbf{r}, t)[\hat{n}(\mathscr{V}, t) + U(\mathbf{r}, \mathscr{V})]|\text{vac}\rangle = U(\mathbf{r}, \mathscr{V})\hat{V}_i^\dagger(\mathbf{r}, t)|\text{vac}\rangle, \tag{12.11.16}$$

поскольку $\hat{n}(\mathscr{V}, t)|\text{vac}\rangle = 0$. Это уравнение показывает, что $\hat{V}_i^\dagger(\mathbf{r}, t)|\text{vac}\rangle$ является собственным состоянием $\hat{n}(\mathscr{V}, t)$, принадлежащим собственному значению $U(\mathbf{r}, \mathscr{V})$, которое равно единице, если $\mathbf{r}$ лежит внутри объема $\mathscr{V}$, и нулю в обратном случае.

Аналогичным образом можно показать, что

$$\hat{n}(\mathscr{V}, t)\hat{V}_{i_1}^\dagger(\mathbf{r}_1, t)\ldots\hat{V}_{i_N}^\dagger(\mathbf{r}_N, t)|\text{vac}\rangle = [U(\mathbf{r}_1, \mathscr{V}) + \ldots + U(\mathbf{r}_N, \mathscr{V})]\hat{V}_{i_1}^\dagger(\mathbf{r}_1, t)\ldots\hat{V}_{i_N}^\dagger(\mathbf{r}_N, t)|\text{vac}\rangle, \tag{12.11.17}$$

так что $\hat{V}_{i_1}^\dagger(\mathbf{r}_1, t)\ldots\hat{V}_{i_N}^\dagger(\mathbf{r}_N, t)|\text{vac}\rangle$ также есть собственное состояние $\hat{n}(\mathscr{V}, t)$ с собственным значением $U(\mathbf{r}_1, \mathscr{V}) + \ldots + U(\mathbf{r}_N, \mathscr{V})$, равным числу точек $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N$, которые лежат внутри объема $\mathscr{V}$. Следовательно, спектр $\hat{n}(\mathscr{V}, t)$, подобно спектру $\hat{n}$, является набором чисел $0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, представляется возможным интерпретировать собственное состояние в (12.11.17), как состояние, при котором фотоны приблизительно локализованы в $(\mathbf{r}_1, t), \ldots, (\mathbf{r}_N, t)$, при условии, что мы не стремимся определить местоположения с точностью, превышающей несколько оптических длин волн.

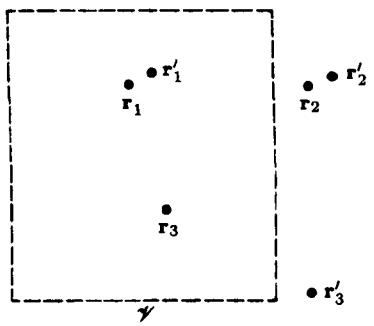


Рис. 12.6. Иллюстрация того, что объем $\mathscr{V}$ может быть выбран так, что он содержит два возбуждения, связанные с состоянием $|\psi\rangle$, и одно возбуждение, связанное с состоянием $|\psi'\rangle$

Хотя состояния типа $\hat{V}_{i_1}^\dagger(\mathbf{r}_1, t)\ldots\hat{V}_{i_N}^\dagger(\mathbf{r}_N, t)|\text{vac}\rangle$ не нормированы на единицу и не являются строго ортогональными, тем не менее, они формируют полный набор. Два различных состояния

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\equiv \hat{V}_{i_1}^\dagger(\mathbf{r}_1, t)\ldots\hat{V}_{i_N}^\dagger(\mathbf{r}_N, t)|\text{vac}\rangle, \\ |\psi'\rangle &\equiv \hat{V}_{j_1}^\dagger(\mathbf{r}'_1, t)\ldots\hat{V}_{j_M}^\dagger(\mathbf{r}'_M, t)|\text{vac}\rangle \end{aligned} \tag{12.11.18}$$

могут являться приблизительно ортогональными даже если $N = M$, при условии, что $\mathbf{r}_p$ не находится близко к $\mathbf{r}'_p$ для любого целого p[1]. Тогда мы можем построить параллелепипед объема $\mathscr{V}$, с линейными размерами много большими длины волны, который выбирается таким образом, чтобы число точек внутри объема $\mathscr{V}$, связанных с состоянием $|\psi\rangle$, было отлично от числа точек, связанных с состоянием $|\psi'\rangle$. Эта ситуация пояснена на рис. 12.6 для двух состояний $|\psi\rangle$ и $|\psi'\rangle$ с $N = 3$ и $M = 3$, т.е. имеющих по три фотона каждый, для которых $\mathbf{r}_3$ и $\mathbf{r}'_3$ заметно далеки друг от друга. Объем $\mathscr{V}$, показанный прерывистой линией, содержит две точки, связанные с состоянием $|\psi\rangle$, и только одну точку, связанную с состоянием $|\psi'\rangle$. Из этого можно заключить, что состояние $|\psi\rangle$ принадлежит собственному значению 2 оператора $\hat{n}(\mathscr{V}, t)$, в то время как состояние $|\psi'\rangle$ принадлежит собственному значению 1 того же самого оператора. Так как и $|\psi\rangle$, и $|\psi'\rangle$ — это собственные состояния одного и того же эрмитового оператора, но принадлежащие разным собственным значениям, они должны быть(по крайней мере, приблизительно) ортогональными.

Для того, чтобы показать, что состояния типа $|\psi\rangle$, приведенные выше, образуют полный набор, отметим, что, в соответствии с обратным фурье-преобразованием разложения для $\hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}, t)$ [сопряженное выражению (12.11.1)], мы имеем

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger = \frac{1}{L^{3/2}}\int_{L^3}\hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}, t)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,d^3r. \tag{12.11.19}$$

Теперь учтем, что любое фоковское состояние $|\{n\}\rangle$ с заполненными модами, принадлежащими набору $[\mathbf{k}, s]$, можно выразить в виде

$$|\{n\}\rangle = \prod_{[\mathbf{k},s]}\left[\frac{(\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}s}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k}s}!}}|0_{\mathbf{k}s}\rangle\right]. \tag{12.11.20}$$

[1]Здесь важно иметь в виду, что положения $\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_N$ в определении состояния предполагаются заданными с точностью, не превышающей несколько длин волн.

Подставляя $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}$ из (12.11.19) в это выражение, сразу видим, что мы получили разложение для фоковского состояния $|\{n\}\rangle$ по состояниям типа $|\psi\rangle$, задаваемыми выражением (12.11.18). Поскольку фоковские состояния формируют полный набор, то это также справедливо и для собственных состояний $\hat{n}(\mathscr{V},t)$.

12.11.4. Статистика фотона в конечном объеме

Поскольку спектр оператора $\hat{n}(\mathscr{V},t)$ приблизительно представляет собой набор целых чисел $0,1,2,\ldots$, и $\hat{n}(\mathscr{V},t)$, во многих важных отношениях, ведет себя как оператор числа частиц, мы можем надеяться, что нам удастся найти соотношения для нормально упорядоченных произведений $\hat{n}(\mathscr{V},t)$ и для распределения собственных значений $\hat{n}(\mathscr{V},t)$, которые были бы аналогичны соответствующим соотношениям для оператора числа частиц $\hat{n}$. Это действительно так. Можно показать (Mandel, 1966a), что

$$\langle : [\hat{n}(\mathscr{V},t)]^N : \rangle = \langle \hat{n}(\mathscr{V},t)[\hat{n}(\mathscr{V},t)-1]\ldots[\hat{n}(\mathscr{V},t)-N+1]\rangle, \tag{12.11.21}$$

в полной аналогии с (12.10.13). С другой стороны, если объемы $\mathscr{V}_1,\mathscr{V}_2,\ldots\mathscr{V}_N$ не пересекающиеся, то мы находим, что

$$\langle : \hat{n}(\mathscr{V}_1,t)\hat{n}(\mathscr{V}_2,t)\ldots\hat{n}(\mathscr{V}_N,t) : \rangle = \langle \hat{n}(\mathscr{V}_1,t)\hat{n}(\mathscr{V}_2,t)\ldots\hat{n}(\mathscr{V}_N,t)\rangle, \tag{12.11.22}$$

принимая во внимание (12.11.11). Распределение вероятности $p(n)$ собственных значений n оператора $\hat{n}(\mathscr{V},t)$ можно выразить в виде

$$p(n) = \left\langle \frac{\mathcal{N}^n \mathrm{e}^{-\mathcal{N}}}{n!} \right\rangle_\phi, \tag{12.11.23}$$

где

$$\mathcal{N} \equiv \int_{\mathscr{V}} \mathbf{V}^*(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{V}(\mathbf{r},t)\,d^3r, \tag{12.11.24}$$

а $\mathbf{V}(\mathbf{r},\mathbf{t})$ и $\mathbf{V}^\dagger(\mathbf{r},\mathbf{t})$ — правое и левое собственные значения операторов $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r},t)$, соответственно. И вновь это соотношение напоминает (12.10.8) для распределения собственных значений оператора общего числа частиц $\hat{n}$. Генератор моментов $\hat{n}(\mathscr{V},t)$ имеет вид

$$\langle \exp[ix\hat{n}(\mathscr{V},t)]\rangle = \langle \exp[\mathcal{N}(\mathrm{e}^{ix}-1)]\rangle_\phi, \tag{12.11.25}$$

аналогично (12.10.17), и т.д.

Таким образом, мы видим, что если не претендовать на слишком точную локализацию возбуждения, то можно ввести состояния локализованных возбуждений, т.е. фотонов, и определить оператор в конфигурационном пространстве для числа частиц, который измеряет число фотонов в конечном объеме. Однако важно помнить, что эта процедура имеет смысл лишь потому, что длины волны оптических фотонов заметно малы в лабораторном масштабе.

12.11.5. Полихроматические фотоны и нелокальность

Мы видели, что ожидаемое значение интенсивности света $\hat{I}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)$ при $\hat{\mathbf{V}}$, задаваемом выражением (12.11.1), тесно связано с ожидаемым откликом фотодетектора в точке $\mathbf{r}$, в момент времени t. Однако такая тесная взаимосвязь справедлива только для квазимонохроматического поля. Как только поле становится полихроматическим, наличие или отсутствие множителя $l(k)$ [см. (12.2.1) и (12.2.2)] в модовом разложении поля имеет нетривиальные следствия, приводящие к тому, что, например, положительно-частотная часть электрического поля больше не является локально связанной с оператором детектирования $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)$. Мы проиллюстрируем этот вопрос, рассматривая простое однофотонное состояние.

Однофотонное состояние $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}|\mathrm{vac}\rangle$, получаемое, когда оператор рождения фотона $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}$ действует на вакуумное состояние $|\mathrm{vac}\rangle$, соответствует фотону, связанному с плоской волной и поэтому распределенному по всему пространству. Однако линейная суперпозиция таких состояний вида

$$|\phi\rangle = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\phi(\mathbf{k},s)\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}|\mathrm{vac}\rangle, \tag{12.11.26}$$

в которой $\phi(\mathbf{k}, s)$ представляет любую весовую функцию, удовлетворяющую условию

$$\langle\phi|\phi\rangle = \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}|\phi(\mathbf{k},s)|^2 \to \sum_s \frac{1}{(2\pi)^3}\int|\phi(\mathbf{k},s)|^2\,d^3k = 1, \tag{12.11.27}$$

соответствует фотону, который, по крайней мере, частично, локализован в пространстве. В этом случае векторная функция

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}\phi(\mathbf{k},s)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \to \sum_s \frac{1}{(2\pi)^3}\int\phi(\mathbf{k},s)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,d^3k \tag{12.11.28}$$

представляет соответствующую волновую функцию положения фотона в пространстве в состоянии $|\phi\rangle$. Однако, в силу линейной суперпозиции в (12.11.26), этот фотон не имеет ни определенного момента, ни определенной энергии.

Для того, чтобы показать, что $|\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t)|^2$ задает фотонную плотность вероятности, допустим, что локальный оператор детектирования

$$\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

действует на состояние $|\psi\rangle$. Тогда с помощью коммутационных соотношений между $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}$ и $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}$ мы получаем выражение

$$\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)|\phi\rangle = \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}\sum_{\mathbf{k}',s'}\phi(\mathbf{k}',s')\hat{a}_{\mathbf{k},s}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}',s'}|\mathrm{vac}\rangle\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} =$$

$$= \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}\phi(\mathbf{k},s)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}|\mathrm{vac}\rangle = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t)|\mathrm{vac}\rangle, \tag{12.11.29}$$

из которого сразу видно, что $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{t})$ является проекцией состояния $|\phi\rangle$ на локализованное однофотонное состояние $\hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r},\mathbf{t})|\mathrm{vac}\rangle$. Теперь учтем, что вероятность нахождения фотона в состоянии $|\phi\rangle$ в объеме $\mathscr{V}$ в момент времени t задается ожиданием оператора (в конфигурационном пространстве) числа частиц $\hat{n}(\mathscr{V},t)$. Тогда из (12.11.2) и (12.11.29) мы имеем

$$\langle\phi|\hat{n}(\mathscr{V},t)|\phi\rangle = \int_{\mathscr{V}}\langle\phi|\hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)|\phi\rangle\,d^3r = \int_{\mathscr{V}}|\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t)|\,d^3r, \tag{12.11.30}$$

что является обычным выражением для вероятности обнаружения частицы с волновой функцией $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t)$ внутри объема $\mathscr{V}$. В этом случае интеграл имеет смысл лишь тогда, когда линейные размеры $\mathscr{V}$ больше, чем оптические длины волн.

Однако несложно видеть, что ни энергия фотона, ни вероятность фотоэлектрического детектирования, не локализованы в одном и том же месте. Среднее значение энергии фотона равно

$$\langle\phi|\hat{H}|\phi\rangle = \sum_{\mathbf{k},s}\hbar\omega\langle\phi|\hat{n}_{\mathbf{k}s}|\phi\rangle$$

и с помощью (12.11.26) оно принимает вид

$$\langle\phi|\hat{H}|\phi\rangle = \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}\hbar\omega|\phi(\mathbf{k},s)|^2 \to \sum_s \frac{1}{(2\pi)^3}\int\hbar\omega|\phi(\mathbf{k},s)|^2\,d^3k. \tag{12.11.31}$$

Вводя функцию

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}(\hbar\omega)^{1/2}\phi(\mathbf{k},s)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{12.11.32}$$

которую можно было бы назвать волновой функцией энергии, чтобы различить ее с $\Phi(\mathbf{r},t)$, и которая отличается от $\Phi(\mathbf{r},t)$ лишь тем, что она имеет в разложении множитель $(\hbar\omega)^{1/2}$, мы легко находим, что

$$\langle\phi|\hat{H}|\phi\rangle = \int |\Psi(\mathbf{r},t)|^2\, d^3r. \tag{12.11.33}$$

Таким образом, $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2$ играет роль плотности энергии. Но эта плотность энергии не связана локально с фотонной плотностью $|\Phi(\mathbf{r},t)|^2$. Действительно, из фурье-разложений для $\Phi(\mathbf{r},t)$ и $\Psi(\mathbf{r},t)$, с помощью теоремы о свертке, мы находим, что они связаны через пространственную свертку

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Phi(\mathbf{r}',t)\, d^3r', \tag{12.11.34}$$

где функция разброса $G(r)$ представляет собой трехмерный фурье-образ от $(\hbar\omega)^{1/2}$, т.е.

$$G(\mathbf{r}) = \frac{(\hbar c)^{1/2}}{(2\pi)^3}\int k^{1/2}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d^3k. \tag{12.11.35}$$

Из-за разброса, связанного с $G(r)$, $\Psi(\mathbf{r},t)$ может быть отлична от нуля в точках, где $\Phi(\mathbf{r},t)$ равна нулю.

Строго говоря, интеграл в (12.11.35) расходится, но его можно регуляризовать, если ввести экспоненциальный множитель, определяя функцию (Amrein, 1969)

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(\mathbf{r}) &= \frac{(\hbar c)^{1/2}}{(2\pi)^3}\int k^{1/2}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, \mathrm{e}^{-\varepsilon k}\, d^3k = \frac{(\hbar c)^{1/2}}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\, k^{5/2}\, \mathrm{e}^{-\varepsilon k}\int_0^\pi d\theta\, \mathrm{e}^{ikr\cos\theta}\sin\theta\int_0^{2\pi} d\phi = \\ &= \frac{(\hbar c)^{1/2}}{2\pi^2 r}\int_0^\infty dk\, k^{5/2}\, \mathrm{e}^{-\varepsilon k}\sin kr\, dk = \frac{3(\hbar c)^{1/2}}{8\pi^{3/2}}\frac{1}{r(r^2+\varepsilon^2)^{5/4}}\sin\left(\tfrac{5}{2}\operatorname{arctg} r/\varepsilon\right). \end{aligned} \tag{12.11.36}$$

Когда $\varepsilon \to 0$, или в более общем случае, всякий раз, когда $\varepsilon \ll r$, она сводится к

$$G(\mathbf{r}) = \pm\frac{3(\hbar c)^{1/2}}{8\sqrt{2}\pi^{3/2}r^{7/2}}. \tag{12.11.37}$$

Из (12.11.34) и (12.11.37) следует, что даже когда волновая функция местоположения $|\Phi(\mathbf{r},t)|^2$ строго сконцентрирована вблизи начала координат, волновая функция энергии асимптотически распределена по всему пространству как $r^{-7/2}$. Иначе можно сказать, что когда распределение вероятности фотона строго локализовано в начале координат, распределение энергии простирается на большие расстояния и спадает как r^{-7} (см. также Hegerfeldt, 1974; Hegerfeldt and Ruijsenaar, 1980).

Обратимся теперь к вопросу о детектировании локализованного фотона с помощью фотоэлектрического детектора. Если электроны детектора взаимодействуют со светом через электрическое поле $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, то можно ожидать, что вероятность фотоэлектрического детектирования будет пропорциональна среднему интенсивности электрического поля $\hat{\mathbf{I}}_j(\mathbf{r},t) \equiv \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ (ср. разд. 12.2), где

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s} i\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2}\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}. \tag{12.11.38}$$

Но в действительности, как мы покажем в гл. 14, ситуация обычно более сложная. Тем не менее, для простоты здесь мы предположим, что вероятность детектирования пропорциональна $\langle\phi|\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)|\phi\rangle$. Теперь из (12.11.26) следует, что

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)|\phi\rangle &= \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}\sum_{\mathbf{k}',s'} i\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2}\phi(\mathbf{k}',s')\hat{a}_{\mathbf{k}s}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}|\mathrm{vac}\rangle\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = \\ &= i\left(\frac{1}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2}\frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}(\hbar\omega)^{1/2}\phi(\mathbf{k},s)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}|\mathrm{vac}\rangle = \frac{i}{(2\varepsilon_0)^{1/2}}\Psi(\mathbf{r},t)|\mathrm{vac}\rangle, \end{aligned} \tag{12.11.39}$$

где $\Psi(\mathbf{r},t)$, как и прежде, задается выражением (12.11.32). Таким образом, вероятность фотодетектирования пропорциональна

$$\langle\phi|\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)|\phi\rangle=\frac{1}{2\varepsilon_0}|\Psi(\mathbf{r},t)|^2. \tag{12.11.40}$$

Отсюда следует, что данная величина имеет то же отношение, в смысле нелокальности, к вероятности распределения фотона $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2$, как и распределение энергии. И вновь мы обнаруживаем, что для фотона, который локализован строго вблизи начала координат, имеется отличная от нуля вероятность (спадающая как r^{-7}) того, что он будет обнаружен фотоэлектрическим детектором на расстоянии r. Из приведенных рассуждений видно, что понятие фотона, как локализованной частицы, перемещающейся со скоростью c, в определенных обстоятельствах может быть непригодным и даже ошибочным, хотя оно и приемлемо в других случаях.

12.12. Влияние аттенюатора или делителя пучка на квантовое поле

В оптике по ряду причин часто бывает необходимо ослабить пучок света, например, чтобы сберечь измерительный прибор. Этого можно достигнуть, если на пути пучка установить определенного типа фильтр. Подходящим типом фильтра (возможно, многослойным) является диэлектрик. Кроме того, этот частичный отражатель, будучи установленным под углом, как показано на рис. 12.7, служит делителем пучка и может создавать отраженный и проходящий пучки, интенсивности которых зависят от отражательной и пропускной способностей данного делителя. Поскольку он может служить также в качестве аттенюатора, то мы примем его в качестве прототипа аттенюатора или делителя пучка. Так как отражательная способность r и пропускная способность t делителя пучка могут зависеть от частоты, поляризации и, возможно, от направления падающего света, то желательно произвести разложение по модам для падающего, отраженного и прошедшего полей и установить связь между амплитудами соответствующих мод, а не между суммарными полями.

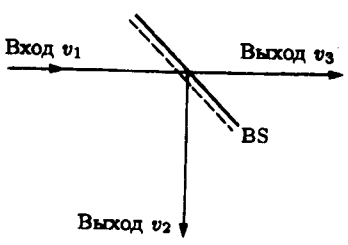


Рис. 12.7. Делитель пучка (BS) с классическими полями на входе и выходе

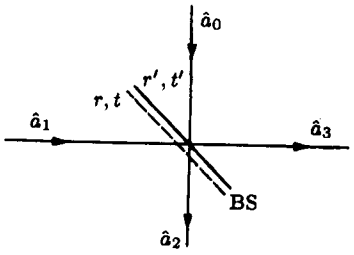


Рис. 12.8. Делитель пучка с квантовыми полями

Для простоты мы предположим, что никакого поглощения внутри самого делителя нет. Для случая одного диэлектрического слоя, фазы отраженной и прошедшей волн всегда отличны на $\pm\pi/2$, при условии, что с обеими сторонами делителя контактирует одинаковая среда. Это положение также справедливо в общем случае для любого делителя с симметричным распределением слоев. Но несимметрично устроенный фильтр может иметь другую отражательную способность r' и пропускную способность t' для света, падающего с обратной стороны (см. рис 12.8). Однако согласно Стоксу (Stokes, 1849) четыре величины r, t, r', t' должны удовлетворять следующим соотношениям взаимности (см. также Born and Wolf, 1980, разд. 1.6; Vašíček, 1960; Friberg and Drummond, 1983a, b; Nieto-Vesperinas and Wolf, 1986; Ou and Mandel, 1989):

$$|r'|=|r|,\quad |t'|=|t|,\quad |r|^2+|t|^2=1,\quad r^*t'+r't^*=0,\quad r^*t+r't'^*=0, \tag{12.12.1}$$

которые можно вывести, например, исходя из баланса энергии. Если мы рассматриваем r, t, r', t' в качестве четырех элементов 2×2 «матрицы рассеяния»

$$\mathbf{S}\equiv\begin{bmatrix} t' & r \\ r' & t \end{bmatrix} \tag{12.12.2}$$

для данного делителя пучка, которая связывает пару входных данных и пару выходных [см. (12.12.4) ниже], то (12.12.1) просто отражают факт унитарности матрицы $\mathbf{S}$. В разд. 10.9.5 мы уже видели, что если при классическом рассмотрении мы можем пренебречь фактом существования неиспользуемого входа, это невозможно при квантовом рассмотрении делителя.

12.12.1. Операторные соотношения

Если поле квантовано, то классические комплексные амплитуды мод v_1, v_2, v_3, показанные на рис. 12.7, следует заменить операторами уничтожения фотона $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$, которые подчиняются каноническим коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = [\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] = [\hat{a}_3, \hat{a}_3^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] = 0. \tag{12.12.3}$$

В таком случае становится невозможным, чтобы два выходных оператора $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$ были пропорциональны входному $\hat{a}_1$, подобно тому, как это имеет место для соответствующих классических выходных амплитуд, поскольку это нарушило бы коммутационные соотношения, что нами было показано еще в разд. 10.9.5. Для того, чтобы согласовать известное влияние делителя пучка на падающий свет с квантовой механикой, мы должны учесть вакуумное поле на неиспользуемом входе. Эту проблему рассматривали различным образом в работах (Yuen and Shapiro, 1980; Ley and Loudon, 1985; Fearn and Loudon, 1987; Ou, Hong and Mandel, 1987; Campos, Saleh and Teich, 1989).

Пусть $\hat{a}_0$ — комплексная амплитуда поля на входе 0 (см. рис. 12.8). Построим выходные динамические переменные $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$ из входных переменных $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$, обращаясь к рис. 12.8 и учитывая возможность того, что делитель может быть асимметричным. Таким образом,

$$\hat{a}_2 = t'\hat{a}_0 + r\hat{a}_1, \quad \hat{a}_2 = r'\hat{a}_0 + t\hat{a}_1. \tag{12.12.4}$$

Тогда, если $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ подчиняются коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = 1 = [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger], \quad [\hat{a}_0, \hat{a}_1^\dagger] = 0, \tag{12.12.5}$$

то из (12.12.4) мы получаем, что

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] = [t'\hat{a}_0 + r\hat{a}_1, t'^*\hat{a}_0^\dagger + r^*\hat{a}_1^\dagger] = |t|^2 + |r|^2 = 1, \tag{12.12.6}$$

где последняя строка получается в силу соотношений взаимности (12.12.1). Аналогичным образом мы находим, что

$$[\hat{a}_3, \hat{a}_3^\dagger] = 1,$$

и

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] = [t'\hat{a}_0 + r\hat{a}_1, r'^*\hat{a}_0^\dagger + t^*\hat{a}_1^\dagger] = t'r'^* + rt^* = 0, \tag{12.12.7}$$

используя (12.12.1). Следовательно, (12.12.4) удовлетворяет всем требуемым коммутационным соотношениям, и мы можем считать их правильными соотношениями между входом и выходом.

Из (12.12.4) можно легко построить операторы числа фотонов и получить следующие формулы

$$\begin{aligned} \hat{n}_2 = \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 = (t'^*\hat{a}_0^\dagger + r^*\hat{a}_1^\dagger)(t'\hat{a}_0 + r\hat{a}_1) = |t|^2\hat{n}_0 + |r|^2\hat{n}_1 + t'^*r\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1 + r^*t'\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_0 \\ \hat{n}_3 = |r|^2\hat{n}_0 + |t|^2\hat{n}_1 + r'^*t\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1 + t^*r'\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_0. \end{aligned} \tag{12.12.8}$$

Из них, в силу соотношений взаимности, сразу получаем соотношение

$$\hat{n}_2 + \hat{n}_3 = \hat{n}_0 + \hat{n}_1, \tag{12.12.9}$$

которое отражает сохранение фотонов между входами и выходами.

12.12.2. Корреляции фотонов

Все соотношения, которые мы получили до настоящего момента, являются соотношениями между динамическими переменными. Физика проявляется в более явном виде, когда мы вычисляем ожидаемые значения в некотором квантовом состоянии $\hat{\rho}$. Предположим, что мода 0 находится в вакуумном состоянии. Тогда влияние $\hat{a}_0$, действующего на оператор плотности $\hat{\rho}$ на входе, выражается свойством

$$\hat{a}_0\hat{\rho} = 0 = \hat{\rho}\hat{a}_0^\dagger. \tag{12.12.10}$$

Ожидаемые значения $\hat{n}_2$ и $\hat{n}_3$ задаются выражениями

$$\langle \hat{n}_2 \rangle = \mathrm{Tr}\,(\hat{n}_2\hat{\rho}), \quad \langle \hat{n}_3 \rangle = \mathrm{Tr}\,(\hat{n}_3\hat{\rho}).$$

Теперь с помощью (12.12.8) и (12.12.10) можно легко получить для среднего числа фотонов в отраженном и пропущенном пучках следующие соотношения

$$\langle \hat{n}_2 \rangle = |r|^2\langle \hat{n}_1 \rangle, \quad \langle \hat{n}_3 \rangle = |t|^2\langle \hat{n}_1 \rangle. \tag{12.12.11}$$

В силу (12.12.10) все остальные члены имеют ожидания, равные нулю. Видно, что все результаты, полученные здесь, аналогичны результатам, которые можно было бы получить, исходя из классических соотношений между входом и выходом.

Более интересный неклассический результат получается, если мы посчитаем корреляционную функцию между выходными пучками 2 и 3. Предположим, что фотодетекторы помещены на двух выходах 2 и 3. Из разд. 12.2 мы знаем, что совместная вероятность детектирования фотона одновременно в отраженном и прошедшем пучках пропорциональна

$$P_{23} = \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 \hat{a}_2 \rangle = \langle : \hat{n}_2\hat{n}_3 : \rangle = \langle \hat{n}_2\hat{n}_3 \rangle, \tag{12.12.12}$$

где последнее выражение получается в силу (12.12.3). Теперь воспользуемся (12.12.8) для $\hat{n}_2$ и $\hat{n}_3$ и вычислим $\langle \hat{n}_2\hat{n}_3 \rangle$. При входном $\hat{a}_0$, находящимся в вакуумном состоянии, с помощью (12.12.10) легко можем получить, что

$$\langle \hat{n}_2\hat{n}_3 \rangle = |r|^2|t|^2\langle \hat{n}_1^2 \rangle - |r|^2|t|^2\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 \rangle = |r|^2|t|^2[\langle \hat{n}_1^2 \rangle - \langle \hat{n}_1(\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + 1)\rangle] = |r|^2|t|^2[\langle \hat{n}_1^2 \rangle - \langle \hat{n}_1 \rangle]. \tag{12.12.13}$$

Вторая строка получается из первой, если учесть коммутационные соотношения (12.12.5).

Интересным следствием данного соотношения является то, что $\langle \hat{n}_2\hat{n}_3 \rangle = 0$, когда падающее поле находится в однофотонном состоянии, для которого $\langle \hat{n}_1^2 \rangle = \langle \hat{n}_1 \rangle$. В таком случае, вероятность детектирования фотона одновременно в отраженном и прошедшем пучках равна нулю. Излишне говорить, что для данного результата в случае классического поля аналогии нет, и величина $\langle |v_2|^2|v_3|^2 \rangle$ не может обратиться в нуль, если только само поле тождественно не равно нулю. Кроме того, также представляет интерес вычисление корреляционной функции

$$\langle \Delta\hat{n}_2\Delta\hat{n}_3 \rangle = \langle \hat{n}_2\hat{n}_3 \rangle - \langle \hat{n}_2 \rangle\langle \hat{n}_3 \rangle.$$

С помощью (12.12.11) и (12.12.13) мы сразу находим, что

$$\langle \Delta\hat{n}_2\Delta\hat{n}_3 \rangle = |r|^2|t|^2[\langle \hat{n}_1^2 \rangle - \langle \hat{n}_1 \rangle - \langle \hat{n}_1 \rangle^2] = |r|^2|t|^2[\langle (\Delta\hat{n}_1)^2 \rangle - \langle \hat{n}_1 \rangle]. \tag{12.12.14}$$

Это выражение показывает, что корреляционная функция для одинаковых моментов времени между флуктуациями отраженного и прошедшего пучков является либо положительной, либо отрицательной, в зависимости от того, являются ли флуктуации падающих фотонов суперпуассоновскими или субпуассоновскими. Для любого поля, допускающего классическое описание, мы должны иметь $\langle (\Delta\hat{n}_1)^2 \rangle \geqslant \langle \hat{n}_1 \rangle$, причем знак равенства справедлив для полностью когерентного состояния. Следовательно, не существует никаких корреляций между выходами 2 и 3 делителя для когерентного поля, поскольку нет никаких флуктуаций интенсивностей. Для поля, которое является классическим, но не когерентным, корреляционная функция между выходами 2 и 3 является положительной. Это явление известно как эффект Хэнбери Брауна — Твисса (в связи с этим см. разд. 8.4 и 12.2). Мы уже видели, что субпуассоновская статистика возможна только для неклассического поля (ср. разд. 12.10). То же самое справедливо и для отрицательных корреляционных функций между выходами делителя.

В заключение отметим, что операторные соотношения (12.12.4) также справедливы и тогда, когда поле $\hat{a}_1$, пришедшее на вход 0, не находится в вакуумном состоянии. Так как два световых пучка, представляемые через $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_0$, интерферируют друг с другом, те же операторные равенства будут описывать интерференционный или гомодинный эксперимент.

В качестве примера, мы в очередной раз рассмотрим совместную вероятность $P_{23} = \langle : \hat{n}_2\hat{n}_3 : \rangle$ детектирования фотона на каждом из двух выходов делителя, изображенного на рис. 12.8. Но на этот раз мы будем предполагать, что на каждый из входов 0 и 1 приходит один фотон. В этом случае, состояние на входе является фоковским состоянием $|1_0, 1_1\rangle$. Если воспользоваться выражением (12.12.8) для оператора числа частиц и усреднить в состоянии $|1_0, 1_1\rangle$, то легко получим следующий результат:

$$P_{23} = \langle \hat{n}_2\hat{n}_3 \rangle = (|t|^2 - |r|^2)^2. \tag{12.12.15}$$

Эта величина обращается в нуль для 50% : 50%-делителя пучка, для которого $|t|^2 = 0.5 = |r|^2$. Поэтому, когда два одинаковых фотона попадают в 50% : 50%-делитель, по одному на каждый вход, мы никогда не сможем обнаружить, что на каждом выходе находится по одному фотону, или, что существуют два фотона на выходе 2 или на выходе 3. Это пример квантово-механической интерференции амплитуд вероятности для фотонной пары.

Этот эффект можно понять следующим образом. Существует два различных пути, в соответствии с которыми может реализоваться ситуация с одним фотоном на выходе 2 и с одним на выходе 3. Либо оба налетающих фотона проходят через делитель, либо оба они отражаются от него. Так как детекторы, контролирующие выход, не могут различить две эти возможности, то, прежде чем выполнять возведение в квадрат для определения вероятности, необходимо также добавить соответствующие двухфотонные амплитуды вероятности. Но из-за фазовых сдвигов при отражении и прохождении эти две амплитуды вероятности отличаются по фазе ровно на 180°, они и дают нуль при 50% : 50%-делителе пучка.

12.12.3. Интерферометр Майкельсона

Теперь рассмотрим интерферометр Майкельсона, изображенный на рис. 12.9. На этом рисунке $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$ представляют два входа, а пучки, выходящие из делителя, которые, в свою очередь, представляются через $\hat{a}_2$ и $\hat{a}_3$, падают на два перпендикулярных, идеальных зеркала. Они отражаются обратно к делителю и описываются величинами $\hat{a}_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}$ и $\hat{a}_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}$. Последние играют роль входных величин для делителя и создают два новых выхода $\hat{a}_5$ и $\hat{a}_6$, которые связаны с $\hat{a}_2\,e^{\mathrm{i}\phi_2}$ и $\hat{a}_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}$ соотношениями

$$\hat{a}_5 = t\hat{a}_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2} + r'\hat{a}_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}, \quad \hat{a}_6 = t'\hat{a}_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3} + r\hat{a}_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}. \tag{12.12.16}$$

Отсюда, с помощью (12.12.4), имеем

$$\begin{aligned}\hat{a}_5 &= \hat{a}_1[tr\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2} + r't\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}] + \hat{a}_0[tt'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2} + r'^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}],\\ \hat{a}_6 &= \hat{a}_1[tt'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3} + r^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}] + \hat{a}_0[t'r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3} + rt'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}].\end{aligned} \tag{12.12.17}$$

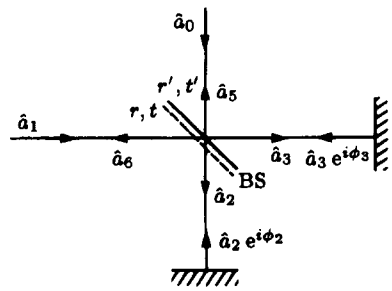


Рис. 12.9. Моды в интерферометре Майкельсона

Если $\hat{a}_0$ представляет собой вакуумную моду, то в силу (12.12.10) мы получаем для среднего числа фотонов в каждом выходном пучке

$$\begin{aligned}\langle\hat{n}_5\rangle &= \langle\hat{n}_1\rangle 2|r|^2|t|^2[1+\cos(\phi_2-\phi_3+\arg r-\arg r')],\\ \langle\hat{n}_6\rangle &= \langle\hat{n}_1\rangle[|t|^4+|r|^4-2|r|^2|t|^2\cos(\phi_2-\phi_3+\arg r-\arg r')].\end{aligned} \tag{12.12.18}$$

Следовательно, $\langle\hat{n}_5\rangle$ и $\langle\hat{n}_6\rangle$ находятся в противофазе и средние числа фотонов $\langle\hat{n}_5\rangle$ и $\langle\hat{n}_6\rangle$ можно использовать для вычисления разности фаз $\phi_2 - \phi_3$. Кроме того, $\langle\hat{n}_5\rangle + \langle\hat{n}_6\rangle = \langle\hat{n}_1\rangle$ и, таким образом, как и должно быть, число фотонов сохраняется. Исходя из (12.12.17), мы можем легко показать, что для симметричного 50% : 50%-делителя пучка взаимная корреляционная функция между двумя выходными пучками задается соотношением

$$\langle\Delta\hat{n}_5\Delta\hat{n}_6\rangle = \tfrac{1}{4}[\langle(\Delta\hat{n}_1)^2\rangle - \langle\Delta\hat{n}_1\rangle]\sin^2(\phi_2-\phi_3), \tag{12.12.19}$$

причем она является либо положительной, либо отрицательной, в зависимости от того, является ли входная статистика фотона суперпуассоновской или субпуассоновской. Аналогично флуктуации $\hat{n}_5$ и $\hat{n}_6$ отражают супер- или субпуассоновский характер поля на входе.

12.12.4. Связь между входными и выходными состояниями для делителя пучка

Мы видели, что соотношения (12.12.4) связывают динамические переменные входных и выходных полей делителя пучка. Если $f(\hat{a}_2, \hat{a}_3)$ — операторная функция выходных переменных и комплексно сопряженных им, то можно воспользоваться этими соотношениями для вычисления ожидаемого значения $|1_0, 1_1\rangle$, если перейти от $\hat{a}_3$, $\hat{a}_2$ к $\hat{a}_1$, $\hat{a}_0$. Однако альтернативным способом является определение состояния на выходе делителя непосредственно через входное состояние. Разработаем теперь общую процедуру для решения данной задачи (Ou, Hong and Mandel, 1987).

Предположим, что оператор плотности $\hat{\rho}_{\text{вх}}$ на входе делителя пучка, изображенного на рис. 12.8, записан обычным образом в диагональном представлении по когерентным состояниям через две комплексные амплитуды входных мод v_0, v_1:

$$\hat{\rho}_{\text{вх}} = \int \phi_{\text{вх}}(v_0, v_1)|v_0, v_1\rangle\langle v_0, v_1|\, d^2v_0\, d^2v_1. \tag{12.12.20}$$

Аналогичным образом, предполагаем, что оператор плотности $\hat{\rho}_{\text{вых}}$ на выходе можно записать в диагональном представлении через две комплексные амплитуды выходных мод v_2, v_3

$$\hat{\rho}_{\text{вых}} = \int \phi_{\text{вых}}(v_2, v_3)|v_2, v_3\rangle\langle v_2, v_3|\, d^2v_2\, d^2v_3. \tag{12.12.21}$$

Тогда состояние $\hat{\rho}_{\text{вых}}$ правильным образом соответствует состоянию $\hat{\rho}_{\text{вх}}$, если для любой функции $f(\hat{a}_2, \hat{a}_3)$ величин $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$ и сопряженных им выполняется

$$\operatorname{Tr}[f(\hat{a}_2, \hat{a}_3)\hat{\rho}_{\text{вых}}] = \operatorname{Tr}[f(r\hat{a}_1 + t'\hat{a}_0, t\hat{a}_1 + r'\hat{a}_0)\hat{\rho}_{\text{вх}}]. \tag{12.12.22}$$

Так как, в принципе, любой оператор можно привести в нормальный порядок, мы ограничимся случаем, когда $f(\hat{a}_2, \hat{a}_3)$ является нормально упорядоченной операторной функцией $f^{(\text{N})}(\hat{a}_2, \hat{a}_3)$. Тогда из операторных соотношений (12.12.4) следует, что если выразить $\hat{a}_2, \hat{a}_3$ через $\hat{a}_0, \hat{a}_1$, то оператор $f(N)$ вновь будет в нормальном порядке.

Далее воспользуемся оптической теоремой эквивалентности для нормально упорядоченных операторов (см. разд. 11.9), в соответствии с которой имеем

$$\operatorname{Tr}[f^{(\text{N})}(\hat{a}_2, \hat{a}_3)\hat{\rho}_{\text{вых}}] = \int f^{(\text{N})}(v_2, v_3)\phi_{\text{вых}}(v_2, v_3)\, d^2v_2\, d^2v_3, \tag{12.12.23}$$

$$\operatorname{Tr}[f^{(\text{N})}(r\hat{a}_1 + t'\hat{a}_0, t\hat{a}_1 + r'\hat{a}_0)\hat{\rho}_{\text{вх}}] = \int f^{(\text{N})}(rv_1 + t'v_0, tv_1 + r'v_0)\phi_{\text{вх}}(v_0, v_1)\, d^2v_0\, d^2v_1. \tag{12.12.24}$$

В силу (12.12.22), интегралы в правой части этих соотношений должны быть равны. Совершая замену переменных

$$v_2 = rv_1 + t'v_0, \quad v_3 = tv_1 + r'v_0 \tag{12.12.25}$$

или

$$v_0 = (-tv_2 + rv_3)F, \quad v_1 = (rv_2 - t'v_3)F, \quad F \equiv (rr' - tt')^{-1} \tag{12.12.26}$$

в последнем интеграле и замечая, что

$$d^2v_2\, d^2v_3 = d^2v_0\, d^2v_1,$$

сразу приходим к выражению

$$\phi_{\text{вых}}(v_2, v_3) = \phi_{\text{вх}}(-Ftv_2 + Frv_3, Fr'v_2 - Ft'v_3) \tag{12.12.27}$$

которое определяет выходное состояние через входное состояние.

В частности, если входное поле находится в чистом когерентном состоянии $|v_0', v_1'\rangle$ и, следовательно, $\hat{\rho}_{\text{вх}} = |v_0', v_1'\rangle\langle v_0', v_1'|$ и $\phi_{\text{вх}}(v_0, v_1) = \delta^2(v_0 - v_0')\delta^2(v_1 - v_1')$, то

$$\phi_{\text{вых}}(v_2, v_3) = \delta^2(-Ftv_2 + Frv_3 - v_0')\delta^2(Fr'v_2 - Ft'v_3 - v_1').$$

Подставляя $\phi_{\text{вых}}(v_2, v_3)$ в (12.12.21) и выполняя замену переменных (12.12.25), мы сразу видим, что выходное состояние является двухмодовым когерентным состоянием

$$\hat{\rho}_{\text{вых}} = |rv_1' + t'v_0', tv_1' + r'v_0'\rangle\langle rv_1' + t'v_0', tv_1' + r'v_0'|. \tag{12.12.28}$$

Когда входное состояние $|\psi_{\text{вх}}\rangle$ является чистым состоянием, имеющим вид линейной суперпозиции когерентных состояний

$$|\Psi_{\text{вх}}\rangle = c'|v_0', v_1'\rangle + c''|v_0'', v_1''\rangle, \tag{12.12.29}$$

то, как мы видели в разд. 11.8, связанная с ним плотность $\phi_{\text{вх}}(v_0, v_1)$ в фазовом пространстве становиться сильно сингулярной. Однако, используя (12.12.22), можно легко показать, что соответствующее выходное состояние $|\psi_{\text{вых}}\rangle$ является просто линейной суперпозицией выходных когерентных состояний

$$|\Psi_{\text{вых}}\rangle = c'|rv_1' + t'v_0', tv_1' + r'v_0'\rangle + c''|rv_1'' + t'v_0'', tv_1'' + r'v_0''\rangle. \tag{12.12.30}$$

Учитывая, что комплексный множитель t всегда связан с прохождением фотона через делитель пучка, а множитель r связан с отражением фотона от него, часто можно записать выходное состояние непосредственно через входное состояние. Предположим, например, что делитель пучка — симметричный, и что вход представляет собой двухфотонное состояние $|1_0, 1_1\rangle$, соответствующее одному фотону, входящему на вход 0 и еще одному — пришедшему на вход 1. Здесь существует четыре возможности. Если пропускаются оба фотона, то это приводит к выходному состоянию $|1_2, 1_3\rangle$ с комплексной амплитудой t^2, которую мы будем полагать действительной. Если оба фотона отражаются, то мы вновь получаем состояние $|1_2, 1_3\rangle$ с комплексной амплитудой $i|r|i|r| = -|r|^2$. Если один фотон отражается, а другой фотон пропускается, то мы имеем на выходе либо $|2_2, 0_3\rangle$ с комплексной амплитудой $\sqrt{2i|rt|}$, либо $|0_2, 2_3\rangle$ с комплексной амплитудой $\sqrt{2i|rt|}$. Из этого следует, что выход $|\psi_{\text{вых}}\rangle$, соответствующий входу $|1_0, 0_1\rangle$, является линейной суперпозицией

$$|\psi_{\text{вых}}\rangle = (|t|^2 - |r|^2)|1_2, 1_3\rangle + i\sqrt{2}\,|rt|(|2_2, 0_3\rangle + |0_2, 2_3\rangle). \tag{12.12.31}$$

Множитель $\sqrt{2}$, являющийся результатом интерференции, необходим для того, чтобы $|\psi_{\text{вых}}\rangle$ было нормировано на единицу. Отметим в подтверждение (12.12.15), что когда $|t|^2 = |r|^2 = \frac{1}{2}$, оба фотона всегда появляются вместе либо на выходе 2, либо на выходе 3, и никогда не реализуется случай, когда один — на выходе 2 и один — на выходе 3. Этот принцип используется для измерения с фемтосекундной точностью разделения во времени двух одинаковых волновых пакетов на входе (Hong, Ou and Mandel, 1987).

12.13. Влияние поляризатора на поле

Анализируя роль делителя пучка или линейного аттенюатора, мы разложили суммарное поле на моды и рассматривали лишь одну моду. Но в случае, когда представляют интерес поляризационные свойства, часто удобно рассматривать сразу две моды, соответствующим двум ортогональным составляющим поляризации. В таком случае, электромагнитное поле, соответствующее одному волновому вектору $\mathbf{k}$, вдоль которого мы направляем ось z, может быть представлено с помощью векторной амплитуды $\hat{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})$ такой, что

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\mathbf{k}) = \hat{a}_x \boldsymbol{\varepsilon}_x + \hat{a}_y \boldsymbol{\varepsilon}_y. \tag{12.13.1}$$

Здесь $\hat{a}_x$, $\hat{a}_y$ — операторы уничтожения фотона, соответствующие ортогональным компонентам поляризации в x- и y-направлениях, а $\boldsymbol{\varepsilon}_x$, $\boldsymbol{\varepsilon}_y$ — единичные векторы поляризации. С другой стороны, как уже обсуждалось в разд. 10.2, можно разложить амплитуду вектора поля $\hat{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ на две ортогональные компоненты эллиптической поляризации. Будем считать, для простоты, что $\boldsymbol{\varepsilon}_x$, $\boldsymbol{\varepsilon}_y$ являются действительными векторами.

Предположим, что свет попадает в поляризатор. Влияние эллиптического поляризатора на матрицу поляризации $\mathbf{J}(\mathbf{k})$ представляется с помощью 2×2-матрицы пропускания [ср. (6.4.9a) и (6.4.20)]

$$\mathbf{T}(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta \sin\theta\, e^{-i\delta} \\ \cos\theta \sin\theta\, e^{i\delta} & \sin^2\theta \end{bmatrix}, \tag{12.13.2}$$

где θ — угол между главной осью эллипса и осью x, а δ определяет эксцентриситет. В частности, когда $\delta = 0$, $\mathbf{T}$ представляет линейный поляризатор, направление поляризации которого наклонено на угол θ к оси x.

Для того, чтобы определить амплитуду вектора поля $\hat{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})$ за поляризатором, мы воспользуемся законом преобразования

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{A}}}' = T_{ij} \hat{a}_i \boldsymbol{\varepsilon}_j, \quad (i, j = x, y), \tag{12.13.3}$$

где предполагается суммирование по повторяющимся индексам. После выполнения преобразования мы получаем формулу

$$\hat{\boldsymbol{a}}' = (\cos^2\theta\hat{a}_x + \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{e}^{i\delta}\hat{a}_y)\boldsymbol{\varepsilon}_x + (\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{e}^{-i\delta}\hat{a}_x + sin^2\theta\hat{a}_y)\boldsymbol{\varepsilon}_y =$$
$$= (\cos\theta\hat{a}_x + \sin\theta\,\mathrm{e}^{i\delta}\hat{a}_y)(\cos\theta\boldsymbol{\varepsilon}_x + \sin\theta\,\mathrm{e}^{-i\delta}\boldsymbol{\varepsilon}_y) = \hat{a}'\boldsymbol{\varepsilon}'. \quad (12.13.4)$$

Но величина $\cos\theta\,\boldsymbol{\varepsilon}_x + \sin\theta\,\mathrm{e}^{-i\delta}\boldsymbol{\varepsilon}_y$ как раз представляет собой комплексный единичный вектор поляризации $\boldsymbol{\varepsilon}'$ (ср. разд. 10.2), характеризующий поляризатор таким образом, что коэффициент при $\boldsymbol{\varepsilon}'$ является амплитудой поля за поляризатором, или

$$\hat{a}' = \cos\theta\hat{a}_x = \sin\theta\,\mathrm{e}^{i\delta}\hat{a}_y. \quad (12.13.5)$$

Эту формулу можно использовать для вычисления средних значений поля за поляризатором через динамические переменные на входе. Отметим, что $\hat{a}'$ удовлетворяет тому же коммутационному соотношению, что и $\hat{a}_x$, $\hat{a}_y$. В частности, среднее число фотонов за поляризатором равно

$$\langle\hat{a}'^{\dagger}\hat{a}'\rangle = \cos^2\theta\langle\hat{a}_x'^{\dagger}\hat{a}_x'\rangle + \sin^2\theta\langle\hat{a}_y'^{\dagger}\hat{a}_y'\rangle + \cos\theta\sin\theta(\,\mathrm{e}^{i\delta}\langle\hat{a}_x'^{\dagger}\hat{a}_y'\rangle + \mathrm{e}^{-i\delta}\langle\hat{a}_y'^{\dagger}\hat{a}_y'\rangle) \quad (12.13.6)$$

и зависит от некоторых корреляционных свойств падающего света.

12.14. Локальность Эйнштейна и корреляции фотонов

В классической работе Эйнштейна, Подольского, Розена (Einstein, Podolsky and Rosen, 1935) впервые было указано, что существуют определенные двухчастичные состояния, в соответствии с обычной интерпретацией квантовой механики, обладающие таким свойством, что измерение одной выбранной переменной, относящейся к частице 1, полностью определяет исход измерения соответствующей переменной, относящейся к частице 2. В момент измерения эти две частицы могут находиться на таком большом расстоянии друг от друга, что никакое воздействие, обусловленное первым измерением, не передается второй частице за время, соответствующее наблюдению. Такую ситуацию можно реализовать, если испускать обе частицы из общего источника в определенном, перепутанном (нефакторизуемом) квантовом состоянии

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\phi\rangle_1|\chi\rangle_2 - |\chi\rangle_1|\phi\rangle_2].$$

Согласно Эйнштейну, Подольскому и Розену, если с уверенностью можно предсказать исход измерения некоторой переменной для данной частицы, не возбуждая ее, то «...существует элемент физической реальности, соответствующий данной физической величине...». Другими словами, *частица 2, на самом деле, имеет данное значение переменой*, безотносительно к тому измеряется эта величина или нет. Данное утверждение контрастирует с квантово-механической точкой зрения, согласно которой измерение в определенном смысле само создает реальность. С другой стороны, предположим, что измеряется другая переменная для частицы 1, которая, скажем, канонически сопряжена с предыдущей переменой. В таком случае, этим предопределяется значение сопряженной переменной и для частицы 2, так что, в соответствии с вышеприведенными рассуждениями, частица 2, на самом деле, *имеет* данное значение сопряженной переменой. Но если две переменные являются канонически сопряженными, то, в соответствии с квантовой механикой, они не коммутируют и не могут вместе иметь в один и тот же момент времени точно определенные значения. Мы можем измерить ту или другую сопряженную переменную для частицы 1 в условиях, когда две частицы находятся на большом расстоянии друг от друга и не могут сообщаться между собой за доступное время, но даже в этом случае это повлияет на состояние частицы 2. Здесь имеется противоречие, которое, по-видимому, и заставило Эйнштейна, Подольского и Розена сделать вывод, что квантовая механика является неполной. Однако такие контринтуитивные, нелокальные корреляции были наблюдены экспериментально. Это явление иногда называют *нарушением локальности Эйнштейна*, а его следствия долгое время широко обсуждались (Bohr, 1935; Bohm 1952a, b; Bell, 1964, 1966; Clauser, Horn and Shimony, Holt, 1969; Wigner, 1970; Clauser and Horn, 1974; Clauser and Shimony, 1978; d'Espagnat, 1979; Mermin, 1981, 1985).

Для того, чтобы более наглядно продемонстрировать это парадокс, рассмотрим источник, который испускает частицы со спином 1/2 в противоположных направлениях с общим спиновым моментом количества движения, равным нулю. Если бы мы измерили спин $\hat{S}_x^{(1)}$ частицы 1 в x-направлении и, например, получили бы значение $\hbar/2$, то мы бы знали, что частица 2 находится в собственном состоянии своего спина $\hat{S}_x^{(2)}$ с собственным значением $-\hbar/2$. С другой стороны, если бы вместо этого, мы бы решили измерить спин $\hat{S}_y^{(1)}$ частицы 1 в y-направлении и получили бы $\hbar/2$, то это бы означало, что собственное значение оператора $\hat{S}_y^{(2)}$ частицы 2 равно $-\hbar/2$. В обоих случаях измерение частицы 1 определяет исход некоего измерения частицы 2 с вероятностью, равной единице, и согласно Эйнштейну, Подольскому и Розену значения $\hat{S}_x^{(2)}$ и $\hat{S}_y^{(2)}$ должны содержать «элемент физической реальности». Но $\hat{S}_x^{(2)}$ и $\hat{S}_y^{(2)}$ не коммутируют друг с другом и согласно квантовой механике они не могут одновременно иметь строго определенные значения. Парадокс возникает из-за того, что мы интуитивно склонны рассуждать в рамках классических представлений, т.е. связывать объективную физическую реальность с каждой частицей и ее переменными, тогда как в квантовой механике динамическая переменная, в действительности, не имеет значения до тех пор, пока она не измерена. В определенном смысле, физическую реальность создает измерение. Были предприняты попытки объяснить предсказанные (а позднее — и наблюденные) корреляции между двумя частицами на языке скрытых параметров или, иными словами, неизмеряемых параметров, которые, как предполагалось, определяют исход эксперимента (Bohm, 1952a, b). Но позднее Беллом (Bell, 1964, 1966) и другими исследователями (Bohm and Aharanov, 1957; Clauser, Horne, Shimony and Holt, 1969; Clauser and Horne, 1974; Clauser and Shimony, 1978) было показано, что такие нелокальные эффекты по своей сути являются квантово-механическими и что никакая реалистичная локальная теория не в состоянии количественно объяснить такие корреляции.

12.14.1. Парадокс Эйнштейна — Подольского — Розена для перепутанного двухфотонного состояния[1]

Для демонстрации парадокса в оптической области рассмотрим двухфотонное состояние с нулевым угловым моментом. Его можно создать при каскадном распаде атома, совершающего двухэтапный переход типа $\Delta J = 0$. Предположим, что фотоны 1 и 2 покидают атом в противоположных направлениях вдоль оси z в синглетном состоянии (см. рис. 12.10)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1_{1x}, 0_{1y}, 0_{2x}, 1_{2y}\rangle - |0_{1x}, 1_{1y}, 1_{2x}, 0_{2y}\rangle), \tag{12.14.1}$$

причем фотоны поляризованы ортогонально. Будем обозначать состояние, в котором j-ый фотон ($j = 1, 2$) линейно поляризован в направлении оси x через $|1_{jx}\rangle$ и.т.д. В таком случае, легко можно увидеть, что каждый из двух фотонов, будучи рассмотрен по отдельности, неполяризован. Ибо из (12.14.1) мы получаем для матрицы поляризации $\mathbf{J}_j$ ($j = 1, 2$) j-го фотона (см. разд. 6.2), вычисляя след по остальным переменным,

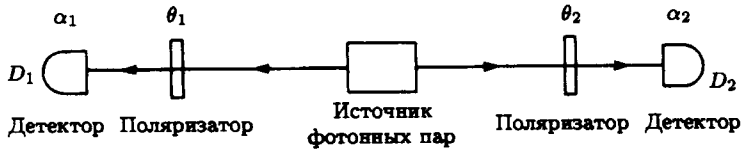


Рис. 12.10. Схема эксперимента для обнаружения поляризационных корреляций между двумя фотонами

$$\mathbf{J}_j = \begin{bmatrix} \langle \hat{a}_{jx}^\dagger \hat{a}_{jx} \rangle & \langle \hat{a}_{jx}^\dagger \hat{a}_{jy} \rangle \\ \langle \hat{a}_{jy}^\dagger \hat{a}_{jx} \rangle & \langle \hat{a}_{jy}^\dagger \hat{a}_{jy} \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2). \tag{12.14.2}$$

Это выражение представляет неполяризованный свет. Однако поляризация двух фотонов строго определена.

Предположим теперь, что на пути этих двух фотонов поставлены линейные поляризаторы, наклоненные к оси x под углами θ_1 и θ_2, соответственно. Впоследствии эти фотоны попадают на два фотодетектора

[1] В этом разделе и далее в этой главе может быть рекомендована в качестве дополнительной литературы книга (*Scully, Zubairy, 1997) — *ред. пер.*

D_1 и D_2, как пояснено на рис. 12.10. Пусть $P_j(\theta_j)$ есть вероятность того, что детектируется фотон из плеча j, а $P_{12}(\theta_1,\theta_2)$ — совместная вероятность того, что соответствующими детекторами детектируются оба фотона с установленными поляризаторами. Пусть α_1 и α_2 — квантовые выходы этих двух детекторов. Для того, чтобы связать динамические переменные $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ поля за поляризатором с переменными $\hat{a}_{1x}$, $\hat{a}_{1y}$, $\hat{a}_{2x}$, $\hat{a}_{2y}$ поля перед поляризаторами, воспользуемся соотношением, выведенным ранее, в разд. 12.13 [ср. (12.13.5)],

$$\hat{a}_j = \hat{a}_{jx}\cos\theta_j + \hat{a}_{jy}\sin\theta_j, \quad (j=1,2), \tag{12.14.3}$$

которое учитывает проективные свойства каждого поляризатора, а также сохраняет коммутационные соотношения. Тогда из (12.14.1) и (12.14.3) получаем

$$P_1(\theta_1) = \alpha_1\langle\psi|\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1|\psi\rangle = \frac{1}{2}\alpha_1, \quad P_2(\theta_2) = \alpha_2\langle\psi|\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2|\psi\rangle = \frac{1}{2}\alpha_2, \tag{12.14.4}$$

тогда как совместная вероятность $P_{12}(\theta_1,(\theta_2)$ задается выражением

$$\begin{aligned} P_{12}(\theta_1,\theta_2) &= \alpha_1\alpha_2\langle\psi|\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1|\psi\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2[\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_1\sin^2\theta_2 - 2\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_1\sin\theta_2] = \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\sin^2(\theta_1-\theta_2). \end{aligned} \tag{12.14.5}$$

Последняя вероятность зависит от позиции обоих поляризаторов. Поэтому условная вероятность $P_c(\theta_2 \mid \theta_1)$ детектирования фотона 2, при условии детектирования фотона 1 (ср. разд. 1.2), равна

$$P_c(\theta_2|\theta_1) = P_{12}(\theta_1,\theta_2)/P_1(\theta_1) = \alpha_2\sin^2(\theta_1-\theta_2). \tag{12.14.6}$$

Эта вероятность может быть равна единице для идеального детектора, когда $\theta_1-\theta_2 = \pm\pi/2$, и нулю, когда $\theta_1=\theta_2$, демонстрируя, что фотон 2 поляризован под прямым углом к фотону 1, хотя поляризация последнего произвольным образом задается ориентацией поляризатора 1. Таким образом, по-видимому, на результат измерения, связанного с фотоном 2, повлияет ориентация поляризатора в плече 1, даже если во время эксперимента оба фотона заметно удалены. Это и есть парадокс нелокальности.

Однако отсюда не следует, что наблюдатель, расположенный около D_1, может влиять на исход измерения, сделанного в D_2, регулируя угол θ_1 поляризатора 1. Это происходит из-за того, что установка угла поляризатора θ_1 вообще-то не обеспечивает поляризацию фотона в плече 1, за исключением особого случая, когда фотон 1 исходит из поляризатора θ_1.

Совместная вероятность того, что фотон 2 появится из поляризатора θ_2, а фотон 1 появится из поляризатора θ_1, задается выражением (12.4.5) при $\alpha_1=\alpha_2$. Если через «+» обозначить появление фотона на выходе поляризатора, а через «−» обозначить его отсутствие на выходе, то, поскольку вторую вероятность можно получить из первой путем добавления к θ_1, θ_2 значения $\pi/2$, имеем

$$P(+,\theta_2,+,\theta_1) = \tfrac{1}{2}\sin^2(\theta_1-\theta_2) = P(-,\theta_2,-,\theta_1). \tag{12.14.7}$$

Аналогичным образом находим, что совместная вероятность появления фотона 2 на выходе θ_2 и отсутствия фотона 1 на выходе θ_1, имеет вид

$$P(+,\theta_2,-,\theta_1) = \tfrac{1}{2}\cos^2(\theta_1-\theta_2) = P(-,\theta_2,+,\theta_1). \tag{12.14.8}$$

Данный результат можно получить из (12.14.7) простым добавлением $\pi/2$ к θ_1.

Теперь понятно, что фиксация угла θ_1 поляризатора 1 не обеспечивает ни исхода $+,\theta_1$, ни исхода $-,\theta_1$. Вероятность $P(+,\theta_2|\theta_1)$ того, что фотон 2 появится на выходе поляризатора 2, когда поляризатор 1 установлен под углом θ_1, находим, складывая $P(+,\theta_2,+\theta_1)$ и $P(+,\theta_2-\theta_1)$. С учетом (12.14.7) и (12.14.8) она записывается в виде

$$P(+,\theta_1|\theta_2) = P(+,\theta_2,+,\theta_1) + P(+,\theta_2,-,\theta_1) = \tfrac{1}{2}. \tag{12.14.9}$$

Так как этот результат не зависит от θ_1, то из этого следует, что установка угла поляризатора 1 никоим образом не влияет на исход измерения в плече 2. Таким образом, несмотря на нелокальность системы, причинность сохраняется.

Чтобы показать, что такие квантово-механические предсказания не совместимы с локальной вероятностной теорией измерения, содержащей скрытые параметры, мы выведем ниже одно из так называемых неравенств Белла (Bell, 1964, 1966; Bohm and Aharonov, 1957; Clauser, Horne, Shimony and Holt, 1969; Clauser and Horne, 1974; Clauser and Shimony, 1978), которому такая теория должна удовлетворять.

12.14.2. Неравенства Белла[1]

Пусть $A(a)$ и $B(b)$ являются двумя так называемыми дихотомическими наблюдаемыми, характеризуемыми параметрами a и b, измерение которых может дать только два возможных исхода, которые обозначим через $+1$ и -1. Например, $A(a) = +1$ может означать появление фотона на выходе поляризатора θ_1 в плече 1 прибора, изображенного на рис. 12.10, а $A(a) = -1$ может означать отсутствие фотона на том же выходе. Пусть

$$C(a,b) \equiv \langle A(a), B(b)\rangle \tag{12.14.10}$$

— функция, описывающая корреляции между этими двумя наблюдаемыми и усредненная по всем возможным исходам. Согласно критерию реальности Эйнштейна, Подольского и Розена, существуют элементы реальности, которые предопределяют исход измерения. Пусть они определяются некоторым скрытым параметром λ, имеющим плотность вероятности $\rho(\lambda)$ такую, что $\int \rho(\lambda)\,d\lambda = 1$. Тогда корреляционную функцию между наблюдаемыми $A(a)$ и $B(b)$ можно выразить в виде

$$C(a,b) = \int A(a,\lambda)B(b,\lambda)\rho(\lambda)\,d\lambda. \tag{12.14.11}$$

В этом выражении подразумевается локальность, поскольку A зависит только от a, а B только от b. Тогда, так как $|A(a,\lambda)| = 1$,

$$\begin{aligned} |C(a,b) - C(a,b')| &\leqslant \int |A(a,\lambda)[B(b,\lambda) - B(b',\lambda)]|\rho(\lambda)\,d\lambda, \\ |C(a,b) - C(a,b')| &\leqslant \int |B(b,\lambda) - B(b',\lambda)|\rho(\lambda)\,d\lambda \end{aligned} \tag{12.14.12}$$

и

$$\begin{aligned} |C(a',b) - C(a',b')| &\leqslant \int |A(a',\lambda)[B(b,\lambda) - B(b',\lambda)]|\rho(\lambda)\,d\lambda, \\ |C(a',b) - C(a',b')| &\leqslant \int |B(b,\lambda) - B(b',\lambda)|\rho(\lambda)\,d\lambda. \end{aligned} \tag{12.14.13}$$

Теперь мы сложим (12.14.12) и (12.14.13). Тогда

$$|C(a,b) - C(a,b')| + |C(a',b) + C(a',b')| \leqslant \int [|B(b,\lambda) - B(b',\lambda)| + |B(b,\lambda) + B(b',\lambda)|]\rho(\lambda)\,d\lambda. \tag{12.14.14}$$

Но поскольку каждое B принимает значения только ± 1, то отсюда следует, что

$$|B(b,\lambda) - B(b',\lambda)| + |B(b,\lambda) + B(b',\lambda)| = 2. \tag{12.14.15}$$

Подставляя полученный результат в (12.14.14) и используя условие нормировки $\rho(\lambda)$

$$\int \rho(\lambda)\,d\lambda = 1,$$

получаем *неравенство Белла* (Bell, 1964, 1966)

$$|C(a,b) - C(a,b')| + |C(a',b) + C(a',b')| \leqslant 2. \tag{12.14.16}$$

Применим теперь это неравенство к эксперименту, показанному на рис. 2.10. Мы отождествляем a с углом поляризатора θ_1, а b с углом поляризатора θ_2, и связываем исход $+1$ с появлением фотона на выходе поляризатора, а -1 с отсутствием фотона на выходе. Тогда из (12.14.7) и (12.14.8) получаем корреляционную функцию

$$\begin{aligned} C(\theta_1,\theta_2) = P(+,\theta_2,+,\theta_1) + P(-,\theta_2,-,\theta_1) - P(+,\theta_2,-,\theta_1) - P(-,\theta_2,+,\theta_1) = \\ = \sin^2(\theta_1 - \theta_2) - \cos^2(\theta_1 - \theta_2) = -\cos 2(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \tag{12.14.17}$$

[1] см. также (*Белинский, Клышко, 1993) — *ред. пер.*

Она равна единице, когда $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, что и следовало ожидать для полностью коррелированных событий, и -1, когда $\theta_2 = \theta_1$, что соответствует полной антикорреляции.

При частном выборе углов поляризации, например,

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2' = 3\pi/8, \quad \theta_1 = -\pi/4, \quad \theta_2' = \pi/8,$$

получаем результат

$$|C(\theta_1,\theta_2) - C(\theta_1,\theta_2')| + |C(\theta_1',\theta_2) - C(\theta_1',\theta_2')| = \left|-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right| = 2\sqrt{2} \approx 2.828, \qquad (12.14.18)$$

который, очевидно, нарушает неравенство Белла (12.14.16). Из этого следует, что квантово-механическая двухфотонная система в синглетном состоянии не может быть описана в рамках реалистичной, локальной вероятностной теории.

Однако при выводе $C(\theta_1,\theta_2)$ мы осознано исключили фотодетекторы, т.е. мы фактически считали квантовые выходы α_1, α_2 равными единице. Если бы квантовые выходы присутствовали в $C(\theta_1,\theta_2)$, как они присутствуют, например, в (12.14.5), то, учитывая гипотезу (*достоверной выборки*) о том, что подансамбль детектируемых фотонов является типичным подансамблем всего ансамбля фотонов, неравенство Белла не нарушалось бы для малых значений α_1, α_2. Поэтому мы рассмотрим еще одно классическое неравенство, которое нарушается двухфотонным синглетным состоянием, которое не зависит непосредственно от значений α_1, α_2.

12.14.3. Форма Клаузера — Хорна неравенства Белла

В очередной раз рассмотрим экспериментальную ситуацию, изображенную на рис. 12.10. Источник S испускает два фотона в двух различных направлениях, обозначенных через 1 и 2, эти фотоны попадают на поляризаторы, имеющие вид призмы Волластона, которые разделяют падающий свет на два ортогонально поляризованных пучка. Предположим, что сумма вероятностей появления падающего фотона у одного или другого выхода каждого поляризатора равна единице, и таким образом, в системе отсутствует поглощение. Составляющая, линейно поляризованная в определенном направлении θ_1, проходит через призму Волластона и попадает на детектор D_1. То же и для другого плеча. Предположим, что каждая фотонная пара характеризуется некоторым скрытым параметром λ, значение которого неизвестно, но λ имеет некоторую плотность вероятности $\rho(\lambda)$. Пусть $p_j(\theta_j,\lambda)$ — вероятность того, что фотон в плече j достигает детектора D_1, когда линейный поляризатор в плече j установлен для пропускания под углом поляризации θ_1, а λ — данный скрытый параметр. Предположение о локальности содержится в утверждении, что $p_j(\theta_j,\lambda)$ зависит только от θ_1, а не от фиксации поляризатора. Пусть $p_j(-,\lambda)$ есть соответствующая вероятность, когда поляризатор в плече j отсутствует. Тогда, поскольку $p_j(-,\lambda)$ не может зависеть от θ_1, имеем

$$p_j(\theta_j,\lambda) \leqslant p_j(-,\lambda). \qquad (12.14.19)$$

Это соотношение иногда называют «предположением о возрастании» (Clauser and Horne, 1974), но в данном случае, это требование (Reid and Walls, 1986), обусловленное свойствами поляризатора.

Тогда совместная вероятность $P_{12}(\theta_1,\theta_2)$ детектирования обоими детекторами D_1 и D_2 в случае, когда линейные поляризаторы установлены под углами θ_1, θ_2, и когда детекторы не чувствительны к поляризации, получается умножением $p_1(\theta_1,\lambda)$ на $p_2(\theta_2,\lambda)$ и суммированием по всем значениям скрытого параметра λ и имеет вид

$$P_{12}(\theta_1,\theta_2) = \alpha_1\alpha_2 \int p_1(\theta_1,\lambda)p_2(\theta_2,\lambda)\rho(\lambda)\,d\lambda, \qquad (12.14.20)$$

где α_1, α_2 — квантовые выходы этих двух детекторов, которые считаются независимыми от поляризации, и вновь предполагается достоверная выборка. Аналогично, если $P_{12}(\theta_1,-)$, $P_{12}(-,\theta_2)$ означают совместную вероятность детектирования двух фотонов обоими детекторами D_1 и D_2, когда один или другой линейный поляризатор отсутствует, то имеем

$$P_{12}(\theta_1,-) = \alpha_1\alpha_2 \int p_1(\theta_1,\lambda)p_2(-,\lambda)\rho(\lambda)\,d\lambda, \quad P_{12}(-,\theta_2) = \alpha_1\alpha_2 \int p_1(-,\lambda)p_2(\theta_2,\lambda)\rho(\lambda)\,d\lambda. \qquad (12.14.21)$$

Теперь воспользуемся алгебраическим неравенством (Clauser and Horne, 1974, прил. A)

$$-1 \leqslant xy - xy' + x'y + x'y' - x' - y \leqslant 0, \tag{12.14.22}$$

которое выполняется для всех $0 \leqslant x, y, x', y' \leqslant 1$. Учитывая соотношение (12.14.19), полагаем

$$\begin{aligned} x &= p_1(\theta_1, \lambda)/p_1(-, \lambda), \quad x' = p_1(\theta_1', \lambda)/p_1(-, \lambda), \\ y &= p_2(\theta_2, \lambda)/p_2(-, \lambda), \quad y' = p_2(\theta_2', \lambda)/p_2(-, \lambda). \end{aligned} \tag{12.14.23}$$

Умножая каждый член неравенства (12.14.22) на выражение $\alpha_1\alpha_2 p_1(-, \lambda)p_2(-, \lambda)p(\lambda)$, интегрируя по всем λ и используя определения (12.14.20), (12.14.21), мы получаем следующее неравенство Белла в форме Клаузера — Хорна (Clauser and Horne, 1974):

$$S \equiv P_{12}(\theta_1, \theta_2) - P_{12}(\theta_1, \theta_2') + P_{12}(\theta_1', \theta_2) + P_{12}(\theta_1', \theta_2') - P_{12}(\theta_1', -) - P_{12}(-, \theta_2) \leqslant 0. \tag{12.14.24}$$

Предполагается, что любая реалистическая локальная теория подчиняется этому соотношению, которое содержит только непосредственно измеряемые величины. Поскольку каждый член этого выражения пропорционален α_1, α_2, можно поделить его на $\alpha_1\alpha_2$ и получить выражение, которое не зависит от квантовых выходов детекторов.

Теперь покажем, что квантово-механические уравнения (12.14.4) и (12.14.5) нарушают это неравенство. Для этой цели вновь полагаем углы равными

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 3\pi/8, \quad \theta_1' = -\pi/4, \quad \theta_2' = \pi/8$$

и воспользуемся (12.14.4) и (12.14.5) для вычисления вероятностей. Тогда при S, определяемым выражением (12.14.24), получаем

$$S/\alpha_1\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0.207. \tag{12.14.25}$$

Это выражение является положительным и, очевидно, нарушает неравенство (12.14.24).

12.14.4. Экспериментальное подтверждение

Был осуществлен ряд экспериментов, подтверждающих такие нарушения локальности (Freedman and Clauser, 1972; Clauser, 1976; Fry and Thompson, 1976; Aspect, Grangier and Roger, 1981, 1982; Aspect, Dalibard and Roger, 1982; Ou and Mandel, 1988; Shih and Alley, 1988). На рис. 12.11 показана схема установки Аспекта, Далибарда и Роджера (Aspect, Dalibard and Roger, 1982). Фотонная пара получается из двухфотонного каскадного распада $J = 0 \to J = 1 \to J = 0$ атомов кальция. C_{I} и C_{II} обозначают акусто-оптические переключатели, которые направляют каждый фотон к одному из двух различных поляризаторов, за которыми следует детектор, зависящий от положения переключателя. Пока фотон перемещается между источником и детекторами, несколько раз происходит переключение, так что направление поляризации выбирается случайным образом, пока фотон находится в пути. Тем не менее, как следует из (12.14.5), были наблюдены сильные квантовые корреляции между поляризациями двух фотонов и было обнаружено, что неравенство Белла нарушается на пять стандартных отклонений

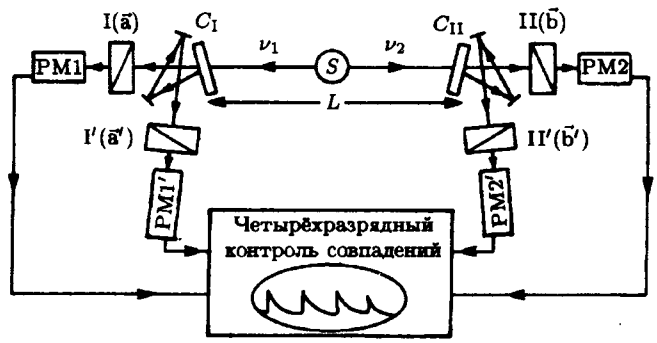


Рис. 12.11. Схема эксперимента, демонстрирующего нарушения неравенства Белла при измерении корреляций поляризации. Оптические переключатели C_{I} и C_{II} направляют каждый фотон по одному из возможных путей, через поляризатор к детектору (воспроизводится из работы Aspect, Dalibard and Roger, 1982)

Подобные корреляции поляризации также имеют место при двухфотонной вниз-конверсии в нелинейном кристалле (т.е. параметрическом распаде одного фотона на два)(см. разд. 22.4), когда поляризации двух фотонов устанавливаются ортогональными и фотоны смешиваются на делителе

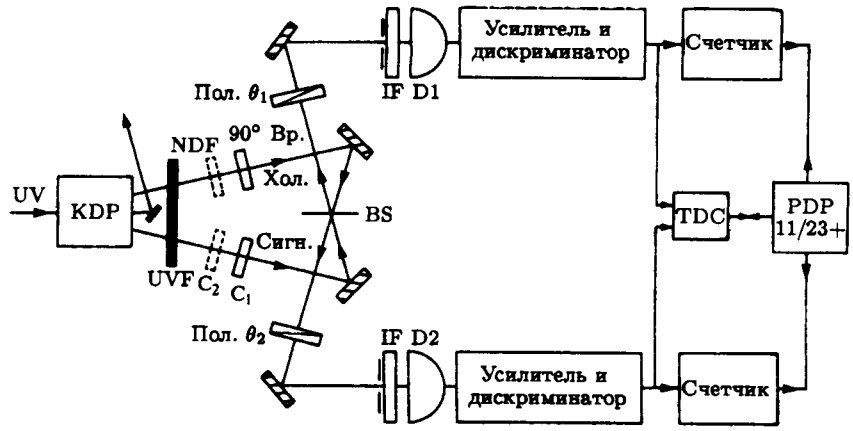


Рис. 12.12. Экспериментальная установка для демонстрации нарушения локальности в измерениях корреляций поляризации между смешанными фотонами, возникающими при параметрическом распаде, сигнальным и холостым. (Воспроизводится из работы Ou and Mandel, 1988)

пучка. На рис. 12.12 показана схема такого эксперимента. Пары фотонов, возникающие после параметрического распада, будучи ортогонально поляризованными, подаются на два входа 50% : 50%-делителя пучка, тогда как линейные поляризаторы, ориентированные под углами θ_1 и θ_2, за которыми следуют детекторы, помещаются около двух выходов. В случае равных путей, совместная вероятность детектирования $P_{12}(\theta_1, \theta_2)$ для каждой испущенной фотонной пары задается формулой

$$P_{12}(\theta_1, \theta_2) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{4} \sin^2(\theta_1 + \theta_2), \tag{12.14.26}$$

которую можно сравнить с (12.14.5). Обнаруживается, что неравенство, схожее с (12.14.24), которое должно удовлетворяться для локальной теории скрытых параметров, нарушается на шесть стандартных отклонений; кроме того, нарушается классическая волновая оптика. Из этого следует, что в данном эксперименте невозможно описывать свет ни как поток классических частиц, ни как классические волны. В последующих экспериментах наблюдались еще более заметные нарушения (Kiess, Shih, Sergienko and Alley, 1994).

12.14.5. Неклассические состояния и неравенства Белла

В заключение ненадолго вернемся к интегральному соотношению (12.14.20) для совместной вероятности $P_{12}(\theta_1, \theta_2)$ детектирования фотонов двумя детекторами, помещенными за поляризаторами θ_1 и θ_2, которое было выведено с использованием законов классической вероятности, примененных к локальной теории скрытых параметров. Для того, чтобы понять, в чем отличие данного выражения от соответствующего квантово-механического выражения, вспомним из разд. 12.2, что мы можем квантово-механически записать (для идеальных детекторов)

$$P_{12}(\theta_1, \theta_2) = \langle : \hat{n}_1 \hat{n}_2 : \rangle = \mathrm{Tr}\,(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_1 \hat{\rho}), \tag{12.14.27}$$

где $\hat{n}_1 \equiv \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1$, $\hat{n}_2 \equiv \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2$ — операторы числа фотонов для полей на детекторах за поляризаторами, а $\hat{\rho}$ — оператор плотности. Теперь воспользуемся так называемой оптической теоремой эквивалентности (см. разд. 11.8) для нормально упорядоченных операторов, которая дает нам возможность выразить среднее в (12.14.5) в виде интеграла по фазовому пространству

$$P_{12}(\theta_1, \theta_2) = \int |v_1|^2 |v_2|^2 \phi(v_1, v_2)\, d^2 v_1\, d^2 v_2. \tag{12.14.28}$$

Здесь $\phi(v_1, v_2)$ — диагональное представление $\hat{\rho}$ по когерентным состояниям. Мы можем трактовать $|v_1|^2$ и $|v_2|^2$ как меры вероятностей $\mathscr{P}_1(\theta_1 \mid v_1)$ и $\mathscr{P}_2(\theta_1 \mid v_1)$ (с точностью до положительного действительного множителя), соответственно, для фотонов, детектируемых за поляризаторами, когда комплексная амплитуда поля имеет заданное значение. Тогда (12.14.28) имеет формальную структуру, весьма схожую с (12.14.20). Но, как мы уже видели, квантовая механика допускает состояния, для которых $\phi(v_1, v_2)$ не является истинной плотностью вероятности, тогда как $\rho(\lambda)$ является плотностью вероятности. Это имеет место по причине существования таких неклассических состояний, для которых $\phi(v_1, v_2)$ может быть отрицательной или очень сингулярной, так что квантово-механические вероятности $P_{12}(\theta_1, \theta_2)$ не ограничиваются неравенством Белла (12.14.24) и другими подобными неравенствами (Reid and Walls, 1986; Su and Wódkiewicz, 1991).

Задачи

12.1 Вычислите нормированную, нормально упорядоченную автокорреляционную функцию интенсивности $\lambda(\tau) = \langle : \Delta\hat{I}(t)\Delta\hat{I}(t+\tau) : \rangle / \langle \hat{I} \rangle^2$ для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в одном направлении и находящейся в фоковском состоянии $|\{n\}\rangle$. Считайте $\hat{I}(t)$ плотностью фотонов.

12.2 Найдите предельный вид $\lambda(\tau)$ из предыдущей задачи, когда интервал $\delta\omega$ между модами стремится к нулю и общее число фотонов $n \to \infty$, так что отношение $n_{\mathbf{k}s}/n \to \phi(\omega)\delta\omega$, где $\phi(\omega)$ — непрерывная, нормированная спектральная плотность.

12.3 Выразите оператор $\exp(\hat{n}_{\mathbf{k}s}x)$ в нормальном и антинормальном порядках.

12.4 Исходя из выражений для дифференциальной совместной вероятности фотоэлектрических детектирований, выведите общую формулу для плотности вероятности $P(\tau)$ того, что два успешных фотоэлектрических детектирования с помощью фотодетектора, освещаемого стационарным пучком света, разделены временны́м интервалом τ. Определите $P(\tau)$ для одномодового лазера со случайной фазой, когда средняя скорость счета фотонов равна R.

12.5 Сорокапятиградусный делитель пучка имеет входы, обозначенные как 0, 1 и выходы, обозначенные как 2, 3. Пусть r, t являются амплитудными коэффициентами отражения и пропускания поля через вход 0, а r', t' через вход 1, соответственно, и предположим, что $|r| = |r'|$, $|t| = |t'|$, $|r|^2 + |t|^2 = 1$, $r't^* + r^*t' = 0$. Одномодовое поле в когерентном состоянии $|v\rangle$ попадает на вход 0, а фотон той же самой частоты попадает на вход 1. Определите, при каких условиях взаимная корреляционная функция $\langle : \Delta\hat{n}_2\Delta\hat{n}_3 : \rangle$ между двумя выходами отрицательна.

12.6 Рассмотрите одномодовое электромагнитное поле. Используя выражение для вероятности $P(m)$ обнаружения m фотонов, вычислите среднее величины $\cos(\hat{n}\theta)$ в когерентном состоянии $|v\rangle$.

12.7 Вычислите $\langle v|(\hat{n}^2 + 5\hat{n} + 2)^{-1}|v\rangle$, используя тот же метод, что и при решении задачи 12.6.

12.8 Покажите, что для одномодового поля в состоянии $\phi(v)$ в P-представлении

$$\langle \hat{n}^3 \rangle = \int \phi(v)[|v|^6 + 3|v|^4 + |v|^2]\, d^2v.$$

12.9 Вычислите вероятность $p(n)$ обнаружения n фотонов в одномодовом оптическом поле, когда состояние:

(а) равновзвешенная суперпозиция когерентных состояний $|v'\rangle$ и $|v''\rangle$;

(б) равновзвешенная некогерентная смесь когерентных состояний $|v'\rangle$ и $|v''\rangle$;

(в) является результатом интерференции двух электромагнитных полей в состояниях $|v'\rangle$ и $|v''\rangle$.

Глава 13

ИЗЛУЧЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ, НАХОДЯЩИХСЯ В СОСТОЯНИИ ТЕПЛОВОГО РАВНОВЕСИЯ

Мы уже вывели целый ряд общих свойств квантованного электромагнитного поля и встретились с некоторыми полезными методами рассмотрения определенных проблем квантовой оптики. Были введены корреляционные функции поля и показано в общем виде, как они связаны с измерениями. Выбирая иллюстрирующие примеры, мы стремились сосредоточить наше внимание, главным образом, на определенных идеализированных квантовых состояниях поля, таких, как фоковские состояния или когерентные состояния. Однако, существует еще не рассмотренный нами важный класс оптических полей с простыми свойствами — так называемые тепловые поля, который включает большинство полей, обычно встречаемых на практике. Эти поля создаются источниками, находящимися в состоянии теплового равновесия, и обладают многими свойствами, которые можно рассмотреть почти точно в нашем формализме. Обратимся теперь к изучению этих полей.

13.1. Излучение черного тела

13.1.1. Оператор плотности

Излучением черного тела называется электромагнитное поле, находящееся в состоянии теплового равновесия с большим тепловым резервуаром (или тепловой баней) при некоторой температуре T. По определению такое поле предполагается взаимодействующим с тепловой баней и, следовательно, не является свободным в том смысле, который использовался в предыдущих главах. Однако взаимодействие может быть настолько слабым, насколько мы захотим, и из общей теории статистической термодинамики хорошо известно, что свойства системы, имеющей много степеней свободы и находящейся в состоянии теплового равновесия (описываемой каноническим ансамблем), часто похожи на свойства эквивалентной изолированной системы (описываемой микроканоническим ансамблем). В общем случае система, описываемая полным гамильтонианом $\hat{H}$ и находящаяся в состоянии теплового равновесия при температуре T, имеет оператор плотности $\hat{\rho}$, задаваемый распределением Больцмана

$$\hat{\rho} = \frac{\exp(-\hat{H}/k_{\mathrm{B}}T)}{\mathrm{Tr}\left[\exp(-\hat{H}/k_{\mathrm{B}}T)\right]}, \tag{13.1.1}$$

где k_{B} — постоянная Больцмана ($k_{\mathrm{B}} \approx 1.38 \times 10^{-23}$ Дж/К). Выражение (13.1.1) описывает хорошо известный канонический ансамбль, в котором вероятность любого состояния экспоненциально зависит от энергии, так что для каждой степени свободы значения энергии, превышающие $k_{\mathrm{B}}T$, очень маловероятны.

Применим (13.1.1) к квантованному оптическому полю, находящемуся в кубическом резонаторе со стороной L. Тогда согласно (10.3.15)

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},s} \left(\hat{n}_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega,$$

и оператор плотности поля принимает вид

$$\hat{\rho} = \frac{\exp\left(-\sum\limits_{\mathbf{k},s} \hat{n}_{\mathbf{k}s}\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T\right)}{\mathrm{Tr}\left[\exp\left(-\sum\limits_{\mathbf{k},s} \hat{n}_{\mathbf{k}s}\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T\right)\right]}. \tag{13.1.2}$$

Стоит отметить, что вызывающая затруднения энергия нулевых колебаний исключена автоматически при нормировке. Безразмерное отношение $\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T$ встречается очень часто, поэтому обозначим его в виде

$$\beta \equiv \hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T. \tag{13.1.3}$$

Замечая, что

$$\mathrm{Tr}\, f(\hat{n}_{\mathbf{k}s}) = \sum_{n_{\mathbf{k}s}} \langle n_{\mathbf{k}s}|f(\hat{n}_{\mathbf{k}s})|n_{\mathbf{k}s}\rangle = \sum_{n_{\mathbf{k}s}} f(n_{\mathbf{k}s}),$$

так что

$$\mathrm{Tr}\left[\exp\left(\sum_{\mathbf{k},s} \hat{n}_{\mathbf{k}s}\beta\right)\right] = \mathrm{Tr}\prod_{\mathbf{k},s}(\mathrm{e}^{-\hat{n}_{\mathbf{k}s}\beta}) = \prod_{\mathbf{k},s}\sum_{n_{\mathbf{k}s}} \mathrm{e}^{-\beta n_{\mathbf{k}s}} = \prod_{\mathbf{k},s}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\beta}}\right),$$

и подставляя в (13.1.2), получаем формулу

$$\hat{\rho} = \prod_{\mathbf{k},s}(1-\mathrm{e}^{-\beta})\,\mathrm{e}^{-\beta\hat{n}_{\mathbf{k}s}} \equiv \prod_{\mathbf{k},s}\hat{\rho}_{\mathbf{k}s}. \tag{13.1.4}$$

Изменение порядка операций Tr и $\prod_{\mathbf{k},s}$ возможно, поскольку операторы, относящиеся к разным модам, действуют в различных подпространствах гильбертова пространства.

Согласно выражению (13.1.4) оператор плотности представляется в виде произведения операторов плотности $\hat{\rho}_{\mathbf{k},s}$ отдельных мод, так что все моды электромагнитного поля являются статистически независимыми друг от друга. Тот факт, что единственный параметр выражения (13.1.4) — β, не зависит от направления $\mathbf{k}$ или от поляризации s для каждой $\mathbf{k}, s$-моды, уже означает то, что поле является изотропным и неполяризованным, как будет более точно показано ниже. Более того, поскольку $\hat{\rho}$ является функционалом на множестве операторов числа фотонов $\hat{n}_{\mathbf{k},s}$, он описывает поле, которое является как стационарным, так и пространственно однородным (ср. разд. 12.8).

13.1.2. Статистика фотонов

Согласно выражению (13.1.4) оператор $\hat{\rho}$, очевидно, является диагональным в фоковском представлении $|\{n\}\rangle$. Умножая каждый множитель в (13.1.4) на единицу, записанную в виде

$$1 = \sum_{n_{\mathbf{k}s}} |n_{\mathbf{k}s}\rangle\langle n_{\mathbf{k}s}|,$$

и используя то, что $|n_{\mathbf{k}s}\rangle$ является собственным состоянием оператора $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$, получаем

$$\hat{\rho} = \prod_{\mathbf{k},s}(1-\mathrm{e}^{-\beta})\sum_{n_{\mathbf{k}s}} \mathrm{e}^{-\beta\hat{n}_{\mathbf{k}s}}|n_{\mathbf{k}s}\rangle\langle n_{\mathbf{k}s}| = \sum_{\{n\}}\prod_{\mathbf{k},s}(1-\mathrm{e}^{-\beta})\,\mathrm{e}^{-\beta n_{\mathbf{k}s}}|n_{\mathbf{k}s}\rangle\langle n_{\mathbf{k}s}|. \tag{13.1.5}$$

Коэффициент перед $|n_{\mathbf{k}s}\rangle\langle n_{\mathbf{k}s}|$ есть вероятность $p(n_{\mathbf{k}s})$ обнаружить $n_{\mathbf{k}s}$ фотонов в $\mathbf{k}, s$-моде. Тогда для совместной вероятности $p(\{n\})$ множества чисел заполнения фотонов $\{n\}$ имеем

$$p(\{n\}) = \prod_{\mathbf{k},s} p(n_{\mathbf{k}s}),$$

где

$$p(n_{\mathbf{k}s}) = (1 - \mathrm{e}^{-\beta})\,\mathrm{e}^{-\beta n_{\mathbf{k}s}}. \tag{13.1.6}$$

Числа заполнения различных мод статистически независимы и распределены экспоненциально по $n_{\mathbf{k}s}$.

Получив совместную вероятность $p(\{n\})$, можно легко вычислить все моменты величины $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$. Вместо того, чтобы определять каждый момент индивидуально, легче определить их все сразу через производящую функцию факториального момента

$$F(\xi) \equiv \langle (1+\xi)^{\hat{n}_{\mathbf{k}s}} \rangle = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\xi^r}{r!} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s}^{(r)} \rangle.$$

Коэффициент при $\xi^r/r!$ в разложении $F(\xi)$ в степенной ряд есть r-ый факториальный момент

$$\langle \hat{n}_{\mathbf{k}s}^{(r)} \rangle \equiv \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s}(\hat{n}_{\mathbf{k}s} - 1) \ldots (\hat{n}_{\mathbf{k}s} - r + 1) \rangle.$$

С помощью (13.1.6) сразу находим, что

$$F(\xi) = \sum_{n_{\mathbf{k}s}=0}^{\infty} (1+\xi)^{n_{\mathbf{k}s}} (1 - \mathrm{e}^{-\beta})\,\mathrm{e}^{-\beta n_{\mathbf{k}s}} =$$

$$= \frac{1 - \mathrm{e}^{-\beta}}{1 - (1+\xi)\,\mathrm{e}^{-\beta}} = \frac{1}{1 - \xi/(\mathrm{e}^{\beta} - 1)} = 1 + \frac{\xi}{\mathrm{e}^{\beta} - 1} + \frac{\xi^2}{(\mathrm{e}^{\beta} - 1)^2} + \ldots$$

откуда следует, что коэффициент при $\xi^r/r!$ имеет вид

$$\langle \hat{n}_{\mathbf{k}s}^{(r)} \rangle \equiv \frac{r!}{(\mathrm{e}^{\beta} - 1)^r}. \tag{13.1.7}$$

Следовательно, полагая $r = 1$, получаем среднее число фотонов в $\mathbf{k}, s$-моде

$$\langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta} - 1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T} - 1}. \tag{13.1.8}$$

Если $r = 2$, то $\langle \hat{n}_{\mathbf{k}s}^{(2)} \rangle = 2\langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle^2$, так что $\langle \hat{n}_{\mathbf{k}s}^2 \rangle = \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle + 2\langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle^2$, и

$$\langle (\Delta \hat{n}_{\mathbf{k}s})^2 \rangle = \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s}^2 \rangle - \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle^2 = \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle (1 + \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle). \tag{13.1.9}$$

Используя (13.1.8) можно заменить e^{β} на $1 + 1/\langle n_{\mathbf{k}s} \rangle$ в выражении (13.1.6) и выразить вероятность $p(\{n\})$ непосредственно через среднее число заполнения $\langle n_{\mathbf{k}s} \rangle = \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle$. В результате получим

$$p(\{n\}) = \prod_{\mathbf{k},s} \frac{1}{[1 + \langle n_{\mathbf{k}s} \rangle][1 + 1/\langle n_{\mathbf{k}s} \rangle]^{n_{\mathbf{k}s}}}, \tag{13.1.10}$$

Выражение имеет стандартный вид произведения распределений Бозе — Эйнштейна (см. разд. 1.5.3). Таким образом, тепловые равновесные фотоны подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна.

Выражение (13.1.8) показывает, что среднее число заполнения каждой моды зависит только от частоты ω и от температуры T, и что все моды, отвечающие разным направлениям волнового вектора $\mathbf{k}$ и разным поляризациям, одинаково заселены в среднем. Отметим также, что размер объема квантования L^3 не входит в выражение для $\langle n_{\mathbf{k}s} \rangle$. Хотя среднее полное число фотонов $\sum_{\mathbf{k},s} \langle n_{\mathbf{k}s} \rangle$ пропорционально L^3, плотность мод изменяется как $1/L^3$, так что $\langle n_{\mathbf{k}s} \rangle$ не зависит от геометрии. Нетрудно сделать оценку порядка величины $\langle n_{\mathbf{k}s} \rangle$ в оптическом диапазоне для типичной температуры T излучения. Поскольку оптические частоты накрывают относительно малый диапазон, величина $\hbar\omega$ всегда находится в пределах от 1.5 до 2.5 эВ. При температуре $T \sim 3000\,\mathrm{K}$, которая характерна для излучения ламп накаливания, $k_{\mathrm{B}}T \sim 0.3$ эВ, и, следовательно, $\langle n_{\mathbf{k}s} \rangle \sim \frac{1}{\mathrm{e}^{2/0.3} - 1} \sim 10^{-3}$, тогда как на поверхности солнца, где $T \sim 5000\,\mathrm{K}$ и $k_{\mathrm{B}}T \sim 0.5$ эВ, $\langle n_{\mathbf{k}s} \rangle \sim 10^{-2}$. Эти значения, конечно, меньше при более низких температурах. Мы видим, что средние

числа заполнения фотонов очень малы для тепловых оптических полей, обычно встречаемых на практике, и что большинство мод, как правило, незаполнены. Поскольку различные моды независимы, оптические фотоны, создаваемые привычными тепловыми равновесными источниками, также независимы в первом приближении. Это следует и из выражения (13.1.9), которое в этих условиях дает $\langle(\Delta n_{\mathbf{k}s})^2\rangle \sim \langle n_{\mathbf{k}s}\rangle$, что характерно для пуассоновской статистики. Тем не менее, небольшие отклонения от строго пуассоновской статистики могут привести к важным наблюдаемым эффектам, как это будет видно в гл. 14. Ситуация, конечно, меняется при достаточно высоких температурах, когда $\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle$ становится пропорциональным T, как видно из (13.1.8). Однако, требуются чрезвычайно высокие температуры, такие, как температуры, характерные для реакций термоядерного синтеза, прежде чем числа заполнения фотонов станут большими. Число $\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle$ остается все еще порядка единицы для оптических длин волн при температуре около 30000K.

13.1.3. Поляризация

Рассмотрим более подробно состояние поляризации поля. Для любой плоской волны, имеющей волновой вектор $\mathbf{k}$, можно определить эрмитову 2×2-матрицу когерентности (или поляризации) $\mathbf{J}(\mathbf{k})$ (см. разд. 6.2) следующим образом:

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}1}\hat{a}_{\mathbf{k}1}\rangle & \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}1}\hat{a}_{\mathbf{k}2}\rangle \\ \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}2}\hat{a}_{\mathbf{k}1}\rangle & \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}2}\hat{a}_{\mathbf{k}2}\rangle \end{bmatrix},$$

которая описывает поляризацию и является очевидным обобщением обычного определения на квантовый случай. В силу разбиения оператора плотности $\hat{\rho}$ на множители, соответствующие составляющим модам, последние являются независимыми, и

$$\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}1}\hat{a}_{\mathbf{k}2}\rangle = \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}1}\rangle\langle \hat{a}_{\mathbf{k}2}\rangle, \quad \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}2}\hat{a}_{\mathbf{k}1}\rangle = \langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}2}\rangle\langle \hat{a}_{\mathbf{k}1}\rangle,$$

а поскольку $\hat{\rho}$ диагонален в $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$-представлении,

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}1}\rangle = 0 = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}2}\rangle \tag{13.1.11}$$

независимо от характера базиса поляризации.

Из (13.1.11) следует, что среднее значение положительно- и отрицательно-частотных частей электрического поля, магнитного поля, векторного потенциала или поля, полученного путем любого однородного линейного преобразования этих полей, должно обращаться в нуль для излучения черного тела

$$\langle \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle = 0, \quad \langle \hat{\mathbf{B}}^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle = 0 \quad \langle \hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle = 0. \tag{13.1.12}$$

Тогда, учитывая (13.1.8), получаем

$$\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}s'}\rangle = \delta_{ss'}\left(\frac{1}{e^\beta - 1}\right), \tag{13.1.13}$$

так что матрица $\mathbf{J}(\mathbf{k})$ диагональна и сводится к единичной матрице

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{e^\beta - 1}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{13.1.14}$$

Как мы уже видели в разд. 6.3.1, такая форма $\mathbf{J}$ характерна для неполяризованного света и она не зависит от базиса поляризации, выбранного для представления. Таким образом, каждая $\mathbf{k}$-составляющая излучения черного тела является неполяризованной.

Теперь рассмотрим полное поле. Пусть $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ есть положительно-частотная часть любого из векторов электромагнитного поля типа $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, разложение которой по плоским волнам имеет вид

$$\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s} l(\omega)\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}.$$

Тогда для корреляционной функции декартовых составляющих получаем

$$\langle \hat{F}^{(-)}_i(\mathbf{r},t)\hat{F}^{(+)}_j(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}\sum_{\mathbf{k}',s'} l^*(\omega)l(\omega')\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}\rangle(\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s})_i(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'s'})_j\, e^{i[(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}-(\omega'-\omega)t]}.$$

Ввиду независимости различных плоских мод, с учетом (13.1.11) и (13.1.13) имеем

$$\langle \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}\rangle = \delta^3_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}\left(\frac{1}{e^{\beta}-1}\right),$$

так что

$$\langle \hat{F}_i^{(-)}(\mathbf{r},t)\hat{F}_j^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}\frac{|l(\omega)|^2}{(e^{\beta}-1)}(\varepsilon^*_{\mathbf{k}s})_i(\varepsilon_{\mathbf{k}'s'})_j \Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{|l(\omega)|^2}{(e^{\beta}-1)}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)d^3k$$

после использования тензорного разложения (10.2.19в) и перехода к непрерывному пределу. Если $i=j$, то результат не зависит от i по соображениям симметрии. Если $i\neq j$, то $\delta_{ij}=0$, и член k_ik_j при интегрировании даст нуль по соображениям симметрии. Следовательно, матрица когерентности или поляризации $\langle \hat{F}_i^{(-)}\hat{F}_j^{(+)}\rangle$ опять пропорциональна единичной матрице, как в (13.1.14).

13.1.4. Спектральные распределения

С помощью (13.1.8) можно получить функцию спектрального распределения $\Phi(\omega)$, такую, что величина $\Phi(\omega)\,d\omega$ равна плотности фотонов, находящихся в частотном интервале $d\omega$. Используя значение плотности мод $(L/2\pi)^3$, получаем следующее выражение для плотности фотонов, приходящихся на бесконечно малый интервал d^3k

$$\text{Плотность фотонов, приходящихся на бесконечно малый интервал } d^3k = \left(\frac{\langle n_{\mathbf{k}1}\rangle + \langle n_{\mathbf{k}2}\rangle}{L^3}\right)\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d^3k = \frac{1}{4\pi^3(e^{\hbar\omega/k_BT}-1)}d^3k.$$

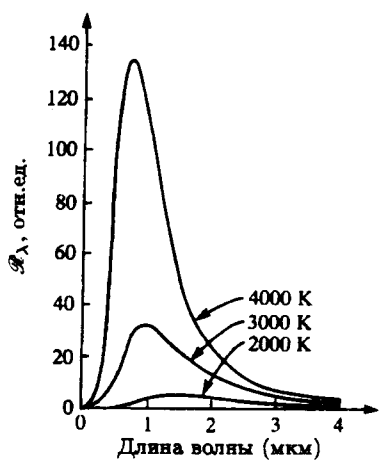


Рис. 13.1. Распределение энергии излучения по длине волны согласно закону Планка при трех различных температурах (Halliday and Resnick, 1970, с. 759)

Полагая затем, что $d^3k=(\omega^2/c^3)\,d\omega\,d\Omega$, где $d\Omega$ есть элемент телесного угла, и интегрируя по всем направлениям, сразу получим

$$\Phi(\omega)\,d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2c^3(e^{\hbar\omega/k_BT}-1)}\,d\omega. \tag{13.1.15}$$

С другой стороны, поскольку каждый фотон частоты ω несет энергию $\hbar\omega$, можно записать соответствующее выражение для плотности энергии $u(\omega)\,d\omega$, приходящейся на частотный интервал $d\omega$

$$u(\omega)\,d\omega = \hbar\omega\Phi(\omega)\,d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3(e^{\hbar\omega/k_BT}-1)}\,d\omega. \tag{13.1.16}$$

Это распределение энергии называется распределением Планка и иллюстрируется на рис. 13.1 как функция длины волны. Оно было получено Планком (Planck, 1901a, b) на основе эмпирических данных и использовалось им для обоснования квантования энергии электромагнитного поля. При малых значениях ω распределение $u(\omega)$ пропорционально ω^2, что соответствует закону Рэлея, но оно достигает максимума на частоте ω порядка $3k_BT/\hbar$, а затем опять спадает к нулю. Положение максимума определяется законом смещения Вина. Окончательно, интегрируя по всем частотам, приходим к плотности полной энергии u электромагнитного поля при температуре T

$$u=\int_0^{\infty}\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3(e^{\hbar\omega/k_BT}-1)}\,d\omega=\frac{(k_BT)^4}{\pi^2c^3\hbar^3}\int_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x-1}\,dx=\frac{(k_BT)^4}{\pi^2c^3\hbar^3}3!\zeta(4), \tag{13.1.17a}$$

где

$$\zeta(r)\equiv\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{\infty}\frac{x^{r-1}}{e^x-1}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}\quad(r>1)$$

— дзета-функция Римана. Можно показать, что $\zeta(4) = \pi^4/90$. Пропорциональность u температуре T в четвертой степени, задаваемая формулой (13.1.17а), называется *законом Стефана — Больцмана*.

Совершенно аналогично, можно проинтегрировать $\Phi(\omega)$ (13.1.15) по всем частотам и получить среднюю плотность фотонов при температуре T. В результате находим, что

$$\text{средняя плотность фотонов} = \int_0^\infty \Phi(\omega)\,d\omega = \frac{(k_B T)^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} 2\zeta(3). \tag{13.1.17б}$$

Как будет показано ниже, корреляции в поле излучения черного тела имеют место в области, линейный размер которой порядка $\hbar c/k_B T$, так что величина $(\hbar c/k_B T)^3$ имеет порядок объема когерентности. Формула (13.1.17б) выражает интересный результат, состоящий в том, что среднее число фотонов в объеме когерентности излучения черного тела по порядку величины всегда равно единице (Mandel, 1979).

13.1.5. Диагональное представление $\hat{\rho}$ по когерентным состояниям

Хотя мы и нашли, что оператор плотности $\hat{\rho}$ поля излучения черного тела диагонален в фоковском представлении, напомним, что согласно разд. 11.8 тот же оператор плотности можно привести к диагональному виду и в представлении по когерентным состояниям. Учитывая полезные свойства данного представления, обратимся теперь к задаче выражения $\hat{\rho}$ в базисе когерентных состояний.

В разд. 11.8 были рассмотрены некоторые общие методы нахождения весовой функции диагонального представления $\phi(v)$ для одномодового оптического поля. В частности, согласно формуле (11.8.11) $\phi(v)$ можно получить путем обратного преобразования Фурье матричного элемента $\exp(|u|^2)\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle$, где u — комплексное число, а $|u\rangle$ и $|-u\rangle$ — когерентные состояния. Обобщая очевидным образом на случай многомодового поля, получаем следующее интегральное представление оператора плотности

$$\hat{\rho} = \int \phi(\{v\})|\{v\}\rangle\langle\{v\}|\,d\{v\}, \tag{13.1.18а}$$

где весовой функционал имеет вид

$$\phi(\{v\}) = \int \langle -\{u\}|\hat{\rho}\{u\}|\rangle \prod_{\mathbf{k},s} \left[e^{|v_{\mathbf{k}s}|^2 + |u_{\mathbf{k}s}|^2}\, e^{u^*_{\mathbf{k}s} v_{\mathbf{k}s} - u_{\mathbf{k}s} v^*_{\mathbf{k}s}} \frac{d^2 u_{\mathbf{k}s}}{\pi^2} \right]. \tag{13.1.18б}$$

Для вычисления матричного элемента воспользуемся выражениями (13.1.5) и (13.1.10), в результате чего найдем

$$\begin{aligned}\langle -\{u\}|\hat{\rho}|\{u\}\rangle &= \prod_{\mathbf{k},s} \sum_{n_{\mathbf{k}s}} \frac{1}{[1+\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle][1+1/\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle]^{n_{\mathbf{k}s}}} \langle -u_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle\langle n_{\mathbf{k}s}|u_{\mathbf{k}s}\rangle = \\ &= \prod_{\mathbf{k},s} \sum_{n_{\mathbf{k}s}} \frac{1}{[1+\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle][1+1/\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle]^{n_{\mathbf{k}s}}} \frac{(-|u_{\mathbf{k}s}|^2)^{n_{\mathbf{k}s}}\, e^{-|u_{\mathbf{k}s}|^2}}{n_{\mathbf{k}s}!} = \\ &= \prod_{\mathbf{k},s} \frac{\exp\left[-|u_{\mathbf{k}s}|^2 \left(1 + \dfrac{1}{1+1/\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle}\right)\right]}{[1+\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle]},\end{aligned} \tag{13.1.19}$$

где использовано выражение (11.2.11) для скалярного произведения фоковского и когерентного состояний. Подставляя теперь (13.1.19) в интеграл (13.1.18б), получаем формулу

$$\phi(\{v\}) = \prod_{\mathbf{k},s} \frac{e^{|v_{\mathbf{k}s}|^2}}{[1+\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle]} \int \exp\left(\frac{-|u_{\mathbf{k}s}|^2}{1+1/\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle}\right) e^{u^*_{\mathbf{k}s} v_{\mathbf{k}s} - u_{\mathbf{k}s} v^*_{\mathbf{k}s}} \frac{d^2 u_{\mathbf{k}s}}{\pi^2}.$$

Данный интеграл является характеристической функцией (или двумерным фурье-образом) комплексной гауссовской случайной переменной $u_{\mathbf{k}s}$ и согласно разд. 1.5.5 после интегрирования будем иметь

$$\phi(\{v\}) = \prod_{\mathbf{k},s} \frac{e^{|v_{\mathbf{k}s}|^2}}{[1+\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle]} \frac{[1+1/\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle]}{\pi} \exp[-|v_{\mathbf{k}s}|^2(1+1/\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle)] = \prod_{\mathbf{k},s} \frac{1}{\pi\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle} e^{-|v_{\mathbf{k}s}|^2/\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle}. \tag{13.1.20}$$

Среднее число заполнения $\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle$, конечно, задается выражением (13.1.8). Следовательно, весовой функционал является просто произведением гауссовских функций от комплексных переменных $v_{\mathbf{k}s}$. Выражение (13.1.20) есть еще одна замечательная иллюстрация удобства диагонального представления по когерентным состояниям, ибо состояния $|\{n\}\rangle$ и $|\{v\}\rangle$ являются собственными состояниями некоммутирующих операторов, хотя $\hat{\rho}$ диагонален как в базисе $|\{n\}\rangle$, так и в базисе $|\{v\}\rangle$, и имеет регулярные представления в каждом из них.

Стоит также отметить, что, будучи регулярной функцией в математическом смысле, $\phi(\{v\})$ имеет такой же вид, как и функционал вероятности, который использовался бы для классического описания поля излучения черного тела. Согласно центральной предельной теореме, поскольку вклад в полное поле и в возбуждение каждой моды дают много независимых излучателей, то следует ожидать, что распределение комплексной амплитуды $v_{\mathbf{k}s}$ каждой моды является гауссовским. При известном спектральном распределении, излучение черного тела будет иметь хорошее классическое описание, какими бы малыми не были числа заполнения фотонов, несмотря на то, что оператор $\hat{\rho}$ диагонален в базисе неклассических фоковских состояний.

13.1.6. Корреляционные функции излучения черного тела

Оператор плотности можно использовать для вычисления некоторых функций корреляции второго порядка оптического поля. По историческим причинам мы сосредоточимся на корреляциях, связанных с электрическим и магнитным полями, для которых положительно-частотные части операторов поля задаются первыми членами из (10.4.39) и (10.4.40)

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)=\frac{i}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2}\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{13.1.21}$$

$$\hat{\mathbf{B}}^{(+)}(\mathbf{r},t)=\frac{i}{cL^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2}\hat{a}_{\mathbf{k}s}(\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{13.1.22}$$

где $\boldsymbol{\kappa}\equiv\mathbf{k}/k$. Следовательно, нормально упорядоченный тензор корреляции второго порядка электрического поля определяется выражением

$$\mathscr{E}_{ij}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)\equiv\langle\hat{E}_i^{(-)}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{E}_j^{(+)}(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle=$$
$$=\frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}\sum_{\mathbf{k}',s'}\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2}\left(\frac{\hbar\omega'}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2}\langle\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}\rangle(\varepsilon^*_{\mathbf{k}s})_i(\varepsilon_{\mathbf{k}'s'})_j\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_2-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1-\omega' t_2+\omega t_1)}.$$

Поскольку все моды независимы, и согласно (13.1.11) $\langle\hat{a}_{\mathbf{k}s}\rangle=0$, последнее выражение, с учетом (13.1.13) сводится к следующему (Bourret, 1960; Sarfatt, 1963; Mehta and Wolf, 1964a, b)

$$\mathscr{E}_{ij}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)=\frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2}\frac{1}{(\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T}-1)}(\varepsilon^*_{\mathbf{k}s})_i(\varepsilon_{\mathbf{k}s})_j\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-\omega(t_2-t_1)]}.$$

Используя тензорное соотношение (10.8.2) и заменяя сумму по $\mathbf{k}$ интегралом, согласно (10.8.4) получаем

$$\mathscr{E}_{ij}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)=\frac{1}{(2\pi)^3}\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0}\right)\int\frac{\omega}{(\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T}-1)}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-\omega(t_2-t_1)]}\,d^3k. \tag{13.1.23}$$

Отметим, что эта корреляционная функция зависит только от разности как между пространственными, так и между временны́ми аргументами, поэтому поле является как пространственно однородным, так и стационарным, по крайней мере, в широком смысле. Как мы покажем в разд. 13.1.8, интеграл в (13.1.23) имеет также необходимые свойства симметрии, отвечающие изотропному полю (ср. разд. 12.8). Подобным

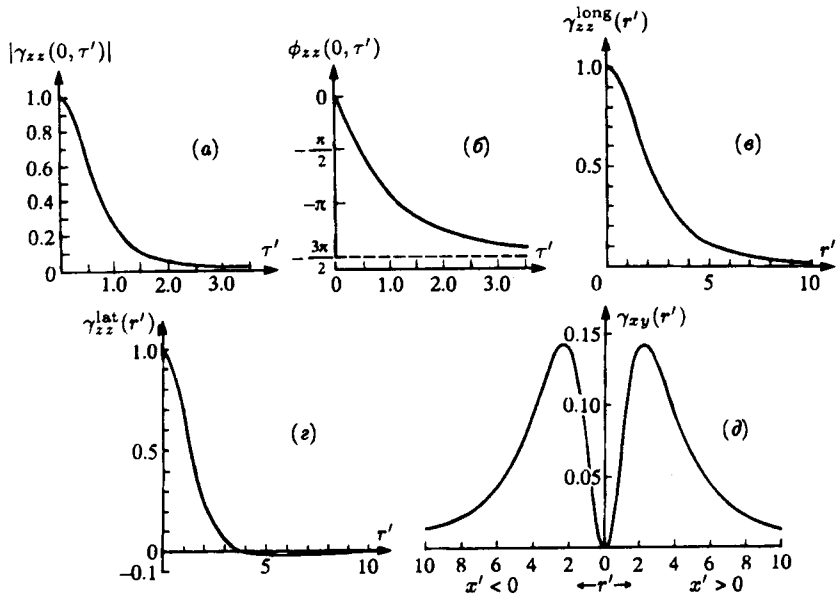


Рис. 13.2. Нормированные корреляционные функции электрического и магнитного полей излучения черного тела: *а* — модуль и *б* — фаза типичной диагональной компоненты как функции времени $\tau' = (k_{\rm B}T/\hbar)\tau$; *в* — изменение γ_{zz} при перемещении вдоль оси z ($r' = (\pi k_{\rm B}T/\hbar c)z$); *г* — изменение γ_{zz} при перемещении вдоль оси x ($r' = (\pi k_{\rm B}T/\hbar c)x$); *д* — изменение γ_{xy} при перемещении в направлении $x = y$ в плоскости z ($r' = (\pi k_{\rm B}T/\hbar c)(x^2+y^2)^{1/2}$). Рис. (*а*,*б*) взяты из (Kano and Wolf, 1962), рис. (*в*,*г*,*д*) взяты из (Mehta and Wolf, 1964a)

же образом из (13.1.22) следует, что для магнитного поля

$$\mathscr{B}_{ij}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2) \equiv \langle \hat{B}_i^{(-)}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{B}_j^{(+)}(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3}\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 c^2}\right)\int \frac{\omega}{(\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_{\rm B}T}-1)}\left(\delta_{ij}-\frac{k_i k_j}{k^2}\right)\mathrm{e}^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-\omega(t_2-t_1)]}\,d^3\mathbf{k}, \quad (13.1.24)$$

и для смешанного тензора корреляции

$$\mathscr{G}_{ij}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2) \equiv \langle \hat{E}_i^{(-)}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{B}_j^{(+)}(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle = \\ = \frac{\epsilon_{ijl}}{(2\pi)^3}\left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 c}\right)\int \frac{k_l}{(\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_{\rm B}T}-1)}\mathrm{e}^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-\omega(t_2-t_1)]}\,d^3\mathbf{k}. \quad (13.1.25)$$

Эти интегралы не вычисляются в конечном виде, хотя их можно представить в виде бесконечного ряда. Поведение $\mathscr{E}_{ij}$ и $\mathscr{B}_{ij}$ иллюстрируется на рис. 13.2, где показаны некоторые свойства нормированного тензора корреляции

$$\gamma_{ij}(\mathbf{r},\tau) \equiv \underset{\text{(нет суммирования)}}{\frac{\mathscr{E}_{ij}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_1+\mathbf{r},t_1+\tau)}{\mathscr{E}_{ii}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_1,t_1)}} = \underset{\text{(нет суммирования)}}{\frac{\mathscr{B}_{ij}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_1+\mathbf{r},t_1+\tau)}{\mathscr{B}_{ii}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_1,t_1)}} \quad (13.1.26)$$

как функции своих аргументов. Область, в которой функция $|\gamma_{ij}(\mathbf{r},\tau)|$ существенно отлична от нуля, имеет размер порядка $\hbar/k_{\rm B}T$ во времени и порядка $\hbar c/k_{\rm B}T$ в пространстве, что приближенно соответствует периоду и длине волны, при которых спектральное распределение Планка имеет максимум. Однако отметим, что ортогональные компоненты $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$ и ортогональные компоненты $\hat{\mathbf{B}}^{(+)}$ в одной и той же пространственно-временно́й точке не коррелируют, поскольку оба интеграла в (13.1.23) и в (13.1.24) становятся при этом

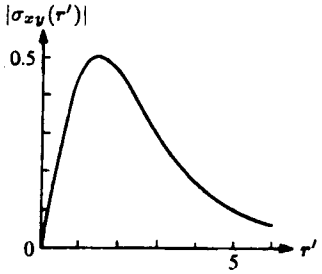


Рис. 13.3. Изменение нормированной смешанной корреляционной функции $|\sigma_{xy}|$ электрического и магнитного полей излучения черного тела при перемещении вдоль оси z ($r' = (\pi k_B T/\hbar c)z$) (Mehta and Wolf, 1964a)

пропорциональными δ_{ij}. Действительно, когда пространственно-временны́е точки совпадают, $\mathscr{E}_{ij}$ и $\mathscr{B}_{ij}$ становятся независящими как от пространственных, так и от временны́х аргументов, и сводятся к интегралам, которые можно вычислить, а именно,

$$\mathscr{E}_{ij} = \delta_{ij}\frac{\hbar}{3\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\omega}{(e^{\hbar\omega/k_BT}-1)}\,d^3k = \delta_{ij}\frac{\pi^2k_B^4T^4}{90\varepsilon_0\hbar^3c^3} = \frac{1}{3}\langle\hat{I}_E\rangle\delta_{ij},$$
$$\mathscr{B}_{ij} = \delta_{ij}\frac{\pi^2k_B^4T^4}{90\varepsilon_0\hbar^3c^5} = \frac{1}{3}\langle\hat{I}_B\rangle\delta_{ij}, \tag{13.1.27}$$

где $\langle\hat{I}_E\rangle$ и $\langle\hat{I}_B\rangle$ — средние интенсивности электрического и магнитного полей.

Рис. 13.3 иллюстрирует некоторые свойства нормированного смешанного тензора корреляции (без суммирования по i, j)

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},\tau) \equiv \frac{\mathscr{G}_{ij}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_1+\mathbf{r},t_1+\tau)}{[\mathscr{E}_{ii}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_1,t_1)\mathscr{B}_{jj}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r},t_1+\tau;\mathbf{r}_1+\mathbf{r},t_1+\tau)]^{1/2}}. \tag{13.1.28}$$

Из-за наличия множителя ϵ_{ijl} в (13.1.25) все диагональные компоненты $\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)$ обращаются в нуль. Это означает, что параллельные составляющие электрического и магнитного полей всегда некоррелированы. Кроме того, если $\mathbf{r} = 0$ или $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$ в (13.1.25), то сразу видно, что трехмерный интеграл по $\mathbf{k}$ обращается в нуль по соображениям симметрии. Следовательно, между составляющими электрического и магнитного полей в одной и той же пространственной точке отсутствует временна́я когерентность.

13.1.7. Функции корреляции высокого порядка

В силу гауссовского вида весового функционала $\phi(\{v\})$ (13.1.20), можно легко выразить все нормально упорядоченные функции корреляции высокого порядка через функции корреляции второго порядка. Таким образом, для функции корреляции порядка (N, M) с помощью оптической теоремы эквивалентности (11.9.4), получаем

$$\Gamma^{(N,M)}_{i_1\ldots i_N;j_M\ldots j_1}(\mathbf{r}_1,t_1,\ldots,\mathbf{r}_N,t_N;\mathbf{r}'_M,t'_M,\ldots,\mathbf{r}'_1,t'_1) =$$
$$= \langle\hat{F}^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots\hat{F}^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)\hat{F}^{(+)}_{j_M}(\mathbf{r}'_M,t'_M)\ldots\hat{F}^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1)\rangle =$$
$$= \langle F^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots F^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)F^{(+)}_{j_M}(\mathbf{r}'_M,t'_M)\ldots F^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1)\rangle_\phi,$$

где $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ есть положительно-частотная часть любого из операторов поля, а $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ — его правое собственное значение. Поскольку $\phi(\{v\})$ является гауссовским функционалом, все $F_i^{(+)}$ и $F_i^{(-)}$ являются гауссовскими случайными переменными, и можно воспользоваться гауссовской теоремой моментов (ср. разд. 1.6.1) для того, чтобы выразить ответ через функции корреляции второго порядка. В результате получим, так же, как при выводе формулы (8.4.2), что

$$\Gamma^{(N,M)}_{i_1\ldots i_N;j_M\ldots j_1}(\mathbf{r}_1,t_1,\ldots,\mathbf{r}_N,t_N;\mathbf{r}'_M,t'_M,\ldots,\mathbf{r}'_1,t'_1) =$$
$$= \delta_{NM}\sum_P\langle F^{(-)}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)F^{(+)}_{j_1}(\mathbf{r}'_1,t'_1)\rangle_\phi\ldots\langle F^{(-)}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)F^{(+)}_{j_N}(\mathbf{r}'_N,t'_N)\rangle_\phi. \tag{13.1.29}$$

Сумма берется по всем $N!$ спариваниям положительно- и отрицательно-частотных полей. В качестве очевидного применения (13.1.29) отметим, что

$$\langle[\hat{F}^{(-)}_i(\mathbf{r}_1,t_1)]^N[\hat{F}^{(+)}_j(\mathbf{r}_2,t_2)]^M\rangle = \delta_{NM}N!\langle F^{(-)}_i(\mathbf{r}_1,t_1)F^{(+)}_j(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle^N_\phi. \tag{13.1.30}$$

13.1.8. Изотропность излучения черного тела

В разд. 12.8 приводился общий критерий изотропности поля излучения [(12.8.38)]. Если $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ представляет собой положительно-частотную часть любого из полевых векторов $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$, и если для простоты ограничиться рассмотрением только корреляционных функций второго порядка, то этот критерий принимает вид

$$\mathsf{R}_{ip}\mathsf{R}_{jq}\langle\hat{F}_p^{(-)}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}_q^{(+)}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_2,t_2)\rangle = \langle\hat{F}_i^{(-)}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}_j^{(+)}(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle.$$

Здесь $\mathbf{R}$ есть 3×3-матрица поворота, а $\mathbf{R}^{-1}$ — обратная ей матрица. Посмотрим, удовлетворяют ли тензоры корреляции излучения черного тела (13.1.23) и (13.1.24) этому условию.

Отметим прежде всего, что оба тензора имеют общий вид

$$\langle\hat{F}_p^{(-)}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}_q^{(+)}(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle = \frac{G}{(2\pi)^3}\int\frac{\omega}{(\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_\mathrm{B}T}-1)}\left(\delta_{pq}-\frac{k_pk_q}{k^2}\right)\mathrm{e}^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-\omega(t_2-t_1)]}\,d^3k, \tag{13.1.31}$$

и отличаются только константой G. Тогда

$$\mathsf{R}_{ip}\mathsf{R}_{jq}\langle\hat{F}_p^{(-)}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}_q^{(+)}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_2,t_2)\rangle = \\ = \mathsf{R}_{ip}\mathsf{R}_{jq}\frac{G}{(2\pi)^3}\int\frac{\omega}{(\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_\mathrm{B}T}-1)}\left(\delta_{pq}-\frac{k_pk_q}{k^2}\right)\mathrm{e}^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-\omega(t_2-t_1)]}\,d^3k. \tag{13.1.32}$$

Сделаем теперь замену переменной $k_p = \mathsf{R}_{pi}^{-1}k'_i$ и отметим, что в силу ортогональности матриц поворота имеем

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) = k_p\mathsf{R}_{pl}^{-1}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)_l = \mathsf{R}_{pm}^{-1}k'_m\mathsf{R}_{pl}^{-1}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)_l = \delta_{ml}k'_m(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)_l = \mathbf{k}'\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)$$

и

$$\mathsf{R}_{ip}\mathsf{R}_{jq}k_pk_q = \mathsf{R}_{ip}\mathsf{R}_{jq}\mathsf{R}_{pl}^{-1}\mathsf{R}_{qm}^{-1}k'_lk'_m = \delta_{il}\delta_{jm}k'_lk'_m = k'_ik'_j$$
$$k^2 = k_pk_q = \mathsf{R}_{pi}^{-1}\mathsf{R}_{qj}^{-1}k'_ik'_j = \delta_{ij}k'_ik'_j = k'^2.$$

Более того, $d^3k = d^3k'$, поскольку преобразование поворота не меняет масштаба. Используя эти результаты в правой части (13.1.32), получаем формулу

$$\mathsf{R}_{ip}\mathsf{R}_{jq}\langle\hat{F}_p^{(-)}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}_q^{(+)}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_2,t_2)\rangle = \\ = \frac{G}{(2\pi)^3}\int\frac{\omega'}{(\mathrm{e}^{\hbar\omega'/k_\mathrm{B}T}-1)}\left(\delta_{pq}-\frac{k'_ik'_j}{k'^2}\right)\mathrm{e}^{i[\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-\omega'(t_2-t_1)]}\,d^3k' = \\ = \langle\hat{F}_i^{(-)}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{F}_j^{(+)}(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle. \tag{13.1.33}$$

Следовательно, тензоры корреляции удовлетворяют условию изотропности, и излучение черного тела является изотропным относительно любой точки пространства.

13.1.9. Флуктуации интенсивности излучения черного тела

В силу того, что весовой функционал $\phi(\{v\})$, описывающий состояние поля, представляет собой обычный функционал вероятности, можно также рассматривать излучение черного тела классически, используя флуктуационную комплексную амплитуду поля $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и флуктуационную мгновенную интенсивность света $I(\mathbf{r},t) \equiv |\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t)|^2$. Амплитуда $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ есть положительно-частотная часть или аналитический сигнал любого из полевых векторов типа $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ и может быть задана в виде фурье-разложения по набору амплитуд мод $\{v\}$

$$\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}l(\omega)v_{\mathbf{k},s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}. \tag{13.1.34}$$

Здесь $l(\omega)$ есть простая, медленно меняющаяся функция от ω, которая принимает вид $i(\hbar\omega/2\varepsilon_0)^{1/2}$ для электрического поля, $(\hbar/2\omega\varepsilon_0)^{1/2}$ для векторного потенциала и т.д. Так как все фурье-амплитуды $v_{\mathbf{k}s}$ имеют совместное гауссовское распределение, и $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ линейна по $v_{\mathbf{k}s}$, то $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ является комплексным векторным гауссовским случайным процессом.

Разложим $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ по трем декартовым составляющим $F_x^{(+)}$, $F_y^{(+)}$, $F_z^{(+)}$, которые являются комплексными скалярными гауссовскими случайными переменными и (в силу (13.1.27)) некоррелированными и статистически независимыми. Интенсивности света $I_x \equiv |F_x^{(+)}|^2$, $I_y \equiv |F_y^{(+)}|^2$, $I_z \equiv |F_z^{(+)}|^2$, отвечающие этим трем скалярным процессам, имеют, следовательно, экспоненциальные распределения вероятностей [ср. (13.3.7) ниже]

$$\mathscr{P}_x(I_x) = \frac{1}{\langle I_x\rangle}\,\mathrm{e}^{-I_x/\langle I_x\rangle}, \tag{13.1.35}$$

(аналогично для $\mathscr{P}_y(I_y)$ и $\mathscr{P}_z(I_z)$), причем все три I_x, I_y, I_z статистически независимы друг от друга. Но полная интенсивность света определяется выражением

$$I = I_x + I_y + I_z, \tag{13.1.36}$$

а средние значения удовлетворяют соотношениям

$$\langle I_x\rangle = \langle I_y\rangle = \langle I_z\rangle = \frac{1}{3}\langle I\rangle \tag{13.1.37}$$

в силу изотропности поля. Для электрического и магнитного полей $\langle I\rangle$ получается из (13.1.27). Следовательно, полная интенсивность света I имеет плотность вероятности $\mathbb{P}(I)$, определяемую формулой

$$\mathbb{P}(I) = \iiint_0^\infty dI_x\,dI_y\,dI_z\,\mathscr{P}_x(I_x)\mathscr{P}_y(I_y)\mathscr{P}_z(I_z)\delta(I - I_x - I_y - I_z),$$

которая с помощью (13.1.36) и (13.1.37) сводится к

$$\mathbb{P}(I) = \frac{27}{\langle I\rangle^3}\int_0^I dI_x\,\mathrm{e}^{-3I_x/\langle I\rangle}\int_0^{I-I_x} dI_y\,\mathrm{e}^{-3I_y/\langle I\rangle}\,\mathrm{e}^{-3(I-I_x-I_y)/\langle I\rangle} = \frac{27}{2}\frac{I^2}{\langle I\rangle^3}\,\mathrm{e}^{-3I/\langle I\rangle}. \tag{13.1.38}$$

Это распределение вероятностей, имеющее вид $\gamma-3$-распределения (ср. разд. 1.5.7), показано на рис. 13.4. В отличие от составляющих I_x, I_y, I_z, наиболее вероятное значение I равно $\frac{2}{3}\langle I\rangle$, а не 0. Это распределение может быть получено, конечно, непосредственно из весового функционала $\phi(\{v\})$ с помощью определения

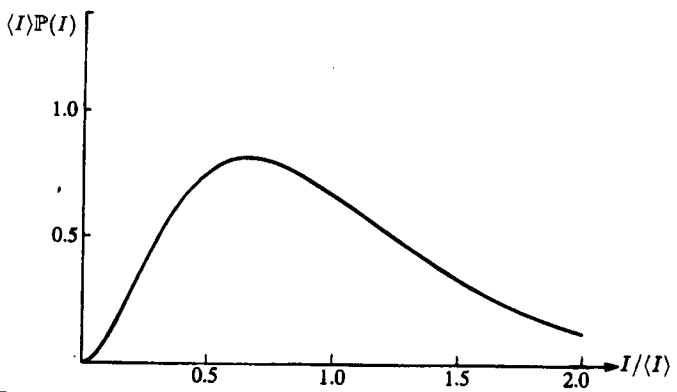


Рис. 13.4. Ожидаемое распределение вероятностей $\mathbf{P}(I)$ интенсивности света I излучения черного тела

$$\mathbb{P}(I') = \int \delta(I' - I)\phi(\{v\})\,d\{v\}, \tag{13.1.39}$$

где $I \equiv |\mathbf{F}^{(+)}|^2$, но вычисление получается более сложным, несмотря на формальную простоту (13.1.39).

Из (13.1.38) сразу следуют моменты интенсивности света

$$\langle I^n\rangle = \int_0^\infty \frac{27}{2}\frac{I^{n+2}}{\langle I\rangle^3}\,\mathrm{e}^{-3I/\langle I\rangle}\,dI = \frac{(n+2)!}{2}\left(\frac{\langle I\rangle}{3}\right)^n, \tag{13.1.40}$$

так что дисперсия

$$\langle(\Delta I)^2\rangle = \langle I^2\rangle - \langle I\rangle^2 = \frac{1}{3}\langle I\rangle^2. \tag{13.1.41}$$

Характеристическая функция $C(\xi)$ плотности вероятности $\mathbb{P}(I)$ задается формулой

$$C(\xi) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{i\xi I}\mathbb{P}(I)\,dI$$

и сводится к

$$C(\xi) = \frac{1}{(1 - i\xi\langle I\rangle/3)^3} \tag{13.1.42}$$

после вычисления интеграла, что и следовало ожидать для $\gamma - 3$-распределения.

13.2. Свет от теплового источника

Многие привычные источники света не создают истинного излучения черного тела, даже если они находятся приближенно в состоянии теплового равновесия. Излучаемый свет может быть пространственно направленным, вместо изотропного, частично поляризованным — вместо неполяризованного, может быть пространственно неоднородным и иметь спектральное распределение, отличающееся от распределения Планка. Такой свет получается в общем случае при прохождении излучения черного тела через некоторый фильтр. Излучение, получаемое из излучения черного тела с помощью любого линейного процесса фильтрации, будем называть *тепловым излучением*. Иногда его также называют *хаотическим излучением*. Типичные линейные фильтры содержат диафрагмы, решетки, зеркала, линзы, поляризаторы, спектральные фильтры, вращатели поляризации, фазовые пластинки или любую комбинацию этого. Все важные свойства симметрии излучения черного тела могут исчезнуть в процессе фильтрации, включая стационарность, если фильтры зависят от времени, хотя некоторые статистические свойства сохраняются.

Если действие фильтра представляется в виде однородного линейного преобразования поля, то гауссовская статистика фурье-амплитуд излучения черного тела сохраняется в тепловом излучении, а весовой функционал $\phi(\{v\})$, описывающий состояние, опять будет гауссовским. Однако $\phi(\{v\})$ имеет теперь вид многомерного гауссовского распределения (ср. разд. 1.6)

$$\phi(\{v\}) = \frac{1}{\det(\pi\boldsymbol{\mu})}\,\mathrm{e}^{-\mathbf{v}^\dagger\boldsymbol{\mu}^{-1}\mathbf{v}}, \tag{13.2.1}$$

а не частный вид (13.1.20). Здесь $\mathbf{v}$ обозначает матрицу-столбец, образованную набором комплексных амплитуд $\{v\}$, $\mathbf{v}^\dagger$ — эрмитово сопряженную матрицу и $\boldsymbol{\mu}$ — ковариантную матрицу с элементами $\mu_{\mathbf{k}s,\mathbf{k}'s'} = \langle v^*_{\mathbf{k}s}v_{\mathbf{k}'s'}\rangle_\phi$. Знаменатель представляет собой детерминант матрицы $\pi\boldsymbol{\mu}$. Показатель экспоненты в (13.2.1) есть билинейный функционал на множестве $\{v\}$, который можно записать в виде

$$\mathbf{v}^\dagger\boldsymbol{\mu}^{-1}\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{k},s}\sum_{\mathbf{k}',s'} v^*_{\mathbf{k}s}\mu^{-1}_{\mathbf{k}s,\mathbf{k}'s'}v_{\mathbf{k}'s'}. \tag{13.2.2}$$

Поскольку матрица $\boldsymbol{\mu}^{-1}$ не обязательно диагональна, то весовой функционал $\phi(\{v\})$ не представляется теперь в виде произведения распределений отдельных мод, и различные амплитуды мод $v_{\mathbf{k}s}$ не являются в общем случае статистически независимыми. Однако если проинтегрировать $\phi(\{v\})$ по всем модам, кроме одной, скажем $\mathbf{k}'$, s', для того, чтобы получить весовую функцию одной $\mathbf{k}'$, s'-моды, то найдем

$$\phi(v_{\mathbf{k}'s'}) = \int \phi(\{v\}) \prod_{\mathbf{k},s\neq\mathbf{k}',s'} d^2v_{\mathbf{k}s} = \frac{1}{\pi\langle n_{\mathbf{k}'s'}\rangle}\,\mathrm{e}^{-|v_{\mathbf{k}'s'}|^2/\langle n_{\mathbf{k}'s'}\rangle}. \tag{13.2.3}$$

Полученная функция имеет тот же вид, что и функция для излучения черного тела, если не считать того, что средние числа заполнения $\langle n_{\mathbf{k}'s'}\rangle$ теперь не определяются выражением (13.1.8). Если фильтры пассивны, то числа $\langle n_{\mathbf{k}'s'}\rangle$ не будут в общем случае больше тех, которые были в случае излучения черного тела [см. (13.1.8)], но даже это ограничение не применимо к активным фильтрам. Следовательно, средние числа заполнения в выражении (13.2.3) можно рассматривать как совершенно произвольные. В случае $\langle n_{\mathbf{k}'s'}\rangle = 0$, соответствующая весовая функция $\phi(v_{\mathbf{k}'s'})$ должна рассматриваться как $\delta^2(v_{\mathbf{k}'s'})$-функция.

Некоторые свойства излучения черного тела сохраняются в тепловом поле. Так, из (13.2.3) с помощью (12.10.2) следует, что распределение вероятностей $p(n_{\mathbf{k}s})$ числа заполнения $n_{\mathbf{k}s}$ для любой моды опять имеет вид распределения Бозе — Эйнштейна

$$p(n_{\mathbf{k}s}) = \frac{1}{[1+\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle][1+1/\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle]^{n_{\mathbf{k}s}}}, \tag{13.2.4}$$

хотя совместное распределение $p(\{n\})$ не является произведением множителей того же вида. Кроме того, поскольку $\phi(\{v\})$ является гауссовской, то гауссовская теорема моментов еще применима, и соотношения типа (13.1.29) и (13.1.30) также имеют силу для света от теплового источника. Однако в своем наиболее общем виде такой свет не имеет симметрий, характерных для излучения черного тела.

13.3. Пучки стационарного света от теплового источника

Свет, создаваемый тепловыми равновесными источниками, часто фильтруется таким образом, что создается приблизительно плоская волна или пучок, распространяющийся в точно определенном направлении. На рис. 13.5 проиллюстрирован один из способов получения такого пучка. Можно показать, в довольно общем виде, что, если оптическое поле является тепловым, имеет определенное направление, а также является стационарным и спектрально чистым в отношении поляризации (ср. разд. 4.5.1), то весовой функционал $\phi(\{v\})$ можно упростить.

Как было показано в разд. 12.8, для любого стационарного поля

$$\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}\rangle = \langle v^*_{\mathbf{k}s}v_{\mathbf{k}'s'}\rangle_\phi = 0, \quad \text{если } \omega \neq \omega'. \tag{13.3.1}$$

Если поле имеет определенное направление распространения, характеризуемое единичным вектором $\boldsymbol{\kappa}_0$, то все моды, за исключением одной, имеющей волновой вектор в направлении $\boldsymbol{\kappa}_0$, незаполнены, и, следовательно, $\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}\rangle = 0$, если $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$. Выберем базис поляризации так, чтобы матрица поляризации $\mathbf{J}(\mathbf{k})$ была диагональной, т.е.

$$\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}s'}\rangle = \langle v^*_{\mathbf{k}s}v_{\mathbf{k}s'}\rangle_\phi = \langle n_{\mathbf{k}s}\rangle\delta_{ss'}. \tag{13.3.2}$$

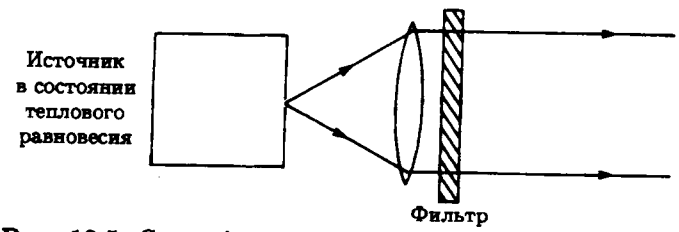


Рис. 13.5. Схема формирования пучка «теплового» света из излучения черного тела

Если условие взаимной спектральной чистоты выполняется для поляризаций, то этот базис будет одинаковым для всех заполненных мод. Из (13.3.1) и (13.3.2) следует, что для такого однонаправленного поля

$$\langle \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}\rangle = \langle v^*_{\mathbf{k}s}v_{\mathbf{k}'s'}\rangle_\phi = \langle n_{\mathbf{k}s}\rangle\delta^3_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}. \tag{13.3.3}$$

Следовательно, комплексные амплитуды $v_{\mathbf{k}s}$, отвечающие различным модам, являются некоррелированными гауссовскими случайными переменными, и поэтому они являются статистически независимыми. Тогда весовой функционал $\phi(\{v\})$ принимает, вместо (13.2.1), более простой вид

$$\phi(\{v\}) = \prod_{\mathbf{k},s} \frac{1}{\pi\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle} \mathrm{e}^{-|v_{\mathbf{k}s}|^2/\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle}. \tag{13.3.4}$$

Этот функционал имеет точно такую же структуру, как и весовой функционал (13.1.20) для излучения черного тела. Единственное различие состоит в том, что средние числа заполнения фотонов $\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle$ все равны нулю, за исключением тех, которые соответствуют векторам $\mathbf{k}$, направленным вдоль $\boldsymbol{\kappa}_0$, причем для этих волновых векторов значения $\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle$ произвольны. Конечно, невозможно создать *строго* однонаправленное поле или световой пучок методом, показанным на рис. 13.5, однако выражение (13.3.4) часто является хорошим приближением для описания такого состояния. Излишне говорить, что существенное упрощение достигается всякий раз, когда выражение (13.3.4) используется вместо (13.2.1).

13.3.1. Флуктуации интенсивности пучка света от теплового источника

Рассмотрим пучок света от теплового источника, состояние которого описывается весовым функционалом (13.3.4) и вычислим распределение вероятностей $\mathbb{P}(I)$ интенсивности света I. Поскольку $\phi(\{v\})$ имеет тот же вид, что и весовой функционал для излучения черного тела, может сначала показаться, что распределение вероятностей $\mathbb{P}(I)$ должно задаваться выражением (13.1.38). Однако нужно помнить, что пучок такого света не имеет всех свойств симметрии поля излучения черного тела и что числа заполнения $\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle$ являются произвольными.

Если все фурье-компоненты светового пучка имеют одинаковые поляризационные свойства, то матрица поляризации $\mathbf{J}(\mathbf{k})$, деленная на $\langle n_{\mathbf{k}}\rangle \equiv \langle n_{\mathbf{k}1}\rangle + \langle n_{\mathbf{k}2}\rangle$, должна быть одинаковой для всех занятых $\mathbf{k}$-мод поля. Следовательно, можно разложить комплексную амплитуду векторного поля $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ ($\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ есть собственное значение положительно-частотной части электрического поля, магнитного поля и т.п.) на две составляющие, пропорциональные ортогональным единичным векторам поляризации $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}$, и записать

$$\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t) = F_1^{(+)}(\mathbf{r},t)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1} + F_2^{(+)}(\mathbf{r},t)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}. \tag{13.3.5}$$

Гауссовский вид весового функционала $\phi(\{v\})$ гарантирует, что $F_1^{(+)}$, $F_2^{(+)}$ являются комплексными, гауссовскими, скалярными случайными переменными. Поскольку базисные векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}$ в выражении (13.3.5) выбраны так, чтобы матрица поляризации была диагональной, то $F_1^{(+)}$ и $F_2^{(+)}$ являются некоррелированными и, следовательно, статистически независимыми. Из (13.3.5) следует, что

$$I \equiv \mathbf{F}^{(+)*}\cdot\mathbf{F}^{(+)} = |F_1^{(+)}|^2 + |F_2^{(+)}|^2 = I_1 + I_2, \tag{13.3.6}$$

где $I_1 \equiv |F_1^{(+)}|^2$ и $I_2 \equiv |F_2^{(+)}|^2$ также статистически независимы. Теперь учтем, что, поскольку $F_1^{(+)}$ и $F_2^{(+)}$ являются комплексными гауссовскими случайными переменными, они имеют распределения вероятностей в виде

$$p_1(F_1^{(+)})\,d^2F_1^{(+)} = \frac{1}{\pi\langle I_1\rangle}\exp(-|F_1^{(+)}|^2/\langle I_1\rangle)\,d^2F_1^{(+)},$$
$$p_2(F_2^{(+)})\,d^2F_2^{(+)} = \frac{1}{\pi\langle I_2\rangle}\exp(-|F_2^{(+)}|^2/\langle I_2\rangle)\,d^2F_2^{(+)},$$

где $\langle I_1\rangle$, $\langle I_2\rangle$ есть средние значения величин $|F_1^{(+)}|^2$ и $|F_2^{(+)}|^2$, вычисленные с помощью весового функционала (13.3.4). Записывая $F_1^{(+)} = \sqrt{I_1}\exp i\theta_1$, $F_2^{(+)} = \sqrt{I_2}\exp i\theta_2$, замечая, что $d^2F_1^{(+)} = \frac{1}{2}\,dI_1\,d\theta_1$, $d^2F_2^{(+)} = \frac{1}{2}\,dI_2\,d\theta_2$ и интегрируя по фазовым углам θ_1, θ_2, находим выражения для плотностей вероятностей величин I_1 и I_2

$$\mathscr{P}_1(I_1) = \frac{1}{\langle I_1\rangle}\,\mathrm{e}^{-I_1/\langle I_1\rangle}, \quad \mathscr{P}_2(I_2) = \frac{1}{\langle I_2\rangle}\,\mathrm{e}^{-I_2/\langle I_2\rangle}. \tag{13.3.7}$$

Тогда из (13.3.6) и (13.3.7) имеем для плотности вероятности величины I следующее выражение:

$$\mathbb{P}(I) = \iint_0^\infty \mathscr{P}(I_1)\mathscr{P}(I_2)\delta(I - I_1 - I_2)\,dI_1\,dI_2 = \int_0^I \mathscr{P}_1(I_1)\mathscr{P}_2(I - I_1)\,dI_1 =$$
$$= \frac{1}{\langle I_1\rangle - \langle I_2\rangle}[\mathrm{e}^{-I/\langle I_1\rangle} - \mathrm{e}^{-I/\langle I_2\rangle}]. \tag{13.3.8}$$

Можно выразить $\langle I_1\rangle$, $\langle I_2\rangle$ через среднюю полную интенсивность света $\langle I\rangle$ и степень поляризации P. Из (13.3.6) следует, что

$$\langle I\rangle = \langle I_1\rangle + \langle I_2\rangle. \tag{13.3.9}$$

Степень поляризации P плоской волны с волновым вектором $\mathbf{k}$ выражается через собственные значения матрицы поляризации $\mathbf{J}(\mathbf{k})$ следующим образом [ср. (6.3.31)]:

$$P = \frac{|\langle|v_{\mathbf{k}1}|^2\rangle - \langle|v_{\mathbf{k}2}|^2\rangle|}{\langle|v_{\mathbf{k}1}|^2\rangle + \langle|v_{\mathbf{k}2}|^2\rangle}, \tag{13.3.10}$$

и, в силу того, что все занятые $\mathbf{k}$-моды имеют одинаковую поляризацию, принимает вид

$$P = \frac{\langle I_1\rangle - \langle I_2\rangle}{\langle I_1\rangle + \langle I_2\rangle}, \quad \text{если } \langle I_1\rangle \geqslant \langle I_2\rangle. \tag{13.3.11}$$

Из (13.3.9) и (13.3.11) следует, что

$$\langle I_1\rangle = \frac{1}{2}\langle I\rangle(1+P), \quad \langle I_2\rangle = \frac{1}{2}\langle I\rangle(1-P), \tag{13.3.12}$$

Подставляя эти соотношения в (13.3.8), получаем окончательно выражение для $\mathbb{P}(I)$ (Mandel, 1963)

$$\mathbb{P}(I) = \frac{1}{P\langle I\rangle}\left\{\exp\left[\frac{-2I}{\langle I\rangle(1+P)}\right] - \exp\left[\frac{-2I}{\langle I\rangle(1-P)}\right]\right\}. \tag{13.3.13}$$

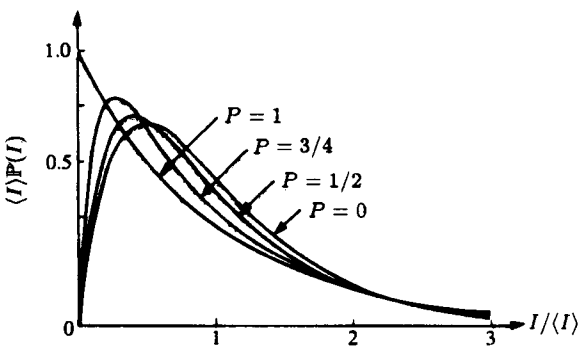


Рис. 13.6. Примеры распределения вероятностей $\mathbb{P}(I)$ для пучка света от теплового источника при различных значениях степени поляризации P (Mandel, 1963)

Некоторые примеры распределения вероятностей $\mathbb{P}(I)$ приведены на рис. 13.6. Стоит отметить, что случай $P = 1$, который соответствует полностью поляризованному пучку света, имеет некоторую особенность, состоящую в том, что наиболее вероятное значение интенсивности света равно нулю, тогда как $\mathbb{P}(0) = 0$ во всех остальных случаях. Если пучок света неполяризован и $P = 0$, то соответствующее распределение вероятностей $\mathbb{P}(I)$ получается путем вычисления предела правой части (13.3.13) при $P \to 0$. Разлагая показательные функции, легко находим (Hurwitz, 1945), что

$$\mathbb{P}(I) = \frac{4I}{\langle I\rangle^2}\,\mathrm{e}^{-2I/\langle I\rangle}. \tag{13.3.14}$$

Моменты интенсивности света, соответствующие (13.3.13), легко вычисляются и имеют вид

$$\langle I^n\rangle = \int_0^\infty I^n\mathbb{P}(I)\,dI = \frac{n!\langle I\rangle^n}{2^{n+1}P}[(1+P)^{n+1} - (1-P)^{n+1}]. \tag{13.3.15}$$

В частности, дисперсия равна

$$\langle(\Delta I)^2\rangle = \langle I^2\rangle - \langle I\rangle^2 = \frac{1}{2}(1+P^2)\langle I\rangle^2. \tag{13.3.16}$$

Таким образом, дисперсия изменяется в относительно небольших пределах от $\langle I\rangle^2$ для полностью поляризованного света до $\frac{1}{2}\langle I\rangle^2$ для неполяризованного света.

Наконец, рассмотрим двухвременну́ю корреляционную функцию пучка света от теплового источника. Поскольку поле стационарное, запишем нормально упорядоченную корреляционную функцию $\Gamma^{(2,2)}$ в виде

$$\Gamma^{(2,2)} \equiv \langle{:}\,\hat{I}(\mathbf{r}_1,t)\hat{I}(\mathbf{r}_2,t+\tau)\,{:}\rangle$$

и, учитывая оптическую теорему эквивалентности, имеем

$$\langle{:}\,\hat{I}(\mathbf{r}_1,t)\hat{I}(\mathbf{r}_2,t+\tau)\,{:}\rangle = \langle I(\mathbf{r}_1,t)I(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle_\phi.$$

Разложим опять комплексную амплитуду векторного поля $\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ на две ортогональные, статистически независимые, комплексные скалярные компоненты $F_1^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $F_2^{(+)}(\mathbf{r},t)$, представляющие собой гауссовские процессы. Тогда из (13.3.6) имеем

$$\langle{:}\,\hat{I}(\mathbf{r}_1,t)\hat{I}(\mathbf{r}_2,t+\tau)\,{:}\rangle = \langle I_1(\mathbf{r}_1,t)I_1(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle_\phi + \langle I_1(\mathbf{r}_1,t)I_2(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle_\phi +$$
$$+ \langle I_2(\mathbf{r}_1,t)I_1(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle_\phi + \langle I_2(\mathbf{r}_1,t)I_2(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle_\phi.$$

Используя гауссовскую теорему моментов, учитывая однородность поля, которая означает, что

$$\langle I_i(\mathbf{r}_1,t)\rangle = \langle I_i(\mathbf{r}_2,t)\rangle \equiv \langle I_i\rangle \quad (i=1,2), \tag{13.3.17}$$

и учитывая статистическую независимость I_1 и I_2, получаем

$$\langle : \hat{I}(\mathbf{r}_1,t)\hat{I}(\mathbf{r}_2,t+\tau) : \rangle = (\langle I_1\rangle + \langle I_2\rangle)^2 + \\ + |\langle F_1^{(-)}(\mathbf{r}_1,t)F_1^{(+)}(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle|^2 + |\langle F_2^{(-)}(\mathbf{r}_1,t)F_2^{(+)}(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle|^2. \tag{13.3.18}$$

Подразумевается, что средние значения всех c-числовых функций должны вычисляться с помощью весового функционала $\phi(\{v\})$ (13.3.4). Введем теперь нормированные корреляционные функции второго порядка

$$\gamma_{11}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) \equiv \frac{\langle F_1^{(-)}(\mathbf{r}_1,t)F_1^{(+)}(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle}{[\langle I_1(\mathbf{r}_1)\rangle\langle I_1(\mathbf{r}_2)\rangle]^{1/2}}, \quad \gamma_{22}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) \equiv \frac{\langle F_2^{(-)}(\mathbf{r}_1,t)F_2^{(+)}(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle}{[\langle I_2(\mathbf{r}_1)\rangle\langle I_2(\mathbf{r}_2)\rangle]^{1/2}}, \tag{13.3.19}$$

и воспользуемся условием взаимной спектральной чистоты в отношении поляризации, которое гарантирует, что

$$\gamma_{11}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \gamma_{22}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau). \tag{13.3.20}$$

Тогда (13.3.18) сводится к

$$\langle : \hat{I}(\mathbf{r}_1,t)\hat{I}(\mathbf{r}_2,t+\tau) : \rangle = (\langle I_1\rangle + \langle I_2\rangle)^2 + (\langle I_1\rangle^2 + \langle I_2\rangle^2)|\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)|^2. \tag{13.3.21}$$

Наконец, выразим $\langle I_1\rangle$ и $\langle I_2\rangle$ через среднюю полную интенсивность света $\langle I\rangle$ и степень поляризации P, используя (13.3.12). В результате, придем к выражению

$$\langle : \hat{I}(\mathbf{r}_1,t)\hat{I}(\mathbf{r}_2,t+\tau) : \rangle = \langle I\rangle^2 \left[1 + \frac{1}{2}(1+P^2)|\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)|^2\right], \tag{13.3.22}$$

которое означает, что нормированная корреляционная функция интенсивности

$$\lambda(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) \equiv \frac{\langle : \Delta\hat{I}(\mathbf{r}_1,t)\Delta\hat{I}(\mathbf{r}_2,t+\tau) : \rangle}{\langle \hat{I}(\mathbf{r}_1,t)\rangle\langle \hat{I}(\mathbf{r}_2,t+\tau)\rangle}$$

имеет вид

$$\lambda(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \frac{1}{2}(1+P^2)|\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)|^2. \tag{13.3.23}$$

Вследствие однородности поля обе части этого выражения фактически зависит только от разности $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ между двумя пространственными аргументами.

13.3.2. Статистика фотонов при одинаковых средних числах заполнения

Поскольку весовой функционал для пучка света от теплового источника (13.3.4) имеет такую же структуру, как и функционал для излучения черного тела, то совместное распределение вероятностей $p(\{n\})$ множества чисел заполнения $\{n\}$ поля должно также иметь вид (13.1.10), а именно,

$$p(\{n\}) = \prod_{\mathbf{k},s} \frac{1}{[1+\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle][1+1/\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle]^{n_{\mathbf{k}s}}}, \tag{13.3.24}$$

если не считать того, что средние числа заполнения $\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle$ являются произвольными. Для любой моды, у которой $\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle = 0$, соответствующий множитель нужно рассматривать как $\delta_{n_{\mathbf{k}s}0}$. Далее будем полагать, что только подмножество $[\mathbf{k},s]$, состоящее из μ мод поля, действительно заселено, и сосредоточим наше внимание только на этом подмножестве мод. Если n есть полное число фотонов

$$n = \sum_{[\mathbf{k},s]} n_{\mathbf{k}s}, \tag{13.3.25}$$

и $P(n)$ есть распределение вероятностей для n, то очевидно, что

$$P(m) = \sum_{\{n\}} p(\{n\})\delta_{nm}. \tag{13.3.26}$$

Хотя $P(m)$ трудно вычислить в общем виде, расчет упрощается в частном случае, когда средние числа заполнения $\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle$ всех μ заполненных мод одинаковы. Это соответствует пучку света от теплового источника, имеющего прямоугольную спектральную плотность, который либо полностью поляризован, либо полностью неполяризован. В этом случае имеем

$$\langle n\rangle = \sum_{[\mathbf{k},s]} \langle n_{\mathbf{k}s}\rangle = \mu\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle, \tag{13.3.27}$$

и из (13.3.24) и (13.3.27) следует, что совместное распределение вероятностей заполненных мод принимает вид

$$p(\{n\}) = \frac{1}{[1+\langle n\rangle/\mu]^{\mu}[1+\mu/\langle n\rangle]^{n}}. \tag{13.3.28}$$

Видно, что оно зависит только от полного числа фотонов n и вообще не зависит от того, как они фактически распределены по μ модам. Вследствие этого каждый ненулевой член в сумме (13.3.26) имеет одинаковое значение, и требуемое распределение $P(m)$ есть просто $p(\{n\})$, определяемое формулой (13.3.28), умноженное на число $\mathcal{N}$ способов распределения n фотонов по μ модам.

Комбинаторный множитель $\mathcal{N}$ хорошо известен в квантовой статистике. Его можно вывести, воображая, что n фотонов являются неразличимыми шарами, которые необходимо распределить по μ корзинам. Различные распределения можно получить, располагая наобум корзины и шары на одной линии и считая, что шары, лежащие непосредственно справа от корзины, принадлежат этой корзине. Это требует, чтобы левый край линии был занят корзиной и приводит к $(n+\mu-1)!$ различным возможным размещениям. Но поскольку n фотонов неразличимы, и фактические положения $\mu-1$ корзин не имеют физического значения, то нужно разделить это число на $n!(\mu-1)!$, чтобы получить $\mathcal{N}$. Таким образом, окончательно получаем (Mandel, 1959)

$$P(n) = \frac{(n+\mu-1)!}{(\mu-1)!n!}\frac{1}{[1+\langle n\rangle/\mu]^{\mu}[1+\mu/\langle n\rangle]^{n}}. \tag{13.3.29}$$

Моменты от $P(n)$ легче всего вычислить с помощью производящей функции факториальных моментов

$$F(\xi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}(1+\xi)^n P(n) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\xi^r}{r!}\langle n^{(r)}\rangle, \tag{13.3.30}$$

из которой факториальные моменты $\langle n^{(r)}\rangle \equiv \langle n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\rangle$ получаются путем разложения по степеням ξ. Если воспользоваться алгебраическим тождеством

$$\frac{(n+\mu-1)!}{(\mu-1)!n!} = \binom{-\mu}{n}(-1)^n,$$

то можно выразить $F(\xi)$ в виде биноминального ряда по $-(1+\xi)/(1+\mu/\langle n\rangle)$, так называемого отрицательного бинома, который легко суммируется. В результате получим

$$F(\xi) = \frac{1}{(1+\langle n\rangle/\mu)^{\mu}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\mu}{n}\left[\frac{-(1+\xi)}{1+\mu/\langle n\rangle}\right]^n =$$

$$= \left[1+\frac{\langle n\rangle}{\mu}\right]^{-\mu}\left[1-\frac{1+\xi}{1+\mu/\langle n\rangle}\right]^{-\mu} = \left[1-\frac{\xi\langle n\rangle}{\mu}\right]^{-\mu} = 1+\xi\langle n\rangle+\frac{\xi^2}{2!}\frac{\mu+1}{\mu}\langle n\rangle^2+\ldots. \tag{13.3.31}$$

Видно, что среднее значение $\langle n\rangle$ есть коэффициент при ξ, а второй факториальный момент есть коэффициент при $\xi^2/2!$, так что

$$\langle n(n-1)\rangle = \left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)\langle n\rangle^2,$$

и дисперсия задается формулой

$$\langle(\Delta n)^2\rangle = \langle n\rangle\left(1+\frac{\langle n\rangle}{\mu}\right). \tag{13.3.32}$$

В частном случае, когда $\mu = 1$, выражения (13.3.31) и (13.3.32), как и требуется, сводятся к результатам, полученным ранее для одномодового распределения Бозе — Эйнштейна. Однако когда μ становится очень большим при заданном $\langle n\rangle$, выражение (13.3.31) сводится к следующему

$$F(\xi) \to \mathrm{e}^{\xi\langle n\rangle}, \tag{13.3.33}$$

т.е. $F(\xi)$ становится производящей функцией факториальных моментов пуассоновского распределения. При этом $\langle(\Delta n)^2\rangle \to \langle n\rangle$. В этом пределе фотоны становятся почти независимыми и подчиняются статистике классических частиц.

Некоторые из полученных результатов будут использованы при изучении статистики фотоотсчетов.

Задачи

13.1 Пучок квазимонохроматичного поляризованного света, создаваемого стационарным тепловым источником, падает нормально на фотодетектор. Покажите, что если нормированное спектральное распределение $\phi(\omega)$ света симметрично относительно некоторого известного значения частоты ω_0, то $\phi(\omega)$ можно полностью определить по измерениям зависимости скорости, с которой регистрируются пары фотоэлектрических импульсов, разделенных интервалом τ, от τ. Выразите $\phi(\omega)$ через эту скорость.

13.2 Вычислите нормально упорядоченную дисперсию $\langle{:}\,(\Delta\hat{I}^2)\,{:}\rangle$ плотности фотонов $\hat{I}$ излучения черного тела при температуре T.

13.3 Пучок света от теплового источника имеет одинаковые средние числа заполнения n_0 для μ заполненных мод, а все остальные моды — незаполнены. Вычислите характеристическую функцию $C(x) = \langle\exp(ix\hat{n})\rangle$ полного числа фотонов $\hat{n}$. Получите отсюда распределение вероятностей полного числа фотонов.

13.4 Выразите оператор $\exp(\hat{n}_{\mathbf{k},s}x)$ в антинормальном виде. Далее покажите, каким образом весовая функция $\phi(v_{\mathbf{k}s})$ для одной $\mathbf{k},s$-моды излучения черного тела может быть получена из выражения $\hat{\rho}_{\mathbf{k},s} = (1-\mathrm{e}^{-\beta})\exp(-\beta\hat{n}_{\mathbf{k},s})$ для оператора плотности моды.

13.5 Пучок монохроматичного света частоты ω_1 и средней интенсивности $\langle I_1\rangle$, создаваемый одномодовым лазером со случайной фазой, перекрывается с параллельным пучком квазимонохроматичного света от теплового источника средней интенсивности $\langle I_2\rangle$. Оба световых пучка одинаково поляризованы. Суммарный свет падает нормально на фотодетектор с квантовой эффективностью α и площадью фотокатода S в течение интервала времени T. Вычислите дисперсию числа фотоотсчетов, регистрируемых детектором, выражая ее через величины $\langle I_1\rangle$, $\langle I_2\rangle$, ω_1 и нормированную спектральную плотность $\phi(\omega)$ пучка света от теплового источника, для случая, когда T превышает время когерентности такого света.

13.6 Как изменится ответ предыдущей задачи, если время счета T будет короче времени когерентности пучка света от теплового источника? При каких условиях превышающие норму пуассоновского распределения флуктуации не будут зависеть от интенсивности лазерного пучка?

13.7 Вычислите среднюю плотность фотонов в объеме когерентности излучения черного тела. Покажите, что она не зависит от температуры.

13.8 Пучок поляризованного квазимонохроматичного света от теплового источника имеет лоренцевый спектр шириной $\Delta\omega$, центрированный на частоте ω_0. Вычислите нормированную, нормально упорядоченную корреляционную функцию интенсивности $\langle{:}\,\Delta\hat{I}_{\mathrm{E}}(t)\Delta\hat{I}_{\mathrm{E}}(t+\tau)\,{:}\rangle/\langle\hat{I}_{\mathrm{E}}\rangle^2$, где $\hat{I}_{\mathrm{E}} = \hat{\mathbf{E}}^{(-)}\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$ есть интенсивность электрического поля.

Глава 14

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ФОТОДЕТЕКТИРОВАНИЯ

14.1. Взаимодействия квантованного электромагнитного поля

В предшествующих главах мы изучали квантовые свойства электромагнитного поля, но до настоящего момента полагали, что поле является свободным, т.е. представляет невзаимодействующую квантовую систему. Однако и излучение, и поглощение света подразумевают взаимодействия с другими квантовыми системами; поэтому в нашем дальнейшем рассмотрении мы обратимся к вопросам, которые связаны с такого рода взаимодействиями.

Правда, мы в предыдущих главах, в определенной степени уже продвинулись вперед в рассмотрении некоторых взаимодействий света, не прибегая к аппарату квантовой теории взаимодействующих систем в полной мере. Например, в гл. 9 электромагнитное поле рассматривалось как классический потенциал, действующий на атомную квантовую систему, а в разд. 12.2 и 12.9 были использованы простые эвристические рассуждения для того, чтобы описать действие оптических детекторов. Но возможность применения полученных таким образом результатов ограничена и, в любом случае, их справедливость нуждается в подтверждении.

Очевидно, что для описания состояния электромагнитного поля (F) при взаимодействии с другой квантовой системой (A) необходимо расширенное гильбертово пространство, или пространство произведений, которое охватывает как F, так и A, и для которого гильбертовы пространства F и A являются подпространствами. Нам будет удобно именовать вторую систему A "атомной системой", ни коим образом при этом не ограничивая природы системы A. Динамические переменные поля $\hat{O}_F(t)$ и атомной системы $\hat{O}_A(t)$ коммутируют в один и тот же момент времени t, а в начальный момент времени, когда взаимодействие между ними предполагается включенным, каждый оператор действует на векторы состояния только соответствующего ему гильбертова пространства. В картине Гейзенберга уравнение движения динамической переменной $\hat{O}(t)$ имеет обычный вид

$$\frac{d\hat{O}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{O}(t), \hat{H}] + \frac{\partial \hat{O}(t)}{\partial t}, \tag{14.1.1}$$

где последний член означает дифференцирование переменной, явно зависящей от времени. Полную энергию $\hat{H}$ взаимодействующих систем всегда можно разложить на три составляющие

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_I, \tag{14.1.2}$$

где $\hat{H}_A$ и $\hat{H}_F$ — энергии свободных или невзаимодействующих атомной системы и квантового поля, соответственно, а $\hat{H}_I$ — энергия взаимодействия между ними. Даже в тех случаях, когда $\hat{H}$ и $\hat{O}$ явно не зависят от времени, можно формально проинтегрировать (14.1.2) и получить

$$\hat{O}(t) = \exp(i\hat{H}t/\hbar)\hat{O}(0)\exp(-i\hat{H}t/\hbar). \tag{14.1.3}$$

Данная формула редко приводит к выражению для $\hat{O}(t)$ в конечном виде и, обычно, требуются дополнительные приближения.

В картине Шредингера состояние полной системы описывается оператором плотности, который охватывает полное гильбертово пространство и подчиняется уравнению движения Шредингера

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)]. \tag{14.1.4}$$

Состояния отдельных атомных и полевых составляющих $\hat{\rho}_A(t)$ и $\hat{\rho}_F(t)$ можно получить из $\hat{\rho}(t)$, находя след по неинтересующей нас части общего гильбертова пространства, так что

$$\hat{\rho}_A(t) = \mathrm{Tr}_F\, \hat{\rho}(t), \quad \hat{\rho}_F(t) = \mathrm{Tr}_A\, \hat{\rho}(t). \tag{14.1.5}$$

Когда $\hat{H}$ явно не зависит от времени, (14.1.4) легко интегрируется, и мы получаем выражение

$$\hat{\rho}(t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar)\hat{\rho}(0)\exp(i\hat{H}t/\hbar), \tag{14.1.6}$$

но преобразование, которое здесь подразумевается, редко можно выполнить точно. Более того, даже в тех случаях, когда удается найти $\hat{\rho}(t)$, это еще не гарантирует, что многовременные корреляционные функции удастся вычислить, не прибегая к дальнейшим предположениям. Иногда уравнение движения для оператора плотности одной из составляющих $\hat{\rho}_A(t)$ или $\hat{\rho}_F(t)$, как правило называемое основным кинетическим уравнением, оказывается проще, чем уравнение для полной системы и в некоторых случаях его дополнительно можно упростить с помощью марковских предположений, или предположений о короткой памяти по отношению к эволюции системы. И наоборот, в тех случаях, когда взаимодействие длится короткое время, то для решения (14.1.4) можно воспользоваться нестационарной теорией возмущений.

14.1.1. Решение по теории возмущений в картине взаимодействия

Очень часто представляется более удобным для нахождения решений по теории возмущений работать не в картине Шредингера (S), а в картине взаимодействия (I). В этой картине динамические переменные эволюционируют во времени, в соответствии с не взаимодействующей частью $\hat{H}_0 \equiv \hat{H}_A + \hat{H}_F$ гамильтониана, как если бы они эволюционировали бы в картине Гейзенберга (H) в отсутствие взаимодействия, а векторы состояния не изменяются, кроме как вследствие взаимодействия $\hat{H}_I$. Если мы предположим, что в момент времени t_0 различные картины совпадают, так что

$$\hat{O}^{(S)}(t_0) = \hat{O}^{(I)}(t_0) = \hat{O}^{(H)}(t_0),$$

где индексы обозначают представление, то в другие моменты времени

$$\hat{O}^{(I)}(t) = \exp[i\hat{H}_0(t-t_0)/\hbar]\hat{O}^{(S)}(t)\exp[-i\hat{H}_0(t-t_0)/\hbar] = \\ = \exp[i\hat{H}_0(t-t_0)/\hbar]\hat{O}^{(S)}(t_0)\exp[-i\hat{H}_0(t-t_0)/\hbar], \tag{14.1.7}$$

$$\hat{\rho}^{(I)}(t) = \exp[i\hat{H}_0(t-t_0)/\hbar]\hat{\rho}^{(S)}(t)\exp[-i\hat{H}_0(t-t_0)/\hbar]. \tag{14.1.8}$$

Уравнение движения Шредингера (14.1.4) принимает более простой вид, когда оно выражается через векторы состояния и операторы в картине взаимодействия

$$\frac{d\hat{\rho}^{(I)}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_I^{(I)}(t).\hat{\rho}^{(I)}(t)]. \tag{14.1.9}$$

Из этой формулы видно, что эволюция вектора состояния определяется только гамильтонианом взаимодействия, что обычно упрощает вычисление. В дальнейшем будем считать, что мы работаем в картине взаимодействия и нижний индекс (I), обозначающий ее, далее будем опускать.

Уравнение (14.1.9) формально можно проинтегрировать по времени и получить выражение

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(t_0) + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}[\hat{H}_I(t_1), \hat{\rho}(t_1)]\,dt_1, \tag{14.1.10}$$

которое является интегральным уравнением типа Вольтерра и которое может быть решено методом итераций. Будем рассматривать $\hat{\rho}(t_0)$ в качестве приближения нулевого порядка к $\hat{\rho}(t)$ и запишем

$$\hat{\rho}^{(0)}(t) = \hat{\rho}(t_0).$$

Подставим теперь это приближение $\hat{\rho}(t)$ под знак интеграла в (14.1.10), чтобы получить приближение первого порядка $\hat{\rho}^{(1)}(t)$ для $\hat{\rho}(t)$. Таким образом, записываем

$$\hat{\rho}^{(1)}(t) = \hat{\rho}(t_0) + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}[\hat{H}_I(t_1), \hat{\rho}(t_0)]\,dt_1,$$

и если $\hat{\rho}(t)$ заменяется этим приближением под знаком интеграла в (14.1.10), то получаем приближение второго порядка

$$\hat{\rho}^{(2)}(t) = \hat{\rho}(t_0) + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt_1[\hat{H}_I(t_1), \hat{\rho}(t_0)] + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2[\hat{H}_I(t_1), [\hat{H}_I(t_2), \hat{\rho}(t_0)]].$$

Повторение указанной процедуры приводит к следующему бесконечному ряду (ср. разд. 9.2), который можно рассматривать как точное, явное решение для $\hat{\rho}(t)$ при условии, что ряд сходится

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(t_0) + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(i\hbar)^r}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{r-1}} dt_r[\hat{H}_I(t_1), [\hat{H}_I(t_2), \ldots, [\hat{H}(t_r), \hat{\rho}(t_0)]]\ldots]. \qquad (14.1.11)$$

На практике ряды, содержащие бесконечное число членов, используются редко, вместо этого ряд обрывается на той стадии, когда это оказывается достаточным для хорошего приближения к решению. Для многих приложений достаточно первого не равного нулю члена, и ряд обрывается на этом этапе.

Если состояния атомной системы и поля известны по отдельности в момент времени t_0, когда, как предполагается, начинается взаимодействие, то начальный оператор плотности $\hat{\rho}(t_0)$ полной системы представляется в виде произведения двух независимых операторов плотности

$$\hat{\rho}(t_0) = \hat{\rho}_A(t_0) \otimes \hat{\rho}_F(t_0), \qquad (14.1.12)$$

каждый из которых накрывает свое гильбертово пространство.

При решении ряда проблем мы будем интересоваться вероятностью $P(t_0 + T)$ того, что спустя время T после начала взаимодействия, полная система может быть найдена в некотором квантовом состоянии $|\Psi_F\rangle$, при котором оператор плотности $\hat{\rho}_F \equiv |\Psi_F\rangle\langle\Psi_F|$ ортогонален оператору плотности в начальном состоянии $\hat{\rho}(t_0)$, т.е.

$$\hat{\rho}_F\hat{\rho}(t_0) = 0 = \hat{\rho}(t_0)\hat{\rho}_F. \qquad (14.1.13)$$

Пример такой задачи встречается при рассмотрении фотоэлектрического детектирования света, где мы исходим из ситуации связанных электронов и задаемся вероятностью того, что один или несколько электронов станут свободными под влиянием электромагнитного взаимодействия. Для того, чтобы получить вероятность $P(t_0 + T)$, мы должны спроецировать конечное состояние на интересующее нас состояние. Таким образом, получаем

$$P(t_0 + T) = \mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}_F\hat{\rho}(t_0 + T)]$$

и далее из (14.1.11) имеем

$$P(t_0 + T) = \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_F\hat{\rho}(t_0) + \frac{1}{i\hbar}\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_F\int_{t_0}^{t_0+T} dt_1[\hat{H}_I(t_1), \hat{\rho}(t_0)] +$$

$$+ \frac{1}{(i\hbar)^2}\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_F\int_{t_0}^{t_0+T} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2[\hat{H}_I(t_1), [\hat{H}_I(t_2)\hat{\rho}(t_0)]] + \text{ и т.д.}$$

В силу ортогональности (14.1.13) первые два члена этого ряда обращаются в нуль, и мы имеем в наинизшем неисчезающем порядке

$$P(t_0 + T) = \frac{1}{\hbar^2}\int_{t_0}^{t_0+T} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2\langle\Psi_F|\hat{H}_I(t_1)\hat{\rho}(t_0)\hat{H}_I(t_2)|\Psi_F\rangle + \text{ к.с.} \qquad (14.1.14)$$

В дальнейшем мы воспользуемся этим простым выражением для анализа некоторых проблем.

14.1.2. Электромагнитное взаимодействие между полями и зарядами

В гл. 10 мы уже показали, что энергию $\hat{H}_F$ свободного, квантованного поля можно выразить в виде (в единицах СИ)

$$\hat{H}_F = \frac{1}{2}\int \left[\varepsilon_0 \hat{\mathbf{E}}^2(\mathbf{r},t) + \frac{1}{\mu_0}\hat{\mathbf{B}}^2(\mathbf{r},t)\right] d^3r = \sum_{\mathbf{k},s}(n_{\mathbf{k}s} + \tfrac{1}{2})\hbar\omega.$$

Здесь $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{n}_{\mathbf{k}s}$ — операторы гильбертова пространства поля. С другой стороны, энергия частицы с зарядом e, массой m и импульсом $\hat{\mathbf{p}}$, находящейся в точке $\mathbf{r}$ во внешнем потенциале $U(r)$, задается выражением

$$\hat{H}_A = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + eU(\hat{\mathbf{r}}),$$

в котором $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{r}}$ надо рассматривать как операторы гильбертова пространства частицы.

Для того, чтобы получить выражение, описывающее взаимодействие между заряженной частицей, например, электроном, и полем, будем руководствоваться классической электромагнитной теорией. Согласно последней канонический импульс системы, состоящей из заряда e в электромагнитном поле, характеризуемым векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$, получается заменой

$$\mathbf{p} \to \mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r},t),$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор заряда. Такая же процедура справедлива и в квантовой механике, за исключением того, что $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{r}}$ теперь становятся операторами гильбертова пространства заряженной частицы, а $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ — оператором гильбертова пространства поля. Если мы учтем это в выражениях для $\hat{H}_F$ и $\hat{H}_A$, то получим гамильтониан $\hat{H}$ полной системы

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int \left[\varepsilon_0 \hat{\mathbf{E}}^2(\mathbf{r},t) + \frac{1}{\mu_0}\hat{\mathbf{B}}^2(\mathbf{r},t)\right] d^3r + \frac{1}{2m}[\hat{\mathbf{p}} - e\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}},t)]^2 + eU(\hat{\mathbf{r}}) = \tag{14.1.15а}$$

$$= \sum_{\mathbf{k},s}(\hat{n}_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2})\hbar\omega + \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + eU(\mathbf{r}) - \frac{e}{2m}[\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}},t) + \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}},t)\cdot\hat{\mathbf{p}}] + \frac{e^2}{2m}\hat{\mathbf{A}}^2(\hat{\mathbf{r}},t)\right]. \tag{14.1.15б}$$

Первым и вторым членами в правой части этого выражения, конечно же, являются $\hat{H}_F$ и $\hat{H}_A$, соответственно, а оставшиеся члены можно определить как взаимодействие $\hat{H}_I(t)$. Такая форма записи $\hat{H}$ известна как *форма минимального взаимодействия* гамильтониана.

На первый взгляд, может показаться странным, что энергия взаимодействия $\hat{H}_I$ зависит от потенциала $\hat{\mathbf{A}}$, который, в свою очередь, зависит от выбранной калибровки. До настоящего момента мы работали в кулоновской калибровке, в которой $\hat{\mathbf{A}}$ представляет собой поперечное векторное поле, и необходимо понимать, что в (14.1.15) $\hat{\mathbf{A}}$ задано в кулоновской калибровке. Однако можно заменить $\hat{\mathbf{A}}$ поперечной частью $\hat{\mathbf{A}}_T$ векторного потенциала $\hat{\mathbf{A}}$, чтобы получить для $\hat{H}_I$ выражение, инвариантное относительно калибровки. Используя кулоновскую калибровку, в которой $\hat{\mathbf{A}}_T$ и $\hat{\mathbf{A}}$ совпадают, мы просто избегаем необходимости различать их.

В выражении для $\hat{H}_I$ обычно делается ряд упрощений. Когда векторный потенциал $\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}},t)$ поля выражается в кулоновской калибровке, можно рассматривать $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}},t)$ в качестве коммутирующих переменных, даже если $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{r}}$ не коммутируют. Чтобы понять это, допустим, что $|\Psi\rangle$ есть произвольное квантовое состояние атомной системы, а $|\mathbf{r}\rangle$ — произвольное состояние, описывающее местоположение, так что

$$\langle\mathbf{r}|\Psi\rangle \equiv \Psi(\mathbf{r}).$$

Тогда находим следующий матричный элемент коммутатора скалярного произведения

$$\langle\mathbf{r}|[\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}},t)]|\Psi\rangle = \frac{\hbar}{i}[\nabla\cdot\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)\Psi(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)\cdot\nabla\Psi(\mathbf{r})] = \frac{\hbar}{i}[\nabla\cdot\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)]\Psi(\mathbf{r}) = 0,$$

так как $\nabla\cdot\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = 0$ в кулоновской калибровке. Поскольку это выполняется для любого состояния $|\Psi\rangle$, то нет необходимости различать в кулоновской калибровке $\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}},t)$ и $\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}},t)\cdot\hat{\mathbf{p}}$, даже если $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{r}}$ не коммутируют.

Дальнейшее упрощение возможно, если атомное состояние $|\Psi\rangle$ или $\langle\Psi|$, на которое либо слева, либо справа, действует $\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}},t)$, является ограниченным состоянием, таким, что волновая функция $\Psi(\mathbf{r})$ обращается в нуль для $\mathbf{r}$, лежащих вне небольшой области, окружающей точку $\mathbf{r}_0$. Чтобы показать это, мы воспользуемся разложением векторного потенциала по модам плоских волн и учтем полноту состояний $|\mathbf{r}\rangle$. Тогда

$$\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}},t)|\Psi\rangle = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2}[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}} + \text{э.с.}]|\Psi\rangle =$$

$$= \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2}[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}} + \text{э.с.}]\int|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\Psi\rangle\,d\mathbf{r} =$$

$$= \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2}[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}}\Psi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{\mathbf{k}s}\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}}\Psi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}]|\mathbf{r}\rangle.$$

Если разброс волновой функции $\Psi(\mathbf{r})$ около $\mathbf{r}_0$ в направлении $\mathbf{k}$ много меньше, чем длина волны $2\pi/k$ любой заполненной $\mathbf{k},s$-моды электромагнитного поля, то, очевидно, в хорошем приближении можно заменить под знаками интегралов множители $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ на $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0}$. Следовательно,

$$\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}},t)|\Psi\rangle \approx \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0,t)|\Psi\rangle,$$

а оператор координаты $\hat{\mathbf{r}}$ в векторном потенциале можно заменить его средним значением и считать его константой. Такое упрощение, обычно, называется *дипольным приближением*. Оно имеет непосредственное применение, например, к изучению взаимодействия между светом и атомным электроном, так как размеры атома много меньше длины волны. В тех случаях, когда такая замена пригодна, гамильтониан можно записать в более простом виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int\left[\varepsilon_0\hat{\mathbf{E}}^2(\mathbf{r},t) + \frac{1}{\mu_0}\hat{\mathbf{B}}^2(\mathbf{r},t)\right]d^3r + \frac{1}{2m}[\hat{\mathbf{p}} - e\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0,t)]^2 + eU(\hat{\mathbf{r}}) = \tag{14.1.16а}$$

$$= \sum_{\mathbf{k},s}\hbar\omega(\hat{n}_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2}) + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + eU(\hat{\mathbf{r}}) - \frac{e}{m}\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0,t) + \frac{\mathrm{e}^2}{2m}\hat{\mathbf{A}}^2(\mathbf{r}_0,t). \tag{14.1.16б}$$

Наконец, для любых, за исключением лишь очень интенсивных, полей, можно пренебречь членом взаимодействия $\mathrm{e}^2\hat{\mathbf{A}}^2/2m$ по сравнению с членом $e\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{A}}^2/m$. Чтобы пояснить это, отметим, что c-числовое отношение

$$\mathscr{R} = \frac{\mathrm{e}^2A^2/m}{epA/m} = \frac{eA}{p}$$

может быть записано в приближенном виде

$$\mathscr{R} \sim \frac{eE}{\omega p} \sim \frac{eE\lambda}{pc} \sim \frac{v}{c}\frac{eE\lambda}{pv} \sim \left(\frac{v}{c}\right)\left(\frac{\text{работа, совершенная над зарядом } e \text{ полем на расстоянии } \lambda}{\text{кинетическая энергия заряда } e}\right),$$

где E — электрическое поле, ω и λ — его частота и длина волны, а v — скорость электрона. В большинстве оптических взаимодействий кинетические энергии электронов имеют порядок в несколько электрон-вольт. Даже если мы работаем со светом, создаваемым лазером, мощность которого составляет 10^6 Вт на 1 мм^2 площади поперечного сечения и для которого $E \sim 2\times10^7$ В/м на характерной длине волны 0.6 мкм, то отношение $\mathscr{R}$ получается всего лишь порядка 0.02. Таким образом, видно, что членом взаимодействия $\mathrm{e}^2\hat{\mathbf{A}}^2/2m$ можно пренебречь для всех слабых и умеренно интенсивных световых пучков. Только при очень больших мощностях света, когда доминируют многофотонные взаимодействия, этот член становится важным. Учитывая это, мы в дальнейшем будем упрощать выражение для энергии взаимодействия и писать

$$\hat{H}_I(t) \approx -\frac{e}{m}\hat{\mathbf{p}}(t)\cdot\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0,t). \tag{14.1.17}$$

14.1.3. Многополюсный гамильтониан

Иногда, при рассмотрении взаимодействия между электроном атома и полем, помимо гамильтониана в форме минимального взаимодействия, определяемого выражением (14.1.16) или (14.1.17), представляется удобным использовать другую его форму, — так называемый *многополюсный гамильтониан* (Lamb, 1952; Power and Zienau, 1959). Эту форму можно вывести из (14.1.16) с помощью унитарного преобразования (Ackerhalt and Milonni, 1984; главным образом, мы следуем их рассуждениям; также см. Milonni, Cook and Ackerhalt, 1989),

$$\hat{U} \equiv \exp[-ie\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0, t)\hbar], \tag{14.1.18}$$

где можно считать, например, что $\mathbf{r}_0$ задает координаты атомного ядра. Новые операторы, получающиеся после преобразования $\hat{U}$, будем отмечать с помощью верхнего индекса (N). Очевидно, что

$$\hat{\mathbf{r}}^{(N)} = \hat{U}^\dagger \hat{\mathbf{r}} \hat{U} = \hat{\mathbf{r}}, \quad \hat{\mathbf{A}}^{(N)}(\mathbf{r}, t) = \hat{U}^\dagger \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)\hat{U} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t), \quad \hat{\mathbf{B}}^{(N)}(\mathbf{r}, t) = \hat{U}^\dagger \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)\hat{U} = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t), \tag{14.1.19}$$

где последнее выражение получается в силу того, что $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0, t)$ коммутирует с $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}_0, t)$. Однако при унитарном преобразовании изменяются как импульс $\hat{\mathbf{p}}$, так и электрическое поле $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0, t)$. С помощью теоремы об операторном разложении (10.11.1), получаем, если воспользоваться коммутационным соотношением (10.8.15), что

$$\hat{\mathbf{p}}^{(N)} = \exp[ie\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0, t)/\hbar]\hat{\mathbf{p}} \exp[-ie\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0, t)/\hbar] = \hat{\mathbf{p}} + \frac{ie}{\hbar}[\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0, t), \hat{\mathbf{p}}] = \hat{\mathbf{p}} - e\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0, t), \tag{14.1.20}$$

$$\hat{E}_i^{(N)}(\mathbf{r}, t) = \exp[ie\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0, t)/\hbar]\hat{E}_i(\mathbf{r}, t) \exp[-ie\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0, t)/\hbar] =$$
$$= \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) + \frac{ie}{\hbar}\hat{r}_i[\hat{A}_j(\mathbf{r}_0, t), \hat{E}_i(\mathbf{r}, t)] = \hat{E}_i(\mathbf{r}, t) + \frac{e\hat{r}_j}{\varepsilon_0}\delta_{ij}^T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{14.1.21}$$

где предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Теперь учтем, что

$$e\hat{r}_j\delta_{ji}^T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \equiv \hat{P}_i(\mathbf{r}, t), \tag{14.1.22}$$

представляет собой поперечную поляризацию, создаваемую точечным зарядом e, как в старых, так и в новых переменных. Отсюда следует, что (14.1.21) можно записать в виде

$$\hat{\mathbf{E}}^{(N)}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t), \tag{14.1.23}$$

где $\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}_0, t)$ — вектор поперечного диэлектрического смещения.

Если мы теперь подставим $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\mathbf{p}}$, $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ из (14.1.19), (14.1.20) и (14.1.23) в (14.1.16а), то получим гамильтониан, записанный через новые переменные в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int \left[\varepsilon_0 \hat{\mathbf{E}}^{(N)^2}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0}\hat{\mathbf{B}}^{(N)^2}(\mathbf{r}, t)\right] d^3r + \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^{(N)^2}}{2m} + eU(\hat{\mathbf{r}}^{(N)})\right] -$$
$$- \int \hat{\mathbf{E}}^{(N)}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)\, d^3r + \frac{1}{2\varepsilon_0}\int \hat{\mathbf{P}}^2(\mathbf{r}, t)\, d^3r. \tag{14.1.24}$$

Если трактовать первые два члена в новых переменных как члены гамильтониана при отсутствии взаимодействия, то другие два члена представляют взаимодействие. Последний член, как правило, важен только при расчетах смещения уровней, и, если мы пренебрежем им и воспользуемся выражением (14.1.22) для $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}_0, t)$ и (14.1.23) для $\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}_0, t)$, то взаимодействие принимает вид

$$\hat{H}_I = -e\int \hat{r}_j\delta_{ji}^T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\hat{E}_i^{(N)}(\mathbf{r}, t)\, d^3r = -e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0, t) = -\frac{e}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}_0, t). \tag{14.1.25}$$

Так как $e\hat{\mathbf{r}}$ представляет собой дипольный момент заряда e, то это выражение часто называется *электродипольной* формой взаимодействия, выраженной в первоначальных переменных. Однако необходимо подчеркнуть, что «невзаимодействующая» часть полного гамильтониана отличается от соответствующей части в (14.1.16), и поэтому взаимодействие $\hat{H}_I$, оказалось переопределенным. Оно отличается от более привычного выражения $-e\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0,t)$, которое иногда используется вместо (14.1.25), на величину добавленного поляризационного члена. Пренебрежение поляризацией может в некоторых случаях привести к несовместимости. Данный вопрос остается предметом дискуссий (Woolley, 1971; Fried, 1973; Kobe, 1978, 1979; Carter and Kelley, 1979; Mandel, 1979; Power and Thirunamachandran, 1980, 1982; Healy, 1980, 1982; Haller, 1982; Ackerhalt and Milonni 1984; Milonni, Cook and Ackerhalt, 1989).

В тех случаях, когда мы имеем дело со связанным электроном, взаимодействующим с осциллирующим электромагнитном полем, для многополюсной формы электромагнитного взаимодействия можно привести гораздо более простой, хотя и приближенный вывод. Сначала отметим, что так называемый «кинетический импульс» электрона, определяемый выражением

$$\hat{\mathbf{p}}^{(\text{Кин})} = m\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{m}{i\hbar}[\hat{\mathbf{r}},\hat{H}],$$

можно записать с помощью (14.1.16а) и правила суммирования в виде

$$\hat{p}_j^{(\text{Кин})} = \frac{m}{i\hbar}\left\{\left[\hat{r}_j,\frac{\hat{p}_i\hat{p}_i}{2m}\right] - \frac{e}{m}[\hat{r}_j,\hat{p}_k]\hat{A}_k(\mathbf{r}_0,t)\right\} = \hat{p}_j - e\hat{A}_j(\mathbf{r}_0,t). \tag{14.1.26}$$

Теперь умножим скалярно $\hat{\mathbf{p}}^{(\text{Кин})}$ на $(-e/m)\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0,t)$ и найдем, что

$$-\frac{e}{m}\hat{\mathbf{p}}^{(\text{Кин})}\cdot\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0,t) = -\frac{e}{m}\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0,t) + \frac{e^2}{m}\hat{\mathbf{A}}^2(\mathbf{r}_0,t) = -e\frac{\partial}{\partial t}[\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0,t)] + e\hat{\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0,t)}{\partial t} =$$
$$= -e\frac{\partial}{\partial t}[\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0,t)] + e\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0,t). \tag{14.1.27}$$

Усредним каждый член по периоду осцилляций. Если $\ddot{\hat{\mathbf{r}}}$ и $\hat{\mathbf{E}}$ приблизительно находятся в фазе, то это справедливо и для $\hat{\mathbf{r}}$ и $\hat{\mathbf{E}}$, а также для $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0,t)$. С другой стороны, $\hat{\mathbf{r}}$ и $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0,t)$ остаются расфазированными приблизительно на $\pi/2$, так что правый член в правой части выражения (14.1.27) имеет среднее значение, близкое к нулю. Следовательно,

$$-\frac{e}{m}\hat{\mathbf{p}}^{(\text{Кин})}\cdot\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0,t) \approx e\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0,t) = -\frac{e}{m}\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0,t) + \frac{e^2}{m}\hat{\mathbf{A}}^2(\mathbf{r}_0,t). \tag{14.1.28}$$

14.2. Вероятность одноэлектронного фотодетектирования

В гл. 12 мы уже отмечали, что большинство измерений света основываются на поглощении фотонов посредством фотоэлектрического эффекта. Ситуация усложняется и оказывается совершенно другой на более длинных волнах, например в радиочастотной области, где само электрическое поле легко измеряется, а взаимодействие с измерительным инструментом включает процессы как испускания, так и поглощения. Но периоды колебаний в оптике являются достаточно короткими, и за время измерения происходит большое число колебаний поля, так что конечное состояние энергии может быть вполне определенным, если оно было изначально хорошо определено.

Для того, чтобы заняться этой проблемой, рассмотрим своего рода идеализированный фотодетектор, показанный на рис. 14.1. Он имеет проводящую фоточувствительную поверхность, т.е. фотокатод, с площадью S и толщиной, много меньшей оптической длины волны, которая освещается лучом света под прямым углом. Для простоты предполагаем, что поле на поверхности S имеет вид плоской волны. На катоде содержится большое количество электронов в связанном состоянии, некоторые из которых под действием падающего света могут быть испущены. Испущенный электрон быстро притягивается к аноду, где он создает (возможно, после дальнейшего усиления) детектируемый электрический импульс.

Рассмотрим для начала отдельный электрон, расположенный в точке $\mathbf{r}_0$, который первоначально находится в некотором связанном состоянии $|\Phi_0\rangle$ с отрицательным собственным значением энергии

$E_0 = -\hbar\omega_0$ гамильтониана невзаимодействующего электрона. Таким образом,

$$\hat{H}_A|\Phi_0\rangle = E_0|\Phi_0\rangle = -\hbar\omega_0|\Phi_0\rangle. \qquad (14.2.1)$$

Будем предполагать, что энергия связи $|E_0|$ порядка $1 \div 2$ эВ, что является характерным для оптического фотодетектора, тогда частота ω_0 порядка $10^{15}\,\mathrm{c}^{-1}$. Далее предположим, что на этот электрон действует оптическое поле, которое находится в некотором квантовом состоянии, характеризуемом оператором плотности $\hat{\rho}_F(t_0)$ в начальный момент времени t_0, когда начинается взаимодействие. Оператор плотности $\hat{\rho}_F(t_0)$ комбинированной системы «электрон + поле» в момент времени t_0 представляется в виде прямого произведения

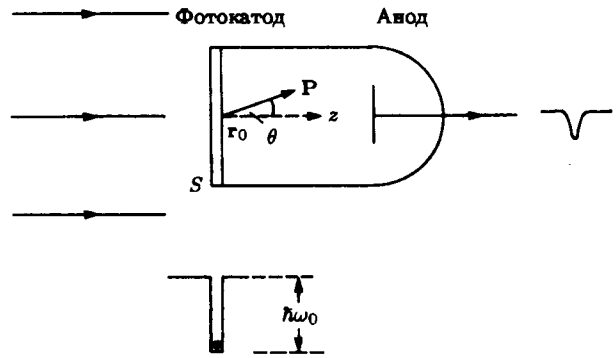


Рис. 14.1. Идеализированный фотодетектор со связанным электроном в потенциальной яме

$$\hat{\rho}(t_0) = |\Phi_0\rangle\langle\Phi_0| \otimes \hat{\rho}_F(t_0). \qquad (14.2.2)$$

Теперь вычислим вероятность $P(\mathbf{r}_0, t_0, \Delta t)$ того, что под действием электромагнитного поля электрон совершает переход в несвязанное состояние $|\Phi\rangle$ с положительной энергией за короткий временно́й интервал Δt, который, при этом, является достаточно длительным по сравнению с оптическим периодом. Здесь подразумевается, что свободный электрон будет быстро притянут к аноду и вызовет электрический импульс, который фиксирует фотоэлектрическую эмиссию в момент времени $t_0 + \Delta t$. Как мы увидим, решение данной задачи допускает обобщение.

Мы полагаем, что энергия взаимодействия $\hat{H}_I(t)$ связанной системы задается выражением (14.1.17), причем как импульс электрона $\hat{\mathbf{p}}$, так и векторный потенциал $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0, t)$ поля записаны в картине взаимодействия. Тогда,

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = \exp[i\hat{H}_A(t - t_0)/\hbar]\hat{\mathbf{p}}\exp[-i\hat{H}_A(t - t_0)/\hbar], \qquad (14.2.3)$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2}[\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0 - \omega(t-t_0)]} + \text{э.с.}] = \hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) + \hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}_0, t), \qquad (14.2.4)$$

где $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$ с отсутствующим временны́м аргументом означают операторы в момент времени t_0, когда начинается взаимодействие.

Пусть $|\Phi\rangle$ есть энергетическое состояние свободного электрона с положительным собственным значением E, так что

$$\hat{H}_A|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle, \quad E > 0, \qquad (14.2.5)$$

и пусть $|\chi\rangle$ является произвольным конечным состоянием электромагнитного поля. Поскольку нас, обычно, не интересует конечное состояние поля, просуммируем по всем возможным состояниям $|\chi\rangle$. Тогда вероятность того, что система совершает переход за время Δt из начального состояния в конечное состояние $|\Phi_0\rangle|\chi\rangle$ задается выражением $\langle\chi|\langle\Phi|\hat{\rho}(t_0 + \Delta t)|\Phi\rangle|\chi\rangle$. Так как конечное состояние ортогонально начальному состоянию, то можно воспользоваться упрощенным соотношением (14.1.14), полученным по теории возмущений, и записать

Вероятность перехода в состояние $|\Phi_0\rangle|\chi\rangle$ в момент времени $t_0 + \Delta t =$

$$= \frac{1}{\hbar^2}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \langle\chi|\langle\Phi|\hat{H}_I(t_1)\hat{\rho}(t_0)\hat{H}_I(t_2)|\Phi\rangle|\chi\rangle + \text{к.с.}$$

Теперь подставим в интеграл $\hat{\rho}(t_0)$ и $\hat{H}_I$ из (14.2.2) и (14.1.17) и воспользуемся (14.2.3) и (14.2.4). Поскольку операторы электрона и поля коммутируют между собой в один и тот же момент времени, матричный элемент под знаком интеграла можно разложить на произведение двух матричных элементов, один из

которых относится к электрону, а другой к полю. Все операторы $\exp[\pm i\hat{H}_A(t-t_0)/\hbar]$ вплотную действуют на свои собственные состояния, и, заменяя $\hat{H}_A$ величиной E или E_0 с помощью (14.2.1) и (14.2.5), получаем

Вероятность перехода в состояние $|\Phi_0\rangle|\chi\rangle$ в момент времени $t_0+\Delta t=$

$$=\left(\frac{e}{m\hbar}\right)^2\langle\Phi|\hat{p}_i|\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|\hat{p}_i|\Phi\rangle\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\,\mathrm{e}^{i(E-E_0)(t_1-t_2)/\hbar}\times$$

$$\times\langle\chi|\hat{A}_i(\mathbf{r}_0,t_1)\hat{\rho}_F(t_0)\hat{A}_j(\mathbf{r}_0,t_2)|\chi\rangle+\text{к.с.}\quad(14.2.6)$$

Как правило, мы не интересуемся и не предпринимаем никаких попыток определить конечное состояние $|\chi\rangle$ поля. В таком случае, вероятность перехода в свободное электронное состояние, безотносительно к конечному состоянию поля, получается суммированием по всем возможным состояниям $|\chi\rangle$.

Запишем $\hat{\rho}_A(t)$ в диагональном представлении по когерентным состояниям (см. разд. 11.8), полагая

$$\hat{\rho}_F(t_0)=\int\phi(\{v\},t_0)|\{v\}\rangle\langle\{v\}|\,d\{v\},$$

и подставим его в (14.2.6). Изменив порядок двух матричных элементов $\langle\chi|\hat{A}_i(\mathbf{r}_0,t_1)|\{v\}\rangle$ и $\langle\{v\}|\hat{A}_j(\mathbf{r}_0,t_1)|\chi\rangle$ под знаком интеграла и просуммировав по полному набору всех конечных состояний, придем к вероятности электронного перехода, безотносительно к конечному состоянию поля. С помощью тождества $\sum_{\text{по всем }\chi}|\chi\rangle\langle\chi|=1$ получаем, что

Вероятность перехода в электронное состояние $|\Phi\rangle$ за время $t_0+\Delta t$, безотносительно к конечному состоянию поля $=$

$$=\left(\frac{e}{m\hbar}\right)^2\langle\Phi|\hat{p}_i|\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|\hat{p}_j|\Phi\rangle\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\,\mathrm{e}^{i(E-E_0)(t_1-t_2)/\hbar}\langle\hat{A}_j(\mathbf{r}_0,t_2)\hat{A}_i(\mathbf{r}_0,t_1)\rangle+\text{к.с.},\quad(14.2.7)$$

где множитель, содержащий полевое среднее, обозначает

$$\langle\hat{A}_j(\mathbf{r}_0,t_2)\hat{A}_i(\mathbf{r}_0,t_1)\rangle=\int\phi(\{v\},t_0)\langle\{v\}|\hat{A}_j(\mathbf{r}_0,t_2)\hat{A}_i(\mathbf{r}_0,t_1)|\{v\}\rangle\,d\{v\}.$$

Наконец, просуммируем вероятность в (14.2.7) по всем конечным электронным состояниям $|\Phi\rangle$ с положительной энергией E для нахождения вероятности фотоэлектрического детектирования. При суммировании можно учесть возможность того, что электроны в различных конечных состояниях $|\Phi\rangle$ могут иметь различные вероятности g попадания на детектор и регистрации. Чтобы выразить это явно, предположим, что конечное электронное состояние $|\Phi(E,\Omega)\rangle$ характеризуется энергией электрона E [ср. (14.2.5)] и, возможно, другими переменными, совокупность которых обозначаются через Ω, и что вероятность $g(\Omega)$ также зависит от этих переменных. Используя плотность состояний $\sigma(E,\Omega)$, где $\sigma(E,\Omega)\,dE\,d\Omega$ — число конечных электронных состояний в интервале $dE\,d\Omega$, мы выразим суммы по E и Ω в виде интегралов. В результате имеем из (14.2.7) (Kimble and Mandel, 1984), что

Вероятность фотоэлектрического детектирования в момент времени $t_0+\Delta t=$

$$=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2k_{ij}(t_1-t_2)\langle\hat{A}_j(\mathbf{r}_0,t_2)\hat{A}_i(\mathbf{r}_0,t_1)\rangle+\text{к.с.},\quad(14.2.8)$$

где введено обозначение

$$k_{ij}(\tau)\equiv\left(\frac{e}{m\hbar}\right)^2\int_0^\infty dE\int d\Omega\sigma(E,\Omega)g(E,\Omega)\,\mathrm{e}^{i(E-E_0)\tau/\hbar}\langle\Phi(E,\Omega)|\hat{p}_i|\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|\hat{p}_j|\Phi(E,\Omega)\rangle\quad(14.2.9)$$

для функции эффективного отклика детектора.

Анализ (14.2.9) показывает, что $k_{ij}(\tau)$ удовлетворяет условию симметрии

$$k_{ji}(-\tau)=k_{ij}^*(\tau).\quad(14.2.10)$$

Если сделать замену переменной $E - E_0 = \hbar\omega$, так что интеграл по энергии в (14.2.9) станет интегралом по частоте, то фурье-образ $K_{ij}(\omega)$ от $k_{ij}(\tau)$, являющийся частотной функцией отклика, очевидно запишется в виде

$$K_{ij}(\omega) = 2\pi\hbar\left(\frac{e}{m\hbar}\right)^2 \int g(E_0+\hbar\omega,\Omega)\sigma(E_0+\hbar\omega,\Omega)\langle\Phi(E_0+\hbar\omega,\Omega)|\hat{p}_i|\Phi_0\rangle\times$$
$$\times\,\langle\Phi_0|\hat{p}_j|\Phi(E_0+\hbar\omega,\Omega)\rangle\Theta(\omega-\omega_0)\,d\Omega. \quad (14.2.11)$$

Здесь $\Theta(\omega)$ — единичная ступенчатая функция Хевисайда, определяемая как $\Theta(\omega) = 0$ при $\omega < 0$ и $\Theta(\omega) = 1$ при $\omega > 0$, а ω_0 задается выражением (14.2.1). Из-за наличия ступенчатой функции $\Theta(\omega - \omega_0)$, получаем для любой положительной частоты ω, используя обратное фурье-преобразование функции $k_{ij}(\tau)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_{ij}(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,d\tau = K_{ij}(\omega), \quad \int_{-\infty}^{\infty} k_{ij}(\tau)\,\mathrm{e}^{i\omega\tau}\,d\tau = K_{ij}(-\omega) = 0. \quad (14.2.12)$$

Далее учтем, что для многих фотодетекторов характерным является частотный отклик $K_{ij}(\omega)$ с большой шириной полосы частот, нередко такого же порядка, что и оптическая частота ω_0. В этих условиях, временно́й интервал, где величина $k_{ij}(\tau)$ существенно отлична от нуля, является чрезвычайно коротким, порядка оптического периода. В этом случае бесконечные пределы интегрирования в (14.2.12) можно в хорошем приближении заменить на конечные пределы $-\tau_1$, τ_2, при условии, что $-\tau_1$ и τ_2 имеют длительность, по крайней мере, в несколько периодов. Таким образом, можно записать

$$\int_{-\tau_1}^{\tau_2} k_{ij}(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,d\tau \approx K_{ij}(\omega), \quad \int_{-\tau_1}^{\tau_2} k_{ij}(\tau)\,\mathrm{e}^{i\omega\tau}\,d\tau \approx 0. \quad (14.2.13)$$

Удобно выразить операторное произведение под знаком интеграла в (14.2.8) в нормальном порядке, разлагая $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)$ на соответствующие положительно- и отрицательно-частотные части

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r},t) + \hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r},t),$$

играющие роль операторов уничтожения и рождения в конфигурационном пространстве (ср. разд. 11.11). Таким образом, имеем (Yurke, 1985)

$$\hat{A}_j(\mathbf{r},t_2)\hat{A}_i(\mathbf{r},t_1) = \hat{A}_j^{(+)}(\mathbf{r},t_2)\hat{A}_i^{(+)}(\mathbf{r},t_1) + \hat{A}_j^{(-)}(\mathbf{r},t_2)\hat{A}_i^{(-)}(\mathbf{r},t_1) +$$
$$+\,\hat{A}_j^{(-)}(\mathbf{r},t_2)\hat{A}_i^{(+)}(\mathbf{r},t_1) + \hat{A}_i^{(-)}(\mathbf{r},t_1)\hat{A}_j^{(+)}(\mathbf{r},t_2) + [\hat{A}_j^{(+)}(\mathbf{r},t_2),\hat{A}_i^{(-)}(\mathbf{r},t_1)] =$$
$$=: \hat{A}_j(\mathbf{r},t_2)\hat{A}_i(\mathbf{r},t_1) : +[\hat{A}_j^{(+)}(\mathbf{r},t_2),\hat{A}_i^{(-)}(\mathbf{r},t_1)], \quad (14.2.14)$$

где пара двоеточий :: означает нормальное упорядочение. С помощью обычного разложения по модам (14.2.4), коммутатор легко вычисляется [см. также (10.4. 38)], и мы находим

$$[\hat{A}_j^{(+)}(\mathbf{r},t_2),\hat{A}_i^{(-)}(\mathbf{r},t_1)] = \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}\sum_{\mathbf{k}',s'}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2}\sum_{\mathbf{k}',s'}\left(\frac{\hbar}{2\omega'\varepsilon_0}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\,[\hat{a}_{\mathbf{k}s},\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'s'}](\varepsilon_{\mathbf{k}s})_j(\varepsilon^{*}_{\mathbf{k}'s'})_i\,\mathrm{e}^{i[(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}-\omega(t_2-t_0)+\omega'(t_1-t_0)]} =$$
$$= \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k}}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\mathrm{e}^{i\omega(t_1-t_2)} \to \frac{1}{(2\pi)^3}\int\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\mathrm{e}^{i\omega(t_1-t_2)}\,d^3k. \quad (14.2.15)$$

При выводе этого результата мы воспользовались коммутационным соотношением (10.3.9), тензорным равенством (10.2.19в) и перешли к континуальному пределу $L \to \infty$. Теперь с помощью (14.2.14) и (14.2.15) выражение (14.2.8) приобретает вид:

Вероятность фотоэлектрического детектирования за время $t_0 + \Delta t =$

$$= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 k_{ij}(t_1-t_2)[\langle :\hat{A}_j(\mathbf{r}_0,t_2)\hat{A}_i(\mathbf{r}_0,t_1): \rangle +$$
$$+\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\mathrm{e}^{i\omega(t_1-t_2)}\,d^3k] + \text{к.с.} \quad (14.2.16)$$

Рассмотрим более подробно вклад второго члена, происходящего из коммутатора в (14.2.15). Его можно назвать «вакуумным вкладом» в вероятность, поскольку он не зависит от состояния входящего оптического поля. Так как подынтегральное выражение при интегрировании по t_1, t_2 зависит только от разности двух аргументов, можно свести двойной временной интеграл к одинарному интегралу по разности $t_1 - t_2$. Положим $t_1 - t_0 = t'$, $t_2 - t_0 = t''$, $t' - t'' = \tau$ и воспользуемся свойством симметрии (14.2.10). Тогда, меняя порядок интегрирования, получаем

Вакуумный вклад в вероятность детектирования =

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\int_0^{\Delta t}dt'\int_0^{t'}dt''[k_{ij}(t'-t'')\,\mathrm{e}^{i\omega(t'-t'')}+k_{ij}(t''-t')\,\mathrm{e}^{i\omega(t''-t')}] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\int_{-\Delta t}^{\Delta t}d\tau(\Delta t-|\tau|)k_{ij}(\tau)\,\mathrm{e}^{i\omega\tau}=0 \quad (14.2.17)$$

в силу (14.2.13), при условии, что $\Delta t \gg 1/\omega_0$, поскольку множитель $\Delta t - |\tau|$ можно в хорошем приближении заменить на Δt. [Случай $\Delta t \not\gg 1/\omega_0$ был рассмотрен в работе (Mandel and Meltzer, 1969).] Второе выражение получается из первого, когда интегрирование проводится вдоль полос, наклоненных под углом 45° к осям t' и t'', имеющих площади $(\Delta t - |\tau|)\,d\tau$. (Подобное преобразование от двойного к одиночному временному интегралу осуществляется в разд. 14.9 [см. (14.9.11)] и обсуждается там более подробно.) Формула (14.2.16) с помощью (14.2.17) теперь упрощается и принимает вид

Вероятность фотоэлектрического детектирования за $t_0 + \Delta t$ =

$$= P(\mathbf{r}_0, t_0, \Delta t) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2 k_{ij}(t_1-t_2)\langle :\hat{A}_j(\mathbf{r}_0,t_2)\hat{A}_i(\mathbf{r}_0,t_1):\rangle + \text{к.с.} \quad (14.2.18)$$

14.2.1. Применение к чистому когерентному состоянию

Теперь применим данный результат к особому случаю, когда падающее оптическое поле находится в чистом когерентном состоянии $|\{v\}\rangle$. Поскольку $|\{v\}\rangle$ представляет правое собственное состояние $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t)$, а $\langle\{v\}|$ левое собственное состояние $\hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}_0, t)$, можно сразу вычислить нормально упорядоченное среднее в (14.2.18) и получить соотношение

$$P(\mathbf{r}_0, t_0, \Delta t) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2 k_{ij}(t_1-t_2)\hat{A}_j(\mathbf{r}_0,t_2)\hat{A}_i(\mathbf{r}_0,t_1) + \text{к.с.}, \quad (14.2.19)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)$ есть c-числовой векторный потенциал, соответствующий когерентному состоянию $|\{v\}\rangle$.

Интересно сравнить данный результат в частном случае когерентного состояния $|\{v\}\rangle$ с результатом, полученным в (14.2.6), если положить $\hat{\rho}_F(t_0) = |\{v\}\rangle\langle\{v\}|$, считая, что конечное состояние $|\chi\rangle$ является тем же когерентным состоянием $|\{v\}\rangle$. Поскольку

$$\langle\{v\}|\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0,t)|\{v\}\rangle = \mathbf{A}(\mathbf{r}_0,t),$$

формула (14.2.6) дает полностью аналогичный результат для вероятности детектирования, что и (14.2.19). Другими словами, для поля в когерентном состоянии вероятность детектирования при неизменности состояния поля, равна вероятности детектирования безотносительно к конечному состоянию поля. Это означает, что с той степенью приближения, с которой мы здесь работаем[1], начальное состояние после детектирования остается с вероятностью единица состоянием $|\{v\}\rangle$.

[1] Это является примером теоремы, что если A и B есть два события, и если совместная вероятность

$$p(A,B) = \sum_{\text{по всем } B} p(A,B) = p(A),$$

где $P(A)$ есть вероятность A безотносительно к B, то условная вероятность B при наличии A равна

$$P_c(B|A) = \frac{p(A,B)}{p(a)} = 1.$$

Несложно видеть, почему это так. Пренебрегая вакуумным вкладом и сохраняя только нормально упорядоченные члены, как в (14.2.18), мы фактически придаем особое значение членам, отвечающим сохранению энергии и соответствующим испусканию электрона, которое сопровождается поглощением фотона. Но, как мы знаем из нашего изучения когерентного состояния в гл. 11, поглощение фотона из когерентного состояния оставляет само состояние неизменным. Вот почему процесс фотоэлектрического детектирования в когерентном состоянии в течении достаточно долгого временно́го интервала Δt также остается неизменным. Именно это свойство когерентного состояния делает выбор его в качестве начального состояния наиболее привлекательным во многих расчетах, содержащих поглощение фотона.

Теперь для того, чтобы вычислить интегралы по времени в (14.2.19), разложим по модам каждый из двух векторных потенциалов [ср. (14.2.4)], что приведет к появлению колебательных множителей типа $\exp[\pm i\omega(t_1 - t_0) \pm i\omega'(t_2 - t_0)]$, и воспользуемся интегральным представлением для $k_{ij}\tau$ (14.2.9). В таком случае мы приходим к четырем различным двойным интегралам по времени типа

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, \mathrm{e}^{i[(E-E_0)/\hbar\pm\omega](t_1-t_0)}\, \mathrm{e}^{-i[(E-E_0)/\hbar\pm\omega'](t_2-t_0)} = \\ = \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{t'} dt''\, \mathrm{e}^{i[(E-E_0)/\hbar\pm\omega]t'}\, \mathrm{e}^{-i[(E-E_0)/\hbar\pm\omega']t''}. \quad (14.2.20)$$

Поскольку $E > 0$, $-E_0/\hbar = \omega_0$, ω, ω' все являются оптическими частотами, а длительность временно́го интервала измерения Δt составляет, как правило, тысячи оптических периодов, то понятно, что подынтегральные выражения осциллируют вдвое быстрее оптической частоты и поэтому вносят небольшой вклад в интеграл, если только, конечно, перед ω и ω' в экспонентах не стоят одновременно минусы. Из этого следует, что единственный значимый вклад во временны́е интегралы получается от члена $A_j^{(-)}(\mathbf{r}_0, t_2)A_i^{(+)}(\mathbf{r}_0, t_1)$ в $A_j(\mathbf{r}_0, t_2)A_i(\mathbf{r}_0, t_1)$, и вместо (14.2.19), можно записать

$$P(\mathbf{r}_0, t_0, \Delta t) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 k_{ij}(t_1 - t_2)\hat{A}_j^{(-)}(\mathbf{r}_0, t_2)\hat{A}_i^{(+)}(\mathbf{r}_0, t_1) + \text{к.с.},$$

или, после замены $t_1 = t_0 + t'$, $t_2 = t_0 + t''$, имеем

$$P(\mathbf{r}_0, t_0, \Delta t) = \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{t'} dt'' k_{ij}(t' - t'')\hat{A}_j^{(-)}(\mathbf{r}_0, t_0 + t'')\hat{A}_i^{(+)}(\mathbf{r}_0, t_0 + t') + \text{к.с.} \quad (14.2.21)$$

14.2.2. Вычисление вероятности в квазимонохроматическом приближении

Полученное решение можно упростить, если воспользоваться квазимонохроматическим приближением, в соответствии с которым единственные вклады в разложение операторов $A_j^{(-)}(\mathbf{r}_0, t_2')$ и $A_i^{(+)}(\mathbf{r}_0, t_1')$ по модам получаются от частот в узком диапазоне $\omega_1 \pm \frac{1}{2}\Delta\omega$ с центром на некоторой оптической частоте ω_1 при $\Delta\omega \ll \omega_1$ (см. рис. 14.2) [Для изучения фотоэлектрического детектирования немонохроматического света см. работу (Kimble and Mandel, 1984).] Если предположить, что Δt удовлетворяет неравенствам

$$1/\omega_1 \ll \Delta t \ll 1/\Delta\omega, \quad (14.2.22)$$

то в модовом разложении $A_j^{(+)}(\mathbf{r}_0, t_0 + t')$ можно использовать приближение

$$\mathrm{e}^{-i\omega(t_0+t')} = \mathrm{e}^{-i\omega t_0}\, \mathrm{e}^{-i\omega_1 t'}\, \mathrm{e}^{-i(\omega-\omega_1)t'} \approx \mathrm{e}^{-i\omega t_0}\, \mathrm{e}^{-i\omega_1 t'}, \quad (14.2.23)$$

потому, что $|\omega - \omega_1|t' < \frac{1}{2}\Delta\omega t' < \frac{1}{2}\Delta\omega\Delta t \ll 1$. Отсюда следует, что в хорошем приближении

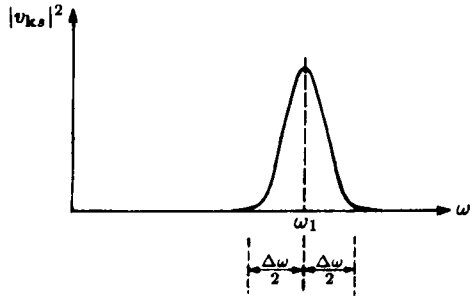


Рис. 14.2. Квазимонохроматическое спектральное распределение относительно частоты ω_1

$$A_i^{(+)}(\mathbf{r}_0, t_0 + t') \approx A_i^{(+)}(\mathbf{r}_0, t_0)\, \mathrm{e}^{-i\omega_1 t'}, \quad A_j^{(-)}(\mathbf{r}_0, t_0 + t'') \approx A_i^{(-)}(\mathbf{r}_0, t_0)\, \mathrm{e}^{i\omega_1 t''}.$$

Амплитуда поля в таком случае может быть получена из интегралов по времени и (14.2.12) приобретает вид

$$P(\mathbf{r}_0,t_0,\Delta t)=A_j^{(-)}(\mathbf{r}_0,t_0)A_i^{(+)}(\mathbf{r}_0,t_0)\int_0^{\Delta t}dt'\int_0^{t'}dt''k_{ij}(t'-t'')\,\mathrm{e}^{-i\omega_1(t'-t'')}+\text{к.с.}=$$

$$=A_j^{(-)}(\mathbf{r}_0,t_0)A_i^{(+)}(\mathbf{r}_0,t_0)\int_0^{\Delta t}dt'\int_0^{t'}d\tau k_{ij}(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega_1\tau}+\text{к.с.}=$$

$$=A_j^{(-)}(\mathbf{r}_0,t_0)A_i^{(+)}(\mathbf{r}_0,t_0)\int_0^{\Delta t}dt'\int_{-t'}^{t'}d\tau k_{ij}(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega_1\tau},$$

если положить $t'-t''=\tau$ и воспользоваться свойством симметрии (14.2.10). Предполагая, что $\Delta t\gg 1/\omega_0$, так что τ-интеграл фактически содержит все основные вклады от $k_{ij}(\tau)$ почти для всех t', можно воспользоваться (14.2.13) и отождествить τ-интеграл с $K_{ij}(\omega_1)$. В результате (14.2.21) приводит к соотношению

$$P(\mathbf{r}_0,t_0,\Delta t)=A_j^{(-)}(\mathbf{r}_0,t_0)A_i^{(+)}(\mathbf{r}_0,t_0)\Delta tK_{ij}(\omega_1)=$$

$$=2\pi\hbar\Delta t\left(\frac{e}{m\hbar}\right)^2\int\sigma(E_0+\hbar\omega_0,\Omega)g(E_0+\hbar\omega_0,\Omega)\times$$

$$\times|\langle\Phi(E_0+\hbar\omega_1,\Omega)|\hat{\mathbf{p}}|\Phi_0\rangle\cdot\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}_0,t_0)|^2\Theta(\omega_1-\omega_0)\,d\Omega,\quad(14.2.24)$$

где использовано выражение (14.2.11) для $K_{ij}(\omega)$. В силу наличия множителя $\theta(\omega_1-\omega_0)$ оно отлично от нуля только тогда, когда $\omega_1>\omega_0$, т.е. когда энергия поглощенного фотона $\hbar\omega_1$ настолько большая, что превосходит энергию связи $\hbar\omega_0$.

Четыре важных свойства полученного результата, представленного формулой (14.2.24), заслуживают отдельного упоминания:

(а) Вероятность фотоэлектрического детектирования $P(\mathbf{r}_0,t_0,\Delta t)$ при небольших Δt пропорциональна Δt и иногда ее записывают как $P(\mathbf{r}_0,t_0)\Delta t$, предполагая при этом, что $P(\mathbf{r}_0,t_0)$ есть плотность вероятности.

(б) Аналитический сигнал $\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}_0,t)$ для векторного потенциала, представляющий состояние оптического поля, возникает естественным образом, поскольку он является собственным значением оператора поглощения фотона, принадлежащего когерентному состоянию $|\{v\}\rangle$, а измерение соответствует поглощению фотона.

(в) Для того, чтобы фотоэмиссия имела место, частота оптического поля должна удовлетворять фотоэлектрическому условию Эйнштейна: $\hbar\omega_1>-E_0$.

(г) Конечное состояние оптического поля в хорошем приближении является тем же когерентным состоянием, которое характеризует начальное состояние.

Теперь с помощью разумных упрощений попытаемся вычислить частотную функцию отклика детектора $K_{ij}(\tau)$ в (14.2.24).

14.2.3. Вычисление электронного матричного элемента

Предположим, что конечное электронное состояние $|\Phi(E_0+\hbar\omega_1,\Omega)\rangle=|\Phi(\hbar\omega_1-\hbar\omega_0,\Omega)\rangle$ можно рассматривать как состояние фактически свободной частицы. Для нерелятивистских свободных электронов внутренние степени свободы, такие, как спин, играют малозначительную роль, и состояние почти полностью определяется энергией электрона E и его направлением движения, которое мы в дальнейшим будем связывать с переменной Ω. Пусть фотокатод представляет плоскость xy, а ось z направлена в направлении оси детектора, и пусть θ и ϕ являются полярными и азимутальными углами импульса электрона $\mathbf{P}_e$ в состоянии $|\Phi(\hbar\omega_1-\hbar\omega_0,\Omega)\rangle$ (см. рис. 14.1)

$$\Phi_0(\mathbf{r})=\langle\mathbf{r}|\Phi_0\rangle,\quad\Phi(\mathbf{r})=\langle\mathbf{r}|\Phi\rangle\approx\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{P}_e\cdot\mathbf{r}/\hbar},\quad(14.2.25)$$

при $P_e^2/2m = \hbar(\omega_1 - \omega_0)$. Конечно, строго говоря, из-за наличия потенциальной ямы вектор $|\Phi\rangle$ в действительности не является свободным электронным состоянием с определенной энергией и импульсом, но данная форма волновой функции обычно может служить в качестве грубого приближения. Мы воспользуемся ею для вычисления матричного элемента электрона:

$$\langle\Phi(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_0, \Omega)|\hat{\mathbf{p}}|\Phi_0\rangle = \int \langle\Phi(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_0, \Omega)|\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\Phi_0\rangle\, d^3r \approx$$
$$\approx -\frac{\hbar}{i(2\pi\hbar)^{3/2}} \int [\nabla \mathrm{e}^{-i\mathbf{P}_e\cdot\mathbf{r}/\hbar}]\Phi_0(\mathbf{r})\, d^3r = \mathbf{P}_e \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \mathrm{e}^{-i\mathbf{P}_e\cdot\mathbf{r}/\hbar}\Phi_0(\mathbf{r})\, d^3r = \mathbf{P}_e\widetilde{\Phi}_0(\mathbf{P}_e), \quad (14.2.26)$$

где $\widetilde{\Phi}_0(\mathbf{P}_e)$ — трехмерный фурье-образ волновой функции начального состояния $\Phi_0(\mathbf{r})$. Следовательно, скалярное произведение имеет вид

$$\langle\Phi(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_0, \Omega)|\hat{\mathbf{p}}|\Phi_0\rangle \cdot \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t_0) = \widetilde{\Phi}_0(\mathbf{P}_e)\mathbf{P}_e \cdot \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t_0), \quad (14.2.27)$$

и, поскольку $\mathbf{A}$ является поперечным, из этого уравнения видно, что конечные состояния, при которых испущенные фотоны перемещаются параллельно направлению падающего света, не вносят никакого вклада в вероятность испускания. Таким образом, ясно, что поглощенный фотон не просто передает свой импульс фотоэлектрону.

14.2.4. Вычисление вероятности детектирования для аксиально симметричного детектора

Теперь, для того, чтобы упростить интеграл в (14.2.24), сделаем два следующих предположения. Предположим, что детектор обладает приблизительно цилиндрической симметрией относительно оси z, так что и весовая функция g, и фурье-образ $\widetilde{\Phi}_0$ волновой функции начального состояния зависят только от полярного угла θ, а не от ϕ. Тогда можно написать

$$g(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_0, \Omega) = g(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_0, \theta), \quad \widetilde{\Phi}_0(\mathbf{P}_e) = \widetilde{\Phi}_0(P_e, \theta), \quad (14.2.28)$$

где значение электронного импульса $\mathbf{P}_e$ определяется выражением $P_e^2/2m = \hbar(\omega_1 - \omega_0)$. Кроме того, мы предполагаем, что плотность состояний σ изотропна и не зависит от направления θ, ϕ. Иными словами

$$\sigma(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_0, \Omega) = \sigma(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_0). \quad (14.2.29)$$

Тогда из (14.2.27), так как $\mathbf{P}_e \cdot \mathbf{A}^{(+)} = P_e \sin\theta(A_x^{(+)}\cos\phi + A_y^{(+)}\sin\phi)$, имеем

$$|\langle\Phi(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_0, \Omega)|\hat{\mathbf{p}}|\Phi_0\rangle \cdot \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t_0)|^2 = |\widetilde{\Phi}_0(P_e, \theta)|^2 2m\hbar(\omega_1 - \omega_0)\times$$
$$\times \sin^2\theta[|A_x^{(+)}|^2\cos^2\phi + |A_y^{(+)}|^2\sin^2\phi + A_x^{(-)}A_y^{(+)}\cos\phi\sin\phi + \text{к.с.}] \quad (14.2.30)$$

и с помощью (14.2.28)—(14.2.30) из (14.2.24) получаем, полагая $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$, что

$$P(\mathbf{r}_0, t_0)\Delta t = \frac{4\pi\mathrm{e}^2}{m}(\omega_1 - \omega_0)\sigma(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_0)\Delta t \int_0^\pi d\theta g(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_0, \theta)|\widetilde{\Phi}_0(P_e, \theta)|^2 \sin^3\theta\times$$
$$\times \int_0^{2\pi} d\phi[|A_x^{(+)}|^2\cos^2\phi + |A_y^{(+)}|^2\sin^2\phi + A_x^{(-)}A_y^{(+)}\cos\phi\sin\phi + \text{к.с.}]\Theta(\omega_1 - \omega_0) =$$
$$= \frac{4\pi^2\mathrm{e}^2}{m}(\omega_1 - \omega_0)\sigma(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_0)\Delta t \int_0^\pi g(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_0, \theta)|\widetilde{\Phi}_0(P_e, \theta)|^2 \sin^3\theta\times$$
$$\times \Theta(\omega_1 - \omega_0)(|A_x^{(+)}|^2 + |A_y^{(+)}|^2)\, d\theta, \quad (14.2.31)$$

после выполнения интегрирования по ϕ.

Введем параметр

$$\eta_A(\omega_1) \equiv \frac{4\pi^2 e^2}{m}(\omega_1 - \omega_0)\sigma(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_0)\Delta t \int_0^\pi g(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_0, \theta')|\tilde{\Phi}_0(P_e, \theta')|^2 \sin^3\theta' \Theta(\omega_1 - \omega_0)\, d\theta', \qquad (14.2.32)$$

характеризующий эффективность детектирования детектора для света с частотой ω_1. Определяя величину $|A_x^{(+)}|^2 + |A_y^{(+)}|^2 \equiv I_A(\mathbf{r}_0, t_0)$ как интенсивность, связанную с векторным потенциалом падающего поля, мы можем переписать (14.2.31) в очень компактной форме

$$P(\mathbf{r}_0, t_0)\Delta t = \eta_A I_A(\mathbf{r}_0, t_0)\Delta t. \qquad (14.2.33)$$

Это выражение следует сравнить с полуклассическим результатом (9.3.10). При заданных выше условиях эффективность детектирования не зависит от поляризации света.

Конечно, тот факт, что интенсивность света $I_A(\mathbf{r}_0, t_0)$, фигурирующая в (14.2.33), связана с векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t_0)$, следует из того, что взаимодействие было выбрано пропорциональным $\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_0, t_0)$. Тем не менее, в силу предположения о квазимонохроматичности, все другие измерения интенсивности света будут пропорциональны $I_A(\mathbf{r}_0, t_0)$. Например, если мы желаем выразить вероятность через фотонную плотность $I(\mathbf{r}_0, t_0)$ (см. разд. 12.3), то просто отметим, что для квазимонохроматического поля

$$I_A(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\hbar}{2\omega_1 \varepsilon_0} I(\mathbf{r}_0, t),$$

так что

$$P(\mathbf{r}_0, t)\Delta t = \eta_A(\omega_1)\left(\frac{\hbar}{2\omega_1\varepsilon_0}\right) I(\mathbf{r}_0, t)\Delta t \equiv \eta(\omega_1) I(\mathbf{r}_0, t)\Delta t. \qquad (14.2.34)$$

Хотя выражения (14.2.33) и (14.2.34) для вероятности фотоэмиссии имеют очень простую структуру, мы не должны забывать, что применимость их ограниченна. Они применимы при детектировании света в чистом когерентном состоянии с одним связанным электроном. К счастью, как будет сейчас показано, эти выражения легко поддаются различным обобщениям.

14.3. N-электронный фотодетектор

Рассмотрим фотодетектор, аналогичный изображенному на рис. 14.1, который содержит на фотокатоде большое число N связанных электронов. Для простоты предположим, что свет попадает на фотокатод под прямым углом, и его фоточувствительная область S достаточно мала, так что поле в этой области S имеет вид плоской волны. Если электрический потенциал, удерживающий один электрон, не подвержен заметному влиянию эмиссии других электронов, то можно считать, что взаимодействие света с одним электроном происходит практически независимо от другого электрона.

Далее, как было показано, вероятность детектирования света в когерентном состоянии с помощью одного электрона имеет вид $\eta I(\mathbf{r}, t)\Delta t$. Если все электроны чувствуют одно и то же поле и имеют одну и ту же вероятность того, что они будут испущены и зафиксированы детектором, то вероятность $P(\mathbf{r}, t, \Delta t)$ фотодетектирования с помощью одного или нескольких из N связанных электронов задается биноминальной суммой

$$P(\mathbf{r}, t, \Delta t) = \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} [\eta I(\mathbf{r}, t)\Delta t]^n [1 - \eta I(\mathbf{r}, t)\Delta t]^{N-n} =$$

$$= 1 - [1 - \eta I(\mathbf{r}, t)\Delta t]^N = N\eta I(\mathbf{r}, t)\Delta t - \frac{N(N-1)}{2!}[\eta I(\mathbf{r}, t)\Delta t]^2 + \ldots. \qquad (14.3.1)$$

Если $\eta I(\mathbf{r}, t)\Delta t \ll 1$, то главным членом в этом ряде является первый, и можно записать

$$P(\mathbf{r}, t, \Delta t) \simeq N\eta I(\mathbf{r}, t)\Delta t, \qquad (14.3.2)$$

предполагая, что $P(\mathbf{r}, t, \Delta t)$ все еще остается малой дифференциальной вероятностью. В таком случае вероятность детектирования для N-электронного детектора просто в N раз больше вероятности для одноэлектронного детектора.

В общем случае величина η, которая определяет вероятность детектирования одним электроном, может не быть одинаковой для всех электронов, но может зависеть от положения $\mathbf{r}$ связанного электрона на фотокатоде. Более того, интенсивность света $I(\mathbf{r}, t)$ могла бы изменить положение $\mathbf{r}$, если бы поле на катоде не было бы однородным, и если бы свет ослаблялся в процессе распространения. В таком случае мы заменили бы выражение (14.3.2) для вероятности детектирования более общим интегральным выражением

$$P(\mathbf{r}_0, t, \Delta t) \int \mathscr{N}(\mathbf{r}) \eta(\mathbf{r}) I(\mathbf{r}, t) \Delta t \, d^3 r, \tag{14.3.3}$$

в котором $\mathscr{N}(\mathbf{r})$ есть плотность связанных электронов, а $\mathbf{r}_0$ — некоторая точка отсчета, характеризующая детектор, наподобие средней точки фотокатода. В частном случае, когда $\mathscr{N}$ является постоянной величиной на всем фотокатоде, а η и I изменяются при перемещении только в направлении z, формула для $P(\mathbf{r}_0, t, \Delta t)$ сводится к более простому выражению

$$P(\mathbf{r}_0, t, \Delta t) = S\mathscr{N} \int_0^{\delta z} \eta(z) I(z, t) \, dz,$$

где интеграл берется по толщине δz фотокатода. Далее учтем, что $I(z, t)$ пропорциональна $I(0, t) = I(\mathbf{r}_0, t)$, так что можно записать: $I(z, t) = I(\mathbf{r}_0, t) f(z)$. В таком случае, вероятность фотодетектирования принимает вид

$$P(\mathbf{r}_0, t, \Delta t) = \alpha c S I(\mathbf{r}_0, t) \Delta t, \tag{14.3.4}$$

где

$$\alpha \equiv (\mathscr{N}/c) \int_0^{\delta z} \eta(z) f(z) \, dz \tag{14.3.5}$$

для безразмерного квантового выхода детектора. Как мы еще увидим, (14.3.4) является частным случаем выражения (12.3.3), полученного ранее исходя из простых эвристических рассуждений, для поля, находящегося в когерентном состоянии.

14.4. Вероятность многократного фотоэлектрического детектирования

Хотя вероятность фотоэлектронного детектирования в определенном месте и времени является важной величиной, характеризующей оптическое поле, она, тем не менее, связана с самым простейшим типом измерения. Более сложные измерительные процедуры включают в себя корреляции между фотодетекторами в различных пространственно-временны́х точках. Рассмотрим ситуацию, поясненную на рис. 14.3, в которой имеется два фотодетектора с квантовыми выходами α_1, α_2, площадью фотокатодов S_1, S_2 с центрами в точках $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, и которые подвергаются воздействию оптического поля таким образом, что свет оказывается падающим нормально к обоим детекторам. Мы вновь предполагаем для простоты, что поле на каждом фотокатоде имеет вид плоской волны. Мы хотим определить совместную вероятность $P(\mathbf{r}_1, t_1, \Delta t_1; \mathbf{r}_2, t_2, \Delta t_2)$ того, что произойдет регистрация актов фотодетектирования одним детектором в момент времени t_1 за Δt_1 и другим детектором в момент времени t_2 за Δt_2, при $t_2 > t_1$, когда поле первоначально находится в когерентном состоянии $|\{v\}\rangle$. В принципе, можно, как и прежде, подойти к этой проблеме используя теорию возмущений, но мы должны будем осуществить разложение до четвертого порядка по энергии взаимодействия (Glauber, 1965, с. 84 и след.). Однако особые свойства когерентного состояния делают возможным сократить вычисления и использовать наши предыдущие результаты для вероятности единичного детектирования.

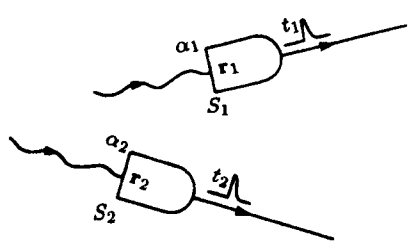


Рис. 14.3. Фотодетектирование двумя детекторами

Вычислим совместную вероятность в два этапа. Сперва найдем вероятность того, что произойдет первое фотодетектирование, которая, как было показано, равна $\alpha_1 c S_1 I(\mathbf{r}_1, t_1)\Delta t_1$ [ср. (14.3.4)] и определим состояние электромагнитного поля после измерения. Мы будем считать, что найденное состояние является начальным состоянием поля при втором измерении и далее вычислим вероятность второго детектирования в момент t_2 при наличии этого начального состояния. Потом перемножим эти две вероятности, чтобы получить $P(\mathbf{r}_1, t_1, \Delta t_1; \mathbf{r}_2, t_2, \Delta t_2)$. Пусть, как мы предположили, состояние поля до того, как производится какое-либо измерение, является чистым когерентным состоянием. Выше было показано, что такое состояние остается, с хорошей степенью точности, неизменным после проведения фотодетектирования. Поэтому это же когерентное состояние является начальным состоянием поля при втором фотодетектировании в момент времени t_2, вероятность которого $\alpha_2 c S_2 I(\mathbf{r}_2, t_2)\Delta t_2$, где $I(\mathbf{r}_2, t_2)$ есть интенсивность света (плотность фотонов) в точке $\mathbf{r}_2$, t_2 в данном когерентном состоянии. В результате имеем

$$P_2(\mathbf{r}_1, t_1, \Delta t_1; \mathbf{r}_2, t_2, \Delta t_2) = \alpha_1 c S_1 I(\mathbf{r}_1, t_1)\Delta t_1 \alpha_2 c S_2 I(\mathbf{r}_2, t_2)\Delta t_2. \tag{14.4.1}$$

Излишне говорить, что это выражение имеет очевидное обобщение, и подобные рассуждения можно использовать для вывода совместной вероятности $P(\mathbf{r}_1, t_1, \Delta t_1; \ldots; \mathbf{r}_N, t_N, \Delta t_N)$ фотодетектирования в N различных пространственно-временны́х точках,

$$P_N(\mathbf{r}_1, t_1, \Delta t_1; \ldots; \mathbf{r}_N, t_N, \Delta t_N) = \prod_{l=1}^{N} \alpha_l c S_l I(\mathbf{r}_l, t_l), \quad t_N \geqslant t_{N-1} \geqslant \ldots t_1, \quad N = 2, 3, \ldots \tag{14.4.2}$$

Различные акты фотодетектирования необязательно должны относиться к различным детекторам, может быть использован и один детектор. В таком случае квантовые выходы α_1, $\alpha_2 \ldots$ и площади поверхностей S_1, $S_2 \ldots$ являются равными, а световые интенсивности I представляющие собой c-числа, отличаются только своими временны́ми аргументами.

Так как каждая совместная вероятность $P(\mathbf{r}_1, t_1, \Delta t_1; \ldots; \mathbf{r}_N, t_N, \Delta t_N)$ пропорциональна $P_N \Delta t_1 \ldots \Delta t_N$, то эту вероятность иногда записывают в альтернативной форме

$$P_N(\mathbf{r}_1, t_1; \ldots; \mathbf{r}_N, t_N)\Delta t_1 \ldots \Delta t_N,$$

предполагая, что P_N есть *плотность вероятности* всегда, когда дифференциальные интервалы времени Δt_1, $\Delta t_2 \ldots$ не фигурируют как явные аргументы в P_N.

14.5. Вероятность многократного детектирования при произвольном начальном состоянии поля

Конечно, простота результата, заключенного в (14.4.1) и (14.4.2), является отражением того факта, что мы выбрали начальное состояние в виде чистого когерентного состояния $|\{v\}\rangle$ электромагнитного поля. На первый взгляд, может показаться, что предыдущее рассмотрение вообще не пригодно, если мы хотим вычислить вероятность детектирования при другом начальном состоянии. Однако ценой потери определенной доли математической строгости можно обобщить (14.4.2) на произвольное начальное состояние поля.

Предположим, что вместо начального чистого когерентного состояния $|\{v\}\rangle$, мы имеем дело с ансамблем когерентных состояний. Для каждой реализации ансамбля мы используем предыдущие рассуждения, чтобы вывести совместную вероятность детектирования $P_N \Delta t_1 \ldots \Delta t_N$ и приходим к выражению вида (14.4.2). Если каждая реализация $|\{v\}\rangle$ ансамбля характеризуется весом $\phi(\{v\})$, так что начальный оператор плотности поля $\hat{\rho}_F$ имеет вид

$$\hat{\rho}_F = \int \phi(\{v\})|\{v\}\rangle\langle\{v\}|\, d\{v\}, \tag{14.5.1}$$

то соответствующая вероятность (14.4.2) также должна иметь тот же вес $\phi(\{v\})$. В этом случае, правильная совместная вероятность детектирования получается усреднением с помощью $\phi(\{v\})$ вероятности,

полученной для каждой реализации и, таким образом,

$$P_N(\mathbf{r}_1,t_1;\ldots;\mathbf{r}_N,t_N)\Delta t_1\ldots\Delta t_N=\int\phi(\{v\})\prod_{l=1}^{N}[\alpha_l cS_l I(\mathbf{r}_l,t_l)\Delta t_l]\,d\{v\}=\left\{\prod_{l=1}^{N}\alpha_l cS_l I(\mathbf{r}_l,t_l)\Delta t_l\right\}_{\phi}. \quad (14.5.2)$$

Угловые скобки означают усреднение ансамбля по $\phi(\{v\})$. Но в разд. 11.8 мы видели, что существует представление, в соответствии с которым любое состояние поля $\hat{\rho}_F$ может быть рассмотрено как «обобщенный ансамбль» когерентных состояний и разложено как (14.5.1), при условии, что весовые функционалы $\phi(\{v\})$ также содержат достаточно сингулярные обобщенные функционалы. В таком широком смысле (14.5.2) следует применять к любому начальному состоянию электромагнитного поля, для которого $\phi(\{v\})$ задается диагональным представлении оператора плотности поля по когерентным состояниям. Полученный результат можно сравнить с полуклассическим выражением (9.6.4).

Теперь воспользуемся так называемой оптической теоремой эквивалентности, описанной в разд. 11.9 и задаваемой выражением (11.9.4), для того, чтобы переписать (14.5.2). В соответствии с этой теоремой, среднее значение любого нормально упорядоченного оператора поля может быть записано как среднее по ансамблю, в котором операторы рождения и уничтожения заменены их правыми и левыми собственными значениями, а усреднение должно проводиться с функционалом $\phi(\{v\})$ фазового пространства, используемым в качестве весового функционала. Применим эту теорему к (14.5.2) в обратном порядке. Тогда собственные значения $\mathbf{V}^*(\mathbf{r}_l,t_l)$, $\mathbf{V}(\mathbf{r}_l,t_l)$, из которых состоят интенсивности $I(\mathbf{r}_l,t_l)=\mathbf{V}^*(\mathbf{r}_l,t_l)\cdot\mathbf{V}(\mathbf{r}_l,t_l)$, замещаются соответствующими операторами рождения и уничтожения $\hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}_l,t_l)$, $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}_l,t_l)$ в нормальном порядке и вычисляется квантовое среднее. Поскольку мы рассматриваем оптическое поле, фактически, как свободное, или несвязанное ни с каким источником, то операторы рождения и уничтожения коммутируют между собой и их временно́й порядок уже не важен. Но в более общей ситуации, в которой поле взаимодействует с источником, временно́й порядок операторов по-прежнему важен (ср. разд. 12.2). Таким образом, применяя оптическую теорему эквивалентности в обратном порядке, мы записываем выражение для P_N в форме, упорядоченной во времени (Glauber, 1963, 1965, с. 83)

$$\begin{aligned}P_N(\mathbf{r}_1,t_1;\ldots;\mathbf{r}_N,t_N)\Delta t_1\ldots\Delta t_N&=\prod_{l=1}^{N}[\alpha_l cS_l\Delta t_l]\langle\hat{V}_{i_1}^\dagger(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots\hat{V}_{i_N}^\dagger(\mathbf{r}_N,t_N)\hat{V}_{i_N}(\mathbf{r}_N,t_N)\ldots\hat{V}_{i_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle=\\&=\prod_{l=1}^{N}[\alpha_l cS_l\Delta t_l]\langle\mathscr{T}:\hat{I}(\mathbf{r}_1,t_1)\ldots\hat{I}(\mathbf{r}_N,t_N):\rangle=\\&=\prod_{l=1}^{N}[\alpha_l cS_l\Delta t_l]\Gamma^{(N,N)}_{i_1\ldots i_N;i_N\ldots i_1}(\mathbf{r}_1,t_1,\ldots,\mathbf{r}_N,t_N;\mathbf{r}_N,t_N,\ldots,\mathbf{r}_1,t_1)\quad t_N\geqslant t_{N-1}\geqslant\ldots\geqslant t_1,\end{aligned} \quad (14.5.3)$$

где $\Gamma^{(N,N)}$ — нормально и хронологически упорядоченная корреляционная функция порядка $2N$ в обозначениях гл. 12. Здесь :: и $\mathscr{T}$ обозначают символы нормального упорядочения и упорядочения по времени, а $\langle\ \rangle$ означает квантовое среднее. Выражение для совместной вероятности N-кратного детектирования применимо в таком виде к любому квантовому состоянию поля и представляет собой соответствующее обобщение выражения (14.4.2). Обычно, удобнее всего предположить, что операторы поля в правой части (14.5.3) записаны в картине Гейзенберга, так что поле можно считать находящимся в своем начальном состоянии. Отметим, что данное решение в точности имеет вид решения, полученного ранее в разд. 12.2 из простых эвристических рассуждений. Кроме того, оно совпадает с результатом, получаемым из полуклассической теории (Mandel, Sudarshan and Wolf, 1964) (ср. разд. 9.4), если $\Gamma^{(N,N)}$ в (14.5.3) есть корреляционная функция классического поля. Однако квантовая теория поля, помимо традиционных состояний, допускает рассмотрение состояний, не имеющих классического аналога.

В качестве непосредственного применения (14.5.3) к неклассической ситуации, вычислим совместную вероятность двукратного фотодетектирования $P(\mathbf{r}_1,t_1,;\mathbf{r}_2,t_2)\Delta t_1\Delta t_2$ для поля, находящегося в однофотонном фоковском состоянии $|1_{\mathbf{k}s},\{0\}\rangle$. Из того, что операторы уничтожения фотона, действующие слева на это состояние, дают нуль, следует, что

$$\langle 1_{\mathbf{k}s},\{0\}|\mathscr{T}:\hat{I}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{I}(\mathbf{r}_2,t_2):1_{\mathbf{k}s},\{0\}\rangle=0,\quad P_2(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)\Delta t_1\Delta t_2=0,$$

чего и следовало ожидать, так как с каждым детектированием связано поглощение фотона.

Следует подчеркнуть, что вероятности (14.5.3) являются вероятностями в дифференциальной форме и их нельзя нормировать на единицу путем интегрирования по временны́м переменным. Чтобы пояснить это, обратимся к частному случаю одного детектора. В этом случае совместная вероятность детектирования сводится к выражению

$$P_2(t,t+\tau)\Delta t\Delta\tau = (\alpha cS)^2\langle\mathscr{T}:\hat{I}(t)\hat{I}(t+\tau):\rangle\Delta t\Delta\tau, \tag{14.5.4}$$

где через τ обозначен временно́й интервал между двумя фотоотсчетами и опущены пространственные аргументы. Разделив обе части выражения на $P_1(t)\Delta t$, получим условную вероятность $P_c(t+\tau|t)\Delta\tau$ того, что после отсчета в момент времени t появится еще один отсчет в момент $t+\tau$ в течение $\Delta\tau$,

$$P_c(t+\tau|t)\Delta\tau = \frac{P_2(t,t+\tau)\Delta t\Delta\tau}{P_1(t)\Delta t} = \frac{\alpha cS\langle\mathscr{T}:\hat{I}(t)\hat{I}(t+\tau):\rangle\Delta\tau}{\langle\hat{I}(t)\rangle}. \tag{14.5.5}$$

Для стационарного поля каждое среднее в этом уравнении не зависит от t, а зависит только от τ. Однако не следует путать вероятность $P_c(t+\tau|t)|\Delta\tau$ с распределением вероятности $\mathscr{P}(\tau)\Delta\tau$ для временно́го интервала τ между *последовательными* фотоотсчетами, которое относится к взаимоисключающим событиям и нормируется на единицу. Если τ представляет собой временно́й интервал между последовательными отсчетами, то, по определению, между t и $t+\tau$ не существует никаких других отсчетов, тогда как эта возможность не исключена в (14.5.5). Ниже, в разд. 14.7 мы покажем, что $\mathscr{P}(\tau)$ задается формулой

$$\mathscr{P}(\tau) = \alpha cS\left\{\mathscr{T}:\exp\left[-\alpha cS\int_t^{t+\tau}\hat{I}(t')\,dt'\right]\hat{I}(t)\hat{I}(t+\tau):\right\}/\langle\hat{I}(t)\rangle, \tag{14.5.6}$$

которая корректно нормируется на единицу, так что

$$\int_0^\infty \mathscr{P}(\tau)\,d\tau = 1.$$

14.6. Фотоэлектрические корреляции

Непосредственным следствием (14.5.3) для совместной вероятности детектирования является то, что если

$$\langle\mathscr{T}:\hat{I}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{I}(\mathbf{r}_2,t_2):\rangle \neq \langle\hat{I}(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle\langle\hat{I}(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle, \tag{14.6.1}$$

то

$$P_2(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2) \neq P_1(\mathbf{r}_1,t_1)P_1(\mathbf{r}_2,t_2), \tag{14.6.2}$$

где $P_1(\mathbf{r},t)$ — плотность вероятности единичного или однократного фотодетектирования. Это означает, что два фотодетектирования в $\mathbf{r}_1,t_1$ и $\mathbf{r}_2,t_2$ не независимы, а являются коррелированными. Этот вывод является в точности таким же, к которому мы пришли в разд. 9.6, исходя из полуклассических рассуждений. Лишь для особых состояний поля бывает необходимо заменить неравенство (14.6.1) равенством, и совместная вероятность, в таком случае, представляется в виде произведения отдельных вероятностей в силу независимости фотоэлектрических детектирований. Примером такой ситуации служит чистое когерентное состояние $|\{v\}\rangle$ или модель одномодового лазера со случайной фазой, описываемая выражением (11.11.18), где

$$\langle\mathscr{T}:\hat{I}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{I}(\mathbf{r}_2,t_2):\rangle = \langle\hat{I}(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle\langle\hat{I}(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle.$$

Однако в общем случае следует ожидать наличия корреляций между последовательными фотоэлектрическими импульсами. Это остается верными даже тогда, когда одна фотоэмиссия физически не в состоянии повлиять на другую, поскольку, например, события $\mathbf{r}_1,t_1$ и $\mathbf{r}_2,t_2$ имеют пространственно-подобное разделение. Причина заключается в том, что каждое фотодетектирование привносит информацию о состоянии поля, которая влияет на наши расчеты вероятности другого фотодетектирования. Мы можем выразить это другим образом, прибегая к более классическому представлению оптического поля, если скажем, что флуктуации интенсивности заставляют фотодетектирования коррелировать в двух или более пространственно-временны́х точках. Поэтому только при отсутствии флуктуаций интенсивности последовательные фотодетектирования являются строго независимыми.

Вводя нормированную корреляционную функцию интенсивности $\lambda(\mathbf{r}_1,t_1,;\mathbf{r}_2,t_2)$

$$\lambda(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)\equiv\frac{\langle\mathscr{T}:\hat{I}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{I}(\mathbf{r}_2,t_2):\rangle}{\langle\hat{I}(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle\langle\hat{I}(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle}-1, \tag{14.6.3}$$

можно переписать совместную вероятность детектирования в виде

$$P_2(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)\Delta t_1\Delta t_2=\alpha_1 cS_1\langle\hat{I}(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle\Delta t_1\alpha_2 cS_2\langle\hat{I}(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle\Delta t_2[1+\lambda(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)]=$$
$$=P_1(\mathbf{r}_1,t_1)\Delta t_1 P_1(\mathbf{r}_2,t_2)\Delta t_2[1+\lambda(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)]. \tag{14.6.4}$$

Отсюда ясно видно, что нормированная корреляционная функция $\lambda(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)$ обеспечивает меру отсутствия статистической независимости фотоэлектрических импульсов. Только для тех состояний поля, для которых $\lambda=0$, импульсы являются независимыми.

14.6.1. Эффект Хэнбери Брауна — Твисса (квантовая трактовка)

Очевидно, что для состояний, для которых существуют фотоэлектрические корреляции, фотоэлектрические импульсы, производимые облучаемыми фотодетекторами, не возникают полностью случайно, и, изучая данные корреляции в пространстве и времени, можно получать информацию о природе оптического поля. Как мы уже упоминали в разд. 9.9, первое экспериментальное доказательство этого и первое свидетельство существования фотоэлектрических корреляций были получены в экспериментах, выполненных в 50-х годах Брауном и Твиссом (Brown and Twiss, 1956, 1957) на установке, изображенной на рис. 9.6*а*. Пучок света от ртутной дуги разделялся на два с помощью делителя пучков, и эти пучки попадали на два фотоумножителя, один из которых мог перемещаться по полю. Отдельные фотоэлектрические импульсы не разрешались, а вместо этого, два фотоэлектрических тока $J_1(t)$ и $J_2(t)$ усиливались и подавались на коррелятор, который создавал сигнал, пропорциональный корреляции $\langle J_1(t)J_2(t)\rangle$ (при $\langle J_1\rangle=0=\langle J_2\rangle$). Эта корреляция измерялась при различных перемещениях подвижного фотодетектора. Результаты измерений показаны на рис 9.6*б*.

Попытаемся объяснить эти результаты, исходя из (14.6.4). Когда свет создается стационарным тепловым источником, средняя интенсивность не зависит от времени, а нормированная корреляционная функция $\lambda(\mathbf{r}_1,t_1,;\mathbf{r}_2,t_2)$ зависит только разности времен $t_2-t_1=\tau$ и ее можно обозначить как $\lambda(\mathbf{r}_1;\mathbf{r}_2,\tau)$. Более того, для поля теплового источника, как мы уже показали в гл. 13 [см. (13.3.23)], нормированная корреляционная функция интенсивности $\lambda(\mathbf{r}_1;\mathbf{r}_2,\tau)$ может быть просто связана с нормированной корреляционной функцией второго порядка, определяемой как

$$\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_2)\equiv\frac{\langle\hat{\mathbf{V}}^\dagger(\mathbf{r}_1,t_1)\cdot\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle}{[\langle\hat{I}(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle\langle\hat{I}(\mathbf{r}_2,t_2)\rangle]^{1/2}}. \tag{14.6.5}$$

Для стационарного поляризованного света это соотношение принимает простой вид [ср. (8.4.4)]

$$\lambda(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)=|\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)|^2. \tag{14.6.6}$$

Мы сократили запись $\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r_1},\mathbf{t_1};\mathbf{r_2},\mathbf{t_1}+\tau)$ до $\gamma(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},\tau)$. Таким образом, (14.6.4) приобретает вид

$$P_2(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_2,t_1+\tau)\Delta t_1\Delta\tau=\alpha_1\alpha_2c^2S_1S_2\langle\hat{I}(\mathbf{r}_1)\rangle\langle\hat{I}(\mathbf{r}_2)\rangle\Delta t_1\Delta\tau[1+|\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)|^2], \tag{14.6.7}$$

из которого видно, что фотоэлектрические корреляции ожидаются в точках $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ до тех пор, пока степень когерентности в этих точках не равна нулю. Это подтверждается экспериментальными результатами, показанными на рис. 9.6*б*. Однако это уравнение не описывает адекватным образом измерение, при котором отдельные фотоэлектрические импульсы не разрешаются. Этой проблемой мы уже занимались в разд. 9.8 в рамках полуклассической теории фотоэлектрического детектирования. Здесь мы коротко повторим вычисления для квантового поля.

14.6.2. Корреляции фототоков

Как и прежде, предположим, что когда в момент времени t_0 имеет место фотоэмиссия, то каждый фотодетектор выдает после усиления стандартный короткий импульс формы, показанной на рис. 9.5. Будем обозначать этот импульс через $r(t-t_0)$. Площадь под каждым импульсом есть полная энергия, переносимая импульсом

$$Q = \int_0^\infty k(t)\,dt,$$

равная нулю для усилителя, который, как в эксперименте Хэнбери Брауна — Твисса, не передает прямой ток. Длительность T_r импульса является величиной порядка обратной ширины полосы пропускания усилителя. В таком случае токи $J_1(t)$, $J_2(t)$, выходящие из двух детекторов/усилителей можно выразить в виде

$$J_1(t) = \sum_i k(t-t_i), \quad J_2(t) = \sum_j k(t-t_j), \tag{14.6.8}$$

где сумма должна браться по различным временам t_i, t_j, в которые происходит фотоэмиссия. Теперь можно использовать наше дифференциальное выражение для вероятностей детектирования $P_1(\mathbf{r},t)\Delta t$ и $P(\mathbf{r}_1,t_1,;\mathbf{r}_2,t_2)\Delta t_1\Delta t_2$ при вычислении средних от $J_1(t)$, $J_2(t)$ и их корреляционных функций. Тогда в стационарном состоянии имеем

$$\langle J_1(t)\rangle = \left\langle \sum_i k(t-t_i)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-t_i)P_1(\mathbf{r}_1,t_i)\,dt_i = \alpha_1 c S_1 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_1)\rangle \int_0^\infty k(t')\,dt' = 0, \tag{14.6.9}$$

потому что $\int_0^\infty k(t')\,dt' = 0$ и аналогично для $\langle J_2(t)\rangle$, тогда как

$$\langle J_1(t)J_2(t)\rangle = \left\langle \sum_i\sum_j k(t-t_i)k(t-t_j)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt_i \int_{-\infty}^{\infty} dt_j k(t-t_i)k(t-t_j)P_2(\mathbf{r}_1,t_i;\mathbf{r}_2,t_j) =$$

$$= \alpha_1\alpha_2 c^2 S_1 S_2 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_1)\rangle\langle \hat{I}(\mathbf{r}_2)\rangle \iint_{-\infty}^{\infty} dt_i\,dt_j k(t-t_i)k(t-t_j)[1+\lambda(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,t_j-t_i)] \tag{14.6.10}$$

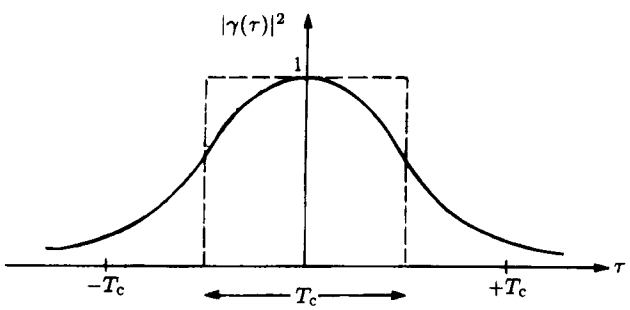


Рис. 14.4. Иллюстрация типичной формы $|\gamma(\tau)|^2$

при $\lambda(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},\tau)$, задаваемым выражением (14.6.6). Этот результат аналогичен результату, полученному с помощью полуклассической теории (разд. 9.8). Для света, который является взаимно спектрально чистым (см. разд. 4.5.1), $\gamma(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},\tau)$ может быть факторизована в виде

$$\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau) = \gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,0)\gamma(\tau), \tag{14.6.11}$$

где $\gamma(\tau)$ — нормированная автокорреляционная функция поля или, другими словами, фурье-образ нормированной спектральной плотности. В данном эксперименте поле имело полосу частот, равную многим тысячам МГц. Таким образом, диапазон, на котором $\gamma(\tau)$ существенно отлична от нуля и который является временем когерентности T_c света, очень мал по сравнению с аналогичным диапазоном $k(t)$ на рис. 9.5, и $\lambda(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau)$ можно рассматривать под знаком интеграла в (14.6.10) почти как дельта-функцию. В таком случае с помощью (14.6.9) и (14.6.11), находим, что

$$\langle J_1(t)J_2(t)\rangle \simeq \alpha_1\alpha_2 c^2 S_1 S_2 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_1)\rangle\langle \hat{I}(\mathbf{r}_2)\rangle |\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,0)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)|^2\,d\tau \int_0^\infty k^2(t')\,dt' =$$

$$= \alpha_1\alpha_2 c^2 S_1 S_2 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_1)\rangle\langle \hat{I}(\mathbf{r}_2)\rangle |\gamma(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,0)|^2 T_c \int_0^\infty k^2(t')\,dt', \tag{14.6.12}$$

где мы воспользовались тем фактом, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)|^2 \, d\tau = T_c \tag{14.6.13}$$

представляет собой естественную меру времени когерентности T_c света, потому что $|\gamma(\tau)|^2$ равна 1 при $\tau = 0$ и существенно отлична от нуля на интервале порядка T_c, как показано на рис. 14.4. С этой же самой величиной мы уже встречались в формулах (2.4.29) и (4.3.82). Из (14.6.12) видно, что корреляция токов пропорциональна квадрату степени когерентности, что и наблюдалось в эксперименте.

Больший интерес, чем $\langle J_1(t)J_2(t)\rangle$, представляет собой нормированный коэффициент взаимной корреляции

$$\sigma_{12} \equiv \frac{\langle \Delta J_1(t) \Delta J_2(t)\rangle}{[\langle (\Delta J_1(t))^2\rangle \langle (\Delta J_2(t))^2\rangle]^{1/2}}, \tag{14.6.14}$$

для которого нам необходимы дисперсии каждого из токов $J_1(t)$, $J_2(t)$ и взаимная корреляционная функция. В целях большей общности вычислим автокорреляционную функцию $\langle J_1(t)J_2(t+\tau)\rangle$. Вычисление очень напоминает предшествующее, но с одним важным отличием. Из (14.6.8) получаем

$$\langle J_1(t)J_1(t+\tau)\rangle = \left\langle \sum_i \sum_j k(t-t_i)k(t_\tau - t_j) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_i k(t-t_i)k(t_\tau - t_i) \right\rangle + \left\langle \sum\sum_{i\neq j} k(t-t_i)k(t_\tau - t_j) \right\rangle,$$

где, как и в разд. 9.8, мы разделили сумму на вклады, которые включают только единичные фотоэмиссии, и вклады, включающие пары фотоэмиссий. Для первого члена нет аналога во взаимной корреляционной функции. Усреднение выполняется, как и прежде, с помощью дифференциальных выражений для вероятности $P_1(t_i)\,dt_i$ и $P_1(t_i, t_j)\,dt_i\,dt_j$, и мы находим, что (ср. разд. 9.8 при полуклассическом рассмотрении):

$$\langle J_1(t)J_1(t+\tau)\rangle = \alpha_1 c S_1 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_1)\rangle \int_{-\infty}^{\infty} k(t-t_i)k(t+\tau-t_i)\,dt_i +$$

$$+ (\alpha_1 c S_1 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_1)\rangle)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} k(t-t_i)k(t+\tau-t_j)\lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, t_j - t_i)\,dt_i\,dt_j. \tag{14.6.15}$$

Когда $\tau = 0$, при $\lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau)$, определяемой выражением (14.6. 6), и при тех же допущениях, что и прежде, это выражение сводится к

$$\langle (\Delta J_1)^2\rangle = \langle J_1^2\rangle = \alpha_1 c S_1 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_1)\rangle [1 + \alpha_1 c S_1 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_1)\rangle T_c] \int_0^{\infty} k^2(t')\,dt'. \tag{14.6.16}$$

Из (14.6.15) и (14.6.16) видно, что флуктуации токов можно выразить через сумму двух членов, первый из которых не зависит от свойств когерентности падающего света, тогда как второй член зависит от $\lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau)$ или от T_c. Первый член может быть приписан флуктуационному шуму фотоэлектрического тока, тогда как второй член зависит от флуктационных свойств оптического поля. Теперь, используя аналогичное выражение для $\langle \Delta J_2\rangle^2$ и учитывая (14.6.12), находим для корреяционного коэффициента σ_{12}, определяемого формулой (14.6.14), следующее выражение

$$\sigma_{12} = \frac{[\alpha_1 \alpha_2 c^2 S_1 S_2 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_1)\rangle \langle \hat{I}(\mathbf{r}_2)\rangle]^{1/2} T_c}{[1 + \alpha_1 c S_1 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_1)\rangle T_c]^{1/2} [1 + \alpha_2 c S_2 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_2)\rangle T_c]^{1/2}} |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|^2,$$

которое дальше можно упростить:

$$\sigma_{12} = \frac{\delta}{1+\delta} |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|^2, \tag{14.6.17}$$

где

$$\alpha_1 c S_1 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_1)\rangle T_c \equiv \delta = \alpha_2 c S_2 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_2)\rangle T_c. \tag{14.6.18}$$

Важный параметр δ, возникающий здесь естественным образом, есть мера среднего числа фотоэлектрических эмиссий, производимых пространственно когерентным световым лучом на каждом детекторе за время, равное времени когерентности T_c. Очевидно, что он определяет величину корреляционного коэффициента σ_{12}. Когда δ большое число, $\sigma_{12} \approx |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|^2$, но когда δ малое, σ_{12} становится много меньше $|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|^2$. Именно в силу того, что в эксперименте Хэнбери Брауна — Твисса δ было очень малым числом, и в силу преобладания флуктационного шума во флуктуациях токов, в соответствии с (14.6.18), было очень сложно производить измерения корреляций и ошибка на рис. 9.6*б* была очень большой.

Можно понять, почему этого следовало ожидать, если заметить, что δ/α представляет собой среднее число фотонов, падающих на фотодетектор за время, равное времени когерентности. Мы предположили, что размеры фотокатода достаточно малы, чтобы поле имело вид плоской волны и, таким образом, размеры катода были бы меньше области когерентности. Следовательно, число δ/α меньше числа фотонов в объеме когерентности, или так называемого параметра вырождения, и, как мы видели в разд. 13.1, для света, производимого тепловым источником при температурах ниже 10^5 K, число заселения фотонами моды меньше единицы. Следовательно, можно ожидать, что δ/α будет много меньше единицы, а δ будет существенно меньше единицы, как это и имело место в эксперименте.

Наконец, после выполнения фурье-преобразования каждого члена в (14.6.15), мы получаем выражение для спектральной плотности $X(\omega)$ фотоэлектрического тока. Это приводит к соотношению

$$X(\omega) = (\alpha_1 c S_1 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_1)\rangle)|K(\omega)|^2[1 + (\alpha_1 c S_1 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_1)\rangle)\psi(\omega)], \tag{14.6.19}$$

в котором $K(\omega)$ представляет собой частотный отклик комбинации фотодетектор-усилитель,

$$K(\omega) = \int_0^\infty k(\tau)\, \mathrm{e}^{i\omega\tau}\, d\tau, \tag{14.6.20}$$

а $\psi(\omega)$ есть спектральная плотность нормированной корреляционной функции интенсивности

$$\psi(\omega) = \int_0^\infty \lambda(\tau)\, \mathrm{e}^{i\omega\tau}\, d\tau. \tag{14.6.21}$$

Для классического поля $\psi(\omega) \geqslant 0$ и второй член в (14.6.19) описывает дополнительную флуктуацию фототока сверх дробового шума фототока, возникающего из-за наличия флуктуирующего электромагнитного поля. Однако, как мы еще увидим в гл. 21, замечательным свойством квантового поля является то, что существуют состояния, для которых $\psi(\omega) \leqslant 0$ и которые называются *сжатыми состояниями*. Включение пучка сжатого света, падающего на детектор, привело бы к эффекту *понижения* флуктуаций фототоков ниже уровня флуктуационного шума.

14.7. Группировка и антигруппировка[1]

Из (14.6.2) мы уже знаем, что фотоэлектрические детектирования в оптическом поле, в общем случае, являются коррелированными в пространстве и во времени. Фактически, одним из методов обнаружения такой корреляции является перемножение выходных токов с двух фотодетекторов, как это делается в эксперименте, показанном на рис. 9.6*а*. Другой процедурой может служить измерение совместной вероятности детектирования $P(\mathbf{r}_1, t_1, \Delta t_1; \mathbf{r}_2, t_2, \Delta t_2)$ как функции разности $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ в пространстве и $|t_2 - t_1|$ во времени. Эта процедура включает в себя измерения, при которых регистрируются отдельные фотоэлектрические импульсы. Как видно из (14.6.4), совместная вероятность может быть либо больше, либо меньше произведения двух вероятностей отдельного однофотонного детектирования, в зависимости от того, какой знак имеет нормированная корреляционная функция $\gamma(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)$.

Сосредоточим внимание на двух детектированиях, которые являются функцией разности времен, пренебрегая на данном этапе пространственными координатами. В таком случае, для стационарного поля,

[1] В качестве дополнительной литературы см. также книгу (*Килин, 1990) — *ред. пер.*

λ есть функция временно́й разности τ. Если $\lambda(0) \geqslant \lambda(\tau)$, то весьма вероятно, что любые два фотоэлектрических импульса будут расположены во времени не далеко, а очень близко друг от друга. В этом случае, мы говорим о *группировке* фотоэлектрических детектирований (Mandel and Wolf, 1965, разд. 6.3). С другой стороны, если $\lambda(0) < \lambda(\tau)$, то маловероятно, что два фотоэлектрических детектирования произойдут близко друг к другу, скорее, наоборот, далеко, и мы теперь говорим об *антигруппировке*. Из неравенства Шварца можно показать, что законы классической вероятности требуют, чтобы $\lambda(0) \geqslant \lambda(\tau)$. Таким образом, антигруппировка — это чисто квантово-механическое явление. Здесь следует подчеркнуть, что знак при $\lambda(0)$ сам по себе в общем случае не определяет, что имеет место — группировка или антигруппировка. Эта ситуация определяется соотношением между $\lambda(0)$ и $\lambda(\tau)$. Например, состояние, для которого $\lambda(0) < 0$, но $\lambda(0) = \lambda$ для всех τ, не проявляет свойства антигруппировки, хотя оно и является состоянием, которое не имеет классического аналога.

14.7.1. Детектирование совпадений

Одним способом получения информации о совместной вероятности $P(\mathbf{r}_1, t, \Delta t; \mathbf{r}_2, t+\tau, \Delta\tau)$, который исторически имел очень важное значение, является способ, при котором, как показано на рис. 14.5, фотоэлектрические импульсы от двух детекторов подаются на счетчик совпадений, где измеряется скорость, с которой импульсы от этих двух детекторов приходят «в совпадении». В 50-х годах было проведено

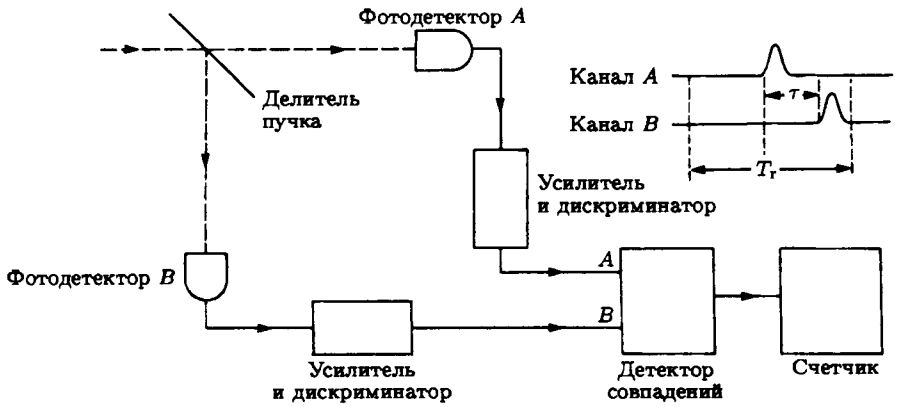


Рис. 14.5. Схема корреляционного эксперимента, основанного на детектировании совпадений

несколько подобных экспериментов, целью которых было нахождение корреляционных функций. Некоторые из этих экспериментов были успешными (Twiss, Little and Brown, 1957; Rebka and Pound, 1957; Brannen, Ferguson and Wehlau, 1958), а некоторые неудачными (Ádám, Jánossy and Varga, 1955a, b; Brannen and Ferguson, 1956). Рассмотрим теперь на более количественном уровне результаты, которых следовало бы ожидать в такого рода эксперименте.

Вообще говоря, счетчик совпадений всякий раз выдает выходной сигнал, когда на двух его входах одновременно, т.е. в совпадении, появляются два импульса и никогда, — в других случаях. Однако фразу «приходят «в совпадении» необходимо рассматривать с учетом характерного времени разрешения T_r цепи, которое ограничено шириной импульсов, т.е. временем их нарастания. По определению два импульса на двух входах, которые начинаются в моменты времени t и $t+\tau$, соответственно, считаются пришедшими «в совпадении», если $|\tau| \leqslant \frac{1}{2}T_r$ (см. рис. 14.5). Если $P(\mathbf{r}_1, t, \Delta t; \mathbf{r}_2, t+\tau, \Delta\tau)$ — совместная вероятность того, что один импульс появится на одном входе в момент времени t в течение Δt, а второй импульс — на другом входе в момент $t+\tau$ в течение $\Delta\tau$, то средняя скорость $\mathscr{R}_c$, с которой цепь детектора совпадений посылает выходные импульсы, будет иметь вид

$$\mathscr{R}_c = \int_{-\frac{1}{2}T_r}^{\frac{1}{2}T_r} P_2(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_1, t+\tau)\, d\tau.$$

С помощью (14.6.4), она приобретает вид

$$\mathscr{R}_c = R_1 R_2 T_r \left[1 + \frac{1}{T_r} \int_{-\frac{1}{2}T_r}^{\frac{1}{2}T_r} \lambda(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t+\tau)\, d\tau \right], \tag{14.7.1}$$

в котором $R_1 \equiv \alpha_1 c S_1 \langle I(\mathbf{r}_1) \rangle$ и $R_2 \equiv \alpha_1 c S_2 \langle I(\mathbf{r}_2) \rangle$ представляют собой средние скорости, с которыми импульсы приходят по двум входным каналам. Первый член в правой части этого выражения представляет собой случайный, или непроизвольный вклад в скорость совпадений $\mathscr{R}_c$, являющийся результатом чисто случайного перекрывания входных импульсов. Второй член представляет собой поправку, или дополнительный вклад, приписываемый флуктуациям интенсивности света, который, в принципе, может быть как положительным, так и отрицательным. Для света от стационарных тепловых источников, каким он был во всех вышеупомянутых экспериментах, можно выразить $\lambda(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t+\tau)$ через $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$, и если свет является поляризованным и взаимно спектрально чистым, то можно воспользоваться выражениями (14.6.6) и (14.6.11) и заменить $\lambda(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t+\tau)$ величиной $|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|^2 |\gamma(\tau)|^2$. В таком случае поправочный член в (14.7.1) обязательно будет положительным. Далее, $|\gamma(\tau)|^2$ имеет общий вид, который показан на рис. 14.4 (точный вид функции, конечно, зависит от спектрального распределения). Она равна единице при $\tau \approx 0$ и становится очень малой, как только $|\tau|$ заметно превосходит время корреляции T_c. Во всех вышеупомянутых экспериментах по определению совпадений T_r заметно превосходит T_c, и, таким образом, можно заменить пределы интегрирования в интеграле (14.7.1) пределами $\pm\infty$ и записать

$$\int_{-\frac{1}{2}T_r}^{\frac{1}{2}T_r} |\gamma(\tau)|^2\, d\tau \approx \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)|^2\, d\tau = T_c, \tag{14.7.2}$$

где, как мы дальше увидим, T_c представляет собой естественную меру времени когерентности света. Тогда (14.7.1) приобретает вид

$$\mathscr{R}_c = R_1 R_2 T_r [1 + (T_c/T_r) |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|^2]. \tag{14.7.3}$$

Понятно, что влияние тепловых флуктуаций света заключается в появлении поправочного вклада в скорость совпадений $\mathscr{R}_c$, по сравнению со случайной скоростью $R_1 R_2 T_r$, а возможность детектирования этой поправки строго зависит от отношения T_c/T_r. Во всех неудачных экспериментах источник света имел значительную спектральную ширину с временем когерентности $T_c \lesssim 10^{-12}$ с. Таким образом, даже для самой быстрой электроники, отношение T_c/T_r было бы чрезвычайно мало и не удивительно, что поправка оказалась недетектируемой. Во всех успешных экспериментах световой источник представлял собой разряд газа при низком давлении, производящий спектральные линии с временами когерентности $T_c \sim 10^{-9}$ с. Когда такой свет попадает в цепь детектора совпадений с временем разрешения $T_r \sim 10^{-8}$ с, поправочный вклад детектируется без особых проблем. Теперь причины лежащие в основе всех успешных и неудачных экспериментов вполне очевидны.

14.7.2. Двухвременны́е импульсные корреляционные измерения

До конца 60-х годов в научной литературе не сообщалось об удачных время-разрешающих экспериментах со светом от теплового источника, в которых непосредственно измерялась бы совместная вероятность детектирования $P_2(\mathbf{r}_1, t, \Delta t; \mathbf{r}_2, t+\tau, \Delta\tau)\Delta t \Delta\tau$ как функция от τ. Этому вряд ли можно удивляться, поскольку времена нарастания импульсов фотоумножителя сами являются того же порядка (~ 1 нс), что и времена когерентности большинства монохроматических тепловых лучей. На рис. 14.6*а* показывается схема первого удачного время-разрешающего эксперимента (Morgan and Mandel, 1966). Источником света являлся разряд однородного газа изотопа ^{198}Hg при низком давлении, который создавал при помощи интерференционного фильтра одну спектральную линию с временем когерентности $T_c \sim 2$ нс. Свет попадал в трубку фотоумножителя, выходные импульсы которого по двум независимым путям, один из которых имел регулируемую задержку τ, направлялись на детектор совпадений, имеющий высокое разрешение. В этих условиях один импульс фотоумножителя не вызовет никакого выхода из цепи детектора совпадений, потому что два импульса не пришли одновременно. Однако два импульса с разделением во времени τ будут производить выходной импульс, потому что первый импульс, проходя длинный путь, приходит в совпадении со вторым, который проходит короткий путь. В таком случае $P_2(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t+\tau)$ можно получить, измеряя скорость счета совпадений для различных значений задержки τ. На рис. 14.6*б* приведена

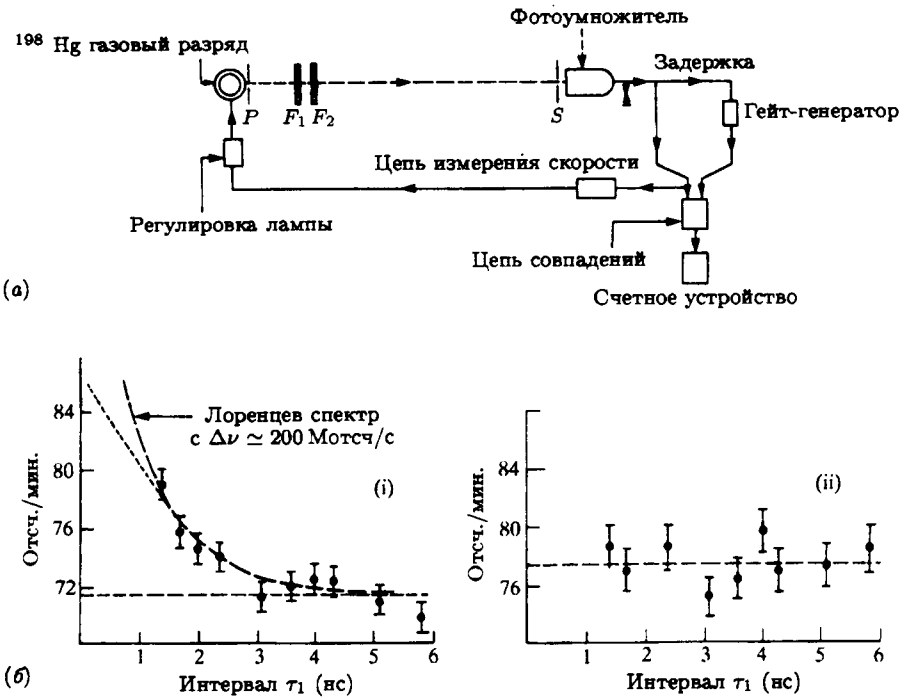


Рис. 14.6. *а* — Схема установки, использованной для демонстрации фотоэлектрической группировки; *б* — Результаты измерения, показывающие скорость счета импульсных пар как функцию временно́го интервала τ_1; (i) при источнике света от паров ^{198}Hg, (ii) при вольфрамовом источнике света. (Из работы Morgan and Mandel, 1966)

скорость, с которой детектировались пары фотоэлектрических импульсов, разделенных во времени интервалом τ, как функция от τ. Для τ, бо́льших, чем 5 или 6 нс, скорость счета импульсных пар была приблизительно постоянной и равной $R_1R_2T_r$ [ср. (14.7.1)]. Это указывает на то, что импульсы с таким большим разделением прибывали независимо. Но, при τ, меньших, чем время когерентности света 2 нс, скорость счета возрастала, в соответствии с (14.6.4). Это означает, что имела место тенденция к испусканию фотоэлектрических импульсов не случайно, а группами, поскольку прибытие одного импульса увеличивает вероятность появления еще одного импульса непосредственно за ним. Никакой группировки не наблюдалось при белом свете от вольфрамовой лампы, для которой время когерентности было в тысячи раз короче. Когда время разрешения достаточно короткое, форма экспериментально полученной кривой для $P_2(\mathbf{r},t;\mathbf{r},t+\tau)$ непосредственно дает корреляционную функцию интенсивности $\lambda(\mathbf{r},t;\mathbf{r},t+\tau) \equiv \lambda(\tau)$ и, следовательно, $|\gamma(\tau)|$ для света от теплового источника. Таким образом, измерение плотности совместной вероятности $P_2(\mathbf{r},t;\mathbf{r},t+\tau)$ предоставляет дополнительную возможность для проведения спектроскопических измерений света от теплового источника во временно́й области. Такие измерения все более и более становятся доступными с уменьшением полосы частот света. Более привычным в настоящее время является разделение света на две части с помощью делителя пучка и использование двух фотодетекторов (Scarl, 1966; Phillips, Kleiman and Davis, 1967; Davidson and Mandel, 1968; Davidson, 1969). Это дает возможность расширить эксперименты до нулевого временно́го разделения и позволяет избежать некоторых проблем, связанных с фиктивным многоимпульсным излучением некоторых детекторов.

Было разработано множество различных электронных методов для измерения числа событий, при которых два импульса от двух фотодетекторов разделены задержкой τ. Иногда эти импульсы подаются на входы «пуск» и «стоп» время-амплитудного преобразователя (ТАС), который создает напряжение, высота которого пропорциональна временно́му интервалу τ между двумя импульсами (см. рис. 14.7). Эта высота впоследствии превращается в цифровые данные и хранится в цифровой памяти таким образом, что значение τ рассматривается как адрес, а число, хранимое под адресом τ увеличивается на единицу при каждом детектировании с задержкой τ (Davidson and Mandel, 1968; Davidson, 1969). После большо-

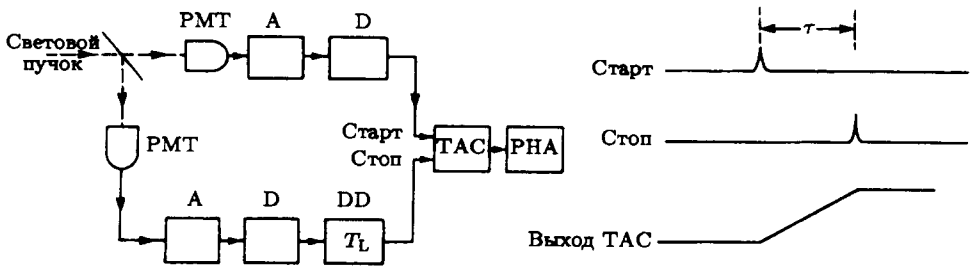


Рис. 14.7. Схема установки для фотоэлектрических корреляционных измерений, основанных на преобразовании временны́х интервалов в амплитуду. Записывается временно́й интервал между последовательными «пуск» и «стоп» импульсами. PMT — фотоэлектронный умножитель, A — усилитель, D — дискриминатор, DD — задерживающий дискриминатор, TAC — время-амплитудный преобразователь, PHA — анализатор высоты импульсов. (Из работы Devidson and Mandel, 1968)

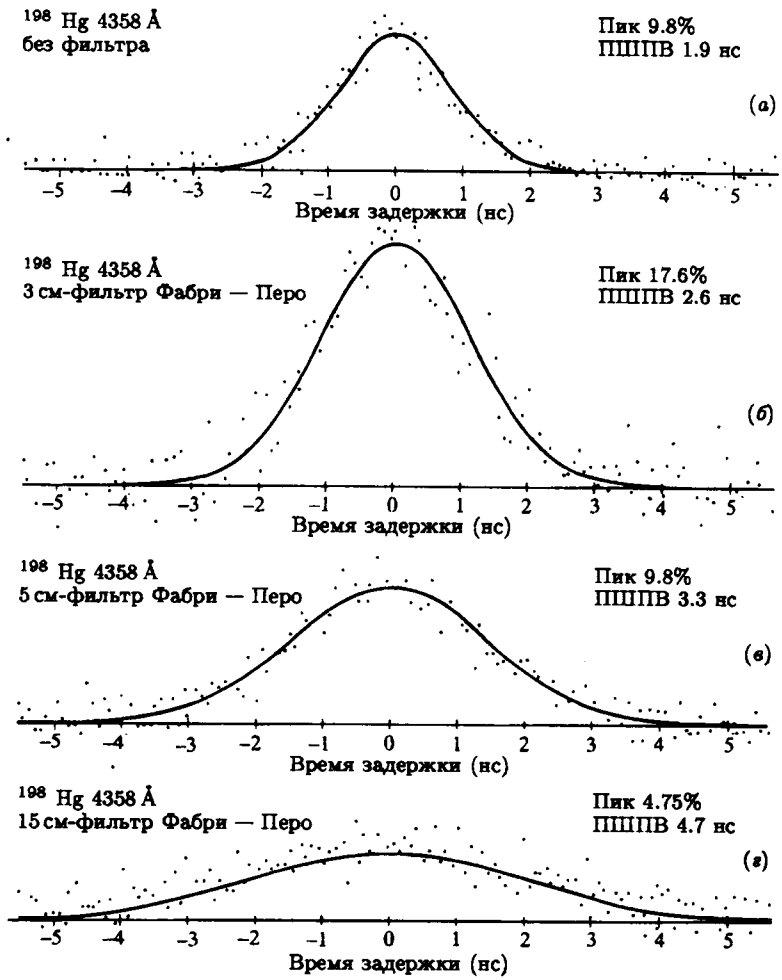


Рис. 14.8. Результаты двухвременны́х корреляционных измерений с помощью преобразователя временны́х интервалов в амплитуду. Изображено число пар фотоэлектрических импульсов как функция от времени задержки для света от ^{198}Hg лампы: *а* — без фильтра; *б* — за 3 см-фильтром Фабри — Перо; *в* — за 5 см-фильтром Фабри — Перо, *г* — за 15 см-фильтром Фабри — Перо. (Из работы Phillips, Kleiman and Davis, 1967)

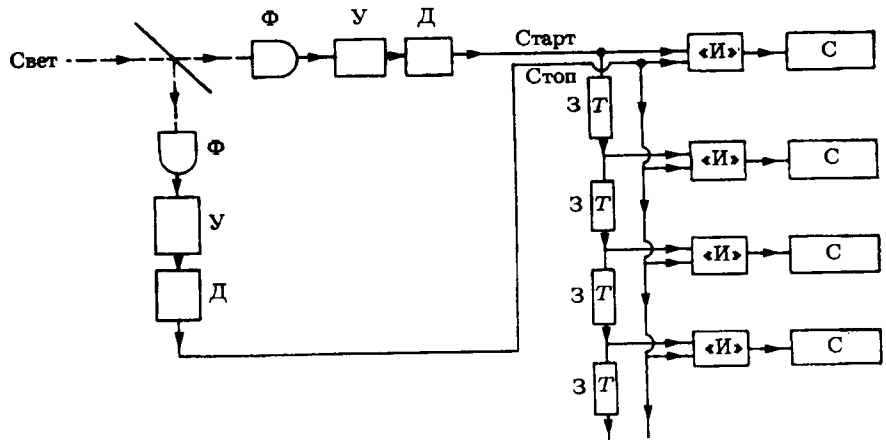


Рис. 14.9. Схема установки для фотоэлектрических корреляционных измерений. Временно́й интервал между запускающим и останавливающим импульсами записывается в цифровом виде синхронно с временем T без учета промежуточных импульсов. Ф — фототрубка, У — усилитель, Д — дискриминатор, З — задержка, С — счетчик

го числа таких событий, число накопленное под адресом τ пропорционально плотности вероятности для временно́го интервала τ. Этот метод наилучшим образом подходит для кратчайших времен корреляции, поскольку запись в цифровом виде можно осуществить медленно. Однако, строго говоря, этот метод дает не плотность вероятности $P_2(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t+\tau)$ того, что импульс на входе «стоп» следует за импульсом на входе «пуск» после временно́й задержки τ, а более сложную вероятность того, что *первый импульс на входе «стоп»*, следующий за импульсом на входе «пуск», появляется спустя время τ. Более подробно различие между этими двумя вероятностями обсуждается ниже. При низких скоростях счета импульсов эти две вероятности довольно схожи и можно связать одну с другой (Davidson and Mandel, 1968; Davidson, 1969), но они становятся все более и более отличающимися по мере того, как возрастает скорость счета. Однако данный метод используется для того, чтобы провести более точные измерения $\lambda(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t+\tau)$ для света от теплового источника (Scarl, 1966; Phillips, Kleiman and Devis, 1967). На рис. 14.8 приведены результаты эксперимента, в котором использованы время-амплитудный преобразователь и анализатор высоты импульсов для измерения распределения вероятности во временно́м интервале τ для положительных и отрицательных τ. Спектральная ширина света сужалась интерферометрически при последовательных измерениях, в результате чего группировка расширилась на значительно более длинные интервалы времени. Это ясно демонстрирует спектроскопическое применение данного метода.

На рис. 14.9 показана схема еще одного типа корреляционных экспериментов, из которых получается $P_2(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t+\tau)$. На этот раз временно́й интервал между импульсом на входе «стоп» и импульсом на входе «пуск» от двух фотодетекторов дискретизируется с шагом T с помощью задержек и логических элементов И (И-гейтов), без учета промежуточных импульсов. В таком случае число импульсных пар, соответствующих задержке NT, регистрируется на счетчике N ($N = 1, 2, \ldots$) и оно пропорционально $P_2(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t+NT)$. Наконец, следует упомянуть, что также были разработаны и используются для изучения статистических свойств света гораздо более замысловатые коррелляторы, некоторые из которых используют регистрационные устройства, которые могут быстро перемещаться(Cummins and Pike, 1977; Swinney, 1983; Pike, 1986).

Можно привести общие рассуждения относительно того, почему следует ожидать группировку фотоэлектрических импульсов в той ситуации, когда свет теплового источника попадает на фотодетектор. Если принять классическую картину оптического поля, то можно утверждать, что тепловые флуктуации источника заставляют флуктуировать интенсивность света. Но чем больше мгновенная интенсивность света, тем больше происходит фотоэмисий, так что фотоэлектрические импульсы распределены не строго случайно, как это было бы при постоянной интенсивности облучения. Следовательно, группировка является результатом проявления флуктуации электромагнитных волн и, как теперь видно, имеет полуклассическое объяснение.

Однако мы можем принять точку зрения, согласно которой тепловой луч света рассматривается как случайный поток частиц с перекрывающимися волновыми функциями, которые интерферируют. Когда мы

симметризуем квантовое состояние системы, так как частицы по своей сути неразличимы, мы находим, что интерференция увеличивает вероятность детектирования одной частицы рядом с другой. Группировка теперь возникает как результат проявления статистики Бозе — Эйнштейна, которой удовлетворяют тепловые фотоны (Purcell, 1956). Несмотря на различия между этими двумя точками зрения, они в определенном смысле являются эквивалентными описаниями одного и того же явления.

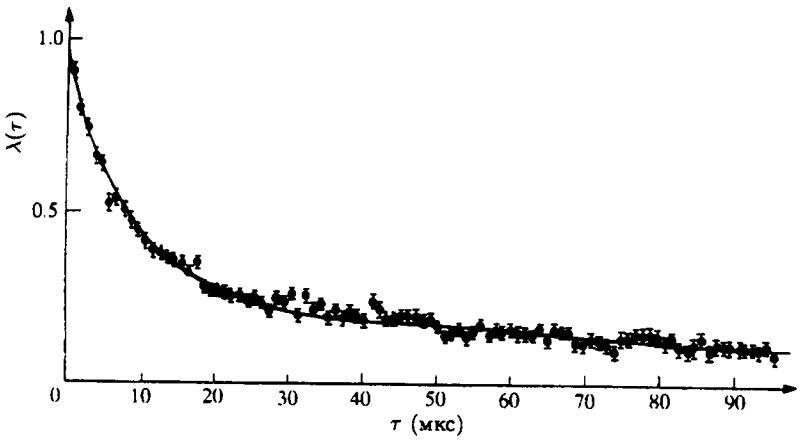


Рис. 14.10. Результаты двухвременны́х корреляционных измерений интенсивности света от лазера на красителе вблизи порога, иллюстрирующие группирование фотонов. На эти результаты наложена функция, состоящая из суммы двух экспоненциальных функций (Из работы Abate, Kimble and Mandel, 1976)

Конечно, времяразрешающие импульсные корреляционные эксперименты не ограничиваются выбором света от теплового источника. Они применяются к рассеянному свету для того, чтобы получить информацию о природе рассеивателей (Cummins and Swinney, 1970; Chu, 1974; Crosignani, DiPorto and Bertolotti, 1975), и они используются для исследования корреляционных свойств лазерного света, в частности, в окрестности порога генерации (Arecchi, Gatti and Sona, 1966; Davidson and Mandel, 1967; Chopra and Mandel, 1973a; Corti, Degiorgio and Arecchi, 1973). Было разработано несколько различных цифровых методов накопления информации о числе пар фотоэлектрических импульсов с временны́м разделением τ. Иногда временны́е интервалы между импульсам переводятся в цифровой вид и записываются непосредственно (Chopra and Mandel, 1972), а иногда импульсы сортируются в соответствии с их задержками по различным каналам, а числа, соответствующие каждой задержке регистрируются (Jakeman and Pike, 1969; Jakeman, 1970). На рис. 14.10 показаны результаты эксперимента (Abate, Kimble and Mandel, 1976), в котором изучаются корреляционные свойства света, излучаемого лазером на красителе вблизи порога осцилляций. Нормированная корреляционная функция интенсивности $\lambda(\tau)$ обнаруживает две характеристические временны́е постоянные порядка 10 мкс и 100 мкс. Наконец, была также измерена плотность совместной вероятности детектирования третьего порядка $P_2(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t+\tau; \mathbf{r}_3, t+t')$, которая зависит от двух временны́х интервалов τ и τ' для лазера, вблизи порога (Chopra and Mandel, 1973b; Corti and Degiorgio, 1976). Это предоставляет информацию о корреляционной функции шестого порядка $\Gamma^{(3,3)}$ оптического поля. Уже указывалось, что фазу корреляционной функции второго порядка можно определить из измерений P_3 (Gamo, 1963a, b).

14.7.3. Антигруппировка

Во всех вышеприведенных экспериментах фотоэлектрические импульсы либо проявляют группировку, либо происходят случайно, что демонстрируется тем, что совместная вероятность детектирования всегда удовлетворяет неравенству

$$P_2(\mathbf{r}, t; t+\tau) \leqslant P_2(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t).$$

В соответствии с (14.6.3) и (14.6.4), это означает, что

$$\langle \mathscr{T} : \hat{I}(\mathbf{r}, t)\hat{I}(\mathbf{r}, t+\tau) : \rangle \leqslant \langle : \hat{I}^2(\mathbf{r}, t) : \rangle, \tag{14.7.4a}$$

или, на языке весового функционала $\phi(\{v\})$ поля и c-числовых интенсивностей света, что

$$\langle \hat{I}(\mathbf{r}, t)\hat{I}(\mathbf{r}, t+\tau)\rangle_\phi \leqslant \langle \hat{I}^2(\mathbf{r}, t)\rangle_\phi. \tag{14.7.4б}$$

Другими словами, двухвременна́я автокорреляционная функция интенсивности либо спадает со своего начального значения при $\tau = 0$, либо остается постоянной. Теперь, когда $\phi(\{v\})$ представляет истинную,

неотрицательную функцию вероятности, из неравенства Шварца можно показать, что (14.7.4б) должно выполняться для стационарного поля в достаточно общем случае. Отсюда следует, что для таких состояний фотоэлектрические импульсы должны проявлять или группировку, или полную случайность, а антигруппировка, которая означает, что $P_2(\mathbf{r},t;\mathbf{r},t) < P_2(\mathbf{r},t;\mathbf{r},t+\tau)$, и нарушает неравенство (14.7.4), невозможна при таких обстоятельствах. Если антигруппировка имеет место, то

$$\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\hat{I}(\mathbf{r},t+\tau)\rangle_\phi > \langle \hat{I}^2(\mathbf{r},t)\rangle_\phi, \tag{14.7.5}$$

т.е. корреляционная функция возрастает, вместо того, чтобы спадать от своего начального значения при $\tau = 0$, и, в таком случае, $\phi(\{v\})$ не может быть функционалом вероятности. Однако существуют состояния электромагнитного поля, для которых $\phi(\{v\})$ является отрицательным и более сингулярным, чем дельта-функция, но эти состояния, как мы знаем из разд. 11.8, несомненно являются неклассическими. Свет от теплового источника и свет от лазера следует исключить. Таким образом, наблюдение фотоэлектрической антигруппировки свидетельствует о явно квантово-механическом состоянии оптического поля, тогда как группировка такого смысла не несет.

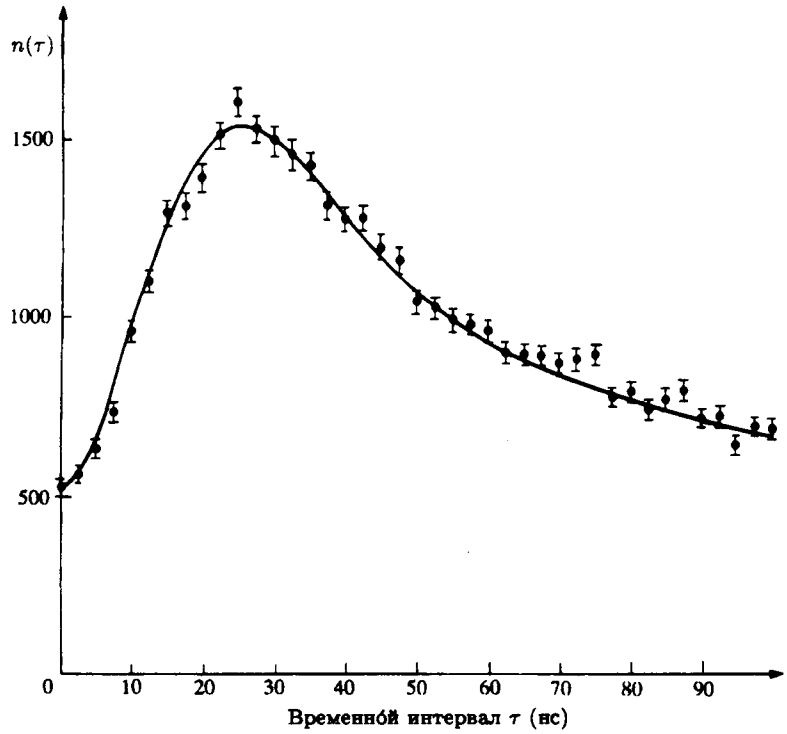


Рис. 14.11. Результаты двухвременны́х корреляционных измерений света от одного атома Na, иллюстрирующие антигруппировку. (Из работы Dagenais and Mandel, 1978)

На рисунке 14.11 показаны результаты экспериментов, в которых наблюдалась антигруппировка (Kimble, Dagenais and Mandel, 1977; Dagenais and Mandel, 1978). Источник света состоял из отдельных когерентно возбужденных атомов в атомном пучке; атомная флуоресценция фокусировалась объективом микроскопа и проектировалась на два фотоумножителя, выходные импульсы которых давали импульсы «пуск» и «стоп» на входе для время-цифрового преобразователя. Как показано на рис. 14.11, при временны́х интервалах τ до 25 нс наблюдалось большее число пар фотоэлектрических импульсов, чем при нулевом временно́м интервале. Данная ситуация находится в соответствии с предсказаниями квантовой теории резонансной флуоресценции, которая дает $\lambda(\tau) > \lambda(0)$, как мы еще увидим в разд. 15.6. Антигруппировка наблюдалась и в других, более поздних экспериментах (Cresser, Häger, Leuchs, Rateike and Walther, 1982; Walker and Jakeman, 1985; Grangier, Roger and Aspect, 1986; Grangier, Roger, Aspect, Heidmann and Reynaud, 1986).

14.7.4. Распределение временно́го интервала фотоэлектрических импульсов

Как мы уже видели, при попадании света на фотодетектор совместная вероятность детектирования двух фотоэлектрических импульсов в момент t в течение Δt и в момент $t+\tau$ в течение τ задается выражением

$$P_2(t,t+\tau)\Delta t\Delta\tau = (\alpha cS)^2\Delta t\Delta\tau\langle :\hat{I}(t)\hat{I}(t+\tau):\rangle, \tag{14.7.6}$$

в котором не указываются пространственные координаты. С первого взгляда может показаться, что можно рассматривать условную вероятность

$$P_c(t+\tau|t)\Delta\tau = \frac{P_2(t,t+\tau)\Delta t\Delta\tau}{P_1(t)\Delta\tau} \tag{14.7.7}$$

регистрации детектирования в момент $t+\tau$ в течение $\Delta\tau$, при условии наличия детектирования в момент t, как выражение для распределения временно́го интервала τ между последовательными фотоэлектрическими импульсами. Однако $P_2(t,t+\tau)$ необязательно связана с импульсами, следующими непосредственно друг за другом, и не стремится к нулю при $\tau\to\infty$. Она дает дифференциальную вероятность того, что в момент t появится один фотоэлектрический импульс и в момент $t+\tau$ появится другой, безотносительно к тому, какие импульсы могут появиться в промежутке. Мы уже ссылались на несколько экспериментальных способов измерения фотоэлектрических корреляций и указывали, что в некоторых случаях, например в том, который показан на рис. 14.7, измеряемой не является ни $P_2(t,t+\tau)$, ни $P_c(t+\tau|t)$, а является плотность вероятности того, что *первый* останавливающий импульс, следующий за запускающим импульсом в момент t, появится в момент $t+\tau$. Выведем теперь эту плотность вероятности, которая представляет собой распределение вероятности $\mathscr{P}(\tau)$ временно́го интервала τ между последовательными импульсами.

В любой дифференциальный промежуток времени длительностью Δt вероятность отсутствия детектирования равна $\langle[1-\alpha cS\hat{I}(t)\Delta t]\rangle$. Можно ожидать, что вероятность отсутствия детектирования в конечном временно́м интервале от t до $t+\tau$ включает в себя произведение большого числа подобных множителей, которые расположены упорядоченно по времени и в нормальном порядке, и произведение имеет вид

$$\mathscr{T}:\prod_{n=1}^{\tau/\Delta t}[1-\alpha cS\hat{I}(t+n\Delta t)]:,$$

и можно показать (см. разд. 14.8), что в пределе $\Delta t\to 0$ оно сводится к

$$\mathscr{T}:\exp\left[-\alpha cS\int_t^{t+\tau}\hat{I}(t')\,dt'\right]:.$$

Объединение этого множителя с выражением для плотности условной вероятности того, что детектирование имеет место в момент $t+\tau$, при условии наличия более раннего детектирования в момент t, приводит к следующей формуле для $\mathscr{P}(\tau)$

$$\mathscr{P}(\tau)=\frac{\alpha cS}{\langle\hat{I}(t)\rangle}\left\langle\mathscr{T}:\hat{I}(t)\exp\left[-\alpha cS\int_t^{t+\tau}\hat{I}(t')\,dt'\right]\hat{I}(t+\tau):\right\rangle. \tag{14.7.8}$$

Конечно, для стационарного поля $\langle\hat{I}(t)\rangle$ и $\mathscr{P}(\tau)$ не зависят от t. Поскольку отрицательная экспонента возрастает с ростом τ, то $\mathscr{P}(\tau)$ стремится к нулю при $\tau\to\infty$, и, таким образом, величина $\mathscr{P}(\tau)$, в отличие от $P_c(t+\tau|t)$, задаваемой выражением (14.7.7), может быть нормирована. Это легко подтвердить непосредственным интегрированием:

$$\int_0^\infty\mathscr{P}(\tau)\,d\tau=-\frac{1}{\hat{I}(t)}\left[\left\langle\mathscr{T}:\hat{I}(t)\exp\left[-\alpha cS\int_t^{t+\tau}\hat{I}(t')\,dt'\right]:\right\rangle\right]_{\tau=0}^{\tau=\infty}=1, \tag{14.7.9}$$

как и требовалось доказать. Поскольку $\langle\hat{I}(t)\rangle\equiv R$ есть средняя скорость счета детектора, то понятно, что $\mathscr{P}(\tau)$ заметно отличается от $P_c(t+\tau|t)$ только при $R\tau\not\ll 1$. Когда $R\tau$ невелико, можно связать распределение $\mathscr{P}(\tau)$ и $P_c(t+\tau|t)$, совершая разложение экспоненциального множителя в ряд (Davidson and Mandel, 1968; Davidson, 1969). В особенно простом частном случае, когда поле находится в когерентном состоянии с постоянной во времени интенсивностью света $I(t)$, из (14.7.8) следует, что

$$\mathscr{P}(\tau)=R\mathrm{e}^{-R\tau}\quad(0\leqslant\tau). \tag{14.7.10}$$

В более общем случае предполагается, что при изменении τ $\mathscr{P}(\tau)$ изменяется приблизительно по экспоненциальному закону на временны́х интервалах τ, достаточно длительных, чтобы корреляции интенсивности ослабли, при условии, что этот процесс является эргодическим.

Плотности вероятности $\mathscr{P}(\tau)$ и $P_c(t+\tau|t)$ формально могут быть получены из производящей функции (Glauber, 1967; Mandel, 1967)

$$G(t,\tau,\xi)\equiv-\frac{1}{\hat{I}(t)}\left\langle\mathscr{T}:\hat{I}(t)\exp\left[-\xi\int_t^{t+\tau}\alpha cS\hat{I}(t')\,dt'\right]:\right\rangle, \tag{14.7.11}$$

которая, в принципе, включает корреляции всех порядков. Так, производя частное дифференцирование, мы получаем, что

$$P_c(t+\tau|t) = \left[-\frac{1}{\xi}\frac{\partial G(t,\tau,\xi)}{\partial \tau}\right]_{\xi=0} \tag{14.7.12}$$

$$\mathscr{P}(\tau) = \left[-\frac{\partial G(t,\tau,\xi)}{\partial \tau}\right]_{\xi=1}. \tag{14.7.13}$$

Еще раз подчеркнем, что когда τ является достаточно большим или когда скорость фотоэлектрического счета достаточно высока, необходимо различать $P_c(t+\tau|t)$ и $\mathscr{P}(\tau)$. В этом случае, измерения $\mathscr{P}(\tau)$ должны проводится с помощью установки, которая показана на рис. 14.7, а измерения $P_c(t+\tau|t)$ с помощью установки, приведенной на рис. 14.9.

В заключение отметим, что так называемое распределение времени ожидания $W(\tau)$, которое является плотностью вероятности того, что временно́й интервал от произвольного момента t до следующего импульса равен τ, задается выражением

$$W(\tau)\alpha cS\left\langle \mathscr{T} : \exp\left[-\alpha cS\int_t^{t+\tau}\hat{I}(t')\,dt'\right]\hat{I}(t+\tau) :\right\rangle. \tag{14.7.14}$$

14.8. Статистика фотоэлектрического счета

Пока мы занимались только дифференциальными вероятностями фотоэлектрического детектирования за различные короткие временны́е промежутки Δt. Однако интервал Δt нельзя считать подлинно бесконечно малым, поскольку он предполагался длинным по сравнению с оптическим периодом, но при этом достаточно коротким, чтобы дифференциальная вероятность была много меньше единицы. На практике измерения часто проводятся в течение конечного временно́го промежутка, скажем, от t до $t+T$, и, таким образом, существует отличная от нуля вероятность $p(n,t,t+T)$ того, что в течение интервала T произойдет n детектирований. Ниже мы обратимся к процедуре вычисления этой интегральной вероятности счета $p(n,t,t+T)$ для открытой системы.

На первый взгляд может показаться, что предыдущие результаты неприменимы к данной ситуации, так как они были получены методами теории возмущений на коротких временах. Однако уже небольшие рассуждения покажут, что когда луч света падает на фотодетектор, каждый элемент оптического поля взаимодействует локально с детектором, причем, как правило, в течение очень короткого времени, а не всего времени измерения T. Более того, поскольку время отклика детектора очень короткое, а энергия электронного состояния по истечении времени взаимодействия Δt является вполне определенной, то по прошествии времени Δt каждый электрон является либо свободным, либо все еще связанным. Следовательно, мы можем считать, что измерение в течение конечного интервала времени T эквивалентно большому числу последовательных измерений, каждое из которых происходит за короткий временно́й интервал Δt. Таким образом, полученные результаты для дифференциальной вероятности детектирования должны быть применимы. Отметим, что данная ситуация была бы другой для случая замкнутой системы, который мы здесь не рассматриваем.

Начнем с разделения интервала времени T на $T/\delta t$ коротких интервалов с длительностью δt, обозначенных, соответственно, через $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{T/\delta t}$. Пусть $P_n(t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots t_{i_n})$ обозначает совместную вероятность совершения n детектирований в n временны́х интервалах $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots t_{i_n}$, которая задается выражением

$$P_n(t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_n}) = \langle \mathscr{T} : [\alpha cS\hat{I}(t_{i_1})\delta t]\ldots[\alpha cS\hat{I}(t_{i_n})\delta t] :\rangle, \tag{14.8.1}$$

в соответствии с (14.5.3). Для упрощения обозначений мы опустили координатный индекс $\mathbf{r}$ для интенсивности $\hat{I}$. Кроме того, необходимо будет воспользоваться вероятностью $\widetilde{P_n}(t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots t_{i_n}; t_{j_1}, t_{j_2}, \ldots t_{j_n})$ того, что n детектирований произойдут за временны́е интервалы $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots t_{i_n}$ *при отсутствии детектирований* за интервалы $t_{j_1}, t_{j_2}, \ldots t_{j_n}$, которая может быть вычислена, если воспользоваться принципом унитарности для вероятностей. Например, суммируя совместную вероятность одного детектирования в t_i и нуля, одного, двух и т.д. детектирований в t_j, приходим к формуле для $P_1(t_i)$. Таким образом,

$$P_1(t_i) = \widetilde{P}_1(t_i; t_j) + P_2(t_i, t_j) + P_3(t_i, t_j, t_j) + \ldots,$$

так что

$$\widetilde{P}_1(t_i;t_j) = P_1(t_i) - P_2(t_i,t_j) - P_3(t_i,t_j,t_j) + \ldots = \\ = \langle \mathscr{T} : [\alpha c S\hat{I}(t_i)\delta t][1 - \alpha c S\hat{I}(t_j)\delta t - (\alpha c S\hat{I}(t_j)\delta t)^2 - \ldots] : \rangle. \quad (14.8.2)$$

В более общем случае можно показать исходя из аналогичных рассуждений, что выражение для совместной вероятности $\widetilde{P_n}(t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots t_{i_n}; t_{j_1}, t_{j_2}, \ldots t_{j_n})$ содержит множитель вида $[\alpha c S\langle\hat{I}(t_i)\rangle\delta t]$ для каждого интервала δt, при котором детектирование имеет место, и множитель, равный $[1 - \alpha c S\langle\hat{I}(t_j)\rangle\delta t - -(\alpha c S\langle\hat{I}(t_j)\rangle\delta t)^2 - \ldots]$, для каждого интервала δt, в котором не происходит никакого детектирования. Следовательно, вероятность того, что произойдет ровно n детектирований в интервалах $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots t_{i_n}$ задается выражением

$$\widetilde{P}_n(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}; \text{все другие интервалы}) = \\ = \left\langle \mathscr{T} : [\prod_{s=1}^{n} [\alpha c S\hat{I}(t_{i_s})\delta t] \prod_{\substack{r=1 \\ r\neq i_1, i_2, \ldots, t_n}}^{T/\delta t} [1 - \alpha c S\hat{I}(t_{i_s})\delta t - (\alpha c S\hat{I}(t_{i_s})\delta t)^2 - \ldots] : \right\rangle. \quad (14.8.3)$$

14.8.1. Интегральная вероятность детектирования

Теперь можно воспользоваться выражением (14.8.3) для определения интегральной вероятности счета $p(n,t,t+T)$, суммируя $\widetilde{P}_N$ по всем возможным временам, когда может произойти n , и устремляя $\delta t \to \infty$. Но если мы считаем, что каждый индекс $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots t_{i_n}$ изменятся от 1 до $T/\delta t$, то вероятность каждого n-го детектирования повторяется в сумме $n!$ раз. Таким образом, для того, чтобы получить вероятность $p(n,t,t+T)$, нам необходимо разделить на $n!$, а именно,

$$p(n,t,t+T) = \lim_{\delta t\to 0} \frac{1}{n!} \sum_{i_1=1}^{T/\delta t} \ldots \sum_{i_n=1}^{T/\delta t} \widetilde{P}_n(i_1, i_2, \ldots, i_n; \text{все другие интервалы}) = \\ = \lim_{\delta t\to 0} \frac{1}{n!} \left\langle \mathscr{T} : \sum_{i_1=1}^{T/\delta t} \ldots \sum_{i_n=1}^{T/\delta t} [\alpha c S\hat{I}(t_{i_1})\delta t] \ldots [\alpha c S\hat{I}(t_{i_n})\delta t] \times \right. \\ \left. \times \prod_{r=1}^{T/\delta t} [1 - \alpha c S\hat{I}(t_{i_n})\delta t - (\alpha c S\hat{I}(t_{i_n})\delta t)^2 - \ldots] : \right\rangle. \quad (14.8.4)$$

В последнем уравнении мы поменяли местами порядок суммирования и усреднения и упростили в конце произведение тем, что вставили n множителей для $r = i_1, i_2, \ldots i_n$, которые отсутствуют в (14.8.3). Это допустимо, поскольку каждый из этих n множителей стремится к единице при $\delta t \to \infty$ и, таким образом, не влияет на результат. Нет необходимости особенно подчеркивать, что такое рассуждение нельзя применять ко *всем* $t/\delta t$ множителям, так как число их для данного n стремится к бесконечности при $\delta t \to 0$.

Теперь множитель при произведении в (14.8.4) может быть выражен следующим образом:

$$\prod_{r=1}^{T/\delta t} [1 - \alpha c S\hat{I}(t_r)\delta t - (\alpha c S\hat{I}(t_r)\delta t)^2 - \ldots] = 1 - \sum_{i=1}^{T/\delta t} [\alpha c S\hat{I}(t_i)\delta t + (\alpha c S\hat{I}(t_i)\delta t)^2 + \ldots] + \\ + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{T/\delta t} \sum_{j=1}^{T/\delta t} [\alpha c S\hat{I}(t_i)\delta t + (\alpha c S\hat{I}(t_i)\delta t)^2 + \ldots][\alpha c S\hat{I}(t_j)\delta t + (\alpha c S\hat{I}(t_j)\delta t)^2 + \ldots] -$$

$$-\frac{1}{3!}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j\neq k\neq i}}^{T/\delta t}\sum_{j=1}^{T/\delta t}\sum_{k=1}^{T/\delta t}[\alpha cS\hat{I}(t_i)\delta t+(\alpha cS\hat{I}(t_i)\delta t)^2+\ldots][\alpha cS\hat{I}(t_j)\delta t+(\alpha cS\hat{I}(t_j)\delta t)^2+\ldots]\times$$

$$\times[\alpha cS\hat{I}(t_k)\delta t+(\alpha cS\hat{I}(t_k)\delta t)^2+\ldots]+\text{и т.д.}=$$

$$=1-\sum_{i=1}^{T/\delta t}\alpha cS\hat{I}(t_i)\delta t+\frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{T/\delta t}\alpha cS\hat{I}(t_i)\delta t\right]^2-\frac{1}{3!}\left[\sum_{i=1}^{T/\delta t}\alpha cS\hat{I}(t_i)\delta t\right]^3+\ldots+O(\delta t)=$$

$$=\exp\left[\sum_{i=1}^{T/\delta t}\alpha cS\hat{I}(t_i)\delta t\right]+O(\delta t). \quad (14.8.5)$$

После подстановки (14.8.5) в (14.8.4) и пренебрежения членами порядка δt или ниже, мы получаем формулу

$$p(n,t,t+T)=\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{n!}\left\langle \mathscr{T}:\left[\sum_{i=1}^{T/\delta t}\alpha cS\hat{I}(t_i)\delta t\right]^n\exp\left[-\sum_{i=1}^{T/\delta t}\alpha cS\hat{I}(t_i)\delta t\right]:\right\rangle.$$

При $\delta t\to 0$ суммы превращаются в интегралы по времени, так что

$$\sum_{i=1}^{T/\delta t}\alpha cS\hat{I}(t_i)\delta t\to\int_t^{t+T}\alpha cS\hat{I}(t')\,dt'\equiv\hat{W}. \quad (14.8.6)$$

Таким образом, окончательно, имеем

$$p(n,t,t+T)=\left\langle \mathscr{T}:\frac{\hat{W}\exp(-\hat{W})}{n!}:\right\rangle, \quad (14.8.7)$$

откуда видно, что вероятность фотоэлектрического счета задается средним значением определенного распределения Пуассона. Хотя, строго говоря, δt всегда должно быть значительно больше оптического периода, на практике предел $\delta t\to 0$, тем не менее, дает хорошие результаты.

В тех случаях, когда временно́е упорядочение не является важным, как, например, в случае свободного поля, полученное выражение можно записать в другом виде с помощью оптической теоремы эквивалентности (11.9.4) для нормально упорядоченных операторов. Тогда имеем

$$p(n,t,t+T)=\int\phi(\{v\})\frac{W^n\,\mathrm{e}^{-W}}{n!}\,d\{v\}=\left\langle\frac{W^n\,\mathrm{e}^{-W}}{n!}\right\rangle_\phi, \quad (14.8.8\text{а})$$

где $\phi(\{v\})$ представляет собой весовой функционал или диагональное представление оператора плотности поля по когерентным состояниям (или P-представление), а

$$W=\alpha cS\int_t^{t+T}I(t')\,dt' \quad (14.8.8\text{б})$$

есть c-числовая интегральная интенсивность, которая получается из $\widetilde{W}$ заменой операторов рождения и уничтожения их левыми и правыми собственными значениями. Этот результат записывается следующим образом:

$$p(n,t,t+T)=\iint\phi(\{v\})\delta(W'-W)\frac{W'^n\,\mathrm{e}^{-W'}}{n!}\,dW\,d\{v\}=\int_0^\infty\mathscr{P}(W')\frac{W'^n\,\mathrm{e}^{-W'}}{n!}\,dW, \quad (14.8.9)$$

где

$$\mathscr{P}(W')\equiv\int\phi(\{v\})\delta(W'-W)\,d\{v\} \quad (14.8.10)$$

можно рассматривать как «плотность вероятности» случайной переменной W'. Но так как $\phi(\{v\})$ не всегда является истинной плотностью вероятности, то таковой не всегда является и $\mathscr{P}(W')$, несмотря на то, что она надлежащим образом нормируется на единицу.

Выражение (14.8.9) впервые было получено из полуклассического анализа (Mandel, 1958, 1959, 1963a) и оно действительно внешне совпадает с (9.7.3), которое было получено без использования квантования поля. Позднее формула была получена более строго для случая квантованного поля (Kelley and Kleiner, 1964; Glauber, 1965, с. 181). Однако следует подчеркнуть, что, несмотря на формальное сходство (9.7.3) и (14.8.9), эти выражения не являются полностью идентичными, поскольку $\mathscr{P}(W')$ в (9.7.3) — это плотность вероятности, тогда как существуют состояния, не имеющие классических аналогов, для которых $\mathscr{P}(W')$ в (14.8.9) не является истинной плотностью вероятности. Кроме того, необходимо отметить, что поскольку наш вывод основывался на использовании дифференциальной вероятности (14.8.1), выражения для $p(n,t,t+T)$ применимы к ситуациям, в которых электромагнитное поле взаимодействует с детектором в течение короткого времени, а непоглощенные фотоны выходят из системы, то есть эти выражения применимы для открытой системы. Это отражает типичную экспериментальную ситуацию, когда световой пучок падает на детектор. Различные формы $p(n,t,t+T)$ не применимы к замкнутой системе, например, к системе, в которой электромагнитное поле и детектор заключены в резонаторе. В таком случае, свет непрерывно взаимодействует с детектором, и интенсивность поля со временем спадает до нуля в результате измерения. Эта ситуация рассмотрена в работах (Mollow, 1969; Srinivas and Davis, 1981). Важно не путать эти два случая (Mandel, 1981).

Интересно сравнить выражение (14.8.8a) для вероятности $p(n,t,t+T)$ фотоэлектрического счета с выражением (12.10.8) для вероятности $P(n)$ для n фотонов в квантовом поле, а именно,

$$P(n) = \langle U^n \mathrm{e}^{-U}/n! \rangle_\phi, \quad \text{где} \quad U \equiv \int_{L^3} I(\mathbf{r},t)\, d^3\mathbf{r}$$

представляет собой интенсивность света, проинтегрированную по всему пространству. Сходство этих двух выражений неизбежно наводит на мысль, что статистика фотоэлектрических детектирований отражает статистику фотонов. Действительно, можно рассматривать W, определяемую выражением (14.8.8б), как α-кратный объемный интеграл, который берется по цилиндру с высотой cT, в основании которого лежит область фотокатода площадью S. Поскольку $I(\mathbf{r},t)$ также является плотностью фотонов, видно, что $cS\int_t^{t+T} I(\mathbf{r},t')\,dt'$ представляет собой среднее число фотонов в цилиндрическом объеме, когда состояние поля является когерентным состоянием $|\{v\}\rangle$.

Когда временно́й интервал T счета существенно короче времени корреляции или обратной ширины частотной полосы света, формулу (14.8.8б) можно, в определенной степени, упростить, поскольку T слишком мал, чтобы $I(\mathbf{r},t')$ под знаком интеграла изменялось значительно. Таким образом, можно вынести $I(\mathbf{r},t')$ из-под интеграла по времени и положить

$$W \approx \alpha cSIT. \tag{14.8.11}$$

Это дает нам возможность преобразовать (14.8.9), записывая

$$p(n,t,t+T) = \iint \phi(\{v\})\delta(I'-I)\frac{(\alpha cSI'T)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\alpha cSI'T}\,dI'\,d\{v\} = \int_0^\infty \mathbb{P}(I')\frac{(\alpha cSI'T)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\alpha cSI'T}\,dI', \tag{14.8.12}$$

где

$$\mathbb{P}(I') \equiv \int \phi(\{v\})\delta(I'-I)\,d\{v\}. \tag{14.8.13}$$

Таким образом, вероятность $p(n,t,t+T)$ определена в том случае, когда известна «плотность вероятности» $\mathbb{P}(I)$ мгновенной интенсивности света I, хотя вновь подчеркнем, что для определенных состояний поля $\mathbb{P}(I)$ не будет иметь характер истинной плотности вероятности.

За последние годы изучение статистики фотоэлектрического счета привело к важному применению его в качестве метода исследования природы некоторых типов оптических полей и проверки таких теорий, как, например, теория лазеров. Этот вопрос детально обсуждался в работах (Arecchi, 1969; Mehta, 1970; Peřina, 1970; Saleh, 1978; Teich and Saleh, 1988). Далее мы рассмотрим несколько примеров использования формулы (14.8.8) или (14.8.9). Мы узнаем, что несмотря на формальную пуассоновскую структуру выражений для $p(n,t,t+T)$, при определенных состояниях поля эта вероятность может сильно отличаться от пуассоновской.

14.8.2. Примеры вероятности детектирования

(а) Квазимонохроматическое когерентное состояние $|\{v\}\rangle$

В том случае, когда весовой функционал $\phi(\{v\})$ является произведением дельта-функций вида

$$\phi(\{v\}) = \prod_{\mathbf{k},s} \delta^2(v_{\mathbf{k}s} - v'_{\mathbf{k}s}),$$

мы сразу получаем при подстановке этого выражения в (14.8.8а), что

$$p(n,t,t+T) = \frac{W'^n\,\mathrm{e}^{-W'}}{n!}, \tag{14.8.14}$$

где $W' \equiv \alpha cS \int_t^{t+T} \mathbf{V}'^*(\mathbf{r},t')\cdot\mathbf{V}'(\mathbf{r},t')\,dt'$, а $\mathbf{V}'(\mathbf{r},t)$ — правое собственное значение оператора $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r},t)$, принадлежащего когерентному состоянию $|\{v\}\rangle$. Таким образом, фотоэлектрические импульсы, подобно фотонам электромагнитного поля, подчиняются статистике Пуассона.

(б) Одномодовый лазер со случайной фазой

Если единственной возбужденной модой является $\mathbf{k}', s'$-мода, а абсолютное значение ее амплитуды есть $|v'|$, то функционал $\phi(\{v\})$ для такой довольно идеализированной модели лазера задается выражением (11.11.18). Подставляя его под знак интеграла в (14.8.8а), вновь находим, что

$$p(n,t,t+T) = \frac{W'^n\,\mathrm{e}^{-W'}}{n!}, \tag{14.8.15}$$

где $W' \equiv \alpha cS \int_t^{t+T} I'(\mathbf{r},t')\,dt'$, а $I'(\mathbf{r},t') = |v'|^2/L^3$. Распределение вновь является пуассоновским, потому что интенсивность света имеет вполне определенное значение.

(в) Одномодовое фоковское состояние $|m_{\mathbf{k}',s'},\{0\}\rangle$

В этом случае все моды являются незаполненными, за исключением $\mathbf{k}', s'$-моды, которая содержит m фотонов. Мы можем исходить либо непосредственно из (14.8.7) и выразить нормально упорядоченный оператор через операторы числа фотонов, либо воспользоваться найденным ранее выражением (11.8.20) для весовой функции заполненной моды. Так как все другие моды незаполнены, имеем

$$\phi(\{v\}) = \frac{\mathrm{e}^{|v_{\mathbf{k}'s'}|^2}}{m!}\left[\frac{\partial^{2m}}{\partial v_{\mathbf{k}'s'}^{*m}\,\partial v_{\mathbf{k}'s'}^{m}}\delta^2(v_{\mathbf{k}'s'})\right]\prod_{\mathbf{k},s\neq\mathbf{k}',s'}\delta^2(v_{\mathbf{k}s}).$$

Хотя данный весовой функционал является сильно сингулярным, легко использовать его в (14.8.8а), поскольку «пробная функция» $W^n\,\mathrm{e}^{-W}$ под знаком интеграла является бесконечно дифференцируемой. Поскольку заполнена только одна мода, W можно свести к $\alpha cS|v'|^2T/L^3$ и, таким образом,

$$p(n,t,t+T) = \int \frac{\mathrm{e}^{|v|^2}}{n!\,m!}\left[\frac{\partial^{2m}}{\partial v^{*m}\,\partial v^{m}}\delta^2(v)\right]\left(\frac{\alpha cS|v|^2T}{L^3}\right)^n \exp(-\alpha cS|v|^2T/L^3)\,d^2v =$$
$$= \left(\frac{\alpha cST}{L^3}\right)^n \frac{1}{n!\,m!}\int \delta^2(v)\left[\frac{\partial^{2m}}{\partial v^{*m}\,\partial v^{m}}(vv^*)^n \exp[vv*(1-\alpha cST/L^3)]\right] d^2v,$$

где последняя строка получается из предыдущей интегрированием по частям. Для того, чтобы объем пространства, охватываемый детектором, всегда лежал внутри объема квантования, необходимо наложить условие $cST < L^3$. Подынтегральное выражение можно разложить с помощью правила Лейбница. Тогда находим, что интеграл имеет значение

$$\begin{cases} m!\,n!\dbinom{m}{n}\left(1-\dfrac{\alpha cST}{L^3}\right)^{m-n}, & \text{если } m \geqslant n, \\ 0, & \text{в обратном случае,} \end{cases}$$

таким образом, окончательно, имеем

$$\begin{cases} p(n,t,t+T) = \binom{m}{n}\left(\dfrac{\alpha cST}{L^3}\right)^n\left(1-\dfrac{\alpha cST}{L^3}\right)^{m-n}, & \text{если } n \leqslant m, \\ 0, & \text{в обратном случае.} \end{cases} \tag{14.8.16}$$

Это распределение Бернулли или биноминальное распределение по n и его вид имеет естественную интерпретацию. Поскольку по объему квантования L^3 фотоны распределены равномерно, то вероятность того, что любой один фотон содержится в цилиндре с площадью основания S и высотой cT, который является объемом пространства, фактически детектируемый детектором за время T, равна cTS/L^3 ($cTS < L^3$), и, следовательно, вероятность того, что фотон детектирован, есть $\alpha cTS/L^3$. Это так называемый параметр «успех» данного распределения, а вероятность зарегистрировать n «успехов», когда имеется m фотонов, просто имеет вид (14.8.16). Если бы мы исходили из фоковского состояния с многомодовым заполнением, то мы бы получили гораздо более сложный параметр успеха.

(г) Поляризованный луч света от теплового источника и короткое время счета T

В разд. 13.2 было показано, что для стационарного поля такого общего вида весовой функционал всегда можно свести к виду

$$\phi(\{v\})\prod_{\mathbf{k},s}\frac{1}{\pi\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle}\exp\left(-\frac{|v_{\mathbf{k}s}|^2}{\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle}\right), \tag{14.8.17}$$

в котором $\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle$ представляют собой произвольные числа заполнения различных мод. Для любой моды, у которой $\langle n_{\mathbf{k}s}\rangle$ равно нулю, соответствующий множитель в произведении необходимо рассматривать как $\delta^2(v_{\mathbf{k}s})$-функцию. Следовательно, весовая функция каждой моды является независимым гауссовским распределением, и суммарная комплексная амплитуда поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ в каждой пространственно-временно́й точке $\mathbf{r},t$ также имеет вид распределения Гаусса. Для поляризованного поля, которое является взаимно спектрально чистым (разд. 4.6) по отношению к поляризации, можно записать $\mathbf{V} = V\boldsymbol{\varepsilon}$, где $\boldsymbol{\varepsilon}$ есть единичный вектор поляризации, а мгновенная интенсивность $I = V^*V$ в таком случае подчиняется вероятностному распределению [ср. (13.3.7)]

$$\mathbb{P}(I) = \frac{1}{\langle I\rangle}\,\mathrm{e}^{-I/\langle I\rangle}. \tag{14.8.18}$$

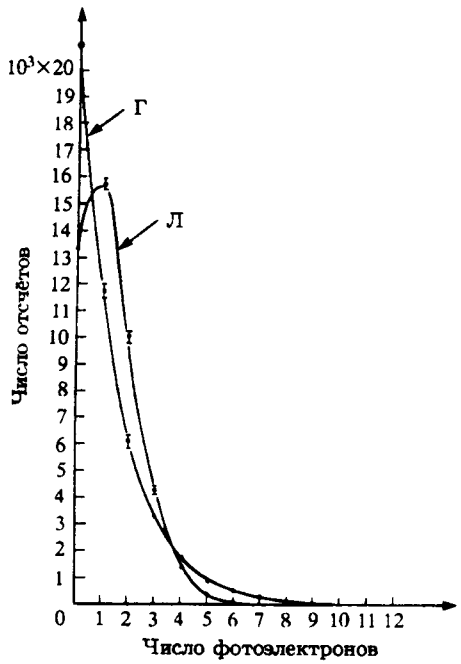


Рис. 14.12. Результаты кратковременных измерений фотоэлектрического счета $p(n,t,t+T)$ для лазерного луча (Л) и для поляризованного луча от теплового источника с гауссовской статистикой (Г). (Приводится из работы Arecchi, 1965)

Несмотря на простоту весового функционала (14.8.17), нельзя, как правило, найти точную конечную форму выражения для $\mathscr{P}(W)$ или для $p(n,t,t+T)$. Однако в тех случаях, когда интервал измерения T является достаточно коротким, по сравнению с временем когерентности или обратной шириной полосы частот $1/\Delta\omega$, так что (14.8.12) применимо, можно воспользоваться (14.8.18) для $\mathbb{P}(I)$ и получить следующий результат

$$p(n,t,t+T) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-I/\langle I\rangle}}{\langle I\rangle}\frac{(\alpha cSIT)^n\,\mathrm{e}^{-\alpha cSIT}}{n!}\,dI = \\ = \frac{1}{[1+\alpha cS\langle I\rangle T][1+1/\alpha cS\langle I\rangle T]^n}. \tag{14.8.19}$$

Это распределение Бозе — Эйнштейна по n с параметром $\langle n\rangle = \alpha cS\langle I\rangle T$. Оно имеет ту же структуру, что и распределение чисел заполнения фотонов для одной моды поля теплового источника [см. (13.2.4)]. Хотя значение $\langle n\rangle$ и следовало ожидать, причина того, что распределение $p(n,t,t+T)$ имеет одномодовый вид распределения Бозе — Эйнштейна менее очевидна, поскольку здесь мы рассматриваем многомодовое поле.

Чтобы понять это, сначала вспомним, что цилиндрический объем пространства cST, фактически регистрируемый детектором за время T, меньше объема когерентности, так как S меньше, чем площадь когерентности, а cT меньше, чем длина когерентности поля. Но объем когерентности является также проекцией на трехмерное пространство единичной ячейки фазового пространства и может быть использован для определения «моды» поля. Детектируемый объем, следовательно, лежит внутри соответствующей ячейки фазового пространства. Именно в этом смысле измерение ограничено детектированием одной моды поля. Можно сказать еще и так: фотон с частотным разбросом $\Delta\omega$ имеет фундаментальную временну́ю неопределенность $1/\Delta\omega$, и интервал измерения T целиком лежит в пределах фундаментальной временно́й неопределенности. Подобные замечания также можно сделать относительно неопределенности положения в пространстве. На рис. 14.12 показаны результаты измерений $p(n,t,t+T)$ за короткий временно́й промежуток времени, которые согласуются с предсказаниями по формулам (14.8.5) и (14.8.19) для света от теплового источника и для света одномодового лазера.

(д) Частично поляризованный пучок света от теплового источника

Если по отношению к поляризации свет является взаимно спектрально чистым (ср. разд. 4.5 и 13.3), то мы всегда можем представить суммарное поле в виде суммы двух ортогональных, полностью поляризованных составляющих, которые обе являются гауссовскими с интенсивностями света I_1, I_2. Если выбрать поляризационный базис таким, что матрица поляризации является диагональной (ср. разд. 6.2), то две составляющие поля не коррелируют и, так как они являются гауссовскими, они также и статистически независимы. Таким образом, обе интенсивности I_1, I_2 двух поляризованных составляющих подчиняются распределениям вероятности типа (14.8.18), в которых соответствующие средние интенсивности света $\langle I_1\rangle$, $\langle I_2\rangle$ связаны формулой (13.3.12) с общей средней интенсивностью света $\langle I\rangle$ и степенью поляризации P. Было показано, что при таких условиях плотность вероятности $\mathbb{P}(I)$ общей интенсивности света задается формулой [см. (13.3.13)]

$$\mathbb{P}(I)=\frac{1}{\mathbb{P}\langle I\rangle}\left\{\exp\left[\frac{-2I}{(1+P)\langle I\rangle}\right]-\exp\left[\frac{-2I}{(1-P)\langle I\rangle}\right]\right\}. \tag{14.8.20}$$

Подстановка этого результата в (14.8.12) приводит к следующей вероятности счета (Mandel, 1963a)

$$p(n,t,t+T)=\frac{1}{P\langle I\rangle n!}\int_0^\infty(\alpha cSIT)^n\exp(-\alpha cSIT)\left\{\exp\left[\frac{-2I}{\langle I\rangle(1+P)}\right]-\exp\left[\frac{-2I}{\langle I\rangle(1-P)}\right]\right\}dI=$$

$$=\frac{1}{Pn!}\left\{\frac{1}{\left[1+\frac{2}{(1+P)\langle n\rangle}\right]^{n+1}}-\frac{1}{\left[1+\frac{2}{(1-P)\langle n\rangle}\right]^{n+1}}\right\}, \tag{14.8.21}$$

где $\langle n\rangle=\alpha cS\langle I\rangle T$, при условии, что T достаточно короткое.

(е) Поляризованный свет теплового источника и произвольное время счета T

Воспользуемся определением длины когерентности как длины единичной ячейки фазового пространства, чтобы получить приближенное выражение для вероятности детектирования $p(n,t,t+T)$, где T не обязательно является коротким. Пусть T_c является временем когерентности светового пучка (которое точно определяется ниже), и предположим, что для длительных T имеем

$$T/T_c=\mu, \tag{14.8.22}$$

так что интервал времени измерения содержит μ времен когерентности. Тогда можно ожидать, что величина μ, которая необязательно является целым числом, играет роль числа одинаково заполненных ячеек фазового пространства по отношению к измерению. Поскольку для очень короткого интервала времени измерения T, $p(n,t,t+T)$ имеет вид одномодового распределения Бозе — Эйнштейна, можно ожидать, что для длительных времен она имеет вид многомодового распределения Бозе — Эйнштейна, соответствующего n фотонам, распределенным по μ одинаково заполненным модам. Вид такого распределения вероятности был выведен в разд. 13.3 и он определяется выражением (13.3.29). Поэтому теперь воспользуемся

подходом, справедливым для произвольного интервала времени T, при котором вероятность $p(n, t, t+T)$ достаточно хорошо аппроксимируется формулой

$$p(n,t,t+T) = \frac{(n+\mu-1)!}{n!\,(\mu-1)!}\,\frac{1}{[1+\langle n\rangle/\mu]^{\mu}[1+\mu/\langle n\rangle]^{n}}, \tag{14.8.23}$$

где предполагается, что среднее $\langle n\rangle$ является точным, а точное значение μ надлежит определить. Тогда отсюда следует, что дисперсия величины n равна

$$\langle(\Delta n)^2\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}(n-\langle n\rangle)^2\frac{(n+\mu-1)!}{n!\,(\mu-1)!}\,\frac{1}{[1+\langle n\rangle/\mu]^{\mu}[1+\mu/\langle n\rangle]^{n}},$$

которая, как уже было показано [ср. (13.3.32)], сводится к

$$\langle(n)^2\rangle = \langle n\rangle\left[1+\frac{\langle n\rangle}{\mu}\right]. \tag{14.8.24}$$

Но, как будет ниже показано, дисперсию величины n можно найти в достаточно общем виде из (14.8.7) или (14.8.8) и она может быть выражена в виде [см. (14.9.11)]

$$\langle(\Delta n)^2\rangle = \langle n\rangle\left[1+\langle n\rangle\frac{\theta(T)}{T}\right], \tag{14.8.25}$$

где $\theta(T)$ — временно́й интервал, зависящий от T и задаваемый выражением

$$\theta(T) \equiv \int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\lambda(\tau)\,d\tau. \tag{14.8.26}$$

Для поляризованного света теплового источника можно отождествить нормированную корреляционную функцию интенсивности $\lambda(\tau)$ с $(|\gamma(\tau)|)^2$, квадратом нормированной корреляционной функцией второго порядка амплитуды поля и записать

$$\theta(T) = \int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)|\gamma(\tau)|^2\,d\tau. \tag{14.8.27}$$

Если мы сравним выражение (14.8.24), полученное из предположения (14.8.23), с точным выражением (14.8.25), полученным непосредственно из формулы (14.8.7), то заметим, что эти уравнения можно привести к тождественному виду, полагая число μ равным

$$\mu = \frac{T}{\theta(T)}. \tag{14.8.28}$$

При таком отождествлении формула (14.8.23) автоматически дает точные значения двух первых моментов величины n, в любом случае. Более того, при достаточно коротких временах T, величину $|\gamma(\tau)|^2$ под знаком интеграла в (14.8.27) можно заменить единицей, так что $\theta(T) \approx T$ и $\mu = 1$, а выражение (14.8.23) является верным. Кроме того, можно ожидать, что оно выполняется и для очень больших времен T, потому что μ в таком случае становится большим числом и может быть хорошо аппроксимировано целым числом. Из этого следует, что (14.8.23) при μ, определяемом выражением (14.8.28), должно приводить к хорошему приближению для точной вероятности $p(n, t, t+T)$ в случае поляризованного света от теплового источника в самых разнообразных условиях. Эта формула впервые была предложена на основании эвристических рассуждений (Mandel, 1959, 1963a), и ее точность была подтверждена для нескольких спектральных распределений (Bédard, Chang and Mandel, 1967).

Формула типа (14.8.23) также должна с хорошей степенью точности выполняться и для вероятности фотоэлектрического счета, когда свет, падающий на фотодетектор, не является пространственно когерентным. Число областей когерентности $\mathscr{A}_c$, находящихся в области фотокатода S, играет роль, схожую с ролью числа времен когерентности T_c, приходящихся на интервал счета T. В тех случаях, когда $S \gg \mathscr{A}_c$ и $T \gg T_c$, фактическое число μ одинаково заполненных ячеек фазового пространства в (14.8.23) приблизительно равно $(S/\mathscr{A}_c)(T/T_c)$ (Bures, Delisle and Zardecki, 1971, 1972; Zardecki and Delisle, 1973).

14.8.3. Естественная мера времени когерентности

Сравнение (14.8.22) и (14.8.28) при больших значениях T дает нам возможность получить точную естественную меру времени когерентности T_c, по крайней мере, для светового пучка от теплового источника. С помощью (14.8.27) получаем

$$T_c = \lim_{T\to\infty} \theta(T) = \lim_{T\to\infty} \theta(T) = \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) |\gamma(\tau)|^2 \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)|^2 \, d\tau. \tag{14.8.29}$$

С этим выражением мы уже встречались и рассматривали его в качестве приближения для пока что плохо определенного времени когерентности. Наше обсуждение статистики фотоэлектрического счета показывает, что предельное значение $\theta(T)$ при $T \to \infty$ является естественной мерой единичной ячейки фазового пространства, а поэтому и времени когерентности света. На рис. 14.13 изображена зависимость $\theta(T)$ от T. Фактическую ширину полосы частот $\Delta\nu$ оптического поля от теплового источника всегда можно определить, как величину, обратную времени когерентности T_c.

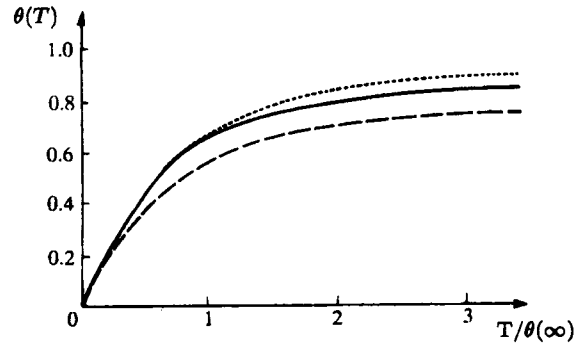


Рис. 14.13. Изменение $\theta(T)$ в зависимости от T для трех различных спектральных распределений с одинаковой спектральной шириной (сплошная кривая соответствует прямоугольному профилю, пунктирная — гауссовскому, а штриховая — прямоугольному дублету). (Из работы Mandel, 1963a)

Для света не от теплового источника, для которого корреляционная функция интенсивности $\lambda(\tau)$ в общем случае не выражается через $\gamma(\tau)$, мы могли бы выбрать более общее определение

$$T_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda(\tau)|^2 \, d\tau}{|\lambda(0)|} \tag{14.8.30}$$

для корреляционного времени флуктуаций интенсивности, которое сводится к (14.8.29) в случае, когда $\lambda(\tau) = (|\gamma(\tau)|)^2$. Однако для света не от теплового источника в общем случае не существует одного временно́го параметра, который характеризует область существенного отличия от нуля всех корреляционных функций. Может существовать целая иерархия времен корреляции, характеризующих корреляции различных порядков.

14.9. Свойства вероятности детектирования $p(n,t,t+T)$

14.9.1. Производящие функции и проблема обратного преобразования

Рассмотрев некоторые частные случаи, в которых вероятность детектирования $p(n,t,t+T)$ принимает простой вид, вернемся теперь к общим формулам (14.8.7) или (14.8.8) и рассмотрим некоторые их свойства. В силу пуассоновской структуры распределения некоторые производящие функции легко вычисляются. Так, для характеристической функции числа фотоэлектрических импульсов n находим

$$C_n(\xi) \equiv \langle e^{i\xi n} \rangle = \left\langle : \mathscr{T} \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\xi n} \frac{\hat{W}^n e^{\hat{W}}}{n!} : \right\rangle = \langle \mathscr{T} : \exp[\hat{W}(e^{i\xi} - 1)] : \rangle = \tag{14.9.1а}$$

$$= \langle \exp[W(e^{i\xi} - 1)] \rangle = C_W\left(\frac{e^{i\xi} - 1}{i}\right), \tag{14.9.1б}$$

где мы воспользовались оптической теоремой эквивалентности (разд. 11.9) и обозначили характеристическую функцию детектируемой интегральной интенсивности света W через C_W. Конечно, прибегая к классическому описанию, мы предполагаем, что поле является свободным, так что упорядочение по времени необязательно. Для квантовых состояний оптического поля, имеющих классический аналог, в том смысле, что функционал в фазовом пространстве $\phi(\{v\})$ является функционалом вероятности, можно воспользоваться (14.9.1б), чтобы вывести плотность вероятности $\mathscr{P}(W)$ для W из $C_n(\xi)$ с помощью обратного

преобразования Фурье характеристической функции (Mandel, 1959; Wolf and Mehta, 1964). Таким образом, имеем

$$\mathscr{P}(W) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} C_W(x)\,\mathrm{e}^{-iWx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} C_n(\xi)\,\mathrm{e}^{-iWx}\,dx, \quad \text{где} \quad i\xi = \ln(1+ix). \tag{14.9.2а}$$

Для действительных x требуется, чтобы величина $\xi = \xi_r + i\xi_i$ являлась комплексным числом, причем

$$\xi_r = \mathrm{tg}^{-1}\,x, \quad \xi_i = \ln(\cos\xi_r). \tag{14.9.2б}$$

Таким образом, плотность вероятности $\mathscr{P}(W)$ можно, в принципе, определить из $p(n,t,t+T)$ с помощью характеристических функций (Mandel, 1959; Wolf and Mehta, 1964). Однако данное обратное преобразование может быть настолько чувствительным к небольшим изменениям $p(n,t,t+T)$, что делает его непривлекательным на практике.

В качестве очевидного, даже отчасти тривиального применения (14.9.2) отметим, что если вероятность фотоэлектрического счета $p(n,t,t+T)$ является пуассоновской, то $C_n(\xi) = \exp\langle n\rangle(\mathrm{e}^{i\xi}-1)$ и, таким образом,

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i(\langle n\rangle - W)x}\,dx = \delta(W - \langle n\rangle).$$

Следовательно, $\langle\hat{W}\rangle = \langle n\rangle$, а интегральная интенсивность света имеет определенное значение $\langle n\rangle/\alpha$, где α — квантовый выход, и не флуктуирует.

Вместо характеристической функции (или производящей функции моментов, если заменить $i\xi$ величиной ξ), можно воспользоваться производящей функцией $F_n(\xi)$ факториальных моментов n (см. разд. 1.4.1), которая становится особенно простой для распределения вероятности, имеющего пуассоновскую структуру. Таким образом, из данного определения и из (14.8.7) следует, что

$$F_n(\xi)\langle(1-\xi)^n\rangle = \left\langle \mathscr{T} : \sum_{n=0}^{\infty}(1-\xi)^n\frac{\hat{W}^n\exp(-\hat{W})}{n!} : \right\rangle = \langle\mathscr{T} : \exp(-\hat{W}\xi) :\rangle = \langle\exp(-W\xi)\rangle_\phi. \tag{14.9.3}$$

Поскольку $F_n(\xi)$ при разложении в степенной ряд по ξ дает факториальные моменты $\langle n^{(r)}\rangle$ величины n, то после сравнения коэффициентов при ξ^r в обеих частях данного уравнения [ср. (12.10.13)] получаем

$$\langle n^{(r)}\rangle = \langle\mathscr{T} : \hat{W}^r :\rangle\langle W^r\rangle_\phi, \quad r = 1,2,\ldots. \tag{14.9.4}$$

Еще раз отметим, что фотоотсчеты имеют такое же статистическое отношение к интегральной интенсивности света, как и фотоны поля.

С другой стороны, можно вычислить производящую функцию кумулянтов (см. разд. 1.4) $K_n(\xi)$, которая является логарифмом $C_N(\xi/i)$. С помощью (14.9.1б) находим (Mandel, 1959; Mandel and Wolf, 1965), что

$$K_n(\xi) = \ln\langle\mathrm{e}^{\xi n}\rangle = \ln\langle\exp[W(\mathrm{e}^{\xi}-1)]\rangle_\phi = K_W(\mathrm{e}^{\xi}-1), \tag{14.9.5}$$

где K_W — производящая функция кумулянтов выличины W. Разложение каждой части (14.9.5) в степенной ряд дает нам возможность установить связь между кумулянтами $k_r^{(n)}$, $k_r^{(W)}$ от n и W. Таким образом, получаем формулу

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\xi^r}{r!}\kappa_r^{(n)} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{e}^{\xi}-1)^r}{r!}\kappa_r^{(W)}, \tag{14.9.6}$$

и, после сравнения коэффициентов при ξ^r $(r = 1,2,\ldots)$ в обеих частях уравнения, мы находим, что

$$\begin{aligned}
\kappa_1^{(n)} &= \kappa_1^{(W)},\\
\kappa_2^{(n)} &= \kappa_1^{(W)} + \kappa_2^{(W)},\\
\kappa_3^{(W)} &= \kappa_1^{(W)} + 3\kappa_2^{(W)} + \kappa_3^{(W)},\\
\kappa_4^{(W)} &= \kappa_1^{(W)} + 7\kappa_2^{(W)} + 6\kappa_3^{(W)} + \kappa_4^{(W)} \quad \text{и т.д.}
\end{aligned} \tag{14.9.7}$$

При очень высоких интенсивностях света в правой части каждого из этих выражений доминирующим является последний член, так что $k_r^{(n)} \to k_r^{(W)}$ ($r = 1, 2, \ldots$), и распределения вероятностей величин n и W становятся одинаковыми, что и следовало ожидать в классическом пределе. С другой стороны, когда интенсивность света очень низкая, первый член в правой части каждого уравнения является доминирующим, и мы находим, что $k_r^{(n)} \to k_1^{(W)} = k_1^{(n)} = \langle n \rangle$. Следовательно, все кумулянты становятся равными первому, который является характерным для пуассоновского распределения. В этом пределе очень слабого поля фотоэлектрические импульсы стремятся стать независимыми друг от друга.

14.9.2. Второй момент и субпуассоновская статистика счета

Соотношения между кумулянтами (14.9.7) полностью эквивалентны соотношениям между моментами (14.9.4). Рассмотрим два первых соотношения немного подробнее. Они могут быть записаны в виде

$$\langle n \rangle = \langle \hat{W} \rangle = \alpha \int_t^{t+T} cS \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t') \rangle \, dt' = \alpha c S \langle \hat{I} \rangle T, \tag{14.9.8}$$

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle \hat{W} \rangle + \langle \mathscr{T} : (\Delta \hat{W})^2 : \rangle = \langle n \rangle + \langle (\Delta \hat{W})^2 \rangle_\phi. \tag{14.9.9}$$

Из формулы (14.9.8) видно, что среднее число фотоэлектрических отсчетов задается произведением квантового выхода α детектора и интегральной фотонной плотности. Согласно (14.9.9) среднеквадратичная флуктуация фотоэлектрических импульсов может быть выражена в виде суммы вкладов флуктуаций независимых частиц и флуктуаций интегральных волновых полей. Данный результат можно рассматривать как обобщение хорошо известной формулы, впервые выведенной Эйнштейном для излучения черного тела (Einstein, 1909; Fürth, 1928a, b; Mandel, Sudarshan and Wolf, 1964). Однако выражение (14.9.9) в действительности не подразумевает, что $\langle (\Delta n)^2 \rangle$ всегда превосходит $\langle n \rangle$, так как $\langle \mathscr{T} : (\Delta \hat{W})^2 : \rangle$ может быть отрицательным для определенных состояний электромагнитного поля. В таком случае статистика поля становится субпуассоновской, что является характерной особенностью неклассического состояния. В качестве примера, мы отметим, что значение $\langle \mathscr{T} : (\Delta \hat{W})^2 : \rangle$ всегда отрицательно для фоковского состояния поля.

Если воспользоваться определением (14.8.6) для $\hat{W}$, то можно переписать (14.9.9) в виде

$$\begin{aligned} \langle (\Delta n)^2 \rangle &= \\ &= \langle n \rangle + (\alpha c S)^2 \int_t^{t+T}\!\!\int dt' \, dt'' \langle \mathscr{T} : \Delta \hat{I}(\mathbf{r}, t') \Delta \hat{I}(\mathbf{r}, t'') : \rangle = \\ &= \langle n \rangle + (\alpha c S \langle \hat{I}(\mathbf{r}) \rangle)^2 \int_t^{t+T}\!\!\int dt' \, dt'' \lambda(t', t''), \end{aligned} \tag{14.9.10}$$

где вновь ввели нормированную корреляционную функцию интенсивности λ (14.6.3). Пространственные координаты здесь не указаны. Для стационарного поля $\lambda(t', t'')$ является функцией только разности времен $t''-t'$ и может быть записана как $\lambda(t''-t')$. Если сделать замену $t' = t+t_1$, $t'' = t+t_2$ в интеграле, то пределы становятся равными 0 и T. Более того, двойной интеграл может быть сведен к однократному интегралу с помощью преобразования $\tau = t_2 - t_1$, если мы проинтегрируем по диагональным полосам, расположенным под углом 45°, как показано на рис. 14.14, в точности, как в разд. 2.2.2, поскольку λ зависит только от τ. Каждая полоса имеет длину $(T - |\tau|)\sqrt{2}$ и ширину $\sqrt{2}\tau$. Таким образом, можно записать

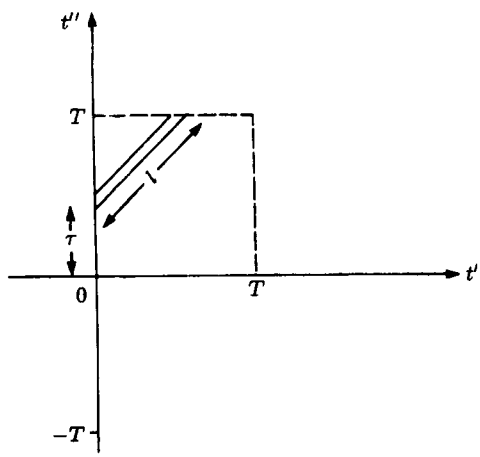


Рис. 14.14. К преобразованию двойного интеграла в выражении (14.9.10) в одинарный интеграл

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle + (\alpha c S \langle \hat{I}(\mathbf{r}) \rangle)^2 \int_{-T}^{T} (T - |\tau|) \lambda(\tau) \, d\tau = \langle n \rangle \left[1 + \langle n \rangle \frac{\theta(T)}{T} \right], \tag{14.9.11}$$

где

$$\theta(T) \equiv \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \lambda(\tau)\, d\tau. \tag{14.9.12}$$

Функция $\theta(T)$ имеет размерность времени и является той же функцией, которая была приведена на рис. 14.13 для частного случая света от теплового источника. Очевидно, что член $\langle n\rangle^2\theta(T)/T$ в (14.9.11) измеряет отклонение статистики фотоэлектрического счета от пуассоновской, для которой $\langle(\Delta n)^2\rangle = \langle n\rangle$.

Относительное отклонение дисперсии $\langle(\Delta n)^2\rangle$ от пуассоновской дисперсии $\langle n\rangle$ для независимых фотоэлектрических импульсов можно выразить из (14.9.11) с помощью параметра

$$Q \equiv \frac{\langle(\Delta n)^2\rangle - \langle n\rangle}{\langle n\rangle} = \langle n\rangle \frac{\theta(T)}{T} = R\theta(T), \tag{14.9.13}$$

где $R = \alpha cS\langle\hat{I}(\mathbf{r})\rangle$ есть средняя скорость счета освещенного фотодетектора. Следовательно, дисперсия больше или меньше пуассоновской в зависимости от того, является ли $\theta(T)$ положительной или отрицательной. В частности, для интервала счета T, который много короче времени корреляции T_c, с хорошей степенью точностью можем заменить $\lambda(\tau)$ под знаком интеграла в (14.9.12) величиной $\lambda(0)$. Тогда имеем

$$\theta(T) \approx \lambda(0)T, \tag{14.9.14}$$

и $\theta(T)$ является отрицательной всякий раз, когда отрицательна $\lambda(0)$. Из этого следует, что $\lambda(0) < 0$ является условием субпуассоновской статистики счета при коротком времени счета T.

В качестве примера оптического поля, демонстрирующего субпуассоновскую дисперсию фотоотсчетов, отметим поле в одномодовом фоковском состоянии, для которого вероятность фотоэлектрического счета $p(n, t, t+T)$ задается распределением Бернулли (14.8.16). Легко находим, что для этого распределения

$$Q \equiv \frac{\langle(\Delta n)^2\rangle - \langle n\rangle}{\langle n\rangle} = -\left(\frac{\alpha cST}{L^3}\right) \tag{14.9.15}$$

всегда является отрицательной величиной и предполагает отрицательное значение $\theta(T)$. Еще один, возможно, более физически наглядный пример связан с флуоресцентным светом, испускаемым при резонансе двухуровневым атомом в присутствии когерентного возбуждающего поля (см. разд. 15.6). Для такого поля можно показать, что (Carmichael and Walls, 1976a, b; Kimble and Mandel, 1976; Cook, 1981; Lenstra, 1982; Singh, 1983)

$$\lambda(\tau) = -\mathrm{e}^{-3\beta\tau/2}\left(\cos q\beta\tau + \frac{3}{2q}\sin q\beta\tau\right), \tag{14.9.16}$$

при $q \equiv (\Omega^2/\beta^2 - \frac{1}{4})^{1/2}$. Параметр 2β — это скорость спонтанного излучения невозбужденного атома, или коэффициент Эйнштейна A (см разд. 15.4), а Ω — так называемая частота Раби, которая пропорциональна напряженности поля возбуждающего света. Так как $\lambda(0) = -1$, статистика счета на коротких временах является субпуассоновской. Но, кроме того, мы также находим из (14.9.12) и (14.9.16), что

$$\theta(\infty) = -\frac{3\beta}{(\Omega^2/2\beta^2) + 1}, \tag{14.9.17}$$

так что фотоотсчеты на длительном временно́м интервале также флуктуируют субпуассоновским образом. Это было подтверждено экспериментально (Short and Mandel, 1983, 1984). О других способах создания субпуассоновской статистики счета сообщается в работах (Teich, Salrh and Peřina, 1984; Saleh and Teich, 1985; Teich and Saleh, 1985; Hong and Mandel, 1986; Machida and Yamamoto, 1986; Rarity, Tapster and Jakeman, 1987).

14.9.3. Получение корреляционных функций из статистики счета

Из (14.9.11) видно, что второй момент для фотоотсчетов содержит информацию о нормированной корреляционной функции интенсивности $\lambda(\tau)$ света. Это предполагает, что $\lambda(\tau)$ можно получить из измерений

вероятности фотоэлектрического счета $p(n, t, t+T)$ для различных интервалов счета T. Чтобы убедится в этом, отметим, что если

$$G(T) \equiv \langle(\Delta n)\rangle - \langle n\rangle = R^2 T\theta(T), \tag{14.9.18}$$

то

$$\frac{dG(T)}{dT} = 2R^2 \int_0^T \lambda(\tau)\, d\tau,$$

если мы воспользуемся тем, что $\lambda(-\tau) = \lambda(\tau)$, и

$$\frac{d^2G(T)}{dT^2} = 2R^2\lambda(T). \tag{14.9.19}$$

Следовательно, $\lambda(T)$ можно получить двукратным дифференцированием функции $G(T)$, которую можно найти путем измерения фотоэлектрического счета при различных временах T.

Конечно, требование двукратного дифференцирования налагает сильные ограничения на точность, с которой должна быть определена $G(T)$. Тем не менее, весьма точные измерения вероятности счета, в принципе, возможны, и этот метод был использован для получения $\lambda(\tau)$ для лазера, действующего около порога генерации (Meltzer and Mandel, 1970).

Задачи

14.1 Рассмотрите электромагнитное поле, у которого одна $\mathbf{k}_0, s_0$-мода плоской волны находится в m-фотонном фоковском состоянии внутри объема квантования L^3, тогда как все остальные моды находятся в вакуумном состоянии. Фотодетектор с площадью поверхности S и квантовым выходом α установлен так, что фотоэлектрическая поверхность перпендикулярна вектору $\mathbf{k}_0$. Рассчитайте вероятность $p(n, t, t+T)$ регистрации n фотодетектирований за временно́й интервал от t до $t+T$.

14.2 Лазер осциллирует одновременно с равными амплитудами в двух продольных модах, имеющих частоты ω_1 и ω_2. Обе моды случайно сфазированы и не зависят друг от друга. Рассчитайте плотность вероятности $\rho(\tau)$ того, что одно фотоэлектрическое детектирование произойдет в момент t, а другое в момент $t+\tau$, когда лазерный свет падает на фотодетектор.

14.3 Фотодетектор имеет квантовый выход α для света частоты ω. Покажите, что вероятность $P(m)$ детектирования m фотонов с данной частотой в некотором временно́м интервале T является той же, что и для идеального детектора с 100 % квантовым выходом, перед которым непосредственно помещен делитель пучков с пропускной способностью по амплитуде $\sqrt{\alpha}$.

14.4 Пучок света от случайно сфазированного одномодового лазера проходит через делитель пучка BS без потерь с неизвестной пропускной и отражательной способностью и затем падает на фотодетектор D_T с 100 % квантовым выходом. Экспериментатор последовательно измеряет число n фотонов, фиксируемых D_T в течение некоторого интервала времени T для того, чтобы найти скорость эмиссии фотонов R и установить фотонную статистику лазера. Но из-за ослабления, вносимого делителем величина $\langle n\rangle/T$ не будет давать правильного значения R. Также не будут правильными для лазера и высшие моменты величины n.

У экспериментатора имеется в распоряжении второй фотодетектор D_R с 100 % квантовым выходом, с помощью которого измеряется свет, отраженный от BS, и он утверждает, что, сохраняя только данные счета, полученные с помощью D_T, для которых D_R не регистрирует фотонов в течение того же самого временно́го интервала счета T, можно успешно преодолеть ослабление делителя пучка. Является ли это утверждение верным? Как моменты величины n, полученные таким образом, будут соотносится со значениями, которые получились бы в отсутствие делителя пучка?

14.5 Поле излучения в виде плоской волны, создаваемое тепловым источником, имеет μ мод с одинаковым средними числом заполнения n_0, тогда как все остальные моды являются незаполненными. Пусть $\mathbf{k}_1, s_1$ и $\mathbf{k}_2, s_2$ обозначают моды из заполненного набора. Вычислите корреляционную функцию $\langle \hat{n}^{(2)}_{\mathbf{k}_1,s_1} \hat{n}^{(2)}_{\mathbf{k}_2,s_2}\rangle$.

14.6 Поляризованный пучок света от теплового источника со средней интенсивностью $\langle \hat{I} \rangle$ падает под прямым углом на фотодетектор с площадью поверхности S и квантовым выходом α. Свет является квазимонохроматическим с нормированной лоренцевой спектральной плотностью, задаваемой $2B/[(\omega - \omega_0)^2 + B^2]$. Вычислите плотность условной вероятности того, что при наличии одного фотодетектирования в момент t произойдет еще одно через τ секунд и изобразите зависимость от τ.

14.7 Стационарный луч света от теплового источника линейно поляризован в определенном направлении, характеризуемым единичным вектором поляризации $\boldsymbol{\varepsilon}$. Рассмотрите гильбертово пространство, ограниченное только заполненными модами поля. Рассчитайте характеристическую функцию $\langle \exp(i\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \hat{\mathbf{E}}x) \rangle$ электрического поля $\hat{\mathbf{E}}$, когда $\boldsymbol{\varepsilon}$ представляет собой действительный вектор в направлении электрического поля.

14.8 Стационарный, поляризованный пучок света с нормированной корреляционной функцией интенсивности $\gamma(\tau) = \exp(-\beta|\tau|) - 2\exp(-2\beta|\tau|)$ нормально падает на фотодетектор в течение временно́го интервала T. Вычислите дисперсию числа фотоотсчетов n, фиксируемых за временно́й интервал T. Прокомментируйте значимость полученного результата.

Глава 15

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА И ДВУХУРОВНЕГО АТОМА

Свет излучается и поглощается атомами, так что взаимодействие квантованного электромагнитного поля и атома представляет собой одну из наиболее фундаментальных проблем квантовой оптики. Однако реальные атомы являются сложными системами, и даже простейший из них — атом водорода, имеет непростую структуру энергетических уровней. Поэтому, как правило, часто необходимо или желательно аппроксимировать поведение реального атома поведением намного более простой квантовой системы. Часто при взаимодействии с электромагнитным полем только два атомных энергетических уровня играют важную роль, так что стало обычным во многих теоретических рассмотрениях представлять атом квантовой системой, имеющей только два энергетических собственных состояния. Такая система является наиболее элементарной квантовой системой, использование которой, как правило, существенно упрощает рассмотрение[1].

15.1. Динамические переменные для двухуровневого атома

Рассмотрим атомную квантовую систему с двумя энергетическими уровнями, показанными на рис. 15.1. Уровни разделены энергетическим интервалом $\hbar\omega_0$ и центрированы относительно значения E_0. Квантовые состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$ являются, таким образом, собственными состояниями невозмущенного атомного гамильтониана $\hat{H}_{\mathrm{A}}$ с собственными значениями энергии $E_0 \pm \frac{1}{2}\hbar\omega_0$, т.е.

$$\hat{H}_{\mathrm{A}}|2\rangle = (E_0 + \tfrac{1}{2}\hbar\omega_0)|2\rangle, \quad \hat{H}_{\mathrm{A}}|1\rangle = (E_0 - \tfrac{1}{2}\hbar\omega_0)|1\rangle, \tag{15.1.1}$$

и образуют полное ортонормированное множество для представления атомных состояний, т.е.

$$\langle\lambda|\lambda'\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}, \tag{15.1.2}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{2} |\lambda\rangle\langle\lambda| = 1, \quad \lambda, \lambda' = 1, 2. \tag{15.1.3}$$

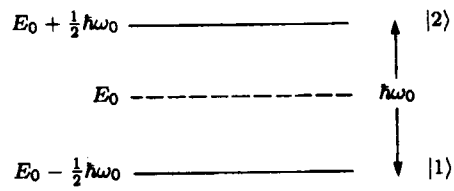


Рис. 15.1. Энергетическая диаграмма двухуровневого атома

Теперь учтем, что квантовая система, имеющая только два возможных энергетических уровня, математически эквивалентна частице со спином $\frac{1}{2}$, находящейся в магнитном поле, которая также имеет только два энергетических уровня. Поэтому формализм, развитый для описания динамики таких систем (Rabi, 1937; Bloch, 1946), непосредственно применим и для двухуровневого атома. При рассмотрении квантованного электромагнитного поля оказалось удобным ввести неэрмитовые операторы $\hat{a}_{\boldsymbol{k}s}$ и $\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}s}$, которые играют роль операторов, понижающих и повышающих энергию поля на величину $\hbar\omega$ ($\omega = ck$). Таким же образом мы введем теперь два атомных оператора $\hat{b}$ и $\hat{b}^{\dagger}$, которые понижают и повышают энергию атома на величину $\hbar\omega_0$. Поскольку энергия атома имеет как нижнюю, так и верхнюю границу, результатом

[1] см. также книги (*Макомбер, 1979; *Альперин, Клубис, Хижняк, 1987) — *ред. пер.*

действия оператора $\hat{b}$ на нижнее состояние $|1\rangle$ и оператора $\hat{b}^\dagger$ на верхнее состояние $|2\rangle$ должен быть нуль. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \hat{b}|2\rangle &= |1\rangle, & \hat{b}^\dagger|2\rangle &= 0, \\ \hat{b}|1\rangle &= 0, & \hat{b}^\dagger|1\rangle &= |2\rangle. \end{aligned} \tag{15.1.4}$$

Повторно действуя этими операторами, сразу находим, что

$$\begin{aligned} \hat{b}\,\hat{b}^\dagger|2\rangle &= 0, & \hat{b}^\dagger\hat{b}|2\rangle &= |2\rangle, \\ \hat{b}\,\hat{b}^\dagger|1\rangle &= |1\rangle, & \hat{b}^\dagger\hat{b}|1\rangle &= 0, \end{aligned} \tag{15.1.5}$$

так что $\hat{b}\,\hat{b}^\dagger$ и $\hat{b}^\dagger\hat{b}$ играют роль «операторов числа частиц», имеющих собственные значения 0, 1 для нижнего и верхнего состояний возбуждения, соответственно. Кроме того, повторное действие операторов $\hat{b}$ и $\hat{b}^\dagger$ на любое состояние дает нуль, так что

$$\hat{b}^2 = 0 = \hat{b}^{\dagger 2}. \tag{15.1.6}$$

Эти свойства можно кратко охарактеризовать следующими антикоммутационными правилами

$$\{\hat{b}, \hat{b}\} = 0 = \{\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger\}, \quad \{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} = 1, \tag{15.1.7}$$

где $\{\hat{A}, \hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ обозначает антикоммутатор операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$. Эти соотношения характерны для алгебры фермионов. Их следует сравнить с формулами (10.3.9) и (10.3.11) для одномодового электромагнитного поля, которое является полем бозонов. Видно, что соотношения (15.1.7) отличаются от (10.3.9)—(10.3.11) только заменой коммутаторов на антикоммутаторы.

Хотя все атомные операторы, относящиеся к внутреннему состоянию атома, выражаются через $\hat{b}$ и $\hat{b}^\dagger$, часто, для более тесной связи с физическими наблюдаемыми, удобно вводить эрмитовые динамические переменные. Мы будем использовать набор из трех бесследовых спиновых операторов Паули, определяемых соотношениями[1]

$$\hat{R}_1 = \frac{1}{2}(\hat{b}^\dagger + \hat{b}), \quad \hat{R}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{b}^\dagger - \hat{b}), \quad \hat{R}_3 = \frac{1}{2}(\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{b}\hat{b}^\dagger), \tag{15.1.8}$$

который иногда дополняется четвертым элементом

$$\hat{R}_0 = \frac{1}{2}\hat{1} \tag{15.1.9}$$

Эти четыре оператора образуют полное множество линейно независимых, эрмитовых наблюдаемых, действующих в двумерном гильбертовом пространстве состояний атома, так что для произвольного атомного оператора $\hat{O}$ можно всегда записать[2]

$$\hat{O} = \sum_{\alpha=0}^{3} g_\alpha \hat{R}_\alpha, \tag{15.1.10}$$

где g_α — коэффициенты, задаваемые оператором $\hat{O}$. Исходя из определений, можно легко показать, что эти операторы подчиняются следующим коммутационным и антикоммутационным соотношениям

$$[\hat{R}_l, \hat{R}_m] = i\epsilon_{lmn}\hat{R}_n, \quad \{\hat{R}_l, \hat{R}_m\} = \frac{1}{2}\delta_{lm} \quad (l, m, n = 1, 2, 3) \tag{15.1.11}$$

и что

$$\sum_{\alpha=0}^{3} \hat{R}_\alpha^2 = 1, \quad \hat{R}_\alpha^2 = \frac{1}{4} \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3). \tag{15.1.12}$$

[1] Данное определение этих операторов может отличаться множителем 2 и порядком индексов 1, 2, 3 от определений, используемых некоторыми другими авторами, но оно совпадает с определением, использованным Дике (Dicke, 1954), а также Алленом и Эберли (Allen and Eberly, 1975).

[2] Подобная запись любого эрмитового оператора системы через компоненты энергетического спина $R = \frac{1}{2}$ впервые широко использовалась Файном В.М. и Ханиным Я.И. (*Файн, Ханин, 1965) — *ред. пер.*

Кроме того, иногда оказываются полезными следующие смешанные соотношения

$$[\hat{b}, \hat{R}_1] = -\hat{R}_3, \quad [\hat{b}, \hat{R}_2] = i\hat{R}_3, \quad [\hat{b}, \hat{R}_3] = \hat{b}, \tag{15.1.13}$$

Нетрудно представить различные операторы через полное множество состояний $|1\rangle$, $|2\rangle$, умножая каждый оператор на единицу в виде (15.1.3) справа и слева и затем используя (15.1.4) и (15.1.5). В результате получим соотношения

$$\hat{b} = |1\rangle\langle 2|, \quad \hat{b}^\dagger = |2\rangle\langle 1|, \quad \hat{b}\,\hat{b}^\dagger = |1\rangle\langle 1|, \quad \hat{b}^\dagger\hat{b} = |2\rangle\langle 2|. \tag{15.1.14}$$

Следовательно,

$$\hat{R}_3|2\rangle = \frac{1}{2}|2\rangle, \quad \hat{R}_3|1\rangle = -\frac{1}{2}|1\rangle, \tag{15.1.15}$$

так что состояния $|2\rangle$, $|1\rangle$ являются собственными состояниями оператора $\hat{R}_3$, который можно рассматривать как меру атомной инверсии.

15.1.1. Атомная энергия и атомный дипольный момент

Представляя таким же образом гамильтониан атома $\hat{H}_\mathrm{A}$ через состояния $|2\rangle$, $|1\rangle$ и используя (15.1.1), сразу получаем формулу

$$\hat{H}_\mathrm{A} = E_0 + \frac{1}{2}\hbar\omega_0(|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|),$$

которая, с учетом (15.1.14), дает

$$\hat{H}_\mathrm{A} = E_0 + \hbar\omega_0\hat{R}_3. \tag{15.1.16}$$

Следовательно, произведение $\hbar\omega_0$ и $\hat{R}_3$ есть мера энергии атома относительно базисного уровня E_0. Если нижнее состояние является основным атомным состоянием, то $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$, и $\hat{H}_\mathrm{A} = \hbar\omega_0(\hat{R}_3 + \frac{1}{2}) = \hbar\omega_0\hat{b}^\dagger\hat{b}$. В некоторых случаях значение E_0 не играет никакой роли, так что можно положить его равным нулю.

Значение остальных эрмитовых переменных $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$ становится яснее, если рассмотреть атомный дипольный момент $\hat{\boldsymbol{\mu}}$. Для реального атома $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ можно определить в виде $\sum_i e\hat{\mathbf{r}}_i$, где $\hat{\mathbf{r}}_i$ — оператор радиус-вектора i-го атомного электрона, имеющего заряд e. Наш модельный двухуровневый атом не имеет физической структуры, однако, всегда можно представить $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, умножая слева и справа на единицу (15.1.3), в виде

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = (|2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 1|)\hat{\boldsymbol{\mu}}(|2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 1|) = \boldsymbol{\mu}_{22}\hat{b}^\dagger\hat{b} + \boldsymbol{\mu}_{11}\hat{b}\,\hat{b}^\dagger + \boldsymbol{\mu}_{12}\hat{b} + \boldsymbol{\mu}_{21}\hat{b}^\dagger,$$

где $\boldsymbol{\mu}_{ij}$ есть матричный элемент $\langle i|\hat{\boldsymbol{\mu}}|j\rangle$, $(i, j = 1, 2)$. В действительности, $\boldsymbol{\mu}_{11}$ и $\boldsymbol{\mu}_{22}$, которые являются средними значениями дипольного момента $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ в нижнем и верхнем состояниях, должны обращаться в нуль по соображениям симметрии в случае состояний с определенной четностью, ибо дипольный момент является нечетным. Следовательно, имеем

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}_{12}\hat{b} + \boldsymbol{\mu}_{12}^*\hat{b}^\dagger, \tag{15.1.17}$$

и $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ полностью недиагонален в базисе $|1\rangle$, $|2\rangle$. Если переход из состояния $|2\rangle$ в состояние $|1\rangle$ соответствует переходу $\Delta m = 0$ реального атома, то вектор $\boldsymbol{\mu}_{12}$ можно взять действительным. С другой стороны, для атомного перехода $\Delta m = \pm 1$, который может быть вызван циркулярно-поляризованным светом, вектор $\boldsymbol{\mu}_{12}$ всегда является комплексным.

Для иллюстрации этого рассмотрим в качестве примера два состояния атомного водорода. Если состояния $|1\rangle$, $|2\rangle$ отвечают, соответственно, s и p состояниям $|n = 1, l = 0, m = 0\rangle$, $|n = 2, l = 1, m = 0\rangle$ атомного водорода, то мы имеем дело с переходом $\Delta m = 0$. Если, как обычно, ось z является осью квантования, то, используя волновые функции атома водорода, находим [см. (Allen and Eberly, 1975)]

$$\boldsymbol{\mu}_{12} = \langle 1|\hat{\boldsymbol{\mu}}|2\rangle = \frac{128\sqrt{2}}{243}ea_0\mathbf{z}_1. \tag{15.1.18}$$

Здесь a_0 — радиус Бора, и $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_1$ — единичные векторы системы координат. Следовательно, $\boldsymbol{\mu}_{12}$ можно рассматривать как действительный вектор. С другой стороны, если верхнее состояние $|2\rangle$ соответствует состоянию $|n = 2, l = 1, m = 1\rangle$ атомного водорода, то мы имеем переход $\Delta m = \pm 1$ и находим, что

$$\langle 1|\hat{\boldsymbol{\mu}}|2\rangle = -\frac{128}{243}ea_0(\mathbf{x}_1 + i\mathbf{y}_1), \tag{15.1.19}$$

так что $\boldsymbol{\mu}_{12}$ обязательно является комплексным. В случае действительного $\boldsymbol{\mu}_{12}$ можно воспользоваться выражениями (15.1.17) и (15.1.8), чтобы записать

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}_{12}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) = 2\boldsymbol{\mu}_{12}\hat{R}_1, \tag{15.1.20}$$

а в случае комплексного $\boldsymbol{\mu}_{12}$ можно всегда переписать (15.1.17) в виде

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}_{12}(\hat{R}_1 - i\hat{R}_2) + \boldsymbol{\mu}_{12}^*(\hat{R}_1 + i\hat{R}_2) = 2\,\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\mu}_{12})\hat{R}_1 + 2\,\mathrm{Im}\,(\boldsymbol{\mu}_{12})\hat{R}_2. \tag{15.1.21}$$

Таким образом, операторы $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$ тесно связаны с дипольным моментом $\hat{\boldsymbol{\mu}}$.

Иногда нам понадобится скорость изменения дипольного момента $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, которая соответствует произведению заряда e на скорость электрона $\hat{\mathbf{v}}$ в реальном атоме. Из гейзенберговского уравнения движения

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\mu}}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{H}_\mathrm{A}]$$

с помощью формул (15.1.16), (15.1.17) и коммутационных соотношений (15.1.11) или (15.1.13), получаем уравнение

$$e\hat{\mathbf{v}} = \frac{d\hat{\boldsymbol{\mu}}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\boldsymbol{\mu}_{12}\hat{b} + \boldsymbol{\mu}_{12}^*\hat{b}^\dagger, \hbar\omega_0\hat{R}_3 + E_0] = -i\omega_0(\boldsymbol{\mu}_{12}\hat{b} - \boldsymbol{\mu}_{12}^*\hat{b}^\dagger). \tag{15.1.22}$$

Конечно, в картине взаимодействия операторы типа $\hat{b}$ и $\hat{b}^\dagger$ эволюционируют во времени по закону

$$\hat{b}(t) = \exp[i\hat{H}_\mathrm{A}(t - t_0)/\hbar]\hat{b}(t_0)\exp[-i\hat{H}_\mathrm{A}(t - t_0)/\hbar], \quad t \geqslant t_0.$$

Если воспользоваться (15.1.16) и операторной теоремой о разложении, а также правилами коммутации (15.1.13), то легко найдем, что

$$\hat{b}(t) = \hat{b}(t_0)\,\mathrm{e}^{-i\omega_0(t-t_0)}, \quad \hat{b}^\dagger(t) = \hat{b}^\dagger(t_0)\,\mathrm{e}^{i\omega_0(t-t_0)}, \tag{15.1.23}$$

так что

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = 2\,\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\mu}_{12})\hat{R}_1(t) + 2\,\mathrm{Im}\,(\boldsymbol{\mu}_{12})\hat{R}_2(t) = \boldsymbol{\mu}_{12}\hat{b}(t_0)\,\mathrm{e}^{-i\omega_0(t-t_0)} + \boldsymbol{\mu}_{12}^*\hat{b}^\dagger(t_0)\,\mathrm{e}^{i\omega_0(t-t_0)}. \tag{15.1.24}$$

15.2. Блоховское представление

Произвольное состояние $|\psi\rangle$ двухуровневого атома можно всегда записать в виде линейной комбинации

$$|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle, \tag{15.2.1}$$

где $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. В более общем случае, когда состояние не обязательно является чистым, а должно описываться статистически, его можно представить атомным оператором плотности $\hat{\rho}^{(\mathrm{A})}$

$$\hat{\rho}^{(\mathrm{A})} = \rho_{11}|1\rangle\langle 1| + \rho_{22}|2\rangle\langle 2| + \rho_{12}|1\rangle\langle 2| + \rho_{21}|2\rangle\langle 1|,$$

где ρ_{ij} есть среднее по ансамблю

$$\rho_{ij} = \langle c_i c_j^*\rangle, \quad i, j = 1, 2. \tag{15.2.2}$$

Следовательно, $\hat{\rho}^{(\mathrm{A})}$ представляется через двумерную эрмитовую ковариантную матрицу. Однако существует простое геометрическое представление состояния атома с помощью действительного трехмерного вектора $\mathbf{r}$ с составляющими r_1, r_2, r_3. Оно называется *блоховским представлением* состояния атома (Bloch, 1946) и является аналогом представления состояния поляризации светового пучка с помощью вектора Стокса (см. гл. 6). Соответствие между представлениями через матрицу плотности и через вектор Блоха отражает хорошо известное свойство симметрии, часто встречаемое в физике, а именно, соответствие

между специальной унитарной группой SU2 и действительной ортогональной группой O3. Составляющие блоховского вектора r, представляющего состояние в картине Шредингера, определяются выражениями

$$r_1 = 2\,\mathrm{Re}\,(\rho_{12}), \quad r_2 = 2\,\mathrm{Im}\,(\rho_{12}), \quad r_3 = \rho_{22} - \rho_{11}. \tag{15.2.3}$$

Эти три составляющие иногда дополняются четвертой, задаваемой в виде

$$r_0 = \rho_{22} + \rho_{11} = 1. \tag{15.2.4}$$

Чистое невозбужденное состояние $|1\rangle$ имеет единичный блоховский вектор $(0,0,-1)$, указывающий точно вниз, тогда как чистое возбужденное состояние $|2\rangle$ имеет единичный блоховский вектор $(0,0,1)$, указывающий точно вверх. Промежуточные состояния имеют блоховские векторы, указывающие в различных направлениях, и любое состояние, которое является равной смесью верхнего и нижнего состояний ($\rho_{22} = \rho_{11}$), имеет горизонтальный блоховский вектор (см. рис. 15.2).

В общем случае нетрудно показать, что для любого смешанного или нечистого состояния длина блоховского вектора меньше единицы. Из (15.2.3) следует, что

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 4|\rho_{12}|^2 + (\rho_{22} - \rho_{11})^2 = \\ = 1 - 4(\rho_{22}\rho_{11} - |\rho_{12}|^2). \tag{15.2.5}$$

Согласно неравенству Шварца имеем

$$\rho_{22}\rho_{11} - |\rho_{12}|^2 = \langle|c_2|^2\rangle\langle|c_1|^2\rangle - |\langle c_1 c_2^*\rangle|^2 \geqslant 0, \tag{15.2.6}$$

где знак равенства имеет место только в том случае, когда ансамбль вырождается в единственную реализацию, т.е. в случае чистого состояния. Следовательно,

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \leqslant 1, \tag{15.2.7}$$

где равенство справедливо только для чистого состояния. Смесь верхнего и нижнего состояний со случайными фазами и равными весами соответствует нулевому вектору Блоха.

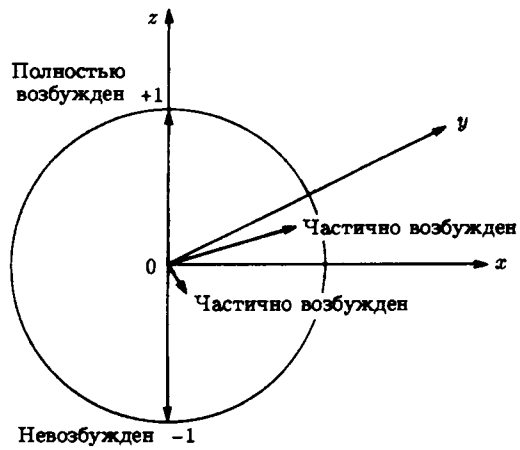


Рис. 15.2. Представление состояния двухуровневого атома вектором Блоха. Длина вектора может изменяться от нуля до единицы, но всегда равна единице для чистого квантового состоянии

Мы уже видели, что расширенное множество спиновых операторов $\hat{R}_0$, $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$, $\hat{R}_3$ образует полное множество для представления произвольного оператора, действующего в двумерном гильбертовом пространстве атомных состояний. Из (15.1.10) следует, что оператор плотности $\hat{\rho}^{(\mathrm{A})}$ можно представить в виде

$$\hat{\rho}^{(\mathrm{A})} = \sum_{\alpha=0}^{3} g_\alpha \hat{R}_\alpha,$$

где $\hat{R}_\alpha$ — не зависящие от времени спиновые операторы, и зависимость от времени оператора $\hat{\rho}^{(\mathrm{A})}$ определяется коэффициентами g_α. Сравнивая матричные элементы $\langle i|\hat{\rho}^{(\mathrm{A})}|j\rangle$ $(i,j = 1,2)$ из обеих частей данного выражения и используя (15.2.3) и (15.2.4), легко находим, что $g_\alpha = r_\alpha$, так что

$$\hat{\rho}^{(\mathrm{A})} = \sum_{\alpha=0}^{3} r_\alpha \hat{R}_\alpha. \tag{15.2.8}$$

Таким образом, составляющие вектора Блоха являются коэффициентами в разложении оператора плотности в картине Шредингера по спиновым операторам.

Иногда блоховский вектор удобнее описывать сферическими координатами (r,θ,ϕ), а не прямоугольными (r_1,r_2,r_3). Из (15.2.5) имеем

$$r = [1 - 4(\rho_{22}\rho_{11} - |\rho_{12}|^2)]^{1/2}. \tag{15.2.9}$$

Кроме того, из (15.2.3) и (15.2.4) следует, что

$$\begin{aligned}\rho_{22} &= \frac{1}{2}(1+r_3) = \frac{1}{2}(1+r\cos\theta),\\ \rho_{11} &= \frac{1}{2}(1-r_3) = \frac{1}{2}(1-r\cos\theta),\\ \rho_{12} &= \frac{1}{2}(r_1+ir_2) = \frac{1}{2}r\sin\theta\,\mathrm{e}^{i\phi},\end{aligned} \tag{15.2.10}$$

откуда

$$\cos\theta = (\rho_{22}-\rho_{11})/r, \quad \operatorname{tg}\phi = \frac{\operatorname{Im}(\rho_{12})}{\operatorname{Re}(\rho_{12})}. \tag{15.2.11}$$

В частном случае чистого квантового состояния $r=1$, и соотношения упрощаются. Тогда $|c_2| = \sqrt{\rho_{22}} = \cos\frac{1}{2}\theta$, $|c_1| = \sqrt{\rho_{11}} = \sin\frac{1}{2}\theta$, $\arg c_1 - \arg c_2 = \phi$, и, согласно (15.2.1), можно представить произвольное чистое атомное состояние $|\psi\rangle$ в момент времени $t=0$ следующим образом:

$$|\psi\rangle = \sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathrm{e}^{i\phi/2}|1\rangle + \cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathrm{e}^{-i\phi/2}|2\rangle, \tag{15.2.12}$$

с точностью до фазового множителя.

В картине Шредингера верхнее и нижнее состояния $|2\rangle$ и $|1\rangle$ эволюционируют во времени посредством фазовых множителей $\exp[-i(E_0/\hbar+\frac{1}{2}\omega_0)t]$ и $\exp[-i(E_0/\hbar-\frac{1}{2}\omega_0)t]$, соответственно. Вставляя эти множители в (15.2.12), получаем для состояния $|\psi(t)\rangle$ в момент t следующий результат

$$|\psi(t)\rangle = \sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathrm{e}^{i(\phi+\omega_0 t)/2}|1\rangle + \cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathrm{e}^{-i(\phi+\omega_0 t)/2}|2\rangle, \tag{15.2.13}$$

опять с точностью до фазового множителя. Следовательно, азимутальный угол $\phi+\omega_0 t$ линейно увеличивается со временем, а блоховский вектор $\mathbf{r}(t)$ в картинах Шредингера непрерывно вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω_0.

15.2.1. Средние значения спиновых операторов

Мы уже видели в (15.2.8), что имеется связь между спиновыми операторами $\hat{R}_0$, $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$, $\hat{R}_3$ и четырьмя составляющими r_0, r_1, r_2, r_3 блоховского представления. Теперь установим еще одно соотношение между ними, вычисляя средние значения R-операторов в произвольном квантовом состоянии, которое описывается оператором плотности $\hat{\rho}^{(\mathrm{A})}$:

$$\langle\hat{R}_\alpha\rangle = \operatorname{Tr}\hat{\rho}^{(\mathrm{A})}\hat{R}_\alpha, \quad \alpha = 0,1,2,3.$$

Используя выражение (15.2.8) для оператора плотности в картине Шредингера, получаем

$$\langle\hat{R}_\alpha\rangle = \sum_{\beta=0}^{3}\operatorname{Tr} r_\beta\hat{R}_\beta\hat{R}_\alpha.$$

Теперь учтем, что произведение двух различных R-операторов есть другой оператор $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$ или $\hat{R}_3$, каждый из которых имеет след равный нулю. Следовательно, единственный вклад в сумму дает член с $\beta=\alpha$, и с помощью (15.1.12) находим, что

$$\langle\hat{R}_\alpha\rangle = \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{4}r_\alpha\hat{1}\right) = \frac{1}{2}r_\alpha, \quad \alpha = 0,1,2,3, \tag{15.2.14}$$

так как след единичного оператора равен 2 в случае двумерного гильбертового пространства. Элементы блоховского представления, поэтому, могут быть определены через средние значения спиновых операторов.

Здесь следует соблюдать некоторую осторожность, поскольку соотношения (15.2.3) и (15.2.14) не полностью эквивалентны. Среднее значение $\langle\hat{R}_\alpha\rangle$ не зависит от картины, в которой оно вычислено, тогда как матрица плотности ρ_{ij} зависит от нее. Два определения (15.2.3) и (15.2.14) совпадают только в картине

Шредингера, поскольку представление квантового состояния должно быть фиксированным вектором в картине Гейзенберга и вращающимся вектором в картине Шредингера. Вследствие этого предпочтительнее рассматривать (15.2.14) как более фундаментальное определение, поскольку оно связывает $\mathbf{r}$ со средними значениями физических наблюдаемых. Блоховский вектор в общем случае зависит тогда от времени и, строго говоря, представляет состояние только в картине Шредингера.

Используя (15.1.16), получаем теперь следующее выражение для среднего значения энергии

$$\langle \hat{H}_{\mathrm{A}} \rangle = E_0 + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 r_3, \tag{15.2.15}$$

а учитывая (15.1.21) находим, что среднее значение дипольного момента задается выражением

$$\langle \hat{\boldsymbol{\mu}} \rangle = \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\mu}_{12}) r_1 + \mathrm{Im}\,(\boldsymbol{\mu}_{12}) r_2. \tag{15.2.16}$$

Таким образом, z-компонента блоховского вектора есть мера энергии атома, тогда как x- и y- компоненты связаны с дипольным моментом.

Если атом не имеет собственного дипольного момента, то среднее значение оператора $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ обращается в нуль как в нижнем, так и в верхнем атомном состоянии, поскольку $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ не имеет точно определенного значения в этих состояниях и флуктуирует. Из (15.1.17) и (15.1.21) легко находим, что

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}^2 = |\boldsymbol{\mu}_{12}|^2 \hat{1}, \tag{15.2.17}$$

так что дисперсия дипольного момента

$$\langle 1|(\Delta\hat{\boldsymbol{\mu}})^2|1\rangle = |\boldsymbol{\mu}_{12}|^2 = \langle 2|(\Delta\hat{\boldsymbol{\mu}})^2|2\rangle \tag{15.2.18}$$

имеет наибольшее значение в этих состояниях. Вследствие флуктуаций $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ атом может взаимодействовать с электромагнитным полем даже тогда, когда находится в квантовом состоянии $|1\rangle$ или $|2\rangle$, для которого $\langle \hat{\boldsymbol{\mu}} \rangle = 0$. Обратимся теперь к обсуждению взаимодействий атома с электромагнитным полем.

15.3. Взаимодействие атома с классическим полем

Предположим, что атом неподвижен и находится в электромагнитном поле, которое описывается классически, например, напряженностью своего электрического поля $\mathbf{E}(t)$. Если рассматривать атом как точечный электрический диполь с моментом $\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)$, то гамильтониан взаимодействия $\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)$ можно записать, исходя из обычного выражения для потенциальной энергии диполя во внешнем поле, и из (15.1.21) имеем

$$\hat{H}_{\mathrm{I}}(t) = -\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)\cdot\mathbf{E}(t) = -2[\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\mu}_{12})\hat{R}_1 + \mathrm{Im}\,(\boldsymbol{\mu}_{12})\hat{R}_2]\cdot\mathbf{E}(t). \tag{15.3.1}$$

С другой стороны, в реальном атоме основным является взаимодействие между электронами атома и полем, которое определяется выражением (14.1.17). Если пренебречь членом $e^2\mathbf{A}^2/2m$ по причинам, отмеченным в разд. 14.1, и отождествить канонический импульс электрона $\hat{\mathbf{p}}$ с $m\dot{\hat{\boldsymbol{\mu}}}/e$, то с помощью (15.1.22) получим

$$\hat{H}_{\mathrm{I}}(t) = -\dot{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t)\cdot\mathbf{A}(t) = i\omega_0[\boldsymbol{\mu}_{12}\hat{b}(t) - \boldsymbol{\mu}_{12}^*\hat{b}^\dagger(t)]\cdot\mathbf{A}(t). \tag{15.3.2}$$

Вопрос о том, какое из двух выражений для энергии взаимодействия является более подходящим в рассматриваемой ситуации неоднократно являлся предметом обсуждения (см. разд. 14.1). Оба выражения успешно использовались и в большинстве случаев они приводят к одинаковым результатам. Полная энергия $\hat{H}$ атома в поле представляет собой, конечно, сумму $\hat{H} = \hat{H}_{\mathrm{A}} + \hat{H}_{\mathrm{I}}$, где оператор $\hat{H}_{\mathrm{A}}$ диагонален в базисе $|1\rangle$, $|2\rangle$, тогда как $\hat{H}_{\mathrm{I}}$ полностью недиагонален.

Временна́я эволюция атомного оператора плотности $\hat{\rho}^{(\mathrm{A})}(t)$ в картине Шредингера определяется уравнением Шредингера

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_{\mathrm{A}} + \hat{H}_{\mathrm{I}}, \hat{\rho}^{(\mathrm{A})}(t)]. \tag{15.3.3}$$

15.3.1. Уравнения Блоха

Записывая последнее уравнение в матричном виде, вставляя единичный оператор (15.1.3) между $\hat{H}$ и $\hat{\rho}^{(\mathrm{A})}(t)$ и используя вышеупомянутые свойства операторов $\hat{H}_{\mathrm{A}}$ и $\hat{H}_{\mathrm{I}}$, получаем следующие уравнения

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{11} &= \frac{1}{i\hbar}[\langle 1|\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)|2\rangle\rho_{21} - \text{к.с.}],\\
\dot{\rho}_{22} &= -\frac{1}{i\hbar}[\langle 1|\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)|2\rangle\rho_{21} - \text{к.с.}],\\
\dot{\rho}_{12} &= \frac{1}{i\hbar}[-\hbar\omega_0\rho_{12} + \langle 1|\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)|2\rangle(\rho_{22} - \rho_{11})],\\
\dot{\rho}_{21} &= \frac{1}{i\hbar}[\hbar\omega_0\rho_{21} + \langle 2|\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)|1\rangle(\rho_{11} - \rho_{22})].
\end{aligned} \tag{15.3.4}$$

Поскольку эти уравнения движения записаны в картине Шредингера, можно воспользоваться выражением (15.2.3) для определения составляющих вектора Блоха $\mathbf{r}$. Тогда приходим к следующим уравнениям движения для трех составляющих r_1, r_2, r_3

$$\dot{r}_1 = \frac{1}{\hbar}2\,\mathrm{Im}\,[\langle 1|\hat{H}_{\mathrm{I}}|2\rangle]r_3 - \omega_0 r_2, \tag{15.3.5а}$$

$$\dot{r}_2 = -\frac{1}{\hbar}2\,\mathrm{Re}\,[\langle 1|\hat{H}_{\mathrm{I}}|2\rangle]r_3 + \omega_0 r_1, \tag{15.3.5б}$$

$$\dot{r}_3 = -\frac{2}{\hbar}\,\mathrm{Im}\,[\langle 1|\hat{H}_{\mathrm{I}}|2\rangle]r_1 + \frac{2}{\hbar}\,\mathrm{Re}\,[\langle 1|\hat{H}_{\mathrm{I}}|2\rangle]r_2. \tag{15.3.5в}$$

Последние иногда называют *уравнениями Блоха*, описывающими временну́ю эволюцию атома при наличии взаимодействия $\hat{H}_{\mathrm{I}}$. Впервые их использовал Блох (Bloch, 1946), решая задачи ядерного магнитного резонанса. Отметим, что в отсутствие внешнего поля составляющая r_3 остается постоянной. Если умножить первое уравнение на r_1, второе на r_2, а третье на r_3 и сложить полученные выражения, то нетрудно найти, что

$$\frac{d}{dt}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = 0. \tag{15.3.6}$$

Таким образом, длина вектора Блоха остается постоянной в присутствии классического поля. Это означает, в частности, что если атом первоначально находился в чистом квантовом состоянии, то он будет оставаться в чистом состоянии, а если атом первоначально находился в смешанном квантовом состоянии, то он будет оставаться в смешанном состоянии. Во многих случаях удобно и достаточно предполагать, что атом первоначально находился в чистом состоянии.

Уравнения (15.3.5) имеют интересную геометрическую интерпретацию, которая была найдена Фейнманом, Верноном и Хелварсом (Feyman, Vernon and Hellwarth, 1957). Введем новый вектор $\mathbf{Q}(t)$ со следующими составляющими

$$Q_1 \equiv \frac{2}{\hbar}\,\mathrm{Re}\,[\langle 1|\hat{H}_{\mathrm{I}}|2\rangle], \quad Q_2 \equiv \frac{2}{\hbar}\,\mathrm{Im}\,[\langle 1|\hat{H}_{\mathrm{I}}|2\rangle], \quad Q_3 \equiv \omega_0. \tag{15.3.7}$$

Тогда три уравнения (15.3.5) эквивалентны векторному уравнению

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \mathbf{Q} \times \mathbf{r}, \tag{15.3.8}$$

согласно которому движение вектора Блоха представляет собой прецессию вокруг вектора $\mathbf{Q}$ со скоростью, определяемой длиной вектора $\mathbf{Q}$. В общем случае, конечно, когда $\mathbf{Q}$ сам изменяется со временем, данная прецессия может быть очень сложной.

Если воспользоваться выражениями (15.3.1) и (15.3.2), то можно точно вычислить матричный элемент $\langle 1|\hat{H}_{\mathrm{I}}|2\rangle$. Из (15.3.1) получаем следующий результат:

$$\langle 1|\hat{H}_{\mathrm{I}}|2\rangle = -\boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \mathbf{E}(t).$$

Предположим, что осцилляции электрического поля центрированы на частоте ω_1, близкой к ω_0, так что можно записать

$$\mathbf{E}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}\mathscr{E}(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega_1 t} + \text{к.с.} = 2|\mathscr{E}(t)|\{\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\varepsilon})\cos[\omega_1 t - \phi(t)] + \mathrm{Im}\,(\boldsymbol{\varepsilon})\sin[\omega_1 t - \phi(t)]\}, \tag{15.3.9}$$

где $\mathscr{E}(t) = |\mathscr{E}(t)|\,\mathrm{e}^{i\phi(t)}$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда, а $\boldsymbol{\varepsilon}$ — единичный вектор поляризации. Тогда

$$\langle 1|\hat{H}_I|2\rangle = -|\mathscr{E}(t)|\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot[\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-i[\omega_1 t-\phi(t)]} + \text{к.с.}]. \tag{15.3.10}$$

Это выражение и нужно подставлять в уравнения Блоха (15.3.5).

В некоторых случаях уравнения Блоха упрощаются. Например, если атомный переход есть переход типа $\Delta m = \pm 1$, так что можно считать, что $\boldsymbol{\mu}_{12} = |\boldsymbol{\mu}_{12}|(\mathbf{x}_1 + i\mathbf{y}_1)/\sqrt{2}$ ($\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$ — единичные векторы), и если внешнее поле есть циркулярно поляризованная волна, распространяющаяся в направлении оси z, так что $\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{x}_1 + i\mathbf{y}_1)/\sqrt{2}$, то $\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ и $\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^* = |\boldsymbol{\mu}_{12}|$. Тогда уравнения (15.3.5) сводятся к следующим

$$\begin{aligned}
\dot{r}_1 &= -\Omega(t)r_3\sin[\omega_1 t - \phi(t)] - \omega_0 r_2,\\
\dot{r}_2 &= \Omega(t)r_3\cos[\omega_1 t - \phi(t)] + \omega_0 r_1,\\
\dot{r}_3 &= \Omega(t)r_1\sin[\omega_1 t - \phi(t)] - \Omega(t)r_2\cos[\omega_1 t - \phi(t)],
\end{aligned} \tag{15.3.11}$$

где введено обозначение

$$\Omega(t) \equiv 2\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*|\mathscr{E}(t)|/\hbar. \tag{15.3.12}$$

Параметр Ω называется *частотой Раби* и является мерой амплитуды зависящего от времени внешнего поля. Составляющие вектора $\mathbf{Q}$, задаваемые выражением (15.3.7), принимают, тогда, вид

$$Q_1(t) = -\Omega(t)\cos[\omega_1 t - \phi(t)], \quad Q_2(t) = -\Omega(t)\sin[\omega_1 t - \phi(t)], \quad Q_3(t) = \omega_0. \tag{15.3.13}$$

С другой стороны, в случае, когда атомный переход есть переход типа $\Delta m = 0$, так что $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{12}$ можно считать действительным вектором, а падающий свет линейно поляризован, так что вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ также действителен, уравнения (15.3.5) принимают вид

$$\begin{aligned}
\dot{r}_1 &= -\omega_0 r_2,\\
\dot{r}_2 &= 2\Omega r_3\cos[\omega_1 t - \phi(t)] + \omega_0 r_1,\\
\dot{r}_3 &= -2\Omega r_2\cos[\omega_1 t - \phi(t)].
\end{aligned} \tag{15.3.14}$$

Соответствующий вектор $\mathbf{Q}$, возникающий при записи этих уравнений движения в векторном виде (15.3.8), задается выражениями

$$Q_1(t) = -2\Omega(t)\cos[\omega_1 t - \phi(t)], \quad Q_2(t) = 0, \quad Q_3(t) = \omega_0. \tag{15.3.15}$$

Хотя, на первый взгляд, уравнения (15.3.14) и (15.3.15) сильно отличаются от (15.3.11) и (15.3.13), соответственно, в действительности они отличаются только вкладами некоторых антирезонансных членов[1]. Вектор $\mathbf{Q}$, задаваемый выражением (15.3.15), можно рассматривать как сумму двух векторов $\mathbf{Q}$, один из которых задается, как и прежде, формулой (15.3.13), тогда как второй, или вспомогательный, вектор $\mathbf{Q}$ имеет составляющие $-\Omega(t)\cos[\omega_1 t - \phi(t)]$, $+\Omega(t)\sin[\omega_1 t - \phi(t)]$ и 0. Последний есть вектор, вращающийся вокруг оси z с частотой $\omega_1 - \dot{\phi}(t)$, тогда как вектор Блоха вращается в противоположном направлении вокруг оси z с частотой ω_0. Относительно вектора $\mathbf{r}$ вспомогательный вектор $\mathbf{Q}$ вращается с частотой $\omega_1 + \omega_0 - \dot{\phi}(t)$, поэтому при интегрировании уравнений движения на некотором измеримом интервале времени влияние этого вектора оказывается очень малым. Таким образом, в хорошем приближении можно пренебречь этим вспомогательным вектором $\mathbf{Q}$, в результате чего $\mathbf{Q}$ опять определяется выражением (15.3.13), а уравнения движения опять принимают вид (15.3.11). Описанная процедура называется *приближением вращающейся волны*. Данное приближение позволяет использовать одинаковую систему уравнений в обоих случаях. Естественно, в первом случае ($\Delta m = \pm 1$) уравнения являются точными.

[1] Хорошее обсуждение этого вопроса имеется в разд. 2.4 книги (Allen and Eberly, 1975).

15.3.2. Уравнения Блоха во вращающейся системе координат

Вектор Блоха, описываемый уравнениями движения (15.3.11), вращается на оптической частоте вокруг оси z. Поэтому иногда удобнее описывать это движение во вращающейся системе координат, в которой вектор $\mathbf{r}$ движется намного медленнее. Из (15.3.11) видно, что данная система координат должна вращаться с частотой атомного перехода ω_0. Однако поскольку в реальной среде частота перехода может меняться от атома к атому, и поскольку желательно рассматривать временно́е развитие различных атомов в одной системе координат, полагают обычно, что частота вращения системы координат равна частоте ω_1 приложенного поля. Координаты r_1', r_2', r_3' вектора Блоха во вращающейся системе координат связаны с координатами r_1, r_2, r_3 в неподвижной системе координат преобразованием

$$\mathbf{r}' = \boldsymbol{\Theta}\mathbf{r}, \tag{15.3.16}$$

где $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ — 3×1-матрицы-столбцы координат r_1, r_2, r_3 и r_1', r_2', r_3', соответственно, а $\boldsymbol{\Theta}$ — ортогональная 3×3-матрица вращения

$$\boldsymbol{\Theta} \equiv \begin{bmatrix} \cos\omega_1 t & \sin\omega_1 t & 0 \\ -\sin\omega_1 t & \cos\omega_1 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{15.3.17а}$$

Это преобразование не меняет z-составляющую r_3 и связывает r_1, r_2 и r_1', r_2', так что

$$r_1' + ir_2' = (r_1 + ir_2)\,\mathrm{e}^{-i\omega_1 t}. \tag{15.3.17б}$$

Для того, чтобы преобразовать уравнения Блоха (15.3.11) во вращающуюся систему координат, запишем их в матричной форме

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}\mathbf{r},$$

где $\mathbf{C}$ есть 3×3-матрица коэффициентов, и воспользуемся выражением (15.3.16). В результате получим

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{r} + \boldsymbol{\Theta}\dot{\mathbf{r}} = \dot{\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{\Theta}^{-1}\boldsymbol{\Theta}\mathbf{r} + \boldsymbol{\Theta}\mathbf{C}\boldsymbol{\Theta}^{-1}\boldsymbol{\Theta}\mathbf{r} = (\dot{\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{\Theta}^{-1} + \boldsymbol{\Theta}\mathbf{C}\boldsymbol{\Theta}^{-1})\mathbf{r}'. \tag{15.3.18}$$

Подстановка явных выражений для $\boldsymbol{\Theta}$ и $\mathbf{C}$ из (15.3.11) и (15.3.17а) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{r}_1' &= (\omega_1 - \omega_0)r_2' + \Omega\sin\phi r_3', \\ \dot{r}_2' &= (\omega_0 - \omega_1)r_1' + \Omega\cos\phi r_3', \\ \dot{r}_3' &= -\Omega\sin\phi r_1' + \Omega\cos\phi r_2'. \end{aligned} \tag{15.3.19}$$

Это и есть уравнения Блоха во вращающейся системе координат. Их опять можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{Q}' \times \mathbf{r}', \tag{15.3.20}$$

где вектор $\mathbf{Q}'$ во вращающейся системе координат имеет составляющие $-\Omega\cos\phi$, $\Omega\sin\phi$, $\omega_0 - \omega_1$. Следовательно, вектор Блоха $\mathbf{r}'$ прецессирует вокруг вектора $\mathbf{Q}'$ со скоростью, определяемой величиной $[\Omega^2 + (\omega_1 - \omega_0)^2]^{1/2}$ и ориентацией вектора $\mathbf{Q}'$. Однако если расстройка $|\omega_0 - \omega_1|$ существенно больше частоты Раби Ω и скорости изменения $\phi(t)$, то вектор $\mathbf{Q}'$ указывает приблизительно вверх или вниз, и его движение является относительно простым во вращающейся системе координат. Если вектор Блоха $\mathbf{r}'$ первоначально был направлен почти параллельно вектору $\mathbf{Q}'$, то $\mathbf{r}'$ будет прецессировать вокруг $\mathbf{Q}'$ по конусу с малым углом раствора, и этот конус будет следовать за медленными изменениями вектора $\mathbf{Q}'$. Тогда говорят, что вектор Блоха следует адиабатически за вектором $\mathbf{Q}'$. Это явление *адиабатического прохождения* можно использовать для приготовления атома в определенном квантовом состоянии (Treacy and DeMaria, 1969; Grischkowsky, 1970; Grischkowsky, Courtens and Armstrong, 1973; Loy, 1974). Например, если частота возбуждающего света изменяется, так что $\omega_1 - \omega_0$ меняется от больших положительных значений до больших отрицательных значений, то вектор $\mathbf{Q}'$ поворачивается почти на 180°, так же, как и конус прецессии, и атом, находившийся в основном состоянии, может быть переведен в состояние, близкое к возбужденному. Важно отметить, что фактическая величина $|\omega_0 - \omega_1|$ расстройки не очень важна. Таким образом, данный метод можно применять для неоднородно уширенных сред типа газа, в которых различные атомы, движущиеся с различными скоростями, вследствие доплеровских сдвигов имеют различные собственные частоты в лабораторной системе координат.

15.3.3. Задача Раби

В частном случае, когда возбуждающее поле строго синусоидально, так что комплексная амплитуда $\mathscr{E}$ является константой и фаза ϕ может быть сделана равной нулю подходящим выбором начала отсчета времени, уравнения упрощаются. Задача о том, как атом реагирует на воздействие такого поля была впервые решена Раби (Rabi, 1937) при изучении поведения частицы со спином $\frac{1}{2}$ в магнитном поле. Если атом находился в начальный момент времени $t = 0$ в основном состоянии $|1\rangle$, так что $r_3(0) = -1$, и $r_1(0) = 0 = r_2(0)$, то решение уравнений Блоха во вращающейся системе координат имеет вид

$$
\begin{aligned}
r'_1(t) &= \frac{(\omega_0-\omega_1)\Omega}{\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2}\{1-\cos[\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2]^{1/2}t\},\\
r'_2(t) &= \frac{-\Omega}{[\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2]^{1/2}}\sin[\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2]^{1/2}t,\\
r'_3(t) &= -\frac{(\omega_0-\omega_1)^2+\Omega^2\cos[\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2]^{1/2}t}{\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2}.
\end{aligned}
\tag{15.3.21}
$$

Это решение соответствует довольно сложному вращению. Возможно, наиболее интересный аспект решения есть колебательное поведение атомной энергии, измеряемой величиной r'_3, которая осциллирует вокруг среднего значения $-(\omega_0-\omega_1)^2/[\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2]$ с частотой $[\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2]^{1/2}$ и амплитудой $\Omega^2/[\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2]$. Это явление называется *осцилляциями Раби* или *оптической нутацией*. Если возбуждающее поле достаточно сильное, или расстройка $|\omega_0-\omega_1|$ достаточно мала, то r'_3 осциллирует приблизительно между значениями ±1 и почти на частоте Ω. Таким образом, действие приложенного поля состоит в периодическом возбуждении атома и снятии этого возбуждения. В рамках полностью квантово-механического рассмотрения той же задачи оказывается, что $r'_3(t)$ постепенно уменьшается со временем вследствие спонтанного излучения атома, хотя осцилляции Раби продолжаются. Это явление наблюдалось экспериментально (Walther, 1977; Dagenais and Mandel, 1978). На рис. 15.3 показана зависимость от времени наблюдаемой флуоресценции атома, находящегося в когерентном возбуждающем поле при ненулевой расстройке. Осцилляции энергии или осцилляции Раби приводят к временно́й модуляции амплитуды атомной флуоресценции. В результате в спектре атомной флуоресценции появляются боковые полосы на частотах $\omega_1 \pm [\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2]^{1/2}$. В этом можно убедиться непосредственно, если воспользоваться уравнениями (15.3.21) для вычисления среднего значения дипольного момента $\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)\rangle$. Из (15.2.16) следует, что

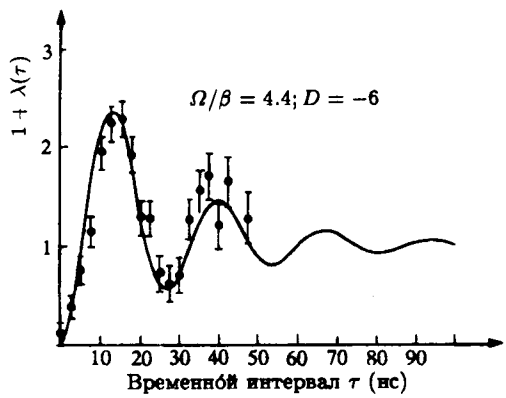


Рис. 15.3. Наблюдаемая временна́я зависимость флуоресцентного света, испускаемого атомом в когерентном возбуждающем поле с частотой Раби $\Omega = 2.2$ ширины линии при расстройке $\omega_0 - \omega_1 = 3$ ширины линии. Сплошная линия — результат теоретического расчета. (Dagenais and Mandel, 1978)

$$
\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)\rangle = \operatorname{Re}(\boldsymbol{\mu}_{12})r_1 + \operatorname{Im}(\boldsymbol{\mu}_{12})r_2,
$$

и, считая $\boldsymbol{\mu}_{12}$ действительной величиной, получаем с помощью (15.3.17) и (15.3.21) соотношение

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)\rangle = \boldsymbol{\mu}_{12}[\mathbf{r}'_1\cos\omega_1 t - \mathbf{r}'_2\sin\omega_1 t] &= \frac{\boldsymbol{\mu}_{12}\Omega}{\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2}\times\\
\times\Bigg[(\omega_0-\omega_1)\cos\omega_1 t &+ \frac{1}{2}\{[\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2]^{1/2}-(\omega_0-\omega_1)\}\cos\{\omega_1-[\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2]^{1/2}\}t -\\
&-\frac{1}{2}\{[\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2]^{1/2}+(\omega_0-\omega_1)\}\cos\{\omega_1+[\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2]^{1/2}\}t\Bigg].
\end{aligned}
\tag{15.3.22}
$$

Из этого выражения видно, что дипольный момент осциллирует на трех частотах ω_1, $\omega_1\pm[\Omega^2+(\omega_0-\omega_1)^2]^{1/2}$. На рис. 15.4 показан спектр, наблюдавшийся в экспериментах по резонансной флуоресценции (Schuda,

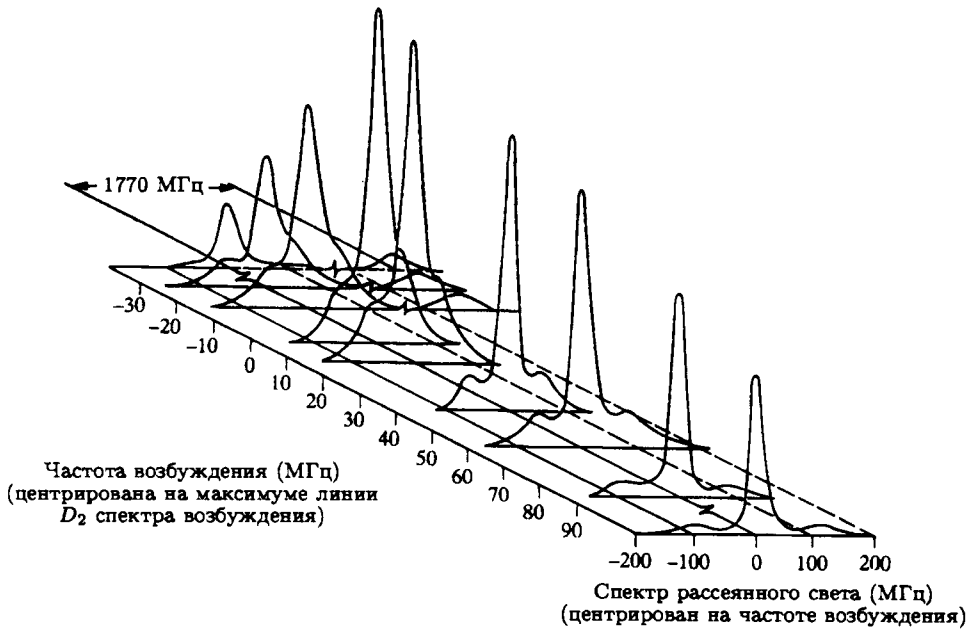


Рис. 15.4. Спектр флуоресцентного света, испускаемого атомом в когерентном возбуждающем поле при различных частотах возбуждения (Stroud and Herscher, 1974)

Stroud and Herscher, 1974; Wu, Grove and Ezekiel, 1975; Hartig, Rasmussen, Schieder and Walther, 1976), который имеет три, хотя и не ярко выраженных, максимума. Мы вернемся к обсуждению этой темы в разд. 15.6.

Иногда, в уравнения Блоха (15.3.11) и (15.3.19) добавляют феноменологические релаксационные члены, которые вводятся искусственно для объяснения наблюдаемых эффектов затухания. Затухающие осцилляторные решения модифицированных уравнений были впервые получены Торри (Torrey, 1949). Мы не будем здесь следовать этому феноменологическому подходу, а лучше вернемся к этой проблеме в рамках полностью квантово-механического рассмотрения явления резонансной флуоресценции. Однако даже когда затухающие эффекты имеют место, уравнения (15.3.11) или эквивалентные им уравнения (15.3.19), записанные во вращающейся системе координат, удовлетворительно описывают поведение атома на временны́х интервалах, меньших времени затухания.

15.3.4. Отклик атома на воздействие лазерного импульса[1]

В предыдущем параграфе было рассмотрено, каким образом двухуровневый атом реагирует на воздействие постоянного монохроматичного возбуждающего поля. Выражения (15.3.21) можно также использовать и в случае, когда атом подвергается воздействию прямоугольного возбуждающего импульса, рассчитывая эволюцию в течение действия последнего. Однако, общее решение для произвольного возбуждающего поля намного сложнее. Упростим задачу, предполагая, что зависящая от времени фаза $\phi(t)$ в уравнениях (15.3.19) может быть положена равной нулю, и что частота возбуждающего поля ω_1 совпадает с частотой атомного перехода ω_0. Тогда уравнения Блоха (15.3.19) во вращающейся системе координат сводятся к следующим

$$\begin{aligned} \dot{r}'_1(t) &= 0, \\ \dot{r}'_2(t) &= \Omega r'_3, \\ \dot{r}'_3(t) &= -\Omega r'_2. \end{aligned} \tag{15.3.23}$$

[1] В качестве дополнительной литературы см. также книгу (*Набойкин, Самарцев, Зиновьев, Силаева, 1986) — *ред. пер.*

Первое из этих уравнений гарантирует, что вектор Блоха движется исключительно в плоскости y', z', и что $r'_1(t) = r'_1(-\infty)$. Предположим, что начальное квантовое состояние является чистым состоянием, так что вектор $\mathbf{r}'$ все время имеет длину, равную единице, и только вращается в плоскости y', z'. Пусть

$$r'_2(t) = [1 - r'^2_1(t)]^{1/2} \sin[\Theta(t) + K],$$

где $\Theta(t)$ есть новая переменная, а K — константа. Тогда,

$$r'_3(t) = [1 - r'^2_1(t)]^{1/2} \cos[\Theta(t) + K],$$

ибо для всех моментов времени должно выполняться соотношение $r'^2_1 + r'^2_2 + r'^2_3 = 1$. Подстановка этих выражений в уравнения Блоха (15.3.23) приводит к уравнению

$$\dot{\Theta}(t) = \Omega(t),$$

или

$$\Theta(t) = \int_{-\infty}^{t} \Omega(t')\, dt'. \tag{15.3.24}$$

Выражая K через начальные условия, получаем решение

$$\begin{aligned} r'_1(t) &= r'_1(-\infty), \\ r'_2(t) &= r'_2(-\infty)\cos\Theta(t) + r'_3(-\infty)\sin\Theta(t), \\ r'_3(t) &= -r'_2(-\infty)\sin\Theta(t) + r'_3(-\infty)\cos\Theta(t). \end{aligned} \tag{15.3.25}$$

где $r'_1(-\infty)$, $r'_2(-\infty)$, $r'_3(-\infty)$ — начальные составляющие вектора Блоха в момент времени $t \to -\infty$, когда, возбуждающее поле еще не было включено. Это решение описывает поворот вектора Блоха в плоскости y', z' вокруг оси x' на угол $\Theta(t)$, который иногда называют *углом наклона*, связанным с зависящим от времени оптическим полем. Если свет имеет вид импульса, амплитуда которого не равна нулю только на конечном интервале времени, то по окончании импульса вектор Блоха повернется на угол

$$A \equiv \Theta(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(t')\, dt'. \tag{15.3.26}$$

Угол A иногда называется *площадью* импульса, поскольку он пропорционален площади под огибающей импульса. Например, если $A = \pi$, и атом находился первоначально в основном состоянии $|1\rangle$, то в конце импульса он окажется в возбужденном состоянии $|2\rangle$. Такой световой импульс называется π-импульсом. Если площадь импульса $A = 2\pi$, то вектор Блоха совершит один полный оборот в плоскости y', z', и атом опять окажется в состоянии $|1\rangle$. Отметим, что поворот полностью определяется площадью A светового импульса, задаваемой интегралом (15.3.26), и не зависит от временно́й формы импульса.

15.3.5. 2π-импульс в форме гиперболического секанса

Если частота ω_1 возбуждающего света не совпадает с частотой атомного перехода ω_0, то ситуация существенно усложняется, и движение вектора Блоха не определяется теперь одной переменной $\Theta(t)$. Состояние, в которое атом, первоначально находившийся в основном состоянии $|1\rangle$, переходит по окончании действия импульса, в общем случае зависит как от формы импульса, так и от расстройки $\omega_0 - \omega_1$. Однако существует одна совершенно особая форма 2π-импульса, которая характеризуется тем, что переводит атом, находившийся в основном состоянии, опять в основное состояние, независимо от величины расстройки. Для того, чтобы определить форму такого импульса, сделаем одно правдоподобное предположение (Torrey, 1949). Как было видно из (15.3.23), в случае резонанса при $r'_1(-\infty) = 0 = r'_2(-\infty)$ и $r'_3(-\infty) = -1$, z'-составляющая вектора Блоха имеет вид

$$r'_3(t) = -\cos\Theta(t) = -1 + 2\sin^2[\tfrac{1}{2}\Theta(t)],$$

Она равна -1 при $t=-\infty$, затем возрастает до $+1$ и опять уменьшается до -1 по окончании действия 2π-импульса. Можно предположить, что нерезонансное возбуждение атома, начинающееся и заканчивающееся в основном состоянии, имеет цикл с несколько меньшей амплитудой

$$r_3' = -1 + 2B\sin^2(\tfrac{1}{2}\Theta), \tag{15.3.27}$$

где $B \leqslant 1$ и зависит от расстройки $\omega_0 - \omega_1$ таким образом, что $B=1$, когда $\omega_0 = \omega_1$. Если r_3' определяется выражением (15.3.27), то из последних двух уравнений (15.3.19) при $\phi = 0$ следует, что

$$r_2' = -\dot{r}_3'/\dot{\Theta} = -B\sin\Theta, \tag{15.3.28}$$

$$r_1' = \frac{1-B}{\omega_0-\omega_1}\dot{\Theta}. \tag{15.3.29}$$

Если подставить эти значения r_1', r_2', r_3' в первое уравнение (15.3.19), то найдем, что величина Θ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\ddot{\Theta} = \frac{B(\omega_0-\omega_1)^2}{1-B}\sin\Theta, \tag{15.3.30а}$$

которое эквивалентно уравнению

$$\dot{\Theta} = 2\left(\frac{B}{1-B}\right)^{1/2}(\omega_0-\omega_1)\sin(\tfrac{1}{2}\Theta), \tag{15.3.30б}$$

определяющему форму 2π-импульса. Коэффициент при $\sin\Theta$ в (15.3.30а) имеет размерность обратную квадрату времени и не должен зависеть от частоты. Если обозначить его через $1/T^2$, то получим для B выражение

$$B = \frac{1}{1+(\omega_0-\omega_1)^2T^2}, \tag{15.3.31}$$

которое удовлетворяет необходимому условию для B при любых значениях T. Уравнение (15.3.30б), описывающее простой маятник, интегрируется непосредственно и дает

$$\int_{\pi}^{\Theta}\frac{d\Theta}{2\sin(\frac{1}{2}\Theta)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t}dt,$$

где t_0 есть момент времени, при котором $\Theta = \pi$. Следовательно $\ln|\operatorname{tg}\frac{1}{4}\Theta| = (t-t_0)/T$, или

$$\Theta(t) = 4\operatorname{arctg}\left[\exp\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\right]. \tag{15.3.32}$$

Используя данное выражение для $\Theta(t)$, находим

$$\Omega(t) = \dot{\Theta}(t) = \frac{2}{T}\operatorname{sech}\left(\frac{t-t_0}{T}\right), \tag{15.3.33}$$

так что амплитуда электрического поля $|\mathscr{E}(t)|$ светового импульса имеет форму гиперболического секанса. Это проиллюстрировано на рис. 15.5. Импульс имеет максимум в момент времени $t=t_0$ и эффективную ширину порядка T, хотя, строго говоря, его длительность равна бесконечности. Используя соотношения между сторонами треугольника, показанного на рис. 15.6, получаем формулы

$$\sin(\tfrac{1}{2}\Theta) = \operatorname{sech}\left(\frac{t-t_0}{T}\right), \quad \sin(\Theta) = 2\operatorname{sech}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\operatorname{th}\left(\frac{t-t_0}{T}\right),$$

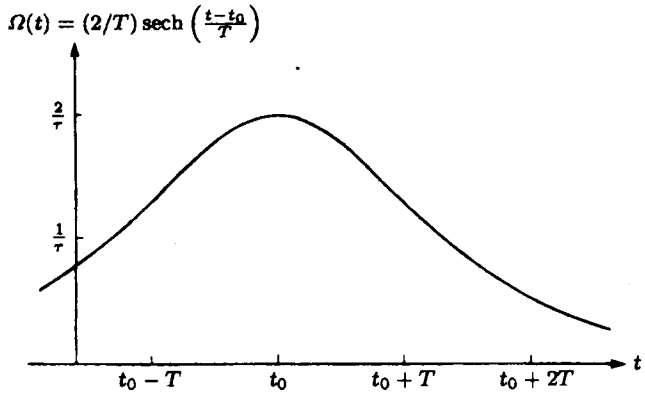


Рис. 15.5. Амплитуда импульса в форме гиперболического секанса $\Omega(t) = (2/T)\,\mathrm{sech}\,[(t-t_0)/T]$

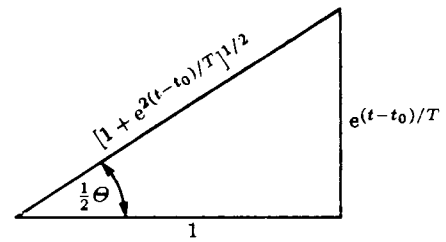


Рис. 15.6. Схема, поясняющая соотношение между Θ и t (к выводу формулы (15.3.34))

так что решения уравнений Блоха во вращающейся системе координат, при условии, что атом первоначально находился в основном состоянии, принимают вид

$$r_1'(t) = \frac{2(\omega_0-\omega_1)T}{1+(\omega_0-\omega_1)^2T^2}\,\mathrm{sech}\left(\frac{t-t_0}{T}\right),$$
$$r_2'(t) = -\frac{2}{1+(\omega_0-\omega_1)^2T^2}\,\mathrm{sech}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\mathrm{th}\left(\frac{t-t_0}{T}\right), \qquad (15.3.34)$$
$$r_3'(t) = -1 + \frac{2}{1+(\omega_0-\omega_1)^2T^2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right).$$

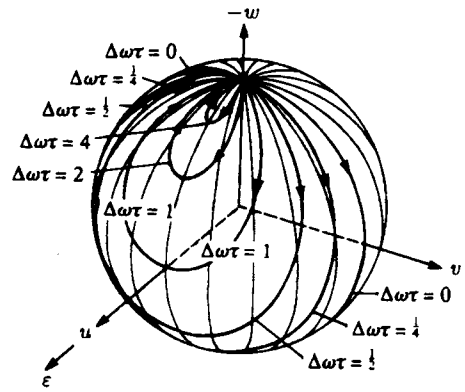


Рис. 15.7. Движение атомного вектора Блоха при воздействии на атом 2π-импульса в форме гиперболического секанса при различной величине расстройки $\Delta\omega$ (McCall and Hahn, 1969). Атом начинает и заканчивает движение в нижнем состоянии $|1\rangle$; u, v, w соответствуют r_1', r_2', r_3', а ось w перевернута

Эти решения были впервые получены Мак-Коллом и Ханом (McCall and Hahn, 1967, 1969), а соответствующее движение вектора Блоха при различных значениях расстройки $\omega_0 - \omega_1$ показано на рис. 15.7. Необходимо отметить, что хотя в условиях существенной расстройки атом проходит значительно меньший цикл возбуждения, чем в условиях резонанса, он в любом случае оказывается в основном состоянии $|1\rangle$ по окончании действия импульса.

Этот результат важен для случая неоднородно уширенной материальной среды или группы атомов, когда различные атомы имеют разные резонансные частоты ω_0. Если эти атомы подвергнуть воздействию 2π-импульса в форме гиперболического секанса (15.3.33), имеющего частоту ω_1, то каждый атом пройдет различный цикл возбуждения, но так, что все они окажутся в основном состоянии по окончании действия импульса. В результате энергия возбуждающего импульса не будет поглощаться, несмотря на то, что его частота близка к резонансной частоте атомного перехода, и следует ожидать, что среда является сильно поглощающей. Как мы увидим, этот факт лежит в основе явления *самоиндуцированной прозрачности*, открытого Мак-Коллом и Ханом (McCall and Hahn, 1967, 1969).

15.4. Взаимодействие атома с квантовым полем: подход теории возмущений

Во всех предыдущих задачах электромагнитное поле рассматривалось как внешнее поле, которое не изменяется атомом и может считаться классическим. Если это поле является сильным когерентным полем, например, полем лазера, то данное приближение во многих случаях адекватно. Однако частично

возбужденный атом может еще излучать спонтанно, а подобные процессы лежат за пределами полуклассического подхода, изложенного в разд. 15.1 и 15.3.

Было сделано много попыток учесть спонтанное испускание в рамках, по существу, полуклассической теории. Один подход состоял в том, что предполагалось существование всеобщего, флуктуирующего электромагнитного фона, индуцирующего определенные процессы[1]. Другой подход был применен Джейнсом с коллегами (Jaynes and Cummings, 1963; Crisp and Jaynes, 1969; Stroud and Jaynes, 1970; Jaynes, 1973), которые показали, что при учете реакции излучения на атом, последний, будучи частично возбужденным, излучает даже тогда, когда электромагнитное поле рассматривается классически. Однако, детальные предсказания этой «неоклассической» теории были опровергнуты экспериментом (Gibbs, 1972, 1973; Wessner, Anderson and Robiscoe, 1972; Freedman and Clauser, 1972; Schuda, Herscher and Stroud, 1973). Единственное удовлетворительное рассмотрение взаимодействия атома и света — это то, при котором как атом, так и поле считаются квантованными.

Объединяя выражения (14.1.2) для полного гамильтониана связанной системы двухуровневого атома и поля,

$$\hat{H} = \hat{H}_{\mathrm{A}} + \hat{H}_{\mathrm{F}} + \hat{H}_{\mathrm{I}},$$

где $\hat{H}_{\mathrm{A}}$ задается формулой (15.1.16), $\hat{H}_{\mathrm{F}}$ — формулой (10.3.16), $\hat{H}_{\mathrm{I}}$ — формулой (15.3.2), мы приходим к выражению

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\left(\hat{R}_3 + \frac{1}{2}\right) + \sum_{\mathbf{k},s}\hbar\omega\left(\hat{n}_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2}\right) + i\omega_0[(\boldsymbol{\mu}_{12})\hat{b}(t) - (\boldsymbol{\mu}_{12}^*)\hat{b}^\dagger(t)]\cdot\hat{\mathbf{A}}(r_0,t), \tag{15.4.1}$$

где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор атома, который будет считаться неподвижным. Мы выбрали гамильтониан взаимодействия в виде $-(e/m)\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{A}} \to -\hat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\hat{\mathbf{A}}$, а не в виде $-\hat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\hat{\mathbf{E}}$, поскольку позже это окажется более удобным. Тем не менее, оба варианта одинаково хорошо подходят для теории возмущений. Далее будем считать, что нижнее состояние атома является основным.

15.4.1. Поглощение и излучение фотонов

Как обычно, предположим, что состояние полной системы атома и поля в начальный момент времени $t = 0$ представляется в виде произведения состояний атома и поля. Однако для того, чтобы выделить некоторые простые квантовые закономерности, будем считать, что поле находится в этот момент не в когерентном состоянии, с которым мы обычно имеем дело, а в фоковском состоянии. Тогда оператор плотности $\hat{\rho}_0$ полной системы в начальный момент времени имеет вид

$$\hat{\rho}_0 = |\{n\}\rangle\langle\{n\}| \otimes |\psi\rangle\langle\psi|, \tag{15.4.2}$$

где атомное состояние $|\psi\rangle$ есть произвольное чистое состояние, а поле имеет $n_{\mathbf{k}s}$ фотонов в моде $\mathbf{k}$, s. Нас интересует вероятность того, что фотон типа $\mathbf{k}_1$, s_1 будет либо испущен, либо поглощен в течение короткого промежутка времени Δt. Эту вероятность можно вычислить, как и в разд. 14.1, простыми методами теории возмущений.

Как и прежде, оказывается удобным работать в картине взаимодействия, в которой процесс эволюции начинается в момент времени $t = 0$, и гамильтониан взаимодействия задается выражением

$$\hat{H}_{\mathrm{I}}(t) = i\omega_0[\boldsymbol{\mu}_{12}\hat{b}\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t} - \boldsymbol{\mu}_{12}^*\hat{b}^\dagger\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t}]\cdot\left[\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2}\hat{a}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0-\omega t)} + \text{э.с.}\right] =$$

$$= \frac{i\omega_0}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2}[\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^*\hat{b}\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0}\,\mathrm{e}^{i(\omega-\omega_0)t} - \text{э.с.}]. \tag{15.4.3}$$

Здесь все операторы, не имеющие явных временны́х аргументов, относятся к моменту времени $t = 0$. В последней строчке были отброшены члены, осциллирующие на оптических и более высоких частотах,

[1] См., например, статьи (Marshall, 1963, 1965) и (Boyer, 1969a, b, 1970a, b, 1973, 1974).

поскольку их вклад на любом временно́м интервале Δt, существенно превышающем оптический период, пренебрежимо мал. Поскольку мы интересуемся вероятностью испускания или поглощения одного фотона, то конечное состояние будет обязательно ортогональным первоначальному состоянию, и можно воспользоваться общим соотношением (14.1.14) для вероятности перехода в течение короткого промежутка времени Δt. Используя (15.4.2) и (15.4.3), после суммирования по всевозможным конечным атомным состояниям находим

$$\begin{aligned}
&\text{Вероятность испускания (или поглощения)}\\
&\text{фотона типа } \mathbf{k}_1,\, s_1 \text{ за время } \Delta t = \\
&= \frac{-\omega_0^2}{\hbar^2 L^3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{\mathbf{k},s}\sum_{\mathbf{k}',s'}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2}\left(\frac{\hbar}{2\omega'\varepsilon_0}\right)^{1/2}\Bigg\{\langle j|\hat{b}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{b}|j\rangle(\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s})(\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}'s'})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}_0}\times\\
&\times\langle\{n\},n_{\mathbf{k}_1s_1}\pm1|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}|\{n\}\rangle\langle\{n\}|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}|\{n\},n_{\mathbf{k}_1s_1}\pm1\rangle\int_0^{\Delta t}dt_1\int_0^{t_1}dt_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega'-\omega_0)t_2}+\text{к.с.}-\\
&-\langle j|\hat{b}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{b}^\dagger|j\rangle(\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s})(\boldsymbol{\mu}^*_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'s'})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}_0}\langle\{n\},n_{\mathbf{k}_1s_1}\pm1|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}|\{n\}\rangle\langle\{n\}|\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}|\{n\},n_{\mathbf{k}_1s_1}\pm1\rangle\times\\
&\times\int_0^{\Delta t}dt_1\int_0^{t_1}dt_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t_1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega'-\omega_0)t_2}-\langle j|\hat{b}^\dagger|\psi\rangle\langle\psi|\hat{b}|j\rangle(\boldsymbol{\mu}^*_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s})(\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}'s'})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}_0}\times\\
&\times\langle\{n\},n_{\mathbf{k}_1s_1}\pm1|\hat{a}_{\mathbf{k}s}|\{n\}\rangle\langle\{n\}|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}|\{n\},n_{\mathbf{k}_1s_1}\pm1\rangle\int_0^{\Delta t}dt_1\int_0^{t_1}dt_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega'-\omega_0)t_2}\Bigg\}+\text{к.с.}
\end{aligned}\tag{15.4.4}$$

Из четырех слагаемых в скобках { } только четвертое вносит заметный вклад, если мы интересуемся поглощением фотона, и только третье вносит заметный вклад, если мы интересуемся испусканием фотона. Кроме того, из (10.4.5) и (10.4.8) следует, что

$$\begin{aligned}
\langle\{n\},n_{\mathbf{k}_1s_1}-1|\hat{a}_{\mathbf{k}s}|\{n\}\rangle &= (n_{\mathbf{k}_1s_1})^{1/2}\delta^3_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}\delta_{ss_1},\\
\langle\{n\},n_{\mathbf{k}_1s_1}+1|\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}|\{n\}\rangle &= (n_{\mathbf{k}_1s_1}+1)^{1/2}\delta^3_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}\delta_{ss_1}.
\end{aligned}\tag{15.4.5}$$

Интегралы по времени легко вычисляются, и мы находим с помощью (15.4.5), что

$$\begin{aligned}
&\text{Вероятность поглощения фотона}\\
&\text{типа } \mathbf{k}_1,\, s_1 \text{ за время } \Delta t
\end{aligned}
= \frac{\omega_0^2}{2\hbar\omega_1\varepsilon_0L^3}|\boldsymbol{\mu}^*_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}_1s_1}|^2\langle\psi|\hat{b}\,\hat{b}^\dagger|\psi\rangle n_{\mathbf{k}_1s_1}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_0)\Delta t}{\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_0)}\right]^2,\tag{15.4.6}$$

и что

$$\begin{aligned}
&\text{Вероятность испускания фотона}\\
&\text{типа } \mathbf{k}_1,\, s_1 \text{ за время } \Delta t =
\end{aligned}
= \frac{\omega_0^2}{2\hbar\omega_1\varepsilon_0L^3}|\boldsymbol{\mu}^*_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}_1s_1}|^2\langle\psi|\hat{b}^\dagger\hat{b}|\psi\rangle(n_{\mathbf{k}_1s_1}+1)\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_0)\Delta t}{\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_0)}\right]^2.\tag{15.4.7}$$

Из этих выражений следует несколько интересных общих выводов. Прежде всего, обе вероятности очень малы до тех пор, пока частота ω_1 рассматриваемого фотона не станет близка к частоте атомного перехода ω_0, так что разность частот $|\omega_1-\omega_0|$ не станет порядка $1/\Delta t$ или меньше. Далее, вектор дипольного момента не должен быть ортогонален вектору поляризации рассматриваемого фотона, иначе обе вероятности обращаются в нуль. Например, если матричный элемент оператора дипольного момента $\boldsymbol{\mu}_{12}$ является действительным вектором, направленным вдоль оси z, то атом не может ни излучать, ни поглощать фотон, волновой вектор которого направлен вдоль оси z, поскольку вектор поляризации $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}_1s_1}$ такого фотона оказывается ортогональным вектору $\boldsymbol{\mu}_{12}$. Это просто отражает хорошо известные свойства дипольного излучения, которое всегда отсутствует в направлении вектора дипольного момента. С другой стороны, если мы имеем дело с атомным переходом типа $\Delta m=-1$ и полагаем $\boldsymbol{\mu}_{12}=(|\boldsymbol{\mu}_{12}|/\sqrt{2})(\mathbf{x}_1+\mathrm{i}\mathbf{y}_1)$, то из (15.4.7) следует, что вероятность испускания фотона обращается в нуль для фотонов с левой круговой поляризацией, у которых $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}_1s_1}=(\mathrm{i}\mathbf{x}_1+\mathbf{y}_1)/\sqrt{2}$, и максимальна для фотонов с правой круговой поляризацией, у

которых $\varepsilon_{\mathbf{k}_1 s_1} = (\mathbf{x}_1 + i\mathbf{y}_1)/\sqrt{2}$. Это является следствием закона сохранения момента количества движения. Вероятность поглощения фотона не равна нулю, если атом первоначально не находится в полностью возбужденном состоянии $|\psi\rangle = |2\rangle$, а вероятность испускания фотона отлична от нуля, если атом не находится первоначально в основном состоянии $|\psi\rangle = |1\rangle$. Однако, атом способен поглощать или испускать фотон в любом другом квантовом состоянии.

Вероятность поглощения фотона типа $\mathbf{k}_1$, s_1, как и ожидалось, пропорциональна числу фотонов $n_{\mathbf{k}_1 s_1}$ данного типа, имеющихся в поле в начальный момент времени. Однако вероятность испускания фотона типа $\mathbf{k}_1$, s_1 пропорциональна $n_{\mathbf{k}_1 s_1} + 1$ и, следовательно, содержит два вклада. Член, пропорциональный $n_{\mathbf{k}_1 s_1}$, называется вероятностью *вынужденного испускания* или *индуцированного испускания*. Он пропорционален интенсивности поля, отвечающего моде $\mathbf{k}_1$, s_1, точно так же, как вероятность поглощения. С другой стороны, второй член не зависит от числа заполнения фотонов и отличен от нуля даже в вакуумном состоянии. Он называется вероятностью *спонтанного испускания*. Если процессы вынужденного испускания и поглощения имели место и в классическом поле, как было показано в разд. 15.3, то спонтанное испускание характерно только для квантового поля. Спонтанный процесс иногда описывается как процесс, индуцированный вакуумными флуктуациями квантового поля.

Суммируя вероятность спонтанного излучения (15.4.7) по всем модам поля, получаем полную вероятность спонтанного излучения фотона в течение интервала времени Δt. Для вычисления суммы по поляризациям, воспользуемся тензорным соотношением (10.2.19в) и запишем

$$\sum_s |\boldsymbol{\mu}_{12}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}|^2 = (\mu_{12}^*)_i (\mu_{12})_j \sum_s (\varepsilon_{\mathbf{k}s})_i (\varepsilon_{\mathbf{k}s}^*)_j = (\mu_{12}^*)_i (\mu_{12})_j \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) = |\boldsymbol{\mu}_{12}|^2 - \frac{|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu}_{12}|^2}{k^2}. \qquad (15.4.8)$$

Заменим сумму по всем волновым векторам $\mathbf{k}$ интегралом согласно обычному правилу $(1/L^3)\sum_{\mathbf{k}} \to$ $\to 1/(2\pi)^3 \int d^3k$. Пусть θ, ϕ являются полярным и азимутальным углами волнового вектора $\mathbf{k}$. Если предположить, что вектор $\boldsymbol{\mu}_{12}$ лежит в плоскости x, y, то можно записать $\boldsymbol{\mu}_{12} = |\boldsymbol{\mu}_{12}|\mathbf{x}_1$ в случае действительного дипольного момента и $\boldsymbol{\mu}_{12} = (|\boldsymbol{\mu}_{12}|/\sqrt{2})(\mathbf{x}_1 + i\mathbf{y}_1)$ в случае комплексного дипольного момента. Тогда $|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2 - |\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu}_{12}|^2/k^2$ принимает вид $|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2(1 - \sin^2\theta\cos^2\phi)$ в первом случае и $|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta)$ во втором. Интегрируя по всем ϕ, получаем $2\pi|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta)$ в обоих случаях, так что окончательно из (15.4.7) и (15.4.8) получаем

Вероятность спонтанного испускания за время $\Delta t =$

$$= \frac{\omega_0^2 |\boldsymbol{\mu}_{12}|^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 \hbar c^3} \int_0^\pi \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) \sin\theta\, d\theta \int_0^\infty \omega_1 \left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_0)\Delta t}{\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_0)}\right]^2 \langle\psi|\hat{b}^\dagger \hat{b}|\psi\rangle\, d\omega_1.$$

Выражение под знаком интеграла по ω_1 имеет резкий максимум в области $\omega_1 = \omega_0$, если $\Delta t \gg 1/\omega_0$, так что интеграл по ω_1 в хорошем приближении равен $2\pi\omega_0\Delta t$. Интеграл по θ равен $4/3$ и, разделив обе стороны выражения на Δt, получим результат

$$\text{Скорость спонтанного излучения} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2\omega_0^3}{3\hbar c^3}\right)\langle\psi|\hat{b}^\dagger\hat{b}|\psi\rangle. \qquad (15.4.9)$$

Если выразить состояние $|\psi\rangle$ через верхнее и нижнее состояния, используя (15.2.12), то сразу найдем, что

$$\langle\psi|\hat{b}^\dagger\hat{b}|\psi\rangle = \langle\psi|(\hat{R}_3 + \tfrac{1}{2})|\psi\rangle = \cos^2\tfrac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(r_3 + 1), \qquad (15.4.10)$$

где θ — полярный угол атомного вектора Блоха и r_3 — его z-составляющая. Данный множитель, конечно, максимален, когда $\theta = 0$, т.е. когда атом полностью возбужден. В этом случае скорость спонтанного излучения фотона называется *коэффициентом Эйнштейна* A (который иногда обозначается через 2β), и мы получаем следующий результат:

$$A = 2\beta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\frac{|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2\omega_0^3}{\hbar c^3}\right). \qquad (15.4.11)$$

Величина, обратная этой скорости, есть мера времени жизни T_1 возбужденного атомного состояния.

Хотя методы теории возмущений справедливы только для коротких времен взаимодействия Δt, информацию о временно́м развитии процесса спонтанного излучения можно получить из простых соображений энергетического баланса. Поскольку испускаемые фотоны сосредоточены по частоте в области $\omega_1 = \omega_0$, можно преобразовать (15.4.9) в приближенное выражение для скорости испускания энергии, умножая на $\hbar\omega_0$. В результате получим

$$\text{Скорость излучения энергии атомом} = \hbar\omega_0 A\frac{1}{2}(r_3 + 1). \tag{15.4.12}$$

Если приравнять это выражение к скорости, с которой атом теряет энергию, то получим уравнение движения для r_3. Таким образом, с учетом (15.1.16) и (15.2.14) имеем

$$\hbar\omega_0 A\frac{1}{2}(r_3 + 1) = -\frac{d}{dt}\left[\hbar\omega_0\frac{1}{2}(r_3 + 1)\right].$$

Данное уравнение непосредственно интегрируется, что приводит к результату

$$\langle\hat{H}_\mathrm{A}(t)\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega_0[r_3(t) + 1] = \langle\hat{H}_\mathrm{A}(0)\rangle\,\mathrm{e}^{-At}. \tag{15.4.13}$$

Выражение (15.4.12) для скорости испускания энергии, полученное по теории возмущений, имеет силу, несмотря на то, что поле не находится точно в вакуумном состоянии во все моменты времени, поскольку большинство мод поля остается незаполненным в течение атомного затухания. Таким образом, средняя энергия атома затухает экспоненциально со временем со скоростью A благодаря спонтанному испусканию из начального состояния. Однако, гладкое поведение среднего значения энергии скрывает квантовые скачки, связанные с процессом испускания фотона. Данное явление будет исследовано более детально в разд. 15.6.

15.5. Взаимодействие атома с квантовым полем: общее рассмотрение

15.5.1. Гейзенберговские уравнения движения

В предыдущем параграфе мы использовали нестационарную теорию возмущений для вычисления скоростей перехода при протекании определенных процессов. Эти вычисления всегда ограничены короткими временами взаимодействия и они не позволяют исследовать зависящие от времени свойства процессов в целом, несмотря на то, что нам удалось получить некоторую информацию о спонтанном затухании атома, исходя из простых соображений энергетического баланса. Чтобы исследовать процесс взаимодействия в более общем виде, как функцию времени, и вычислить некоторые многовременные корреляционные функции, удобно использовать картину Гейзенберга. Начнем с вывода гейзенберговских уравнений движения

$$\frac{d}{dt}\hat{O}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{O}(t), \hat{H}] \tag{15.5.1}$$

для некоторых ключевых динамических переменных $\hat{O}(t)$ и проинтегрируем их по времени. Средние значения можно, тогда, вычислить, используя любое начальное состояние[1].

Для начала будем использовать гамильтониан $\hat{H}$ (15.4.1) для поля и атома, полагая, что атом неподвижен и находится в начале системы координат. Разложение векторного потенциала по модам запишем следующим образом:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2}[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{э.с.}]. \tag{15.5.2}$$

[1]Вычисления, приведенные в этом параграфе и в разд. 15.6, основаны главным образом на работах (Ackerhalt, Knight and Eberly, 1973; Wódkiewicz and Eberly, 1976; Kimble and Mandel, 1976). См. также (Allen and Eberly, 1975, гл. 7). В частности, процедура записи произведений смешанных операторов в нормальном порядке была введена в работе (Wódkiewicz and Eberly, 1976).

При таком выборе гамильтониана гейзенберговские уравнения движения (15.5.1) для атомных операторов $\hat{b}(t)$ и $\hat{R}_3(t)$ принимают вид

$$\frac{d}{dt}\hat{b}(t) = -i\omega_0\hat{b}(t) + \frac{2\omega_0}{\hbar}\boldsymbol{\mu}_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{A}}(0,t)\hat{R}_3(t), \tag{15.5.3}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{R}_3(t) = -\frac{\omega_0}{\hbar}[\boldsymbol{\mu}_{12}\hat{b}(t) + \boldsymbol{\mu}_{12}^*\hat{b}^\dagger(t)] \cdot \hat{\mathbf{A}}(0,t), \tag{15.5.4}$$

тогда как уравнения движения для операторов электрического и магнитного полей сводятся к уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t), \\ \boldsymbol{\nabla} \times \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) + \mu_0\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t). \end{aligned} \tag{15.5.5}$$

Эффективная плотность тока $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ пропорциональна поперечной дельта-функции и задается выражением (Kimble and Mandel, 1976)

т.е.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{j}}_l(\mathbf{r},t) &= -i\omega_0\delta^T_{lm}(\mathbf{r})(\boldsymbol{\mu}_{12})_m\hat{b}(t) + \text{э.с.}, \\ \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t) &= -i\omega_0\left[\frac{2}{3}\boldsymbol{\mu}_{12}\delta^3(\mathbf{r}) - \frac{\boldsymbol{\mu}_{12}}{4\pi r^3} + \frac{3(\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{4\pi r^5}\right]\hat{b}(t) + \text{э.с.} \end{aligned} \tag{15.5.6}$$

Как хорошо известно, из уравнений Максвелла следует, что векторный потенциал $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\boldsymbol{\nabla}^2\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -\mu_0\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t),$$

решение которого имеет вид так называемого запаздывающего потенциала

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Theta(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)\,d^3r' + \hat{\mathbf{A}}_{\text{своб}}(\mathbf{r},t). \tag{15.5.7}$$

Здесь $\Theta(\tau)$ — единичная ступенчатая функция, которая обращается в нуль при $\tau < 0$, а $\hat{\mathbf{A}}_{\text{своб}}(\mathbf{r},t)$ — решение однородного волнового уравнения или волнового уравнения для свободного поля. Как всегда, полное поле получается добавлением вклада, создаваемого источником, к решению, описывающему свободное поле.

С помощью (15.5.7) электрическое или магнитное поле в произвольной пространственно-временно́й точке $\mathbf{r}$, t может быть выражено через атомный ток $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ или через $\hat{b}$ и $\hat{b}^\dagger$. Например, можно показать, что в низшем порядке по $1/r$ для некоторой точки из области дальнего поля при $t > r/c$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \frac{\omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{\boldsymbol{\mu}_{12}}{r} - \frac{(\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3}\right]\hat{b}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \text{э.с.} + \hat{\mathbf{E}}_{\text{своб}}(\mathbf{r},t). \tag{15.5.8}$$

Это выражение похоже на хорошо известное выражение для дальнего поля осциллирующего классического диполя (ср. Born and Wolf, 1980, разд. 2.2.3). При выводе (15.5.8) мы использовали приближение, заключающееся в замене производной по времени от $\hat{b}(t)$ доминирующим членом $-i\omega_0\hat{b}(t)$, задаваемым выражением (15.5.3). Выражение (15.5.8) естественно распадается на два соответствующих положительно-частотной и отрицательно-частотной частям поля. Однако оно справедливо только для дальнего поля, тогда как (15.5.3) и (15.5.4) включают поле в точке $\mathbf{r} = 0$.

Чтобы определить поле в точке нахождения атома, удобно начать с гейзенберговского уравнения движения для одномодового оператора $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$, а именно:

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) = -i\omega_0\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) + \frac{\omega_0}{\hbar}\frac{1}{L^{3/2}}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2}[\hat{b}(t)\boldsymbol{\mu}_{12} - \hat{b}^\dagger(t)\boldsymbol{\mu}_{12}^*]\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^*, \tag{15.5.9}$$

и синтезировать подходящие полевые операторы из $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$. Прежде чем интегрировать данное уравнение, заменим атомный оператор $\hat{b}(t)$, осциллирующий согласно (15.5.3) на частоте, близкой к ω_0, на медленно изменяющуюся динамическую переменную $\hat{b}_s(t)$, определяемую в виде

$$\hat{b}_s(t) \equiv \hat{b}(t)\, e^{i\omega_0 t}. \tag{15.5.10}$$

Из (15.5.3) следует, что $\hat{b}_s(t)$ удовлетворяет уравнению движения

$$\frac{d}{dt}\hat{b}_s(t) = \frac{2\omega_0}{\hbar}[\hat{R}_3(t)\boldsymbol{\mu}_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{A}}^{(+)}(0,t) + \boldsymbol{\mu}_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{A}}^{(-)}(0,t)\hat{R}_3(t)]\, e^{i\omega_0 t}, \tag{15.5.11}$$

где оператор $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)$ разложен на положительно- и отрицательно-частотные части $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$. Поскольку атомные и полевые операторы, взятые в один и тот же момент времени, коммутируют, порядок операторов в каждом слагаемом может быть выбран произвольно. Мы приняли нормальный порядок, поскольку он окажется позже более удобным. Подставляя (15.5.10) в (15.5.9) и формально интегрируя полученное выражение, получаем

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k}s}(0)\, e^{-i\omega t} + \left(\frac{\omega_0}{\hbar}\right)\frac{1}{L^{3/2}}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2} e^{-i\omega t} \times$$
$$\times\, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},s}^* \cdot \int_0^t [\boldsymbol{\mu}_{12}\hat{b}_s(t')\, e^{i(\omega-\omega_0)t'} - \boldsymbol{\mu}_{12}^*\hat{b}_s^\dagger(t')\, e^{i(\omega+\omega_0)t'}]\, dt'. \tag{15.5.12}$$

Данная формула выражает амплитуду $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$ моды в виде суммы амплитуды свободного поля и вклада, создаваемого атомным источником. Суммируя по всем модам, можно получить положительно- или отрицательно-частотные части оператора $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)$ или любого другого полевого оператора. Таким образом, например, имеем

$$\boldsymbol{\mu}_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{A}}^{(+)}(0,t) = \boldsymbol{\mu}_{12}^* \cdot \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} =$$
$$= \boldsymbol{\mu}_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{A}}_{\text{своб}}^{(+)}(0,t) + \frac{\omega_0}{\hbar}\frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2} \boldsymbol{\mu}_{12}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} \times$$
$$\times\, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^* \cdot \int_0^t [\boldsymbol{\mu}_{12}\hat{b}_s(t')\, e^{i(\omega-\omega_0)(t-t')}\, e^{-i\omega_0 t} - \boldsymbol{\mu}_{12}^*\hat{b}_s^\dagger(t')\, e^{i(\omega+\omega_0)(t-t')}\, e^{i\omega_0 t}]\, dt', \tag{15.5.13}$$

где записали

$$\hat{\mathbf{A}}_{\text{своб}}^{(+)}(0,t) \equiv \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k},s}(0)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\, e^{-i\omega t} \tag{15.5.14}$$

для однородной части (или части, соответствующей свободному полю) оператора векторного потенциала в отсутствии атома. Суммы по индексу поляризации s приводят, с учетом тензорного соотношения для векторов поляризации [ср. (10.2.19в)], к результатам

$$\sum_s \boldsymbol{\mu}_{12}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^* \cdot \boldsymbol{\mu}_{12} = |\boldsymbol{\mu}_{12}|^2 - |\boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \mathbf{k}|^2/k^2, \quad \sum_s \boldsymbol{\mu}_{12}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^* \cdot \boldsymbol{\mu}_{12}^* = \boldsymbol{\mu}_{12}^{*\,2} - (\boldsymbol{\mu}_{12}^* \cdot \mathbf{k})^2/k^2,$$

а суммы по $\mathbf{k}$ можно заменить интегралом согласно обычному правилу,

$$\frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k}} \to \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \to \frac{1}{(2\pi)^3 c^3}\int_0^\infty d\omega\, \omega^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi.$$

Интегралы по θ и ϕ легко вычисляются так же, как в разд. 15.4, и мы находим, что

$$\frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)\boldsymbol{\mu}_{12}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^*\cdot\boldsymbol{\mu}_{12}^* f(\omega)\to\frac{4}{3}\frac{|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2}{4\pi^2c^3}\int_0^\infty\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)f(\omega)\,d\omega \tag{15.5.15a}$$

независимо от того, является ли $\boldsymbol{\mu}_{12}$ действительной величиной, как в случае перехода $\Delta m=0$, или комплексной величиной, как в случае перехода $\Delta m=\pm1$. С другой стороны, второй член под знаком суммы в (15.5.13) дает

$$\frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)\boldsymbol{\mu}_{12}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{ks}\boldsymbol{\varepsilon}_{ks}^*\cdot\boldsymbol{\mu}_{12}^* f(\omega)\to\begin{cases}\dfrac{4}{3}\dfrac{|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2}{4\pi^2c^3}\displaystyle\int_0^\infty\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)f(\omega)\,d\omega & \text{для } \Delta m=0\\ 0 & \text{для } \Delta m=\pm1.\end{cases} \tag{15.5.15б}$$

Поэтому для простоты рассмотрим переход типа $\Delta m=\pm1$. В этом случае (15.5.13) сводится к

$$\boldsymbol{\mu}_{12}^*\cdot\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(0,t)=\boldsymbol{\mu}_{12}^*\cdot\hat{\mathbf{A}}^{(+)}_{\text{своб}}(0,t)+\frac{\hbar}{\omega_0}\left(\frac{2|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2\omega_0^2}{4\pi^2\varepsilon_0 3\hbar c^3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\int_0^\infty d\omega\int_0^t dt'\,\omega\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')}\hat{b}_s(t'), \tag{15.5.16}$$

и для $\boldsymbol{\mu}_{12}^*\cdot\hat{\mathbf{A}}^{(-)}(0,t)$ можно вывести подобным же образом аналогичное выражение

$$\boldsymbol{\mu}_{12}^*\cdot\hat{\mathbf{A}}^{(-)}(0,t)=\boldsymbol{\mu}_{12}^*\cdot\hat{\mathbf{A}}^{(-)}_{\text{своб}}(0,t)-\frac{\hbar}{\omega_0}\left(\frac{2|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2\omega_0^2}{4\pi^2\varepsilon_0 3\hbar c^3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\int_0^\infty d\omega\int_0^t dt'\,\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\omega_0)(t-t')}\hat{b}_s(t'). \tag{15.5.17}$$

Подставляя эти результаты в (15.5.11), приходим к уравнению

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{b}_s(t)=\frac{2\omega_0}{\hbar}&[\hat{R}_3(t)\boldsymbol{\mu}_{12}^*\cdot\hat{\mathbf{A}}^{(+)}_{\text{своб}}(0,t)+\boldsymbol{\mu}_{12}^*\cdot\hat{\mathbf{A}}^{(-)}_{\text{своб}}(0,t)\hat{R}_3(t)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}+\\&+\frac{4}{3}\frac{|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2\omega_0^2}{4\pi^2\varepsilon_0\hbar c^3}\int_0^\infty d\omega\int_0^t dt'\,\omega[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t')}\,\hat{R}_3(t)\hat{b}_s(t')-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\omega_0)(t-t')}\,\hat{b}_s(t')\hat{R}_3(t)].\end{aligned} \tag{15.5.18}$$

Это есть интегро-дифференциальное уравнение для $\hat{b}_s(t)$, в котором полевые операторы присутствуют только в виде операторов свободного поля или операторов, взятых в начальный момент времени. Таким образом, из уравнения исключено неизвестное поле.

15.5.2. Приближенное решение — коэффициент Эйнштейна A и лэмбовский сдвиг

До сих пор уравнения движения выводились непосредственно из гамильтониана (15.4.1) без каких-либо допущений. Однако теперь для упрощения вычислений (см. ссылку в разд. 15.5.1) желательно использовать некоторые приближения. Разложим $\hat{b}_s(t')$ под знаком интеграла в (15.5.18) в ряд Тейлора в точке $t'=t$

$$\hat{b}_s(t')=\hat{b}_s(t)+(t'-t)\dot{\hat{b}}_s(t)+\ldots \tag{15.5.19}$$

и подставим в (15.5.18). В уравнении движения для $\hat{b}_s(t)$ оставим члены только до первого порядка включительно по константе тонкой структуры $\alpha=e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$. Если записать $\boldsymbol{\mu}_{12}$ в виде $e\mathbf{r}_{12}$, где вектор $\mathbf{r}_{12}$ имеет длину порядка размера атомной электронной орбиты, то $|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2\omega_0^2/4\pi^2\varepsilon_0\hbar c^3\approx 4\pi\alpha(r_{12}^2/\lambda_0^2)$, где λ_0 — длина волны, соответствующая атомной резонансной частоте ω_0. Следовательно, члены первого порядка по константе тонкой структуры α являются членами второго порядка по $|\boldsymbol{\mu}_{12}|$. Поскольку величина $\dot{\hat{b}}_s(t)$ сама порядка $|\boldsymbol{\mu}_{12}|$ или выше, необходимо оставить только первый член в разложении, и с помощью соотношений

$$\hat{R}_3(t)\hat{b}_s(t)=-\frac{1}{2}\hat{b}_s(t)=-\hat{b}_s(t)\hat{R}_3(t)$$

уравнение (15.5.18) сводится к

$$\frac{d}{dt}\hat{b}_s(t) = \frac{2\omega_0}{\hbar}[\hat{R}_3(t)\boldsymbol{\mu}_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{A}}^{(+)}_{\text{своб}}(0,t) + \boldsymbol{\mu}_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{A}}^{(-)}_{\text{своб}}(0,t)\hat{R}_3(t)]\, e^{i\omega_0 t} - \\ - \frac{2|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2\omega_0^2}{12\pi^2\varepsilon_0\hbar c^3}\hat{b}_s(t)\int_0^\infty d\omega \int_0^t d\tau\, \omega[e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} - e^{i(\omega+\omega_0)\tau}]. \quad (15.5.20)$$

Результат сделанного приближения, следовательно, состоит в замене $\hat{b}_s(t')$ под знаком интеграла в (15.5.18) на его наиболее позднее значение $\hat{b}_s(t)$, что, к тому же, сводит интегро-дифференциальное уравнение (15.5.18) к обыкновенному дифференциальному уравнению. По этой причине данная процедура иногда называется приближением кратковременной памяти, или *марковским* приближением. Однако подчеркнем, что мы пришли к уравнению (15.5.20), не предполагая a priori кратковременную память для атомной системы, а ограничивая наше вычисление членами порядка $|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2$.

Вычисление двойного интеграла проведем несколько эвристически. Выразим интеграл по τ в виде разности между двумя интегралами, записывая

$$\mathscr{J} \equiv \int_0^\infty d\omega \int_0^t d\tau\, \omega[e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} - e^{i(\omega+\omega_0)\tau}] = \\ = \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\tau\, \omega[e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} + e^{i(\omega+\omega_0)\tau}] - \int_0^\infty d\omega \int_t^\infty d\tau\, \omega[e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} + e^{i(\omega+\omega_0)\tau}].$$

Первые два интеграла по τ дают функции $2\pi\delta_+(\omega-\omega_0)$ и $2\pi\delta_-(\omega+\omega_0)$, соответственно, которые можно записать в виде (см. разд. 3.1.1 и прил. А4.1)

$$2\pi\delta_\pm(\omega) = \mp iP\left(\frac{1}{\omega}\right) + \pi\delta(\omega),$$

где P обозначает главное значение интеграла по Коши. Второй двойной интеграл может быть записан в виде

$$\int_0^\infty d\omega \int_t^\infty d\tau\, \omega\, e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} = \int_t^\infty d\tau \int_{-\omega_0}^\infty d\omega'\, \omega'\, e^{-i\omega'\tau} + \omega_0 \int_t^\infty d\tau \int_{-\omega_0}^\infty d\omega'\, e^{-i\omega'\tau},$$

при условии, что $\omega_0 t \gg 1$ равен

$$\int_0^\infty d\omega \int_t^\infty d\tau\, \omega\, e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} \approx \int_t^\infty 2\pi i\delta'(\tau)\, d\tau + \omega_0 \int_t^\infty 2\pi\delta(\tau)\, d\tau \approx 0.$$

Последний двойной интеграл в выражении для $\mathscr{J}$ можно рассмотреть подобным образом и показать, что он также равен очень маленькой величине. Следовательно, в хорошем приближении

$$\mathscr{J} = \int_0^\infty \omega\left\{\pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0) - iP\left[\frac{1}{(\omega-\omega_0)} - \frac{1}{(\omega+\omega_0)}\right]\right\} d\omega = \\ = \pi\omega_0 - i\int_0^\infty \omega\left[P\frac{1}{(\omega-\omega_0)} - P\frac{1}{(\omega+\omega_0)}\right] d\omega.$$

Окончательно подставляя полученное выражение в (15.5.20), получаем уравнение движения

$$\frac{d}{dt}\hat{b}_s(t) = \frac{2\omega_0}{\hbar}[\hat{R}_3\boldsymbol{\mu}_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{A}}^{(+)}_{\text{своб}}(0,t) + \boldsymbol{\mu}_{12}^* \cdot \hat{\mathbf{A}}^{(-)}_{\text{своб}}(0,t)\hat{R}_3]\, e^{i\omega_0 t} + (-\beta + i\gamma)\hat{b}_s(t). \quad (15.5.21)$$

Здесь

$$\beta \equiv \frac{2}{3}\frac{|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2\omega_0^3}{4\pi\varepsilon_0\hbar c^3}$$

— константа затухания, та же, что в разд. 15.4, γ — параметр частотного сдвига, называемого *лэмбовским сдвигом*, который задается формулой

$$\gamma \equiv \frac{2}{3}\frac{|\mu_{12}|^2\omega_0^2}{4\pi^2\varepsilon_0\hbar c^3}\int_0^\infty \omega P\left[\frac{1}{\omega-\omega_0}-\frac{1}{\omega+\omega_0}\right]d\omega. \tag{15.5.22а}$$

Физический смысл γ станет ясным, если рассмотреть спектр света, излучаемого атомом. Интеграл расходится логарифмически в пределе больших частот, поэтому для получения конечного значения необходимо обрезать его по частоте. Такое обрезание появляется автоматически в релятивистском вычислении, где верхний предел имеет порядок $mc^2/\hbar$ (m — масса электрона). Выражение (15.2.22а) похоже на выражение, вычисленное впервые Бете (Bethe, 1947) для реального атома водорода, за исключением того, что он получил ряд членов типа (15.2.22а), отвечающих всем возможным переходам между одним заданным уровнем и всеми оставшимися уровнями. Бете вычислил, что лэмбовский сдвиг между уровнями $2s$ и $2p$ атома водорода равен ~ 1040 МГц, что хорошо согласуется с экспериментальными результатами (Lamb and Retherford, 1947). Если интеграл в (15.5.22а) обрезать сверху на частоте $\omega = mc^2/\hbar$, то он вычисляется и дает значение, очень близкое к $2\omega_0\ln(mc^2/\hbar\omega_0)$, так что

$$\gamma \approx \beta\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega_0}\right). \tag{15.5.22б}$$

Однако у реальных атомов число энергетических уровней больше двух, так что данное значение γ, хотя и является конечным, представляет собой грубую оценку лэмбовского сдвига реального атома.

15.5.3. Интегральные уравнения движения

Подобным же образом можно теперь рассмотреть уравнение движения для $\hat{R}_3(t)$. Если разложить $\hat{\mathbf{A}}(0,t)$ в (15.5.4) на положительно- и отрицательно-частотные части, нормально упорядочить члены, подставить $\boldsymbol{\mu}_{12}^*\cdot\hat{\mathbf{A}}^{(-)}(0,t)$ и т.д. и сделать те же приближения, что и выше, то придем к уравнению

$$\frac{d}{dt}\hat{R}_3(t) = -2\beta\left[\hat{R}_3(t)+\frac{1}{2}\right] - \frac{\omega_0}{\hbar}[\hat{b}_s^\dagger(t)\,e^{i\omega_0 t}\,\boldsymbol{\mu}_{12}^*\cdot\hat{\mathbf{A}}^{(+)}_{\text{своб}}(0,t) + \text{э.с.} + \\ + \hat{b}_s(t)\,e^{-i\omega_0 t}\,\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\hat{\mathbf{A}}^{(+)}_{\text{своб}}(0,t) + \text{э.с.}]. \tag{15.5.23}$$

Последние два члена в этом уравнении являются антирезонансными и вносят очень маленький вклад при интегрировании по времени. Если формально проинтегрировать (15.5.21) и (15.5.23) по некоторому конечному интервалу t, который намного больше оптического периода, то можно пренебречь вкладами антирезонансных членов и получить, окончательно, следующие выражения (Kimble and Mandel, 1976)

$$\hat{b}_s(t) = \hat{b}_s(0)\,e^{(-\beta+i\gamma)t} + \frac{2\omega_0}{\hbar}e^{(-\beta+i\gamma)t}\int_0^t \hat{R}_3(t')\boldsymbol{\mu}_{12}^*\cdot\hat{\mathbf{A}}^{(+)}_{\text{своб}}(0,t')\,e^{(\beta-i\gamma+i\omega_0)t'}\,dt', \tag{15.5.24}$$

$$\hat{R}_3(t)+\frac{1}{2} = \left[\hat{R}_3(0)+\frac{1}{2}\right]e^{-2\beta t} - \frac{\omega_0}{\hbar}e^{-2\beta t}\int_0^t [\hat{b}_s^\dagger(t')\boldsymbol{\mu}_{12}^*\cdot\hat{\mathbf{A}}^{(+)}_{\text{своб}}(0,t')\,e^{(i\omega_0+2\beta)t'} + \text{э.с.}]\,dt'. \tag{15.5.25}$$

Отметим, что неизвестные переменные электромагнитного поля отсутствуют в этих уравнениях движения, поскольку $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}_{\text{своб}}(0,t)$ фактически состоит из операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(0)$, взятых в нулевой момент времени, которые считаются известными величинами.

15.5.4. Спонтанное излучение

Мы вывели уравнения движения, связывающие различные динамические переменные. Чтобы получить физические следствия из этих уравнений, необходимо вычислить средние значения соответствующих переменных в рассматриваемом состоянии. Например, рассмотрим временну́ю эволюцию системы, состоящей

из атома в некотором квантовом состоянии, описываемом оператором плотности $\hat{\rho}^{(\mathrm{A})}$, и поля в вакуумном состоянии $|\mathrm{vac}\rangle$. Это и есть задача спонтанного излучения. Оператор плотности $\hat{\rho}$ полной системы факторизуется в виде

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{(\mathrm{A})} \otimes |\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}|. \tag{15.5.26}$$

Кроме того,

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}(0)|\mathrm{vac}\rangle = 0 = \boldsymbol{\mu}_{12}^{*} \cdot \hat{\mathbf{A}}^{(+)}_{\text{своб}}(0,t')|\mathrm{vac}\rangle, \tag{15.5.27}$$

поскольку $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}_{\text{своб}}(0,t)$ есть фактически функция операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(0)$. Если воспользоваться этим соотношением для вычисления средних значений каждого члена в (15.5.25), то обнаружим, что вклад интеграла обращается в нуль и получим следующий результат

$$\langle \hat{R}_3(t)\rangle + \frac{1}{2} = \left[\langle \hat{R}_3(0)\rangle + \frac{1}{2}\right] \mathrm{e}^{-2\beta t},$$

или, учитывая (15.1.16),

$$\langle \hat{H}_{\mathrm{A}}(t)\rangle = \langle \hat{H}_{\mathrm{A}}(0)\rangle\, \mathrm{e}^{-2\beta t}. \tag{15.5.28}$$

Таким образом, средняя энергия атома затухает экспоненциально во времени со скоростью $2\beta = A$, что согласуется с (15.4.13).

Чтобы рассмотреть временну́ю эволюцию поля, излучаемого атомом, вычислим $\langle \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle$ в некоторой точке $\mathbf{r}$ дальнего поля. Разлагая (15.5.8) на положительно- и отрицательно-частотные части, сразу находим, что

$$\langle \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{\omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\left[\boldsymbol{\mu}_{12} - \frac{(\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{\mathbf{r}^2}\right]\left\langle \hat{b}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle,$$

так как $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}_{\text{своб}}(\mathbf{r},t)|\mathrm{vac}\rangle = 0$. Взяв средние значения от обеих частей (15.5.24), используя (15.5.27) и отмечая, что интеграл в (15.5.24) опять не дает вклада, получаем соотношение

$$\langle \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t+r/c)\rangle = \langle \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},r/c)\rangle\, \mathrm{e}^{-\beta t}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0-\gamma)t} \quad (t \geqslant 0), \tag{15.5.29}$$

где r/c есть, конечно, время распространения света от атома до точки $\mathbf{r}$. Следовательно, средняя амплитуда электрического поля затухает экспоненциально со скоростью β, но частота поля не центрирована на частоте ω_0, а смещена от ω_0 на величину лэмбовского сдвига γ. Первое подтверждение этому частотному сдвигу дали знаменитые эксперименты Лэмба и Резерфорда (Lamb and Reserford, 1947), которые определили, что частотный сдвиг между уровнями $2s$ и $2p$ атома водорода равен 1000 МГц.

Конечно, строго говоря, не нужно полагаться на выражение (15.5.29) с целью получения спектра излучаемого света, поскольку $\langle \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},r/c)\rangle$ может обратиться в нуль, да и в любом случае, среднее значение электрического поля обычно не измеряется в оптических экспериментах. Однако, можно определить спектр из корреляционной функции поля второго порядка. Если опять разложить (15.5.8) на его положительно- и отрицательно-частотные части, то найдем, что

$$\langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t+\tau)\rangle = \\ = \left(\frac{\omega_0^2|\boldsymbol{\mu}_{12}|}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\left\langle \hat{b}^{\dagger}\left(t-\frac{r}{c}\right)\hat{b}\left(t-\frac{r}{c}+\tau\right)\right\rangle, \quad t>\frac{r}{c}, \tau\geqslant 0, \tag{15.5.30}$$

где θ — полярный угол вектора $\mathbf{r}$, а комплексный дипольный момент $\boldsymbol{\mu}_{12}$ лежит в плоскости x,y. Теперь из (15.5.24), умножив $\hat{b}^{\dagger}_s(t)$ на $\hat{b}_s(t+\tau)$ и взяв средние значения, сразу получим, что

$$\langle \hat{b}^{\dagger}(t)\hat{b}(t+\tau)\rangle = \langle \hat{b}^{\dagger}(0)\hat{b}(0)\rangle\, \mathrm{e}^{-2\beta t}\, \mathrm{e}^{-\beta\tau}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0-\gamma)\tau} = \left[\langle \hat{R}_3(0)\rangle + \frac{1}{2}\right]\mathrm{e}^{-2\beta t}\, \mathrm{e}^{-\beta\tau}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0-\gamma)\tau}, \quad \tau\geqslant 0. \tag{15.5.31}$$

Следовательно, корреляционная функция затухает экспоненциально по τ и она сдвинута относительно атомной частоты ω_0 на величину лэмбовского сдвига γ. Конечно, корреляционная функция также зависит от t, так что процесс излучения не является стационарным. Однако после усреднения по различным атомам, находящимся в различных состояниях возбуждения в различные моменты времени, результирующее

поле может оказаться стационарным. Спектральная плотность $\Phi(\mathbf{r},\omega)$, соответствующая экспоненциальной корреляционной функции, задаваемой формулами (15.5.30) и (15.5.31), является лоренцевой

$$\Phi(\mathbf{r},\omega) \propto \frac{1}{\beta^2 + (\omega - \omega_0 + \gamma)^2},$$

с шириной на полувысоте, равной 2β. Кроме того, полагая $\tau = 0$ в (15.5.30) и (15.5.31), получаем для средней интенсивности света следующее выражение:

$$\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle = \langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle \left(\frac{\omega_0^2|\boldsymbol{\mu}_{12}|}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\right)^2 \left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\left[\langle \hat{R}_3(0)\rangle + \frac{1}{2}\right] e^{-2\beta(t-r/c)} \quad (t \geqslant r/c). \quad (15.5.32)$$

Если атом первоначально полностью возбужден, то $\langle \hat{R}_3(0)\rangle + \frac{1}{2} = 1$, в то время как в остальных случаях значение этого множителя лежит между 0 и 1. Предсказываемое изменение интенсивности флуоресцентного света при изменении возбуждения $\langle \hat{R}_3(0)\rangle + \frac{1}{2}$ подтвердилось экспериментально (Gibbs, 1973). То же касается и экспоненциального закона затухания, проверенного в экспериментах на излучении L_α-линии атома водорода (Wessner, Anderson and Robiscoe, 1972). Угловое распределение, определяемое множителем $(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta)$, подобно распределению излучения классического осциллирующего диполя.

15.6. Резонансная флуоресценция

Физические следствия связанных уравнений (15.5.24) и (15.5.25) становятся значительно более разнообразными и интересными в случае, когда атом находится в присутствии внешнего электромагнитного поля, частота которого близка к частоте атомного резонансного перехода. Такая ситуация имеет место, например, когда атом подвергается действию спонтанного излучения группы таких же атомов или лазерного пучка с той же частотой, в результате чего наблюдается явление, называемое *резонансной флуоресценцией*. В связи с развитием в последние годы перестраевымых лазеров, стало относительно легко возбуждать атом на данной резонансной частоте почти монохроматическим, когерентным оптическим полем и изучать такую флуоресценцию. Рассмотрим теперь, как атом ведет себя в подобной ситуации. Данная задача, в сущности, опять есть задача Раби, которая решалась полуклассически в разд. 15.3. Однако теперь она будет решаться в рамках полностью квантовой теории.

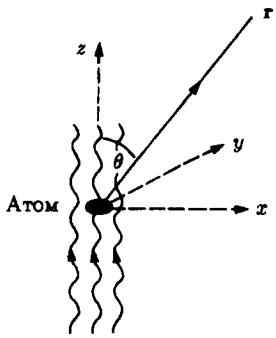


Рис. 15.8. Схема наблюдения резонансной флуоресценции

Рассмотрим атом, находящийся в начале системы координат, комплексный дипольный момент перехода которого $\boldsymbol{\mu}_{12} = |\boldsymbol{\mu}_{12}|(\mathbf{x}_1 + i\mathbf{y}_1)/\sqrt{2}$ лежит в плоскости x, y, где $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$ — единичные векторы (см. рис. 15.8). Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки дальнего поля атомного диполя, характеризуемый полярными координатами (r,θ,ϕ). Будем опять считать, что начальное состояние полной системы есть произведение состояний подсистем, только теперь оптическое поле находится в когерентном состоянии $|\{v\}\rangle$, которое, например, может создаваться идеальным лазером. Из (11.11.2) следует, что данное состояние является правым собственным состоянием оператора $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}_{\text{своб}}(\mathbf{r},t)$, и для идеального монохроматического лазера можно записать

$$\hat{\mathbf{A}}^{(+)}_{\text{своб}}(0,t)|\{v\}\rangle = \boldsymbol{\varepsilon}\mathscr{A}\, e^{-i(\omega_1 t-\phi)}|\{v\}\rangle, \quad (15.6.1)$$

где ω_1 — частота лазера, $\mathscr{A}$ — действительная амплитуда, ϕ — фаза и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — комплексный единичный вектор поляризации в плоскости x, y. Для определенности предположим, что атом первоначально находится в основном состоянии $|1\rangle$, так что состояние полной системы факторизуется в виде

$$|\psi\rangle = |1\rangle|\{v\}\rangle. \quad (15.6.2)$$

15.6.1. Зависимость интенсивности света от времени

Раскладывая, как и прежде, (15.5.8) на положительно- и отрицательно-частотные части и записывая скалярное произведение в нормальном порядке, получаем для средней интенсивности электрического поля

в некоторой пространственно-временно́й точке $\mathbf{r}$, t дальнего поля излучающего атома выражение

$$\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle = \langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle = \left(\frac{\omega_0^2|\boldsymbol{\mu}_{12}|}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\left\langle \hat{b}^\dagger\left(t-\frac{r}{c}\right)\hat{b}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle =$$
$$= \left(\frac{\omega_0^2|\boldsymbol{\mu}_{12}|}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\left[\left\langle \hat{R}_3\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle+\frac{1}{2}\right], \quad (15.6.3)$$

при условии, что точка $\mathbf{r}$ выбрана таким образом, что внешнее или приложенное поле равно нулю в этой точке, т.е.

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}_{\text{своб}}(\mathbf{r},t)|\{v\}\rangle = 0. \quad (15.6.4)$$

Выражение (15.6.3) эквивалентно (15.5.30) при $\tau = 0$, поскольку оба они определяются лишь требованием того, что внешнее поле обращается в нуль в точке $\mathbf{r}$, t, что и выражается формулой (15.6.4). С точностью до масштабного множителя, средняя интенсивность флуоресцентного света равна величине $\langle \hat{R}_3(t-r/c)\rangle + \frac{1}{2}$, которая пропорциональна средней энергии атома. Конечно, r/c есть время распространения света от атома до точки $\mathbf{r}$.

Если вычислить средние значения каждого слагаемого в уравнениях (15.5.24) и (15.5.25) в состоянии $|\psi\rangle$, то найдем, что все операторы поля $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}_{\text{своб}}(0,t)$ и $\hat{\mathbf{A}}^{(-)}_{\text{своб}}(0,t)$ под знаками интеграла, поскольку они нормально упорядочены, можно заменить их правыми и левыми собственными значениями. Два уравнения остаются связанными, но легко расцепляются, например, подстановкой $\langle \hat{b}_s(t)\rangle$ и $\langle \hat{b}_s^\dagger(t)\rangle$ из (15.5.24) и сопряженного ему уравнения в уравнение (15.5.25). После вычисления двойного интеграла по частям, приходим к следующему интегральному уравнению для $\langle \hat{R}_3(t)\rangle$

$$\langle \hat{R}_3(\tau)\rangle = y(\tau) + \int_0^\tau K(\tau-t')\langle \hat{R}_3(t')\rangle\, dt'. \quad (15.6.5)$$

Здесь $y(\tau) = -1/2$ и ядро $K(\tau)$ задается выражением

$$K(\tau) = \frac{\Omega^2}{\beta(1+D^2)}[\mathrm{e}^{-2\beta\tau} - \mathrm{e}^{-\beta\tau}(\cos\beta D\tau + D\sin\beta D\tau)], \quad (15.6.6)$$

где

$$\Omega \equiv \frac{2\omega_0|\boldsymbol{\mu}_{12}^*\cdot\boldsymbol{\varepsilon}|\mathscr{A}}{\hbar}, \quad D \equiv \frac{\omega_1-\omega_0+\gamma}{\beta}, \quad \beta \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2\omega_0^3}{2\hbar c^3}. \quad (15.6.7)$$

Параметр Ω есть не что иное, как частота Раби, и полностью эквивалентен параметру (15.3.12), введенному в полуклассическом рассмотрении. Величина D есть мера расстройки частоты приложенного поля и лэмбовски смещенной частоты резонансного атомного перехода $\omega_0 - \gamma$ в единицах β.

Интегральное уравнение (15.6.5) есть уравнение типа Вольтерра, ядро которого зависит только от разности между двумя временны́ми аргументами. Такое уравнение легко решается методом преобразования Лапласа. Если обозначить изображения по Лапласу функций $\langle \hat{R}_3(\tau)\rangle$ и $K(\tau)$ через $\tilde{R}_3(p)$ и $\tilde{K}(p)$, соответственно, то есть

$$\tilde{R}_3(p) \equiv \int_0^\infty \langle \hat{R}_3(\tau)\rangle\,\mathrm{e}^{-p\tau}\,d\tau, \quad \tilde{K}(p) \equiv \int_0^\infty K(\tau)\,\mathrm{e}^{-p\tau}\,d\tau, \quad (15.6.8)$$

и применить преобразование Лапласа к каждому члену в (15.6.5), то получим уравнение

$$\tilde{R}_3(p) = -\frac{1}{2p} + \tilde{K}(p)\tilde{R}_3(p),$$

решая которое относительно $\tilde{R}_3(p)$, находим

$$\tilde{R}_3(p) = \frac{1}{2p[\tilde{K}(p)-1]}. \quad (15.6.9)$$

Обратное преобразование Лапласа дает

$$\langle \hat{R}_3(\tau)\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+p_r}^{i\infty+p_r} \frac{e^{p\tau}}{2p[\tilde{K}(p)-1]}\,dp, \quad \tau \geqslant 0, \tag{15.6.10}$$

где константа p_r выбирается так, чтобы все особенности подынтегрального выражения лежали слева от линии $\mathrm{Re}\,(p) = p_r$ на комплексной p-плоскости. Несмотря на относительную простоту этого интеграла и ядра $\tilde{K}(p)$, выражение для $\langle \hat{R}_3(t)\rangle$ в общем случае оказывается сложным, и мы приведем лишь окончательный результат. Можно показать (Kimble and Mandel, 1976), что

$$\langle \hat{R}_3(t)\rangle + \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{4}\Omega^2/\beta^2}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1+D^2} - \sum_{\substack{i=1\\ j\neq i\neq k}}^{3} \frac{(2\beta+p_i)[(\beta+p_i)^2+\beta^2D^2]\,e^{p_i t}}{2p_i(p_i-p_j)(p_i-p_k)}, \tag{15.6.11а}$$

где p_1, p_2, p_3 — корни кубического уравнения

$$p^3 + 4\beta p^2 + (5\beta^2+\beta^2D^2+\Omega^2)p + 2\beta^3 + 2\beta^3D^2 + \Omega^2\beta = 0. \tag{15.6.11б}$$

Проведем детальное вычисление только для наиболее простого случая нулевой расстройки, когда три корня уравнения фактически сводятся к двум. Полагая $D = 0$ в (15.6.6) и осуществляя преобразование Лапласа, сразу получим выражение

$$\tilde{K}(p) = \left(\frac{\Omega^2}{\beta}\right)\left[\frac{1}{p+2\beta} - \frac{1}{p+\beta}\right] = \frac{-\Omega^2}{(p+\beta)(p+2\beta)},$$

так что

$$\frac{1}{\tilde{K}(p)-1} = \frac{-(p+\beta)(p+2\beta)}{(p+\beta)(p+2\beta)+\Omega^2} = \frac{-(p+\beta)(p+2\beta)}{(p+\frac{3}{2}\beta+i\Omega')(p+\frac{3}{2}\beta-i\Omega')}, \tag{15.6.12}$$

где $\Omega' \equiv (\Omega^2 - \frac{1}{4}\beta^2)^{1/2}$. Подставляя полученное выражение в (15.6.10) и применяя к интегралу теорему Коши о вычетах, получаем

$$\langle \hat{R}_3(t)\rangle = \frac{-2\beta^2}{2(2\beta^2+\Omega^2)} + \left[\frac{(\frac{1}{2}\beta+i\Omega')(\frac{1}{2}\beta-i\Omega')}{2(-\frac{3}{2}\beta-i\Omega')(-2i\Omega')}\,e^{(-3\beta/2-i\Omega')t} + \text{к.с.}\right] =$$

$$= \left[\frac{-\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1}\right]\left[1 + \left(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2\right)e^{-3\beta t/2}\left(\cos\Omega' t + \frac{3\beta}{2\Omega'}\sin\Omega' t\right)\right],$$

так что средняя энергия атома в момент времени t равна

$$\langle \hat{H}_A(t)\rangle = \hbar\omega_0\left[\langle \hat{R}_3(t)\rangle + \frac{1}{2}\right] = \hbar\omega_0\left[\frac{\frac{1}{4}\Omega^2/\beta^2}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1}\right] \times \left[1 - e^{-3\beta t/2}\left(\cos\Omega' t + \frac{3\beta}{2\Omega'}\sin\Omega' t\right)\right]. \tag{15.6.13}$$

Как только известна величина $\langle \hat{R}_3(t)\rangle + \frac{1}{2}$, средняя интенсивность флуоресцентного света $\langle \hat{I}(\mathbf{r}, t+r/c)\rangle$ в любой точке $\mathbf{r}$ дальнего поля, которая также пропорциональна $\langle \hat{R}_3(t)\rangle + \frac{1}{2}$, сразу же находится по формуле (15.6.3).

Величина $\langle \hat{R}_3(t)\rangle + \frac{1}{2}$, а также интенсивность света, равна нулю в начальный момент времени $t = 0$, чего и следовало ожидать для первоначально невозбужденного атома, а затем растет, приближаясь к своему стационарному значению. Развитие во времени проиллюстрировано на рис. 15.9 для различных значений амплитуды возбуждающего поля и расстройки и подтверждено экспериментально (см. рис. 15.12). В случае резонанса, в относительно слабом возбуждающем поле, приближение к стационарному состоянию имеет почти экспоненциальный характер. Однако в случае сильного поля, когда $\Omega/\beta \gg 1$, наблюдаются затухающие колебания. Это является отражением того факта, что атом испытывает *осцилляции Раби*, как было показано полуклассическими рассуждениями в разд. 15.3. При увеличении расстройки колебательное поведение становится более отчетливым, хотя возбуждение при этом уменьшается. Однако квантовые флуктуации поля всегда приводят в среднем к затуханию, так что среднее значение $\langle \hat{R}_3(t)\rangle + \frac{1}{2}$ стремится к константе в пределе больших времен и имеет верхнюю границу $1/2$ в очень сильном поле.

Следует правильно понимать смысл этого утверждения. Несмотря на то, что энергия атома и интенсивность флуоресцентного света становятся постоянными во времени *в среднем*, это является следствием расфазировки осцилляций Раби. В действительности, возбуждение атома продолжает испытывать осцилляции Раби неограниченно долго. Об этом ясно свидетельствует спектральная плотность флуоресценции, которая, как будет показано ниже, имеет симметричные боковые полосы в стационарном состоянии, говорящие о периодической модуляции возбуждения. Стационарное значение энергии атома $\hbar\omega_0[\langle\hat{R}_3(\infty)\rangle+ +\frac{1}{2}]$ стремится к $\frac{1}{2}\hbar\omega_0$ в сильном поле, что соответствует полувозбужденному атому, в то время как возбуждение атома фактически осциллирует между 0 и 1. Затухающее осциллирующее решение в форме (15.6.11а) можно получить непосредственно из полуклассических уравнений Блоха (15.3.19), в которые искусственно добавлены феноменологические релаксационные члены. Это было сделано впервые Торри (Torrey, 1949).

Наконец, отметим, что когда t становится очень большим, и $\langle\hat{R}_3(t)\rangle$ принимает свое асимптотическое значение, величина $\langle\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle$, которая пропорциональна $\langle\hat{b}(t-r/c)\rangle$, также принимает простой вид. Из (15.5.24) следует с помощью (15.6.1), что в пределе больших времен ($t\to\infty$)

$$\langle\hat{b}(t)\rangle \to -\frac{\frac{1}{2}(\Omega/\beta)(1+iD)}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1+D^2}\,\mathrm{e}^{-i(\omega_1 t-\phi)}. \quad (15.6.14)$$

Из этой формулы видно, что среднее значение поля флуоресценции прямо пропорционально собственному значению оператора приложенного поля (15.6.1), и следует осцилляциям этого поля. Таким образом, флуоресцентное поле не является точно стационарным даже в пределе больших времен, хотя оно имеет некоторые свойства стационарного поля. Мы будем называть его *квазистационарным*. Однако среднее поле не дает исчерпывающего описания. Важной чертой рассматриваемого явления является то, что флуктуации поля флуоресценции не прекращаются в пределе больших времен. Если вычислить безразмерное соотношение

$$\frac{[\langle\hat{\mathbf{E}}^{(-)}\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(+)}\rangle-\langle\hat{\mathbf{E}}^{(-)}\rangle\cdot\langle\hat{\mathbf{E}}^{(+)}\rangle]}{\langle\hat{\mathbf{E}}^{(-)}\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(+)}\rangle},$$

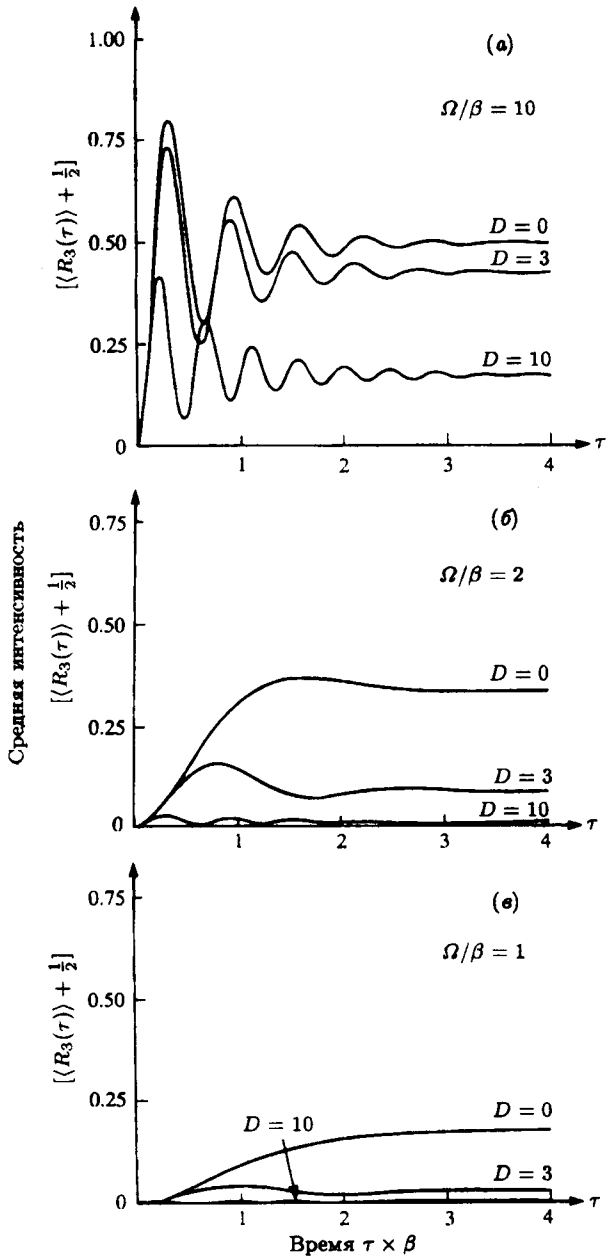


Рис. 15.9. Интенсивность флуоресцентного света, излучаемого вынуждаемым двухуровневым атомом, как функция времени (в единицах $1/\beta$) при различных значениях амплитуды Ω/β возбуждающего поля и при различных значениях расстройки D. Рисунки (*а*) и (*б*) взяты из (Kimble and Mandel, 1976)

то обнаружится, что оно не равно нулю и в пределе больших времен стремится к значению $\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2\times$ $\times[(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1+D^2]$, которое близко к единице, в случае достаточно сильного приложенного поля.

Таким образом, поле флуоресценции не является когерентным в стационарном состоянии, а испытывает квантовые флуктуации. Эти квантовые флуктуации, возможно, являются более очевидными, с точки зрения спектра флуоресценции, который не является монохроматичным в стационарном состоянии, несмотря на монохроматичность вынуждающего поля.

15.6.2. Сечение рассеяния атомов

Из выражений (15.6.3) и (15.6.13) следует, что в пределе больших времен, в стационарном состоянии, интенсивность флуоресцентного света принимает вид

$$\langle \hat{I}(\mathbf{r},\infty)\rangle = \left(\frac{\omega_0^2|\mu_{12}|}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\right)^2 \left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right) \frac{\frac{1}{4}\Omega^2/\beta^2}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1+D^2}.$$

Преобразуем данное выражение в выражение для скорости испускания фотонов. Для этого вспомним, что $2\varepsilon_0\langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle = 2\varepsilon_0\langle\hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle$ есть плотность энергии в пространственно-временно́й точке $\mathbf{r}$, t. Умножая $2\varepsilon_0\langle\hat{I}(\mathbf{r},\infty)\rangle$ на $c/\hbar\omega_0$ приходим к плотности потока флуоресцентных фотонов в стационарном состоянии

Плотность потока флуоресцентных фотонов в точке $\mathbf{r}$ =

$$= \frac{2\varepsilon_0\langle\hat{I}(\mathbf{r},\infty)\rangle c}{\hbar\omega_0} = \frac{3\beta}{4\pi r^2}\left[\frac{\frac{1}{4}\Omega^2/\beta^2}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1+D^2}\right]\left[1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right], \quad (15.6.15)$$

где было использовано определение (15.6.7) для β. Интегрирование этой плотности потока по сфере радиуса r дает полный поток фотонов, т.е. скорость испускания фотонов

Скорость испускания флуоресцентных фотонов =

$$= \frac{3\beta}{4\pi}\left[\frac{\frac{1}{4}\Omega^2/\beta^2}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1+D^2}\right]\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\left[1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right] = \beta\left[\frac{\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1+D^2}\right]. \quad (15.6.16)$$

Данная величина стремится к $\beta = A/2$ в случае достаточно сильного возбуждающего поля, что и следовало ожидать для атома, осциллирующего между возбужденным и основным состояниями.

Сравнивая выражение (15.6.15) для плотности потока флуоресцентных фотонов с соответствующим выражением для плотности потока фотонов, падающих на атом, можно получить выражение для эффективного сечения рассеяния атомом падающих фотонов. Это дает

$$\text{плотность потока падающих фотонов} = \frac{2\varepsilon_0 c}{\hbar\omega_0}\langle\{v\}|\hat{\mathbf{E}}^{(-)}_{\text{своб}}(0,t)\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(+)}_{\text{своб}}(0,t)|\{v\}\rangle,$$

что с учетом (15.6.1) сводится к

$$\text{плотность потока падающих фотонов} = \frac{2\varepsilon_0 c}{\hbar\omega_0}\mathscr{E}^2\omega_0^2.$$

Используя определения (15.6.7) для частоты Раби Ω и константы затухания β, полученный результат выражается в виде

$$\text{плотность потока падающих фотонов} = \frac{\pi\beta}{3\lambda^2}\frac{\Omega^2}{\beta^2},$$

где λ — длина волны падающего света. Отношение плотностей потока флуоресцентного и падающего света, умноженное на r^2, дает эффективное сечение рассеяния $\sigma(\theta)$ атомом падающих фотонов. Следовательно, для рассеяния на угол θ имеем

$$\sigma(\theta) = \frac{9\lambda^2}{16\pi^2}\frac{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1+D^2}. \quad (15.6.17)$$

Сечение максимально при $\theta = 0$, но не равно нулю даже при $\theta = 90°$ в случае рассеяния циркулярно поляризованного света атомом, совершающим переход типа $\Delta m = \pm 1$.

Наконец, интегрируя $\sigma(\theta)$ по всем углам, приходим к выражению для полного сечения рассеяния $\sigma_{\text{т}}$

$$\sigma_{\text{т}} = \frac{9\lambda^2}{16\pi^2}\left[\frac{1}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1+D^2}\right]\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right) = \frac{3\lambda^2}{2\pi}\left[\frac{1}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1+D^2}\right]. \quad (15.6.18)$$

Видно, что сечение рассеяния имеет порядок λ^2 в слабом возбуждающем поле ($\Omega/\beta \ll 1$) около резонанса. Однако, оно спадает как $1/\Omega^2$ в достаточно сильном возбуждающем поле, вследствие отмеченного выше насыщения флуоресценции. Поскольку в данном расчете атом представлялся в виде точечного диполя, его размер, естественно, не входит явно в полученное выражение. В случае реального атома его размер определяет нижний предел сечения рассеяния. Однако выражение (15.6.18) теряет силу задолго до этого предела, ибо при увеличении Ω начинают играть роль другие эффекты, такие, как ионизация атома.

15.6.3. Спектр флуоресценции

Возможно, наиболее простой способ определить спектральную плотность флуоресцентного света, излучаемого вынуждаемым атомом, состоит в вычислении автокорреляционной функции второго порядка $\Gamma^{(1,1)}$, скажем, электрического поля. Согласно (15.5.8) она определяется формулой [см. (15.5.30)]

$$\langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t+\tau)\rangle = \left(\frac{\omega_0^2|\boldsymbol{\mu}_{12}|}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\left\langle \hat{b}^\dagger\left(t-\frac{r}{c}\right)\hat{b}\left(t-\frac{r}{c}+\tau\right)\right\rangle, \tag{15.6.19}$$

при условии, что, как и прежде, справедлива формула (15.6.4). Выражение для спектральной плотности можно получить выполняя преобразование Фурье по τ в стационарном состоянии. Впервые данный спектр вычислил Моллоу (Mollow, 1969), который показал, что он имеет три пика в присутствии сильного возбуждающего поля. Воспользуемся связанными уравнениями движения (15.5.24) и (15.5.25), чтобы получить совместное решение для трех величин

$$\begin{aligned} g(t,\tau) &\equiv \langle \hat{b}_s^\dagger(t)\hat{b}_s(t+\tau)\rangle\, e^{i(\omega_1-\omega_0)\tau},\\ f(t,\tau) &\equiv \langle \hat{b}_s^\dagger(t)\hat{b}_s^\dagger(t+\tau)\rangle\, e^{i(\omega_0-\omega_1)(2t+\tau)}\, e^{2i\phi},\\ h(t,\tau) &\equiv \langle \hat{b}_s^\dagger(t)\hat{R}_3(t+\tau)\rangle\, e^{i(\omega_0-\omega_1)t}\, e^{i\phi}, \end{aligned}$$

которые тесно связаны с тремя атомными корреляционными функциями, введенными Милонни (Milonni, 1974). Эти величины определены таким образом, что они становятся независящими от времени t и фазы ϕ при достаточно больших значениях t. Образуя требуемые произведения величин $\hat{b}_s$, $\hat{b}_s^\dagger$, $\hat{R}_3$ из уравнений (15.5.24) и (15.5.25) и вычисляя средние значения с помощью соотношения (15.6.1), получаем следующие связанные интегральные уравнения (Kimble and Mandel, 1976)

$$g(t,\tau) = \left[\langle \hat{R}_3(t)\rangle + \frac{1}{2}\right] e^{-\beta(1-iD)\tau} + \Omega\int_0^\tau h(t,t')\, e^{\beta(1-iD)(t'-\tau)}\, dt', \tag{15.6.20а}$$

$$f(t,\tau) = \Omega\int_0^\tau h(t,t')\, e^{\beta(1+iD)(t'-\tau)}\, dt', \tag{15.6.20б}$$

$$h(t,\tau) = -\frac{1}{2}\langle \hat{b}^\dagger(t)\rangle\, e^{-i(\omega_1 t-\phi)} - \frac{1}{2}\Omega\int_0^\tau [f(t,t')+g(t,t')]\, e^{2\beta(t'-\tau)}\, dt'. \tag{15.6.20в}$$

При выводе этих уравнений были использованы соотношения

$$\hat{b}_s^\dagger(t)\hat{b}_s^\dagger(t) = 0 = \hat{b}_s^\dagger(t)\left[\hat{R}_3(t)+\frac{1}{2}\right], \tag{15.6.21а}$$

$$[\hat{b}_s(t), \boldsymbol{\mu}_{12}^*\cdot\hat{\mathbf{A}}^{(+)}_{\text{своб}}(0,t+\tau)] = 0 = [\hat{b}_s(t), \boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\hat{\mathbf{A}}^{(-)}_{\text{своб}}(0,t+\tau)]. \tag{15.6.21б}$$

Соотношения (15.6.21а) следуют непосредственно из (15.1.7) и (15.1.8). Соотношения (15.6.21б) выражают тот факт, что поведение атома не влияет на свободное поле на ранних временах (Mollow, 1975; Renaud, Whitley and Stroud, 1976; Agarwal, 1977). Складывая (15.6.20а) и (15.6.20б) и подставляя затем под знак интеграла $h(t,t')$ из (15.6.20в), получаем интегральное уравнение типа Вольтерра для суммы $g(t,\tau)+f(t,\tau)$, которое имеет тот же вид, что и уравнение (15.6.5) для $\langle \hat{R}_3(\tau)\rangle$. Более того, ядро $K(\tau)$, как и прежде, задается формулой (15.6.6), хотя неоднородный член $y(\tau)$ имеет более сложный вид и зависит как от времени t, так и от переменной τ, а именно:

$$y(\tau,t) = \left[\langle \hat{R}_3(t)\rangle + \frac{1}{2}\right] e^{-\beta(1-iD)\tau} - \langle \hat{b}^\dagger(t)\rangle\, e^{-i(\omega_1 t-\phi)}\frac{\Omega}{\beta(1+D^2)}[1-e^{-\beta\tau}(\cos\beta D\tau - D\sin\beta D\tau)]. \tag{15.6.22}$$

Рассмотрим предел больших времен, для которого $\langle \hat{R}_3(t)\rangle$ и $\langle \hat{b}^\dagger(t)\rangle$ получаются из (15.6.11) и (15.6.14). В этом пределе $y(\tau,t)$ зависит только от τ и не зависит от t или ϕ. То же самое справедливо для $g(t,\tau)+f(t,\tau)$. Тогда из уравнений (15.6.20) следует, что все три величины $f(t,\tau)$, $g(t,\tau)$, $h(t,\tau)$ становятся независящими от t и ϕ в пределе больших времен, так что достигается квазистационарное состояние. Эта квазистационарность есть следствие квантовых флуктуаций.

Интегральное уравнение для $g(t,\tau)+f(t,\tau)$ можно решить точно так же, как и раньше, методом преобразования Лапласа. Опять ограничимся случаем точного резонанса ($D=0$) и пределом больших времен $t\to\infty$. В этом случае, с учетом (15.6.13) и (15.6.14), неоднородный член (15.6.22) сводится к

$$y(\tau)=\frac{\frac{1}{4}\Omega^2/\beta^2}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1}\,\mathrm{e}^{-\beta\tau}+\frac{\frac{1}{2}(\Omega/\beta)^2}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1}(1-\mathrm{e}^{-\beta\tau}).$$

Изображение $\tilde{y}(p)$ функции $y(\tau)$ определяется выражением

$$\tilde{y}(p)=\frac{\frac{1}{4}\Omega^2/\beta^2}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1}\,\frac{p+2\beta}{p(p+\beta)}.$$

Решение интегрального уравнения для $g(t,\tau)+f(t,\tau)$ получается интегрированием по контуру, таким же как в формуле (15.6.10), определяющей решение для $\langle \hat{R}_3(\tau)\rangle$. В пределе больших времен находим

$$g(\infty,\tau)+f(\infty,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+p_\tau}^{i\infty+p_\tau}\frac{\tilde{y}(p)}{1-\tilde{K}(p)}\,\mathrm{e}^{p\tau}\,dp=\left\{\frac{\frac{1}{4}\Omega^2/\beta^2}{[(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1]^2}\right\}\times$$
$$\times\left[2+\frac{\mathrm{e}^{-3\beta\tau/2}}{-4\beta^2 i\Omega'}\left\{\left(\frac{1}{2}\beta-i\Omega'\right)^2(-3\beta/2+i\Omega')\,\mathrm{e}^{-i\Omega'\tau}-\left(\frac{1}{2}\beta+i\Omega'\right)^2(-3\beta/2-i\Omega')\,\mathrm{e}^{i\Omega'\tau}\right\}\right]. \quad (15.6.23\text{а})$$

Из (15.6.20а) и (15.6.20б) также следует, что когда $D=0$,

$$g(t,\tau)-f(t,\tau)=\left[\langle \hat{R}_3(t)\rangle+\frac{1}{2}\right]\mathrm{e}^{-\beta\tau},$$

что в пределе больших времен, с учетом (15.6.13), принимает вид

$$g(\infty,\tau)-f(\infty,\tau)=\frac{\frac{1}{4}\Omega^2/\beta^2}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1}\,\mathrm{e}^{-\beta\tau}. \quad (15.6.23\text{б})$$

Следовательно, складывая (15.6.23а) и (15.6.23б), получаем решение для $g(\infty,\tau)$

$$g(\infty,\tau)=\frac{\frac{1}{8}\Omega^2/\beta^2}{[(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1]^2}\left\{2+\left[\left(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2\right)+1\right]\mathrm{e}^{-\beta\tau}+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\mathrm{e}^{-3\beta\tau/2}}{4\beta^2 i\Omega'}\left(\frac{1}{2}\beta+i\Omega'\right)^2\left(-\frac{3}{2}\beta-i\Omega'\right)\mathrm{e}^{i\Omega'\tau}+\text{к.с.}\right]\right\}\quad \tau\geqslant 0. \quad (15.6.24)$$

Для отрицательных τ можно воспользоваться соотношением симметрии $g(\infty,-\tau)=g^*(\infty,\tau)$.

Преобразование Фурье от корреляционной функции поля $\langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t+\tau)\rangle$ относительно τ, которая согласно (15.6.19) пропорциональна $g(t,\tau)$, дает спектральную плотность $\Phi(\mathbf{r},\omega)$ флуоресцентного света в точке $\mathbf{r}$. Таким образом, из (15.6.24) в пределе больших времен и для достаточно сильного

возбуждающего поля, когда $\Omega > \frac{1}{2}\beta$ и величина Ω' является действительной, имеем

$$\Phi(\mathbf{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t+\tau)\rangle\, e^{i\omega\tau}\, d\tau = \left(\frac{\omega_0^2|\mu_{12}|}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\right)^2 \left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right) 2\int_0^{\infty} g(\infty,\tau)\, e^{i(\omega-\omega_1)\tau}\, d\tau =$$
$$= \left(\frac{\omega_0^2|\mu_{12}|}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\right)^2 \left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right) \left(\frac{\frac{1}{4}\Omega^2/\beta^2}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1}\right) \left[\frac{2\pi\delta(\omega-\omega_1)}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1} + \frac{\beta}{\beta^2+(\omega-\omega_1)^2} + \right.$$
$$+ \left(\frac{\frac{1}{2}\beta}{\Omega^2+2\beta^2}\right) \frac{4\Omega^2-4\beta^2+(5\Omega^2/2-\beta^2)(\omega-\omega_1)/\Omega'}{9\beta^2/4+(\omega-\omega_1+\Omega')^2} +$$
$$\left. + \left(\frac{\frac{1}{2}\beta}{\Omega^2+2\beta^2}\right) \frac{4\Omega^2-4\beta^2-(5\Omega^2/2-\beta^2)(\omega-\omega_1)/\Omega'}{9\beta^2/4+(\omega-\omega_1-\Omega')^2}\right]. \quad (15.6.25а)$$

В частном случае, когда $\Omega \gg \beta$, спектральная плотность может быть выражена в более простом и привычном виде:

$$\Phi(\mathbf{r},\omega) = \left(\frac{\omega_0^2|\mu_{12}|}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\right)^2 \left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right) \left[\frac{2\pi\delta(\omega-\omega_1)}{\Omega^2/\beta^2} + \frac{\beta/2}{\beta^2+(\omega-\omega_1)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{3\beta/8}{9\beta^2/4+(\omega-\omega_1+\Omega')^2} + \frac{3\beta/8}{9\beta^2/4+(\omega-\omega_1-\Omega')^2}\right]. \quad (15.6.25б)$$

Отметим, что данное выражение естественно разбивается на сумму четырех вкладов. Первый член, пропорциональный $\delta(\omega-\omega_1)$, соответствует свету внешнего поля, который упруго рассеивается атомом и, следовательно, имеет то же спектральное распределение, что и приложенное поле. Хотя этот член равен бесконечности при $\omega=\omega_1$ в случае монохроматичного возбуждения, полный вклад упругого рассеяния фактически становится соразмерно малым после интегрирования по всем частотам, если возбуждающее поле сильное ($\Omega/\beta \gg 1$). Оставшиеся три члена в (15.6.25б) описывают неупруго рассеянный свет, и соответствующее спектральное распределение в общем случае отличается от распределения приложенного поля. Оно имеет три острых максимума, каждый из которых имеет лоренцеву форму. Центральная составляющая имеет максимум на частоте вынуждающего поля ω_1 и полуширину β, тогда как две боковые полосы смещены от ω_1 на модифицированную частоту Раби Ω' и имеют полуширины $\frac{3}{2}\beta$. Эти две последние составляющие, высота которых равна $\frac{1}{3}$ от высоты центрального пика неупруго рассеянного света, соответствуют осцилляциям Раби атомного возбуждения. Данное расщепление спектральной линии на три составляющие иногда называется *динамическим эффектом Штарка*. Это явление было впервые предсказано Моллоу (Mollow, 1969) и впервые наблюдалось в эксперименте по резонансной флуоресценции на пучке атомов натрия в работе (Schuda, Stroud and Herscher, 1974). Атомы возбуждались пучком света от перестраиваемого лазера на красителе, который падал на атомный пучок под прямым углом. Флуоресцентный свет анализировался сканирующим интерферометром Фабри-Перо. Атомный пучок был необходим для получения доплеровского уширения спектральной линии. Результаты поздних и несколько более точных измерений показаны на рис. 15.10. С учетом инструментальной ширины интерферометра, было получено очень хорошее согласие с формулой (15.6.25). Во всех этих экспериментах возбуждающее поле было относительно сильным ($\Omega/\beta \geqslant 1$).

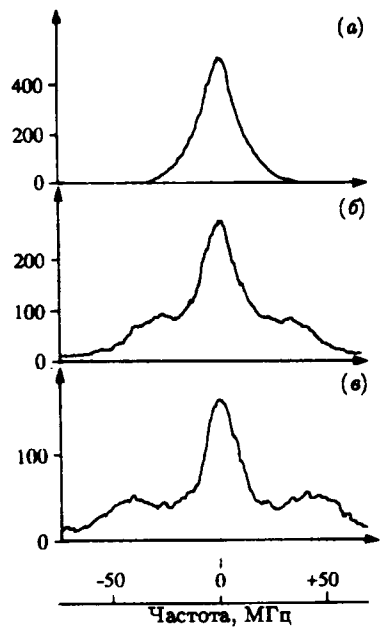


Рис. 15.10. Спектр флуоресценции атомов натрия около резонанса при различных значениях мощности возбуждающего поля: *а* — 85 мВт/см^2, *б* — 490 мВт/см^2, *в* — 920 мВт/см^2 (Wu, Grove and Ezekiel, 1975)

Если возбуждающее поле настолько слабое, что $\Omega < (1/2)\beta$, то Ω' является комплексной величиной, и величина $g(\infty,\tau) + f(\infty,\tau)$, задаваемая формулой (15.6.23а) представляет собой сумму константы и двух

чисто экспоненциальных вкладов. В результате величина $g(\infty,\tau)$ становится также экспоненциальной с точностью до константы. Соответствующая спектральная плотность $\Phi(\mathbf{r},\omega)$ имеет тогда только один пик при $\omega=\omega_1$, добавляемый к вкладу $\delta(\omega-\omega_1)$. Причина этого становится очевидной, если обратиться к рис. 15.9. В слабом возбуждающем поле нет осцилляций Раби, а именно, эти осцилляции отвечают за два боковых максимума в спектральной плотности на частотах $\omega_1\pm\Omega'$, которые показаны на рис. 15.10. Кроме того, в слабом возбуждающем поле, когда $\Omega/\beta\ll 1$, составляющая упругого рассеяния в (15.6.25) становится относительно более важной, что приводит к сужению спектра флуоресценции. Этот эффект наблюдался в работе (Gibbs and Venkatesan, 1976). При учете конечной ширины спектра возбуждающего лазерного пучка, если она значительна, становится заметной асимметрия спектральной плотности (Agarwal, 1976; Eberly, 1976; Kimble and Mandel, 1977).

В заключение упомянем о том, что неупругий вклад в стационарный спектр флуоресценции (15.6.25), имеет физический смысл, выходящий за рамки физического смысла соответствующего спектра спонтанного излучения. В слабом возбуждающем поле оба спектра сводятся к одиночному лоренцевому пику с шириной 2β. Однако в случае спонтанного излучения первоначально возбужденного атома мы имеем дело с излучением конечной порции энергии. Следовательно, процесс излучения должен прекратиться, и соответствующая ширина полосы должна быть отлична от нуля. Это имеет место даже в полуклассической теории. С другой стороны, в процессе резонансной флуоресценции атом непрерывно возбуждается (в наших вычислениях — строго монохроматическим полем) и, тем не менее, излучает поле с отличной от нуля шириной спектра. Это можно рассматривать как проявление квантовых флуктуаций, которые присущи связанной системе "атом + поле". Эти квантовые флуктуации проявляются более разительно в корреляциях интенсивности флуоресценции.

15.6.4. Корреляция интенсивности флуоресценции

Как мы увидели в гл. 14, совместная вероятность того, что фотодетектор, облучаемый флуоресцентным светом, зарегистрирует два фотона в моменты времени t и $t+\tau$, пропорциональна нормально и хронологически упорядоченной корреляционной функции четвертого порядка

$$\Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r};t,t+\tau)\equiv\langle\hat{E}_i^{(-)}(\mathbf{r},t)\hat{E}_j^{(-)}(\mathbf{r},t+\tau)\hat{E}_j^{(+)}(\mathbf{r},t+\tau)\hat{E}_i^{(+)}(\mathbf{r},t)\rangle=\langle\mathscr{T}:\hat{I}(\mathbf{r},t)\hat{I}(\mathbf{r},t+\tau):\rangle. \qquad (15.6.26)$$

Поскольку эту вероятность можно измерить непосредственно, обратимся к вычислению корреляционной функции интенсивности $\Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r};t,t+\tau)$. Используя положительно- и отрицательно-частотные части $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, задаваемые формулой (15.5.8), коммутационные соотношения (15.6.21) и условие (15.6. 4), находим, что

$$\Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r};t,t+\tau)=\left(\frac{\omega_0^2|\boldsymbol{\mu}_{12}|}{4\pi\varepsilon_0c^2r}\right)^4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)^2\left\langle\hat{b}_s^\dagger\left(t-\frac{r}{c}\right)\hat{b}_s^\dagger\left(t-\frac{r}{c}+\tau\right)\hat{b}_s\left(t-\frac{r}{c}+\tau\right)\hat{b}_s\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle=$$

$$=\left(\frac{\omega_0^2|\boldsymbol{\mu}_{12}|}{4\pi\varepsilon_0c^2r}\right)^4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)^2\times$$

$$\times\left[\left\langle\hat{b}_s^\dagger\left(t-\frac{r}{c}\right)\hat{R}_3\left(t-\frac{r}{c}+\tau\right)\hat{b}_s\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle\hat{R}_s\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle+\frac{1}{4}\right],\quad\tau\geqslant 0. \qquad (15.6.27)$$

Второе слагаемое было вычислено ранее [см. формулу (15.6.11а)]. Для того, чтобы вычислить первое слагаемое, удобно ввести две атомные корреляционные функции (ср. Kimble and Mandel, 1976)

$$\mathscr{H}(t,\tau)\equiv\langle\hat{b}_s^\dagger(t)\hat{R}_3(t+\tau)\hat{b}_s(t)\rangle,$$
$$\mathscr{F}(t,\tau)\equiv\langle\hat{b}_s^\dagger(t)\hat{b}_s^\dagger(t+\tau)\hat{b}_s(t)\rangle\,e^{i(\omega_0-\omega_1)(t+\tau)}\,e^{i\phi},$$

которые становятся независящими от t и ϕ в пределе больших времен $t\to\infty$. Расписывая эти корреляционные функции с использованием уравнений (15.5.24) и (15.5.25), а также соотношений (15.6.1) и (15.6.21),

получаем связанные интегральные уравнения

$$\mathscr{H}(t,\tau) = -\frac{1}{2}\left[\langle \hat{R}_3(t)\rangle + \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2}\Omega\int_0^\tau [\mathscr{F}(t,t') + \mathscr{F}^*(t,t')]\,\mathrm{e}^{-2\beta(\tau-t')}\,dt', \tag{15.6.28}$$

$$\mathscr{F}(t,\tau) = \Omega\int_0^\tau \mathscr{H}(t,t')\,\mathrm{e}^{-\beta(1+iD)(\tau-t')}\,dt'. \tag{15.6.29}$$

Подставляя $\mathscr{F}(t,t')$ и $\mathscr{F}^*(t,t')$, получаемые из второго уравнения, в первое уравнение (15.6.28) и интегрируя по частям, приходим к интегральному уравнению для $\mathscr{H}(t,\tau)$, которое опять имеет вид (15.6.5), с таким же, как и раньше ядром $K(\tau)$, но с неоднородным членом

$$y(\tau,t) = -\frac{1}{2}\left[\langle \hat{R}_3(t)\rangle + \frac{1}{2}\right], \tag{15.6.30}$$

вместо $y(\tau) = -\frac{1}{2}$, имевшимся в уравнении для средней атомной инверсии $\langle \hat{R}_3(\tau)\rangle_{\mathrm{G}}$. Мы добавили индекс G, чтобы отметить, что атом в первоначальный момент времени $\tau = 0$ находился в основном состоянии. Новый неоднородный член также не зависит от переменной τ интегрального уравнения, хотя зависит от t. Поскольку решение интегрального уравнения прямо пропорционально неоднородному члену, если последний — константа, то можно сразу записать ответ, используя предыдущие результаты:

$$\mathscr{H}(t,\tau) = \left[\left\langle \hat{R}_3(t)\right\rangle + \frac{1}{2}\right]\langle \hat{R}_3(\tau)\rangle_{\mathrm{G}}. \tag{15.6.31}$$

Тогда из (15.6.27) и (15.6.31) имеем

$$\Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}t, t+\tau) = \left(\frac{\omega_0^2|\boldsymbol{\mu}_{12}|}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\right)^4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)^2\left[\left\langle \hat{R}_3\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\rangle + \frac{1}{2}\right]\left[\langle \hat{R}_3(\tau)\rangle_{\mathrm{G}} + \frac{1}{2}\right], \quad \tau \geqslant 0, \tag{15.6.32}$$

или, пренебрегая временем прохождения r/c,

$$\langle \mathscr{T} : \hat{I}(\mathbf{r},t)\hat{I}(\mathbf{r},t+\tau) :\rangle = \langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle\langle \hat{I}(\mathbf{r},\tau)\rangle_{\mathrm{G}}. \tag{15.6.33}$$

Этот удивительно простой результат имеет естественную физическую интерпретацию. Первый множитель $\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle$ в правой части пропорционален вероятности того, что один фотон испущен или зарегистрирован в момент времени t, и становится константой в стационарном состоянии. Но в процессе испускания фотона в момент времени t атом совершает квантовый скачок в основное состояние, так что второй множитель $\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle_{\mathrm{G}}$ пропорционален вероятности того, что другой фотон будет испущен через время задержки τ, при условии, что атом находится в основном состоянии при $\tau = 0$. Средняя интенсивность света $\langle \hat{I}(\mathbf{r},t)\rangle_{\mathrm{G}}$ задается выражениями (15.6.3) и (15.6.13), и зависимость ее от τ показана на рис. 15.9. Она всегда равна нулю в момент $\tau = 0$ и затем растет при увеличении τ, как показано на рис. 15.9. Это совсем не похоже на классическую корреляционную функцию, которая может стать меньше своего начального значения при $\tau = 0$, но никогда не может превзойти его. Фотоэлектрические импульсы, создаваемые падающим на фотодетектор светом флуоресценции, должны, следовательно, демонстрировать антигруппировку, как обсуждалось подробно в разд. 14.7.

15.6.5. Измерения антигруппировки фотонов

Антигруппировка фотонов впервые наблюдалась в экспериментах по измерению двухвременны́х фотоэлектрических корреляций флуоресцентного света, создаваемого одиночными атомами натрия в атомном пучке (Kimble, Dagenais and Mandel, 1977, 1978; Dagenais and Mandel, 1978). На рис. 15.11 показана использованная в эксперименте установка. Атомы натрия, вылетающие из печи в виде атомного пучка диаметром 100 мкм, возбуждались перпендикулярно (циркулярно поляризованным) световым пучком перестраиваемого лазера на красителе. Флуоресцентный свет фокусировался макроскопическим объективом и отображался на два фотодетектора. Фотоэлектрические импульсы, производимые этими детекторами,

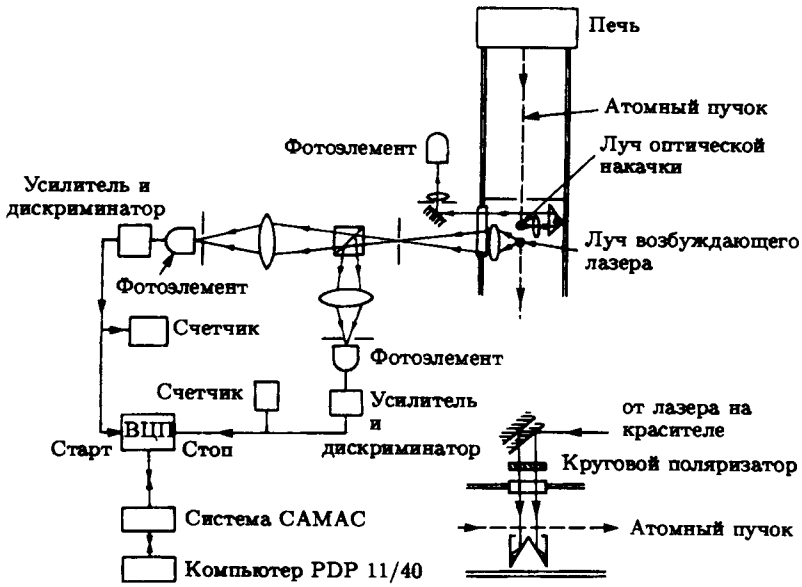


Рис. 15.11. Схема установки, использованной для измерений двухвременны́х корреляций фотонов (Dagenais and Mandel, 1978)

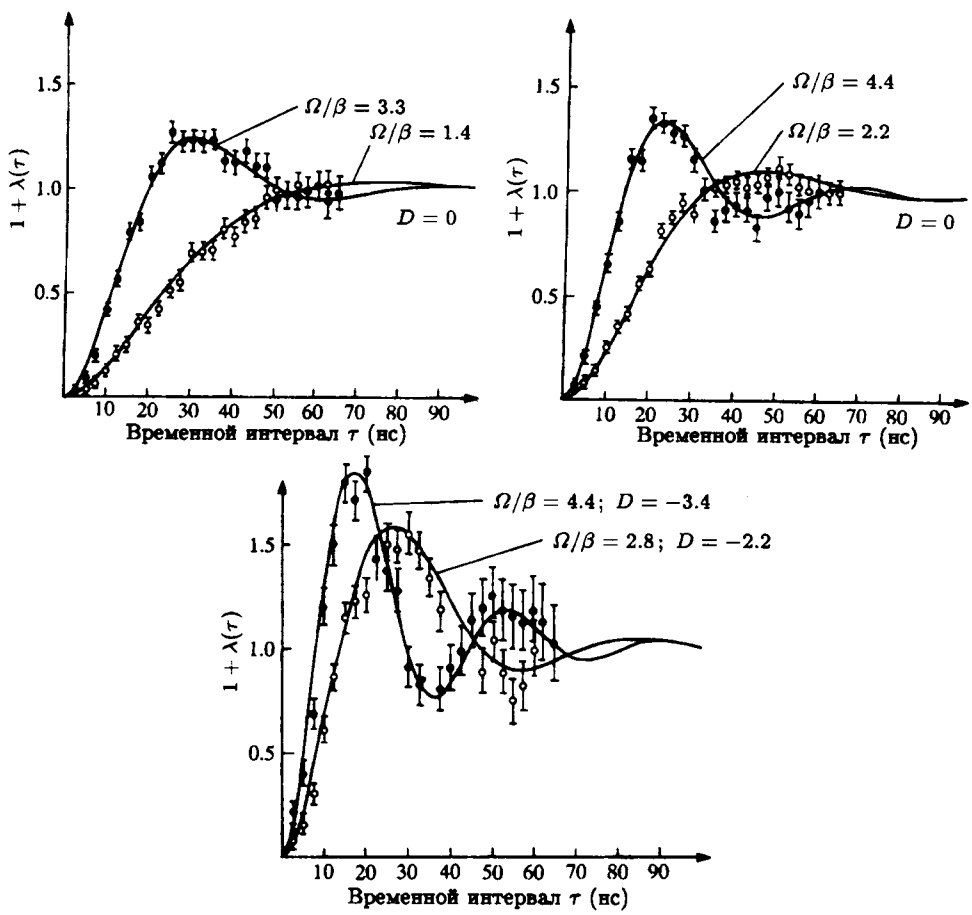


Рис. 15.12. Результаты измерений двухвременны́х корреляций фотонов, испускаемых одним вынуждаемым атомом при различных значениях амплитуды возбуждающего поля Ω/β и расстройки D. Сплошные кривые — результаты теоретического расчета. Все они демонстрируют антигруппировку (из работы Dagenais and Mandel, 1978)

подавались на «старт»- и «стоп»-входы время-цифрового преобразователя (ВЦП), который регистрировал разделяющий их временно́й интервал τ. Число $n(\tau)$ импульсных пар, зарегистрированных с временны́м интервалом τ, есть непосредственная мера вероятности совместного фотодетектирования и, следовательно, величины $\Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r};t,t+\tau)$. В действительности, атомы проходят последовательно через два световых пучка, первый из которых играет роль оптической накачки и используется только для приготовления некоторого начального квантового состояния (состояние $3^2S_{1/2}$, $F=2$, $m_F=2$). Когда возбуждающий лазерный пучок циркулярно поляризован и настроен на переход с уровня $3^2S_{1/2}$, $F=2$ на уровень $3^2P_{3/2}$, $F=3$ атома натрия, правила отбора для дипольного излучения допускают лишь переход с магнитного подуровня $3^2S_{1/2}$, $F=2$, $m_F=2$ на уровень $3^2P_{3/2}$, $F=3$, $m_F=3$. Следовательно, атомы в хорошем приближении ведут себя, как двухуровневые квантовые системы, и можно использовать развитую выше теорию.

На рис. 15.12 показаны результаты, полученные для нормированной корреляционной функции интенсивности в стационарном состоянии или в пределе больших времен $t\to\infty$, а именно:

$$1+\lambda(\tau)=\frac{\langle\mathscr{T}:\hat{I}(\mathbf{r},t)\hat{I}(\mathbf{r},t+\tau):\rangle}{\langle\hat{I}(\mathbf{r},\infty)\rangle^2}, \tag{15.6.34}$$

после некоторой корректировки данных. Сплошные кривые есть результат теоретического расчета по формуле (15.6.32). Данный эксперимент предоставил первый пример антигруппировки фотонов и продемонстрировал квантовый характер электромагнитного поля. Тот факт, что все кривые начинаются с нуля в момент $\tau=0$ является экспериментальным подтверждением того, что атом испытывает квантовый скачок в основное состояние в момент испускания фотона, поскольку он неспособен испустить второй фотон сразу после первого. Такие квантовые скачки противоречат любой классической картине излучения.

15.6.6. Субпуассоновская статистика фотонов

Как видно из (15.6.33), если число n регистрируемых флуоресцентных фотонов, испущенных атомом за короткий временно́й интервал T счетно, то статистика фотонов должна быть субпуассоновской. В разд. 14.9 было показано [см. формулы (14.9.11) и (14.9.12)], что дисперсия n задается выражением

$$\langle(\Delta n)^2\rangle=\langle n\rangle(1+\langle n\rangle\theta(T)/T), \tag{15.6.35}$$

где функция $\theta(T)$ определяется интегралом

$$\theta(T)\equiv\int_{-T}^{T}(1-|\tau|/T)\lambda(\tau)\,d\tau.$$

Для достаточно короткого временно́го интервала $T\ll 1/\beta$ и $T\ll 1/\Omega$, величину $\lambda(\tau)$ под знаком интеграла можно заменить величиной $\lambda(0)$, так что

$$\theta(T)\approx\lambda(0)\int_{-T}^{T}(1-|\tau|/T)\,d\tau=\lambda(0)T. \tag{15.6.36}$$

Следовательно, дисперсия принимает вид

$$\langle(\Delta n)^2\rangle=\langle n\rangle(1+\lambda(0)\langle n\rangle). \tag{15.6.37}$$

Но из (15.6.33) и (15.6.34) следует, что $1+\lambda(0)=0$, или

$$\lambda(0)=-1, \tag{15.6.38}$$

так что

$$\langle(\Delta n)^2\rangle=\langle n\rangle(1-\langle n\rangle). \tag{15.6.39}$$

Следовательно, регистрируемые фотоны являются субпуассоновскими, хотя отклонение от статистики Пуассона может быть очень малым, когда $\langle n\rangle\ll 1$. Параметр Q, характеризующий отклонение от статистики Пуассона, задается формулой [ср. (14.9.13)]

$$Q=[\langle(\Delta n)^2\rangle-\langle n\rangle]/\langle n\rangle=-\langle n\rangle. \tag{15.6.40}$$

Подобным же образом легко показать, что статистика является субпуассоновской в пределе больших времен $T \to \infty$, когда

$$\theta(T) \to 2\int_0^\infty \lambda(\tau)\,d\tau. \tag{15.6.41}$$

С помощью (15.6.33) легко находим, что в стационарном состоянии

$$\lambda(\tau) = \frac{\langle \hat{I}(\mathbf{r},\tau)\rangle_G}{\langle \hat{I}(\mathbf{r})\rangle} - 1, \quad (\tau \geqslant 0),$$

так что

$$\theta(T) \Rightarrow \frac{2}{\langle \hat{I}(\mathbf{r})\rangle}\int_0^\infty \langle \hat{I}(\mathbf{r},\tau)\rangle_G\,d\tau. \tag{15.6.42}$$

Можно показать с помощью (15.6.13), что (Mandel, 1979a)

$$\theta(T) \to -\frac{3}{\beta}\frac{1}{(\Omega^2/2\beta^2)+1}, \tag{15.6.43}$$

так что в пределе больших времен

$$Q = -\frac{3\langle n\rangle}{\beta T}\frac{1}{(\Omega^2/2\beta^2)+1}. \tag{15.6.44}$$

Величина Q всегда отрицательна, но может быть очень мала по абсолютной величине, когда фиксируется малое число испущенных фотонов.

Первое экспериментальное подтверждение субпуассоновской статистики фотонов в явлении резонансной флуоресценции было сделано в работе (Short and Mandel, 1983a, b), где было получено значение Q равное -0.002. Фактически, в явлении резонансной флуоресценции впервые проявилась неклассическая статистика отсчетов[1].

Атомная резонансная флуоресценция является примером явления, которое нельзя адекватно описать полуклассической теорией, каким бы интенсивным или «классическим» ни было возбуждающее поле, поскольку флуоресценция всегда проявляет квантовые свойства.

15.7. Отклонение атомов светом

В предыдущем рассмотрении взаимодействия атома с околорезонансным пучком света полностью игнорировалось любое движение атома. В действительности как в процессе поглощения, так и в процессе испускания фотона, атому должно сообщаться некоторое количество движения, что может проявиться в отклонении атомной траектории. Кроме того, эта передача импульса может привести к доплеровскому сдвигу частоты возбуждающего света в системе отсчета движущегося атома. При этом частота возбуждающего света становится либо ближе, либо дальше от резонансного значения. Учет отдачи атома существенно усложняет рассмотрение резонансной флуоресценции и не будет обсуждаться здесь (Baklanov and Dubetskii, 1976; Lam and Berman, 1976; Agarwal and Saxena, 1978; Stenholm, 1978; Cook and Bernhardt, 1978). Однако можно воспользоваться некоторыми результатами предыдущих параграфов для вычисления отдачи в случае малых доплеровских сдвигов. Если фотон с энергией ~ 2 эВ поглощается, скажем, атомом натрия, то атом приобретает скорость отдачи около 3 см/с, что приводит к максимальному доплеровскому сдвигу около 50000 Гц. Это значение намного меньше естественной ширины линии, так что доплеровскими сдвигами, обусловленными данным взаимодействием, можно благополучно пренебречь, пока мы имеем дело с малым числом поглощений и испусканий. Ситуация, конечно, становится совершенно другой, когда атомы длительно взаимодействуют с достаточно сильным полем. В этом случае атомы могут быть как охлаждены, так и захвачены светом.

Со стороны падающего света на атом может действовать два фундаментально различных типа сил. Отличие определяется тем, является ли переизлучение атомом поглощенного фотона вынужденным или

[1] Обзор более поздних экспериментов, демонстрирующих неклассическую статистику, имеется в работах (Teich and Saleh, 1988, 1990).

спонтанным. Поскольку спонтанное испускание может произойти почти в любом случайно выбранном направлении, средний импульс, сообщаемый атому в результате спонтанного испускания, равен нулю. Следовательно, результирующий импульс, сообщаемый в результате поглощения и переизлучения, равен среднему импульсу, сообщаемому только после поглощения. С другой стороны, если переизлучение стимулируется присутствием сильного резонансного электромагнитного поля, то существует определенное направление передачи импульса при поглощении и определенное направление передачи при испускании. В случае плоской волны эти направления, конечно, одинаковы, так что результирующая передача импульса (или сила) отсутствует. Однако если электромагнитное поле неоднородно, то в общем случае направления вектора Пойтинга во время поглощения и во время испускания фотона движущимся атомом будут разными. Поэтому результирующий импульс, сообщаемый движущемуся атому в неоднородном электромагнитном поле, будет отличен от нуля. Результирующую силу, называемую *дипольной или градиентной силой*, можно объяснить через взаимодействие индуцированного атомного дипольного момента с осциллирующим полем, не прибегая к квантованию поля. Эта сила была впервые исследована Летоховым (Letokhov, 1968) и Ашкиным (Ashkin, 1978) и наблюдалась в экспериментах по фокусировке атомного пучка (Bjorkholm, Freeman, Ashkin and Pearson, 1978).

Тема воздействия околорезонансного света на движущиеся атомы в последние годы быстро развилась и породила обширную литературу, поэтому в последующих параграфах мы лишь коснемся некоторых важных вопросов (см., например, Cohen-Tannoudji, 1992). Прежде всего, вычислим импульс, передаваемый атому в процессе спонтанного излучения.

15.7.1. Передача импульса после n спонтанных испусканий

Для упрощения задачи предположим, что двухуровневый атом первоначально либо покоится, либо движется точно под прямым углом к пучку света с волновым вектором $\mathbf{k}_0$, частота которого близка к частоте атомного перехода ω_0. Далее будем следовать рассуждениям Манделя (Mandel, 1979b). Каждый раз, когда атом поглощает из поля фотон и становится возбужденным, ему сообщается импульс $\hbar\mathbf{k}_0$, а всякий раз, когда атом испускает фотон с волновым вектором $\mathbf{k}_1$ и возвращается в основное состояние, он отталкивается и приобретает дополнительный импульс $-\hbar\mathbf{k}_1$. Если испускание фотона вынужденное, то $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0$ и результирующий импульс, сообщаемый атому, равен нулю. Однако после каждого спонтанного испускания атому передается результирующий импульс $\hbar(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1)$. После n спонтанных испусканий фотонов с волновыми векторами $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n$ атом приобретает дополнительный импульс

$$\mathbf{p} = \hbar(n\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \ldots - \mathbf{k}_n). \tag{15.7.1}$$

Из разд. 15.5 и 15.6 известно, что вероятность регистрации спонтанно испущенного фотона в точке $\mathbf{r}$ дальнего поля атома, находящегося в начале системы координат, пропорциональна выражению $|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2 - |\boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \mathbf{r}|^2/r^2$, и регистрацию фотона в точке $\mathbf{r}$ можно рассматривать как регистрацию фотона, имеющего волновой вектор $\mathbf{k}$, такой что $\mathbf{r}/r = \mathbf{k}/k$. Частота испущенного фотона может, конечно, отличаться от частоты возбуждающего фотона, но относительная разность частот обычно очень мала и ею можно пренебречь, рассматривая передачу импульса. Таким образом, в хорошем приближении можно записать следующее выражение для вероятности $P_1(\mathbf{k})d^3k$ того, что спонтанно испущенный фотон имеет волновой вектор $\mathbf{k}$ в интервале d^3k

$$P_1(\mathbf{k})\,d^3k = C\left(|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2 - \frac{|\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\mathbf{k}|^2}{k^2}\right)\delta(k - k_0)\,d^3k, \tag{15.7.2}$$

где C — нормировочный множитель. Поскольку атом возвращается в основное состояние после каждого спонтанного испускания, волновые векторы последовательно испущенных фотонов независимы, и совместная плотность вероятности $P_n(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n)$ того, что волновые векторы n спонтанно испущенных фотонов равны $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n$, определяется выражением

$$P_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)\,d^3k_1 \ldots d^3k_n = C^n \prod_{r=1}^{n}\left[\left(|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2 - \frac{|\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\mathbf{k}_r|^2}{k_r^2}\right)\delta(k_r - k_0)\,d^3k_r\right]. \tag{15.7.3}$$

С учетом (15.7.1), отсюда сразу следует, что вероятность $\mathscr{P}_n(\mathbf{p})\,d^3p$ того, что атом приобретает импульс

$\mathbf{p}$ в интервале d^3p после n актов поглощения и спонтанного испускания, равна

$$\mathscr{P}_n(\mathbf{p})\,d^3p = \int\ldots\int P_n(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n)\delta^3(\mathbf{p}-n\hbar\mathbf{k}_0+\hbar\mathbf{k}_1+\ldots+\hbar\mathbf{k}_n)\,d^3k_1\ldots d^3k_n = \\ = \int \mathscr{P}_{n-1}(\mathbf{p}')P_1(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,d^3p', \quad (15.7.4)$$

где P_n задается выражением (15.7.3).

Из этого соотношения непосредственно следует ряд общих свойств моментов передаваемого импульса $\mathbf{p}$. Например, средний импульс $\langle\mathbf{p}\rangle_n$, передаваемый атому после n поглощений и испусканий, задается выражением

$$\langle\mathbf{p}\rangle_n = \int \mathbf{p}\mathscr{P}_n(\mathbf{p})\,d^3p = \\ = \int\ldots\int(\mathbf{p}'+n\hbar\mathbf{k}_0-\hbar\mathbf{k}_1-\ldots-\hbar\mathbf{k}_n)P_1(\mathbf{k}_1)\ldots P_1(\mathbf{k}_n)\delta^3(\mathbf{p}')\,d^3k_1\ldots d^3k_n\,d^3p' = n\hbar\mathbf{k}_0 \quad (15.7.5)$$

и равен импульсу поглощенных фотонов, поскольку импульс спонтанно испущенных фотонов при усреднении дает нуль. Второй момент импульса $\mathbf{p}$ получается таким же образом и оказывается равным

$$\langle\mathbf{p}^2\rangle_n = \int \mathbf{p}^2\mathscr{P}_n(\mathbf{p})\,d^3p \\ = \int\ldots\int(\mathbf{p}'+n\hbar\mathbf{k}_0-\hbar\mathbf{k}_1-\ldots-\hbar\mathbf{k}_n)^2P_1(\mathbf{k}_1)\ldots P_1(\mathbf{k}_n)\delta^3(\mathbf{p}')\,d^3k_1\ldots d^3k_n\,d^3p' = n^2(\hbar\mathbf{k}_0)^2+n\hbar^2\langle\mathbf{k}^2\rangle_1,$$

так что

$$\langle(\Delta\mathbf{p})^2\rangle_n = n\langle(\Delta\mathbf{p})^2\rangle_1. \quad (15.7.6)$$

Таким образом, дисперсия импульса прямо пропорциональна числу поглощений и испусканий. В отличие от среднего значения передаваемого импульса, которое согласно (15.7.5) возрастает только в направлении падающего светового пучка, дисперсия импульса $\mathbf{p}$ возрастает во всех направлениях. Можно показать, что r-ый кумулянт импульса, сообщаемого после n спонтанных испусканий в n раз больше, чем r-ый кумулянт импульса, сообщаемого после одного испускания (Mandel, 1979b). При увеличении n форма $\mathscr{P}_n(\mathbf{p})$ приближается к гауссовской, что следует из центральной предельной теоремы и из того факта, что направления последовательно испущенных фотонов случайны и независимы. Более того, можно легко показать из (15.7.4), что

$$\mathscr{P}_n(2n\hbar\mathbf{k}_0-\mathbf{p}) = \mathscr{P}_n(\mathbf{p}), \quad (15.7.7)$$

так что распределение $\mathscr{P}_n(\mathbf{p})$ симметрично относительно $n\hbar\mathbf{k}_0$.

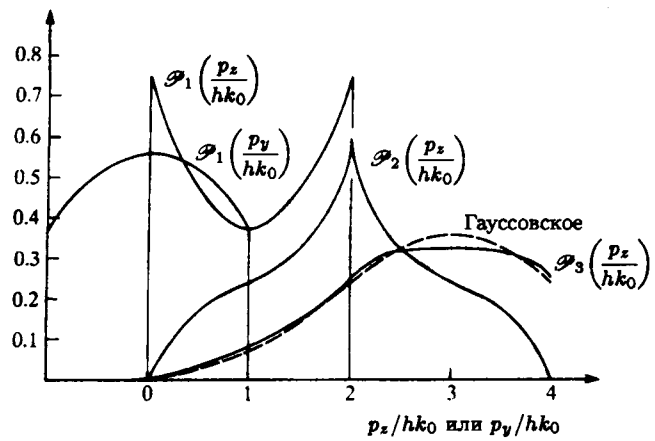


Рис. 15.13. Некоторые теоретические распределения вероятностей импульса, сообщаемого атому после поглощения и испускания 1-го, 2-х и 3-х фотонов. Пунктирная линия — асимптотическое гауссовское распределение. (Из работы Mandel, 1979b)

Вычислим теперь $\mathscr{P}_1(\mathbf{p})$ явно. Если атомный переход является переходом типа $\Delta m = \pm 1$, а падающее поле циркулярно поляризовано и распространяется в направлении оси z, то $\boldsymbol{\mu}_{12} = |\boldsymbol{\mu}_{12}|(\mathbf{x}_1 + i\mathbf{y}_1)/\sqrt{2}$, где $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$ — единичные вектора в направлении осей x, y. Тогда

$$\left(|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2 - \frac{|\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\mathbf{k}|^2}{k^2}\right)\delta(k-k_0) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2\left(1+\frac{k_z^2}{k_0^2}\right)\delta(k-k_0),$$

и из (15.7.2) после вычисления и подстановки нормировочного множителя следует

$$P_1(\mathbf{p})\,d^3k = \frac{3}{16\pi k_0^2}\left(1+\frac{k_z^2}{k_0^2}\right)\delta(k-k_0)\,d^3k. \tag{15.7.8}$$

Интегрируя по двум переменным и используя (15.7.4), для распределений атомного импульса получаем

$$\mathscr{P}_1(p_z) = \begin{cases} \dfrac{3}{8\hbar k_0}\left[1+\left(1-\dfrac{p_z}{\hbar k_0}\right)^2\right], & \text{если } 0 \leqslant p_z \leqslant 2\hbar k_0 \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{15.7.9}$$

и

$$\mathscr{P}_1(p_y) = \begin{cases} \dfrac{3}{8\hbar k_0}\left[\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p_y}{\hbar k_0}\right)^2\right], & \text{если } |p_y| \leqslant \hbar k_0 \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{15.7.10}$$

и аналогично для $\mathscr{P}_1(p_x)$. Распределения более высокого порядка получаются отсюда с помощью (15.7.4).

Некоторые распределения вероятности переданного импульса показаны на рис. 15.13. Отметим, что распределение $\mathscr{P}_1(p_y)$ симметрично относительно начала координат, поскольку $\langle p_y\rangle_1 = 0$, тогда как $\mathscr{P}_1(p_z)$, $\mathscr{P}_2(p_z)$, $\mathscr{P}_3(p_z)$ симметричны относительно значений $\hbar k_0$, $2\hbar k_0$, $3\hbar k_0$, соответственно, и иллюстрируют все возрастающий приобретаемый атомом импульс. Кроме того, распределения $\mathscr{P}_1(p_y)$, $\mathscr{P}_1(p_z)$ имеют точки разрыва, а $\mathscr{P}_2(p_z)$ имеет точку разрыва первой производной, тогда как вероятности высшего порядка являются более гладкими. Действительно, распределение $\mathscr{P}_3(p_z)$ уже значительно ближе к асимптотическому (гауссовскому) распределению.

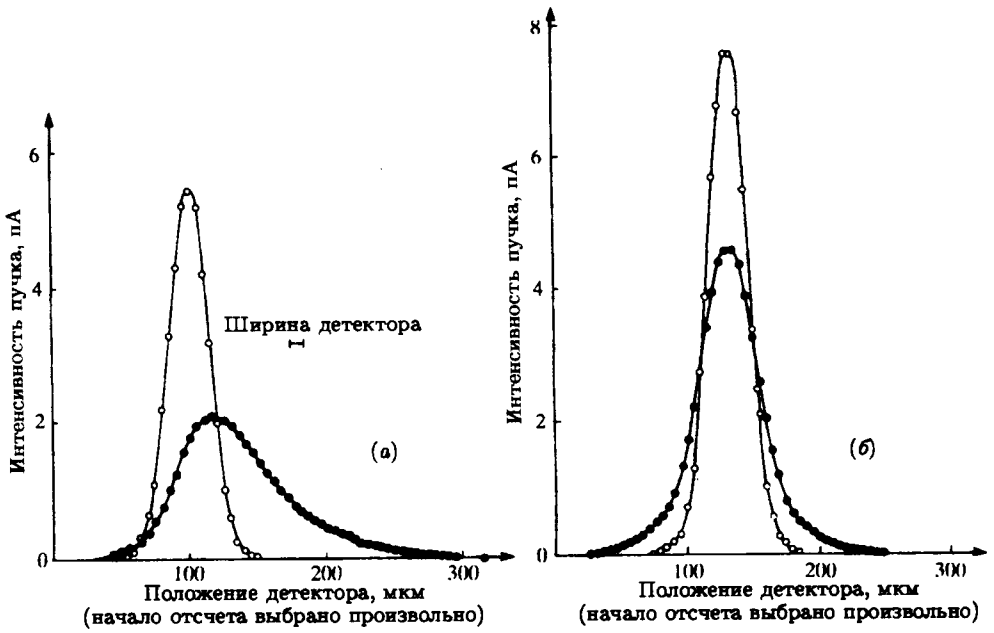


Рис. 15.14. Наблюдаемое распределение атомов в пучке в присутствии и в отсутствии резонансного излучения (Picqué and Vialle, 1972): *а* — по направлению распространения падающего света, *б* — перпендикулярно направлению распространения падающего света. Черные кружки соответствуют измерениям в присутствии света, а белые — без него

Передача импульса атому изучалась в экспериментах по отклонению атомного пучка (Frisch, 1933; Picqué and Vialle, 1972; Schieder, Walther and Wöste, 1972), а также по рассеянию атомов на стоячей волне (Arimondo, Lew and Oka, 1979). На рис. 15.14 показаны результаты измерений, в которых пучок атомов

натрия облучался под прямым углом светом натриевой лампы и отклонение исследовалось с помощью ионизационного детектора. Согласно оценкам среднее отклонение, вызванное одним поглощенным фотоном, составляло около 50 мкм. Атомный пучок, как и следовало ожидать, испытывает в направлении падающего света не только результирующее отклонение, но и уширение, а в перпендикулярном направлении — только уширение. Однако измеренные распределения сильно отличаются от соответствующих кривых на рис. 15.13. Данное отличие вызвано, в значительной степени, разбросом скоростей падающих атомов.

15.7.2. Передача импульса при вынужденном излучении или градиентные силы в сильном поле

В случае достаточно сильного поля вынужденные испускания преобладают над спонтанными, так что в течение интервала времени, меньшего естественного времени жизни, спонтанным излучением можно пренебречь. Тогда поле, по существу, можно рассматривать классически. Как уже отмечалось, результирующий импульс, сообщаемый атому в поле плоской волны, равен нулю, если за поглощением фотона следует вынужденное его испускание. Однако ситуация сильно меняется в неоднородном электромагнитном поле, в котором результирующие силы, действующие на индуцированный атомный диполь, могут быть очень велики. Эта тема исследовалась в работах (Letokhov and Pavlik, 1976; Letokhov, Minogin and Pavlik, 1976, 1977; Ashkin, 1978; Bjorkholm, Freeman, Ashkin and Pearson, 1978, 1980; Cook, 1978, 1979, 1980a, b; Cook and Bernhardt, 1978; Kazantsev, 1978; Balykin, Letokhov and Mushin, 1979; Ashkin and Gordon, 1979; Letokhov and Minogin, 1979; Salomon, Dalibard, Aspect, Metcalf and Cohen-Tannoudji, 1987; Westbrook, Watts, Tanner, Rolston, Phillips, Lett and Gould, 1990; Bigelow and Prentiss, 1990).

В качестве примера рассмотрим поле стоячей волны

$$\mathbf{E}(z,t) = 2\boldsymbol{\varepsilon} E_0 \cos kz \cos \omega t,$$

которое, конечно, можно рассматривать как суперпозицию двух плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях вдоль оси z. Атом, движущийся, скажем, вдоль оси x, может поглотить фотон одной из плоских волн и затем вынужденно, под влиянием второй плоской волны, испустить фотон. В результате он приобретет составляющую импульса $\pm 2\hbar k$ в направлении оси z. Этот процесс может повторяться неограниченное число раз, что приводит, если пренебречь спонтанными испусканиями, к отклонению атомного пучка, распространяющегося в направлении оси x, на угол, имеющий несколько определенных значений. Фактически, поле стоячей световой волны действует на резонансные атомы как дифракционная решетка (Cook and Bernhardt, 1978; Arimondo, Lew and Oka, 1979; Martin, Gould, Oldaker, Miklich and Pritchard, 1987).

Теперь рассмотрим уравнения движения двухуровневого атома в классическом электромагнитном поле более общего вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\varepsilon}\mathscr{E}(\mathbf{r})\, e^{i[\phi(\mathbf{r})-\omega t]} + \text{к.с.}.$$

Полный гамильтониан $\hat{H}$ атома, характеризуемого массой M и импульсом $\hat{p}$, имеет тогда вид

$$\hat{H} = (E_0 + \hbar\omega \hat{R}_3) + (\hat{\mathbf{p}}^2/2M) - \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}},t), \tag{15.7.11}$$

где первый член представляет собой внутреннюю энергию атома, второй — его кинетическую энергию и третий — энергию взаимодействия в дипольном приближении. Поскольку теперь радиус-вектор $\hat{\mathbf{r}}$ атома является одной из динамических переменных, он должен рассматриваться как оператор гильбертова пространства.

Скорость изменения импульса атома есть сила $\hat{\mathbf{F}}$, действующая на атом. Из (15.7.11) и гейзенберговского уравнения движения для $\hat{\mathbf{p}}$ следует, что эта сила определяется выражением

$$\hat{\mathbf{F}} = \dot{\hat{\mathbf{p}}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}},t)].$$

В этом уравнении операторы $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{r}}$ действуют на состояние атома, характеризующее его движение, тогда как оператор $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ действует на внутреннее состояние, описывающее возбуждение атома. Пусть начальное состояние является состоянием, в котором положение атома достаточно хорошо определено, так что $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ не меняется заметно в пределах изменения $\mathbf{r}$. Тогда оператор координаты $\hat{\mathbf{r}}$ можно заменить его средним

значением $\mathbf{r}$ в момент времени t [ср. (14.1.19)]. Если записать оператор импульса $\hat{\mathbf{p}}$ в дифференциальном виде $(\hbar/i)\nabla$, то уравнение движения принимает вид

$$\hat{\mathbf{F}} = \dot{\hat{\mathbf{p}}} = \nabla\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \tag{15.7.12}$$

Теперь можно взять средние значения от обеих частей этого уравнения, что приведет к следующему классическому уравнению для атомной траектории:

$$\langle\hat{\mathbf{F}}\rangle = M\ddot{\mathbf{r}} = \nabla\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}\rangle \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \tag{15.7.13}$$

Если $\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}\rangle$ не меняется быстро при изменении координаты, то в узлах стоячей волны сила может менять знак, что приводит к пленению атома (Kazantsev, 1976; Ashkin, 1978). Однако, строго говоря, среднее значение $\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}\rangle$, задаваемое выражением (15.2.16), должно рассматриваться как функция положения атома и времени. Для того, чтобы определить атомную траекторию, необходимо решать одновременно уравнение (15.7.13) и уравнения Блоха (15.3.11) (или (15.3.19) во вращающейся системе координат). В общем случае это непростая задача, если учесть, что и атомная частота Раби Ω, и фаза ϕ в уравнениях (15.3.11) или (15.3.19) зависят от времени в системе координат движущегося атома, хотя они могут быть постоянными в лабораторной системе координат (Cook, 1980b; Gordon and Ashkin, 1980). В общем случае имеем соотношения

$$\dot{\phi} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}), \quad \dot{\Omega} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\Omega(\mathbf{r}).$$

Проблема решения связанных уравнений движения обсуждалась Куком (Cook, 1978, 1979, 1980a, b), который показал, что при некоторых предположениях сила, действующая на атом, приводит к фокусировке или дефокусировке атомных траекторий. Далее будем следовать его рассуждениям.

Сила светового давления, обусловленная вынужденным излучением, может давать вклад во флуктуации импульса даже тогда, когда среднее значение силы равно нулю, как в плоской волне (при отсутствии спонтанного излучения). Это связано с тем, что любой импульс, приобретенный при поглощении фотона, приводит к возмущению движения атома, несмотря на то, что этот импульс опять теряется в процессе вынужденного испускания. Флуктуация силы $\hat{\mathbf{F}}$ легко вычисляется по формуле (15.7.12). Если воспользоваться выражением (15.1.17) для дипольного момента $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ и выражением (15.3.12) для частоты Раби $\Omega(\mathbf{r})$, то из (15.7.12) получим

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{2}\hbar[\hat{b}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\nabla(\Omega\,\mathrm{e}^{-i\phi}) + \text{э.с.}],$$

где опущены члены, осциллирующие на удвоенной частоте оптического перехода. Отсюда с помощью антикоммутационных соотношений (15.1.7) для атомных переменных сразу получаем результат

$$\langle\hat{\mathbf{F}}^2\rangle = \frac{1}{4}\hbar^2[(\nabla\Omega)^2 + \Omega^2(\nabla\phi)^2], \tag{15.7.14}$$

справедливый для произвольного квантового состояния. Таким образом, атом испытывает флуктуационную, обусловленную вынужденным излучением силу даже в плоской волне, для которой $\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$, $\nabla\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{k}$ и $\Omega(\mathbf{r})$ является константой.

Движение двухуровневого атома можно рассмотреть квантово-механически с помощью некоторых упрощающих предположений, без введения средних значений на начальном этапе вычислений, как в уравнении (15.7.13). Пусть частота оптического возбуждения ω совпадает с частотой атомного перехода ω_0 и фаза $\phi(\mathbf{r}) = 0$. Кроме того, пусть свет является линейно поляризованным и атомный переход есть переход типа $\Delta m = 0$, так что дипольный момент $\hat{\boldsymbol{\mu}} = 2\hat{\boldsymbol{\mu}}_{12}\hat{R}_1$. Тогда полный гамильтониан (15.7.11) принимает вид

$$\hat{H} = (E_0 + \hbar\omega\hat{R}_3) + \hat{\mathbf{p}}^2/2M - 2\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\mathscr{E}}(\mathbf{r})\hat{R}_1\cos\omega t.$$

Состояние $|\psi(t)\rangle$ атома в произвольный момент времени удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle, \tag{15.7.15}$$

которое определяет как внешнее, так и внутреннее движение. Пусть $|\psi(t)\rangle$ раскладывается по атомным состояниям $|n,\mathbf{r}\rangle$ с определенным возбуждением $n=1,2$ и определенным положением атома $\mathbf{r}$ следующим образом:

$$|\psi(t)\rangle=\sum_{n=1}^{2}\int\psi_n(\mathbf{r},t)\,\mathrm{e}^{-iE_nt/\hbar}|n,\mathbf{r}\rangle\,d^3r,$$

где $E_1=E_0-\frac{1}{2}\hbar\omega_0$, $E_2=E_0+\frac{1}{2}\hbar\omega_0$. Подставляя это разложение в (15.7.15), находим, что $\psi_1(\mathbf{r},t)$ и $\psi_2(\mathbf{r},t)$ подчиняются двум связанным уравнениям движения

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_1(\mathbf{r},t)-\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\mathscr{E}(\mathbf{r})\psi_2(\mathbf{r},t)&=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(\mathbf{r},t),\\ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_2(\mathbf{r},t)-\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\mathscr{E}(\mathbf{r})\psi_1(\mathbf{r},t)&=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2(\mathbf{r},t),\end{aligned}\tag{15.7.16}$$

где опущены члены, осциллирующие на удвоенной частоте оптического перехода. Уравнения можно расцепить, введя ортогональные, симметричную и антисимметричную волновые функции

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{r},t)&=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(\mathbf{r},t)+\psi_2(\mathbf{r},t)],\\ \phi_2(\mathbf{r},t)&=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(\mathbf{r},t)-\psi_2(\mathbf{r},t)],\end{aligned}\tag{15.7.17}$$

удовлетворяющие уравнениям движения

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi_1(\mathbf{r},t)-\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\mathscr{E}(\mathbf{r})\phi_1(\mathbf{r},t)&=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi_1(\mathbf{r},t),\\ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi_2(\mathbf{r},t)+\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\mathscr{E}(\mathbf{r})\phi_2(\mathbf{r},t)&=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi_2(\mathbf{r},t).\end{aligned}\tag{15.7.18}$$

Волновые функции $\phi_1(\mathbf{r},t)$ и $\phi_2(\mathbf{r},t)$, следовательно, распространяются независимо друг от друга и не интерферируют, поскольку они ортогональны. Атом, первоначально находящийся в основном состоянии, имеет равные амплитуды $|\phi_1(\mathbf{r},0)|$ и $|\phi_1(\mathbf{r},0)|$. Вследствие того, что потенциальные энергии в двух уравнениях Шредингера (15.7.18) имеют противоположные знаки, электромагнитные силы, действующие на атом в состояниях $[|1,\mathbf{r}\rangle+|2,\mathbf{r}\rangle]/\sqrt{2}$ и $[|1,\mathbf{r}\rangle-|2,\mathbf{r}\rangle]/\sqrt{2}$, противоположно направлены. Таким образом, пучок атомов, находящихся первоначально в основном состоянии, должен расщепиться на две составляющие. Кук (Cook, 1978, 1979) показал, что перпендикулярное поле стоячей волны должно действовать в некотором роде как собирающая линза для атомов, описываемых функцией $\phi_1(\mathbf{r},t)$, и как рассеивающая линза для атомов, описываемых функцией $\phi_2(\mathbf{r},t)$. На рис. 15.15 показано ожидаемое распределение атомного потока, отвечающего волновым функциям $\phi_1(\mathbf{r},t)$ и $\phi_2(\mathbf{r},t)$, на некотором расстоянии от области взаимодействия, при котором наиболее отчетливо проявляется эффект фокусировки. Острые максимумы образованы сходящимися и расходящимися траекториями. Распределение, наблюдаемое в случае падающих атомов, находящихся в основном состоянии, представляет собой сумму $|\phi_1(\mathbf{r},t)|^2+|\phi_2(\mathbf{r},t)|^2$ двух приведенных распределений.

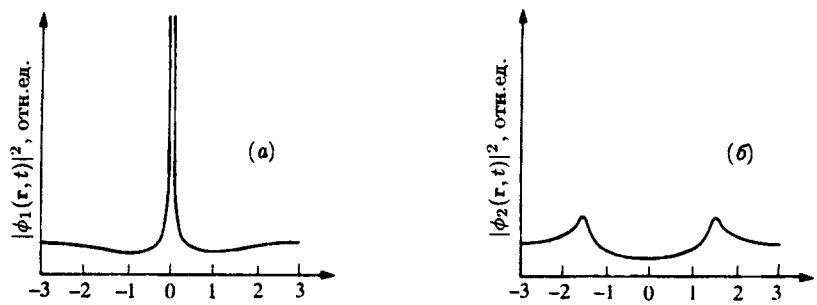


Рис. 15.15. Плотность атомов: *а* — $|\phi_1(\mathbf{r},t)|^2$; *б* — $|\phi_2(\mathbf{r},t)|^2$ как функция поперечной координаты атомного пучка в фокальной плоскости (Cook, 1978). Рис. *а* иллюстрирует фокусировку, а рис. *б* — дефокусировку падающих атомов

В заключение упомянем о том, что резонансное взаимодействие, отвечающее за отклонение атомов, может при некоторых условиях приводить также к отклонению пучков света, проходящих сквозь газ резонансных атомов. Это было продемонстрировано в экспериментах Тама и Хаппера (Tam and Happer,

1977), которые наблюдали, что два первоначально параллельных, циркулярно поляризованных световых пучка с одинаковой поляризацией, проходя через пары щелочи «притягивались» друг к другу, тогда как пучки с противоположной поляризацией «отталкивались». Эти результаты могут быть вызваны обменом поляризованными атомами между двумя световыми пучками.

15.8. Охлаждение и пленение атомов

В случае большого числа поглощений и спонтанных испусканий фотонов резонансное взаимодействие атома и света может привести к замедлению и охлаждению атома и, в конечном счете, к его пленению светом. Согласно оценкам Ханша и Шавлова (Hänsch and Schawlow, 1975) нейтральные атомы можно охладить до температур порядка милликельвинов в процессе возбуждения их почти резонансным лазерным пучком и последующего спонтанного излучения. Аналогичное предположение, касающееся плененных атомов, было сделано независимо в работе (Wineland and Dehmelt, 1975). Хотя дипольные силы, действующие на атом и обусловленные вынужденными, а не спонтанными испусканиями, также можно использовать для охлаждения и пленения атомов (Ashkin, 1978; Ashkin and Gordon, 1979; Gordon and Ashkin, 1980; Dalibard and Cohen-Tannoudji, 1985; Kazantsev, Ryabenko, Surdutovich and Yakovlev, 1985; Aspect, Dalibard, Heidmann, Salomon and Cohen-Tannoudji, 1986; Chu, Bjorkholm, Ashkin and Cable, 1986; Prentiss and Cable, 1989), мы сосредоточим наше внимание здесь только на первом механизме.

Для того, чтобы понять основную идею, рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 15.16, когда двухуровневый атом, имеющий среднюю частоту ω_0, массу M и скорость $\mathbf{v}$, движется навстречу квазимонохроматическому лазерному пучку, имеющему волновой вектор $\mathbf{k}_L$ и частоту ω_L. Предположим, что спектральная ширина лазера намного меньше как естественно, так и доплеровски уширенной атомной линии, и что ω_L меньше ω_0 на некоторую величину D. Если векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{k}_L$ противоположно направлены, то в системе координат движущегося атома свет имеет доплеровски смещенную частоту $\omega_L - \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{v} = \omega_L(1 + v/c)$. Пусть $\omega_L v/c$ порядка D. Тогда приближающиеся фотоны находятся в точном резонансе с атомным переходом, и поглощение одного такого фотона приводит к передаче атому импульса $\hbar\mathbf{k}_L$ в лабораторной системе координат, так что импульс $M\mathbf{v}$ атома уменьшается до значения $M(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v})$. Изменение скорости $\Delta\mathbf{v}$ определяется в этом случае соотношением



Рис. 15.16. Ситуация, при которой атом вследствие эффекта Доплера «видит» фотон частоты $\omega_L - \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{v} = \omega_L(1 + v/c)$

$$M\Delta\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}_L \tag{15.8.1}$$

и направлено противоположно скорости $\mathbf{v}$, так что атом замедляется. Если возбужденный атом спонтанно испускает фотон с волновым вектором $\mathbf{k}$, то его импульс опять меняется на величину $-\hbar\mathbf{k}$. Но поскольку $\langle\hbar\mathbf{k}\rangle = 0$, средний импульс, сообщаемый атому за одно поглощение и одно испускание фотона, определяется выражением (15.8.1) и приводит к замедлению атома. Излишне говорить, что если векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{k}_L$ направлены одинаково, то доплеровски смещенная частота получается равной $\omega_L(1 - v/c)$ и оказывается существенно меньше средней атомной частоты ω_0, что делает поглощение фотона маловероятным.

Таким образом, атомы, движущиеся навстречу свету, замедляются в процессе повторяющихся актов поглощения и спонтанного переизлучения, тогда как атомы, движущиеся от света, не замедляются. Облучение атомов со всех сторон, при котором некоторый вектор $\mathbf{k}_L$ всегда имеет составляющую, противоположную скорости атома, обеспечивает фактически замедление всех атомов. Выражение (15.8.1) дает оценку $\Delta v \approx 6$ см/с для атомов магния, облучаемых светом с частотой, ниже резонансной ($\lambda = 2851.1$ Å). Поскольку среднеквадратичная скорость $v = (3k_BT/M)^{1/2}$, где k_B — постоянная Больцмана, равна 800 м/с при $T = 600$ K, требуется приблизительно $v/\Delta v = 13000$ циклов поглощения и испускания фотонов для уменьшения скорости до значений, близких к нулевым. В этом случае спектральная ширина атомной линии уменьшается от значения доплеровского уширения до значения естественного уширения. Если интенсивность возбуждающего света достаточно высока для того, чтобы насытить атомный переход, то при радиационном времени жизни T_1 верхнего состояния, равном 2 нс, время одного цикла поглощения и спонтанного испускания получается близким к 4 нс. Следовательно, требуется минимум $(v/\Delta v)T_1 \approx 60$ мкс для того, чтобы охладить атом до температуры, близкой к нулю и фактически привести его в состояние покоя. Ханш и Шавлов (Hänsch and Schawlow, 1975) — авторы этой идеи, предположили, что для ее практического воплощения достаточно шести лазерных пучков, направленных параллельно и антипараллельно трем

координатным осям, которые, кроме того, способны удержать медленные атомы. В экспериментах на нейтральных атомах натрия (Phillips and Metcalf, 1982; Prodan, Phillips and Metcalf, 1982) были достигнуты эффективные температуры порядка 70 мК. Первая ловушка нейтрального атома, основанная на силах, обусловленных спонтанным излучением, была сделана в работе (Raab, Prentiss, Cable, Chu and Pritchard, 1987).

15.8.1. Оптическая меласса

Хотя выражение (15.8.1) и связанные с ним рассуждения объясняют в общих чертах явления замедления и пленения атомов, важно помнить, что оно относится только к среднему передаваемому импульсу, усредненному по многим циклам поглощения и испускания. Вследствие того, что спонтанные испускания имеют случайные направления, они вносят большие флуктуации в движение атома. Кроме того, число циклов флуоресценции, происходящих за любой заданный промежуток времени, само является случайной переменной. В результате движение атома приобретает характер броуновского движения и среднеквадратичное расстояние, проходимое атомом за заданный интервал времени t, пропорционально $\sqrt{t}$, а не t. Диффузионное движение атома, обусловленное воздействием света, напоминает движение в вязкой жидкости и получило название *оптическая меласса*. Это явление наблюдалось впервые в работе (Chu, Hollberg, Bjorkholm, Cable and Ashkin, 1985), а также исследовалось в работе (Phillips, Prodan and Metcalf, 1985).

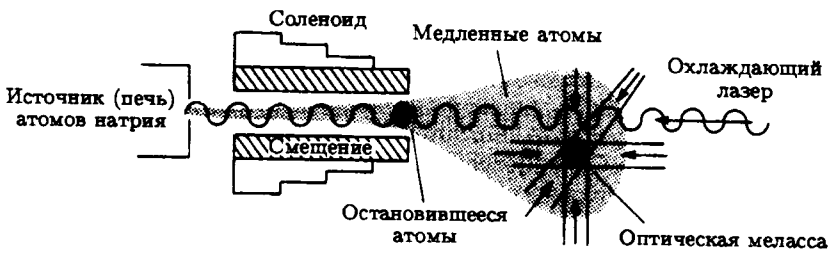


Рис. 15.17. Схема эксперимента по охлаждению и пленению атомов в оптической мелассе (Phillips, Gould and Lett, 1988)

На рис. 15.17 показана схема установки, которая использовалась для изучения охлаждения и вязкого удержания атомов натрия в оптической мелассе. Пучок атомов натрия направляется вдоль оси конического соленоида, который компенсирует изменяющийся доплеровский сдвиг изменяющимся зеемановским сдвигом, где он непрерывно охлаждается распространяющимся навстречу лазерным пучком. Атомы, которые не останавливаются полностью за время прохождения сквозь соленоид, вылетают в главную экспериментальную камеру, где некоторые из них захватываются в мелассе в области пересечения шести лазерных лучей. В данном эксперименте максимальная плотность мощности света в мелассе была порядка 60 мВт/см^2.

15.8.2. Оценка наименьшей достижимой температуры, основанная на балансе энергии

Рассмотрим кратко, как зависит ожидаемая окончательная температура T атомов от расстройки $D \equiv \omega_0 - \omega_L$ между частотой лазера и резонансной частотой атомного перехода и от интенсивности I. Атом массы M, перемещающийся в псевдовязкой жидкости, подвергается воздействию останавливающей силы $-\alpha v$, пропорциональной средней скорости v, в результате чего атом теряет энергию (охлаждается) со средней скоростью

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{охл}} = -\alpha v^2. \tag{15.8.2}$$

Коэффициент затухания α приближенно определяется по формуле (Lett, Phillips, Rolston, Tanner, Watts and Westbrook, 1989)

$$\alpha = -4\hbar k^2 \frac{I}{I_0} \frac{2D/\Gamma}{[1+(2D/\Gamma)^2]^2} \quad \text{при } kv \ll \Gamma, D, \quad (I \ll I_0), \tag{15.8.3}$$

где I_0 — интенсивность света при насыщении, Γ — естественная ширина линии и $k = \omega/c$. Выражение (15.8.3) получается из теории резонансной флуоресценции двухуровневого атома (разд. 15.6). В то же

время атом приобретает энергию со скоростью $(dE/dt)_{\text{нагр}}$ из-за нагрева или диссипации, которая всегда сопутствует броуновскому движению, вследствие случайных испусканий и поглощений фотонов (см. флуктуационно-диссипационную теорему, рассматриваемую в разд. 17.2). В одномерном случае скорость нагрева может быть выражена в виде (Lett, Phillips, Rolston, Tanner, Watts and Westbrook, 1989)

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{нагр}} = \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma}{M} \frac{I/I_0}{1+(2D/\Gamma)^2}. \tag{15.8.4}$$

В стационарном состоянии скорости потери и приобретения энергии должны быть равны, так что

$$\langle v \rangle^2 = \frac{\hbar\Gamma}{4M} \frac{1+(2D/\Gamma)^2}{2D/\Gamma}. \tag{15.8.5}$$

Если теперь, как обычно, отождествить среднеквадратичную скорость в одном измерении, умноженную на $\frac{1}{2}M$, с величиной $\frac{1}{2}k_{\text{B}}T$, то получим стандартное соотношение для минимальной достижимой температуры T

$$k_{\text{B}}T = \frac{\hbar\Gamma}{4} \frac{1+(2D/\Gamma)^2}{2D/\Gamma}. \tag{15.8.6}$$

Это выражение имеет минимум в точке $2D/\Gamma = 1$, при этом $k_{\text{B}}T_{\min} = \hbar\Gamma/2$. Полученная формула определяет так называемый доплеровский предел охлаждения атомов рассматриваемым способом. Для атомов натрия формула (15.8.6) устанавливает минимальную достижимую температуру порядка 1 мК.

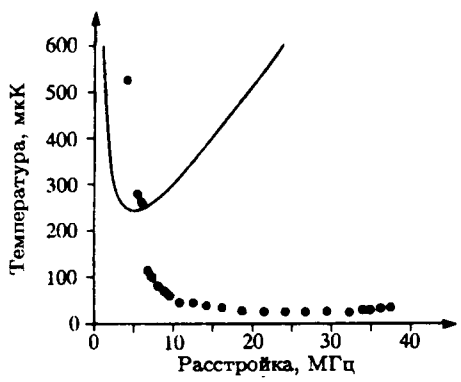


Рис. 15.18. Результаты измерений температуры атомов как функции частотной расстройки лазера в сторону меньших частот от центра спектральной линии. Сплошная кривая — результат расчета по формуле (15.8.6). (Из работы Lett, Phillips, Rolston, Tanner, Watts and Westbrook, 1989)

Эксперименты, проведенные в конце 80-х в Национальном Институте Науки и Техники, а также в других местах (Lett, Watts, Westbrook, Phillips, Gould and Metcalf, 1988; Lett, Phillips, Rolston, Tanner, Watts and Westbrook, 1989; Weiss, Riis, Shevy, Ungar and Chu, 1989) показали, однако, что лазерное поляризационное градиентное охлаждение позволяет получить значительно более низкие температуры. На рис. 15.18 показаны результаты измерений температуры оптической мелассы атомов натрия как функции частотной расстройки D ниже резонанса. Очевидно, что данным методом можно достичь температур порядка нескольких десятков микрокельвинов, что более, чем на порядок меньше того предела, который устанавливается формулой (15.8.6). Сплошная кривая на рис. 15.18 построена по формуле (15.8.6).

Эти и другие результаты, полученные в лаборатории Белла (Chu, Prentiss, Cable and Bjorkholm, 1987), демонстрируют несоответствие с простым рассмотрением, приведенным выше, и необходимость в более новой и хорошей теории. Такая теория была развита в работе (Dalibard and Cohen-Tannoudji, 1989) и следующей за ней (Ungar, Weiss, Riis and Chu, 1989) (см. также Cohen-Tannoudji and Phillips, 1990). Новый подход является намного более сложным и содержит более реалистичное, многоуровневое описание атомов, а также учитывает роль оптической накачки, частотных сдвигов и роль градиентов поляризации в лазерном пучке. Новые теории имеют существенно лучшее согласие с экспериментом, но они выходят за рамки этой главы.

Лазерное охлаждение и пленение атомов стало предметом интенсивных исследований в 80-х и 90-х годах, что сопровождалось сильным ростом научных публикаций в этой области (см., например, Dalibard, Raimond and Zinn-Justin, 1992; Arimondo, Philips and Strumia, 1992)[1].

[1] С 1995 года начались эксперименты по лазерному охлаждению твердых тел. Первые подобные эксперименты выполнены в Лос-Аламосе США на стеклах, легированных редкоземельными ионами (*Epstein, Buchwald, Edwards, Gosnell, Mungan, 1995) Результаты экспериментов нашли теоретическое описание в рамках метода неравновесного статистического оператора (*Андрианов, Самарцев, 1998) — *ред. пер.*

Задачи

15.1 Двухуровневый атом, удерживаемый неподвижно в начале системы координат, взаимодействует с квантовым электромагнитным полем, что описывается гамильтонианом взаимодействия

$$\hat{H}_I(t) = -\hat{\boldsymbol{\mu}}(t) \cdot \hat{\mathbf{A}}(0,t).$$

Предположим, что квантовые числа двух атомных состояний отличаются на $\Delta m = \pm 1$, так что дипольный момент перехода $\boldsymbol{\mu}_{12}$ является комплексным вектором. Покажите, что уравнения движения векторов поля $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$ в картине Гейзенберга представляют собой уравнения Максвелла, плотность тока $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ в которых задается формулой

$$\hat{\mathbf{j}}_l(\mathbf{r},t) = -i\omega_0 \delta^{\mathrm{T}}_{lm}(\mathbf{r})(\boldsymbol{\mu}_{12})_m \hat{b}(t) + \text{э.с.},$$

где $\delta^{\mathrm{T}}_{lm}(\mathbf{r})$ — поперечная дельта-функция.

15.2 Двухуровневый атом, имеющий дипольный момент перехода $\boldsymbol{\mu}_{12}$, находится в начале системы координат. Покажите, что электрическое поле $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ в точке $\mathbf{r}$ дальнего поля атома задается, с точностью до $1/r$, следующим выражением

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r},t) = \frac{\omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\left[\boldsymbol{\mu}_{12} - \frac{(\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2}\right]\hat{b}(t-r/c) + \hat{\mathbf{E}}^{(+)}_{\text{своб}}(\mathbf{r},t), \quad (t \leqslant r/c).$$

15.3 Двухуровневый атом излучает в условиях резонансной флуоресценции в когерентном возбуждающем поле, которое имеет постоянную амплитуду и включается в момент времени $t = 0$. Найдите зависимость средней интенсивности $\langle \hat{I}(t) \rangle$ света, излучаемого атомом, от времени, при условии, что частота возбуждающего света отличается от частоты атомного перехода.

15.4 Используя условия предыдущей задачи, объясните, почему сечение рассеяния атомом в стационарном состоянии уменьшается при увеличении интенсивности поля накачки.

15.5 Используя условия задачи 15.3, покажите, что среднее значение любого атомного оператора, выражаемого через атомную инверсию $\hat{R}_3(t)$, становится независящим от начального состояния атома в пределе больших времен $t \to \infty$.

15.6 Определите спектр флуоресцентного света, излучаемого атомом в стационарном состоянии, когда возбуждающее поле слабое и нерезонансное, и частота Раби существенно меньше естественной ширины линии.

Глава 16

КОЛЛЕКТИВНЫЕ АТОМНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В предыдущей главе мы изучили взаимодействие между одиночным двухуровневым атомом и электромагнитным полем не только, когда поле рассматривается классически, но и когда оно является квантовым. Мы столкнулись с некоторыми интересными явлениями, такими, как осцилляции Раби, динамический Штарк-эффект, фотонная антигруппировка. Все они наблюдались экспериментально. Эти явления, по существу, являются одноатомными эффектами, в том смысле, что либо для их формирования требуется одиночный атом, как в случае антигруппировки, либо, по крайней мере, они не требуют для своего возникновения более одного атома, хотя на практике в эксперименте может участвовать и группа атомов.

В этой главе мы приступаем к обсуждению некоторых эффектов, которые существенно зависят от наличия группы атомов. В некоторых случаях мы найдем, что групповое или коллективное поведение атомной системы является относительно простым, в том смысле, что мы можем рассчитать явление путем суммирования вкладов от индивидуальных атомов в общее поле и рассматривать каждый из них, как если бы атомы действовали почти независимо друг от друга. Такова ситуация в *затухании свободной индукции* и в *фотонном эхо*. В других случаях важно учесть влияние каждого атома на остальные, поскольку это существенно меняет поведение каждого из них. Такие явления, как *самоиндуцированная прозрачность* и *сверхизлучение*, являются коллективными эффектами в более глубоком смысле. Их иногда называют *кооперативными эффектами*.

16.1. Затухание оптической свободной индукции

Это простой эффект дефазировки, вызванный разбросом атомных частот. Рассмотрим группу из N неоднородно уширенных двухуровневых атомов, распределенных в области пространства, меньшей по сравнению с длиной волны. Ограничение малой областью упрощает проблему, позволяя нам не учитывать эффекты распространения. Под *неоднородно уширенной системой* мы подразумеваем систему, в которой различные атомы имеют различные резонансные частоты ω с некоторым распределением $g(\omega)$, центрированным на средней частоте ω_0 и нормированным, так что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty g(\omega)\,d\omega = 1. \tag{16.1.1}$$

Спектральная ширина флуоресцентного света, испущенного группой атомов, таким образом, больше естественной ширины линии на величину, которая зависит от ширины распределения $g(\omega)$. Эта ширина обычно обозначается через $1/T_2^*$, где T_2^* является *неоднородным временем жизни*. Во многих случаях эта неоднородная ширина много больше естественной ширины $1/T_1$, где T_1 — *естественное время жизни*. В твердом теле неоднородное уширение является, как правило, результатом флуктуаций поля кристаллической решетки, которое действует на различные атомы по-разному. В газе неоднородное уширение возникает благодаря различным доплеровским сдвигам, отвечающим атомам, движущимися с различными скоростями. Кроме того, могут иметь место эффекты *однородного уширения*, которые действуют на все атомы одинаково и характеризуются некоторым однородным временем жизни T_2', таким, что $T_2' \leqslant T_1$. Полная

оптическая ширина линии $1/T_2$ является суммой однородной и неоднородной ширин, т.е.

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_2'} + \frac{1}{T_2^*}. \tag{16.1.2}$$

Однако в дальнейшем будем предполагать, что $T_2^* \ll T_2'$, так что полная ширина линии полностью определяется неоднородным уширением. Фурье-преобразование спектрального распределения $g(\omega)$ представляет собой некоторую автокорреляционную функцию, которую обозначим через $G(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau}$,

$$\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau}G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty g(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,d\omega,$$

так что

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^\infty g(\omega_0+\omega')\,\mathrm{e}^{-i\omega'\tau}\,d\omega', \tag{16.1.3}$$

где $G(\tau)$ является медленно меняющейся функцией, которая существенно отлична от нуля на интервале порядка T_2^*. Например, если $g(\omega)$ является гауссовской, т.е. если

$$g(\omega) = \sqrt{2\pi}T_2^* \exp\left[-\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2T_2^{*2}\right], \tag{16.1.4а}$$

то

$$G(\tau) = \exp\left[-\frac{1}{2}\tau^2/T_2^{*2}\right]. \tag{16.1.4б}$$

На временны́х интервалах, более коротких, чем T_2', можно пренебречь атомным затуханием, и, как известно из предыдущей главы, каждый атомный вектор Блоха $\mathbf{r}(\omega,t)$ вращается с частотой ω вокруг оси z и определяет средний дипольный момент согласно выражению

$$\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\mu}_{12})r_1(\omega,t) + \mathrm{Im}\,(\boldsymbol{\mu}_{12})r_2(\omega,t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_{12}[r_1(\omega,t) - ir_2(\omega,t)] + \text{к.с.}$$

Если дипольный момент перехода $\boldsymbol{\mu}_{12}$ является одинаковым для всех атомов, то полный средний дипольный момент $\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)\rangle$, создаваемый всеми N атомами, равен

$$\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)\rangle = \frac{N}{4\pi}\int_0^\infty \boldsymbol{\mu}_{12}[r_1(\omega,t) - ir_2(\omega,t)]g(\omega)\,d\omega + \text{к.с.} \tag{16.1.5}$$

При условии, что все атомы не находятся в основном состоянии, $\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)$ осциллирует во времени даже в отсутствии какого-либо внешнего поля, и это приводит к испусканию электромагнитного излучения. Рассчитаем поле этого излучения полуклассически на временах, более коротких, чем T_2', когда затуханием можно пренебречь, и очень малы потери атомной энергии.

Предположим, что атомы начинают эволюцию в основном состоянии, где они подвергаются постоянному, когерентному оптическому возбуждению на частоте ω_1 в течение некоторого времени T, более короткого, чем время T_2' (см. разд. 15.3). В конце возбуждающего импульса составляющие вектора Блоха во вращающейся системе координат определяются выражением (15.3.21) с $t = T$. Далее каждый вектор Блоха вращается равномерно вокруг оси z с угловой скоростью ω, так что в более поздний момент времени t имеем

$$r_1(\omega,t) - ir_2(\omega,t) = [r_1(\omega,T) - ir_2(\omega,T)]\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-T)}$$

и, с учетом (15.3.17б), во вращающейся системе координат получаем

$$r_1(\omega,t) - ir_2(\omega,t) == [r_1'(\omega,T) - ir_2'(\omega,T)]\,\mathrm{e}^{-i\omega_1 T}\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-T)}.$$

Тогда, используя (15.3.21), находим

$$r_1(\omega,t) - ir_2(\omega,t) = \frac{\Omega}{\Omega'}\left[\frac{\omega-\omega_1}{\Omega'}(1-\cos\Omega' T) + i\sin\Omega' T\right]\mathrm{e}^{-i\omega_1 T}\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-T)}, \quad t \geqslant T, \tag{16.1.6}$$

где использовали обозначение

$$\Omega' \equiv [\Omega' + (\omega - \omega_1)^2]^{1/2}. \tag{16.1.7}$$

Подставляя (16.1.6) в (16.1.5), получаем выражение

$$\langle \hat{\mu}(t) \rangle = \frac{N\mu_{12}}{4\pi} \mathrm{e}^{-i\omega_1 T} \mathrm{e}^{-i\omega_0(t-T)} \times \\ \times \int_{-\omega_0}^{\infty} \frac{\Omega}{\Omega'} \left[\frac{\omega'}{\Omega'}(1 - \cos\Omega' T) + i \sin\Omega' T \right] g(\omega_0 + \omega') \mathrm{e}^{-i\omega'(t-T)}\, d\omega' + \text{к.с.}\,, \quad t \geqslant T.$$

Если возбуждающее поле является достаточно сильным и настроено на центр ω_0 атомной линии, то Ω' слабо зависит от атомной частоты ω в области существенных значений функции распределения $g(\omega)$. Если пренебречь этой слабой частотной зависимостью величины Ω' под знаком интеграла, то с помощью выражения (16.1.3) получаем

$$\langle \hat{\mu}(t) \rangle = \frac{1}{2} i N \mu_{12} \mathrm{e}^{-i\omega_0 t} \left[G(t-T) \sin\Omega T + \dot{G}(t-T) \frac{(1 - \cos\Omega T)}{\Omega} \right] + \text{к.с.}\,, \quad t \geqslant T. \tag{16.1.8а}$$

Если дипольный момент μ_{12} является действительным, и если спектральное распределение $g(\omega)$ симметрично относительно ω_0, так что $G(t)$ является действительной функцией, то данное выражение записывается в виде

$$\langle \hat{\mu}(t) \rangle = N\mu_{12} \sin\omega_0 t \left[G(t-T) \sin\Omega T + \dot{G}(t-T) \frac{(1 - \cos\Omega T)}{\Omega} \right], \quad t \geqslant T. \tag{16.1.8б}$$

Согласно полученному выражению макроскопический дипольный момент коллективной атомной системы осциллирует на центральной частоте ω_0 и спадает до нуля после окончания возбуждающего импульса за время порядка неоднородного времени жизни T_2^*, когда $G(t-T)$ и $\dot{G}(t-T)$ становятся очень малыми. Этот спад $\langle \hat{\mu}(t) \rangle$, конечно, не имеет ничего общего со спадом атомного возбуждения, а является следствием дефазировки, которая происходит среди атомных диполей с различными частотами. На самом деле, сделанное вначале предположение о том, что все атомы сконцентрированы в области пространства, которое мало по сравнению с длиной волны, имеет последствия, выходящие за рамки данного раздела. Как будет видно в разд. 16.4, возбуждение совокупности близко расположенных, возбужденных атомов спадает до нуля намного быстрее, чем возбуждение одиночного атома, так что не всегда можно игнорировать этот спад. Тем не менее, для достаточно коротких неоднородных времен жизни T_2^*, выражения (16.1.8) являются хорошим приближением для макроскопического дипольного момента.

Поскольку дальнее поле осциллирующего диполя пропорционально второй производной по времени от дипольного момента[1], интенсивность света, испущенного атомной системой, в хорошем приближении пропорциональна множителю

$$\omega_0^4 N^2 \left[G(t-T) \sin\Omega T + \frac{\dot{G}(t-T)}{\Omega}(1 - \cos\Omega T) \right]^2$$

и также спадает до нуля в течение времени порядка T_2^* после возбуждения. Световой импульс, испущенный системой, называется *импульсом свободной индукции*, а само явление — *затуханием свободной индукции*. Конечно, процесс излучения означает, что атомы должны терять энергию, и z- составляющие их векторов Блоха не могут оставаться строго постоянными во времени, но в хорошем приближении их можно считать постоянными.

16.1.1. Эксперименты

Затухание свободной индукции впервые наблюдалось в экспериментах по ядерному магнитному резонансу Ханом (Hahn, 1950a). Позднее это явление изучалось также и в оптической области, в особенности,

[1] Вывод поля, создаваемого классическим осциллирующим точечным диполем имеется, например, в книге (Born and Wolf, 1980, разд. 2.2.3)

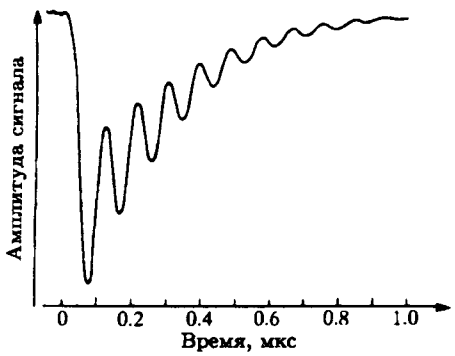


Рис. 16.1. Импульс оптической свободной индукции в образце NH_2D (Brewer and Shoemaker, 1972)

в работах Брюера и Шумейкера (Brewer and Shoemaker, 1972). На рис. 16.1 показан импульс свободной индукции, излучаемый на длине волны 10.6 микрон, который наблюдался ими в газообразном образце NH_2D. Оптическое возбуждение осуществлялось путем переключения частоты, а не амплитуды возбуждающего пучка света.

Следует подчеркнуть, что пропорциональность интенсивности импульса свободной индукции квадрату числа атомов попросту отражает тот факт, что поля, испущенные различными атомами, остаются в фазе в течение короткого времени порядка неоднородного времени жизни T_2^*. Это не обязательно означает, что атомы излучают кооперативно (ср. разд. 16.5), хотя такие кооперативные эффекты также могут иметь место. Даже если атомы расположены достаточно далеко, так что не могут влиять друг на друга, импульс свободной индукции все же можно наблюдать в некоторой далекой точке, где все поля интерферируют.

16.2. Фотонное эхо

Это явление является поразительной иллюстрацией процесса сфазирования, которое может происходить в неоднородно уширенной атомной системе, когда движение векторов Блоха меняется на обратное после начальной дефазировки атомных диполей. Эффект можно легко понять с помощью рис. 16.2. Рассмотрим неоднородно уширенную группу атомов, векторы Блоха которых во вращающейся системе координат изначально направлены вдоль оси y'. Если эта система координат вращается с угловой скоростью ω_0, которая является средней частотой неоднородно уширенной линии, то векторы Блоха атомов, чьи собственные частоты превышают ω_0, будут прецессировать по часовой стрелке вокруг оси z', в то время как векторы Блоха атомов, имеющих собственные частоты меньше ω_0, будут прецессировать против часовой стрелки. Изначально атомная система имеет макроскопический дипольный момент $\langle\hat{\mu}\rangle$, но со временем происходит дефазировка, поскольку различные векторы Блоха прецессируют с разными скоростями, до тех пор, пока эти векторы не распределятся почти равномерно в плоскости x', y'. Тогда макроскопический дипольный момент будет равен нулю и система не будет излучать, как было показано в предыдущем параграфе, по крайней мере, на временах, более коротких по сравнению с временем жизни T_2'.

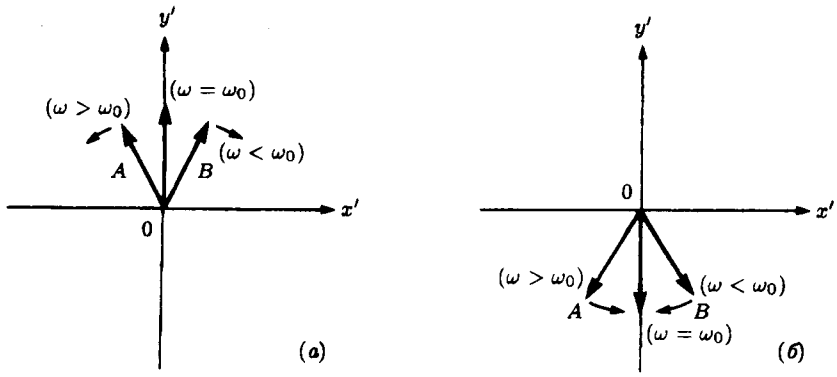


Рис. 16.2. Прецессия векторов Блоха в x', y'-плоскости и обращение прецессии при воздействии π-импульса: *а* — до воздействия π-импульса; *б* — после воздействия π-импульса

Если движение различных векторов Блоха в какой-то момент времени τ может быть изменено на обратное, то векторы смогут снова выстроиться вдоль оси y' в момент времени 2τ, когда каждый вектор возвратился обратно по пройденному им пути. Поэтому атомная система должна излучать в этот момент. Фактически, такое обращение может быть осуществлено воздействием короткого, интенсивного π-импульса, поскольку это вызывает изменение на обратную y'-координаты, или, в общем виде, поворот на угол π проекции вектора Блоха в плоскости y', z' (см. рис. 16.2). Поэтому атомная система испускает эхо-импульс в момент времени 2τ после воздействия π-импульса в момент времени τ. В этом состоит основной принцип, лежащий в основе как явления *спинового эха*, открытого на ядерных спинах Ханом (Hahn, 1950b), так и его оптического аналога — *фотонного эха*, впервые наблюдавшегося в работах (Kurnit, Abella and Hartmann, 1964; Abella, Kurnit and Hartmann, 1966). Рассмотрим процесс более подробно.

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим неоднородно уширенную группу из N близко расположенных атомов, находящихся первоначально в основном состоянии. Как и прежде, предполагаем, что $T_2^* \ll T_2'$, считаем частоту ω_0 центральной частотой неоднородно уширенной линии и сосредоточим наше внимание на временах, более коротких, чем T_2'. Для того, чтобы подготовить состояние, в котором практически все векторы Блоха направлены вдоль оси y', подвергнем атомную систему воздействию прямоугольного, когерентного $\pi/2$-импульса частоты ω_0 в течение короткого времени T (рис. 16.3), так что $T \ll T_2^*$, и площадь импульса определяется выражением

$$A_1 = \frac{\pi}{2} = \Omega_1 T. \tag{16.2.1}$$

В конце этого импульса составляющие вектора Блоха во вращающейся системе координат определяются выражением (15.3.21) при $t = T$ (но отметим, что в выражении (15.3.21) ω_0 является атомной частотой, а ω_1 — несущей частотой импульса). Если импульс является достаточно интенсивным, так что частота Раби Ω_1 является большой по сравнению с частотным отклонением $|\omega - \omega_0|$ большинства атомов от центра линии, так что членами порядка $(\omega-\omega_0)^2/\Omega_1^2$ можно пренебречь, то составляющие вектора Блоха приближенно определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} r_1'(\omega, T) &\approx \frac{\omega - \omega_0}{\Omega_1}, \\ r_2'(\omega, T) &\approx -1, \\ r_3'(\omega, T) &\approx 0. \end{aligned} \tag{16.2.2}$$

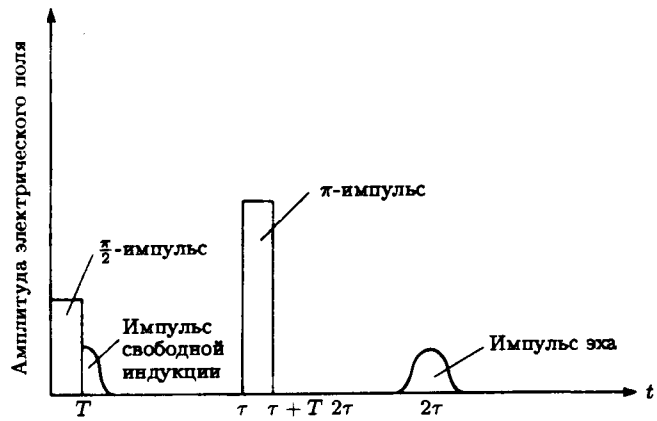


Рис. 16.3. Последовательность импульсов, приводящая к фотонному эхо

После воздействия этого короткого импульса различные векторы Блоха прецессируют свободно, так что в момент времени τ, которое все же короче времени T_2',

$$r_1'(\omega,\tau) - ir_2'(\omega,\tau) = \mathrm{e}^{-i(\omega-\omega_0)(\tau-T)}[r_1'(\omega,T) - ir_2'(\omega,T)] = \mathrm{e}^{-i(\omega-\omega_0)(\tau-T)}\left[\frac{\omega-\omega_0}{\Omega_1} + i\right], \quad \tau \geqslant T. \tag{16.2.3}$$

В момент времени τ атомная система подвергается воздействию второго короткого светового импульса длительности T и площади (см. рис. 16.3)

$$A_2 = \pi = \Omega_2 T, \tag{16.2.4}$$

амплитуда которого в два раза больше амплитуды первого импульса. Для того, чтобы определить результат его воздействия на атом, нам потребуются решения уравнений Блоха (15.3.19) с $\phi = 0$ для более общего начального состояния, нежели основное состояние. Можно легко показать, что при начальных значениях $r_1'(\omega,0)$, $r_2'(\omega,0)$, 0 составляющие $r_1'(\omega,t)$, $r_2'(\omega,t)$, $r_3'(\omega,t)$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} r_1'(\omega,t) &\approx r_1'(\omega,0) - \left[\frac{\omega-\omega_0}{\Omega}\sin\Omega t\right] r_2'(\omega,0), \\ r_2'(\omega,t) &\approx \left[\frac{\omega-\omega_0}{\Omega}\sin\Omega t\right] r_1'(\omega,0) + [\cos\Omega t] r_2'(\omega,0), \\ r_3'(\omega,t) &\approx \left[-\frac{(\omega-\omega_0)}{\Omega}(1-\cos\Omega t)\right] r_1'(\omega,0) - [\sin\Omega t] r_2'(\omega,0), \end{aligned} \tag{16.2.5}$$

если используется то же самое приближение сильного поля, что и ранее. Если для начальных значений в (16.2.5) взять значения для $r_1'(\omega,\tau)$ и $r_2'(\omega,\tau)$, задаваемые выражением (16.2.3), положить $\Omega = \Omega_2$ и $t = T$,

то на момент окончания воздействия π-импульса получим

$$\begin{aligned} r_1'(\omega,\tau+T) &\approx \frac{\omega-\omega_0}{\Omega_1}\cos(\omega-\omega_0)(\tau-T)+\sin(\omega-\omega_0)(\tau-T),\\ r_2'(\omega,\tau+T) &\approx -\frac{\omega-\omega_0}{\Omega_1}\sin(\omega-\omega_0)(\tau-T)+\cos(\omega-\omega_0)(\tau-T),\\ r_3'(\omega,\tau+T) &\approx -\frac{\omega-\omega_0}{\Omega_1}\sin(\omega-\omega_0)(\tau-T), \end{aligned} \tag{16.2.6}$$

так что

$$r_1'(\omega,\tau+T)-ir_2'(\omega,\tau+T)\approx\left(-i+\frac{\omega-\omega_0}{\Omega_1}\right)\mathrm{e}^{i(\omega-\omega_0)(\tau-T)},\quad \tau>T. \tag{16.2.7}$$

После π-импульса вектор Блоха снова прецессирует свободно, и для произвольного более позднего момента времени $t>\tau+T$ имеем

$$r_1'(\omega,t)-ir_2'(\omega,t)=\mathrm{e}^{-i(\omega-\omega_0)(t-\tau-T)}\left[r_1'(\omega,\tau+T)-ir_2'(\omega,\tau+T)\right]=\mathrm{e}^{-i(\omega-\omega_0)(t-2\tau)}\left[-i+\frac{\omega-\omega_0}{\Omega_1}\right]. \tag{16.2.8}$$

Таким образом, с помощью (16.1.5) и преобразования (15.3.17б), осуществляющего переход в неподвижную систему координат, получаем для макроскопического дипольного момента $\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)\rangle$ следующее выражение:

$$\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)\rangle=\frac{N}{4\pi}\int_0^\infty\left[\boldsymbol{\mu}_{12}\left(-i+\frac{\omega-\omega_0}{\Omega_1}\right)\mathrm{e}^{-i(\omega-\omega_0)(t-2\tau)}\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}+\text{к.с.}\right]g(\omega)\,d\omega,$$

и, с учетом (16.1.3),

$$\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)\rangle=-i\frac{N\boldsymbol{\mu}_{12}}{2}\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\left[G(t-2\tau)-\frac{1}{\Omega_1}\dot{G}(t-2\tau)\right]+\text{к.с.}\,,\quad t>\tau+T. \tag{16.2.9}$$

В случае симметричного спектрального распределения, для которого $G(\tau)$ является действительным, и действительного дипольного момента, данное выражение еще больше упрощается и принимает вид

$$\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)\rangle=-N\boldsymbol{\mu}_{12}\sin\omega_0 t\left[G(t-2\tau)-\frac{1}{\Omega_1}\dot{G}(t-2\tau)\right],\quad t>\tau+T, \tag{16.2.10а}$$

тогда как в случае комплексного дипольного момента $\boldsymbol{\mu}_{12}=(|\boldsymbol{\mu}_{12}|/\sqrt{2})(\mathbf{x}_1+i\mathbf{y}_1)$, что справедливо для перехода $\Delta m=\pm1$, получаем

$$\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)\rangle=\frac{N|\boldsymbol{\mu}_{12}|}{\sqrt{2}}[-\mathbf{x}_1\sin\omega_0 t+\mathbf{y}_1\cos\omega_0 t]\left[G(t-2\tau)-\frac{1}{\Omega_1}\dot{G}(t-2\tau)\right],\quad t>\tau+T. \tag{16.2.10б}$$

Теперь учтем, что обе функции $G(t)$ и $\dot{G}(t)$ являются всюду очень малыми, за исключением области значений $|t|\lesssim T_2^*$, где они порядка единицы. Из (16.2.10) следует, что в момент времени $t=2\tau$ появляется макроскопический дипольный момент на временах порядка T_2^* (см. рис. 16.3), что вызывает испускание атомной системой светового импульса. Это и есть *эхо-импульс*, который следует после π-импульса с задержкой, равной интервалу времени между возбуждающими импульсами. В момент времени $t=2\tau$ функция $G(t-2\tau)$ достигает своего наибольшего значения, равного единице, а $\dot{G}(t-2\tau)$ равно нулю. Наибольшее значение $\dot{G}/\Omega_1$, как правило, порядка $1/\Omega_1 T_2^*$, так что этим членом в выражении (16.2.10) можно пренебречь, если $\Omega_1 T_2^*\gg1$. Например, если $G(\tau)$ определяется выражением (16.1.4), как в случае гауссовской неоднородно уширенной линии, то выражение (16.2.10а) принимает вид

$$\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)\rangle=-N\boldsymbol{\mu}_{12}\sin\omega_0 t\exp\left[-\frac{1}{2}(t-2\tau)^2/T_2^{*2}\right]. \tag{16.2.11}$$

На рис. 16.3 показаны последовательность возбуждающих импульсов и эхо-импульс. Также показан импульс свободной индукции, следующий за первым импульсом. Эхо-явление является простой иллюстрацией того факта, что осцилляции каждого атомного дипольного момента остаются когерентными на временах, более коротких, чем T_2', которые, однако, могут превышать T_2^*. Несмотря на название *фотонное эхо*, явление можно легко понять, считая поле, испущенное группой точечных диполей, классическим[1].

16.2.1. Эхо-эксперименты

Сигналы *фотонного эха* были открыты и впервые наблюдались в охлажденном образце рубина Кенитом, Абелла и Хартманном (Kurnit, Abella and Hartmann, 1964), которые воспользовались рубиновым лазером для получения двух возбуждающих импульсов. На рис. 16.4 приведены результаты эксперимента, в котором временно́й интервал τ был равен 137 нс. Лазерное излучение делилось на две части с помощью делителя пучков, при этом второй (или π-импульс) задерживался относительно первого с помощью оптической линии задержки. Световые пучки двух импульсов были фактически преднамеренно разделены углом около 3°. Было обнаружено, что излучаемый эхо-импульс составлял угол 6° по отношению к первому световому импульсу и угол около 3° по отношению ко второму, что намного облегчало регистрацию слабого эхо-сигнала (Abella, Kurnit and Hartmann, 1966). Эти пространственные особенности являются результатом эффектов пространственной фазировки, которые до некоторой степени аналогичны уже обсуждавшемуся временно́му сфазированию. Они не были выявлены в расчете, в котором предполагалось, что все атомы находятся в области пространства с линейными размерами, меньшими длины волны[2].



Рис. 16.4. Результаты эхо-эксперимента, воспроизведенные на осциллографе. Два первых сигнала, разделенные временны́м интервалом 137 нс, являются возбуждающими импульсами, а третий сигнал — эхо. Первые два фотоэлектрических сигнала ослаблены, для того чтобы все три сигнала были сравнимыми по амплитуде (Abella, Kurnit and Hartmann, 1966)

Как и в предшествующем параграфе, подчеркнем, что при расчете макроскопического дипольного момента и при выводе формы эхо-импульса, испускаемого атомной системой, игнорировались эффекты воздействия атомных диполей друг на друга. Такие эффекты не обязательно являются незначительными, и мы обсудим их в разд. 16.5, рассматривая явление сверхизлучения. Однако они не играют существенной роли в формировании ни сигнала свободной индукции, ни эхо-сигнала. Интенсивности этих импульсов пропорциональны квадрату числа атомов N, поскольку поля, излучаемые атомами, конструктивно интерферируют в течение короткого времени, а не потому, что атомы влияют друг на друга. Нетрудно представить ситуацию, когда различные атомы так далеко разнесены, что не могут влиять друг на друга в течение формирования импульса, но их поля еще могут конструктивно интерферировать в некоторой пространственной точке. Наблюдатель в этой точке мог бы наблюдать сигналы индукции и эха, несмотря на то, что кооперативные атомные эффекты исключены.

16.3. Самоиндуцированная прозрачность

В предыдущих двух параграфах мы столкнулись с некоторыми оптическим явлениями, которые зависят от возбуждения группы атомных диполей внешним полем и от суперпозиции или интерференции результирующих полей, испущенных каждым из этих диполей. Конечно, поля атомных диполей, в свою очередь, меняют возбуждающие поля, действующие на каждый атом, но этот процесс не играет существенной роли в формировании импульсов свободной индукции или фотонного эха и был проигнорирован в нашем рассмотрении. Распространение импульса света через материальную среду с близкими к резонансу уровнями является примером того, когда надо учитывать такое действие. Обратимся теперь к обсуждению этой проблемы.

[1] Физическая картина формирования различных сигналов фотонного эха и их приложений детально обсуждается в книгах (*Манькин, Самарцев, 1984; *Евсеев, Ермаченко, Самарцев, 1992; *Калачев, Самарцев, 1998) — *ред. пер.*

[2] В настоящее время широко используется явление долгоживущего стимулированного фотонного эха, обнаруженное в работе (*Chen, Chiang, Hartmann, 1979). Физика этого явления изложена, например, в книге (*Голенищев-Кутузов, Самарцев, Хабибуллин, 1988) и в обзоре (*Ахмедиев, Самарцев, 1990) — *ред. пер.*

Рассмотрим одномерный случай, когда классическая электромагнитная волна распространяется в z-направлении через материальную среду, в которой существует макроскопическая поляризация $\mathbf{P}(z,t)$. В твердом теле поляризованные атомы могут быть внедрены в матрицу с неоднородным показателем преломления n. Если затухание ничтожно, то электрическое поле $\mathbf{E}(z,t)$ в среде удовлетворяет неоднородному волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E}(z,t) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{P}(z,t)}{\partial t^2}, \tag{16.3.1}$$

в котором поляризация $\mathbf{P}(z,t)$ играет роль источника. Теперь учтем, что электрическое поле $\mathbf{E}(z,t)$ действует на атомные диполи в соответствии с уравнениями Блоха и индуцирует определенный дипольный момент, так что сумма всех дипольных моментов в единице объема содержащего точку z образует макроскопическую поляризацию $\mathbf{P}(z,t)$. Попытаемся найти самосогласованное решение волнового уравнения (16.3.1) и уравнений Блоха (15.3.11) или (15.3.19). Эта формулировка задачи импульсного прохождения, поставленная МакКоллом и Ханом (McCall and Hahn, 1967, 1969), аналогична задаче о функционировании лазера, сформулированной Лэмбом (Lamb, 1964), которую мы обсудим в гл. 18[1]. Поскольку эффекты затухания и спонтанного излучения не учитываются, это означает, что при расчете мы имеем дело с временами, меньшими по сравнению с T_2'.

16.3.1. Уравнение движения для огибающей импульса

Рассмотрим плоскополяризованную волну со средней частотой ω_0, совпадающей с центром неоднородно уширенной линии, и волновым числом $k = n\omega_0/c$, распространяющуюся в направлении оси z. Представим огибающую $\mathbf{E}(z,t)$ в виде

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathscr{E}(z,t)\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-i[\omega_0 t - kz - \phi(z)]} + \text{к.с.}\,, \tag{16.3.2}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — единичный вектор поляризации, $\phi(z)$ и $\mathscr{E}(z,t)$ — медленно меняющиеся фазовая и амплитудная функции, которые выберем действительными. Выбирая $\mathscr{E}(z,t)$ действительной, а фазу $\phi(z)$ не зависящей от времени, мы для упрощения задачи исключаем из рассмотрения возможные эффекты фазовой модуляции. Однако использование зависящей от координаты z фазы $\phi(z)$ позволяет учесть то обстоятельство, что фазовая скорость волн в активной среде может отличаться от фазовой скорости c/n света в матрице. Предположим, что $\mathscr{E}(z,t)$ и $\phi(z)$ изменяются достаточно слабо во времени t и по координате z, так что

$$\left|\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial z}\right| \ll k|\mathscr{E}|, \quad \left|\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t}\right| \ll \omega_0|\mathscr{E}|, \quad \left|\frac{\partial \phi}{\partial z}\right| \ll k. \tag{16.3.3}$$

По мере того, как электромагнитная волна или импульс распространяется через среду, она возбуждает атомы, и вектор Блоха $\mathbf{r}(\omega,z,t)$, в общем случае, зависит от атомной частоты ω, координаты z и времени t. Тогда из (16.1.5) находим, что поляризация $\mathbf{P}(z,t)$ в точке z и в момент времени t определяется формулой

$$\mathbf{P}(z,t) = \frac{\mathcal{N}}{4\pi}\int_0^\infty \mu_{12}[r_1(\omega,z,t) - ir_2(\omega,z,t)]g(\omega)\,d\omega + \text{к.с.}\,, \tag{16.3.4}$$

где $\mathcal{N}$ — плотность атомных диполей, $g(\omega)$ — профиль неоднородно уширенной линии, как и прежде. Как обычно, можно выразить $r_1 - ir_2$ под знаком интеграла через составляющие вектора Блоха r_1', r_2', r_3' во вращающейся системе координат. В результате получим

$$r_1(\omega,z,t) - ir_2(\omega,z,t) = \mathrm{e}^{-i[\omega_0 t - kz - \phi(z)]}[r_1'(\omega,z,t) - ir_2'(\omega,z,t)]. \tag{16.3.5}$$

Удобно ввести в преобразование зависящий от координаты z фазовый множитель $\mathrm{e}^{ikz+\phi}$, ожидая, что поляризация $\mathbf{P}(z,t)$ распространяется в среде точно так же, как и $\mathbf{E}(z,t)$, и учитывая, что $r_1' - ir_2'$ слабо изменяются в пространстве и времени. Это делает фазу вращающейся системы координат зависящей от координаты z, в то время как частота ее вращения всегда одинакова и равна ω_0. Тогда уравнения Блоха во вращающейся системе координат определяются выражениями (15.3.19) с фазовым углом, равным нулю.

[1] Физика явления самоиндуцированной прозрачности наглядно изложена, например, в обзоре (*Полуэктов, Попов, Ройтберг, 1974) — *ред. пер.*

Подставим выражение (16.3.2) для $\mathbf{E}(z,t)$ в волновое уравнение (16.3.1), воспользуемся неравенствами (16.3.3) для пренебрежения малыми членами и воспользуемся выражениями (16.3.4) и (16.3.5). Это приведет к уравнению

$$\left[2ik\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial z}+\frac{n}{c}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t}\right)-2k\mathscr{E}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right]\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-i(\omega_0 t-kz-\phi)}+\text{к.с.}=$$

$$=-\frac{\omega_0^2\mathcal{N}}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\boldsymbol{\mu}_{12}\,\mathrm{e}^{-i(\omega_0 t-kz-\phi)}\int_0^\infty [r_1'(\omega,z,t)-ir_2'(\omega,z,t)]g(\omega)\,d\omega+\text{к.с.}$$

Сравнивая коэффициенты при $\mathrm{e}^{-i(\omega_0 t-kz-\phi)}$ с обеих сторон этого уравнения и умножая скалярно на $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, получаем выражение

$$2ik\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial z}+\frac{n}{c}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t}\right)-2k\mathscr{E}\frac{\partial \phi}{\partial z}=-\frac{\omega_0^2\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*)}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_0^\infty [r_1'(\omega,z,t)-ir_2'(\omega,z,t)]g(\omega)\,d\omega. \tag{16.3.6}$$

До сих пор мы не уточняли тип атомного перехода или поляризацию световой волны. Если мы имеем дело с атомным переходом $\Delta m=0$, и $\boldsymbol{\mu}_{12}$ является действительным, и если мы используем линейно-поляризованный свет, то произведение $\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*$ также будет действительным. С другой стороны, если мы имеем дело с атомным переходом $\Delta m=\pm 1$, и $\boldsymbol{\mu}_{12}=(|\boldsymbol{\mu}_{12}|/\sqrt{2})(\mathbf{x}_1+i\mathbf{y}_1)$, и если свет поляризован циркулярно, то $\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*=|\boldsymbol{\mu}_{12}|$ или 0, в зависимости от направления циркулярной поляризации. Это означает, что множитель $\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*$ может быть выбран действительным в обоих случаях. Если теперь сравнить действительную и мнимую части обеих сторон уравнения (16.3.6), то придем к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial z}+\frac{n}{c}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t}=\frac{\omega_0\mathcal{N}\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*}{8\pi\varepsilon_0 cn}\int_0^\infty r_2'(\omega,z,t)g(\omega)\,d\omega, \tag{16.3.7}$$

$$\mathscr{E}\frac{\partial \phi}{\partial z}=\frac{\omega_0\mathcal{N}\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*}{8\pi\varepsilon_0 cn}\int_0^\infty r_1'(\omega,z,t)g(\omega)\,d\omega, \tag{16.3.8}$$

которые описывают движение светового импульса через среду.

16.3.2. Теорема площадей Мак-Колла и Хана

Как и в разд. 15.3, введем понятие «площади» импульса. Определим частоту Раби $\Omega(z,t)$, как и прежде, с помощью следующей формулы [ср. (15.3.12)]:

$$\Omega(z,t)=2\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*\mathscr{E}(z,t)/\hbar.$$

Тогда угол поворота $\Theta(z,t)$ задается импульсной площадью $A(z,t)$ [ср. (15.3.24)]

$$A(z,t)=\Theta(z,t)=\int_{-\infty}^{t}\Omega(z,t')\,dt'.$$

Умножая обе стороны выражения (16.3.7) на $2\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*/\hbar$ и интегрируя по времени от $t=-\infty$, когда импульса еще не было, до некоторого достаточно большого значения времени t, когда импульс уже прошел и $\Omega(t)=0$, получаем следующее выражение:

$$\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial z}=\frac{\omega_0\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*)^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar cn}\int_{-\infty}^{t}dt'\int_0^\infty d\omega\, r_2'(\omega,z,t')g(\omega). \tag{16.3.9}$$

Для того, чтобы выполнить интегрирование по времени, воспользуемся первым уравнением Блоха во вращающейся системе координат, переход в которую осуществляется с помощью преобразования (16.3.5), приобретающего в данном случае вид [ср. (15.3.19)]

$$\dot{r}_1'(\omega,z,t)=(\omega_0-\omega)r_2'(\omega,z,t),$$

так что

$$\int_{-\infty}^{t} r_2'(\omega, z, t')\, dt' = \frac{r_1'(\omega, z, t)}{\omega_0 - \omega}, \tag{16.3.10}$$

при условии, что $\omega \neq \omega_0$, и что атомы первоначально (при $t = -\infty$) находились в основном состоянии. Случай $\omega = \omega_0$ является предельным случаем. Но если t настолько велико, что импульс уже закончился, то вектор Блоха $\mathbf{r}'(\omega, z, t)$ прецессирует свободно и $r_1'(\omega, z, t)$ осциллирует с частотой $\omega - \omega_0$. Более точно, если $\Omega(t)$ равна нулю уже в некоторый предшествующий момент времени t_0, то из уравнений Блоха для более позднего момента времени находим

$$r_1'(\omega, z, t) = r_1'(\omega, z, t_0)\cos(\omega - \omega_0)(t - t_0) - r_2'(\omega, z, t_0)\sin(\omega - \omega_0)(t - t_0). \tag{16.3.11}$$

Из уравнения (16.3.9), используя выражения (16.3.10), (16.3.11) и полагая, что $\omega - \omega_0 = \omega'$, получим уравнение

$$\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z} = \frac{\omega_0 \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*)^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c n} \times$$
$$\times \int_{-\omega_0}^{\infty} \left[-\frac{r_1'(\omega_0 + \omega', z, t_0)\cos\omega'(t - t_0)}{\omega'} + \frac{r_2'(\omega_0 + \omega', z, t_0)\sin\omega'(t - t_0)}{\omega'} \right] g(\omega_0 + \omega')\, d\omega'.$$

Теперь учтем, что при $t \to \infty$ функция $[\sin\omega'(t - t_0)]/\omega'$ принимает вид одного из представлений для $\delta(\omega')$-функции, так что второй интеграл упрощается до $\pi r_2'(\omega_0, z, t_0) g(\omega_0)$. Кроме того, при $t \to \infty$ функция $[1 - \cos\omega'(t - t_0)]/\omega'$ становится представлением для главного значения интеграла по Коши $P(1/\omega')$ (см. Heitler, 1954, с. 69), так что

$$-\int_{\omega_0}^{\infty} r_1'(\omega_0 + \omega', z, t_0) \frac{\cos\omega'(t - t_0)}{\omega'} g(\omega_0 + \omega')\, d\omega' \to$$
$$\to \int_{-\omega_0}^{\infty} r_1'(\omega_0 + \omega', z, t_0) \left[P\left(\frac{1}{\omega'}\right) - \frac{1}{\omega'} \right] g(\omega_0 + \omega')\, d\omega' = 0,$$

поскольку $r_1'(\omega_0 + \omega', z, t_0) g(\omega_0 + \omega')$ является гладкой функцией от ω' в окрестности $\omega' = 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z} = \frac{\omega_0 \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*)^2 g(\omega_0)}{4\varepsilon_0 \hbar c n} r_2'(\omega_0, z, t_0), \tag{16.3.12}$$

где $r_2'(\omega_0, z, t_0)$ является y'-составляющей вектора Блоха атома, который находится в резонансе с приложенным полем. Но из (15.3.25) следует, что она непосредственно выражается через угол наклона $\Theta(z, t_0)$ и начальные значения r_1', r_2', r_3'. Если все атомы находились в основном состоянии в момент времени $t = -\infty$, то из (15.3.25) получаем

$$r_2'(\omega_0, z, t_0) = -\sin\Theta(z, t_0) = -\sin A(z), \tag{16.3.13}$$

где $A(z)$ является полной *площадью* импульса. Следовательно, для сравнительно больших значений времени t уравнение (16.3.12) принимает вид

$$\frac{dA(z)}{dz} = -\frac{1}{2}\alpha \sin A(z), \tag{16.3.14}$$

где

$$\alpha \equiv \frac{\omega_0 \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*)^2 g(\omega_0)}{2\varepsilon_0 \hbar c n}. \tag{16.3.15}$$

Уравнение (16.3.14) представляет собой так называемую теорему площадей Мак-Колла и Хана (McCall and Hahn, 1967, 1969), которая определяет распространение импульсной площади через среду.

Значение параметра α может быть легко установлено, если мы рассмотрим распространение слабого светового импульса малой площади A. В этом случае с хорошей степенью точности $\sin A$ можно заменить на A, и получаем уравнение

$$\frac{dA(z)}{dz} = -\frac{1}{2}\alpha A(z), \tag{16.3.16a}$$

или

$$A(z) = A(0)\,\mathrm{e}^{-\alpha z/2}. \qquad (16.3.16б)$$

Это закон Бэра [ср. (5.7.86) для частного случая однородной, изотропной среды]. Параметр $\alpha/2$ является, следовательно, константой затухания амплитуды электрического поля, т.е. α есть *коэффициент поглощения* интенсивности света. Обратная величина $1/\alpha$ называется *длиной поглощения*. Важно отметить, что слабый импульс постепенно поглощается по мере своего продвижения через среду, даже в отсутствие любого диссипативного механизма. Энергия импульса просто сообщается атомам, которые остаются близкими к невозбужденному состоянию.

Однако, ситуация существенно отличается в случае интенсивного светового импульса, который создает ощутимое атомное возбуждение. В частности, если импульсная площадь $A = 2n\pi$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, то из (16.3.14) имеем $dA/dz = 0$, и импульс распространяется через среду без какого-либо уменьшения его площади. Следовательно, среда оказывается полностью прозрачной для светового импульса, несмотря на то, что средняя частота последнего совпадает с атомной резонансной частотой. Мак-Кол и Хан назвали это явление *самоиндуцированной прозрачностью*. Конечно, одна теорема площадей ничего не говорит нам о форме импульса. Далее мы увидим, что импульс в общем случае деформируется и может даже делиться на отдельные составляющие импульсы.

Уравнение (16.3.14) непосредственно интегрируется, и мы находим, что

$$\int_{A_0}^{A} \frac{dA}{\sin A} = -\frac{1}{2}\alpha \int_0^z dz, \quad \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A(z)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A_0}\right| = -\frac{1}{2}\alpha z,$$

или

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A(z) = \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}A_0)\,\mathrm{e}^{-\alpha z/2}. \qquad (16.3.17)$$

На рис. 16.5 показано, как импульсная площадь изменяется с расстоянием при распространении импульса вдоль z-оси для различных начальных значений импульсной площади (необязательно при $z = 0$). Импульсы с площадью, меньшей π, затухают до нуля, тогда как импульсы с площадью между π и 2π растут в площади до значения 2π. Аналогичные закономерности имеют место для импульсов с большими площадями. Импульсы площади 2π, 4π и т.д. остаются неизменными по площади по мере распространения. Хотя из (16.3.14) или (16.3.17) следует, что импульсы, площади которых являются нечетно кратными π, также должны оставаться незатухающими, эти импульсы фактически оказываются нестабильными к любому малому возмущению, как показано на рис. 16.5[1].

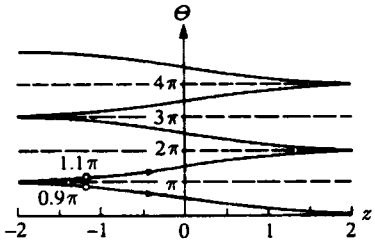


Рис. 16.5. Ожидаемое изменение импульсной площади или угла Θ по мере распространения импульса вдоль оси z (McCall and Hahn, 1967)

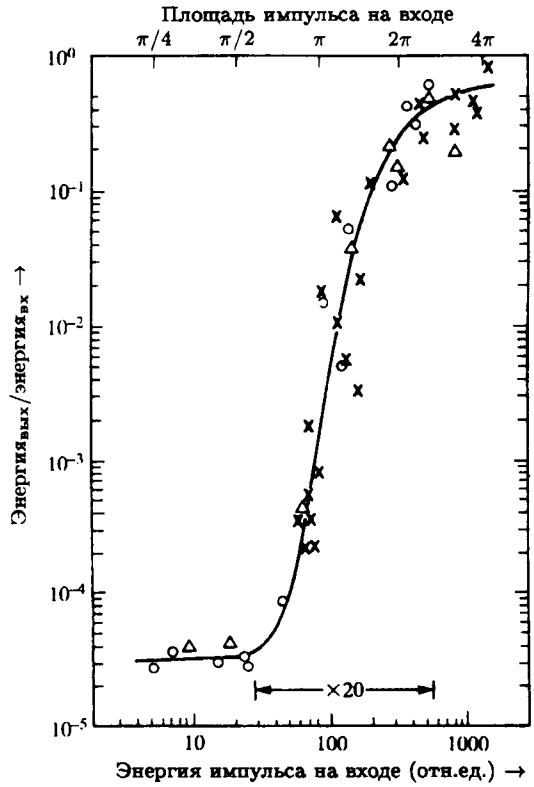


Рис. 16.6. Результаты измерений прозрачности при прохождении световых импульсов через рубиновый стержень (Asher and Scully, 1971)

Явление самоиндуцированной прозрачности, подразумеваемое теоремой площадей, наблюдалось Мак-Коллом и Ханом (McCall and Hahn, 1967) на импульсах от охлажденного жидким азотом лазера, распространяющихся по рубиновому стержню, охлажденному до температуры жидкого гелия. На рис. 16.6 показаны результаты некоторых более поздних измерений процесса прохождения через рубин. В этом эксперименте наблюдался довольно острый порог наступления прозрачности.

[1] Теорема площадей для случая фотонного эха в оптически плотной среде выведена в работе (*Моисеев, 1987) — *ред. пер.*

16.3.3. Форма импульса

Уравнения (16.3.14) или (16.3.17) относятся только к импульсной площади, но ничего не говорят о форме импульса. Возможно, что площадь импульса остается постоянной во время прохождения импульса, в то время как его форма меняется, и, как правило, это действительно имеет место. Чтобы получить информацию о форме импульса, необходимо вернуться к уравнениям движения (16.3.7) и (16.3.8).

Световой импульс, распространяющийся в одном измерении с некоторой скоростью V и сохраняющий свою форму, имеет общий вид

$$\mathscr{E}(z,t) = f\left(t - \frac{z}{V}\right). \tag{16.3.18}$$

Скорость импульса V может, конечно, отличаться от фазовой скорости волн в среде. Если подставить это выражение для $\mathscr{E}(z,t)$ в (16.3.7), то получаем уравнение

$$\left(\frac{\eta}{c} - \frac{1}{V}\right) \dot{f}\left(t - \frac{z}{V}\right) = \frac{\omega_0 \mathscr{N} \boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*}{8\pi\varepsilon_0 c n} \int_0^\infty r_2'(\omega, z, t) g(\omega)\, d\omega. \tag{16.3.19}$$

Обсуждая в разд. 15.3 отклик атома на импульс света, мы столкнулись с довольно специальной формой 2π-импульса, которая обладает таким свойством, что любой атом, находившийся в основном состоянии, независимо от частоты ω, после воздействия такого импульса вновь оказывается в основном состоянии. Это импульс в форме гиперболического секанса, задаваемый формулой (15.3.33). Если такой импульс распространяется через среду со скоростью V, то

$$\Omega(z,t) = \frac{2\boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* \mathscr{E}(z,t)}{\hbar} = \frac{2}{T} \operatorname{sech}\left(\frac{t - z/V}{T}\right), \tag{16.3.20}$$

где T является мерой импульсной длительности, и начало отсчета выбрано так, что $\Omega(z,t)$ является максимальным в момент времени $t = z/V$. Посмотрим, сохраняется ли эта форма импульса по мере его распространения через резонансную среду. В этом случае функция в (16.3.18) определяется выражением

$$f\left(\frac{t-z}{V}\right) = \frac{\hbar}{2\boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* T} \operatorname{sech}\left(\frac{t - z/V}{T}\right). \tag{16.3.21}$$

Из выражений (15.3.34) следует, что атом частоты ω отвечает на воздействие импульса, так что

$$\begin{aligned} r_1'(\omega, z, t) &= \frac{2(\omega_0 - \omega)T}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T^2} \operatorname{sech}\left(\frac{t - z/V}{T}\right), \\ r_2'(\omega, z, t) &= -\frac{2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T^2} \operatorname{sech}\left(\frac{t - z/V}{T}\right) \operatorname{th}\left(\frac{t - z/V}{T}\right). \end{aligned} \tag{16.3.22}$$

Если подставить эту форму для $f(t - z/V)$ и выражение для $r_2'(\omega, z, t)$ в уравнение движения (16.3.19), то найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{\boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* T^2} \left(\frac{\eta}{c} - \frac{1}{V}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{t - z/V}{T}\right) \operatorname{th}\left(\frac{t - z/V}{T}\right) = \\ = -\frac{\omega_0 \mathscr{N} (\boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*)}{4\pi\varepsilon_0 c n} \operatorname{sech}\left(\frac{t - z/V}{T}\right) \operatorname{th}\left(\frac{t - z/V}{T}\right) \int_0^\infty \frac{g(\omega)}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T^2}\, d\omega, \end{aligned}$$

так что уравнение движения удовлетворяется при условии, что

$$\frac{1}{V} - \frac{n}{c} = \frac{\alpha}{2\pi g(\omega_0)} \int_0^\infty \frac{g(\omega)}{(\omega - \omega_0)^2 + 1/T^2}\, d\omega. \tag{16.3.23}$$

Следовательно, 2π-импульс в форме гиперболического секанса, определяемый выражением (16.3.20), является решением уравнений движения и сохраняет свою форму при распространении без затухания. Среда является совершенно прозрачной для такого 2π-импульса. Этого, конечно, следовало ожидать, учитывая

особенное свойство такого импульса, а именно, то, что он возвращает атом, находившийся в основном состоянии, обратно, в основное состояние. Решение задачи импульсного прохождения в форме гиперболического секанса было впервые получено Мак-Колом и Ханом (McCall and Hahn, 1967) и оно, по-видимому, является единственным стабильным решением рассматриваемых уравнений. На рис. 16.7 показаны некоторые численные решения уравнений движения, которые иллюстрируют процесс формирования 2π-импульсов в форме гиперболического секанса из импульсов с различными начальными площадями и формами. Если начальная площадь импульса кратна 2π, импульс стремится разделиться на несколько меньших 2π-импульсов. Это явление также наблюдалось экспериментально. На рис. 16.8 показаны некоторые результаты работы (Slusher and Gibbs, 1972) по импульсному прохождению в парах рубидия. Отчетливо видна тенденция деления импульса с большой площадью на несколько 2π-импульсов. Полный обзор по самоиндуцированной прозрачности был сделан Слашером (Slusher, 1974).

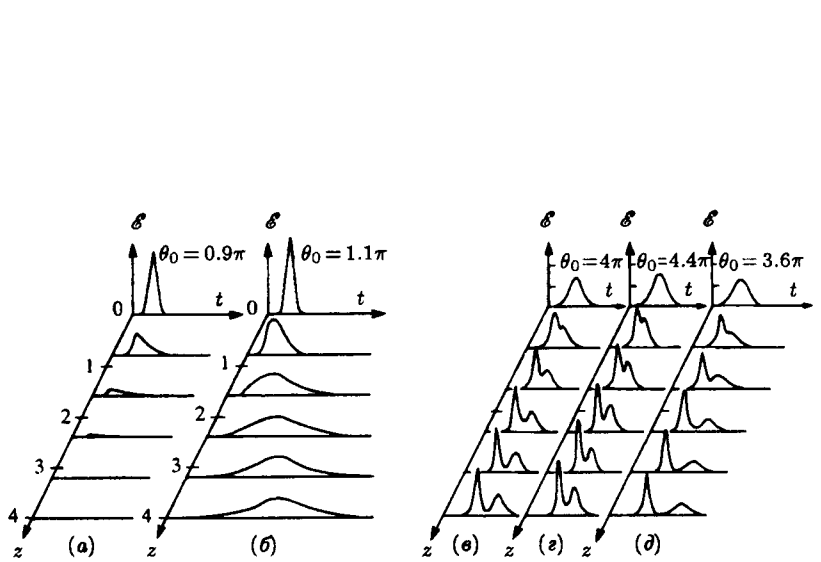


Рис. 16.7. Результаты численного решения задачи распространения импульсов различной площади (McCall and Hahn, 1969). Расстояние z измерено в единицах π/α. В первом случае *а* импульс поглощается, а во втором случае *б* импульс деформируется, принимая форму гиперболического секанса. В случаях *в*, *г*, *д* импульс делится на два отдельных 2π-импульса в форме гиперболического секанса

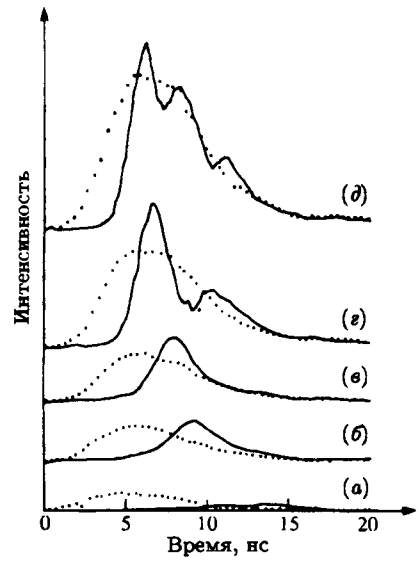


Рис. 16.8. Результаты исследований импульсного распространения в парах рубидия, демонстрирующие самоделение импульса (Slusher and Gibbs, 1972). Входные импульсы показаны пунктирными линиями, а выходные — сплошными линиями. Площадь входных импульсов постепенно увеличивалась от *а* к *д*

Когда $r_1'(\omega, z, t)$ и $r_2'(\omega, z, t)$ определяются выражениями (16.3.22), получаем из (16.3.8), что

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{-\alpha}{2\pi g(\omega_0)} \int_0^\infty \frac{(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2 + 1/T^2} g(\omega)\, d\omega. \tag{16.3.24}$$

Правая сторона не зависит от z и, согласно (16.3.2), описывает изменение волнового числа электромагнитной волны от k до $k + \partial\phi/\partial z$ и, следовательно, изменение эффективной фазовой скорости. Однако, для любого спектрального распределения $g(\omega)$, которое симметрично относительно $\omega = \omega_0$, интеграл обращается в нуль и фазовая скорость в активной среде совпадает с фазовой скоростью c/n в матрице.

16.3.4. Скорость импульса

Из выражения (16.3.23) следует, что скорость V распространения импульса меньше, чем фазовая скорость c/n в поглощающей среде. На первый взгляд, это является усложняющим аспектом явления, по-

скольку импульс в форме гиперболического секанса распространяется без изменения. Фактически, передняя часть импульса непрерывно поглощается атомами, которые вытягивают энергию из импульса, а затем воспроизводят импульс в процессе индуцированного излучения. Поэтому импульс непрерывно деформируется по мере своего распространения через среду, и именно этот процесс и связанное с ним накопление энергии замедляют распространение импульса. Оценим скорость распространения из (16.3.23). Если длительность T импульса много короче неоднородного времени жизни T_2^*, то знаменатель под знаком интеграла очень слабо зависит от частоты по сравнению с $g(\omega)$, и получаем формулу

$$\frac{1}{V}-\frac{n}{c}\approx\frac{\alpha T^2}{g(\omega_0)}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty g(\omega)\,d\omega=\frac{\alpha T^2}{g(\omega_0)}\sim\frac{\alpha T^2}{T_2^*}.$$

С другой стороны, если импульс является очень длинным по сравнению с T_2^*, как это обычно бывает, то $g(\omega)$ слабо зависит от частоты ω по сравнению со знаменателем, и $g(\omega)$ под знаком интеграла можно заменить на $g(\omega_0)$. Тогда

$$\frac{1}{V}-\frac{n}{c}\approx\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^\infty\frac{d\omega}{(\omega-\omega_0)^2+1/T^2}\approx\frac{\alpha T}{2}. \tag{16.3.25}$$

Для достаточно длинных импульсов разница между V и n/c может быть существенной и скорость импульса может быть намного меньше c/n. Тенденция длинных импульсов распространяться более медленно, чем короткие импульсы, прослеживается на рис. 16.7*в-д*.

Уравнения (16.3.23) приводят к курьезному следствию в случае усиливающей среды, в которой атомы находятся в возбужденном состоянии, поскольку α тогда становится отрицательным. Конечно, 2π-импульс в форме гиперболического секанса не является стабильным решением при этих условиях, и теорема площадей предсказывает, что для инвертированной системы стабильным должен быть π-импульс. Согласно (16.3.23) импульсная скорость тогда превышает фазовую скорость в среде и, очевидно, может даже превышать c. Однако так как импульс простирается во времени до бесконечности, он не может быть использован для передачи информации. Да и энергию он не переносит, ибо энергия была уже запасена в каждой точке инвертированной среды до прихода импульса.

16.4. Оптическая бистабильность[1]

Оптическая бистабильность является тем удивительным явлением, которое основано как на кооперативной природе взаимодействия между группой атомов и полем, так и на сильной нелинейности взаимодействия. Оно было предсказано в работе (Szöke, Daneu, Goldhar and Kurnit, 1969) и было детально исследовано Мак-Коллом (McCall, 1974). Явление наблюдалось позже в экспериментах на парах натрия (Gibbs, McCall and Venkatesan, 1976). При определенных обстоятельствах распространение света через резонансную среду может проявлять как бистабильное поведение, так и гистерезис, так что среда оказывается либо просветляющейся, либо поглощающей. Возможность применения этого эффекта в оптических переключателях, или «оптических транзисторах», стимулировало появление большого числа исследований, как полуклассических, так и полностью квантово-механических. В целом полуклассическое рассмотрение довольно хорошо описывает поведение среднего поля, однако, для описания таких его свойств, как флуктуации и фотонная статистика, необходимо квантово-полевое рассмотрение. В дальнейшем мы будем использовать упрощенную полуклассическую трактовку, отчасти, для того, чтобы подчеркнуть связь между оптической бистабильностью и прохождением света через резонансную среду, как в явлении самоиндуцированной прозрачности. Существенным моментом в оптической бистабильности является нелинейная связь между приложенным полем и электромагнитным полем, излучаемым атомными диполями, когда учитываются воздействия всех диполей друг на друга. Таким образом, кооперативное излучение играет ключевую роль в бистабильности.

Это можно увидеть с помощью следующего, очень упрощенного, эвристического рассуждения, в ходе которого мы пренебрегаем всеми пространственными изменениями и считаем, что все N атомов сконцентрированы в точке. Амплитуда эффективного поля $\mathscr{E}_{\text{эфф}}$, действующего на каждый диполь, является суммой амплитуды внешнего или приложенного поля $\mathscr{E}_{\text{прил}}$ и амплитуд полей, создаваемых всеми другими атомными диполями. Из (15.5.8) и (15.6.16) следует, что поле диполя при резонансе пропорционально

[1] Физика явления оптической бистабильности наглядно изложена в книгах (*Гиббс, 1988; *Розанов, 1997) — *ред. пер.*

выражению

$$\frac{-\Omega_{\text{эфф}}}{(\frac{1}{2}\Omega_{\text{эфф}}^2/\beta^2)+1},$$

где $\Omega_{\text{эфф}} = 2(\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*/\hbar)\mathscr{E}_{\text{эфф}}$ — частота Раби, отвечающая амплитуде поля $\mathscr{E}_{\text{эфф}}$, и 2β — коэффициент Эйнштейна A. Следовательно, можно записать

$$\mathscr{E}_{\text{эфф}} = \mathscr{E}_{\text{прил}} - \frac{K(N-1)\Omega_{\text{эфф}}}{(\frac{1}{2}\Omega_{\text{эфф}}^2/\beta^2)+1},$$

где K — постоянная величина. Полагая $\Omega_{\text{прил}} \equiv \equiv 2(\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*/\hbar)\mathscr{E}_{\text{прил}}$, получаем, что

$$\frac{\Omega_{\text{прил}}}{\beta} = \frac{\Omega_{\text{эфф}}}{\beta} + C\frac{\Omega_{\text{эфф}}/\beta}{(\frac{1}{2}\Omega_{\text{эфф}}^2/\beta^2)+1}, \qquad (16.4.1)$$

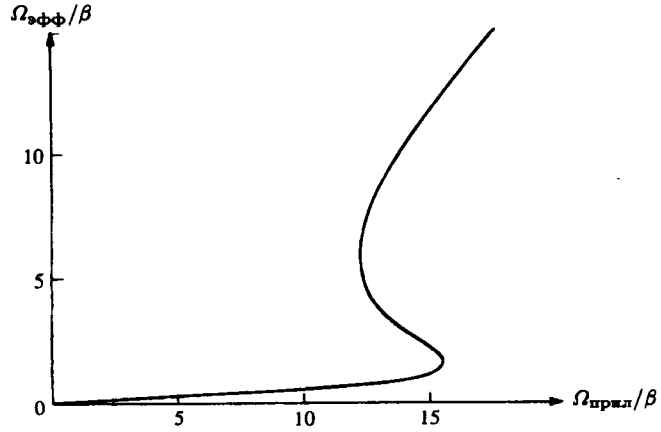


Рис. 16.9. Теоретическая зависимость между величинами $\Omega_{\text{эфф}}$ и $\Omega_{\text{прил}}$

где C является безразмерной постоянной, которая может быть много больше единицы. Из (16.4.1) находим, что для слабых полей ($\Omega_{\text{эфф}}/\beta \ll 1$)

$$\frac{\Omega_{\text{прил}}}{\beta} \approx \frac{\Omega_{\text{эфф}}}{\beta}(1+C),$$

так что $\Omega_{\text{эфф}} \ll \Omega_{\text{прил}}$, в то время как для сильных полей ($\Omega_{\text{эфф}}/\beta \gg 1$)

$$\frac{\Omega_{\text{прил}}}{\beta} \approx \frac{\Omega_{\text{эфф}}}{\beta}.$$

Однако в промежуточной области получается кубическое уравнение по $\Omega_{\text{эфф}}$, и при $C > 8$ для данного внешнего поля может быть три различных эффективных поля, действующих на атомы, два из которых представляют стабильные решения. Вообще говоря, атомные дипольные поля, соответствующие кооперативному атомному излучению, являются более существенными в случае слабого приложенного поля. В случае сильного приложенного поля оно является доминирующим. Соотношение между $\Omega_{\text{прил}}$ и $\Omega_{\text{эфф}}$ при $C = 20$ иллюстрируется кривой на рис. 16.9. Именно многозначность отклика является существенной особенностью оптической бистабильности. Отметим, что кооперативное атомное излучение играет фундаментальную роль в этом явлении.

Эффекты могут усиливаться, если активная среда помещена внутрь оптического резонатора. Сейчас мы обсудим несколько более реалистическую модель абсорбционной бистабильности, когда атомы не сконцентрированы в точке, и учитываются эффекты прохождения. Это позволит использовать некоторые из уравнений движения, которые были получены в разд. 16.3. Наше рассмотрение подобно тому, которое было сделано в работе (Bonifacio and Lugiato, 1978, a, b, c).

16.4.1. Абсорбционная бистабильность в кольцевом резонаторе

Для демонстрации абсорбционной оптической бистабильности резонансная среда помещается между зеркалами интерферометра Фабри — Перо, настроенного на частоту атомного перехода, и через интерферометр пропускается внешний, резонансный среде, световой пучок. Следовательно, система похожа на лазер, за исключением того, что в ней нет дополнительного механизма оптической накачки. Эта схема использовалась в ранних успешных экспериментах (Gibbs, McCall and Venkatesan, 1976), если не считать того, что они больше опирались на дисперсионные свойства среды, чем на резонансное поглощение. Дисперсионная бистабильность будет кратко обсуждаться ниже, но сейчас мы сконцентрируемся на механизме поглощения. Кроме того, для простоты будем рассматривать не резонатор Фабри — Перо, а резонатор кольцевого лазера, показанный на рис. 16.10, в одном плече которого находится активная среда длины L, и свет распространяется в среде только в одном направлении. Монохроматическая плоская волна частоты

ω_0 и амплитуды $\mathscr{E}_i$ падает на систему с одной стороны, как показано на рисунке, а волна амплитуды $\mathscr{E}_0$ выходит из нее с другой стороны. Предположим, что входное и выходное зеркала имеют коэффициенты отражения по амплитуде $\sqrt{R}$ и коэффициенты пропускания по амплитуде $\sqrt{1-R}$, тогда как другие два зеркала являются абсолютно отражающими. Некоторая часть света, излучаемого средой, направляется обратно с помощью зеркал и объединяется с падающим светом.

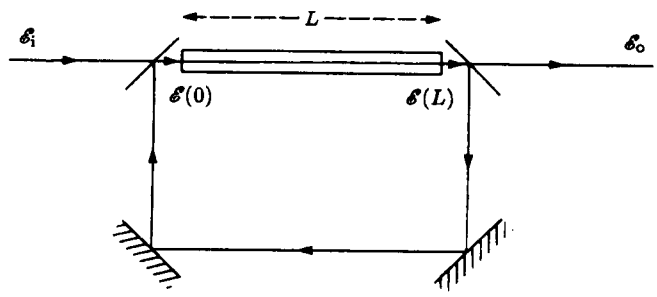


Рис. 16.10. Геометрия системы, демонстрирующей оптическую бистабильность

Внутри активной среды распространение света описывается теми же уравнениями (16.3.7) и (16.3.8) для амплитуды $\mathscr{E}(z,t)$ и фазы $\phi(z,t)$ поля, с которыми мы уже встречались, рассматривая самоиндуцированную прозрачность. Эти уравнения для $\mathscr{E}$ и ϕ должны быть дополнены уравнениями Блоха (15.3.19), описывающими движение атомов в поле. Для решения самосогласованной задачи сделаем в этих уравнениях два изменения. Во-первых, для упрощения расчета предположим, что неоднородное уширение является малым, так что $g(\omega)$ описывает естественную лоренцеву линию, которая представляет собой узкое спектральное распределение с центром на частоте ω_0. Тогда (16.3.7) и (16.3.8) принимают вид

$$\frac{\partial \mathscr{E}(z,t)}{\partial z} + \frac{n}{c}\frac{\partial \mathscr{E}(z,t)}{\partial t} = \frac{\omega_0 \mathscr{N} \boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*}{4\varepsilon_0 c n} r_2'(z,t), \tag{16.4.2}$$

$$\mathscr{E}(z,t)\frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} = \frac{\omega_0 \mathscr{N} \boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*}{4\varepsilon_0 c n} r_1'(z,t), \tag{16.4.3}$$

где все обозначения имеют тот же смысл, что и в разд. 16.3, n — показатель преломления решетки; $\mathscr{N}$ — плотность активных двухуровневых атомов. Во-вторых, введем в уравнения Блоха (15.3.19) феноменологические релаксационные члены. В гл. 15 было показано, что полуклассические уравнения Блоха не объясняют спонтанное атомное излучение в отсутствии внешнего поля. Однако когда поле квантовано, установлено, что r_1 и r_2, которые связаны с дипольным моментом, спадают экспоненциально до нуля со скоростью β (половина коэффициента Эйнштейна A), в то время как r_3+1, которая пропорциональна атомной энергии, спадает экспоненциально до нуля со скоростью 2β [ср. (15.5.28) и (15.5.29)]. Эти особенности атомного движения иногда вносятся искусственно в полуклассическую трактовку путем добавления феноменологических релаксационных членов в уравнения Блоха. Таким образом, $-\beta r_1'$ и $-\beta r_2'$ добавляются к первым двум уравнениям (15.3.19), соответственно, и $-2\beta(r_3'+1)$ добавляется к третьему уравнению. Тогда расширенные уравнения Блоха в случае точного резонанса принимают вид

$$\dot{r}_1'(z,t) = \Omega(z,t) r_3'(z,t)\sin\phi(z,t) - \beta r_1'(z,t), \tag{16.4.4}$$

$$\dot{r}_2'(z,t) = \Omega(z,t) r_3'(z,t)\cos\phi(z,t) - \beta r_2'(z,t), \tag{16.4.5}$$

$$\dot{r}_3'(z,t) = -\Omega(z,t) r_1'(z,t)\sin\phi(z,t) - \Omega(z,t) r_2'(z,t)\cos\phi(z,t) - 2\beta[r_3'(z,t)+1], \tag{16.4.6}$$

где поле в точке z в момент времени t представлено через атомную частоту Раби

$$\Omega(z,t) = \frac{2\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*}{\hbar}\mathscr{E}(z,t)$$

и через фазу $\phi(z,t)$. Составляющие вектора Блоха r_1', r_2', r_3' во вращающейся системе координат, конечно, также являются функциями координаты z и времени t. В течение любого временно́го интервала, более короткого по сравнению с временем спада $1/\beta$, релаксационные члены не оказывают большого влияния. Вот почему можно рассматривать прохождение коротких импульсов через среду, по крайней мере, приближенно, без введения затухания. Однако при описании стационарного поведения системы затуханием нельзя пренебрегать.

В дальнейшем мы не будем пытаться решать связанную систему уравнений Максвелла-Блоха в общем виде, а найдем только стационарное решение. В этом случае все временны́е производные в уравнениях (16.4.2)—(16.4.6) можно приравнять нулю, а $\mathscr{E}$, Ω, ϕ, r_1', r_2', r_3', становятся функциями только от z. Урав-

нения (16.4.2)—(16.4.6) имеют следующие стационарные решения:

$$r_1'(z) = \frac{-(\Omega/\beta)\sin\phi}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1}, \tag{16.4.7}$$

$$r_2'(z) = \frac{-(\Omega/\beta)\cos\phi}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1}, \tag{16.4.8}$$

$$r_3'(z) = \frac{-1}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1}, \tag{16.4.9}$$

из которых сразу видно, что атомные векторы Блоха не являются теперь единичными векторами для взаимодействующей квантовой системы, поскольку атомные состояния уже не являются чистыми состояниями. Кроме того, из (16.4.2) получаем в стационарном состоянии

$$\frac{d\Omega}{dz} = \frac{\alpha}{g(\omega_0)} r_2',$$

где α является коэффициентом поглощения для интенсивности света и задается выражением (16.3.15). Если для r_2' в этой формуле воспользоваться выражением (16.4.8), то получим

$$\frac{d\Omega}{dz} = -\frac{\alpha}{g(\omega_0)} \frac{(\Omega/\beta)\cos\phi}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1}. \tag{16.4.10}$$

Уравнение (16.4.3) в стационарном состоянии приводит к формуле

$$\Omega\frac{d\phi}{dz} = \frac{\alpha}{g(\omega_0)} r_1',$$

и с помощью (16.4.7) получаем

$$\Omega\frac{d\phi}{dz} = -\frac{\alpha}{g(\omega_0)} \frac{(\Omega/\beta)\sin\phi}{(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2)+1}. \tag{16.4.11}$$

Комбинация (16.4.10) и (16.4.11) дает

$$\Omega\frac{d\phi}{dz} \Big/ \frac{d\Omega}{dz} = \operatorname{tg}\phi,$$

что можно записать в виде дифференциального уравнения, связывающего Ω и ϕ

$$\Omega\frac{d\phi}{d\Omega} = \operatorname{tg}\phi.$$

Это уравнение можно сразу проинтегрировать, в результате чего получаем

$$\Omega(z)\sin\phi(0) = \Omega(0)\sin\phi(z). \tag{16.4.12}$$

Из полученного выражения следует, что в частном случае, когда $\phi(0) = 0$ и $\Omega(0) \neq 0$, $\phi(z) = 0$ для всех z. Впредь мы будем концентрировать наше внимание именно на этом частном случае. Также, если $g(\omega)$ является естественной лоренцевой функцией, то можно заменить $g(\omega_0)$ на $2/\beta$.

Когда $\phi = 0$, уравнение (16.4.10) можно проинтегрировать непосредственно по z, что приводит к выражению

$$\int_{\Omega(0)}^{\Omega(z)} \left[\left(\frac{1}{2}\Omega^2/\beta^2\right)+1\right]\frac{d\Omega}{\Omega} = -\frac{1}{2}\alpha\int_0^z dz,$$

или

$$\ln\frac{\Omega(z)}{\Omega(0)} + \frac{1}{4}\left[\frac{\Omega^2(z)}{\beta^2} - \frac{\Omega^2(0)}{\beta^2}\right] = -\frac{1}{2}\alpha z. \tag{16.4.13}$$

Следует отметить, что обе стороны уравнения отрицательны, поскольку среда поглощает свет. В сильном поле, когда $\Omega/\beta \gg 1$, логарифмический член по Ω будет мал по сравнению с квадратичным членом. Противоположное утверждение будет верно в случае очень слабого поля, когда $\Omega/\beta \ll 1$.

Наконец, нам необходимо связать $\Omega(0)$ и $\Omega(L)$ с входной и выходной амплитудами $\mathscr{E}_\mathrm{i}$ и $\mathscr{E}_\mathrm{o}$ электрического поля. Удобно представить электрические поля с помощью соответствующих частот Раби

$$\Omega_\mathrm{i} \equiv \frac{2\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*}{\hbar}\mathscr{E}_\mathrm{i}, \quad \Omega_\mathrm{o} \equiv \frac{2\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*}{\hbar}\mathscr{E}_\mathrm{o}. \tag{16.4.14}$$

Анализируя (16.4.10), можно увидеть, что $\Omega(0) = \sqrt{(1-R)}\Omega_\mathrm{i} + R\Omega(L)$, $\Omega_\mathrm{o} = \sqrt{(1-R)}\Omega(L)$, так что

$$\Omega(0) = \sqrt{(1-R)}\Omega_\mathrm{i} + \frac{R}{\sqrt{(1-R)}}\Omega_\mathrm{o}, \tag{16.4.15}$$

$$\Omega(L) = \frac{1}{\sqrt{(1-R)}}\Omega_\mathrm{o}. \tag{16.4.16}$$

Теперь положим $z = L$ в (16.4.13) и заменим $\Omega(0)$ и $\Omega(L)$ выражениями (16.4.15) и (16.4.16). Тогда получим следующее соотношение между Ω_i и Ω_o

$$\ln\left[R + (1-R)\frac{\Omega_\mathrm{i}}{\Omega_\mathrm{o}}\right] + \frac{1}{4}\left[(1-R)\frac{\Omega_\mathrm{i}^2}{\beta^2} - (1+R)\frac{\Omega_\mathrm{o}^2}{\beta^2} + 2R\frac{\Omega_\mathrm{o}\Omega_\mathrm{i}}{\beta^2}\right] = \frac{1}{2}\alpha L. \tag{16.4.17}$$

Соотношение (16.4.17) проиллюстрировано графически на рис. 16.11 для случая $R = 0.95$ и для различных значений поглощения, измеренного в единицах αL. Видно, что если αL не слишком мало, то небольшой входной сигнал вызывает появление очень слабого выходного сигнала, поскольку среда является сильно поглощающей. С другой стороны, достаточно большой входной сигнал приводит к сигналу, амплитуда которого сравнима с амплитудой сигнала на входе, потому что поглощающая среда оказывается, в конечном счете, насыщенной. Наиболее интересное поведение наблюдается в промежуточной области, где наклон $d\Omega_\mathrm{o}/d\Omega_\mathrm{i}$ может стать отрицательным, если αL не слишком мало, и существуют несколько возможных значений Ω_o на выходе для данного значения Ω_i на входе. На практике, области отрицательного наклона нестабильны, так что система переключается скачком от одной ветви кривой к другой. Например, предположим, что мы начинаем с весьма небольшого значения на входе Ω_i, которое постепенно увеличивается. Когда система достигает точки A на рис. 16.11, значение на выходе скачком меняется до более высокого значения, представленного точкой B и система после этого следует вдоль верхней ветви кривой, если значение на входе продолжает возрастать. Если же теперь значение на входе постепенно уменьшается, то система следует по верхней ветви кривой мимо точки B к точке C, в которой происходит скачок значения на выходе к более низкому значению, представленному точкой D. Дальнейшее уменьшение входного значения приводит к тому, что система следует вдоль нижней ветви кривой. Следовательно, система демонстрирует *гистерезис* и *бистабильность*, что наблюдалось экспериментально (McCall, 1974).

Необходимо отметить, что как резонансно поглощающая среда, так и оптическая обратная связь необходимы для формирования бистабильности в этом случае. Если мы освободимся от среды, полагая $\alpha L = 0$, то (16.4.17) тогда приводит к $\Omega_\mathrm{o} = \Omega_\mathrm{i}$. Это соотношение проиллюстрировано на рис. 16.11 пунктирной линией. С другой стороны, если мы освободимся от зеркал обратной связи и положим $R = 0$, то (16.4.17) упрощается до соотношения типа (16.4.13), которое подразумевает монотонное соотношение между Ω_o и Ω_i. Тогда опять не будет бистабильности. Это противоположно ситуации, в которой поглотитель сконцентрирован в точке, когда отклик несомненно бистабилен даже в отсутствии резонатора (Walls, Drummond, Hassan, Carmichael, 1978; Bowden, Sung, 1979). В общем случае, когда $R \neq 0$, имеется минимальное значение αL, порядка 1, если $R = 0.95$, ниже которого бистабильность отсутствует. При определенных условиях верхняя область кривой между точками B и C на рис. 16.11 также может быть нестабильной в том смысле, что может возникнуть режим самопульсаций на выходе (Bonifacio, Lugiato, 1978a, b, c).

Когда коэффициент пропускания $T = 1-R$ зеркала является достаточно мал, так что логарифмическую функцию можно разложить в ряд по T и ограничится членом первого порядка, и если αL также мало, и можно положить $\frac{1}{2}\alpha L/T \equiv C$, то (16.4.17) упрощается до

$$\left(\frac{\Omega_\mathrm{i}}{\Omega_\mathrm{o}} - 1\right) + \frac{1}{2}\frac{\Omega_\mathrm{o}}{\beta T}\left(\frac{\Omega_\mathrm{i}}{\beta} - \frac{\Omega_\mathrm{o}}{\beta}\right) \approx C,$$

или

$$\frac{\Omega_i}{\beta} \approx \frac{\Omega_o}{\beta} + C\frac{\Omega_o/\beta}{(\frac{1}{2}\Omega_o^2/\beta^2)+1}, \qquad (16.4.18)$$

которое имеет ту же самую общую форму, что и (16.4.1). Это уравнение также демонстрирует бистабильность, если C превышает 8. Параметр C иногда называют *параметром кооперативности*.

Этот простой полуклассический анализ пренебрегает квантовыми флуктуациями системы, которые становятся особенно важными в окрестности бистабильности. В действительности, они в общем случае вынуждают систему переключаться где-то между точками D и A и между C и B, а не точно там, где указано на рис. 16.11. Можно показать в рамках полностью квантового рассмотрения (Bonifacio and Lugiato, 1978a; Narducci, Gilmore, Da Hsuan Feng and Agarwal, 1978), что большие полевые флуктуации появляются в критической области переключения и что выходящий свет имеет некогерентную составляющую, спектральная плотность которой изменяется коренным образом по мере прохождения бистабильного цикла. Спектр становится много уже, чем спектр естественно уширенной линии в точке D на рис. 16.11. Он уширяется по мере продвижения к точке A и становится трехгорбым в точке B. В точке C он снова становится одногорбым, но имеет ширину, существенно превышающую естественную ширину линии. Эти изменения спектра отражают фундаментальные изменения в механизме излучения. Около точки B и выше, где поглощающая среда близка к насыщению, каждый атом излучает более или менее независимо в резонансном вынуждающем поле. Поэтому, можно ожидать трехгорбый спектр, характерный для спонтанного излучения в когерентном поле (ср. рис. 15.10). Однако около точки C вынуждающее поле не является достаточно сильным, чтобы преодолеть взаимодействие между атомами, и система излучает в кооперативном или сверхизлучательном режиме, который будет обсуждаться в разд. 16.6. Это характеризуется уширением линии излучения. В области между D и A сильное поглощение резонансной средой вызывает сужение спектра проходящего через нее света по сравнению с естественно уширенной линией. Это еще раз показывает, что переключение, которое происходит в области бистабильности, соответствует переходам между кооперативным и некооперативным процессами излучения.

Один из способов проверки теории абсорбционной бистабильности состоит в том, чтобы измерить интенсивности света Y_1, Y_2, соответствующие точкам A и D на рис. 16.11, где имеет место переключение из одного состояния в другое. Это было сделано в экспериментах (Orozco, Kimble and Rosenberger, 1987), в ходе которых были получены Y_1 и Y_2 как функции параметра кооперативности C. Некоторые из их результатов показаны на рис. 16.12 вместе с теоретическими кривыми. Видно, что имеется хорошее согласие теории и эксперимента.

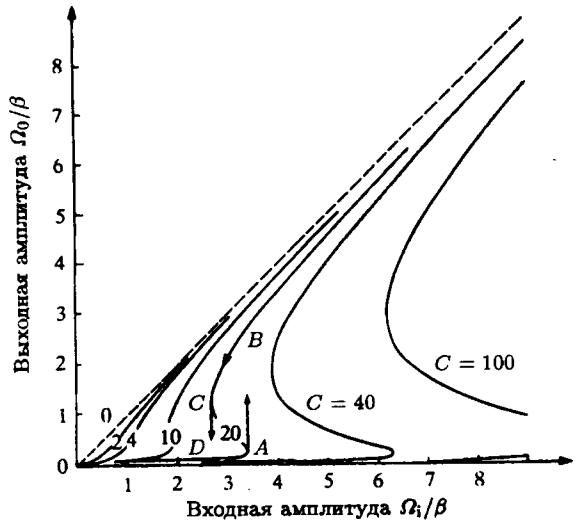


Рис. 16.11. Отношение между входной и выходной амплитудами [(16.4.17)]. $R = 0.95$. Каждая кривая соответствует определенному значению $\alpha L = 2CT$

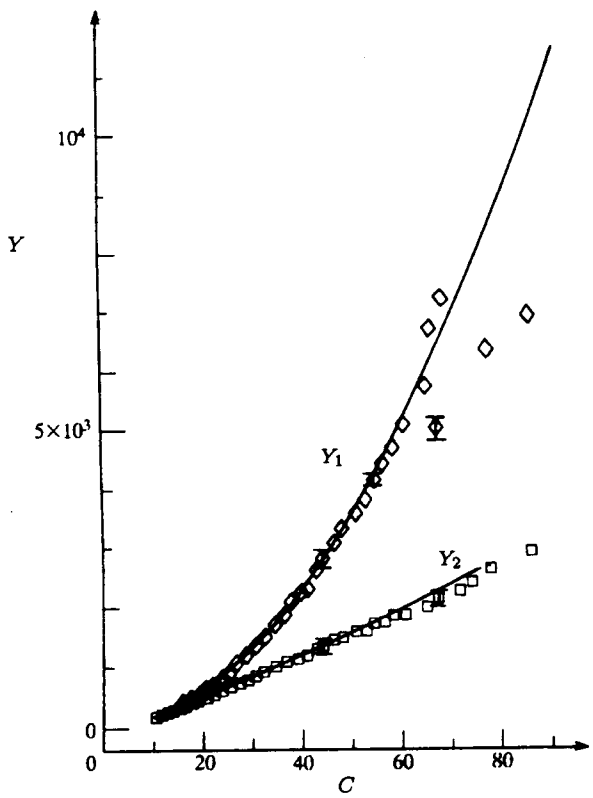


Рис. 16.12. Сравнение экспериментальных и теоретических результатов для двух значений интенсивности Y_1 (квадраты) и Y_2 (ромбы) в точках переключения как функций параметра кооперативности C (Orozco, Kimble and Rosenberger, 1987)

16.4.2. Дисперсионная бистабильность

Явление, которое обсуждалось до сих пор, зависит от насыщения процесса атомного поглощения и названо *абсорбционной бистабильностью* с тем, чтобы отличить его от *дисперсионной бистабильности*, возникающей при похожих условиях, когда дисперсионные свойства среды играют более важную роль, нежели абсорбционные. Мы не будем очень подробно обсуждать дисперсионную бистабильность, а воспользуемся упрощенным эвристическим рассуждением (Gibbs, McCall and Venkatesan, 1978).

Предположим, что поле, распространяющееся через среду, не ослабляется средой, а испытывает зависящий от интенсивности сдвиг фазы ϕ, так что

$$\Omega(L) = \Omega(0)\,\mathrm{e}^{-i\phi}, \tag{16.4.19}$$

где

$$\phi = \phi_0 - k|\Omega_0|^2. \tag{16.4.20}$$

Такая ситуация возможна, если коэффициент преломления характеризуется нелинейностью, типа той, которая встречается в оптическом эффекте Керра, или когда система двухуровневых атомов очень далека от резонанса. Коэффициент k является положительной константой, а ϕ_0 — регулируемый параметр, зависящий от расстройки между резонатором и резонансной частотой атомов. Уравнение (16.4.19) заменяет теперь уравнение (16.4.13), в качестве соотношения между $\Omega(0)$ и $\Omega(L)$, и, с учетом граничных условий (16.4.15) и (16.4.16), получаем следующий результат

$$\Omega_0 = [(1-R)\Omega_i + R\Omega_0]\,\mathrm{e}^{-i(\phi_0 - k|\Omega_0|^2)}. \tag{16.4.21}$$

Если обозначить $|\Omega_i|^2$ через I_i и $|\Omega_0|^2$ через I_0, где I_i и I_0 играют роль интенсивности на входе и на выходе, и найти квадрат модулей обеих сторон этого уравнения, а также если предположить, что фазовый угол достаточно мал, можно воспользоваться приближением

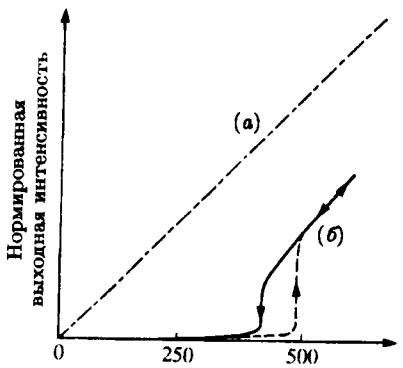


Рис. 16.13. Результаты измерений прошедшей мощности как функции мощности на входе для интерферометра Фабри — Перо: *а* — без паров натрия и *б* — заполненного парами натрия (Gibbs, McCall and Venkatesan, 1976)

$$\cos(\phi_0 - kI_0) \approx 1 - \frac{1}{2}(\phi_0 - kI_0)^2,$$

то (16.4.21) упростится и примет вид

$$I_i = I_0\left[1 + \frac{R\phi_0^2}{(1-R)^2} - \frac{2k\phi_0 R}{(1-R)^2}I_0 + \frac{k^2R}{(1-R)^2}I_0^2\right]. \tag{16.4.22}$$

Это кубическое уравнение по I_0 снова обнаруживает бистабильное поведение в том смысле, что dI_i/dI_0 может быть равно нулю для двух действительных значений I_0 при условии, что

$$\phi_0^2 > 3T^2/R. \tag{16.4.23}$$

Теперь асимптотическое отношение I_i и I_0 не является линейным, как в случае абсорбционной бистабильности. Однако (16.4.22) лучше подходит для описания первых экспериментов по оптической бистабильности, выполненных в работе (Gibbs, McCall, and Venkatesan, 1976), нежели уравнение (16.4.17). В этих экспериментах использовался интерферометр Фабри — Перо, заполненный парами натрия и функционирующий вдали от резонанса, так что дисперсия была главной нелинейностью. На рис. 16.13 показаны результаты измерений прошедшей мощности как функции входной мощности для двух случаев: пустой кюветы и кюветы, заполненной парами натрия. Четко видно гистерезисное поведение прозрачности среды.

16.4.3. Хаос в оптической бистабильности[1]

Как показал Икеда (Ikeda, 1979) (см. также Ikeda, Daido and Akimoto, 1980), если время прохождения света через нелинейную среду от выхода ($z = L$) до входа (z=0) (см. рис. 16.10) существенно больше, чем

[1] см. также книгу (*Шустер, 1988) — *ред. пер.*

время релаксации среды, то могут появиться совершенно новые черты ее поведения. При этих условиях дифференциальные уравнения, определяющие временно́е поведение света, принимают вид разностных уравнений для временны́х задержек и могут быть сведены к дискретному отображению. Это отображение, хотя и является полностью детерминированным, может все же приводить к временно́му развитию, которое похоже на случайные флуктуации и лучше описывается как *хаотическое*. Оно характеризуется спектром, который состоит, скорее, из непрерывного, нежели из дискретного распределения частот и система оказывается весьма чувствительной к начальным условиям. Такое поведение наблюдалось экспериментально (Gibbs, Hopf, Kaplan and Shoemaker, 1981; Nakatsuka, Asaka, Itoh, Ikeda and Matsuoka, 1983). Тема хаоса в оптической бистабильности подробно описана в литературе, и мы не будем обсуждать ее здесь. Однако хаотическое поведение в лазере будет кратко рассмотрено в разд. 18.8.

16.5. Коллективные атомные состояния и коллективные динамические переменные[1]

Мы уже рассмотрели некоторые оптические явления, которые зависят от коллективных атомных процессов, но до сих пор они успешно объяснялись в рамках одноатомной теории. Коллективные вклады, связанные с разными атомами, просто складывались. Однако при решении некоторых проблем желательно иметь такой атомный формализм, который мог бы прямо применяться к ансамблю атомов. Как мы увидим, это приводит не только к некоторым новым динамическим переменным, но также и к некоторым коллективным атомным состояниям, которые проявляют новые интересные особенности.

Рассмотрим ансамбль из N одинаковых двухуровневых атомов, описываемых спиновыми операторами $\hat{R}_1^{(j)}$, $\hat{R}_2^{(j)}$, $\hat{R}_3^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ или атомными понижающим и повышающим операторами $\hat{b}^{(j)}$, $\hat{b}^{(j)\dagger}$. Поскольку атомы различимы, то операторы всех динамических переменных, соответствующих разным атомам в один и тот же момент времени, коммутируют. Для того, чтобы описать систему коллективно, иногда удобно использовать коллективные атомные спиновые операторы

$$\hat{\mathscr{R}}_1 \equiv \sum_{j=1}^{N} \hat{R}_1^{(j)}, \quad \hat{\mathscr{R}}_2 \equiv \sum_{j=1}^{N} \hat{R}_2^{(j)}, \quad \hat{\mathscr{R}}_3 \equiv \sum_{j=1}^{N} \hat{R}_3^{(j)} \tag{16.5.1}$$

или коллективные понижающий и повышающий операторы

$$\hat{\mathscr{R}}^{(-)} \equiv \sum_{j=1}^{N} \hat{b}^{(j)} = \hat{\mathscr{R}}_1 - i\hat{\mathscr{R}}_2, \quad \hat{\mathscr{R}}^{(+)} \equiv \sum_{j=1}^{N} \hat{b}^{(j)\dagger} = \hat{\mathscr{R}}_1 + i\hat{\mathscr{R}}_2. \tag{16.5.2}$$

Из правил коммутации для одноатомных операторов (15.1.11) и (15.1.13) легко найдем, что

$$[\hat{\mathscr{R}}_l, \hat{\mathscr{R}}_m] = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} [\hat{R}_l^{(j)}, \hat{R}_m^{(k)}] = \sum_{j=1}^{N} [\hat{R}_l^{(j)}, \hat{R}_m^{(j)}] = i\epsilon_{lmn}\hat{\mathscr{R}}_n, \quad (l, m, n = 1, 2, 3), \tag{16.5.3}$$

$$[\hat{\mathscr{R}}^{(+)}, \hat{\mathscr{R}}^{(-)}] = 2\hat{\mathscr{R}}_3, \quad [\hat{\mathscr{R}}_3, \hat{\mathscr{R}}^{(\pm)}] = \pm\hat{\mathscr{R}}^{(\pm)}. \tag{16.5.4}$$

Точно так же, как операторы $\hat{b}^{(j)\dagger}$ и $\hat{b}^{(j)}$ повышают и понижают степень возбуждения j-го атома на единицу, так и операторы $\hat{\mathscr{R}}^{(+)}$ и $\hat{\mathscr{R}}^{(-)}$ повышают и понижают возбуждение коллективной атомной системы на единицу, но таким образом, что это возбуждение распределяется по всем атомам. В качестве примера предположим, что каждый из N атомов находится в нижнем состоянии $|1\rangle$, так что состояние коллективной атомной системы задается произведением состояний

$$|\{1\}\rangle \equiv \prod_{j=1}^{N} |1_j\rangle.$$

[1] Наглядное изложение этих вопросов можно найти в обзоре (*Андреев, Емельянов, Ильинский, 1980) — *ред. пер.*

Тогда

$$\hat{\mathscr{R}}^{(+)}|\{1\}\rangle = \sum_{k=1}^{N} |2_k\rangle \prod_{j\neq k} |1_j\rangle.$$

Новое состояние является суперпозиционным состоянием, в котором одно возбуждение распределено с равным весом по всем атомам.

В дополнение к коллективным операторам $\hat{\mathscr{R}}_1$, $\hat{\mathscr{R}}_2$, $\hat{\mathscr{R}}_3$ полезно ввести оператор

$$\hat{\mathscr{R}}^2 \equiv \hat{\mathscr{R}}_1^2 + \hat{\mathscr{R}}_2^2 + \hat{\mathscr{R}}_3^2 = \frac{3}{4}N + \sum_{j\neq k}\sum [\hat{R}_1^{(j)}\hat{R}_1^{(k)} + \hat{R}_2^{(j)}\hat{R}_2^{(k)} + \hat{R}_3^{(j)}\hat{R}_3^{(k)}] =$$

$$= \frac{3}{4}N + \sum_{j\neq k}\sum [\hat{b}^{(j)}\hat{b}^{(k)\dagger} + \hat{R}_3^{(j)}\hat{R}_3^{(k)}]. \quad (16.5.5)$$

Из правил коммутации следует, что

$$[\hat{\mathscr{R}}_l, \hat{\mathscr{R}}^2] = 0, \quad l = 1,2,3, \quad (16.5.6)$$

так что коллективные $\hat{\mathscr{R}}$-операторы подчиняются той же самой алгебре, что и угловой момент. Поэтому можно, например, найти атомные состояния, являющиеся одновременно собственными состояниями операторов $\hat{\mathscr{R}}_3$ и $\hat{\mathscr{R}}^2$.

Полный гамильтониан системы из N атомов, при условии, что нижнее состояние является основным состоянием, записывается через коллективные операторы в виде

$$\hat{H}_{\mathrm{A}} = \hbar\omega_0 \left(\hat{\mathscr{R}}_3 + \frac{1}{2}N\right), \quad (16.5.7)$$

а оператор полного дипольного момента $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ равен

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = 2\,\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\mu}_{12})\hat{\mathscr{R}}_1 + 2\,\mathrm{Im}\,(\boldsymbol{\mu}_{12})\hat{\mathscr{R}}_2 = \boldsymbol{\mu}_{12}\hat{\mathscr{R}}^{(-)} + \boldsymbol{\mu}_{12}^*\hat{\mathscr{R}}^{(+)}. \quad (16.5.8)$$

16.5.1. Состояния Дике

Рассмотрим атомное коллективное состояние $|\Phi\rangle$, задаваемое в виде произведения одноатомных состояний, в котором N_1 из N атомов находятся в нижнем состоянии $|1\rangle$ и N_2 атомов — в верхнем состоянии $|2\rangle$, где

$$N = N_1 + N_2, \quad m \equiv \frac{1}{2}(N_2 - N_1), \quad (16.5.9а)$$

или

$$N_2 = \frac{1}{2}N + m, \quad N_1 = \frac{1}{2}N - m. \quad (16.5.9б)$$

Очевидно, что число m является мерой полной инверсии атомов и оно является либо целым, либо полуцелым. Состояние $|\Phi\rangle$ имеет вид

$$|\Phi\rangle = |1_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle|1_4\rangle\ldots \quad \ldots|2_N\rangle,$$

и из определения $\hat{\mathscr{R}}_3$ сразу видно, что оно является собственным состоянием оператора $\hat{\mathscr{R}}_3$ с собственным значением m

$$\hat{\mathscr{R}}_3|\Phi\rangle = m|\Phi\rangle, \quad -\frac{1}{2}N \leqslant m \leqslant \frac{1}{2}N. \quad (16.5.10)$$

Таким образом, состояние $|\Phi\rangle$ является собственным энергетическим состоянием атомной системы с собственным значением $\hbar\omega_0(m+\frac{1}{2}N)$, и это собственное значение не зависит от способа, каким N_2 возбуждений фактически распределяются по N атомам. В общем случае собственное значение m имеет вырождение

$$d_m = \frac{N!}{N_2!N_1!} = \frac{N!}{(\frac{1}{2}N+m)!(\frac{1}{2}N-m)!} \quad (16.5.11)$$

по перестановкам среди N атомов, которое максимально, когда $m = 0$. Вырождение отсутствует вообще, когда $m = \pm\frac{1}{2}N$. В этом случае все атомы или полностью возбуждены или полностью невозбуждены.

Степень вырождения собственного значения энергии может быть существенно уменьшена, если рассмотреть состояния, удовлетворяющие выражению (16.5.10) и являющиеся также собственными состояниями оператора $\hat{\mathscr{R}}^2$. Поскольку $\hat{\mathscr{R}}_3$ и $\hat{\mathscr{R}}^2$ коммутируют, согласно (16.5.6) существуют состояния, которые являются одновременно собственными состояниями как оператора $\hat{\mathscr{R}}_3$, так и оператора $\hat{\mathscr{R}}^2$. Если обозначить собственные значения $\hat{\mathscr{R}}^2$ через $l(l+1)$, а соответствующие собственные состояния через $|l,m\rangle$, то можно записать

$$\hat{\mathscr{R}}_3|l,m\rangle = m|l,m\rangle, \quad \hat{\mathscr{R}}^2|l,m\rangle = l(l+1)|l,m\rangle. \tag{16.5.12}$$

Определение (16.5.5) оператора $\hat{\mathscr{R}}^2$ и явная аналогия между операторами $\hat{\mathscr{R}}_l$ $(l = 1,2,3)$ и операторами углового момента позволяют сразу установить ограничение на l, и в результате мы находим, что l может быть целым или полуцелым с условием

$$|m| \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}N. \tag{16.5.13}$$

Состояния $|l,m\rangle$ были впервые введены Дике (Dicke, 1954) в связи с исследованием излучения группы атомов, взаимодействующих через электромагнитное поле. Он назвал число l *кооперационным числом*, поскольку оно играет ключевую роль в определении скорости кооперативного излучения атомной системы. Мы еще вернемся к обсуждению этой проблемы в следующем параграфе.

Из коммутационного соотношения (16.5.4) и из выражения (16.5.12) сразу же следует, что

$$\hat{\mathscr{R}}_3\hat{\mathscr{R}}^{(\pm)}|l,m\rangle = \hat{\mathscr{R}}^{(\pm)}(\hat{\mathscr{R}}_3 \pm 1)|l,m\rangle = (m \pm 1)\hat{\mathscr{R}}^{(\pm)}|l,m\rangle, \tag{16.5.14}$$

так что действие $\hat{\mathscr{R}}^{(\pm)}$ на состояние Дике состоит в увеличении или уменьшении собственного значения m на единицу, в то время как l остается неизменным. Кроме того, из хорошо известных свойств операторов углового момента следует, что (см., например, Dicke and Wittke, 1960, гл. 9)

$$\begin{aligned} \hat{\mathscr{R}}^{(-)}|l,m\rangle &= [(l+m)(l-m+1]^{1/2}|l,m-1\rangle, \\ \hat{\mathscr{R}}^{(+)}|l,m\rangle &= [(l-m)(l+m+1]^{1/2}|l,m+1\rangle. \end{aligned} \tag{16.5.15}$$

Поскольку взаимодействие между атомной системой и полем осуществляется посредством коллективного дипольного момента $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, задаваемого выражением (16.5.8) и выражаемого через операторы $\hat{\mathscr{R}}^{(+)}$ и $\hat{\mathscr{R}}^{(-)}$, любое дипольное взаимодействие с атомной системой, находящейся в состояние Дике, будет подчиняться правилам отбора первого порядка

$$\Delta m \pm 1, \quad \Delta l = 0. \tag{16.5.16}$$

Для любого заданного кооперационного числа l «основное состояние» атомной системы представляется состоянием $|l,-l\rangle$, для которого m имеет наименьшее возможное значение. Более возбужденное состояние Дике $|l,m\rangle$ с $m > -l$ может быть получено из основного состояния путем многократного применения коллективного повышающего оператора $\hat{\mathscr{R}}^{(+)}$, так что, используя (16.5.15), можно записать

$$|l,m\rangle = \left(\frac{(l-m)!}{(2l)!\,(l+m)!}\right)^{1/2}(\hat{\mathscr{R}}^{(+)})^{l+m}|l,-l\rangle. \tag{16.5.17}$$

Формирование состояний $|l,m\rangle$ легче всего проиллюстрировать, рассмотрев сначала систему из $N = 2$ двухуровневых атомов. Полностью возбужденное состояние $|2_1\rangle|2_2\rangle$ имеет $m = \frac{1}{2}N = 1$, и из (16.5.13) следует, что также и $l = 1$. Следовательно, можно отождествить полностью возбужденное состояние $|2_1\rangle|2_2\rangle$ с состоянием Дике $|l = 1, m = 1\rangle$ или

$$|1,1\rangle = |2_1\rangle|2_2\rangle. \tag{16.5.18}$$

Для того, чтобы получить другие состояния Дике из $|1,1\rangle$, подействуем понижающим оператором $\hat{\mathscr{R}}^{(-)}$ и воспользуемся определением (16.5.2) и соотношениями (16.5.15). Тогда найдем, что

$$\sqrt{2}|1,0\rangle = \hat{\mathscr{R}}^{(-1)}|1,1\rangle = |2_1\rangle|1_2\rangle + |1_1\rangle|2_2\rangle,$$

так что

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|2_1\rangle|1_2\rangle + |1_1\rangle|2_2\rangle t], \tag{16.5.19}$$

и последующее применение оператора $\hat{\mathscr{R}}^{(-)}$ приводит к формуле

$$\sqrt{2}|1,-1\rangle = \hat{\mathscr{R}}^{(-1)}|1,0\rangle = \sqrt{2}|1_1\rangle|1_2\rangle,$$

так что

$$|1,-1\rangle = |1_1\rangle|1_2\rangle. \tag{16.5.20}$$

Все эти состояния соответствуют кооперационному числу $l = 1$. Для того, чтобы увидеть, какие состояния соответствуют $l = 0$, воспользуемся (16.5.5) и найдем собственные состояния оператора $\hat{\mathscr{R}}^2$. Нетрудно показать, что для любых комплексных чисел c_1 и c_2

$$\hat{\mathscr{R}}^2[c_1|2_1\rangle|1_2\rangle + c_2|1_1\rangle|2_2\rangle] = (c_1 + c_2)[|2_1\rangle|1_2\rangle + |1_1\rangle|2_2\rangle].$$

Состояние $c_1|2_1\rangle|1_2\rangle + c_2|1_1\rangle|2_2\rangle$ поэтому является собственным состоянием оператора $\hat{\mathscr{R}}^2$ с собственным значением λ, если справедливо выражение

$$c_1 + c_2 = \lambda c_1 = \lambda c_2,$$

которое означает, что

$$c_1 = c_2, \quad \lambda = 2,$$

или

$$c_1 + c_2 = 0, \quad \lambda = 0.$$

Первое из условий приводит к состоянию $|1,0\rangle$, определяемому выражением (16.5.19), которое мы уже нашли. Последнее из условий означает, что $l = 0$, и приводит к состоянию

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|2_1\rangle|1_2\rangle - |1_1\rangle|2_2\rangle] \tag{16.5.21}$$

после нормировки. Четыре возможных состояния $|l,m\rangle$, когда $N = 2$, проиллюстрированы на рис. 16.14. Состояние $l = 0$ является синглетом, в то время как $l = 1$ соответствует триплетному состоянию.

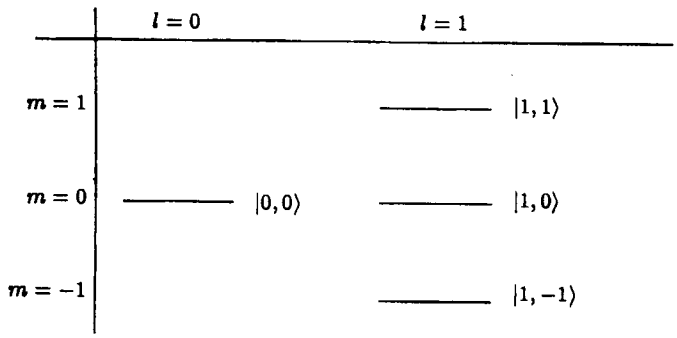


Рис. 16.14. Энергетические уровни состояний Дике двухатомной системы

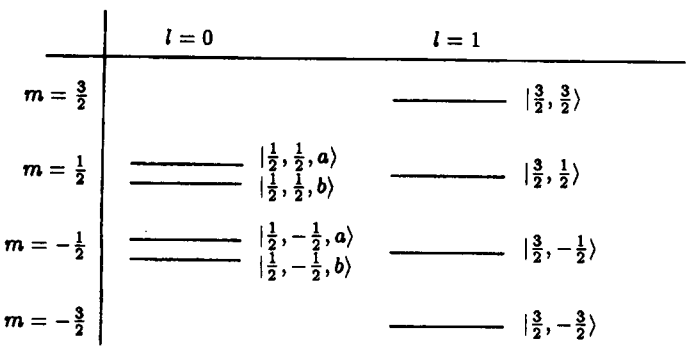


Рис. 16.15. Энергетические уровни состояний Дике трехатомной системы. Уровни при $l = 1/2$ и $m = \pm 1/2$ являются вырожденными

В одном смысле пример с $N = 2$ является, пожалуй, слишком упрощенным, поскольку каждое их четырех состояний Дике $|l,m\rangle$ выражается однозначно через четыре состояния $|1_1\rangle|1_2\rangle$, $|2_1\rangle|1_2\rangle$, $|1_1\rangle|2_2\rangle$, $|2_1\rangle|2_2\rangle$, и вырождение отсутствует. Когда же N превосходит 2, ситуация становится немного сложнее.

Так, если $N = 3$, можно легко отождествить основное состояние трехатомной системы со следующим состоянием

$$|\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle = |1_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle, \tag{16.5.22}$$

и, действуя многократно повышающим оператором, получаем

$$|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathscr{R}}^{(+)}|1_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}[|2_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle + |1_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle + |1_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle], \tag{16.5.23}$$

$$|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}[|2_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle + |2_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle + |1_1\rangle|2_2\rangle|2_3\rangle], \tag{16.5.24}$$

$$|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle = |2_1\rangle|2_2\rangle|2_3\rangle. \tag{16.5.25}$$

Пока каждое состояние Дике определяется однозначно. Однако когда мы приходим к состояниям $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$ и $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$, каждое из которых является собственным состоянием оператора $\hat{\mathscr{R}}^2$ с собственным значением $\frac{3}{4}$, то сразу обнаруживаем, что любое состояние вида

$$(|c_1|^2+|c_2|^2+|c_3|^2)^{-1/2}[c_1|2_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle+c_2|1_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle+c_3|1_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle]$$

с $c_1+c_2+c_3=0$ является состоянием типа $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$. Аналогично, любое состояние вида

$$(|c_1|^2+|c_2|^2+|c_3|^2)^{-1/2}[c_1|1_1\rangle|2_2\rangle|2_3\rangle+c_2|2_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle+c_3|2_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle]$$

с $c_1+c_2+c_3=0$ является состоянием типа $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$. Поэтому состояния $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$ и $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ не определяются однозначно выражением (16.5.12) и двумя собственными значениями l,m. Однако нетрудно показать, что все состояния типа $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$ выражаются в виде линейных комбинаций двух линейно независимых состояний

$$|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},a\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[|2_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle-|1_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle], \tag{16.5.26}$$

$$|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},b\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}[|2_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle+|1_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle-2|1_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle]. \tag{16.5.27}$$

Подобным образом все состояния типа $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ могут быть образованы из двух линейно независимых состояний

$$|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},a\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[|1_1\rangle|2_2\rangle|2_3\rangle-|2_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle], \tag{16.5.28}$$

$$|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},b\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}[|1_1\rangle|2_2\rangle|2_3\rangle+|2_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle-2|2_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle]. \tag{16.5.29}$$

Следовательно, существуют два состояния типа $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$ и два состояния типа $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ с немного отличающимися свойствами симметрии, между которыми возможны только такие дипольные переходы, которые связывают состояния с одинаковой симметрией. Система энергетических уровней проиллюстрирована на рис. 16.15.

Однако если мы потребуем, чтобы все три состояния одного возбуждения $|2_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle$, $|1_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle$, $|1_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle$ вносили равные вклады в суперпозиционное состояние $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$, так что $|c_1|=|c_2|=|c_3|$, то единственно возможные состояния Дике типа $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$ имеют вид

$$|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\alpha\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}[|2_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle+\mathrm{e}^{2\pi i/3}|1_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle+\mathrm{e}^{4\pi i/3}|1_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle], \tag{16.5.30}$$

$$|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\beta\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}[|2_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle+\mathrm{e}^{-2\pi i/3}|1_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle+\mathrm{e}^{-4\pi i/3}|1_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle]. \tag{16.5.31}$$

Эти состояния являются ортогональными. Как $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\alpha\rangle$, так и $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\beta\rangle$, остаются неизменными при циклической перестановке атомов, но одно состояние переходит в другое при перестановке двух атомов. Индексы α, β обозначают две различные симметрии. Аналогично, единственно возможные состояния Дике типа $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ с $|c_1|=|c_2|=|c_3|$ имеют вид

$$|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\alpha\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}[|1_1\rangle|2_2\rangle|2_3\rangle+\mathrm{e}^{2\pi i/3}|2_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle+\mathrm{e}^{4\pi i/3}|2_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle], \tag{16.5.32}$$

$$|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\beta\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}[|1_1\rangle|2_2\rangle|2_3\rangle+\mathrm{e}^{-2\pi i/3}|2_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle+\mathrm{e}^{-4\pi i/3}|2_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle]. \tag{16.5.33}$$

Эти состояния снова отличаются только своей симметрией. При дипольном переходе только состояния с одинаковой симметрией α или β преобразуются друг в друга.

16.5.2. Вырождение состояний Дике

Общее выражение для степени вырождения состояния Дике $|l,m\rangle$ можно получить следующим образом. Предположим, что состояние $|l,l\rangle$ имеет степень вырождения D_l. В частности, $D_{N/2}=1$. Неоднократно действуя понижающим оператором $\hat{\mathscr{R}}^{(-)}$ на состояние $|l,l\rangle$, можно получить все состояния типа $|l,m\rangle$ с $|m|\leqslant l$. Отсюда следует, что каждое из них имеет ту же самую степень вырождения D_l, что и первоначальное состояние $|l,l\rangle$, и что это вырождение зависит только от квантового числа l.

Рассмотрим теперь все состояния с $m=l-1$. Из (16.5.11) следует, что существует d_{l-1} таких состояний. Как мы только что видели, среди этих d_{l-1} различных состояний лишь D_{l-1} состояний являются состояниями типа $|l-1,l-1\rangle$. Из-за условия $|m|\leqslant l$ все другие состояния должны быть типа $|l,l-1\rangle$, $|l+1,l-1\rangle$, ..., $|\frac{1}{2}N,l-1\rangle$. Следовательно,

$$d_{l-1}=D_{l-1}+D_l+\ldots+D_{N/2-1}+D_{N/2}.$$

Когда l заменяется на $l+1$, полученное выражение принимает вид

$$d_l=D_l+\ldots+D_{N/2},$$

и, взяв разность, находим, что

$$D_{l-1}=d_{l-1}-d_l. \tag{16.5.34}$$

С помощью (16.5.11) отсюда сразу получаем

$$D_l=\frac{(2l+1)N!}{(\frac{1}{2}N+l+1)!(\frac{1}{2}N-l)!},\quad l\leqslant\frac{1}{2}N. \tag{16.5.35}$$

В частности, заметим, что если $N=3$ и $l=\frac{1}{2}$, то $D_{1/2}=2$, как уже было найдено при конструировании состояний $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$, $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$.

16.6. Кооперативное атомное излучение[1]

Идея кооперативного спонтанного излучения, или *сверхизлучения* была выдвинута Дике в 1954 г. Он показал, что в результате взаимодействия между атомами через электромагнитное поле, скорость, с которой излучает любой возбужденный атом, существенно изменяется в присутствии других атомов. Если несколько атомов находятся очень близко друг к другу, то каждый из них противодействует реакции излучения, создаваемого не только собственным полем, но и полями своих соседей. В результате каждый атом «работает» напряженнее и излучает с повышенной скоростью, так что он теряет энергию быстрее, чем если бы он был один. Это приводит к появлению короткого, интенсивного импульса света, создаваемого атомной системой.

Для того, чтобы сделать эти рассуждения более количественными, рассмотрим ансамбль из N одинаковых атомов в области пространства с линейными размерами, меньшими длины волны $2\pi c/\omega_0$, где ω_0 — резонансная частота. При этих условиях, можно предположить, что каждый атом взаимодействует с одним и тем же электромагнитным полем, и с помощью (16.5.8) можно записать полную энергию взаимодействия в виде

$$\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)=-\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)\cdot\hat{\mathbf{E}}(t)=-\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\hat{\mathbf{E}}(t)\hat{\mathscr{R}}^{(-)}(t)-\boldsymbol{\mu}_{12}^{*}\cdot\hat{\mathbf{E}}(t)\hat{\mathscr{R}}^{(+)}(t). \tag{16.6.1}$$

16.6.1. Сверхизлучение Дике

Предположим, что атомная система находится первоначально в состоянии Дике $|l,m\rangle$, и что поле вначале находится в вакуумном состоянии $|\mathrm{vac}\rangle$. Амплитуда вероятности перехода из этого состояния в некоторое конечное состояние $|\psi\rangle$ определяется матричным элементом

$$-\langle\psi|\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\hat{\mathbf{E}}(t)\hat{\mathscr{R}}^{(-)}(t)+\boldsymbol{\mu}_{12}^{*}\cdot\hat{\mathbf{E}}(t)\hat{\mathscr{R}}^{(+)}(t)|l,m\rangle|\mathrm{vac}\rangle.$$

[1] Наглядное изложение физики оптического сверхизлучения, экспериментов по его наблюдению и возможных приложений можно найти в книгах (*Набойкин, Самарцев, Зиновьев, Силаева, 1986; *Бенедикт, Ермолаев, Малышев, Соколов, Трифонов, 1996) — *ред. пер.*

Если нас интересуют переходы, при которых сохраняется энергия и излучается фотон, то единственный ощутимый вклад в амплитуду вероятности будет давать член $\langle\psi|\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(t)\hat{\mathscr{R}}^{(-)}(t)|l,m\rangle|\mathrm{vac}\rangle$, где $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(t)$ — отрицательно-частотная часть электрического поля $\hat{\mathbf{E}}(t)$. Он соответствует понижению возбуждения атомной системы с помощью оператора $\hat{\mathscr{R}}^{(-)}(t)$ и созданию фотона с помощью $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(t)$. Записывая квадрат амплитуды вероятности и суммируя по всем возможным конечным состояниям, приходим к выражению для скорости излучения фотонов

$$\text{Скорость излучения фотонов} \propto \sum_{\text{по всем }\psi} |\langle\psi|\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(t)\hat{\mathscr{R}}^{(-)}(t)|l,m\rangle|\mathrm{vac}\rangle|^2 =$$
$$= \langle l,m|\hat{\mathscr{R}}^{(+)}(t)\hat{\mathscr{R}}^{(-)}(t)|l,m\rangle\langle\mathrm{vac}|\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(t)\boldsymbol{\mu}_{12}^{*}\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(t)|\mathrm{vac}\rangle, \quad (16.6.2)$$

после того, как разделили матричные элементы атомной системы и поля. С помощью (16.5.15) из этой формулы сразу получаем

$$\text{Скорость излучения фотонов} = (l+m)(l-m+1)A, \quad (16.6.3)$$

где A не зависит от состояния атомной системы. Физический смысл множителя A легко выяснить, применяя (16.6.3) к единственному возбужденному атому. В этом случае $N=1$, и инверсия $m=\frac{1}{2}$. Тогда из неравенства

$$|m| \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}N \quad (16.6.4)$$

находим, что $l=\frac{1}{2}$. Следовательно, скорость испускания фотона равна A, и мы видим, что A есть просто коэффициент Эйнштейна A для отдельного атома.

Теперь рассмотрим некоторые следствия из (16.6.3). Если все N атомов находятся в основном состоянии, то $m=-\frac{1}{2}N$, и из неравенства (16.6.4) должны получить $l=\frac{1}{2}N$. Следовательно, скорость излучения фотона равна нулю, как и следовало ожидать. Если все N атомов находятся в возбужденном состоянии, то $m=\frac{1}{2}N$ и опять $l=\frac{1}{2}N$. Следовательно, скорость испускания фотона равна NA, что совпадает со скоростью ансамбля N независимых излучающих атомов. Однако ситуация будет совершенно другой, если начальное состояние не является полностью возбужденным. Рассмотрим состояние, в котором половина атомов возбуждена, а половина — нет, так что $m=0$. Тогда

$$\text{Скорость излучения фотонов} = l(l+1)A, \quad (16.6.5)$$

и l может иметь любое значение между 0 и $\frac{1}{2}$. Чем больше значение l, тем больше коллективная скорость излучения атомной системы, что заставило Дике назвать l *кооперационным числом*. В частности, если $l=\frac{1}{2}N$, то

$$\text{Скорость излучения фотонов} = \frac{1}{2}N\left(\frac{1}{2}N+1\right)A, \quad (16.6.6)$$

и для больших N эта скорость пропорциональна квадрату числа атомов, которое может быть очень большим. Такая N^2-зависимость скорости излучения является характерной для кооперативного процесса излучения, который Дике назвал *сверхизлучением*. Таким образом, скорость излучения частично возбужденной системы может быть много выше, чем скорость излучения полностью возбужденной системы, несмотря на то, что среднее значение полного дипольного момента $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ всегда равно нулю в состоянии Дике. Однако на основании (16.5.8) и (16.5.15) заметим, что среднеквадратичное значение дипольного момента равно

$$\langle l,m|\hat{\boldsymbol{\mu}}^2|l,m\rangle = 2|\boldsymbol{\mu}_{12}|^2[l(l+1)-m^2] \quad (16.6.7)$$

и оно максимально, когда $m=0$ и атомная система является полувозбужденной.

Нужно подчеркнуть, однако, что кооперативные процессы не обязательно подразумевают повышенную скорость излучения. В частности, если $l=0$ в (16.6.5), то скорость излучения фотона атомной системой равна нулю, несмотря на то, что система полувозбуждена. Это соответствует необычной, но не невозможной ситуации, в которой атомные диполи противоположно сфазированы в парах, так что поле, излученное одним атомом, поглощается другим атомом. Снижение скорости спонтанного излучения и соответствующее удлинение времени жизни, связанное с атомными излучателями, находящимися в противофазе, наблюдалось в экспериментах с атомами, находящимися близко к металлическому зеркалу (Drexhage, 1970).

Зеркальный образ одного атома ведет себя как второй излучатель, находящийся в противофазе с первым. Примером такого *антисверхизлучательного* состояния для двух атомов является антисимметричное состояние

$$|l=0,m=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|2_1\rangle|1_1\rangle-|1_2\rangle|2_2\rangle),$$

для которого амплитуда вероятности, связывающая это состояние с атомным основным состоянием $|1_1\rangle|1_1\rangle$ через взаимодействие $\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(t)\hat{\mathscr{R}}^{(-)}(t)$, обращается в нуль.

Хотя состояния Дике удобны для иллюстрации идеи сверхизлучения, их нелегко реализовать экспериментально. Динамические особенности кооперативного атомного излучения проще проиллюстрировать, используя коллективные состояния в виде произведения атомных состояний (Agarwal, Brown, Narducci and Verti, 1977).

16.6.2. Кооперативное излучение атомов, находящихся в факторизованном состоянии

Предположим, что начальное состояние системы из N атомов задается произведением

$$|\Phi\rangle=\prod_{j=1}^{N}[c_1|1_j\rangle+c_2|2_j\rangle],$$

где c_1 и c_2 являются произвольными комплексными числами, одинаковыми для всех атомов, причем $|c_1|^2+|c_2|^2=1$. Следовательно, предполагается, что каждый атом находится в одном и том же чистом квантовом состоянии. Выберем в качестве начального состояния поля вакуумное состояние, так что начальный оператор плотности полной системы в некоторый момент времени t записывается в виде

$$\hat{\rho}(t)\equiv|\Phi\rangle\langle\Phi|\otimes|\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}|. \tag{16.6.8}$$

Нас интересуют переходы в течение короткого интервала времени Δt из этого состояния в состояние, из которого испускается фотон с волновым вектором $\mathbf{k}'$ и поляризацией s'. Вероятность испускания такого фотона определяется формулой

$$\begin{array}{l}\text{Вероятность испускания}\\ \text{фотона } \mathbf{k}',\ s' \text{ за время } \Delta t\end{array}=\sum_{\text{по всем } A}\langle\Psi_A|\langle 1_{\mathbf{k}'s'},\mathrm{vac}|\hat{\rho}(t+\Delta t)|1_{\mathbf{k}'s'},\mathrm{vac}\rangle|\Psi_A\rangle, \tag{16.6.9}$$

где $\hat{\rho}(t+\Delta t)$ является оператором плотности полной системы в более поздний момент времени $t+\Delta t$, а сумма берется по полному набору конечных атомных состояний $|\Psi_A\rangle$. Поскольку конечное однофотонное состояние является ортогональным начальному состоянию системы, можно воспользоваться выражением (14.1.14) для вероятности с точностью до низшего неисчезающего члена. Подставляя выражение (16.6.1) для гамильтониана взаимодействия $\hat{H}_I(t)$, приходим к следующему результату:

$$\begin{array}{l}\text{Вероятность испускания}\\ \text{фотона } \mathbf{k}',\ s' \text{ за время } \Delta t=\end{array}$$

$$=\sum_{\text{по всем } A}\frac{1}{\hbar^2}\int_t^{t+\Delta t}dt_1\int_t^{t_1}dt_2\,\langle\Psi_A|\sum_{m=1}^{N}[(\boldsymbol{\mu}_{12})_i\hat{b}^{(m)}\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t_1}+\text{э.с.}]|\Phi\rangle\langle\Phi|\sum_{n=1}^{N}[(\boldsymbol{\mu}_{12})_j\hat{b}^{(n)}\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t_2}+\text{э.с.}]|\Psi_A\rangle\times$$

$$\times\langle 1_{\mathbf{k}'s'},\mathrm{vac}|\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2}[i\hat{a}_{\mathbf{k}s}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s})_i\,\mathrm{e}^{-i\omega t_1}+\text{э.с.}]|\mathrm{vac}\rangle\times$$

$$\times\langle\mathrm{vac}|\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2}[i\hat{a}_{\mathbf{k}s}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s})_j\,\mathrm{e}^{-i\omega t_2}+\text{э.с.}]|1_{\mathbf{k}'s'},\mathrm{vac}\rangle+\text{э.с.}\approx$$

$$\approx |\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^*_{\mathbf{k}'s'}|^2\frac{\omega'}{L^3\hbar\epsilon_0}\int_0^{\Delta t}dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cos[(\omega'-\omega_0)(t_1-t_2)]\langle\Phi|\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}b^{(m)\dagger}b^{(n)}|\Phi\rangle =$$

$$=|\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^*_{\mathbf{k}'s'}|^2\frac{\omega'}{L^3\hbar\epsilon_0}\int_0^{\Delta t}dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cos[(\omega'-\omega_0)(t_1-t_2)][N|c_2|^2+N(N-1)|c_2|^2|c_1|^2], \quad (16.6.10)$$

в котором отброшены все сильно осциллирующие вклады во временны́х интегралах. Наконец, просуммируем по всем $\mathbf{k}'$ и s', соответствующим всем возможным конечным однофотонным состояниям, как в разд. 15.4. В результате, приходим к следующему выражению для вероятности $P(t)\Delta t$ испускания фотона в течение интервала времени Δt

$$P(t)\Delta t = A\Delta t[N|c_2|^2+N(N-1)|c_2|^2|c_1|^2]. \quad (16.6.11)$$

Здесь $A=2\beta$ является обычным коэффициентом Эйнштейна A.

Видно, что в этом выражении имеется член, пропорциональный числу атомов N, как можно было ожидать для излучения несвязанных друг с другом атомов. Если начальное состояние является полностью возбужденным, так что $c_1=0$, то он будет единственным неисчезающем членом в правой части этого выражения. Другой член, пропорциональный $N(N-1)$, связан с кооперативным процессом излучения, когда $c_1\neq 0$, поскольку он не обращается в нуль, только если $N\geqslant 2$. В частности, когда N является большим числом, этот член становится пропорциональным N^2 и будет доминировать в общем выражении, если только c_1 не близко к нулю, и атомы не являются почти полностью возбужденными. Поэтому отсюда следует, что скорость излучения N взаимодействующих атомов, коллективное состояние которых имеет вид произведения атомных состояний, может быть намного больше, чем скорость излучения N независимо излучающих атомов, при условии, что атомы неполностью возбуждены. Это и есть явление сверхизлучения, для которого скорость сверхизлучения пропорциональна N^2. Скорость максимальна, когда $|c_1|^2|c_2|^2$ является максимальным, что имеет место, когда $|c_1|=1/\sqrt{2}=|c_2|$, или когда начальное возбуждение атомной системы точно равно половине его максимального значения. Скорость излучения тогда близка к $\frac{1}{4}N^2A$, т.е. равна скорости излучения в состоянии Дике, описываемой выражением (16.6.6). В этом отношении атомная система ведет себя практически одинаково, когда она находится в полувозбужденном факторизованном состоянии и когда она находится в полувозбужденном состоянии Дике. Однако мы не должны выпускать из поля зрения тот факт, что среднее значение коллективного атомного дипольного момента является наибольшим в первом случае и нулевым — в последнем случае, так что первый случай наиболее близко соответствует набору классических диполей. Для отличия явления сверхизлучения, при котором суммарный атомный дипольный момент равен нулю, от сверхизлучения, при котором дипольный момент отличен от нуля, для последнего иногда используется термин *суперфлуоресценция*.

16.6.3. Временна́я эволюция сверхизлучения

Расчет вероятности испускания фотона в течение короткого интервала времени Δt в рамках теории возмущений не позволяет определять временну́ю эволюцию системы на произвольных временах. Однако, используя соображения энергетического баланса (Rehler and Eberly, 1971), можно легко получить некоторую информацию о том, как скорость излучения изменяется во времени. Более точное квантовое рассмотрение, конечно, выходит за рамки теории возмущений первого порядка (Bonifacio, Schwendimann and Haake, 1971). Если умножить обе стороны выражения (16.6.11) на энергию возбуждения $\hbar\omega_0$ каждого атома и разделить на Δt, то получим среднюю скорость излучения энергии в виде фотонов. Эта скорость должна равняться скорости, с которой атомная система теряет энергию в среднем и которая согласно (16.5.7) определяется выражением

$$\text{Скорость потери энергии} = -\frac{d}{dt}\hbar\omega_0\left[\langle\hat{\mathscr{R}}_3(t)\rangle+\frac{1}{2}N\right]=-\frac{d}{dt}\hbar\omega_0 N|c_2(t)|^2. \quad (16.6.12)$$

Приравнивая скорость излучения энергии скорости потерь, приходим к следующему уравнению движения:

$$-\frac{d}{dt}|c_2(t)|^2=A|c_2(t)|^2[1+(N-1)|c_1(t)|^2], \quad (16.6.13)$$

которое описывает временну́ю эволюцию системы. Предположение, что атомная система остается в чистом состоянии, конечно, учтено в этом уравнении. Мы также предполагаем, что большинство мод поля пусты и что с точки зрения атомной системы доля занятых мод электромагнитного поля остается достаточно малой, так что состояние поля можно продолжать аппроксимировать вакуумным состоянием. Когда $N = 1$, второй член в правой части (16.6.13) обращается в нуль, и мы вновь получаем экспоненциальную скорость спада, характерную для спонтанного атомного излучения. Однако в общем случае решение намного сложнее.

Для того, чтобы решить уравнение (16.6.13), полагаем, что $|c_2(t)|^2 = y$ и $|c_1(t)|^2 = 1 - y$. Тогда дифференциальное уравнение (16.6.13) принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = -ANy\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)y\right]. \tag{16.6.14}$$

Если атомная система первоначально находится в полностью инвертированном состоянии, когда $|c_2(0)|^2 = 1$, то после интегрирования по времени от 0 до t получаем выражение

$$\int_1^y \frac{dy}{y[1-(1-1/N)y]} = -ANt.$$

После разложения подынтегральной функции в виде

$$\frac{1}{y[1-(1-1/N)y]} = \frac{1}{y} + \frac{1-1/N}{1-(1-1/N)y},$$

и выполнения интегрирования, получаем формулу

$$\ln\left(\frac{1}{[N-(N-1)y]}\right) = -ANt,$$

или

$$|c_2(t)|^2 = y(t) = \frac{N}{N-1+\mathrm{e}^{ANt}}. \tag{16.6.15}$$

Тогда из (16.6.11) следует, что скорость испускания фотонов атомной системой определяется выражением

$$R(t) = AN|c_2(t)|^2[1+(N-1)|c_1(t)|^2] = \frac{AN^3\,\mathrm{e}^{ANt}}{(N-1+\mathrm{e}^{ANt})^2}, \tag{16.6.16}$$

а средняя атомная энергия равна

$$\langle \hat{H}_{\mathrm{A}}(t)\rangle = \hbar\omega_0 N|c_2(t)|^2 = \hbar\omega_0\left(\frac{N^2}{N-1+\mathrm{e}^{ANt}}\right). \tag{16.6.17}$$

Когда $t = 0$, легко находим, что $R(0) = AN$ и $\langle \hat{H}_{\mathrm{A}}(0)\rangle = \hbar\omega_0 N$, что соответствует случаю N невзаимодействующих атомов. Однако на более поздних временах t, когда начинают играть роль кооперативные эффекты, скорость излучения $R(t)$ может быть существенно больше. Рис. 16.16 иллюстрирует зависимость скорости излучения от времени по формуле (16.6.16) для системы из $N = 20$ атомов.

При $N \gg 1$ импульс сверхизлучения становится симметричным, и полезно переписать эти величины по-другому. Введем полярный угол $\theta(t)$ атомного вектора Блоха, полагая

$$|c_2(t)| = \cos[\tfrac{1}{2}\theta(t)], \quad |c_1(t)| = \sin[\tfrac{1}{2}\theta(t)]. \tag{16.6.18}$$

Пусть t_0 есть момент времени, когда атомный вектор Блоха горизонтален, а атомная система является полувозбужденной. Тогда $\theta(t_0) = \pi/2$ и $|c_2(t_0)|^2 = \frac{1}{2} = |c_1(t_0)|^2$. Из (16.6.15) следует, что

$$t_0 = \frac{\ln(N+1)}{2\beta N}, \tag{16.6.19}$$

где $2\beta \equiv A$ как и прежде. Тогда из (16.6.18) имеем

$$\operatorname{tg}(\theta/2) = \left|\frac{c_1(t)}{c_2(t)}\right| = \left(\frac{e^{2\beta N t} - 1}{N}\right)^{1/2}. \qquad (16.6.20)$$

Используя (16.6.19) и (16.6.20), можно записать этот результат в виде

$$e^{N\beta(t-t_0)} = \left(\frac{N\operatorname{tg}^2(\theta/2) + 1}{N+1}\right)^{1/2}. \qquad (16.6.21)$$

До тех пор, пока N является большим числом, и угол θ достаточно велик, так что $N\operatorname{tg}^2(\theta/2) \gg 1$ (а из (16.6.20) следует, что это справедливо на всех временах, для которых $t \gg 1/2\beta N$), единицы в числителе и в знаменателе выражения (16.6.21) оказываются существенно меньше членов, пропорциональных N. Тогда в очень хорошем приближении имеем

$$e^{N\beta(t-t_0)} \approx \operatorname{tg}(\theta/2). \qquad (16.6.22)$$

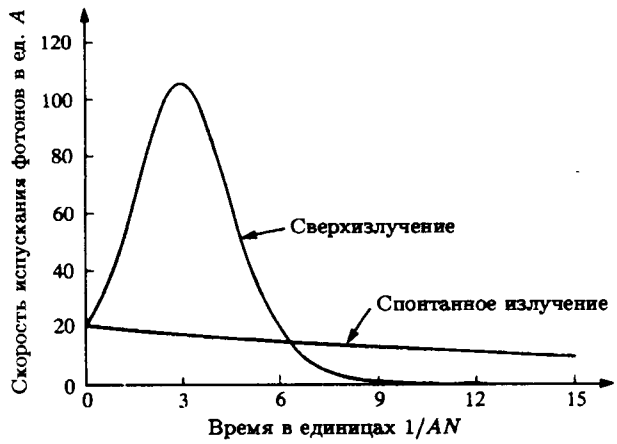


Рис. 16.16. Скорость сверхизлучения (16.6.16) и скорость обычного спонтанного излучения для системы из $N = 20$ атомов (с разрешения Д. Джеймса)

Это приближение несостоятельно только в течение очень короткого промежутка времени в начале процесса излучения, пока кооперативные эффекты не стали существенными, и существенно не повернулся вектор Блоха.

Теперь воспользуемся (16.6.16)—(16.6.18), чтобы выразить скорость излучения фотонов $R(t)$ и среднюю атомную энергию $\langle \hat{H}_A(t) \rangle$ через полярный угол $\theta(t)$. Тогда, до тех пор, пока $t \gg 1/2\beta N$, и кооперативные эффекты доминируют, можно записать

$$R(t) = \frac{1}{2}\beta N^2 \sin^2\theta(t), \qquad (16.6.23)$$

$$\langle \hat{H}_A(t) \rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 N[1 + \cos\theta(t)]. \qquad (16.6.24)$$

Из рис. 16.17 легко получаем, что

$$\sin\theta(t) = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) = \frac{2e^{N\beta(t-t_0)}}{1 + e^{2N\beta(t-t_0)}} = \operatorname{sech} N\beta(t-t_0),$$

$$1 + \cos\theta(t) = 2\cos^2(\theta/2) = 1 + \frac{1 - e^{N\beta(t-t_0)}}{1 + e^{N\beta(t-t_0)}} = 1 - \operatorname{th} N\beta(t-t_0),$$

так что окончательно имеем

$$R(t) = \frac{1}{2}\beta N^2 \operatorname{sech}^2 N\beta(t-t_0), \qquad (16.6.25)$$

$$\langle \hat{H}_A(t) \rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 N[1 - \operatorname{th} N\beta(t-t_0)]. \qquad (16.6.26)$$

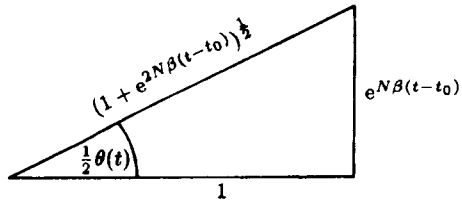


Рис. 16.17. Иллюстрация, поясняющая вывод формул (16.6.25) и (16.6.26)

Следовательно, интенсивность оптического сверхизлучения имеет вид импульса в форме гиперболического секанса в квадрате, а амплитуда этого импульса сверхизлучения имеет тот же вид, который приведен на рис. 15.5. Когда процесс излучения закончен, $\theta(\infty) = \pi$, и вектор Блоха направлен вниз.

На рис. 16.18 показана зависимость интенсивности света от времени, задаваемая выражением (16.6.25). Пиковая интенсивность достигается в момент времени $t = t_0$ и она пропорциональна N^2. Длительность импульса порядка $1/N\beta$ и может быть намного короче естественного атомного времени жизни. Появление

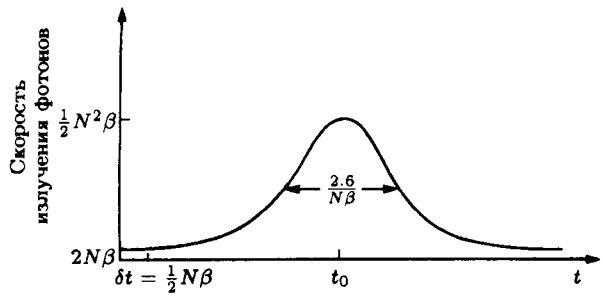


Рис. 16.18. Форма импульса оптического сверхизлучения

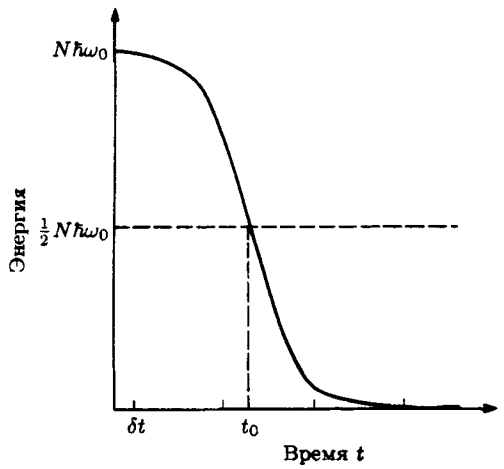


Рис. 16.19. Зависимость средней атомной энергии от времени при сверхизлучении

пика задержано на время $t_0 = \ln(N+1)/2N\beta$. Все эти характерные особенности сверхизлученя наблюдались экспериментально (Skribanowitz, Herman, MacGillivray and Feld, 1973; Gross, Fabre, Pillet and Haroche, 1976; Flusberg, Mossberg and Hartmann, 1977; Gibbs, Vrehen and Hikspoors, 1977; Raimond, Goy, Gross, Fabre and Haroche, 1982), хотя эксперименты, конечно, не могут быть выполнены при тех идеализированных условиях, которые предполагались в нашем анализе.

На рис. 16.19 показана временнáя эволюция средней атомной энергии. Видно, что спад энергии происходит очень быстро после вялого начала и что в момент времни $t = t_0$ средняя энергия уменьшается вдвое по сравнению с начальным значением.

16.6.4. Некоторые дополнительные усложнения

Одним из существенных ограничений нашего рассмотрения является локализация всех атомов в точке, в то время как возбужденные атомные системы всегда имеют конечные размеры. Показано, что взаимодействие между атомными диполями в микроскопическом образце может вызвать дефазировку и фактически подавить процесс кооперативного излучения при высоких плотностях (Friedberg and Hartmann, 1974). На практике могут играть роль эффекты прохождения импульсов, приводящие к многогорбым импульсам или "звону", который обсуждался, например, в работах (Bonifacio and Lugiato, 1975a, b). Эти эффекты можно ослабить, выбирая образцы с достаточно низкой атомной плотностью, как это было в экспериментах (Gibbs, Vrehen and Hikspoors, 1977). На рис. 16.20 показаны некоторые результаты этих экспериментов, в которых атомы цезия в пучках с управляемой плотностью возбуждались коротким импульсом света длительности 2 нс от лазера на красителе. Конечно, конечные размеры образцов вносят дополнительные ограничения, поскольку атомы, удаленные друг от друга на расстояние, большее чем примерно $c/N\beta$, не могут кооперироваться на временах порядка $1/N\beta$. Кроме того, фактическая форма образца также влияет на скорость излучения. Эти эффекты обсуждались в работах (Arecchi and Courtens, 1970) и (Rehler and Eberly, 1971), соответственно.

16.6.5. Более общее кооперативное излучение

Упрощающие исходные предположения о том, что все атомы изначально находятся в одном и том же состоянии и что они, по существу, чувствуют одно и то же поле, являются довольно сильными. Однако основные особенности нашего решения сохраняются даже тогда, когда различные атомы изначально находятся в разных квантовых состояниях. Необходимо только рассматривать векторную сумму индивидуальных атомных векторов Блоха как новый супервектор Блоха (Stroud, Eberly, Lama and Mandel, 1972). Это можно показать следующим простым способом. Когда число атомов велико, поле излучения можно считать классическим, за исключением начальных времен порядка или меньше, чем $1/2N\beta$. Теперь

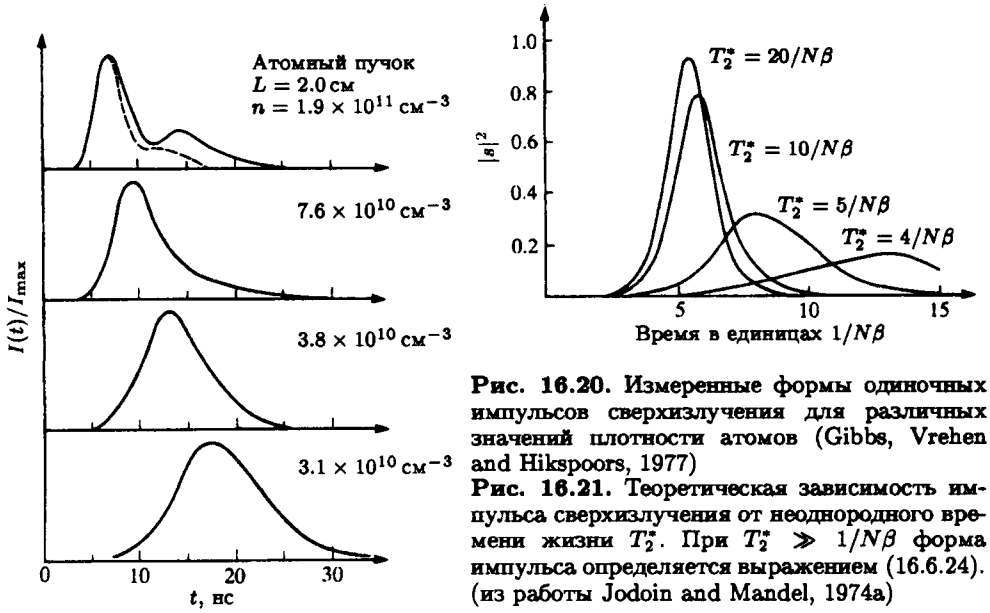


Рис. 16.20. Измеренные формы одиночных импульсов сверхизлучения для различных значений плотности атомов (Gibbs, Vrehen and Hikspoors, 1977)

Рис. 16.21. Теоретическая зависимость импульса сверхизлучения от неоднородного времени жизни T_2^*. При $T_2^* \gg 1/N\beta$ форма импульса определяется выражением (16.6.24). (из работы Jodoin and Mandel, 1974a)

учтем, что согласно разд. 15.3 движение атомного вектора Блоха $\mathbf{r}$ в классическом поле можно описать уравнением движения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r},$$

где вектор $\boldsymbol{\Omega}$ характеризует приложенное поле и имеет амплитуду порядка частоты Раби. Если два атома, имеющие векторы Блоха $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, подвергаются воздействию одного и того же поля, то они оба подчиняются одинаковому уравнению движения, и можно сразу записать

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_2) = \boldsymbol{\Omega} \cdot [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1] = 0. \tag{16.6.27}$$

Отсюда следует, что углы между векторами Блоха остаются неизменными в течение процесса кооперативного излучения. Движение совокупности N векторов Блоха представляет собой движение жестко связанной системы N векторов Блоха, векторная сумма $\mathbf{R}$ которых подчиняется уравнению движения (16.6.14), где N заменяется длиной R нового вектора (Stroud, Eberly, Lama and Mandel, 1972). В конце импульса сверхизлучения вектор $\mathbf{R}$ направлен вниз. Следствием такого ограничения на движение индивидуальных векторов Блоха является то, что эти векторы могут оказаться не направленными вниз в конце движения и энергия может быть захвачена атомной системой и, в конце концов, рассеяться за счет кооперативных процессов. Наличие неоднородного уширения атомной системы (Eberly, 1971; Agarwal, 1971; Ressayre and Tallet, 1973; Jodoin and Mandel, 1974 a, b) также обычно ограничивает количество кооперативного излучения и вынуждает некоторую часть энергии возбуждения излучаться некооперативно. Рис. 16.21 показывает, что импульс сверхизлучения, как и следовало ожидать, ослабевает и задерживается по мере того, как укорачивается неоднородное время жизни T_2^*.

В заключение следует упомянуть о существенном недостатке данного подхода среднего поля, который состоит в том, что этот подход ничего не говорит нам о флуктуациях, связанных с последовательностью сверхизлучательных импульсов. Для получения информации о флуктуациях нам необходимо исследовать моменты высшего порядка интенсивности света. Задержка t_0 импульса сверхизлучения на самом деле очень чувствительна к начальному состоянию возбуждения атомной системы. Начальная скорость излучения определяется, в значительной степени, некооперативным или одноатомным спонтанным излучением. Однако, как хорошо известно из гл. 15, спонтанные испускания подвержены очень большим квантовым флуктуациям. Поэтому следует ожидать, что на практике задержка t_0 может сильно меняться от импульса к импульсу. Этот вопрос был детально исследован авторами нескольких работ (Haake, King, Schröder, Haus and Glauber, 1979; Polder, Schuurmans and Vrehen, 1979; Haake, Haus, King, Schröder and Glauber,

1980), которые также обнаружили, что должны ожидаться значительные флуктуации амплитуды и формы импульсов. Экспериментальное подтверждение больших флуктуаций импульсов сверхизлучения было дано в работе (Gibbs, Vrehen and Hikspoors, 1977).

16.6.6. Сверхизлучательные классические осцилляции

Как уже было отмечено, сверхизлучение было впервые предсказано для определенных коллективных квантовых состояний атомной системы, для которых среднее значение дипольного момента равно нулю (Dicke, 1954). Более поздние работы показали, и это подтвердило наше рассмотрение, что эффекты сверхизлучения должны также появляться в мультипликативных (факторизованных) атомных состояниях, в которых существует макроскопический атомный дипольный момент. В этом случае атомы можно рассматривать как осциллирующие диполи, а систему, в некотором ограниченном смысле, можно представить классически. Тем не менее, это все еще квантовая система, и наш анализ может оставить у читателя впечатление, что сверхизлучению всегда присущи квантово-механические аспекты. Поэтому мы хотим показать, что полностью классическая система связанных гармонических осцилляторов также будет демонстрировать сверхизлучательные эффекты.

Смещение x классического затухающего гармонического осциллятора с собственной частотой свободных колебаний ω_0 и константой затухания β подчиняется уравнению движения

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{16.6.28}$$

которое имеет решение

$$x(t) = x(0)\,\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi), \tag{16.6.29}$$

с $\omega = (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}$. Предположим, что осциллятор испускает излучение, например, звуковую волну, и что затухание скорости, отвечающее за экспоненциальный спад осцилляций, в значительной степени относится к радиационному затуханию. Теперь предположим, что N одинаковых осцилляторов помещены близко друг к другу, так что расстояние между ними меньше длины волны излучения. Тогда каждый осциллятор гасится не только своим полем излучения, но и полями всех других осцилляторов, которые действуют на него с равной амплитудой. С другой стороны, можно рассматривать поля, создаваемые всеми другими осцилляторами, как источники, вынуждающие данный осциллятор i ($i = 1, 2, \ldots, N$), и записать уравнение движения в виде

$$\ddot{x}_i + 2\beta\dot{x}_i + \omega_0^2 x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} -2\beta\dot{x}_j, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{16.6.30}$$

Суммируя каждый член этого уравнения по i и обозначая

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \equiv X,$$

сразу получаем уравнение движения

$$\ddot{X} + 2N\beta\dot{X} + \omega_0^2 X = 0. \tag{16.6.31}$$

Это уравнение имеет решение в виде

$$X(t) = X(0)\,\mathrm{e}^{-N\beta t}\cos(\omega t + \Phi), \tag{16.6.32}$$

где $\omega = (\omega_0^2 - N^2\beta^2)^{1/2}$, которое следует сравнить с выражением (16.6.29). Если все осцилляторы находятся в фазе, и $x_i(0) = x(0)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, то амплитуда излученного поля будет в N раз больше,

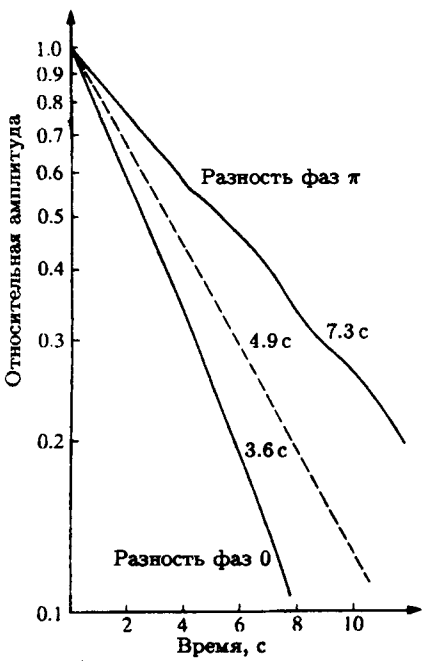


Рис. 16.22. Наблюдаемая временна́я зависимость амплитуды звука от двух спонтанно излучающих камертонов (Lama, Jodoin and Mandel, 1972). Пунктирная линия описывает излучение одиночных камертонов. Нижняя кривая соответствует двум камертонам, осциллирующим в фазе, а верхняя кривая — в противофазе

чем поле одиночного осциллятора (или интенсивность будет в N^2 раз больше), и поле спадает до нуля в N раз быстрее, чем поле одиночного осциллятора. Это есть две характерные особенности сверхизлучения. Эффект был продемонстрирован экспериментально на затухании двух связанных через излучение камертонов, расположенных близко друг к другу (Lama, Jodoin and Mandel, 1972). Некоторые результаты показаны на рис. 16.22. Когда камертоны изначально возбуждены в фазе, их колебания затухают более быстро, чем у одного осциллирующего камертона. И наоборот, осцилляция происходит менее быстро, если камертоны изначально были возбуждены в противофазе. Это состояние в некоторой степени аналогично состоянию Дике с $l = 0$, $m = 0$. В первом случае время жизни не уменьшается точно наполовину, а во втором не увеличивается до бесконечности, главным образом, из-за того, что затухание камертонов не является чисто излучательным, и задержка при распространении звука между ними строго не равна нулю. Тем не менее, эксперимент ясно показывает, что кооперативное излучение не ограничивается атомными или квантовыми системами. Эффекты сверхизлучательного затухания встречаются в фортепиано, в котором некоторые музыкальные тона производятся группой из двух или трех одинаковых, натянутых рядом струн, возбуждаемых одним ударом. Известно, что звук затухает слишком быстро, если настройка группы струн совершенна, и лишь небольшая расстройка вносится иногда преднамеренно, чтобы уменьшить сверхизлучательное затухание.

16.7. Атомные когерентные состояния

Состояния Дике, как мы увидели, являются состояниями определенного атомного возбуждения, в котором, однако, это возбуждение распределено между различными атомами. В некотором смысле, состояния Дике N-атомной системы аналогичны состояниям Фока электромагнитного поля. Теперь покажем, что существуют коллективные атомные состояния, которые аналогичны когерентным состояниям электромагнитного поля (Radcliffe, 1971; Arecchi, Courtens, Gilmore and Thomas, 1972).

В гл. 11 мы видели [см. (11.3.1) и (11.3.2)], что когерентные состояния поля могут быть получены из вакуумного или основного состояния путем применения оператора смещения. Подобным образом введем теперь коллективный атомный *оператор смещения*

$$\hat{D} \equiv \exp(\zeta \hat{\mathscr{R}}^{(+)} - \zeta^* \hat{\mathscr{R}}^{(-)}) \tag{16.7.1}$$

для коллективных атомных состояний, где ζ есть некоторое комплексное число. Этот оператор может быть факторизован с помощью теоремы Кемпбелла — Бейкера — Хаусдорфа, хотя эта факторизация является немного более сложной, чем для соответствующего бозонного оператора смещения. Можно показать (Arecchi, Courtens, Gilmore and Thomas, 1972), что

$$\exp(\zeta \hat{\mathscr{R}}^{(+)} - \zeta^* \hat{\mathscr{R}}^{(-)}) = \exp(z \hat{\mathscr{R}}^{(+)}) \exp[\hat{\mathscr{R}}_3 \ln(1 + |z|^2)] \exp(-z^* \hat{\mathscr{R}}^{(-)}) \equiv \hat{D}(z), \tag{16.7.2}$$

где z и ζ связаны соотношением

$$z = \operatorname{tg}|\zeta| \, e^{i \arg \zeta}.$$

Тогда внутри подпространства кооперативного числа l определим *атомное когерентное состояние* $|l, z\rangle$, помеченное некоторым комплексным числом z, как результат воздействия оператора смещения $\hat{D}(z)$ на основное состояние $|l, -l\rangle$ или на состояние Дике наименьшего возбуждения

$$|l, z\rangle = \hat{D}(z)|l, -l\rangle. \tag{16.7.3}$$

С помощью (16.7.2) этот результат сводится к следующему:

$$|l, z\rangle = \exp(z \hat{\mathscr{R}}^{(+)}) \exp[\hat{\mathscr{R}}_3 \ln(1 + |z|)^2] \exp(-z^* \hat{\mathscr{R}}^{(-)})|l, -l\rangle = \frac{1}{(1 + |z|^2)^l} \exp(z \hat{\mathscr{R}}^{(+)})|l, -l\rangle, \tag{16.7.4}$$

если воспользоваться тем, что $\exp(-z^* \hat{\mathscr{R}}^{(-)})$, действуя на $|l, -l\rangle$, просто восстанавливает состояние $|l, -l\rangle$ и что $|l, -l\rangle$ является собственным состоянием оператора $\hat{\mathscr{R}}_3$ с собственным значением $-l$. Атомное когерентное состояние, подобно когерентному состоянию электромагнитного поля, может, поэтому, рассматриваться как смещенное основное состояние.

Если разложить оператор $(z\hat{\mathscr{R}}^{(+)})$ в степенной ряд и воспользоваться выражениями (16.5.15), то получим следующее разложение в ряд для $|l,z\rangle$ по состояниям Дике:

$$|l,z\rangle = \frac{1}{(1+|z|^2)^l}\sum_{n=0}^{2l}\frac{z^n}{n!}\left[\frac{n!\,(2l)!}{(2l-n)!}\right]^{1/2}|l,-l+n\rangle$$

или, если положить $-l+n=m$,

$$|l,z\rangle = \frac{1}{(1+|z|^2)^l}\sum_{m=-l}^{l}\binom{2l}{l+m}^{1/2} z^{l+m}|l,m\rangle. \tag{16.7.5}$$

Это разложение можно считать аналогом разложения (11.2.9) когерентного состояния бозонного поля по состояниям Фока. Более того, когда $z=0$, атомное когерентное состояние совпадает с состоянием Дике наименьшего возбуждения. В дальнейшем мы увидим, что эта аналогия распространяется на многие другие свойства, и что, подобно когерентному состоянию поля, атомное когерентное состояние имеет физический смысл состояния, создаваемого с помощью классического источника.

Как обычно, кооперационное число l ограничено нулем и $\frac{1}{2}N$:

$$0 \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}N.$$

В частном случае $l=\frac{1}{2}N$ нижайшее энергетическое состояние $|l,-l\rangle$ принимает вид абсолютного основного состояния $|\frac{1}{2}N,-\frac{1}{2}N\rangle = |1\rangle_1|1\rangle_2\ldots|1\rangle_N$ атомной системы, и выражение (16.7.4) упрощается до следующего,

$$|\tfrac{1}{2}N,z\rangle = \prod_{i=1}^{N}\frac{1}{(1+|z|^2)^{1/2}}\,\mathrm{e}^{z\hat{b}_i^\dagger}|1\rangle_i = \prod_{i=1}^{N}\frac{1}{(1+|z|^2)^{1/2}}(|1\rangle_i + z|2\rangle_i). \tag{16.7.6}$$

Это просто атомное факторизованное состояние, в котором каждый атом находится в одинаковом чистом состоянии и которое можно охарактеризовать вектором Блоха (θ,ϕ) с $z=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}$. В этом частном случае атомное когерентное состояние совпадает с факторизованным состоянием. Другие атомные когерентные состояния являются просто обобщениями, применяемыми в более общей ситуации, когда кооперационное число меньше $\frac{1}{2}N$.

В одном важном отношении, однако, эти два типа когерентных состояний отличны друг от друга. Несмотря на то, что когерентное состояние поля является собственным состоянием оператора поглощения фотона или понижающего оператора, атомное когерентное состояние $|l,z\rangle$ не является собственным состоянием оператора $\hat{\mathscr{R}}^{(-)}$. Вместо этого, из (16.5.15) и (16.7.5) имеем

$$\hat{\mathscr{R}}^{(-)}|l,z\rangle = \frac{1}{(1+|z|^2)^l}\sum_{m=-l+1}^{l}\binom{2l}{l+m}^{1/2}(l+m)^{1/2}(l-m+1)^{1/2}z^{l+m}|l,m-1\rangle =$$

$$= \frac{1}{(1+|z|^2)^l}\sum_{m'=-l}^{l-1}\left[\frac{(2l)!}{(l+m')!(l-m')!}\right]^{1/2}(l-m')z^{l+m'}|l,m'\rangle.$$

Следовательно, среднее значение оператора $\hat{\mathscr{R}}^{(-)}$ равно

$$\langle l,z|\hat{\mathscr{R}}^{(-)}|l,z\rangle = \frac{2lz}{(1+|z|^2)^{2l}}\sum_{m=-l}^{l-1}\binom{2l-1}{l+m}|z|^{2(l+m)} = \frac{2lz}{(1+|z|^2)^{2l}}(1+|z|^2)^{2l-1} = \frac{2lz}{1+|z|^2}, \tag{16.7.7a}$$

и аналогично

$$\langle l,z|\hat{\mathscr{R}}^{(+)}|l,z\rangle = \frac{2lz^*}{1+|z|^2}. \tag{16.7.7б}$$

С точностью до множителя $2l/(1+|z|^2)$, средние значения операторов $\hat{\mathscr{R}}^{(-)}$ и $\hat{\mathscr{R}}^{(+)}$ в атомном когерентном состоянии пропорциональны z и z^*, соответственно. Это позволяет сразу записать средние значения операторов $\hat{\mathscr{R}}_1$ и $\hat{\mathscr{R}}_2$, а именно:

$$\langle l,z|\hat{\mathscr{R}}_1|l,z\rangle = \frac{2l\,\mathrm{Re}(z)}{1+|z|^2}, \tag{16.7.8}$$

$$\langle l,z|\hat{\mathscr{R}}_2|l,z\rangle = \frac{-2l\,\mathrm{Im}(z)}{1+|z|^2}. \tag{16.7.9}$$

Также, используя (16.7.5), получаем

$$\langle l,z|\hat{\mathscr{R}}_3|l,z\rangle = \frac{1}{(1+|z|^2)^{2l}}\sum_{m=-l}^{l}\binom{2l}{l+m}m|z|^{2(l+m)}$$

и, если $m=r-l$, то

$$\langle l,z|\hat{\mathscr{R}}_3|l,z\rangle = \frac{1}{(1+|z|^2)^{2l}}\left[\sum_{r=1}^{2l}\frac{(2l)!|z|^{2r}}{(r-1)!(2l-r)!} - l\sum_{r=0}^{2l}\frac{(2l)!|z|^{2r}}{r!(2l-r)!}\right] =$$

$$= \frac{1}{(1+|z|^2)^{2l}}[2l|z|^2(1+|z|^2)^{2l-1} - l(1+|z|^2)^{2l}] = \frac{l(|z|^2-1)}{1+|z|^2}. \tag{16.7.10}$$

16.7.1. Блоховское представление атомного когерентного состояния

Точно так же, как было удобно представлять состояние одиночного двухуровневого атома действительным вектором в символическом трехмерном пространстве Блоха, так иногда удобно представлять атомное когерентное состояние совокупности атомов действительным вектором. Атомные когерентные состояния определяются внутри подпространства определенного кооперативного числа l, и внутри этого подпространства состояние полностью определяется комплексным числом z, которому можно поставить в соответствие направление вектора на сфере при помощи проективного преобразования. Для этого введем полярный и азимутальный углы θ, ϕ, определяющие направление для каждого комплексного числа z, так что

$$z = \mathrm{ctg}(\tfrac{1}{2}\theta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}. \tag{16.7.11}$$

Тогда

$$\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{ctg}(\tfrac{1}{2}\theta)\cos\phi, \quad \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{ctg}(\frac{1}{2}\theta)\sin\phi,$$

и из (16.7.8) и (16.7.10) сразу же получаем, что

$$\langle l,z|\hat{\mathscr{R}}_1|l,z\rangle = l\sin\theta\cos\phi, \quad \langle l,z|\hat{\mathscr{R}}_2|l,z\rangle = l\sin\theta\sin\phi, \quad \langle l,z|\hat{\mathscr{R}}_3|l,z\rangle = l\cos\theta. \tag{16.7.12}$$

Эти соотношения аналогичны выражению (15.2.14) для одиночного атома и означают, что атомное когерентное состояние является определенным, симметризованным обобщением одноатомного состояния. Следовательно, если представить атомное когерентное состояние в виде трехмерного вектора Блоха длины l, то средние значения операторов $\hat{\mathscr{R}}_1$, $\hat{\mathscr{R}}_2$, $\hat{\mathscr{R}}_3$ будут тремя декартовыми составляющими этого вектора. Основное состояние $|l,z=0\rangle$ имеет вектор Блоха, направленный вниз. Вследствие такого блоховского представления атомные когерентные состояния иногда также называют *состояниями Блоха*.

Хотя состояние $|l,z\rangle$ не является собственным состоянием любого простого оператора типа $\hat{\mathscr{R}}^{(-)}$, можно показать (Arecchi, Courtens, Gilmore and Thomas, 1972), что

$$(\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\tfrac{1}{2}\theta + \hat{\mathscr{R}}_3\cos\tfrac{1}{2}\theta)|l,z\rangle = l\cos\tfrac{1}{2}\theta|l,z\rangle.$$

Эту формулу можно использовать как определяющее уравнение для атомных когерентных состояний, если не считать того, что она не имеет простой, интуитивно понятной интерпретации.

16.7.2. Неортогональность и переполненность

Точно так же, как в разд. 11.6 было показано, что когерентные состояния электромагнитного поля являются неортогональными и линейно зависимыми, мы установим, что и атомные когерентные состояния имеют аналогичные свойства. Сначала рассчитаем скалярное произведение двух таких состояний. Используя (16.7.5) найдем, что

$$\langle l,z|l,z'\rangle = \frac{1}{(1+|z|^2)^l(1+|z'|^2)^l}\sum_{m=-l}^{l}\binom{2l}{l+m}(z^*z')^{l+m} = \frac{(1+z^*z')^{2l}}{(1+|z|^2)^l(1+|z'|^2)^l}. \tag{16.7.13}$$

Из этой формулы видно, что атомные когерентные состояния являются должным образом нормированными и что они *в общем случае не ортогональны*. Однако для любого заданного атомного когерентного состояния $|l,z\rangle$ с $z\neq 0$ существует ортогональное атомное когерентное состояние $|l,z'\rangle$, имеющее $z'=-1/z^*$. В этом отношении атомные когерентные состояния отличаются от когерентных состояний поля, среди которых не существует двух строго ортогональных состояний.

Выражение (16.7.13) может быть представлено в другой форме, которая выявит геометрическое соотношение между векторами Блоха ортогональных атомных когерентных состояний. Вводя полярные координаты l, θ, ϕ соответствующих векторов Блоха, из (16.7.13) с помощью (16.7.11) получаем

$$|\langle l,z|l,z'\rangle|^2 = \frac{|1+\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta'\,e^{i(\phi-\phi')}|^{4l}}{(\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\theta)^{4l}(\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\theta')^{4l}} = |\sin\tfrac{1}{2}\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta' + \cos\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta'\,e^{i(\phi-\phi')}|^{4l} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\cos\theta'+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\phi\sin\theta'\cos\phi'+\frac{1}{2}\sin\theta\sin\phi\sin\theta'\sin\phi'\right]^{2l} = \left[\frac{1}{2}(1+\cos\Theta)\right]^{2l} = [\cos\tfrac{1}{2}\Theta]^{4l},$$

где Θ — угол между двумя векторами Блоха (l,θ,ϕ), (l,θ',ϕ'). Следовательно,

$$|\langle l,z|l,z'\rangle| = \cos^{2l}(\tfrac{1}{2}\Theta). \tag{16.7.14}$$

Из этого выражения сразу видно, что ортогональные когерентные состояния соответствуют диаметрально противоположным векторам на сфере Блоха. Отметим также, что если l является очень большим, то скалярное произведение двух атомных когерентных состояний, которые лишь немного отличаются друг от друга ($\Theta \ll 1$), может быть очень малым. В этом смысле различные атомные когерентные состояния являются почти ортогональными и ведут себя в некоторой степени подобно когерентным состояниям поля.

Для того, чтобы проверить полноту набора состояний $|l,z\rangle$, принадлежащих подпространству гильбертова пространства, соответствующего всем состояниям Дике с кооперационным числом l, проинтегрируем проектор $|l,z\rangle\langle l,z|$ по всему фазовому пространству. Тогда из (16.7.5) и (16.7.11) получаем

$$\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi\,|l,z\rangle\langle l,z| =$$

$$= \sum_{m=-l}^{l}\sum_{m'=-l}^{l}\binom{2l}{l+m}^{1/2}\binom{2l}{l+m'}^{1/2}|l,m\rangle\langle l,m'|\int_0^\pi d\theta\sin\theta(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{4l}(\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\theta)^{2l+m+m'}\int_0^{2\pi}d\phi\,e^{i(m'-m)\phi} =$$

$$= 4\pi\sum_{m=-l}^{l}\binom{2l}{l+m}\int_0^\pi(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{2l-2m+1}(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2l+2m+1}|l,m\rangle\langle l,m|\,d\theta.$$

Интеграл по θ дает $\mathscr{B}$-функцию

$$\mathscr{B}(l+m+1,l-m+1) = \frac{(l+m)!(l-m)!}{(2l+1)!}.$$

Поэтому окончательно имеем

$$\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi\,|l,z\rangle\langle l,z| = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}|l,m\rangle\langle l,m|$$

или, поскольку сумма по m в пределах подпространства всех состояний Дике с определенным кооперационным числом l должна быть равна единице,

$$\frac{2l+1}{4\pi}\int |l,z\rangle\langle l,z|\,d\Omega = 1, \tag{16.7.15}$$

где $d\Omega$ обозначает элемент телесного угла.

Отсюда следует, что атомные когерентные состояния образуют полный набор для представления любого атомного состояния $|\Psi\rangle$, выражаемого в виде линейной комбинации состояний Дике. Достаточно лишь умножить $|\Psi\rangle$ слева на единицу в виде (16.7.15), и получим

$$|\Psi\rangle = \frac{2l+1}{4\pi}\int \langle l,z|\Psi\rangle|l,z\rangle\,d\Omega. \tag{16.7.16}$$

В частности, если $|\Psi\rangle$ является одним из атомных когерентных состояний $|l,z'\rangle$, то, поскольку два различных состояния $|l,z\rangle$ и $|l,z'\rangle$ в общем случае не являются ортогональными, получаем представление одного атомного когерентного состояния по полному набору состояний. Следовательно, если не считать тех состояний, которые ортогональны друг другу, различные атомные когерентные состояния не являются линейно независимыми, и их набор является переполненным. Тем не менее, как и в случае когерентных состояний поля, он часто образует удобный базис. Можно показать, что благодаря переполненности, в данном случае, как и в случае электромагнитного поля, также существует диагональное представление оператора плотности атомной системы по когерентным атомным состояниям, и что весовая функция представления является в общем случае плотностью квазивероятностей (Arecchi, Courtens, Gilmore and Thomas, 1972).

16.7.3. Атомные состояния, создаваемые классическим полем

В разд. 11.12 было показано, что когерентные состояния электромагнитного поля являются нечто большим, чем только удобными математическими конструкциями. Эти состояния фактически создаются при взаимодействии классического тока с квантовым полем, находящимся первоначально в основном состоянии. Подобным же образом мы сейчас покажем, что атомные когерентные состояния являются физически реализуемыми, когда классическое поле взаимодействует с N-атомной системой достаточно малых размеров, которая изначально находится в основном состоянии.

Оператор электродипольного взаимодействия $\hat{H}_{\rm I}(t)$ между системой N двухуровневых атомов и электромагнитным полем может быть записан в виде (16.6.1). Если поле является классическим, и $\mathbf{E}(t)$ является c-числом, то $\hat{H}_{\rm I}(t)$ в картине взаимодействия принимает вид

$$\hat{H}_{\rm I}(t) = -\boldsymbol{\mu}_{12}^{*}\cdot\mathbf{E}(t)\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t}\hat{\mathscr{R}}^{(+)} - \boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\mathbf{E}(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\hat{\mathscr{R}}^{(-)}, \tag{16.7.17}$$

где явно показана временна́я зависимость операторов, а не содержащие t операторы относятся к моменту времени $t=0$. Тогда оператор эволюции за бесконечно малый промежуток времени в картине взаимодействия равен

$$\hat{U}(t,t+\delta t) = \exp[-i\hat{H}_{\rm I}\delta t/\hbar] = \exp[\zeta(t)\hat{\mathscr{R}}^{(+)} - \zeta^{*}(t)\hat{\mathscr{R}}^{(-)}], \tag{16.7.18}$$

где записали

$$\zeta(t) \equiv i\frac{\boldsymbol{\mu}_{12}^{*}\cdot\mathbf{E}(t)}{\hbar}\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t}\,\delta t. \tag{16.7.19}$$

Когда классическое поле воздействует на N-атомную систему, которая первоначально находилась в нижайшем энергетическом состоянии Дике $|l,-l\rangle$, получается новое состояние $|\Psi(\delta t)\rangle$, определяемое формулой

$$|\Psi(\delta t)\rangle = \hat{U}(0,\delta t)|l,-l\rangle = \exp[\zeta(0)\hat{\mathscr{R}}^{(+)} - \zeta^{*}(0)\hat{\mathscr{R}}^{(-)}]|l,-l\rangle. \tag{16.7.20}$$

В более общем виде, по прошествии конечного интервала времени t, который можно поделить на $t/\delta t$ бесконечно малых интервалов δt, обозначаемых через t_1, t_2, ..., получаем состояние

$$|\Psi(t)\rangle = \prod_{r=1}^{t/\delta t}[\exp(\zeta(t_r)\hat{\mathscr{R}}^{(+)} - \zeta^{*}(t_r)\hat{\mathscr{R}}^{(-)})]|l,-l\rangle. \tag{16.7.21}$$

Для вычисления операторного произведения и определения состояния $|\Psi(t)\rangle$ необходимо воспользоваться следующим операторным соотношением, которое можно доказать с помощью теоремы Бейкера-Хаусдорфа (Arecchi, Courtens, Gilmore and Thomas, 1972)

$$\exp(\zeta\hat{\mathscr{R}}^{(+)} - \zeta^*\hat{\mathscr{R}}^{(-)})\exp(\zeta'\hat{\mathscr{R}}^{(+)} - \zeta'^*\hat{\mathscr{R}}^{(-)}) = \exp(\zeta''\hat{\mathscr{R}}^{(+)} - \zeta''^*\hat{\mathscr{R}}^{(-)})\exp(-i\phi\hat{\mathscr{R}}_3), \tag{16.7.22}$$

где ζ, ζ', ζ'' и ϕ связаны матричным уравнением

$$\frac{1}{(1+|z|^2)^{1/2}(1+|z'|^2)^{1/2}}\begin{bmatrix} 1-z^*z' & z+z' \\ -z^*-z'^* & 1-z\,z'^* \end{bmatrix} = \frac{1}{(1+|z''|^2)^{1/2}}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-i\phi/2} & z''\,\mathrm{e}^{i\phi/2} \\ -z''^*\,\mathrm{e}^{-i\phi/2} & \mathrm{e}^{i\phi/2} \end{bmatrix} \tag{16.7.23}$$

и

$$z' = \operatorname{tg}|\zeta'|\exp(i\arg\zeta'), \quad z'' = \operatorname{tg}|\zeta''|\exp(i\arg\zeta''). \tag{16.7.24}$$

Выражение (16.7.22) можно рассматривать как формулировку воспроизводящего свойства атомных операторов смещения, по аналогии с выражением (11.3.14) для бозонного поля, хотя данное воспроизводящее свойство слабее из-за того, что оно включает также оператор $\hat{\mathscr{R}}_3$. Однако, поскольку состояние $|l,-l\rangle$ является собственным состоянием оператора $\hat{\mathscr{R}}_3$, из (16.7.22) сразу же следует, что состояние $|\Psi(t)\rangle$, определяемое выражением (16.7.21), можно представить, с точностью до фазового множителя, в виде одного оператора смещения, действующего на состояние $|l,-l\rangle$. Согласно (16.7.3) такое состояние является атомным когерентным состоянием. Таким образом, мы показали, что действие классического поля на ансамбль из N почти одинаковых двухуровневых атомов, находившихся первоначально в основном состоянии, приводит к образованию атомного когерентного состояния.

Очевидно, существует фундаментальное соответствие между когерентными состояниями поля и атомными когерентными состояниями, которое распространяется и на многие другие свойства. Эти свойства рассматривались в работе (Arecchi, Courtens, Gilmore and Thomas, 1972).

Задачи

16.1 N одинаковых двухуровневых атомов расположены близко друг к другу. Сравните скорость излучения фотонов в факторизованном атомном состоянии (а), при котором каждый атом находится в одном и том же состоянии с аналогичной скоростью в состоянии Дике (б), с тем же самым средним значением энергии, как и в случае (а).

16.2 Для системы одинаковых атомов из предыдущей задачи сравните среднее значение полной атомной энергии в атомном когерентном состоянии $|\theta,\phi\rangle$ с аналогичным значением в факторизованном состоянии, при котором состояние каждого атома определяется одним и тем же вектором Блоха $|\theta,\phi\rangle$.

16.3 Для системы одинаковых атомов из задачи 16.1 сравните среднее значение полного атомного дипольного момента в атомном когерентном состоянии $|\theta,\phi\rangle$ с аналогичным значением в факторизованном состоянии, при котором состояние каждого атома определяется одним и тем же вектором Блоха $|\theta,\phi\rangle$.

16.4 Двухуровневый атом, имеющий энергетический интервал между уровнями $\hbar\omega$, находится в своем нижнем состоянии. Он подвергается краткому воздействию длительности δt классического электромагнитного поля в момент времени $t=0$ и такому же воздействию в более поздний момент времени τ. Покажите, что впоследствии среднее значение дипольного момента в момент времени t содержит вклад, изменяющийся со временем как $\cos[\omega(t-2\tau)]$. Обсудите следствия из этого результата для большого числа атомов, имеющих несколько различные резонансные частоты. Какой физически значимый эффект должен ожидаться при этих условиях?

16.5 N одинаковых, частично возбужденных двухуровневых атомов, распределены некоторым образом в пространстве. В результате измерения интенсивности электрического поля в удаленной точке было найдено, что она в N^2 раз больше, нежели для одного атома. Обсудите вопрос: излучают ли атомы кооперативно?

Глава 17

ОБЩИЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СИСТЕМ

В предшествующих главах был решен целый ряд характерных задач, касающихся взаимодействия электромагнитных полей с зарядами, атомами или молекулами, для анализа которых применялись различные подходы. Например, для задачи фотоэлектрического детектирования, которая подразумевает короткие времена взаимодействия, оказалось удобным использовать методы теории возмущений, тогда как задача резонансной флуоресценции рассматривалась путем решения уравнений движения Гейзенберга. В последующих параграфах будут рассмотрены некоторые общие методы решения проблем взаимодействия, которые, при условии их применимости, могут существенно упростить задачу. В качестве иллюстрации полезности этих методов будут пересчитаны многие результаты, полученные до этого различными способами.

17.1. Квантовая теорема регрессии

Лэксом (Lax, 1963; см. также Louisell, 1973, разд. 6.6) было показано, что с помощью некоторых допущений о факторизации, часто оказывается возможным выразить многовременны́е функции корреляции определенных квантовомеханических операторов через одновременны́е средние значения. Этот результат сейчас известен как *теорема регрессии*. Поскольку многовременны́е функции корреляции играют довольно важную роль в квантовой оптике, эта теорема часто оказывается полезной и существенно упрощает некоторые вычисления. Далее мы будем использовать, главным образом, метод Лэкса.

Рассмотрим две взаимодействующие квантовые системы, которые для удобства будем называть *системой* S и *резервуаром* R. Предположим, что система S характеризуется полным ортогональным набором собственных состояний $|\phi_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots$ образующих базис, который может быть как дискретным, так и непрерывным. Для простоты будем считать, что базис дискретный. Оператор плотности $\hat{\rho}(t)$ полной системы в картине Шредингера охватывает гильбертовы пространства состояний S и R, и мы можем получить приведенный оператор плотности $\hat{\rho}_S(t)$ для S или $\hat{\rho}_R(t)$ для R, взяв след по противоположным переменным, так что

$$\hat{\rho}_S(t) = \mathrm{Tr}_R\,\hat{\rho}(t), \quad \hat{\rho}_R(t) = \mathrm{Tr}_S\,\hat{\rho}(t) \tag{17.1.1}$$

В частности, для $\hat{\rho}_S(t)$ может быть задано следующее представление через базис $|\phi_i\rangle$

$$\hat{\rho}_S(t) = \sum_{ij} \rho_{ij}(t)|\phi_i\rangle\langle\phi_j|, \tag{17.1.2}$$

где

$$\rho_{ij}(t) = \mathrm{Tr}\,[\hat{\rho}(t)|\phi_j\rangle\langle\phi_i|] = \langle\phi_i|\hat{\rho}_S(t)|\phi_j\rangle. \tag{17.1.3}$$

Временна́я эволюция оператора плотности $\hat{\rho}(t)$ полной системы определяется унитарным оператором эволюции во времени $\hat{U}(t, t_0)$, $(t \geqslant t_0)$, так что

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0)\hat{\rho}(t_0)\hat{U}^\dagger(t, t_0). \tag{17.1.4}$$

Сделаем теперь основное допущение, состоящее в том, что S и R не взаимодействуют в начальный момент времени t_0 и поэтому

$$\hat{\rho}(t_0) = \hat{\rho}_R(t_0) \times \hat{\rho}_S(t_0). \tag{17.1.5}$$

Временну́ю эволюцию $\rho_{ij}(t)$ можно определить, используя формулы (17.1.3), (17.1.4) и (17.1.5) и записывая

$$\rho_{ji}(t) = \mathrm{Tr}\,[\hat{U}(t,t_0)\hat{\rho}_R(t_0)\hat{\rho}_S(t_0)\hat{U}^\dagger(t,t_0)|\phi_i\rangle\langle\phi_j|] = \mathrm{Tr}\,[\hat{U}^\dagger(t,t_0)|\phi_i\rangle\langle\phi_j|\hat{U}(t,t_0)\hat{\rho}_R(t_0)\hat{\rho}_S(t_0)]. \tag{17.1.6}$$

Последняя строка получена из предыдущей с помощью циклической перестановки операторов под знаком следа. Далее запишем оператор $\hat{U}^\dagger(t,t_0)|\phi_i\rangle\langle\phi_j|\hat{U}(t,t_0)$ в базисе $|\phi_p\rangle$ следующим образом

$$\hat{U}^\dagger(t,t_0)|\phi_i\rangle\langle\phi_j|\hat{U}(t,t_0) = \sum_{p,q} \hat{C}^{(R)}_{ijpq}(t,t_0)|\phi_p\rangle\langle\phi_q|, \tag{17.1.7}$$

где коэффициенты $\hat{C}^{(R)}_{ijpq}(t,t_0)$ являются c-числами относительно гильбертова пространства S, но операторами по отношению к гильбертовому пространству R. Это отмечено знаком $\hat{}$ и верхним индексом (R). Подставляя (17.1.7) в (17.1.6) и используя представление (17.1.2) для $\hat{\rho}_S(t_0)$, получаем соотношение

$$\rho_{ji}(t) = \mathrm{Tr}\sum_{p,q}\sum_{l,m} \hat{C}^{(R)}_{ijpq}(t,t_0)\hat{\rho}_R(t_0)|\phi_p\rangle\langle\phi_q|\phi_l\rangle\langle\phi_m|\rho_{lm}(t_0) =$$

$$= \mathrm{Tr}_R \sum_{p,q} \hat{C}^{(R)}_{ijpq}(t,t_0)\hat{\rho}_R(t_0)\rho_{qp}(t_0) = \sum_{p,q} G_{ijpq}(t,t_0)\rho_{qp}(t_0), \tag{17.1.8}$$

где обозначено

$$G_{ijpq}(t,t_0) \equiv \mathrm{Tr}_R\, \hat{C}^{(R)}_{ijpq}(t,t_0)\hat{\rho}_R(t_0). \tag{17.1.9}$$

Уравнение (17.1.8) показывает, что $G_{ijpq}(t,t_0)$ можно рассматривать как функцию Грина, определяющую эволюцию системы во времени. В частности, если $t = t_0$, то

$$G_{ijpq}(t_0,t_0) = \delta_{ip}\delta_{jq}. \tag{17.1.10}$$

17.1.1. Одновременны́е средние значения

Легко показать, что функцию Грина $G(t,t_0)$ можно непосредственно использовать для вычисления эволюции во времени среднего значения произвольной динамической переменной $\hat{M}$ системы S. Имеем

$$\langle\hat{M}(t)\rangle = \mathrm{Tr}\,[\hat{M}\hat{\rho}(t)] = \mathrm{Tr}_S\,[\hat{M}\hat{\rho}_S(t)],$$

Вставляя единичные проекторы $\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ и $\sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$ перед $\hat{M}$ и после $\hat{M}$, соответственно, и вычисляя след, получаем следующий результат

$$\langle\hat{M}(t)\rangle = \sum_{ij} M_{ij}\rho_{ji}(t), \tag{17.1.11}$$

где $\langle\phi_i|\hat{M}|\phi_j\rangle \equiv M_{ij}$ есть матричный элемент оператора $\hat{M}$. Подстановка правой части уравнения (17.1.8) вместо $\rho_{ji}(t)$ приводит сразу к следующему выражению

$$\langle\hat{M}(t)\rangle = \sum_{ij}\sum_{pq} M_{ij}G_{ijpq}(t,t_0)\rho_{pq}(t_0). \tag{17.1.12}$$

Таким образом, функция Грина $G_{ijpq}(t,t_0)$ позволяет определить среднее значение $\hat{M}$ в произвольный момент времени t.

17.1.2. Многовременны́е средние значения

Хотя с первого взгляда кажется, что та же самая процедура не может быть использована для вычисления двухвременны́х средних значений, ибо $\hat{\rho}_S(t)$ меняется во времени, данная трудность исчезает, если один из моментов времени равен t_0, при котором $\hat{\rho}(t_0)$ факторизуется согласно выражению (17.1.5).

Пусть $\hat{L}$, $\hat{M}$, $\hat{N}$ — три динамические переменные системы S и мы хотим вычислить среднее значение $\langle\hat{L}(t_0)\hat{M}(t)\hat{N}(t_0)\rangle$, при $t \geqslant t_0$. Тогда, поскольку в картине Гейзенберга

$$\hat{M}(t) = \hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{M}(t_0)\hat{U}(t,t_0), \tag{17.1.13}$$

получаем, что

$$\langle\hat{L}(t_0)\hat{M}(t)\hat{N}(t_0)\rangle = \mathrm{Tr}\,[\hat{L}(t_0)\hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{M}(t_0)\hat{U}(t,t_0)\hat{N}(t_0)\hat{\rho}_R(t_0)\hat{\rho}_S(t_0)]. \tag{17.1.14}$$

Вставим теперь единичные проекторы в виде $\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ после $\hat{L}$, $\hat{U}^\dagger$, $\hat{M}$, $\hat{U}$, $\hat{N}$, $\hat{\rho}_S$ в выражении (17.1.14) и получим

$$\langle\hat{L}(t_0)\hat{M}(t)\hat{N}(t_0)\rangle = \mathrm{Tr}\sum_{ij}\sum_{kl}\sum_{mn}\hat{L}(t_0)|\phi_k\rangle\langle\phi_k|\hat{U}^\dagger(t,t_0)|\phi_i\rangle\times$$
$$\times\langle\phi_j|\hat{U}(t,t_0)|\phi_l\rangle\langle\phi_i|\hat{M}(t_0)|\phi_j\rangle\langle\phi_l|\hat{N}(t_0)|\phi_m\rangle\hat{\rho}_R(t_0)\langle\phi_m|\hat{\rho}_S(t_0)|\phi_n\rangle\langle\phi_n|.$$

Удобно ввести обозначения

$$\langle\phi_n|\hat{L}(t_0)|\phi_k\rangle \equiv L_{nk}, \quad \langle\phi_i|\hat{M}(t_0)|\phi_j\rangle \equiv M_{ij}, \quad \langle\phi_l|\hat{N}(t_0)|\phi_m\rangle \equiv N_{lm}$$

для матричных элементов динамических переменных в картине Шредингера. Взяв след по переменным системы S, будем иметь

$$\langle\hat{L}(t_0)\hat{M}(t)\hat{N}(t_0)\rangle = \mathrm{Tr}_R\sum_{ij}\sum_{kl}\sum_{mn}L_{nk}\langle\phi_k|\hat{U}^\dagger(t,t_0)|\phi_i\rangle\langle\phi_j|\hat{U}(t,t_0)|\phi_l\rangle M_{ij}N_{lm}\hat{\rho}_R(t_0)\rho_{mn}(t_0). \tag{17.1.15}$$

В заключение воспользуемся разложением (17.1.7) для $\hat{U}^\dagger(t,t_0)|\phi_i\rangle\langle\phi_j|\hat{U}(t,t_0)$ и возьмем след по переменным системы R, как в выражении (17.1.9). Это приводит к уравнению

$$\langle\hat{L}(t_0)\hat{M}(t)\hat{N}(t_0)\rangle = \sum_{ij}\sum_{kl}\sum_{mn}\sum_{pq}L_{nk}\langle\phi_k|\phi_p\rangle G_{ijpq}(t,t_0)\langle\phi_q|\phi_l\rangle M_{ij}N_{lm}\rho_{mn}(t_0) =$$
$$= \sum_{ij}\sum_{kl}\sum_{mn}G_{ijkl}(t,t_0)L_{nk}M_{ij}N_{lm}\rho_{mn}(t_0). \tag{17.1.16}$$

Таким образом, для вычисления среднего значения многовременно́го произведения операторов может быть использована такая же, как и раньше, функция Грина, при условии, что определены матричные элементы этих операторов. Этот результат, известный как ***квантовая теорема регрессии***, означает, что флуктуации регрессируют во времени так же, как макроскопические средние. Уравнение (17.1.16) является точным, однако, при его выводе существенную роль сыграла факторизация оператора плотности $\hat{\rho}(t_0)$ в момент времени t_0.

Если взаимодействие фактически включается в момент времени t_0, или если для полной системы в этот момент времени состояния $\hat{\rho}_S(t_0)$ и $\hat{\rho}_R(t_0)$ известны по отдельности, то теорема регрессии также применима и уравнение (17.1.16) можно использовать для вычисления корреляционной функции. Однако, практически, теорема часто применяется в приближенном смысле, когда точной факторизации $\hat{\rho}(t_0)$ нет, но полная система является марковской. Это означает, что даже если R и S взаимодействуют, результат этого взаимодействия оказывает достаточно слабое влияние на временну́ю эволюцию системы S и не приводит к большому различию между случаями связанного и несвязанного начального состояния. Данное допущение справедливо, когда резервуар R имеет много степеней свободы, и состояния, относящиеся к большинству степеней свободы, остаются в значительной степени незатронутыми системой S. Далее мы проиллюстрируем на нескольких примерах применение теоремы регрессии.

17.1.3. Спонтанное излучение атома

Рассмотрим квантовую систему S в виде двухуровневого атома, взаимодействующего с электромагнитным полем, которое находится первоначально в вакуумном состоянии и которое следует рассматривать как резервуар R. Два энергетических собственных состояния атома $|2\rangle$ и $|1\rangle$ образуют базис. Основными динамическими переменными являются атомные понижающий и повышающий операторы $\hat{b}$ и $\hat{b}^\dagger$, а так же оператор возбуждения $\hat{R}_3 + \frac{1}{2}$. Они имеют следующие матричные элементы (ср. разд. 15.1)

$$\langle i|\hat{b}|j\rangle = \delta_{i1}\delta_{j2}, \quad \langle i|\hat{b}^\dagger|j\rangle = \delta_{i2}\delta_{j1}, \quad \langle i|\hat{R}_3 + \tfrac{1}{2}|j\rangle = \delta_{i2}\delta_{j2}, \tag{17.1.17}$$

и начальные средние значения

$$\langle\hat{b}(t_0)\rangle = \sum_{ij} b_{ij}\rho_{ji}(t_0) = \rho_{21}(t_0), \quad \langle\hat{b}^\dagger(t_0)\rangle = \rho_{12}(t_0), \quad \langle\hat{R}_3(t_0) + \tfrac{1}{2}\rangle = \rho_{22}(t_0). \tag{17.1.18}$$

Для более позднего момента времени t получаем из (17.1.12), после отождествления $\hat{M}$ с $\hat{b}$, что

$$\langle\hat{b}(t)\rangle = \sum_{ij}\sum_{pq} G_{ijpq}(t,t_0)\delta_{i1}\delta_{j2}\rho_{qp}(t_0) = \sum_{pq} G_{12pq}(t,t_0)\rho_{qp}(t_0). \tag{17.1.19}$$

Однако из обсуждения, сделанного в разд. 15.5, мы уже знаем [ср. (15.5.29)], что

$$\langle\hat{b}(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}\,\mathrm{e}^{-i(\omega_0-\gamma)(t-t_0)}\,\langle\hat{b}(t_0)\rangle = \mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}\,\mathrm{e}^{-i(\omega_0-\gamma)(t-t_0)}\,\rho_{21}(t_0), \tag{17.1.20}$$

и сравнение выражений (17.1.19) и (17.1.20) позволяет установить четыре элемента функции Грина

$$G_{12pq}(t,t_0) = \delta_{p1}\delta_{q2}\,\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}\,\mathrm{e}^{-i(\omega_0-\gamma)(t-t_0)}. \tag{17.1.21}$$

Воспользуемся теперь этими результатами для вычисления двухвременно́й атомной корреляционной функции $\langle\hat{b}^\dagger(t)\hat{b}(t+\tau)\rangle$ из теоремы регрессии. Если предположение о факторизации справедливо, то из (17.1.6), полагая $\hat{L} = \hat{b}^\dagger$, $\hat{M} = \hat{b}$, $\hat{N} = 1$, получим

$$\langle\hat{b}^\dagger(t)\hat{b}(t+\tau)\rangle = \sum_{ij}\sum_{kl}\sum_{mn} G_{ijkl}(t+\tau,t)\delta_{n2}\delta_{k1}\delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{lm}\rho_{mn}(t) = \sum_m G_{121m}\rho_{m2}(t),$$

и, с учетом формулы (17.1.21),

$$= \mathrm{e}^{-\beta\tau}\,\mathrm{e}^{-i(\omega_0-\gamma)\tau}\,\rho_{22}(t) = \mathrm{e}^{-\beta\tau}\,\mathrm{e}^{-i(\omega_0-\gamma)\tau}\,\langle\hat{b}^\dagger(t)\hat{b}(t)\rangle. \tag{17.1.22}$$

Этот результат согласуется с результатом, полученным в разд. 15.5. Необходимо отметить, что хотя, строго говоря, атом и электромагнитное поле взаимодействуют в момент времени t, тем не менее, состояние поля слабо изменяется атомом, в том смысле, что почти все моды остаются незаполненными. Пока наш интерес сосредоточен на атоме, а не на излученном фотоне, мы можем считать, что состояние поля почти не отличается от вакуумного.

17.1.4. Резонансная флуоресценция двухуровневого атома

Теперь в качестве примера немного более сложной ситуации, рассмотрим задачу взаимодействия атома с электромагнитным полем, которое находится первоначально в когерентном состоянии $|\{v\}\rangle$. Вычислим двухвременну́ю атомную корреляционную функцию

$$\langle\hat{b}^\dagger(t)\hat{b}^\dagger(t+\tau)\hat{b}(t+\tau)\hat{b}(t)\rangle = \langle\hat{b}^\dagger(t)[\hat{R}_3(t+\tau) + \tfrac{1}{2}]\hat{b}(t)\rangle$$

которая возникает при фотоэлектрических корреляционных измерениях [ср. (15.6.27)]. Из теоремы регрессии, после отождествления $\hat{L}$ с $\hat{b}^\dagger$, $\hat{M}$ с $\hat{R}_3 + \frac{1}{2}$ и $\hat{N}$ с $\hat{b}$ в уравнении (17.1.16), получаем соотношение

$$\langle \hat{b}^\dagger(t)[\hat{R}_3(t+\tau) + \tfrac{1}{2}]\hat{b}(t)\rangle = \sum_{ij}\sum_{kl}\sum_{mn} G_{ijkl}(t+\tau,t)\delta_{n2}\delta_{k1}\delta_{i2}\delta_{j2}\delta_{l1}\delta_{m2}\rho_{mn}(t) =$$

$$= G_{2211}(t+\tau,t)\rho_{22}(t) \quad (17.1.23)$$

Предположим, что задача вычисления временно́й эволюции величины $\langle \hat{R}_3(t) + \frac{1}{2}\rangle$ из произвольного начального состояния в момент времени t_0 уже решена, и решение записывается в виде

$$\langle \hat{R}_3(t) + \tfrac{1}{2}\rangle = \sum_{pq} D_{pq}(t-t_0)\rho_{qp}(t_0). \quad (17.1.24)$$

Точные выражения для $D_{pq}(\tau)$ известны (Kimble и Mandel, 1976). В частности, $D_{11}(\tau)$ определяется правой частью выражения (15.6.11a) с заменой t на τ, которая оказывается равной среднему значению $\langle \hat{R}_3(\tau) + \frac{1}{2}\rangle$ для атома, находившегося в основном состоянии $|1\rangle$ при $\tau = 0$. Таким образом, можно записать, что

$$D_{11}(\tau) = \langle \hat{R}_3(\tau) + \tfrac{1}{2}\rangle_{\mathrm{G}}, \quad (17.1.25)$$

где индекс G напоминает о том, что начальное состояние атома является основным состоянием.

Но из (17.1.12) следует, что

$$\langle \hat{R}_3(t) + \tfrac{1}{2}\rangle = \sum_{ij}\sum_{pq} G_{ijpq}(t,t_0)\delta_{i2}\delta_{j2}\rho_{qp}(t_0) = \sum_{pq} G_{22pq}(t,t_0)\rho_{qp}(t_0), \quad (17.1.26)$$

и сравнение с формулой (17.1.24) позволяет нам установить следующие элементы функции Грина

$$G_{22pq}(t,t_0) = D_{pq}(t-t_0). \quad (17.1.27)$$

Подставляя данное выражение в (17.1.23) и записывая $\rho_{22}(t)$, в виде $\langle \hat{R}_3(t) + \frac{1}{2}\rangle$, сразу получаем результат

$$\langle \hat{b}^\dagger(t)[\hat{R}_3(t+\tau) + \tfrac{1}{2}]\hat{b}(t)\rangle = \langle \hat{R}_3(t) + \tfrac{1}{2}\rangle D_{11}(\tau), \quad (17.1.28)$$

и, с учетом (17.1.25),

$$\langle \hat{b}^\dagger(t)[\hat{R}_3(t+\tau) + \tfrac{1}{2}]\hat{b}(t)\rangle = \langle \hat{R}_3(t) + \tfrac{1}{2}\rangle\langle \hat{R}_3(\tau) + \tfrac{1}{2}\rangle_{\mathrm{G}}. \quad (17.1.29)$$

Это есть не что иное, как теорема о факторизации, которая была выведена для корреляционной функции интенсивности света в разд. 15.6, выраженная через атомные переменные. Ее физические следствия, которые касаются атомных квантовых скачков при каждом испускании фотона, уже обсуждались. Справедливость предположения о факторизации в данной задаче опять основана на том, что, с точки зрения поведения атома, состояние поля практически не меняется. Те моды поля, которые были первоначально сильно заселены, остаются почти неизменными, тогда как почти все остальные моды остаются незаполненными.

17.1.5. Квантовая теорема регрессии для нормально упорядоченных операторов поля

Квантовая теорема регрессии может быть записана в очень простой форме для некоторых нормально упорядоченных операторов квантового поля, взаимодействующего с «резервуаром» (Louisell, 1969). В разд. 11.9 мы видели, что среднее значение нормально упорядоченного полевого оператора может быть вычислено точно также, как классическое с-числовое среднее при помощи диагонального представления оператора плотности $\hat{\rho}_{\mathrm{F}}(t)$ по когерентным состояниям. Для одной моды электромагнитного поля последнее имеет вид

$$\hat{\rho}_{\mathrm{F}}(t) = \int \phi(v,t)|v\rangle\langle v|\, d^2v, \quad (17.1.30)$$

где $|v\rangle$ — когерентное состояние и $\phi(v,t)$ — обобщенная плотность распределения в фазовом пространстве (весовая функция). Тогда можно вычислить, например, $\langle\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle$, по формуле (Sudarshan, 1963; Klauder, 1966; Klauder and Sudarshan, 1968)

$$\langle\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle = \int v^* v\phi(v,t)\,d^2v, \tag{17.1.31}$$

где мы использовали оптическую теорему эквивалентности (см. разд. 11.9). В более поздний момент времени $t+\tau$, величина $\phi(v,t+\tau)$ задается соотношением

$$\phi(v,t+\tau) = \int G(v,t+\tau|v',t)\phi(v',t)\,d^2v', \tag{17.1.32}$$

где $G(v,t+\tau|v',t)$ — функция Грина, определяющая временну́ю эволюцию $\phi(v,t)$. Поэтому можно записать

$$\langle\hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t+\tau)\rangle = \int v^* vG(v,t+\tau|v',t)\phi(v',t)\,d^2v'\,d^2v. \tag{17.1.33}$$

Данное выражение имеет такую же структуру, как и (17.1.12), за исключением того, что суммы заменены интегралами по комплексной плоскости.

Квантовая теорема регрессии позволяет записать двухвременно́е среднее, типа $\langle\hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t)\rangle$ непосредственно для взаимодействующего электромагнитного поля, комбинируя функцию Грина с оптической теоремой эквивалентности. Это дает следующий результат:

$$\langle\hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t)\rangle = \int v^* v'G(v,t+\tau|v',t)\phi(v',t)\,d^2v\,d^2v'. \tag{17.1.34}$$

Подобным же образом, если нас интересуют двухвременны́е корреляции интенсивности света, то применяя ту же теорему, получим

$$\langle\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t+\tau)\hat{a}(t)\rangle = \int |v|^2|v'|^2G(v,t+\tau|v',t)\phi(v',t)\,d^2v\,d^2v'. \tag{17.1.35}$$

Еще раз отметим, что многовременны́е корреляционные функции вычисляются при помощи той же функции Грина, которая определяет временну́ю эволюцию средних значений, как в выражении (17.1.33). Общая теория эволюции многовременны́х корреляций и многовременны́х функций распределения была развита в работе (Srinivas and Wolf, 1977).

17.2. Флуктуационно-диссипационная теорема

Со времен первой работы Эйнштейна по броуновскому движению и молекулярной диффузии (Einstein, 1905) и работы Найквиста по тепловому шуму в резисторах (Nyquist, 1928) известно, что в некоторых физических системах существует связь между тепловыми флуктуациями и диссипацией энергии, вызванной внешним возмущением. Общее рассмотрение и квантово-механическое обоснование этой связи было сделано в работе Каллена и Велтона (Callen and Welton, 1951), которые сформулировали ее в виде *флуктуационно-диссипационной теоремы*. Как мы увидим, данная теорема позволяет с минимальными вычислениями определить спектральную плотность тепловых флуктуаций в некоторых простых физических системах, и приводит к дальнейшим улучшениям (Kubo, 1966).

Для того, чтобы понять физику данной теоремы, рассмотрим в качестве примера зеркало гальванометра, подвешенное в воздухе. Зеркало подвергается огромному числу случайных ударов молекул, что вызывает флуктуации и броуновское движение угла поворота зеркала во времени. Случайное движение можно наблюдать и регистрировать при помощи достаточно чувствительного инструмента. В то же время удары наличие молекул вызывает вязкостную или диссипативную силу, которая противодействует движению зеркала. Макроскопически это сопротивление истолковывается как вязкость и вызывает затухание любых периодических осцилляций зеркала гальванометра во времени. Ясно, что один и тот же механизм — удары молекул — отвечает как за флуктуации зеркала, так и за его успокоение, поэтому следует ожидать некоторого соотношения между флуктуациями и диссипацией.

17.2.1. Простая классическая линейная диссипативная система

Чтобы рассуждения носили более количественный характер, рассмотрим физическую систему, подверженную случайным возмущениям, движение которой может быть описано дифференциальным уравнением первого порядка типа уравнения Ланжевена. Например, это может быть зеркало гальванометра, о котором только что упоминалось, или частица, испытывающая броуновское движение в жидкости, уравнение движения которой имеет вид

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{B}\mathbf{v} + \mathbf{f}(t). \tag{17.2.1}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость частицы и m — ее масса. Константу B иногда называют подвижностью. Члены $-\mathbf{v}/B$ и $\mathbf{f}(t)$ вместе описывают общую флуктуационную силу, действующую на частицу со стороны окружающей жидкости. Разделим эту силу на ее среднее значение $-\mathbf{v}/B$, которое обычно истолковывается как макроскопическое вязкостное сопротивление, и флуктуационную силу $\mathbf{f}(t)$, которая представляет собой отклонение от среднего и приписывается ударам молекул. По определению $\langle \mathbf{f}(t)\rangle = 0$.

Другой пример физически отличающейся, но математически эквивалентной системы, изображен на рис. 17.1. В данном случае электрический ток $I(t)$ проходит через сопротивление R и индуктивность L вследствие действия флуктуирующей Э.Д.С. $v(t)$, возникающей из-за теплового движения зарядов в резисторе. Это явление иногда называют *тепловым шумом*. Дифференциальное уравнение, определяющее прохождение тока, имеет вид

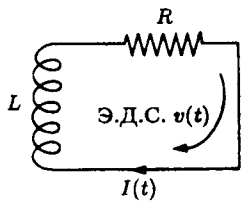


Рис. 17.1. Простая линейная диссипативная система, испытывающая флуктуации

$$L\frac{dI}{dt} = -RI + v(t), \tag{17.2.2}$$

где $\langle v(t)\rangle = 0$. Если движение частицы, рассмотренной выше, ограничить одним измерением, то станет ясно, что две задачи математически эквивалентны. Уравнение (17.2.2) непосредственно интегрируется, и мы получаем

$$I(t) = I(0)\,\mathrm{e}^{-Rt/L} + \frac{1}{L}\,\mathrm{e}^{-Rt/L}\int_0^t \mathrm{e}^{Rt'/L}\,v(t')\,dt'. \tag{17.2.3}$$

Если вычислить среднее от каждого слагаемого и воспользоваться тем, что $\langle v(t')\rangle = 0$, то сразу найдем

$$\langle I(t)\rangle = \langle I(0)\rangle\,\mathrm{e}^{-Rt/L}. \tag{17.2.4}$$

Таким образом, среднее значение силы тока стремится к нулю, независимо от его начального значения. Однако, как будет сейчас показано, среднеквадратичная сила тока не стремится к нулю. При возведении $I(t)$ в квадрат и вычислении среднего, воспользуемся тем фактом, что сила тока $I(0)$ в момент времени $t = 0$ не коррелирует с флуктуирующей Э.Д.С. $v(t)$ в более поздние моменты времени t, так что

$$\langle I(0)v(t)\rangle = \langle I(0)\rangle\langle v(t)\rangle = 0, \quad \text{если } t > 0.$$

Тогда

$$\langle I^2(t)\rangle = \langle I^2(0)\rangle\,\mathrm{e}^{-2Rt/L} + \frac{1}{L^2}\,\mathrm{e}^{-2Rt/L}\int_0^t\int_0^t \mathrm{e}^{R(t'+t'')/L}\,\langle v(t')v(t'')\rangle\,dt'\,dt''.$$

Теперь учтем, что $\langle v(t')v(t'')\rangle$ есть корреляционная функция теплового шума, который можно считать стационарным при заданной температуре. Следовательно, как обычно в случае стационарного процесса, $\langle v(t')v(t'')\rangle$ есть функция от $t''-t'$, и можно записать

$$\langle v(t')v(t'')\rangle = \Gamma(t''-t'). \tag{17.2.5}$$

Поскольку подынтегральное выражение содержит функции только от аргументов $t''-t'$ и $t''+t'$, интеграл можно упростить, как в разд. 2.2 и разд. 14.9, следующей подстановкой $\frac{1}{2}(t'+t'') = t_1$, $t''-t' = t_2$. Якобиан данного преобразования равен единице, а пределы для новых переменных t_1, t_2 равны

$$-2t_1 \leqslant t_2 \leqslant 2t_1, \quad \text{для } 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}t,$$

$$-2(t-t_1) \leqslant t_2 \leqslant 2(t-t_1), \quad \text{для } \frac{1}{2}t \leqslant t_1 \leqslant t,$$

что видно из рис. 2.3 и 14.14. В результате, получаем следующую формулу

$$\langle I^2(t)\rangle = \langle I^2(0)\rangle\, \mathrm{e}^{-2Rt/L} + \\ + \frac{1}{L^2}\,\mathrm{e}^{-2Rt/L}\left[\int_0^{t/2} dt_1 \int_{-2t_1}^{2t_1} dt_2\, \mathrm{e}^{2Rt_1/L}\,\Gamma(t_2) + \int_{t/2}^{t} dt_1 \int_{-2(t-t_1)}^{2(t-t_1)} dt_2\, \mathrm{e}^{2Rt_1/L}\,\Gamma(t_2)\right].$$

Теперь учтем, что корреляционная функция $\Gamma(t_2)$ существенно отлична от нуля в ограниченной области, определяемой шириной полосы частот случайного шума $v(t)$. Если нас интересует стационарное значение $\langle I^2(t)\rangle$, то естественно предположить, что значение t является большим. В этом случае почти для всех значений t_1 оба интеграла по t_2 могут быть аппроксимированы формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t_2)\, dt_2 = \Phi(0),$$

где

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t_2)\, \mathrm{e}^{i\omega t_2}\, dt_2 \tag{17.2.6}$$

— спектральная плотность теплового шума. Тогда уравнение сводится к следующему:

$$\langle I^2(t)\rangle = \langle I^2(0)\rangle\, \mathrm{e}^{-2Rt/L} + \frac{1}{L^2}\,\mathrm{e}^{-2Rt/L}\int_0^t \mathrm{e}^{2Rt_1/L}\,\Phi(0)\, dt_1 = \\ = \langle I^2(0)\rangle\, \mathrm{e}^{-2Rt/L} + \frac{1}{2RL}(1 - \mathrm{e}^{-2Rt/L})\Phi(0), \tag{17.2.7}$$

и, далее, при $t \to \infty$ получаем для установившегося состояния

$$\langle I^2\rangle = \frac{1}{2RL}\Phi(0). \tag{17.2.8}$$

Теперь учтем, что $\frac{1}{2}L\langle I^2\rangle$ есть средняя энергия магнитного поля, которая в равновесном состоянии должна быть равна $\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$, где k_{B} — постоянная Больцмана, вследствие закона равномерного распределения. Это позволяет переписать уравнение (17.2.8) в следующем виде:

$$\Phi(0) = 2k_{\mathrm{B}}TR. \tag{17.2.9}$$

Данная формула является соотношением, которое связывает величину флуктуаций напряжения, представленную через спектральную плотность на нулевой частоте $\Phi(0)$, с диссипативными процессами в системе, которые представлены сопротивлением R. Это, возможно, простейший пример ***флуктуационно-диссипационной теоремы***. Найквист (Nyquist, 1928), исходя из простых физических соображений показал, что спектральная плотность $\Phi(\omega)$ теплового шума является константой (по крайней мере вплоть до очень высоких значений частот), так что уравнение (17.2.9) можно обобщить следующим образом:

$$\Phi(\omega) = 2k_{\mathrm{B}}TR, \tag{17.2.10}$$

откуда прямо следует дальнейшее обобщение на случай сопротивления $R(\omega)$, зависящего от частоты.

Использованные нами аргументы, так же как и следствия, которые из них получены, оказываются достаточно широко применимыми. Они справедливы для широкого класса линейных систем и даже для квантово-механических систем. Обратимся теперь к выводу соотношения между флуктуациями и диссипацией в квантово-механической линейной диссипативной системе. Мы будем следовать выводу Каллена и Велтона (Callen and Welton, 1951). С другим примером квантовой системы, которая подчиняется флуктуационно-диссипационной теореме, мы встретимся ниже, в разд. 17.4, рассматривая квантовый ланжевеновский процесс.

17.2.2. Квантово-механическая линейная диссипативная система

Рассмотрим квантовую систему, невозмущенный гамильтониан которой $\hat{H}_0$. Взаимодействие системы с некоторым внешним возмущением $V(t)$, которое будем считать классическим, описывается при помощи динамической переменной $\hat{Q}$ квантовой системы. В результате полный гамильтониан $\hat{H}$ взаимодействующей системы записывается в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V(t)\hat{Q}. \tag{17.2.11}$$

Предположим, что гамильтониан $\hat{H}_0$ имеет полный набор собственных состояний $|E_n\rangle$, $n = 1, 2, \ldots$, который может быть как дискретным, так и непрерывным. Для простоты будем считать его дискретным, а наименьшее собственное значение энергии равным нулю. Далее будем считать, что оператор $\hat{Q}$ недиагонален в представлении $|E_n\rangle$. Рассмотрим возмущение $V(t)$, осциллирующее с частотой ω, и запишем его в виде

$$V(t) = \mathrm{Re}\,[V(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}]. \tag{17.2.12}$$

Примером может служить двухуровневый атом с гамильтонианом $\hat{H}_0 = \hbar\omega_0(\hat{R}_3 + \frac{1}{2})$, взаимодействующий с классическим электромагнитным полем $V(t) = \mathrm{Re}\,[\mathscr{E}(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}]$ посредством электрического дипольного момента $\hat{Q} = 2\mu_{12}\hat{R}_1$ (ср. разд. 15.1).

Будем предполагать, что квантовая система является линейной в том смысле, что ее отклик на возмущение является линейным. Тогда среднее значение $\langle\hat{Q}(t)\rangle$ будет так же осциллировать с частотой ω, так что возникнет скорость изменения величины $\langle\hat{Q}(t)\rangle$, т.е. «ток» $\langle\dot{\hat{Q}}(t)\rangle$. Данный факт выражается формулой

$$\langle\dot{\hat{Q}}(t)\rangle = \mathrm{Re}\,[I(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}], \tag{17.2.13}$$

где $I(\omega)$ — в общем случае, комплексная величина. Линейность системы делает величину $I(\omega)$ пропорциональной $V(\omega)$, так что можно положить

$$Z(\omega) \equiv \frac{V(\omega)}{I(\omega)}, \tag{17.2.14}$$

где $Z(\omega)$ называется *обобщенным полным сопротивлением* системы на частоте ω. Ясно, что здесь имеется аналогия с поведением линейной электрической цепи, с учетом которой и была выбрана система обозначений и терминология. В соответствии с этой терминологией, мы разложим $Z(\omega)$ на действительную и мнимую части

$$Z(\omega) \equiv R(\omega) + iX(\omega), \tag{17.2.15}$$

которые будем называть *обобщенным активным сопротивлением* и *обобщенным реактивным сопротивлением*, соответственно.

Легко видеть из формулы (17.2.11), что возмущение $V(t)$ приводит к результирующей мощности рассеяния в системе, равной $V(t)\langle\dot{\hat{Q}}(t)\rangle$. Если пренебречь членами, осциллирующими с частотой 2ω, среднее которых равно нулю, то из (17.2.12) и (17.2.13) получим для средней мощности рассеяния $P(\omega)$ на частоте ω следующее выражение:

$$P(\omega) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[V^*(\omega)I(\omega)].$$

С учетом выражений (17.2.14) и (17.2.15), данная формула переписывается в виде

$$P(\omega) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{|V(\omega)|^2}{Z(\omega)}\right] = \frac{1}{2}\frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2}|V(\omega)|^2. \tag{17.2.16}$$

Отметим, что, несмотря на осциллирующий характер $V(t)$, имеется результирующая мощность рассеяния в случае, когда активное сопротивление $R(\omega) \neq 0$. Это означает, что ток $\langle\dot{\hat{Q}}(t)\rangle$ имеет составляющую, сфазированную с возмущением $V(t)$. С другой стороны, в случае, когда $R(\omega) = 0$, результирующая работа внешнего возмущения над системой равна нулю. Теперь более точно вычислим мощность рассеяния для системы в состоянии теплового равновесия.

17.2.3. Мощность рассеяния

Если система первоначально находится в одном из собственных состояний $|E_n\rangle$ гамильтониана $\hat{H}_0$, то под воздействием возмущения $V(t)$ (17.2.12) она может совершить вынужденный переход в другое собственное состояние $|E_n + \hbar\omega\rangle$ или $|E_n - \hbar\omega\rangle$ (если данные состояния распределены достаточно плотно). Скорость перехода $\mathscr{R}_\pm$ из состояния $|E_n\rangle$ в какое-то из этих состояний, усредненная по нескольким периодам $2\pi/\omega$, может быть вычислена обычным способом по теории возмущений и определяется золотым правилом Ферми в виде

$$\mathscr{R}_\pm = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle E_n \pm \hbar\omega|\hat{H}_1|E_n\rangle|^2\sigma(E_n \pm \hbar\omega), \tag{17.2.17}$$

где $\hat{H}_1$ — энергия взаимодействия $V(t)\hat{Q}$; $\sigma(E)$ — плотность состояний системы с энергией E. Предусмотрим возможность того, что $E_n - \hbar\omega$ может оказаться отрицательной, устанавливая соглашение, что состояние $|E\rangle$ является нулевым, если $E < 0$. В уравнении (17.2.17) $\mathscr{R}_+$ соответствует поглощению энергии возмущения, поскольку система переходит в верхнее энергетическое состояние, тогда как $\mathscr{R}_-$ соответствует испусканию энергии. Умножая разность $\mathscr{R}_+ - \mathscr{R}_-$ на $\hbar\omega$, мы приходим к результирующей скорости поглощения энергии возмущения в начальном состоянии $|E_n\rangle$. С учетом выражения (17.2.12), для $V(t)$ получаем следующий результат:

Результирующая скорость поглощения
энергии возмущения в состоянии $|E_n\rangle$ =

$$= \pi\omega|V(\omega)|^2[|\langle E_n + \hbar\omega|\hat{Q}|E_n\rangle|^2\sigma(E_n + \hbar\omega) - |\langle E_n - \hbar\omega|\hat{Q}|E_n\rangle|^2\sigma(E_n - \hbar\omega)]. \tag{17.2.18}$$

Если эволюция системы начинается из состояния теплового равновесия при температуре T, то различные энергетические собственные состояния $|E_n\rangle$ заселены первоначально с вероятностями $p(E_n)$, которые определяются распределением Больцмана

$$p(E_n) = C\,\mathrm{e}^{-E_n/k_\mathrm{B}T}, \tag{17.2.19}$$

где C — нормировочный множитель. Результирующая скорость поглощения энергии возмущения на частоте ω, или мощность рассеяния $P(\omega)$, получается тогда путем умножения скорости (17.2.18) на $p(E_n)$ и суммирования по всем E_n. Как обычно, можно заменить сумму интегралом, используя плотность состояний, и записать

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \pi\omega|V(\omega)|^2\sum_{E_n} p(E_n)\{|\langle E_n + \hbar\omega|\hat{Q}|E_n\rangle|^2\sigma(E_n + \hbar\omega) - |\langle E_n - \hbar\omega|\hat{Q}|E_n\rangle|^2\sigma(E_n - \hbar\omega)\} \to \\ &\to \pi\omega|V(\omega)|^2\int_0^\infty \sigma(E)p(E)\{|\langle E + \hbar\omega|\hat{Q}|E\rangle|^2\sigma(E + \hbar\omega) - |\langle E - \hbar\omega|\hat{Q}|E\rangle|^2\sigma(E - \hbar\omega)\}\,dE = \\ &= \pi\omega|V(\omega)|^2\int_0^\infty [p(E) - p(E + \hbar\omega)]\sigma(E)\sigma(E + \hbar\omega)|\langle E + \hbar\omega|\hat{Q}|E\rangle|^2\,dE. \end{aligned} \tag{17.2.20}$$

Последняя строка получается из предыдущей с помощью подстановки $E - \hbar\omega \to E$ во втором интеграле. Сравнивая этот результат с выражением (17.2.16) для мощности рассеяния $P(\omega)$, можно сразу определить

$$\frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2} = 2\pi\omega\int_0^\infty [p(E) - p(E + \hbar\omega)]\sigma(E)\sigma(E + \hbar\omega)|\langle E|\hat{Q}|E + \hbar\omega\rangle|^2\,dE,$$

и с помощью (17.2.19) получаем

$$\frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2} = 2\pi\omega[1 - \mathrm{e}^{-\hbar\omega/k_\mathrm{B}T}]\int_0^\infty p(E)\sigma(E)\sigma(E + \hbar\omega)|\langle E|\hat{Q}|E + \hbar\omega\rangle|^2\,dE. \tag{17.2.21}$$

Эта формула выражает соответствующую диссипативную часть полного сопротивления через характеристики системы. Стоит отметить, что возмущение $V(t)$ или $V(\omega)$ отсутствует в этом выражении. Оно было введено только для облегчения вычисления отклика системы, но сейчас можно считать, что оно отсутствует, и система находится в состоянии теплового равновесия.

17.2.4. Флуктуации тока в состоянии теплового равновесия

Поскольку предполагалось, что динамическая переменная $\hat{Q}$ не диагональна в базисе собственных состояний $|E_n\rangle$ гамильтониана $\hat{H}_0$, ясно, что $\hat{Q}$ не имеет определенного значения в состоянии $|E_n\rangle$, но имеет, скорее, некоторое распределение вероятностей со средним значением $\langle E_n|\hat{Q}|E_n\rangle$ и дисперсией $\langle E_n|\hat{Q}^2|E_n\rangle$. То же самое справедливо и для тока $\dot{\hat{Q}}$. Из уравнений движения Гейзенберга для $\hat{Q}$, и из выражения (17.2.11) следует, что

$$\dot{\hat{Q}} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{Q}, \hat{H}] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{Q}, \hat{H}_0], \tag{17.2.22}$$

так что матричный элемент

$$\langle E_n|\dot{\hat{Q}}|E_m\rangle = \frac{1}{i\hbar}(E_m - E_n)\langle E_n|\hat{Q}|E_m\rangle. \tag{17.2.23}$$

Когда $n = m$, данное выражение обращается в нуль, и поэтому, среднее значение $\dot{\hat{Q}}$ равно нулю в состоянии $|E_n\rangle$.

Вычислим теперь дисперсию тока $\dot{\hat{Q}}$ в состоянии $|E_n\rangle$, которая задается выражением

$$\langle E_n|(\Delta\dot{\hat{Q}})^2|E_n\rangle = \langle E_n|\dot{\hat{Q}}^2|E_n\rangle.$$

Если мы вставим единичный оператор в виде $\sum_{E_m}|E_m\rangle\langle E_m|$ между двумя множителями $\dot{\hat{Q}}$ и воспользуемся выражением (17.2.23), то сразу получим соотношение

$$\langle E_n|(\Delta\dot{\hat{Q}})^2|E_n\rangle = \sum_{E_m}\langle E_n|\dot{\hat{Q}}|E_m\rangle\langle E_m|\dot{\hat{Q}}|E_n\rangle =$$

$$= \frac{1}{\hbar^2}\sum_{E_m}(E_m - E_n)^2|\langle E_n|\hat{Q}|E_m\rangle|^2 = \frac{1}{\hbar^2}\left[\sum_{E_m \geqslant E_n} + \sum_{E_m < E_n}\right](E_m - E_n)^2|\langle E_n|\hat{Q}|E_m\rangle|^2.$$

После замены сумм интегралами с использованием, как и раньше, плотности состояний, данное выражение принимает вид

$$\langle E_n|(\Delta\dot{\hat{Q}})^2|E_n\rangle = \frac{1}{\hbar^2}\int_{E_n}^{\infty}\sigma(E)(E - E_n)^2|\langle E_n|\hat{Q}|E\rangle|^2\,dE + \frac{1}{\hbar^2}\int_0^{E_n}\sigma(E)(E - E_n)^2|\langle E_n|\hat{Q}|E\rangle|^2\,dE =$$

$$= \hbar\int_0^{\infty}\omega^2\sigma(E_n + \hbar\omega)|\langle E_m|\hat{Q}|E_n + \hbar\omega\rangle|^2\,d\omega + \hbar\int_0^{E_n/\hbar}\omega^2\sigma(E_n - \hbar\omega)|\langle E_n|\hat{Q}|E_n - \hbar\omega\rangle|^2\,d\omega. \tag{17.2.24}$$

Последнее уравнение получается из предыдущего при помощи подстановок $E - E_n = \hbar\omega$ и $E - E_n = -\hbar\omega$ в первый и второй интегралы, соответственно. Учитывая наше соглашение о том, что $|E\rangle = 0$ при $E < 0$, верхний предел в последнем интеграле можно увеличить до бесконечности.

Уравнение (17.2.24) определяет дисперсию величины $\dot{\hat{Q}}$ в состоянии $|E_n\rangle$. Рассматривая состояние, которое является смесью состояний $|E_n\rangle$ с весами $p(E_n)$, определяемыми выражением (17.2.19), сразу получаем дисперсию величины $\dot{\hat{Q}}$ для системы в тепловом равновесии. Усредняя еще раз по E_n, с заменой суммы на интеграл, находим

$$\langle(\Delta\dot{\hat{Q}})^2\rangle = \int_0^{\infty}\sigma(E)p(E)\langle E|(\Delta\dot{\hat{Q}})^2|E\rangle\,dE =$$

$$= \hbar\int_0^{\infty}dE\,\sigma(E)p(E)\int_0^{\infty}d\omega\,\omega^2[\sigma(E + \hbar\omega)|\langle E|\hat{Q}|E + \hbar\omega\rangle|^2 + \sigma(E - \hbar\omega)|\langle E|\hat{Q}|E - \hbar\omega\rangle|^2] =$$

$$= \hbar\int_0^{\infty}d\omega\,\omega^2[1 + \mathrm{e}^{-\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T}]\int_0^{\infty}dE\,p(E)\sigma(E)\sigma(E + \hbar\omega)\langle E|\hat{Q}|E + \hbar\omega\rangle|^2. \tag{17.2.25}$$

Последняя строка получена из предыдущей путем перестановки интегралов по E и ω, замены $E - \hbar\omega \to E$ во втором интеграле и выражением величины $p(E + \hbar\omega)$ через $p(E)$ при помощи формулы (17.2.19).

17.2.5. Спектральная плотность флуктуаций

Мы выразили полную дисперсию флуктуирующего тока $\dot{\hat{Q}}$ через интеграл по всем частотам. Если переписать выражение (17.2.25) в виде

$$\langle(\Delta\dot{\hat{Q}})^2\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \Phi_{\dot{Q}}(\omega)\,d\omega, \tag{17.2.26}$$

то станет ясно, что неотрицательная функция

$$\Phi_{\dot{Q}}(\omega) \equiv 2\pi\hbar\omega^2[1+\mathrm{e}^{-\hbar\omega/k_\mathrm{B}T}]\int_0^\infty p(E)\sigma(E)\sigma(E+\hbar\omega)|\langle E|\hat{Q}|E+\hbar\omega\rangle|^2\,dE \tag{17.2.27}$$

представляет собой *спектральную плотность* флуктуаций тока. В силу линейности системы, которая отражена в уравнении (17.2.14) и согласно которой изменения тока и изменения возмущения V пропорциональны друг другу, флуктуации тока эквивалентны флуктуациям, создаваемым приложенным возмущением V с нулевым средним, спектральная плотность которых

$$\Phi_V(\omega) = |Z(\omega)|^2\Phi_{\dot{Q}}(\omega) = 2\pi\hbar\omega^2|Z(\omega)|^2[1+\mathrm{e}^{-\hbar\omega/k_\mathrm{B}T}]\int_0^\infty p(E)\sigma(E)\sigma(E+\hbar\omega)|\langle E|\hat{Q}|E+\hbar\omega\rangle|^2\,dE. \tag{17.2.28}$$

Интеграл от $\Phi_V(\omega)$ по всем положительным частотам дает полную среднеквадратичную флуктуацию $\langle(\Delta V)^2\rangle$ внешнего возмущения, которое приводило бы к флуктуации тока $\langle(\Delta\dot{\hat{Q}})^2\rangle$, определяемой выражением (17.2.25).

Если сравнить результат (17.2.28) с формулой (17.2.21), то увидим, что они пропорциональны друг другу и содержат одинаковые интегралы. Поэтому можно соотнести $R(\omega)$ и $\Phi_V(\omega)$ и записать

$$\Phi_V(\omega) = \hbar\omega\left[\frac{1+\mathrm{e}^{-\hbar\omega/k_\mathrm{B}T}}{1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega/k_\mathrm{B}T}}\right]R(\omega). \tag{17.2.29}$$

Множитель в правой части можно переписать в виде

$$\mathscr{E}(\omega,T) \equiv= \frac{1}{2}\hbar\omega\left[\frac{1+\mathrm{e}^{-\hbar\omega/k_\mathrm{B}T}}{1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega/k_\mathrm{B}T}}\right] = \hbar\omega\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_\mathrm{B}T}-1}\right]. \tag{17.2.30}$$

Полученное выражение можно рассматривать как среднюю энергию гармонического осциллятора в состоянии теплового равновесия при температуре T. Это также есть средняя энергия моды теплового равновесного излучения [ср. (13.1.8)], где $(\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_\mathrm{B}T}-1)^{-1}$ есть среднее число заполнения моды и добавлен вклад энергии нулевых колебаний $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

С помощью (17.2.30) можно переписать (17.2.29) в компактной форме

$$\Phi_V(\omega) = 2\mathscr{E}(\omega,T)R(\omega), \tag{17.2.31}$$

которая является обычной формулировкой *флуктуационно-диссипационной теоремы*. Используя соотношение между $\Phi_V(\omega)$ и $\Phi_{\dot{Q}}(\omega)$, можно выразить ее в эквивалентном виде

$$\Phi_{\dot{Q}}(\omega) = 2\mathscr{E}(\omega,T)\frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2}. \tag{17.2.32}$$

Эта теорема устанавливает связь между тепловыми флуктуациями на частоте ω слева и диссипацией системы на частоте ω справа, а пропорциональность $\Phi_V(\omega)$ и $R(\omega)$ выявляет тесную связь между флуктуациями и диссипацией. Когда частота ω достаточно мала, или температура T достаточно высока, так что $\hbar\omega \ll k_\mathrm{B}T$, можно аппроксимировать величину $\mathscr{E}(\omega)$ ее классическим пределом $k_\mathrm{B}T$ и записать

$$\Phi_V(\omega) \approx 2k_\mathrm{B}TR(\omega). \tag{17.2.33}$$

Данное соотношение, как было показано ранее, может быть получено классическим способом (Nyquist, 1928). В другом пределе $\hbar\omega \gg k_B T$, имеем $\mathscr{E}(\omega, T) \approx \frac{1}{2}\hbar\omega$, поэтому

$$\Phi_V(\omega) \approx \hbar\omega R(\omega). \tag{17.2.34}$$

Однако, при вычислении полной флуктуации $\langle(\Delta V)^2\rangle$, когда требуется интегрирование $\Phi_V(\omega)$ по всем положительным частотам, необходимо использовать общее выражение (17.2.30) для $\mathscr{E}(\omega, T)$. Если желательно в спектральной плотности учитывать как положительные, так и отрицательные частоты, так чтобы

$$\langle(\Delta V)^2\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_V(\omega)\, d\omega,$$

то переписываем (17.2.31) в виде

$$\Phi_V(\omega) = \mathscr{E}(\omega, T) R(\omega), \tag{17.2.35}$$

исходя из предположения, что $\mathscr{E}(-\omega, T) = \mathscr{E}(\omega, T)$, $R(-\omega) = R(\omega)$.

Рассмотрим два примера, иллюстрирующие полезность флуктуационно-диссипационной теоремы.

17.2.6. Броуновское движение частицы

Маленькая частица, подвешенная в жидкости, испытывает воздействие флуктуационной силы F, что является следствием многочисленных столкновений с молекулами. Эти столкновения вызывают беспорядочное движение частицы, называемое *броуновским движением*. В то же время, повторяющиеся удары молекул оказывают сопротивление движению частицы под действием некоторой внешней силы, такой как сила тяжести. Вычислим теперь спектральную плотность флуктуационной силы.

Если в нашем формализме отождествить возмущение $V(t)$ с силой F, то станет ясно, что динамическая переменная Q в выражении (17.2.11) должна отождествляться со смещением x при одномерном движении. Тогда роль тока $\dot{Q}$ выполняет скорость частицы v, и в области низких частот обобщенный закон Ома (17.2.14) может быть записан в виде

$$F = Rv, \tag{17.2.36}$$

где обобщенное полное сопротивление является чисто активным сопротивлением и действительной величиной. Уравнение (17.2.36) есть не что иное, как закон Стокса, описывающий движение частицы в вязкой жидкости. Для сферической частицы радиуса a сопротивление R имеет вид

$$R = 6\pi a\eta, \tag{17.2.37}$$

где η — коэффициент вязкости. Флуктуационно-диссипационная теорема позволяет сразу записать спектральную плотность $\Phi_F(\omega)$ флуктуаций силы. Из (17.2.31) и (17.2.37) в области низких частот имеем

$$\Phi_F(\omega) = 2k_B T R = 12\pi a\eta k_B T, \tag{17.2.38}$$

и из (17.2.32) получаем для спектральной плотности $\Phi_V(\omega)$ флуктуаций скорости следующее выражение:

$$\Phi_V(\omega) = \frac{2k_B T}{R} = \frac{k_B T}{3\pi a\eta}. \tag{17.2.39}$$

Конечно, спектральные плотности не могут оставаться постоянными на всех частотах. В области высоких частот следует ожидать фазовые сдвиги.

17.2.7. Флуктуации поля в излучении черного тела

Рассмотрим поле излучения черного тела в состоянии теплового равновесия при температуре T. Вследствие взаимодействия с тепловым резервуаром, электрическое поле $\mathbf{E}$ флуктуирует во времени. Наша цель заключается в том, чтобы вычислить спектральную плотность $\Phi_E(\omega)$ этих флуктуаций. Для того, чтобы воспользоваться предшествующими результатами, удобно рассмотреть точечный электрический заряд e массы m, испытывающий воздействие флуктуационной силы $e\mathbf{E}$ со спектральной плотностью $e^2\Phi_E(\omega)$.

Если отождествить возмущение $V(t)$ в выражении (17.2.11) с x-компонентой силы $eE_x(t)$, действующей на заряд, а переменную Q со смещением частицы $x(t)$ в том же направлении, то ток $\dot{Q}$ отождествляется со скоростью $v_x(t)$. Как обычно, предположим, что

$$eE_x(t) = \mathrm{Re}\,[e\widetilde{E}_x(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}], \tag{17.2.40}$$

и что скорость линейно зависит от силы, поэтому

$$v_x(t) = \mathrm{Re}\,[\widetilde{v}_x(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}]. \tag{17.2.41}$$

Чтобы в данном случае определить обобщенное полное сопротивление, будем исходить из уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле

$$eE_x(t) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{v}_x(t) = m\dot{v}_x, \tag{17.2.42}$$

в котором второе слагаемое слева возникает вследствие радиационного затухания. Подстановка выражений (17.2.40) и (17.2.41) в уравнение (17.2.42) дает

$$e\widetilde{E}_x(\omega) = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\omega^2 - im\omega\right]\widetilde{v}_x(\omega),$$

откуда обобщенное полное сопротивление сразу определяется как множитель перед $v_x(\omega)$. Его активная часть равна

$$R(\omega) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2\omega^2}{3c^3}. \tag{17.2.43}$$

Теперь для получения спектральной плотности x-компоненты флуктуационной силы, действующей на заряд, можно применить флуктуационно-диссипационную теорему в виде (17.2.31). В результате получим

$$e^2\Phi_{E_x}(\omega) = 2\mathscr{E}(\omega, T)R(\omega) = 2\hbar\omega\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_\mathrm{B}T} - 1}\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2\omega^2}{c^3}.$$

Если добавить такие же выражения для флуктуаций вдоль y- и z-направлений, то придем к следующему результату для спектральной плотности полного электрического поля:

$$\Phi_E(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi\varepsilon c^3}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_\mathrm{B}T} - 1}\right]. \tag{17.2.44}$$

Следует отметить, что в этом выражении исчезли все характеристики заряженной частицы. Вклад энергии нулевых колебаний, связанный с первым слагаемым в правой части, приводит, как мы уже видели в главе 10, к расходимости при интегрировании по всем частотам. Данное слагаемое описывает вакуумные флуктуации квантового электромагнитного поля. Второе слагаемое, умноженное на ε_0 и проинтегрированное по частотам, дает обычное выражение для плотности энергии излучения черного тела [ср. (13.1.16)].

Эти простые примеры показывают, насколько легко из флуктуационно-диссипационной теоремы можно получить спектральные плотности различных флуктуирующих величин, если определен эквивалент обобщенного полного сопротивления.

17.3. Основные кинетические уравнения

При изучении временно́й эволюции взаимодействующих квантовых систем в картине Шредингера основная задача состоит в определении временно́го развития вектора состояния или оператора плотности интересующей нас системы. Даже решение этой задачи не позволяет вычислить многовременну́ю функцию корреляции без дополнительной информации о функции Грина системы, хотя эту проблему иногда можно обойти при помощи флуктуационно-диссипационной теоремы. Тем не менее, уравнение движения,

как для полного, так и для приведенного оператора плотности, должно иметь решение в виде функции от времени. Такое уравнение называется *основным кинетическим уравнением*, хотя такое же название иногда применяют для уравнений движения различных вероятностных распределений. За многие годы был получен целый ряд мощных и достаточно общих основных кинетических уравнений (Pauli 1928; Van Hove 1955, 1957, 1962; Zwanzig 1961; Montroll 1961; Prigogine 1962; Agarwal 1973, 1974; Oppenheim, Shuler and Weiss 1977). Далее мы рассмотрим только две специальные формы основного кинетического уравнения и покажем, как их можно вывести.

17.3.1. Основное кинетическое уравнение Паули

Одна из первых форм основного кинетического уравнения была получена Паули (Pauli 1928, см. также Van Hove 1955, 1957, 1962). Мы выведем его сначала для классической системы, а затем рассмотрим, при каких условиях квантовая система удовлетворяет такому же уравнению движения.

Рассмотрим состояние классической системы или дискретного случайного процесса (ср. гл. 2), характеризуемое некоторым целым числом n $(0, 1, 2, \ldots)$, так что значение n появляется с вероятностью $p(n,t)$. Если скорость перехода $\mathscr{A}_{mn}$ из состояния n в состояние m зависит только от n и m, так что процесс является марковским, то скорость изменения $p(n,t)$ должна равняться разности между скоростью возрастания населенности состояния n, вследствие переходов с других состояний, и скоростью уменьшения его населенности, вследствие переходов в другие состояния. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t}p(n,t) = \sum_{m\neq n}\mathscr{A}_{nm}p(m,t) - \sum_{m\neq n}\mathscr{A}_{mn}p(n,t). \tag{17.3.1}$$

Это уравнение есть основное кинетическое уравнение Паули для вероятности $p(n,t)$ [ср. (2.7.11)] и имеет форму скоростного уравнения. В принципе, оно может быть решено относительно $p(n,t)$, если известны все скорости переходов $\mathscr{A}_{nm}$. В частном случае, когда система подчиняется *принципу детального равновесия*, получаем стационарное решение

$$\mathscr{A}_{nm}p(m) = \mathscr{A}_{mn}p(n), \tag{17.3.2}$$

которое можно рассматривать как рекуррентное соотношение, позволяющее вычислить все $p(n)$, скажем, через $p(0)$.

Когда мы рассматриваем квантовую систему, временна́я эволюция которой определяется квантовой механикой, мы обнаруживаем, что уравнение движения типа (17.3.1) выполняется только при определенных обстоятельствах, несмотря на его, казалось бы, универсальный характер. Рассмотрим полное ортонормированное множество состояний $|\phi_n\rangle$, которые являются собственными состояниями невозмущенного гамильтониана $\hat{H}_0$. Пусть $\hat{\rho}(t)$ — оператор плотности системы в момент времени t в картине взаимодействия. При воздействии некоторого возмущения $\hat{H}_1(t)$ оператор плотности изменяется во времени согласно уравнению

$$\hat{\rho}(t+\Delta t) = \hat{U}(t+\Delta t, t)\hat{\rho}(t)\hat{U}^{\dagger}(t+\Delta t, t), \tag{17.3.3}$$

где унитарный оператор эволюции $\hat{U}(t+\Delta t, t)$ для бесконечно малого интервала времени Δt задается формулой

$$\hat{U}(t+\Delta t, t) = \exp(-i\hat{H}_1\Delta t/\hbar). \tag{17.3.4}$$

Вероятность перехода из состояния $|m\rangle$ в момент времени t в состояние $|n\rangle$ в момент $t+\Delta t$ определяется соотношением

$$\mathscr{P}(n, t+\Delta t|m,t) = |\langle n|\hat{U}(t+\Delta t,t)|m\rangle|^2 \equiv |U_{mn}|^2, \tag{17.3.5}$$

с условиями нормировки

$$\sum_n |U_{nm}|^2 = 1 = \sum_m |U_{nm}|^2. \tag{17.3.6}$$

Хорошо известно, что если энергетический спектр является непрерывным или плотно распределенным, то вероятность перехода из состояния с энергией E_m в состояние с энергией E_n пропорциональна Δt и определяется золотым правилом Ферми

$$\mathscr{P}(n, t+\Delta t|m,t) = |U_{nm}|^2 \approx \frac{2\pi}{\hbar}\Delta t\delta(E_n - E_m)|\langle\phi_n|\hat{H}_1|\phi_m\rangle|^2.$$

Поэтому скорость перехода $\mathscr{A}_{nm}$ при $n \neq m$ равна

$$\mathscr{A}_{nm} = \frac{\mathscr{P}(n, t+\Delta t|m,t)}{\Delta t} = \frac{|U_{nm}|^2}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\hbar}\delta(E_n - E_m)|\langle\phi_n|\hat{H}_{\mathrm{I}}|\phi_m\rangle|^2. \tag{17.3.7}$$

Теперь воспользуемся этими результатами для вычисления скорости изменения вероятности $p(n,t)$, записывая

$$\frac{\partial p(n,t)}{\partial t} = \frac{\partial \rho_{nn}(t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(n,t+\Delta t) - p(n,t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\langle\phi_n|\hat{\rho}(t+\Delta t) - \hat{\rho}(t)|\phi_n\rangle}{\Delta t}.$$

Из уравнения (17.3.3) получаем

$$\frac{\partial \rho_{nn}(t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{\langle\phi_n|\hat{U}(t+\Delta t,t)\hat{\rho}(t)\hat{U}^{\dagger}(t+\Delta t,t)|\phi_n\rangle - \rho_{nn}(t)\} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\sum_m\sum_r[U_{nm}\rho_{mr}(t)U^*_{rn}] - \rho_{nn}(t)\right\}, \tag{17.3.8}$$

где последняя строка получается из предыдущей после вставки единичных операторов $\sum_m|\phi_m\rangle\langle\phi_m|$ и $\sum_r|\phi_r\rangle\langle\phi_r|$ между $\hat{U}$ и $\hat{\rho}(t)$ и между $\hat{\rho}(t)$ и $\hat{U}^{\dagger}$, соответственно.

Это основное уравнение движения для $\rho_{nn}(t)$. В общем случае оно не является скоростным уравнением и не сводится к уравнению (17.3.1) без дальнейших допущений. Вклады осциллирующих слагаемых с $m \neq r$ в общем случае менее значительны, чем вклады слагаемых с $m = r$, но, строго говоря, их нельзя отбрасывать. Однако если принять так называемую *гипотезу случайных фаз* и считать оператор плотности $\hat{\rho}(t)$ в момент времени t диагональным в базисе $|\phi_n\rangle$, так что $\rho_{mr}(t) = \delta_{mr}\rho_{mm}(t)$, то с помощью уравнения (17.3.6) получим

$$\frac{\partial p(n,t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\sum_{m\neq n}[|U_{nm}|^2\rho_{mm}(t) - |U_{mn}|^2\rho_{nn}(t)], \tag{17.3.8а}$$

и это уравнение, с учетом (17.3.7), становится тождественным уравнению (17.3.1). Таким образом, квантовая система удовлетворяет основному кинетическому уравнению Паули только тогда, когда оператор плотности $\hat{\rho}(t)$ диагонален в базисе $|\phi_n\rangle$. Причиной этого, конечно, является то, что система не обязательно находится в одном из состояний $|\phi_n\rangle$ с вероятностью $p(n,t)$, если $\hat{\rho}(t)$ не является диагональным. В этом случае она может находиться в суперпозиционном состоянии. Действительно, даже если оператор плотности $\hat{\rho}(t)$ диагонален в момент времени t, он не может оставаться строго диагональным в последующие моменты времени при наличии взаимодействия $\hat{H}_{\mathrm{I}}$. Таким образом, гипотеза случайных фаз и основное кинетическое уравнение Паули справедливы только в некотором ограниченном смысле, который можно уточнить (Van Hove, 1955, 1957, 1962; Zwanzig, 1961; Montroll, 1961; Prigogine, 1962; Agarwal, 1973, 1974). Тем не менее, при рассмотрении некоторых задач данное уравнение оказывается полезным.

17.3.2. Обобщенное основное кинетическое уравнение Цванцига

Помимо основного кинетического уравнения Паули, справедливого в ограниченных случаях и описывающего только поведение диагональных элементов оператора плотности $\hat{\rho}(t)$, были получены более общие уравнения движения для $\hat{\rho}(t)$. Мы кратко опишем интересный метод, развитый Цванцигом (Zwanzig, 1961), в котором используются проекционные операторы, проецирующие оператор плотности на ту его часть, которая представляет для нас интерес. Далее будем следовать выводу, предложенному Агарвалом (Agarwal, 1973).

Будем исходить из общего уравнения движения Шредингера для оператора плотности $\hat{\rho}(t)$ системы

$$\frac{\partial\hat{\rho}(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}(t)] = -i\mathscr{L}\hat{\rho}(t), \tag{17.3.9}$$

где $\mathscr{L} \equiv (1/\hbar)[\hat{H},\ldots]$ — оператор Лиувилля системы. Преимущество лиувиллевской формы состоит в том, что уравнение движения (17.3.9) применимо также и к классической системе, имеющей некоторую

плотность распределения $\rho(t)$. В картине взаимодействия оператор $\hat{H}$ в (17.3.9) можно заменить гамильтонианом взаимодействия $\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)$, но тогда оператор Лиувилля $\mathscr{L}(t)$ становится зависящим от времени. Введем независящий от времени проекционный оператор $\hat{P}$:

$$\hat{P}^2 = \hat{P}, \tag{17.3.10}$$

который выбирается так, чтобы проектировать на наиболее подходящую или интересующую нас часть оператора $\hat{\rho}(t)$. Тогда $(1-\hat{P})\hat{\rho}(t)$ представляет собой неинтересную для нас часть оператора плотности и, очевидно,

$$\hat{\rho}(t) = \hat{P}\hat{\rho}(t) + (1-\hat{P})\hat{\rho}(t). \tag{17.3.11}$$

Оператор $\hat{P}$ может иметь различные формы. Например, если нас интересует диагональная часть $\hat{\rho}$ в некотором представлении $|\phi_n\rangle$, то можно выбрать

$$\hat{P}\ldots = \sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| \operatorname{Tr}[|\phi_n\rangle\langle\phi_n|\ldots]. \tag{17.3.12а}$$

Тогда, если $\hat{\rho} = \sum_n \sum_m \rho_{nm}|\phi_n\rangle\langle\phi_m|$, то

$$\hat{P}\hat{\rho} = \sum_n \rho_{nn}|\phi_n\rangle\langle\phi_n|. \tag{17.3.12б}$$

С другой стороны, если мы рассматриваем квантовую систему S, взаимодействующую с резервуаром R, и если нас интересует, главным образом, система S, то можно сосредоточиться на приведенном операторе плотности $\hat{\rho}_S(t) = \operatorname{Tr}_R \hat{\rho}(t)$, выбирая

$$\hat{P}\ldots = \hat{\rho}_R(0)\operatorname{Tr}_R \ldots. \tag{17.3.13}$$

Умножая обе части уравнения (17.3.9) на $\hat{P}$ слева и подставляя вместо $\hat{\rho}(t)$ в правой части выражение (17.3.11), получаем

$$\hat{P}\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -i\hat{P}\mathscr{L}(t)\hat{P}\hat{\rho}(t) - i\hat{P}\mathscr{L}(t)(1-\hat{P})\hat{\rho}(t). \tag{17.3.14}$$

Таким же образом, после умножения (17.3.9) на $(1-\hat{P})$ слева получим

$$(1-\hat{P})\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -i(1-\hat{P})\mathscr{L}(t)\hat{P}\hat{\rho}(t) - i(1-\hat{P})\mathscr{L}(t)(1-\hat{P})\hat{\rho}(t). \tag{17.3.15}$$

Теперь формально проинтегрируем дифференциальное уравнение первого порядка (17.3.15) и решим относительно $(1-\hat{P})\hat{\rho}(t)$. Это даст следующий результат:

$$(1-\hat{P})\hat{\rho}(t) = \exp\left[-i(1-\hat{P})\int_0^t \mathscr{L}(t')\,dt'\right](1-\hat{P})\hat{\rho}(0) - \\ - i\int_0^t \exp\left[-i(1-\hat{P})\int_\tau^t \mathscr{L}(t')\,dt'\right](1-\hat{P})\mathscr{L}(\tau)\hat{P}\hat{\rho}(\tau)\,d\tau,$$

или, после замены $t-\tau=\tau'$,

$$(1-\hat{P})\hat{\rho}(t) = \exp\left[-i(1-\hat{P})\int_0^t \mathscr{L}(t')\,dt'\right](1-\hat{P})\hat{\rho}(0) - \\ - i\int_0^t \exp\left[-i(1-\hat{P})\int_{t-\tau'}^t \mathscr{L}(t')\,dt'\right](1-\hat{P})\mathscr{L}(t-\tau')\hat{P}\hat{\rho}(t-\tau')\,d\tau'.$$

Подставляя $(1-\hat{P})\hat{\rho}(t)$ в уравнение (17.3.14) получим

$$\hat{P}\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -i\hat{P}\mathscr{L}(t)\hat{P}\hat{\rho}(t) - i\hat{P}\mathscr{L}(t)\exp\left[-i(1-\hat{P})\int_0^t \mathscr{L}(t')\,dt'\right](1-\hat{P})\hat{\rho}(0) - \\ - \hat{P}\mathscr{L}(t)\int_0^t \exp\left[-i(1-\hat{P})\int_\tau^t \mathscr{L}(t')\,dt'\right](1-\hat{P})\mathscr{L}(\tau)\hat{P}\hat{\rho}(\tau)\,d\tau,$$

или, полагая

$$\exp\left[-i(1-\hat{P})\int_\tau^t \mathscr{L}(t')dt'\right] \equiv \hat{U}(t,\tau),$$

$$\hat{P}\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -i\hat{P}\mathscr{L}(t)\hat{P}\hat{\rho}(t) - i\hat{P}\mathscr{L}(t)\hat{U}(t,0)(1-\hat{P})\hat{\rho}(0) - \hat{P}\mathscr{L}(t)\int_0^t \hat{U}(t,\tau)(1-\hat{P})\mathscr{L}(\tau)\hat{P}\hat{\rho}(\tau)\,d\tau. \qquad (17.3.16)$$

Это и есть *обобщенное основное кинетическое уравнение Цванцига*. В данной форме оно является точным, но малопригодным для практического использования. Его полезность основана частично на том, что оно является уравнением движения для $\hat{P}\hat{\rho}(t)$, в котором "не относящаяся к делу" часть $(1-\hat{P})\hat{\rho}(t)$ присутствует только в начальный момент времени $t=0$. Иногда начальные условия таковы, что $(1-\hat{P})\hat{\rho}(0)=0$, и второе слагаемое в правой части уравнения исчезает.

17.3.3. Применение к кинетическому уравнению Паули

Кинетическое уравнение Паули (17.3.1) можно вывести из более общего уравнения (17.3.16), однако данная задача не является тривиальной, и необходимо ввести некоторые ограничения и приближения. Для уравнения Паули нам необходимы диагональные элементы оператора плотности $\hat{\rho}(t)$, так что $\hat{P}$ выберем в виде (17.3.12а). Если в начальном состоянии оператор плотности диагонален, то

$$(1-\hat{P})\hat{\rho}(0) = 0, \qquad (17.3.17)$$

и второе слагаемое в правой части (17.3.16) равно нулю. Вспоминая, что $\mathscr{L}\ldots \equiv (1/\hbar)[\hat{H}_0+\hat{H}_{\rm I},\ldots]$ и считая оператор $\hat{H}_{\rm I}$ недиагональным в базисе состояний $|\phi_n\rangle$ и, для простоты, не зависящим от времени, а также используя выражение (17.3.12б), легко показать, что

$$\hat{P}\mathscr{L}\hat{P}\hat{\rho}(t) = 0, \qquad (17.3.18)$$

так что первое слагаемое в правой части уравнения (17.3.16) также равно нулю. По тем же причинам

$$\mathscr{L}\hat{P}\hat{\rho}(t) = (1/\hbar)[\hat{H}_{\rm I},\hat{P}\hat{\rho}(t)] \equiv \mathscr{L}_{\rm I}\hat{P}\hat{\rho}(t). \qquad (17.3.19)$$

Таким образом, уравнение (17.3.16) сводится к следующему:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\hat{P}\hat{\rho}(t)] = -\int_0^t \hat{K}(\tau)[\hat{P}\hat{\rho}(t-\tau)]\,d\tau, \qquad (17.3.20)$$

где оператор $\hat{K}(\tau)$ задается формулой

$$\hat{K}(t) \equiv \hat{P}\mathscr{L}_{\rm I}(t)\exp[-i(1-\hat{P})\mathscr{L}(\tau)](1-\hat{P})\mathscr{L}_{\rm I}(t-\tau). \qquad (17.3.21)$$

Представляя операторы в уравнении (17.3.20) в базисе $|\phi_n\rangle$ и сравнивая коэффициенты при $|\phi_n\rangle\langle\phi_n|$ в обеих частях уравнения находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{nn}(t) = -\sum_m \int_0^t k_{nm}(\tau)\rho_{mm}(t-\tau)\,d\tau, \qquad (17.3.22)$$

где ядро $k_{nm}(\tau)$ определяется соотношением

$$k_{nm}(\tau) \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{\hbar^2}\langle\phi_n|\left[\hat{H}_{\rm I}, \exp\left\{\frac{-i\tau}{\hbar}[\hat{H}_0 + (1-\hat{P})\hat{H}_{\rm I}(1-\hat{P})]\right\}[\hat{H}_{\rm I}, |\phi_m\rangle\langle\phi_m|]\exp\left\{\frac{i\tau}{\hbar}[\hat{H}_0 + (1-\hat{P})\hat{H}_{\rm I}(1-\hat{P})]\right\}\right]|\phi_n\rangle.$$

Ядро $k_{nm}(\tau)$ имеет свойство

$$\sum_m k_{nm}(\tau) = 0, \tag{17.3.23}$$

которое непосредственно следует из того факта, что

$$\left[\hat{H}_{\rm I}, \sum_m |\phi_m\rangle\langle\phi_m|\right] = 0,$$

ибо оператор $\hat{H}_{\rm I}$ недиагональный. Используя (17.3.23), можно формально переписать (17.3.22) в виде

$$\frac{\partial\rho_{nn}(t)}{\partial t} = \sum_{m\neq n}\int_0^t [k_{nm}(\tau)\rho_{nn}(t-\tau) - k_{nm}(\tau)\rho_{mm}(t-\tau)]\,d\tau, \tag{17.3.24}$$

что похоже на уравнение Паули (17.3.1), если бы не интеграл по τ. Однако в случае, когда взаимодействие $\hat{H}_{\rm I}$ достаточно слабое, а время τ и число степеней свободы системы достаточно большие, величину $\rho_{nn}(t-\tau)$ под знаком интеграла можно заменить на $\rho_{nn}(t)$, а верхний предел интегрирования устремить к бесконечности. Точные условия этого сформулированы в работах (Van Hove, 1955, 1957, 1962; Zwanzig, 1961; Montroll, 1961, Prigogine, 1962; Agarwal, 1973, 1974). Уравнение (17.3.24) сводится тогда к уравнению (17.3.1). Данное приближение означает, грубо говоря, что эффекты памяти имеют место лишь для коротких интервалов времени, так что систему можно считать марковской. Из этого краткого обсуждения должно быть ясно, что основное кинетическое уравнение Паули имеет силу лишь в довольно специфических случаях, несмотря на то, что оно кажется всеобщим, когда формулируется через классические величины. С другой стороны, кинетическое уравнение Цванцига (17.3.16) имеет очень общий характер, но оно настолько сложное, что необходимо вводить некоторые приближения для его практического использования.

17.3.4. Применение к задаче Дике

В качестве следующего примера рассмотрим приложение уравнения (17.3.16) к задаче Дике, которая рассматривалась в главе 16, то есть к задаче взаимодействия группы N близко расположенных, одинаковых двухуровневых атомов с электромагнитным полем (Agarwal, 1973, 1974). Перейдем сразу в картину взаимодействия и предположим, что атомы находятся в начале системы координат. Для простоты с самого начала воспользуемся приближением вращающейся волны и опустим члены, осциллирующие на удвоенной частоте, так что гамильтониан взаимодействия запишется в виде [ср.(15.4.3)]

$$\hat{H}_{\rm I}(t) = \sum_{\mathbf{k}s}\hbar g_{\mathbf{k}s}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\,{\rm e}^{{\rm i}(\omega-\omega_0)t} + \text{э.с.}, \tag{17.3.25}$$

где $\hat{\mathscr{R}}^{(-)}$ — коллективный атомный понижающий оператор [см. (16.5.2)], а константа связи $g_{\mathbf{k}s}$ определяется формулой

$$g_{\mathbf{k}s} = \frac{i\omega_0}{\hbar L^{3/2}}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}\right)^{1/2}\boldsymbol{\mu}_{12}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s}. \tag{17.3.26}$$

Все обозначения имеют тот же смысл, что и в главе 15. Поскольку мы с самого начала воспользовались приближением вращающейся волны, наш расчет будет правильно описывать динамику системы, но не даст правильной величины частотных сдвигов.

Пусть начальное состояние связанной системы атомов и поля представляется в виде прямого произведения операторов плотности, причем поле находится в вакуумном состоянии

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_{\mathrm{A}}(0) \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0), \quad \hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0) = |\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}|. \tag{17.3.27}$$

Далее мы сосредоточим свое внимание на атомной системе A и отождествим «резервуар» с полем F, так что проекционный оператор $\hat{P}$ будем задавать следующим образом:

$$\hat{P}\ldots = \hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0)\,\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}}\ldots. \tag{17.3.28}$$

В этих условиях слагаемое $\hat{P}\mathscr{L}(t)\hat{P}\hat{\rho}(t)$ в уравнении (17.3.16) определяется формулой

$$\hat{P}\mathscr{L}(t)\hat{P}\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0)\,\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}}\frac{1}{\hbar}[\hat{H}_{\mathrm{I}}(t), \hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0)\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)] =$$

$$= \hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0)\left[\sum_{\mathbf{k}s} g_{\mathbf{k}s}\langle\mathrm{vac}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}|\mathrm{vac}\rangle\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}\,\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t) - \text{э.с.}\right] = 0, \tag{17.3.29}$$

поскольку

$$\langle\mathrm{vac}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}|\mathrm{vac}\rangle = 0 = \langle\mathrm{vac}|\hat{a}_{\mathbf{k}s}|\mathrm{vac}\rangle. \tag{17.3.30}$$

Более того,

$$(1-\hat{P})\hat{\rho}(0) = [1 - \hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0)\,\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}}]\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(0)\hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0) = 0, \tag{17.3.31}$$

так что и первое и второе слагаемые в правой части уравнения (17.3.16) равны нулю.

С помощью соотношения (17.3.29) и приближения $\hat{U}(t,\tau) \approx 1$ под знаком интеграла, которое иногда называют борновским приближением, уравнение (17.3.16) сводится к следующему:

$$\hat{P}\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -\hat{P}\mathscr{L}(t)\int_0^t \mathscr{L}(\tau)\hat{P}\hat{\rho}(\tau)\,d\tau,$$

и после подстановки $\hat{P}$ из (17.3.28) имеем

$$\hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0)\frac{\partial\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)}{\partial t} = -\hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0)\,\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}}\,\mathscr{L}(t)\int_0^t \mathscr{L}(\tau)\hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0)\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(\tau)\,d\tau.$$

Замена $\tau = t - \tau'$ в последнем интеграле дает

$$\frac{\partial\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)}{\partial t} = -\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}}\,\mathscr{L}(t)\int_0^t \mathscr{L}(t-\tau)\hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0)\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t-\tau)\,d\tau. \tag{17.3.32}$$

Сделаем дополнительное приближение, заменив оператор $\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t-\tau)$ под знаком интеграла его значением в наиболее поздний момент времени $\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)$, что часто называют марковским приближением или приближением кратковременно́й памяти [ср. также вывод формулы (15.5.20)]. Тогда окончательно получим

$$\frac{\partial\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)}{\partial t} = -\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}}\,\mathscr{L}(t)\int_0^t \mathscr{L}(t-\tau)\hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0)\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)\,d\tau = -\frac{1}{\hbar^2}\,\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}}\int_0^t [\hat{H}_{\mathrm{I}}(t), [\hat{H}_{\mathrm{I}}(t-\tau), \hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0)\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)]]\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\hbar^2}\,\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}}\int_0^{\infty} [\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t-\tau)\hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0)\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t) - \hat{H}_{\mathrm{I}}(t)\hat{\rho}_{\mathrm{F}}(0)\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t-\tau)]\,d\tau + \text{э.с.} \tag{17.3.33}$$

После подстановки $\hat{H}_{\mathrm{I}}$ из (17.3.25) мы обнаружим, что каждое слагаемое под интегралом разбивается на сумму четырех слагаемых, содержащих величины $\langle\mathrm{vac}|\hat{a}_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}|\mathrm{vac}\rangle$, $\langle\mathrm{vac}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'s'}|\mathrm{vac}\rangle$, $\langle\mathrm{vac}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}s}\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}|\mathrm{vac}\rangle$ и $\langle\mathrm{vac}|\hat{a}_{\mathbf{k}s}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'s'}|\mathrm{vac}\rangle$. Из них не равно нулю только последнее, а именно,

$$\langle\mathrm{vac}|\hat{a}_{\mathbf{k}s}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'s'}|\mathrm{vac}\rangle = \delta^3_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'},$$

так что получаем уравнение

$$\frac{\partial\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)}{\partial t} = -\int_0^t \sum_{\mathbf{k},s} |g_{\mathbf{k}s}|^2 [\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0-\omega)\tau}\hat{\mathscr{R}}^{(+)}\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)\,d\tau + \text{э.с.} - 2\cos(\omega-\omega_0)\tau\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)\hat{\mathscr{R}}^{(+)}]\,d\tau. \quad (17.3.34)$$

В пределе $L\to\infty$ сумма по $\mathbf{k}$, как обычно, превращается в интеграл. Фактически, вычисление выражения $\int_0^t \sum_{\mathbf{k},s}|g_{\mathbf{k}s}|^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0-\omega)\tau}d\tau$ очень похоже на то, которое было сделано в гл. 15 при выводе формулы (15.5.21), если не считать того, что вследствие приближения вращающейся волны здесь отсутствуют слагаемые, осциллирующие на удвоенной частоте. Полагая, что $t\gg 1/\omega_0$, запишем, как и раньше,

$$\int_0^t \sum_{\mathbf{k},s} |g_{\mathbf{k}s}|^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0-\omega)\tau}\,d\tau \equiv \beta + i\gamma, \quad (17.3.35)$$

где β — половина коэффициента Эйнштейна A; γ — частотный сдвиг. Тогда (17.3.34) принимает вид

$$\frac{\partial\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)}{\partial t} = \beta[-\hat{\mathscr{R}}^{(+)}\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t) + 2\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)\hat{\mathscr{R}}^{(+)} - \hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)\hat{\mathscr{R}}^{(+)}\hat{\mathscr{R}}^{(-)}] - i\gamma[\hat{\mathscr{R}}^{(+)}\hat{\mathscr{R}}^{(-)},\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)]. \quad (17.3.36)$$

Уравнение (17.3.36) и есть то самое основное кинетическое уравнение, которое описывает спонтанное излучение коллективной атомной системы. Можно показать, что в присутствии классического поля, амплитуда которого характеризуется частотой Раби Ω (ср. разд. 15.3), в правой части уравнения (17.3.36) появится дополнительное слагаемое $-i\Omega[\hat{\mathscr{R}}_1,\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t)]$. Такое уравнение использовалось для исследования резонансной флуоресценции ансамбля атомов (Bonifacio, Schwendimann and Haake, 1971; Agarwal, Brown, Narducci and Vetri, 1977; Agarwal, Feng, Narducci, Gilmore and Tuft 1979) и оптической бистабильности (Carmichael and Walls, 1977; Narducci, Gilmore, Feng and Agarwal, 1978).

В качестве простого применения уравнения (17.3.36) вычислим с его помощью скорость потери энергии атомной системой. Поскольку скорость потери энергии пропорциональна скорости изменения $\langle\hat{\mathscr{R}}_3\rangle$, умножим каждое слагаемое в (17.3.36) на $\hat{\mathscr{R}}_3$ справа и возьмем след. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{\mathscr{R}}_3\rangle = \beta[-\langle\hat{\mathscr{R}}_3\hat{\mathscr{R}}^{(+)}\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\rangle + 2\langle\hat{\mathscr{R}}^{(+)}\hat{\mathscr{R}}_3\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\rangle - \langle\hat{\mathscr{R}}^{(+)}\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\hat{\mathscr{R}}_3\rangle] - i\gamma[\langle\hat{\mathscr{R}}_3\hat{\mathscr{R}}^{(+)}\hat{R}^{(-)}\rangle - \langle\hat{\mathscr{R}}^{(+)}\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\hat{\mathscr{R}}_3\rangle]. \quad (17.3.37)$$

Теперь воспользуемся соотношениями

$$[\hat{\mathscr{R}}^{(+)},\hat{\mathscr{R}}_3] = -\hat{\mathscr{R}}^{(+)}, \quad (17.3.38)$$

$$\hat{\mathscr{R}}^{(+)}\hat{\mathscr{R}}^{(-)} = \hat{\mathscr{R}}_3 + \frac{1}{2}N + \sum_{i\neq j}^{N}\sum^{N}\hat{b}^{(i)\dagger}\hat{b}^{(j)}, \quad (17.3.39)$$

которые следуют из определения коллективных операторов [см. (16.5.2)] и соотношением

$$[\hat{\mathscr{R}}^{(+)}\hat{\mathscr{R}}^{(-)},\hat{\mathscr{R}}_3] = \sum_{i\neq j}^{N}\sum^{N}[\hat{b}^{(i)\dagger}\hat{b}^{(j)},\hat{\mathscr{R}}_3] = \sum_{i\neq j}^{N}\sum^{N}[\hat{b}^{(i)\dagger}\hat{b}^{(j)} - \hat{b}^{(i)\dagger}\hat{b}^{(j)}] = 0, \quad (17.3.40)$$

которое следует из формулы (17.3.39). Последний результат позволяет нам упростить (17.3.37) и записать

$$\frac{\partial\langle\hat{\mathscr{R}}_3\rangle}{\partial t} = 2\beta[-\langle\hat{\mathscr{R}}_3\hat{\mathscr{R}}^{(+)}\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\rangle + \langle\hat{\mathscr{R}}^{(+)}\hat{R}_3\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\rangle].$$

Учитывая соотношение (17.3.38), приходим к уравнению

$$\frac{\partial\langle\hat{\mathscr{R}}_3\rangle}{\partial t} = 2\beta[-\langle\hat{\mathscr{R}}_3\hat{\mathscr{R}}^{(+)}\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\rangle + \langle(\hat{\mathscr{R}}_3\hat{\mathscr{R}}^{(+)} - \hat{\mathscr{R}}^{(+)})\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\rangle] = -2\beta\langle\hat{\mathscr{R}}^{(+)}\hat{\mathscr{R}}^{(-)}\rangle. \quad (17.3.41)$$

Предположим теперь, что атомная система находится в состоянии Дике $|l,m\rangle$, где m — полуразность населенностей, l — кооперационное число (см. разд. 16.5) и $|m| \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}N$. Тогда с помощью соотношений (16.5.15) сразу получим уравнение

$$\frac{\partial\langle\hat{\mathscr{R}}_3\rangle}{\partial t} = -2\beta(l+m)(l-m+1). \tag{17.3.42}$$

Данный результат совпадает с результатом, полученным в разд. 16.6 [ср. (16.6.3)]. Скорость излучения имеет наибольшее значение $\beta N(\frac{1}{2}N+1)$, когда система наполовину инвертирована, т.е. когда $m=0$ и $l=\frac{1}{2}N$. Это и есть сверхизлучательное состояние, рассмотренное ранее.

17.3.5. Линейное затухание недиагональных матричных элементов

Уравнение (17.3.36), определяющее скорость изменения оператора плотности $\hat{\rho}$ совокупности атомов, фактически справедливо для систем с линейным затуханием вообще. Например, оно применимо для одномодового электромагнитного поля, линейно затухающего вследствие какого-то механизма потерь, такого, как тепловой резервуар гармонических осцилляторов, которому может передаваться энергия. В этом случае мы можем отождествить $\hat{\mathscr{R}}^{(+)}$ и $\hat{\mathscr{R}}^{(-)}$ с полевыми операторами рождения и уничтожения $\hat{a}^\dagger$ и $\hat{a}$ и получить уравнение движения

$$\frac{\partial\hat{\rho}(t)}{\partial t} = -\beta[\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t) + \hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a} - 2\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger] - i\gamma[\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}]. \tag{17.3.43}$$

Это другой вариант основного кинетического уравнения для линейно-затухающей системы, когда $\beta > 0$.

Воспользуемся данным уравнением для того, чтобы показать, что недиагональные элементы $\hat{\rho}(t)$ в базисе чисел заполнения быстро затухают во времени. Если умножить уравнение (17.3.43) на $\langle m|$ слева и на $|n\rangle$ справа и положить $\langle m|\hat{\rho}(t)|n\rangle \equiv \rho_{mn}(t)$, то получим соотношение

$$\frac{\partial\rho_{mn}(t)}{\partial t} = -\beta[m\rho_{mn}(t) + n\rho_{mn}(t) - 2[(m+1)(n+1)]^{1/2}\rho_{m+1\,n+1}(t)] - i\gamma(m-n)\rho_{mn}(t). \tag{17.3.44}$$

Теперь, если m и n — умеренно большие числа, и $\rho_{mn}(t)$ медленно изменяется при изменении m, n, то в хорошем приближении можно заменить $m+1$ на m, $n+1$ на n и $\rho_{m+1\,n+1}(t)$ на $\rho_{mn}(t)$. Тогда

$$\frac{\partial\rho_{mn}(t)}{\partial t} = \{-\beta[m+n-2(mn)^{1/2}] - i\gamma(m-n)\}\rho_{mn}(t) = [-\beta(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2 - i\gamma(m-n)]\rho_{mn}(t). \tag{17.3.45}$$

Это простое линейное дифференциальное уравнение имеет решение

$$\rho_{mn}(t) = \rho_{mn}(0)\,\mathrm{e}^{[-\beta(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2 - i\gamma(m-n)]t}, \tag{17.3.46}$$

из которого сразу видно, что недиагональные матричные элементы $\rho_{mn}(t)$ затухают со временем до нуля. Более того, чем больше недиагональность, измеряемая величиной $\sqrt{m}-\sqrt{n}$, тем больше скорость затухания. Таким образом, оператор плотности $\hat{\rho}(t)$ много времени спустя становится диагональным в базисе чисел заполнения (Walls and Milburn, 1985).

17.4. Источники квантового шума и квантовые уравнения Ланжевена

17.4.1. Введение

Гейзенберговские уравнения движения для некоторых динамических переменных квантовой системы часто очень похожи на уравнения движения для соответствующих классических систем. Очевидный пример — уравнения Максвелла для свободного электромагнитного поля, которые одинаковы для классического и квантового поля (см. гл. 10). Однако как только появляются затухание или потери, квантовомеханическая ситуация становится более сложной, ибо средняя энергия полностью квантованной системы

должна сохраняться в пределе больших времен. Практически, задача решается путем введения большого числа резервуаров, назначение которых состоит в поглощении энергии без заметного их возмущения. Но результатом взаимодействия резервуаров с исходной исследуемой квантовой системой являются не только потери, но и флуктуации, связь которых описывается флуктуационно-диссипационной теоремой. Рассмотрим теперь уравнения движения, которые определяют поведение квантовой системы в этих условиях (Senitzky, 1960, 1961; Weidlich and Haake, 1965a, b; Lax, 1966, 1967; Haken, 1970; Louisell, 1973, разд. 6.6).

Начнем с примера из классической физики. Пусть $a(t)$ есть комплексная амплитуда классического гармонического осциллятора частоты ω_0. В отсутствии затухания $a(t)$ подчиняется уравнению движения

$$\dot{a}(t) = -i\omega_0 a(t). \tag{17.4.1}$$

Если осциллятор затухает с некоторой скоростью κ, то в правой части необходимо добавить слагаемое $-\kappa a(t)$, так что уравнение принимает вид

$$\dot{a}(t) = -i\omega_0 a(t) - \kappa a(t), \tag{17.4.2}$$

и является приемлемым в классической физике. Однако, строго говоря, механизм, ответственный за затухание, будет также возмущать колебательное движение микроскопически, что можно моделировать, вводя силы Ланжевена $F(t)$. Тогда, уравнение (17.4.2) необходимо заменить следующим

$$\dot{a}(t) = -(i\omega_0 + \kappa)a(t) + F(t). \tag{17.4.3}$$

Случайная сила $F(t)$ обычно берется с нулевым средним значением и может как быть, так и не быть строго δ-коррелированной во времени. Однако время памяти всегда мало, так что $F(t)$ в общем случае не коррелирует с амплитудой осциллятора $a(t')$ в более ранние моменты времени t', поэтому

$$\langle a(t')F(t)\rangle = 0, \quad \text{если } t > t'. \tag{17.4.4}$$

Если мы обратимся к квантово-механическому осциллятору, то обнаружим, что незатухающий осциллятор подчиняется точно такому же уравнению движения, как и (17.4.1), но $a(t)$ заменяется оператором $\hat{a}(t)$ гильбертового пространства. С другой стороны, затухающий квантовый осциллятор не может описываться уравнением типа (17.4.2), поскольку его решение не может во все моменты времени удовлетворять коммутационным соотношениям. Однако уравнение (17.4.3) справедливо также и для квантового затухающего осциллятора при условии, что $\hat{F}(t)$, как и $\hat{a}(t)$, является оператором гильбертова пространства. Это поясняется приведенным ниже рассуждением.

17.4.2. Уравнения движения квантовой системы

Рассмотрим простую квантовую систему в виде гармонического осциллятора частоты ω_0, которую будем называть *системой* S. Для того, чтобы учесть потери или затухание в системе, предположим, что она связана с большим числом осцилляторов резервуара с различными частотами ω, совокупность которых будем называть *резервуаром* R. Резервуар часто представляют в виде тепловой бани, находящейся в состоянии теплового равновесия при температуре T, но это не всегда необходимо. Все, что необходимо, — это то, чтобы резервуар был достаточно большим, так чтобы его состояние заметно не менялось при взаимодействии с системой. Считая каждый элемент из комбинации $S + R$ гармоническим осциллятором, мы построили простейшую возможную модель затухания в квантовой системе.

Запишем гамильтониан взаимодействующих системы и резервуара в виде

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \sum_\omega \hbar\omega\left[\hat{A}^\dagger(\omega)\hat{A}(\omega) + \frac{1}{2}\right] + \sum_\omega \hbar[g(\omega)\hat{a}^\dagger\hat{A}(\omega) + g^*(\omega)\hat{A}^\dagger(\omega)\hat{a}], \tag{17.4.5}$$

где $\hat{a}$, $\hat{A}(\omega)$ (и сопряженные им операторы) есть, соответственно, операторы уничтожения (и рождения) для осцилляторных мод системы и резервуара, которые зависят от времени в картине Гейзенберга, а $g(\omega)$ — зависящая от частоты константа связи. Все операторы, принадлежащие различным модам, коммутируют, если взяты в один и тот же момент времени, но не обязательно коммутируют, если взяты в разные моменты времени и, конечно,

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = 1 = [\hat{A}(\omega, t), \hat{A}^\dagger(\omega, t)] \quad \text{для всех } t. \tag{17.4.6}$$

Временна́я эволюция операторов $\hat{a}(t)$ и $\hat{A}(\omega,t)$ подчиняется уравнениям движения Гейзенберга

$$\dot{\hat{a}}(t)=\frac{1}{i\hbar}[\hat{a}(t),\hat{H}]=-i\omega_0\hat{a}(t)-i\sum_\omega g(\omega)\hat{A}(\omega,t), \tag{17.4.7}$$

$$\dot{\hat{A}}(\omega,t)=\frac{1}{i\hbar}[\hat{A}(\omega,t),\hat{H}]=-i\omega\hat{A}(\omega,t)-ig^*(\omega)\hat{a}(t). \tag{17.4.8}$$

Последнее уравнение легко интегрируется и дает

$$\hat{A}(\omega,t)=\hat{A}(\omega,0)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}-ig^*(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\int_0^t\hat{a}(t')\,\mathrm{e}^{i\omega t'}\,dt'. \tag{17.4.9}$$

После подстановки данного выражения в (17.4.7) получим

$$\dot{\hat{a}}(t)=-i\omega_0\hat{a}(t)-i\sum_\omega g(\omega)\hat{A}(\omega,0)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}-\int_0^t\sum_\omega|g(\omega)|^2\,\mathrm{e}^{i\omega(t'-t)}\,\hat{a}(t')\,dt'. \tag{17.4.10}$$

Рассмотрим более тщательно последнее слагаемое. В случае, когда осцилляторы резервуара плотно распределены по частоте, сумму по ω можно заменить интегралом. Пусть $\eta(\omega)\delta\omega$ есть число осцилляторов, попадающих в частотный интервал $\delta\omega$. Тогда можно записать

$$\int_0^t\sum_\omega|g(\omega)|^2\,\mathrm{e}^{i\omega(t'-t)}\,\hat{a}(t')\,dt'\to\int_0^t dt'\int_0^\infty d\omega\,\eta(\omega)|g(\omega)|^2\,\mathrm{e}^{i\omega(t'-t)}\,\hat{a}(t')=$$

$$=\int_0^t d\tau\int_{-\omega_0}^\infty d\omega'\,\eta(\omega_0+\omega')|g(\omega_0+\omega')|^2\,\mathrm{e}^{-i\omega'\tau}\,\hat{a}(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau}. \tag{17.4.11}$$

Последняя строка получается из предыдущей при помощи подстановок $\omega=\omega_0+\omega'$ и $t-t'=\tau$, ибо в первом приближении $\hat{a}(t)$ осциллирует на частоте ω_0. Величина $\hat{a}(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau}$ является поэтому медленно меняющейся функцией от τ. Теперь можно рассматривать неотрицательную функцию $\eta(\omega_0+\omega')|g(\omega_0+\omega')|^2$ как спектральную плотность осцилляторов резервуара, диапазон частот которых накрывается диапазоном интегрирования. По теореме Винера-Хинчина (2.4.16) интеграл по ω' дает автокорреляционную функцию

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^\infty\eta(\omega_0+\omega')|g(\omega_0+\omega')|^2\,\mathrm{e}^{-i\omega'\tau}\,d\omega'\equiv\Gamma(\tau), \tag{17.4.12}$$

которая играет роль функции памяти для резервуара. Время памяти или корреляции определяется спектральной шириной функции $\eta(\omega+\omega')|g(\omega_0+\omega')|^2$ и является очень коротким, если частотный разброс большой. Действительно, если множитель $\eta(\omega_0+\omega')|g(\omega_0+\omega')|^2$ медленно меняется с изменением ω' и имеет большой частотный разброс, и если ω_0 приходится на середину частотного диапазона, то можно вынести этот множитель за знак интеграла и записать

$$\Gamma(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^\infty\eta(\omega_0+\omega')|g(\omega_0+\omega')|^2\,\mathrm{e}^{-i\omega'\tau}\,d\omega'\approx$$

$$\approx\eta(\omega_0)|g(\omega_0)|^2\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^\infty\mathrm{e}^{-i\omega'\tau}\,d\omega'\approx\eta(\omega_0)|g(\omega_0)|^2\delta(\tau), \tag{17.4.13}$$

так что $\Gamma(\tau)$ сводится к $\delta(\tau)$ функции. Резервуар с δ-образной корреляционной функцией является идеальным, в том смысле, что такой резервуар является строго марковским, без памяти, что часто и предполагается (Senitzky, 1960, 1961; Weidlich and Haake, 1965a, b; Lax, 1966, 1967; Haken, 1970; Louisell, 1973, разд. 6.6). Однако в данный момент мы сохраним для $\Gamma(\tau)$ более общее выражение (17.4.12).

С учетом (17.4.12) формула (17.4.11) принимает вид

$$\int_0^t\sum_\omega|g(\omega)|^2\,\mathrm{e}^{i\omega(t'-t)}\,\hat{a}(t')\,dt'=2\pi\int_0^t\Gamma(\tau)\hat{a}(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau}\,d\tau,$$

где $\Gamma(\tau)$ — пикообразная или $\delta(\tau)$-образная функция, тогда как $\hat{a}(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau}$ изменяется медленно по τ. Последнюю поэтому можно рассматривать как "пробную функцию", на которую $\Gamma(\tau)$ действует под знаком интеграла. Независимо от того, рассматриваем ли мы функцию $\Gamma(\tau)$ как истинную $\delta(\tau)$ функцию или нет, ясно, что благодаря ее пикообразной форме в хорошем приближении имеем

$$\int_0^t \sum_\omega |g(\omega)|^2\,\mathrm{e}^{i\omega(t'-t)}\,\hat{a}(t')\,dt' \approx 2\pi\hat{a}(t)\int_0^t \Gamma(\tau)\,d\tau \approx \pi\hat{a}(t)\eta(\omega_0)|g(\omega_0)|^2, \tag{17.4.14}$$

при условии, что величина t большая по сравнению с очень коротким интервалом, на котором $\Gamma(\tau)$ существенно отлична от нуля. Последняя строка получается из предыдущей обратным преобразованием Фурье выражения (17.4.12). Удобно определить коэффициент

$$\pi\eta(\omega_0)|g(\omega_0)|^2 \equiv \kappa, \tag{17.4.15}$$

имеющий размерность частоты или скорости. Тогда, с учетом (17.4.14) уравнение (17.4.10) принимает вид

$$\dot{\hat{a}}(t) = (-i\omega_0 - \kappa)\hat{a}(t) - \hat{F}(t), \tag{17.4.16}$$

где

$$\hat{F}(t) \equiv i\sum_\omega g(\omega)\hat{A}(\omega,0)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}. \tag{17.4.17}$$

Данное уравнение движения для $\hat{a}(t)$ имеет форму классического уравнения Ланжевена (17.4.3) с константой затухания κ, если не считать того, что слагаемое $\hat{F}(t)$ теперь является оператором. Таким образом, $\hat{F}(t)$ описывает форму квантового шума. Из (17.4.15) следует, что спектральная плотность квантового шума определяет затухание системы, что является другим примером *флуктуационно-диссипационной* теоремы (см. разд. 17.2). Как мы сейчас покажем, независимо от операторного характера $\hat{F}(t)$, аналогия с классическим ланжевеновским шумом $F(t)$ является очень точной.

17.4.3. Коммутационные соотношения

По определению, оператор $\hat{F}(t)$ полностью выражается через операторы $\hat{A}(\omega,0)$, взятые в нулевой момент времени, так что он коммутирует с $\hat{a}(0)$ и $\hat{a}^\dagger(0)$

$$[\hat{F}(t),\hat{a}(0)] = 0 = [\hat{F}(t),\hat{a}^\dagger(0)], \quad (t>0), \tag{17.4.18}$$

хотя, как будет показано ниже, он не обязательно коммутирует с $\hat{a}(t)$ или $\hat{a}^\dagger(t)$. Операторный характер $\hat{F}(t)$ важен фактически для того, чтобы сохранить коммутационные соотношения между $\hat{a}(t)$ и $\hat{a}^\dagger(t)$.

Прежде всего, рассмотрим коммутаторы операторов $\hat{F}(t)$ и $\hat{F}^\dagger(t)$. Из определения (17.4.17) сразу следует, что

$$[\hat{F}(t),\hat{F}(t')] = 0 = [\hat{F}^\dagger(t),\hat{F}^\dagger(t')] \tag{17.4.19}$$

для всех t, t'. Однако, $\hat{F}(t)$ и $\hat{F}^\dagger(t')$ в общем случае не коммутируют. Удобно, для начала, рассмотреть медленно меняющиеся переменные $\hat{F}(t)\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t}$ и $\hat{F}^\dagger(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}$, осциллирующее поведение которых скомпенсировано и коммутатор которых задается выражением

$$[\hat{F}(t)\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t},\hat{F}^\dagger(t')\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t'}] = \\ = \sum_\omega\sum_{\omega'} g(\omega)g^*(\omega')[\hat{A}(\omega,0),\hat{A}^\dagger(\omega',0)]\,\mathrm{e}^{-i(\omega-\omega_0)t}\,\mathrm{e}^{-i(\omega'-\omega_0)t'} = \sum_\omega |g(\omega)|^2\,\mathrm{e}^{-i(\omega-\omega_0)(t'-t)}.$$

Теперь обратим сумму в интеграл и положим $\omega = \omega_0 + \omega'$, точно так же, как при вычислении формулы (17.4.11). В результате получим, что

$$[\hat{F}(t)\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t},\hat{F}^\dagger(t')\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t'}] = \int_{-\omega_0}^{\infty} \eta(\omega_0+\omega')|g(\omega_0+\omega')|^2\,\mathrm{e}^{-i\omega'(t-t')}\,d\omega',$$

или, учитывая (17.4.12), что

$$[\hat{F}(t), \hat{F}^\dagger(t')] = 2\pi\Gamma(t-t')\,\mathrm{e}^{-i\omega_0(t-t')}. \tag{17.4.20}$$

Таким образом, коммутатор очень быстро уменьшается при увеличении $|t-t'|$. С той же степенью точности, с какой $\Gamma(\tau)$ можно аппроксимировать $\delta(\tau)$-функцией, как в выражении (17.4.13), можно записать

$$[\hat{F}(t), \hat{F}^\dagger(t')] \approx 2\kappa\delta(t-t'), \tag{17.4.21}$$

где κ, как и прежде, определяется формулой (17.4.15). Еще раз отметим, что дельта-функция отражает плотный характер частотного распределения и большой спектральный диапазон осцилляторов резервуара.

Нетрудно показать, что соотношение (17.4.20) или (17.4.21) обеспечивает правильное коммутационное соотношение между $\hat{a}(t)$ и $\hat{a}^\dagger(t)$. Начнем с того, что проинтегрируем выражение (17.4.16) по времени, т.е.

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)\,\mathrm{e}^{(-i\omega_0-\kappa)t} - \mathrm{e}^{(-i\omega_0-\kappa)t}\int_0^t \hat{F}(t')\,\mathrm{e}^{(i\omega_0+\kappa)t'}\,dt', \tag{17.4.22}$$

и воспользуемся данным результатом для построения коммутационного соотношения

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = \mathrm{e}^{-2\kappa t} + \mathrm{e}^{-2\kappa t}\iint_0^t [\hat{F}(t'), \hat{F}^\dagger(t'')]\,\mathrm{e}^{i\omega_0(t'-t'')}\,\mathrm{e}^{\kappa(t'+t'')}\,dt'\,dt''.$$

С помощью замены переменных $\frac{1}{2}(t''+t') = t_1$, $t''-t' = t_2$, и выражения (17.4.20) получим, как в разд. 17.2, что

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = \mathrm{e}^{-2\kappa t} + \mathrm{e}^{-2\kappa t}\left[\int_0^{t/2} dt_1 \int_{-2t_1}^{2t_1} dt_2\, 2\pi\Gamma(-t_2)\,\mathrm{e}^{2\kappa t_1} + \int_{t/2}^{t} dt_1 \int_{-2(t-t_1)}^{2(t-t_1)} dt_2\, 2\pi\Gamma(-t_2)\,\mathrm{e}^{2\kappa t_1}\right].$$

Теперь учтем, что функция $\Gamma(\tau)$ существенно отлична от нуля лишь на малом временно́м промежутке и может быть аппроксимирована $\delta(\tau)$-функцией, так что почти для всех t_1 имеем, после обратного фурье-преобразования выражения (17.4.12),

$$\int_{-2t_1}^{2t_1} \Gamma(-t_2)\,dt_2 \approx \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t_2)\,dt_2 = \eta(\omega_0)|g(\omega_0)|^2 = \kappa/\pi,$$
$$\int_{-2(t-t_1)}^{2(t-t_1)} \Gamma(-t_2)\,dt_2 \approx \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t_2)\,dt_2 = \eta(\omega_0)|g(\omega_0)|^2 = \kappa/\pi.$$

Следовательно,

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = \mathrm{e}^{-2\kappa t} + \mathrm{e}^{-2\kappa t}\int_0^t 2\kappa\,\mathrm{e}^{2\kappa t_1}\,dt_1 = 1, \tag{17.4.23}$$

для всех t, превышающих временно́й интервал, на котором $\Gamma(\tau)$ существенно отлична от нуля. Таким образом, некоммутативность $\hat{F}(t)$ и $\hat{F}^\dagger(t)$ важна для сохранения коммутационного соотношения, связывающего $\hat{a}(t)$ и $\hat{a}^\dagger(t)$, а уравнение Ланжевена (17.4.16) описывает квантовую систему S корректно только в том случае, когда резервуар R также является квантово-механическим.

В заключение рассмотрим некоторые смешанные коммутаторы, содержащие как $\hat{a}(t)$ (или $\hat{a}^\dagger(t)$), так и $\hat{F}(t)$ (или $\hat{F}^\dagger(t)$). Согласно соотношениям (17.4.22) и (17.4.17) оператор $\hat{a}(t)$ выражается через $\hat{a}(0)$ и $\hat{A}(\omega, 0)$, откуда следует, что

$$[\hat{a}(t), \hat{F}(t')] = 0 = [\hat{a}^\dagger(t), \hat{F}^\dagger(t')] \quad \text{для всех } t,\, t'. \tag{17.4.24}$$

Данная формула является обобщением (17.4.18). Воспользуемся теперь выражением (17.4.22) для вычисления $[\hat{a}(t), \hat{F}^\dagger(t')]$ и найдем, что

$$[\hat{a}(t), \hat{F}^\dagger(t')] = -\mathrm{e}^{(-i\omega_0-\kappa)t}\int_0^t [\hat{F}(t''), \hat{F}^\dagger(t'),]\,\mathrm{e}^{(i\omega_0+\kappa)t''}\,dt'',$$

и, с учетом (17.4.20),

$$[\hat{a}(t), \hat{F}^\dagger(t')] = -2\pi\, \mathrm{e}^{(-i\omega_0-\kappa)t} \int_0^t \Gamma(t''-t')\, \mathrm{e}^{\kappa t''+i\omega_0 t'}\, dt'' = -2\pi\, \mathrm{e}^{(i\omega_0+\kappa)(t'-t)} \int_{-t'}^{t-t'} \Gamma(\tau)\, \mathrm{e}^{\kappa\tau}\, d\tau.$$

Теперь учтем, что функция $\Gamma(\tau)$ существенно отлична от нуля лишь на малом временно́м промежутке и может быть аппроксимирована $\delta(\tau)$-функцией. При условии, что $t > t'$, интеграл по τ почти для всех t, t' хорошо аппроксимируется выражением

$$\int_{-t'}^{t-t'} \Gamma(\tau)\, \mathrm{e}^{\kappa\tau}\, d\tau \approx \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau)\, d\tau = \kappa/\pi,$$

тогда как

$$\int_{-t'}^{t-t'} \Gamma(\tau)\, \mathrm{e}^{\kappa\tau}\, d\tau \approx 0, \quad \text{если } t < t',$$

поскольку в последнем случае пик функции $\Gamma(\tau)$ находится за пределами области интегрирования. Если $t = t'$, то следует ожидать, что интеграл охватывает половину площади под кривой $\Gamma(\tau)$. В этом случае получим следующий результат

$$[\hat{a}(t), \hat{F}^\dagger(t')] = \begin{cases} -2\kappa\, \mathrm{e}^{-(i\omega_0+\kappa)(t-t')}, & \text{если } t > t', \\ -\kappa, & \text{если } t = t', \\ 0, & \text{если } t < t'. \end{cases} \tag{17.4.25}$$

Подобным же образом можно показать, что

$$[\hat{a}^\dagger(t), \hat{F}(t')] = \begin{cases} 2\kappa\, \mathrm{e}^{(i\omega_0-\kappa)(t-t')}, & \text{если } t > t', \\ \kappa, & \text{если } t = t', \\ 0, & \text{если } t < t'. \end{cases} \tag{17.4.26}$$

Поскольку равенство нулю коммутатора означает в общем случае, что измерения двух динамических переменных не влияют друг на друга, мы заключаем, что система подвергается воздействию резервуара на ранних временах, но не на поздних. В этом отношении квантовое уравнение Ланжевена очень похоже на соответствующее классическое уравнение.

17.4.4. Двухвременны́е корреляционные функции

До сих пор мы рассматривали соотношения между различными динамическими переменными без введения квантовых состояний. Однако физика, в конечном счете, описывается квантово-механическими средними значениями, для вычисления которых должно быть определено квантовое состояние. Предположим, что состояние системы вместе с резервуаром можно представить в виде прямого произведения состояний, характеризующих систему S и резервуар R, каждый из которых может быть в смешанном состоянии, описываемом оператором плотности. Кроме того, предположим, что состояния осцилляторов резервуара удовлетворяют соотношениям

$$\langle \hat{A}(\omega,0)\rangle = 0, \quad \langle \hat{A}(\omega,0)\hat{A}(\omega',0)\rangle = 0, \quad \langle \hat{A}^\dagger(\omega,0)\hat{A}(\omega',0)\rangle = \delta_{\omega\omega'} N(\omega), \tag{17.4.27}$$

где $N(\omega)$ — среднее число осцилляторов резервуара на частоте ω. Эти условия удовлетворяются, если все моды резервуара независимы, и если оператор плотности для каждой моды диагонален в представлении чисел заполнения. Иногда даже предполагают, что осцилляторы резервуара находятся в тепловом равновесии при температуре T. В этом случае $N(\omega) = [\exp(\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T) - 1]^{-1}$. Однако это лишь примеры состояний, удовлетворяющих условиям (17.4.27), которые иногда называют *гипотезой случайных фаз*.

Из (17.4.17) и (17.4.27) сразу следует, что

$$\langle \hat{F}(t) \rangle = 0, \tag{17.4.28}$$

$$\langle \hat{F}(t)\hat{F}(t') \rangle = 0 = \langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}^\dagger(t') \rangle, \tag{17.4.29}$$

точно так же, как для классических сил Ланжевена. Более интересной является двухвременна́я корреляционная функция

$$\langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t') \rangle = \sum_\omega \sum_{\omega'} g^*(\omega) g(\omega') \langle \hat{A}^\dagger(\omega,0)\hat{A}(\omega',0) \rangle \, \mathrm{e}^{i(\omega t - \omega' t')} = \sum_\omega |g(\omega)|^2 N(\omega) \, \mathrm{e}^{i\omega(t-t')},$$

при записи которой были использованы соотношения (17.4.27). Как и прежде, заменим сумму интегралом, вводя плотность $\eta(\omega)$ и полагая $\omega = \omega_0 + \omega'$. В результате найдем, что

$$\langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t') \rangle = \mathrm{e}^{i\omega_0(t-t')} \int_{-\omega_0}^{\infty} N(\omega_0+\omega') |g(\omega_0+\omega')|^2 \eta(\omega_0+\omega') \, \mathrm{e}^{i\omega'(t-t')}.$$

Подынтегральное выражение целиком определяется осциллирующим множителем $\mathrm{e}^{i\omega'(t-t')}$, а интеграл имеет такой же вид, как в (17.4.12), если не считать множителя $N(\omega_0+\omega')$. В том случае, когда последний является медленно меняющейся функцией от ω' в окрестности $\omega' = 0$, можно вынести множитель $N(\omega_0)$ за знак интеграла, который сводится тогда к интегралу из (17.4.12). В результате получим

$$\langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t') \rangle = 2\pi \, \mathrm{e}^{i\omega_0(t-t')} N(\omega_0) \Gamma(t'-t). \tag{17.4.30а}$$

Таким образом, автокорреляционная функция ланжевеновских сил имеет такую же структуру, как их коммутатор (17.4.20), и имеет также очень короткий временно́й интервал, на котором она существенно отлична от нуля. В той же степени, в какой допустима замена $\Gamma(\tau)$ на $\delta(\tau)$-функцию, как в формуле (17.4.13), справедливо соотношение

$$\langle \hat{F}^\dagger(t)\hat{F}(t') \rangle \approx 2\kappa N(\omega_0)\delta(t-t'). \tag{17.4.30б}$$

Таким образом, случайные силы характеризуются кратковременно́й памятью и являются марковскими. Еще раз отметим, что та же константа κ, которая определяет затухание системы, определяет и флуктуации сил Ланжевена, и это соответствует флуктуационно-диссипационной теореме. В случае антинормального упорядочения операторов с помощью (17.4.20) сразу получаем вместо выражений (17.4.30) формулы

$$\langle \hat{F}(t)\hat{F}^\dagger(t') \rangle = 2\pi \, \mathrm{e}^{i\omega_0(t'-t)} [N(\omega_0)+1] \Gamma(t-t') \tag{17.4.31а}$$

$$\approx 2\kappa [N(\omega_0)+1] \delta(t-t'). \tag{17.4.31б}$$

Корреляционные функции более высокого порядка также легко вычисляются из (17.4.17), если предположить, что резервуар находится в тепловом равновесии при температуре T. Например, можно показать, что для нормально упорядоченных корреляционных функций

$$\langle \hat{F}^\dagger(t_1)\hat{F}^\dagger(t_2)\ldots\hat{F}^\dagger(t_N)\hat{F}(t'_M)\ldots\hat{F}(t'_2)\hat{F}(t'_1) \rangle = \delta_{NM} \sum_{\mathbf{P}} \langle \hat{F}^\dagger(t_1)\hat{F}(t'_1) \rangle \langle \hat{F}^\dagger(t_2)\hat{F}(t'_2) \rangle \ldots \langle \hat{F}^\dagger(t_N)\hat{F}(t'_N) \rangle,$$

где $\sum_{\mathbf{P}}$ означает сумму по всем $N!$ парным комбинациям операторов $\hat{F}^\dagger$ и $\hat{F}$. В этом выражении можно распознать гауссовскую теорему моментов [ср. (1.6.33)], и оно предполагает, что квантовый шум $\hat{F}(t)$ можно рассматривать как гауссовский процесс. Из формулы (17.4.28), и следующих за ней, видно, что средние значения операторов резервуара $\hat{F}(t)$ не зависят от состояния осциллятора системы S, что согласуется с предположением о том, что резервуар R является большим и слабо возмущается системой S.

Рассмотрим корреляционные функции операторов системы и резервуара. Из (17.4.17), (17.4.22) имеем

$$\langle \hat{a}(t)\hat{F}(t') \rangle = i \sum_\omega g(\omega) \langle \hat{a}(0)\hat{A}(\omega,0) \rangle \, \mathrm{e}^{-i(\omega_0 t + \omega t') - \kappa t} - \int_0^t \langle \hat{F}^\dagger(t'')\hat{F}(t') \rangle \, \mathrm{e}^{(i\omega_0+\kappa)(t''-t)} \, dt''.$$

Интеграл обращается в нуль в силу (17.4.29), а среднее значение $\langle\hat{a}(0)\hat{A}(\omega,0)\rangle$, вследствие предположения о факторизации, представляется в виде произведения средних и обращается в нуль в силу (17.4.27). Поэтому

$$\langle\hat{a}(t)\hat{F}(t')\rangle = 0 = \langle\hat{a}^\dagger(t)\hat{F}^\dagger(t')\rangle. \tag{17.4.32}$$

С другой стороны, та же процедура с учетом соотношения (17.4.30а) дает

$$\langle\hat{a}^\dagger(t)\hat{F}(t')\rangle = i\sum_\omega g(\omega)\langle\hat{a}^\dagger(0)\hat{A}(\omega,0)\rangle\, e^{i(\omega_0 t-\omega t')-\kappa t} - \int_0^t \langle\hat{F}^\dagger(t'')\hat{F}(t')\rangle\, e^{(-i\omega_0+\kappa)(t''-t)}\, dt'' =$$

$$= -2\pi N(\omega_0)\, e^{i\omega_0(t-t')}\int_0^t e^{\kappa(t''-t')}\,\Gamma(t'-t'')\, dt'' = -2\pi N(\omega_0)\, e^{(i\omega_0-\kappa)(t-t')}\int_{t'-t}^{t'}\Gamma(\tau)\, e^{-\kappa\tau}\, d\tau.$$

Поскольку $\Gamma(\tau)$ ведет себя почти как дельта-функция, мы получаем разные решения в зависимости от знака $t'-t$. Если $t>t'$, то $t'-t<0$, и почти для всех значений t, t' можно аппроксимировать интеграл как и прежде, а именно

$$\int_{t'-t}^{t'}\Gamma(\tau)\, e^{-\kappa\tau}\, d\tau \approx \int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\tau)\, d\tau = \kappa/\pi.$$

С другой стороны, если $t'>t$, то область интегрирования не включает в себя пик функции $\Gamma(\tau)$, и почти для всех t, t' интеграл исчезающе мал. В случае, когда $t=t'$, можно предположить, что интеграл охватывает половину площади под кривой $\Gamma(\tau)$. Таким образом, имеем

$$\langle\hat{a}^\dagger(t)\hat{F}(t')\rangle = \begin{cases} -2\kappa N(\omega_0)\, e^{(i\omega_0-\kappa)(t-t')}, & \text{если } t>t', \\ -\kappa N(\omega_0), & \text{если } t=t', \\ 0, & \text{если } t<t', \end{cases} \tag{17.4.33}$$

и таким же образом можно показать, что

$$\langle\hat{a}(t)\hat{F}^\dagger(t')\rangle = \begin{cases} -2\kappa[N(\omega_0)+1]\, e^{(-i\omega_0-\kappa)(t-t')}, & \text{если } t>t', \\ -\kappa[N(\omega_0)+1], & \text{если } t=t', \\ 0, & \text{если } t<t'. \end{cases} \tag{17.4.34}$$

Эти соотношения означают, что переменные системы $\hat{a}(t)$ и $\hat{a}^\dagger(t)$ всегда некоррелированы с квантовыми силами Ланжевена, если последние взяты в моменты времени, бóльшие t, хотя это не так для сил, взятых в более ранние моменты времени. В этом отношении силы Ланжевена также ведут себя как соответствующие классические силы.

Полученные результаты относятся не только к операторам $\hat{a}(t)$, $\hat{F}(t)$ и сопряженным им. Например, построив оператор $\hat{n}(t)=\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)$ с помощью (17.4.22), можно показать, что

$$\langle\hat{n}(t)\hat{F}(t')\rangle = \begin{cases} -2\kappa N(\omega_0)\langle\hat{a}(0)\rangle\, e^{\kappa(t'-2t)}\, e^{-i\omega_0 t'}, & \text{если } t>t', \\ -\kappa N(\omega_0)\langle\hat{a}(0)\rangle\, e^{-\kappa t}\, e^{-i\omega_0 t}, & \text{если } t=t', \\ 0, & \text{если } t<t', \end{cases} \tag{17.4.35}$$

при условии, что все тройные корреляторы типа $\langle\hat{F}^\dagger(t')\hat{F}(t'')\hat{F}(t''')\rangle$ обращаются в нуль.

17.4.5. Уравнение Ланжевена для возбужденной системы осцилляторов

Ранее было показано, что гейзенберговские уравнения движения для переменной системы $\hat{a}(t)$ могут принять форму ланжевеновского уравнения (17.4.16), в котором квантово-механические силы Ланжевена определяются переменными резервуара. Однако чтобы не создалось впечатление, что данный результат

справедлив только для переменных $\hat{a}(t)$ и $\hat{a}^\dagger(t)$, мы сейчас покажем, что уравнение движения ланжевеновского типа можно также легко получить для других операторов, таких как эрмитовый оператор $\hat{n} = \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)$. Из определения и формулы (17.4.16) имеем

$$\dot{\hat{n}}(t) = \dot{\hat{a}}^\dagger(t)\hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t)\dot{\hat{a}}(t) = -2\kappa\hat{n}(t) - \hat{a}^\dagger(t)\hat{F}(t) - \hat{F}^\dagger(t)\hat{a}(t). \tag{17.4.36}$$

Введем новый «квантовый шум» $\hat{f}(t)$ с нулевым средним значением следующим образом:

$$\hat{f}(t) \equiv \hat{a}^\dagger(t)\hat{F}(t) + \hat{F}^\dagger(t)\hat{a}(t) - \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{F}(t) + \hat{F}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle. \tag{17.4.37}$$

Используя (17.4.22) для вычисления последнего члена и действуя так же, как при выводе (17.4.33), найдем

$$\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{F}(t)\rangle + \text{к.с.} = -\mathrm{e}^{(i\omega_0-\kappa)t}\int_0^t \langle \hat{F}^\dagger(t')\hat{F}(t)\rangle\, \mathrm{e}^{(-i\omega_0+\kappa)t'} + \text{к.с.} = -2\kappa N(\omega_0). \tag{17.4.38}$$

Уравнение (17.4.36) тогда принимает вид

$$\dot{\hat{n}}(t) = -2\kappa[\hat{n}(t) - N(\omega_0)] - \hat{f}(t), \tag{17.4.39}$$

что является уравнением ланжевеновского типа для $\hat{n}(t) - N(\omega_0)$. Интегрируя по времени и вычисляя средние значения, сразу получаем решение

$$\langle \hat{n}(t)\rangle - N(\omega_0) = [\langle \hat{n}(0)\rangle - N(\omega_0)]\,\mathrm{e}^{-2\kappa t}. \tag{17.4.40}$$

Видно, что $\langle \hat{n}(t)\rangle \to N(\omega_0)$ при $t \to \infty$, когда система приходит в состояние равновесия с осцилляторами резервуара. С помощью (17.4.22), $\hat{f}(t)$ может быть выражена через ланжевеновские операторы $\hat{F}(t)$ в виде

$$\hat{f}(t) = \hat{a}^\dagger(0)\hat{F}(t)\,\mathrm{e}^{(i\omega_0-\kappa)t} - \mathrm{e}^{(i\omega_0-\kappa)t}\int_0^t \hat{F}^\dagger(t')\hat{F}(t)\,\mathrm{e}^{(-i\omega_0+\kappa)t'} + \text{э.с.} + 2\kappa N(\omega_0). \tag{17.4.41}$$

Из данного выражения ясно видно, что двухвременны́е корреляторы между $\hat{f}$-операторами включают в себя четырехвременны́е корреляторы от $\hat{F}$-операторов. Корреляторы более высокого порядка легко вычисляются, если предположить, что осцилляторы резервуара находятся, например, в тепловом равновесии, так что нормально упорядоченные моменты шума $\hat{F}(t)$ удовлетворяют гауссовской теореме моментов. Функция $\hat{F}(t)$ является дельта-коррелированной в той же степени, в какой и функция $\hat{f}(t)$.

17.4.6. Необратимость и стрела времени

Начнем с того, что рассмотрим простой квантовый осциллятор S, связанный с квантовым резервуаром R, общий гамильтониан которых $\hat{H}$ определяется соотношением (17.4.5). Согласно квантовой механике эволюция такой связанной системы описывается оператором эволюции

$$\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar). \tag{17.4.42}$$

При этом вектор состояния $|\psi(t)\rangle$ в момент времени t в картине Шредингера принимает вид

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle, \tag{17.4.43}$$

а динамическая переменная $\hat{Q}(t)$ в картине Гейзенберга равна

$$\hat{Q}(t) = \hat{U}^\dagger(t)\hat{Q}(0)\hat{U}(t). \tag{17.4.44}$$

Поскольку $\hat{U}(t)$ — унитарный оператор, то эволюция среднего значения любой динамической переменной должна быть строго обратимой во времени. Тем не менее, из выражений (17.4.22), (17.4.33) или (17.4.40)

ясно видно, что осциллятор S затухает во времени, и что решение имеет необратимый характер. Как это случилось и что определяет направление стрелы времени?

Ключевым элементом в вычислении является так называемая *гипотеза случайных фаз* в момент времени $t = 0$, что отражено в соотношениях (17.4.27) и в моментах величины $\hat{A}(\omega, 0)$ высшего порядка. Это означает, что различные осцилляторы резервуара не зависят ни друг от друга, ни от системы S. Однако вследствие связи между разными модами, вносимой гамильтонианом $\hat{H}$, корреляции должны постепенно развиваться во времени. Легко проверить, что соотношения типа (17.4.27) не могут строго выполняться в более поздние моменты времени t, если они выполнялись в момент $t = 0$. Гипотеза случайных фаз, следовательно, является ключевым элементом, определяющим направление времени. Если в некоторый момент t направление времени должно быть обращено, то начальные (при $t = 0$) условия могут быть восстановлены, только, если осцилляторы резервуара коррелировали в момент времени t. Можно подумать, что момент $t = 0$ играет особенную роль. В действительности, если резервуар достаточно большой и содержит много мод, корреляции, которые возникают по прошествии некоторого времени t могут быть настолько малыми, что состояние резервуара в момент t в картине Шредингера может и не отличаться существенно от его состояния в момент $t = 0$. Этого можно добиться, формально, выбирая резервуар, находящийся в состоянии теплового равновесия во все моменты времени, что, в свою очередь, означает, что резервуар является бесконечным. Бесконечное число степеней свободы придает направление стреле времени.

Задачи

17.1 Флуктуирующая действительная электродвижущая сила $V(t)$ между концами активного сопротивления R при температуре T имеет следующую функцию корреляции n-го порядка

$$\langle V(t_1)V(t_2)\dots V(t_n)\rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ — нечетное,} \\ \sum (2kTR)^{n/2}\delta(t_1 - t_2)\delta(t_3 - t_4)\dots\delta(t_{n-1} - t_n), & \text{если } n \text{ — четное,} \end{cases}$$

где сумма берется по всем возможным парам, образуемым из n различных моментов времени. Сопротивление R включается параллельно индуктивности L. Используя только предоставленную информацию, вычислите распределение вероятности и спектральную плотность тока, протекающего по RL-контуру в установившемся режиме.

17.2 Квантовый гармонический осциллятор с частотой ω_0 и амплитудой $\hat{a}(t)$ взаимодействует с набором квантовых осцилляторов резервуара с различными частотами ω и амплитудами $\hat{A}(\omega, t)$. Общий гамильтониан системы равен

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \sum_\omega \hbar\omega\left[\hat{A}^\dagger(\omega)\hat{A}(\omega) + \frac{1}{2}\right] + \sum_\omega \hbar[g(\omega)\hat{a}^\dagger\hat{A}(\omega) + \text{э.с.}].$$

Покажите, что уравнение движения для $\hat{a}(t)$ может быть представлено в форме уравнения Ланжевена $\dot{\hat{a}}(t) = (-i\omega_0 - \kappa)\hat{a}(t) - \hat{F}(t)$ с квантовым шумом $\hat{F}(t)$ и вычислите коммутатор $[\hat{F}(t), \hat{F}^\dagger(t')]$.

17.3 Рассмотрим эволюцию изолированной квантовой системы. Матрица плотности в момент времени t в картине Шредингера равна $\rho_{nm}(t)$. При каких условиях вероятность $p_n(t)$ нахождения системы в состоянии $|n\rangle$ в момент времени t удовлетворяет уравнению

$$p_n(t) = \sum_m \mathscr{P}(n, t|m, t_0)p_m(t_0), \quad (t \geqslant t_0),$$

в котором $\mathscr{P}(n, t|m, t_0)$ есть вероятность перехода?

17.4 Покажите для системы из задачи 17.3, что амплитуда вероятности $\langle n|\exp(-i\hat{H}t/\hbar)|m\rangle$ удовлетворяет соотношению типа Смолуховского — Чепмена — Колмогорова.

17.5 Пусть квантовая система из задачи 17.3 представляет собой гармонический осциллятор с собственными энергетическими состояниями $|n\rangle$, подвергаемый возмущению $\hat{V}(t)$, недиагональному в базисе $|n\rangle$. Найдите вероятность перехода $\mathscr{P}(n, t + \Delta t|m, t)$ с точностью до членов второго порядка по Δt.

Глава 18

ОДНОМОДОВЫЙ ЛАЗЕР

18.1. Введение

Идея использования явления вынужденного излучения атома или молекулы для усиления электромагнитного поля и, кроме того, идея объединения такого усилителя с резонатором для получения генератора колебаний принадлежит Таунсу и его сотрудникам (Gordon, Zeiger and Townes, 1954, 1955), а также, независимо от них, — Басову и Прохорову (Basov and Prokhorov, 1954, 1955). Последние сконструировали первый МАЗЕР (сокращение от ***microwave amplifier by stimulated emission of radiation***[1]). В 1958 году Шавлов и Таунс предложили использовать тот же принцип в оптическом диапазоне (Schawlow and Townes, 1958), где в качестве оптического резонатора используется двухзеркальный интерферометр Фабри — Перо, а в качестве активной среды — возбужденная группа атомов. Первый ЛАЗЕР (сокращение от ***light amplifier by stimulated emission of radiation***[2]) был сконструирован Мейменом (Maiman, 1960). Активной средой служил рубин, который возбуждался яркой вспышкой света от газоразрядной трубки, после чего лазер высвечивал короткий оптический импульс. Первый лазер непрерывного действия, был создан Джаваном с сотрудниками (Javan, Bennett and Herriott, 1961). В качестве активной среды в нем использовалась гелий-неоновая газовая смесь, которая непрерывно возбуждалась электрическим разрядом. Этот тип лазера до сих пор широко используется. С тех пор было разработано множество различных типов лазеров с длиной волны от инфракрасной до ультрафиолетовой областей. Некоторые из них генерируют свет сразу на нескольких различных частотах, а некоторые могут перестраиваться в широком диапазоне. Излучение лазера может быть в высокой степени когерентным и, независимо от длины волны, оно той же физической природы, что и излучение радиочастотного генератора. Действительно, квантовое состояние лазерного поля может быть близким к когерентному состоянию, которое обсуждалось в гл. 11. Более того, поскольку электромагнитная энергия сосредоточена, как правило, в одной моде или в малом количестве мод, число фотонов в одной моде может быть чрезвычайно большим (Mandel, 1961). В результате, поле излучения лазера может стать ближе к классическому, чем поле почти любого другого источника.

Почти у всех лазеров можно выделить четыре общих элемента:

(а) оптический резонатор, образуемый обычно двумя или более зеркалами;

(б) активная среда, в которой создается инверсная атомная населенность рабочих энергетических уровней[3];

(в) оптическая накачка или источник энергии для возбуждения активной среды;

(г) механизм потерь, посредством которого рассеивается энергия.

---

[1] Усилитель в диапазоне СВЧ, основанный на индуцированном излучении.

[2] Усилитель в оптическом диапазоне, основанный на индуцированном излучении. Буква А в словах MASER и LASER иногда обозначает «усиление» (amplification), а не «усилитель» (amplifier), так что сокращения MASER и LASER в этих случаях обозначают процесс, а не устройства.

[3] Недавно были предложены и исследованы лазеры без инверсии населенностей (Kocharovskaya and Khanin, 1988; Harris, 1989; Scully, Zhu and Gavrielides, 1989; Imamoglu, 1989; Imamoglu and Harris, 1989; Agarwal, Ravi and Cooper, 1990; Narducci, Doss, Ru, Scully, Zhu and Keitel, 1991). Мы не будем их рассматривать здесь.

На рис. 18.1 показан типичный лазер, в котором резонатором служит интерферометр Фабри — Перо, а усилителем является газовая плазменная трубка, в которой поддерживается электрический разряд. Для уменьшения потерь при отражении, торцевые окна плазменной трубки, как правило, ориентируют под углом Брюстера для линейно-поляризованного света на частоте лазера. Торцевые зеркала обычно снабжаются многослойными просветляющими покрытиями, которые делают их сильно отражающими. Выходное зеркало, конечно, должно иметь коэффициент отражения меньше чем 100 %, так что именно оно, обычно, является главным источником энергетических потерь, которые должны компенсироваться активной средой. Зеркала резонатора играют важную роль в возвращении фотонов, принадлежащих лазерным модам, обратно в лазерный резонатор. Большинство спонтанно излучаемых фотонов, распространяющихся в различных других направлениях, теряются. Однако фотоны, относящиеся к моде резонатора, повторно взаимодействуют с атомами активной среды, и их число растет за счет вынужденного излучения (см. рис. 18.2). Как только одна мода становится достаточно заселенной, вероятность вынужденного излучения в эту моду начинает превышать вероятность спонтанного излучения (см. разд. 15.4).

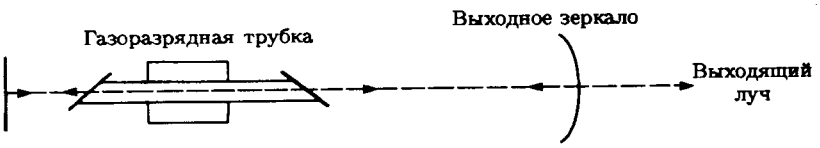


Рис. 18.1. Простейшая схема лазера

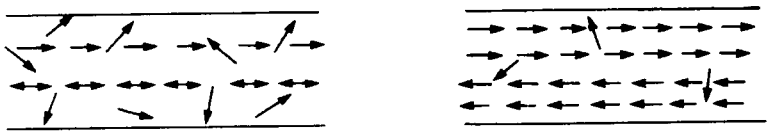


Рис. 18.2. Рост вероятности вынужденного излучения при увеличении мощности

В общем случае, когда скорость возвращения фотонов в моду оптического резонатора превышает скорость их ухода из резонатора за счет механизма потерь, амплитуда лазерного поля начинает возрастать до тех пор, пока не достигнет стационарного состояния. На этой стадии скорость излучения лазера равна суммарной скорости поставки энергии. Легко видеть, что это достигается за счет инверсии населенностей двух рабочих уровней, когда в верхнем состоянии находится больше атомов, чем в нижнем. Пусть N_2 и N_1 — населенности верхнего и нижнего состояний, тогда скорость поглощения лазерных фотонов атомной системой будет пропорциональна N_1, а скорость вынужденного излучения лазерных фотонов системой атомов будет пропорциональна N_2, с одинаковой константой пропорциональности (см. разд. 15.4). Если N_2 в достаточной степени превышает N_1, все потери на излучение могут быть скомпенсированы атомной системой.

18.1.1. Условие лазерной генерации

Нетрудно прийти к более количественному, но все еще очень приближенному условию лазерной генерации с инверсной населенностью. Если имеется N_2 возбужденных атомов, то полная скорость спонтанного излучения фотонов, согласно (15.4.9), равна AN_2, где A — коэффициент Эйнштейна A для рассматриваемого перехода. Это излучение охватывает M различных мод резонатора, каждая из которых находится в пределах естественной ширины линии A. Зная плотность мод резонатора $V/4\pi^3$ для двух поляризаций (ср. гл. 10), где V — объем резонатора, находим [ср. вычисление формулы (13.1.15)], что

$$M \approx \frac{V}{4\pi^3}\left(\frac{\omega_0^2 A}{c^3}\right)4\pi = \frac{\omega_0^2 V A}{\pi^2 c^3}, \tag{18.1.1}$$

где ω_0 — частота атомного перехода. В действительности, моды открытого резонатора типа Фабри — Перо не являются плоскими модами, которые использовались в гл. 10. Моды Фабри — Перо имеют более сложную структуру и рассматривались Фоксом и Ли (Fox and Li, 1961), а также другими авторами (Boyd and Gordon, 1961; Kogelnik and Li, 1966). Пока мы этим пренебрежем.

Скорость спонтанного излучения фотона в одну моду резонатора, следовательно, равна

$$\frac{AN_2}{M} = \frac{\pi^2 c^3}{\omega_0^2 V} N_2.$$

Скорость вынужденного излучения в ту же самую моду равна скорости спонтанного излучения, умноженной на число заполнения n данной моды (ср. разд. 15.4)

$$\text{Скорость вынужденного излучения возбужденными атомами в заданную моду резонатора} = \frac{\pi^2 c^3 N_2 n}{\omega_0^2 V}. \tag{18.1.2}$$

Можно сразу записать аналогичное выражение для скорости поглощения фотонов из моды резонатора атомами, находящимися в основном состоянии, заменив N_2 в (18.1.2) на N_1. Разность между двумя скоростями есть результирующая скорость излучения фотонов. Чтобы лазерная генерация имела место, эта скорость должна быть больше или равна скорости n/T_L потери фотонов из данной моды резонатора, так что

$$\frac{n\pi^2 c^3 (N_2 - N_1)}{\omega_0^2 V} \geqslant \frac{n}{T_L}, \tag{18.1.3}$$

где T_L — среднее время жизни фотона в моде резонатора, которое можно оценить, зная длину резонатора l и коэффициент отражения R выходного зеркала лазера, если прохождение через зеркало является основным источником потери фотонов. В этом случае величину $(1 - R)$ можно рассматривать как вероятность того, что фотон теряется всякий раз, когда он сталкивается с выходным зеркалом. Умножая эту вероятность на частоту столкновений фотона с зеркалом $c/2l$, получаем обратное время жизни $1/T_L$ одного фотона

$$1/T_L = (c/2l)(1 - R). \tag{18.1.4}$$

Из соотношений (18.1.3) и (18.1.4) получаем следующее условие для лазерной генерации в одну моду резонатора

$$N_2 - N_1 \geqslant \frac{\omega_0^2 \mathscr{A}}{2\pi^2 c^2}(1 - R) = \frac{2\mathscr{A}}{\lambda^2}(1 - R), \tag{18.1.5}$$

где $\mathscr{A}$ — площадь поперечного сечения лазера и λ — длина волны. Ясно, что чем больше коэффициент пропускания $1 - R$ выходного зеркала, тем больше должна быть атомная инверсия $N_2 - N_1$, необходимая для работы лазера. Эквивалентная форма условия (18.1.5), которая иногда оказывается полезной, записывается через так называемую *добротность резонатора* Q, определяемую по формуле

$$Q \equiv \frac{2\pi l/\lambda}{1 - R}. \tag{18.1.6}$$

Грубо говоря, Q есть мера периода, за который амплитуда генерации уменьшается в e раз (в 2.718 раз). Если ввести плотности ρ_2, ρ_1 атомов в верхнем и нижнем состоянии по формуле $\rho_i = N_i/\mathscr{A}l, (i = 1, 2)$, то можно переписать условие (18.1.5) в эквивалентном виде

$$(\rho_2 - \rho_1)\lambda^3 \geqslant 4\pi/Q, \tag{18.1.7}$$

согласно которому атомная инверсия в кубе со стороной, равной длине волны, должна быть больше $4\pi/Q$. Эти условия позволяют оценить скорость оптической накачки, которая требуется для работы лазера, но их нельзя рассматривать как точные условия.

Неравенства (18.1.5) и (18.1.7), конечно, ничего не говорят о том, как развивается лазерное поле. Наиболее важные ранние работы по динамике лазера были сделаны Лэмбом (Lamb, 1964) и Хакеном (Haken, 1964) (см. также Haken and Sauermann, 1963a, b). Мы начнем с изложения подхода, использованного Лэмбом, в котором поле излучения рассматривается полностью классически[1].

18.2. Полуклассическая теория лазера

В теории Лэмба (Lamb, 1964) лазерное поле вводится самосогласованным образом и получается уравнение движения для амплитуды поля. Его рассуждения можно резюмировать следующим образом:

[1] Для более полного ознакомления с теорией лазеров см. книги (Siegman, 1986) и (Milonni and Eberly, 1988), которые содержат обилие деталей по конкретным лазерам.

(а) Предполагается, что атомы с энергетическим интервалом $\hbar\omega_0$ между двумя рабочими уровнями помещаются в оптический резонатор, который настроен на резонансную частоту близкую к ω_0, и создана инверсия населенностей этих двух уровней;

(б) В резонаторе имеется классическое лазерное поле $\mathbf{E}$ частоты ω_0 или близкой к ω_0;

(в) Поле действует на каждый атом и индуцирует дипольный момент согласно квантово-механическим уравнениям движения;

(г) Сумма всех элементарных атомных дипольных моментов составляет макроскопическую поляризацию $\mathbf{P}$ активной среды;

(д) Поляризация $\mathbf{P}$ действует как «источник» в уравнениях Максвелла для электромагнитного поля и приводит к возникновению лазерного поля $\mathbf{E}$;

(е) Поле $\mathbf{E}$ приравнивается к полю, которое вводилось на этапе (б).

Для реалистического описания работы лазера необходимо учесть естественную атомную форму линии и любое движение атомов, которое приводит к неоднородному уширению. Хотя это и выявляет некоторые интересные свойства лазера, такие как *лэмбовский провал* в спектре (Lamb, 1964), но это усложняет вычисления и в какой-то мере затрудняет понимание основного механизма работы лазера. Поэтому мы отбросим эти усложнения и сконцентрируемся на сущности лазерного процесса, считая атомы одинаковыми, в высшей степени резонансными, двухуровневыми квантовыми системами. В полуклассической теории потери электромагнитного поля в резонаторе, легче всего моделируются введением некоторой проводящей среды, которая, естественно, вызывает затухание поля в резонаторе с течением времени. Если σ есть удельная проводимость этой искусственной среды, то плотность тока $\mathbf{j}$ в резонаторе можно заменить величиной $\sigma\mathbf{E}$, и уравнения Максвелла для поля принимают, в системе СИ, вид

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{D} &= 0, \\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0, \\ \nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla\times\mathbf{E} &= \mu_0\sigma\mathbf{E}+\mu_0\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{18.2.1}$$

где $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$.

Взяв ротор обеих частей третьего уравнения и воспользовавшись четвертым уравнением для исключения $\mathbf{B}$, придем к следующему уравнению движения для лазерного поля $\mathbf{E}$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})+\mu_0\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2}=0. \tag{18.2.2}$$

Здесь обычно делаются некоторые упрощения. Предположим, прежде всего, что поле поляризовано, как это, обычно, имеет место на практике, и что как $\mathbf{E}$, так и $\mathbf{P}$, можно рассматривать как скаляры. Более того, основное пространственное изменение E будет иметь место в направлении оси лазера, принимаемую нами за ось z, так что $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})$ приблизительно равно $-\partial^2E/\partial z^2$. Тогда уравнение (18.2.2) принимает вид

$$-\frac{\partial^2E}{\partial z^2}+\mu_0\sigma\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2E}{\partial t^2}+\mu_0\frac{\partial^2P}{\partial t^2}=0. \tag{18.2.3}$$

Теперь, разложим $E(\mathbf{r},t)$ по нормальным модам оптического резонатора и воспользуемся приближением медленно меняющихся амплитуд.

18.2.1. Нормальные моды резонатора

Нормальные моды пустого резонатора могут быть определены как решения уравнения Гельмгольца

$$(\nabla^2+\omega^2/c^2)u(\mathbf{r})=0,$$

которые удовлетворяют подходящим граничным условиям. В общем случае, существует дискретный набор собственных частот ω_0 и ортогональный набор собственных функций $u_n(\mathbf{r})$, которые удобно различать с помощью индекса n. Мы можем тогда разложить любое электрическое поле $E(\mathbf{r},t)$ в резонаторе по нормальным модам, записав

$$E(\mathbf{r},t) = \sum_n \mathscr{E}_n(t) u_n(\mathbf{r})\, \mathrm{e}^{-i\omega_n t} + \text{к.с.}, \tag{18.2.4}$$

где коэффициенты $\mathscr{E}_n(t)$ есть комплексные амплитуды мод. Вводя осциллирующий множитель $e^{-i\omega_n t}$, мы гарантируем, что $\mathscr{E}_n(t)$ является относительно медленно изменяющейся амплитудой. В общем случае, n обозначает сразу три целых числа. Однако большинство лазерных резонаторов открыты. Они не ограничены замкнутыми поверхностями, а ограничены двумя неполностью отражающими зеркалами, так что формальное определение моды в этом случае, строго говоря, неприменимо. Тем не менее, принято говорить о модах резонатора, или квазимодах, в том смысле, что после многих отражений добавочные отражения практически не меняют распределение поля квазимоды в резонаторе. Это условие использовалось для вывода приблизительного вида модовых функций двухзеркального резонатора (Fox and Li, 1961; Boyd and Gordon, 1961; ср. также разд. 7.4). В случае простой геометрии легко найти приближенный вид $u_n(\mathbf{r})$. Например, для оптического резонатора, образованного плоскими зеркалами с координатами $z = 0$ и $z = l$, очевидным приближением для набора частот ω_n и модовых функций $u_n(\mathbf{r})$ является следующее

$$\omega_n = n\pi c/l, \quad u_n(\mathbf{r}) = \sin(\pi n z/l) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{18.2.5}$$

где $u_n(\mathbf{r})$ обращается в нуль на поверхности каждого зеркала и целое число n, обычно, является очень большим. Однако ситуация становится более сложной, когда мода не аппроксимируется плоской волной, распространяющейся вдоль оси. В работах (Boyd and Gordon, 1961; Kogelnik and Li, 1966) было показано, что для конфокального резонатора, образованного двумя сферическими зеркалами радиуса l, разнесенными на расстояние l вдоль оси, модовые функции $u_n(\mathbf{r})$ в параксиальном приближении обычно характеризуются тремя целыми числами n, p и q и задаются формулой

$$u_{npq}(x,y,z) = K H_p\left[\left(\frac{2kl}{l^2+4z^2}\right)^{1/2} x\right] H_q\left[\left(\frac{2kl}{l^2+4z^2}\right)^{1/2} y\right] \exp\left[-\frac{(x^2+y^2)kl}{l^2+4z^2}\right] \mathrm{e}^{-i\psi(x,y,z)}, \tag{18.2.6}$$

где K — нормировочный множитель; начало системы координат находится в центральной точке конфокального резонатора и ось z совпадает с осью резонатора; $H_p(X)$ — полином Эрмита p-го порядка; фазовая функция $\psi(x,y,z)$, синус которой обращается в нуль на двух зеркалах, задается выражением

$$\psi(x,y,z) = k\left[z + \frac{1}{2}l + \frac{2z(x^2+y^2)}{l^2+4z^2}\right] - (1+p+q)\left[\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1-2z/l}{1+2z/l}\right)\right]. \tag{18.2.7}$$

k — волновое число моды n, p, q. Из условия резонанса получаем соотношение

$$k = (\pi/2l)(2n+1+p+q). \tag{18.2.8}$$

Моды низшего порядка, или *аксиальные моды*, имеют $p = 0 = q$. В этом случае, соответствующие модовые функции $u_{n00}(\mathbf{r})$ принимают вид распределения Гаусса с аксиальной симметрией. Необходимо отметить, что хотя неаксиальные модовые числа p и q обычно малы или равны нулю, аксиальное модовое число n является очень большим и характеризует число пучностей стоячей волны в лазерном резонаторе. Частотный интервал $\Delta\nu$ между двумя соседними аксиальными модами равен $c/2l$. Из-за гауссовской формы их иногда называют *гауссовскими модами*. Можно показать, что различные модовые функции, задаваемые формулой (18.2.6) образуют полное ортогональное множество и мы можем выбрать константу K в выражении (18.2.6) так, чтобы они были нормированы на объем резонатора V, что делает функцию $u_n(\mathbf{r})$ безразмерной, т.е.

$$\int u^*_{npq}(\mathbf{r}) u_{n'p'q'}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \delta_{nn'}\delta_{pp'}\delta_{qq'} V. \tag{18.2.9}$$

Объем интегрирования распространяется на все значения x, y и на значения z, соответствующие промежутку между зеркалами. Моды, задаваемые выражением (18.2.5), нормируются в трех измерениях только в том случае, когда стоячие волны имеют конечную площадь поперечного сечения $\mathscr{A}$. При этом константа K принимает вид $(2/\mathscr{A}l)^{1/2}$.

Данные моды были обобщены (Fox and Li, 1961; Boyd and Gordon, 1961; Kogelnik and Li, 1966) на случай резонатора длиной l, образованного двумя зеркалами с произвольными радиусами кривизны R_1 и R_2. Эти моды имеют такую же общую структуру, как и моды (18.2.6), за исключением того, что начало системы координат должно находиться в перетяжке луча, которая может не совпадать с центральной точкой резонатора. Дополнительное ограничение состоит в том, что должно выполняться неравенство

$$0 \leqslant \left(1 - \frac{1}{R_1}\right)\left(1 - \frac{1}{R_2}\right) \leqslant 1. \qquad (18.2.10)$$

Данное условие известно, как условие стабильности резонатора, и в случае его невыполнения нормальные моды в обычном смысле не существуют. Тем не менее, «нестабильные» резонаторы (см., например, Siegman, 1971) иногда используются в импульсных лазерах большой мощности, поскольку они обладают свойством распределять оптическое поле по большому объему активной среды. На рис. 18.3 приведены структуры некоторых неаксиальных мод, полученные при фотографировании торца газового лазера. Отметим, что число световых пятен вдоль x- или y- направления превышает модовое число p или q на единицу.

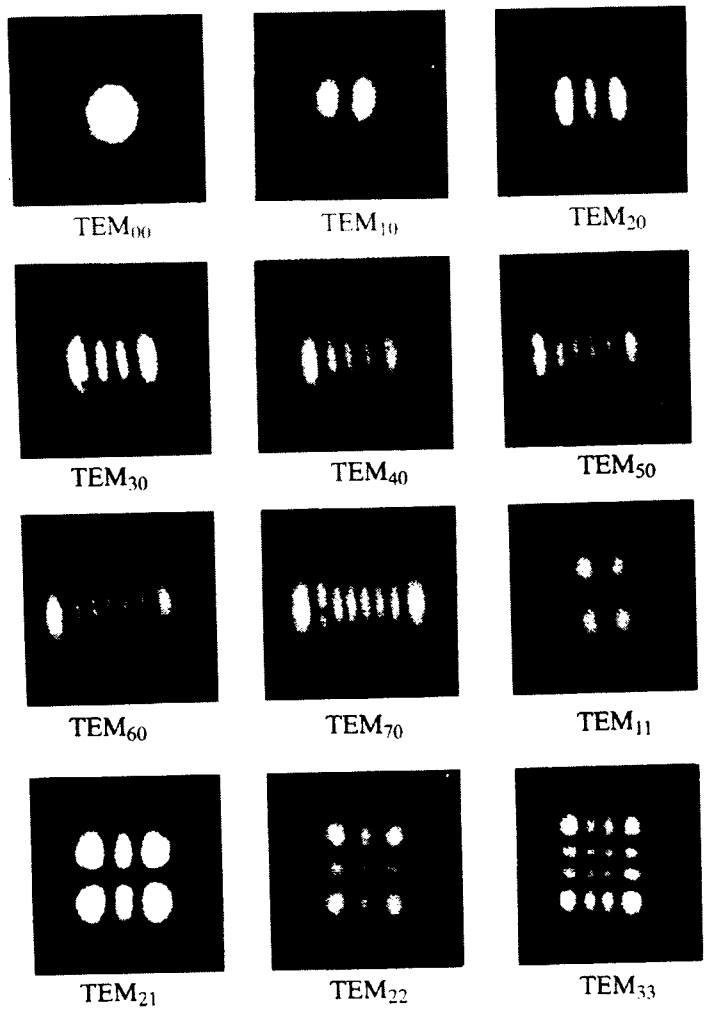


Рис. 18.3. Распределение интенсивности в различных модах поперечного электрического поля (TEM) (Kogelnik and Rigrod, 1962). Индексы соответствуют величинам p и q

В этой главе будут рассматриваться лазеры, в которых возбуждается только одна мода резонатора, так что индексы мод можно опустить, и выражение (18.2.4) заменяется следующим

$$E(\mathbf{r}, t) = \mathscr{E}(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}u(\mathbf{r}) + \text{к.с.} \qquad (18.2.11)$$

Вид модовой функции $u(\mathbf{r})$ играет незначительную роль в уравнении движения лазерного поля и для многих целей нет необходимости в его явном определении. В том случае, когда требуется явный вид $u(\mathbf{r})$, мы будем, как правило, выбирать аксиальную модовую функцию $u_{n00}(\mathbf{r})$ или еще более простую, задаваемую выражением (18.2.5).

18.2.2. Уравнение движения для лазерного поля

Подставим выражение (18.2.11) в уравнение движения (18.2.3) и воспользуемся приближением медленно меняющихся амплитуд для $\mathscr{E}(t)$, которое означает, что

$$\left|\frac{d\mathscr{E}(t)}{dt}\right| \ll \omega|\mathscr{E}(t)|, \quad \left|\frac{d^2\mathscr{E}(t)}{dt^2}\right| \ll \omega\left|\frac{d\mathscr{E}(t)}{dt}\right|.$$

Это позволяет упростить производные по времени

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \left[\frac{d\mathscr{E}(t)}{dt} - i\omega\mathscr{E}(t)\right]\mathrm{e}^{-i\omega t}u(\mathbf{r}) + \text{к.с.},$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \left[\frac{d^2\mathscr{E}(t)}{dt^2} - 2i\omega\frac{d\mathscr{E}(t)}{dt} - \omega^2\mathscr{E}(t)\right]\mathrm{e}^{-i\omega t}u(\mathbf{r}) + \text{к.с.},$$

опуская первый член в каждом выражении из правой части. Предположим также, что поляризация $P(\mathbf{r},t)$ осциллирует примерно на той же частоте ω, что и электрическое поле, так что $\partial^2 P/\partial t^2$ можно заменить величиной $-\omega^2 P$. В результате изменение $u(\mathbf{r})$ вдоль оси z целиком определяется членом $\sin kz$ в выражениях (18.2.5) или (18.2.6) и (18.2.7), так что

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{r})}{\partial z^2} \approx -k^2 u(\mathbf{r}) = -\frac{\omega^2}{c^2} u(\mathbf{r}).$$

В этих приближениях уравнение (18.2.3) сводится к следующему

$$-i\omega\left(2\frac{d\mathscr{E}}{dt} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathscr{E}\right) \mathrm{e}^{-i\omega t} u(\mathbf{r}) + \text{к.с.} = \frac{\omega^2}{\varepsilon_0} P(\mathbf{r},t). \tag{18.2.12}$$

Вообще говоря, это уравнение не является внутренне строго согласованным, поскольку решение для $\mathscr{E}(t)$ зависит от $\mathbf{r}$, но оно становится согласованным после интегрирования по объему резонатора. Причина состоит в том, что распределение активной среды в резонаторе должно быть конкретизировано до вычисления мод и их амплитуд. Если разложить поляризацию $P(\mathbf{r},t)$ на положительно-частотные и отрицательно-частотные части

$$P(\mathbf{r},t) = P^{(+)}(\mathbf{r},t) + P^{(-)}(\mathbf{r},t) = P^{(+)}(\mathbf{r},t) + \text{к.с.},$$

где, в первом приближении, $P^{(+)}(\mathbf{r},t)$ пропорциональна $e^{-i\omega t}$, а $P^{(-)}(\mathbf{r},t)$ пропорциональна $e^{i\omega t}$, то станет ясно, что

$$-i\omega\left(2\frac{d\mathscr{E}}{dt} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathscr{E}\right) \mathrm{e}^{-i\omega t} u(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2}{\varepsilon_0} P^{(+)}(\mathbf{r},t).$$

Теперь умножим каждое слагаемое на $u^*(\mathbf{r})$ и проинтегрируем по объему резонатора. Учитывая далее соотношение ортонормированности (18.2.9), получаем уравнение

$$-i\omega\left(2\frac{d\mathscr{E}}{dt} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathscr{E}\right) \mathrm{e}^{-i\omega t} = \frac{1}{V}\frac{\omega^2}{\varepsilon_0}\int P^{(+)}(\mathbf{r},t) u^*(\mathbf{r})\, d^3r. \tag{18.2.13}$$

Если активные атомы лазера распределены в резонаторе с некоторой плотностью $\eta(\mathbf{r})$, а средний дипольный момент атома в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t равен $\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r},t)\rangle$ и имеет определенное направление, то макроскопическая поляризация $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ равна

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \eta(\mathbf{r})\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r},t)\rangle. \tag{18.2.14}$$

Именно с этого момента, при вычислении среднего значения атомного дипольного момента $\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r},t)\rangle$, расчет становится квантово-механическим.

Чтобы вычислить $\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r},t)\rangle$ для типичного двухуровневого атома предположим, что за счет некогерентной оптической накачки атом первоначально переведен в смешанное состояние, характеризуемое оператором плотности

$$\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(0) = p_1|1\rangle\langle 1| + p_2|2\rangle\langle 2|, \tag{18.2.15}$$

так что имеется вероятность p_2 того, что атом возбужден и вероятность p_1 того, что он не возбужден. Мы уже видели, что для работы лазера необходимо, чтобы p_2 в среднем превышала p_1. Теперь допустим, что этот атом взаимодействует с классическим полем $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ в течение короткого промежутка времени Δt, по истечении которого данное состояние можно полагать распавшимся излучательно или безызлучательно, или же в результате столкновения. В разд. 15.3 мы обсуждали классическую задачу Раби, в которой атом взаимодействует с классическим электромагнитным полем постоянной амплитуды. В случае лазера амплитуда поля $\mathscr{E}(t)$ сама изменяется во времени. Однако если временно́й масштаб Δt, на котором атом взаимодействует с полем, намного меньше временно́го масштаба, на котором изменяется амплитуда лазерного поля $\mathscr{E}(t)$, мы можем считать величину $\mathscr{E}(t)$, фактически, постоянной в течение взаимодействия. В результате можно использовать решения (15.3.21) и (15.3.22). Если различием частот атома и поля можно пренебречь, то формула (15.3.22) сводится к следующему выражению для среднего атомного дипольного момента $\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r},t)\rangle$ в момент времени t в случае, когда атом находился в нижнем состоянии в начальный момент времени $t - \Delta t$

$$\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r},t)\rangle = \boldsymbol{\mu}_{12}\sin(\Omega\Delta t)\sin\omega t.$$

Как обычно, μ_{12} есть матричный элемент оператора дипольного момента перехода, который будем считать действительным, а Ω — частота Раби. Время Δt есть время, в течение которого продолжается взаимодействие. Оно играет роль времени жизни рабочего атома. Мы можем предположить, что по окончании времени Δt атом совершает переход в некоторое другое состояние, в котором он больше не взаимодействует с лазерным полем. Можно легко показать, что в случае, когда начальным состоянием атома является возбужденное состояние, получается похожее выражение, но с другим знаком. Если начальным состоянием является смешанное состояние, так что верхнее и нижнее состояния встречаются с вероятностями p_2 и p_1, соответственно, как в выражении (18.2.15), то среднее значение дипольного момента принимает вид

$$\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r},t)\rangle = -\frac{1}{2}i(p_2-p_1)\mu_{12}\sin(\Omega\Delta t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + \text{к.с.} \tag{18.2.16}$$

В действительности, существует приблизительно экспоненциальное распределение времен жизни Δt и необходимо усреднять по Δt. Если T есть среднее естественное время жизни, которое для простоты будем предполагать одинаковым для основного и возбужденного состояний, то уравнение (18.2.16) заменяется следующим

$$\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r},t)\rangle = -\frac{1}{2}i(p_2-p_1)\mu_{12}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\int_0^\infty \frac{1}{T}\exp\left(-\frac{\Delta t}{T}\right)\sin(\Omega\Delta t)\,d\Delta t + \text{к.с.} =$$

$$= -\frac{1}{2}i(p_2-p_1)\mu_{12}\frac{\Omega T}{1+\Omega^2T^2}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + \text{к.с.} = -\frac{1}{2}i(p_2-p_1)\mu_{12}\Omega T(1-\Omega^2T^2+\ldots)\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + \text{к.с.} \tag{18.2.17}$$

Если ΩT мало, то, как правило, достаточно сохранить только два первых члена в разложении $(1+\Omega^2T^2)^{-1}$ по степеням ΩT. Это означает, что мы исключаем очень сильные лазерные поля. Частота Раби Ω в настоящих обозначениях задается формулой [ср. выражение (15.3.12)]

$$\Omega = 2|\mu_{12}||\mathscr{E}(t)||u(\mathbf{r})|/\hbar, \tag{18.2.18}$$

при условии, что вектор дипольного момента $\boldsymbol{\mu}_{12}$ и вектор поляризации поля параллельны. Но необходимо отметить, что в случае резонанса фаза дипольного момента $\langle\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r},t)\rangle$ связана с фазой поля, так что изменение знака $\mathscr{E}(t)$ влечет за собой изменение направления дипольного момента. Таким образом, можно переписать (18.2.17) в виде скалярного уравнения

$$\langle|\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r},t)|\rangle = \frac{-i(p_2-p_1)\mu_{12}^2T}{\hbar}|\mathscr{E}(t)|\,\mathrm{e}^{-i\omega t}u(\mathbf{r})\left[1-\frac{4\mu_{12}^2T^2}{\hbar^2}|\mathscr{E}(t)|^2|u(\mathbf{r})|^2+\ldots\right] + \text{к.с.} \tag{18.2.19}$$

Умножая на плотность атомов $\eta(\mathbf{r})$, можно сразу определить положительно-частотную часть $P^{(+)}(\mathbf{r},t)$ поляризации $P(\mathbf{r},t)$. Объединяя этот результат с уравнением (18.2.13), получаем

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathscr{E} = \frac{(p_2-p_1)\mu_{12}^2\omega T}{2\varepsilon_0\hbar V}\mathscr{E}(t)\left[\int\eta(\mathbf{r})|u(\mathbf{r})|^2\,d^3r - \frac{4\mu_{12}^2T^2}{\hbar^2}|\mathscr{E}(t)|^2\int\eta(\mathbf{r})|u(\mathbf{r})|^4\,d^3r+\ldots\right]. \tag{18.2.20}$$

Данное выражение можно записать более компактно, если ввести среднюю атомную плотность

$$\bar{\eta} \equiv \frac{1}{V}\int\eta(\mathbf{r})|u(\mathbf{r})|^2\,d^3r \tag{18.2.21а}$$

и величину

$$F \equiv \frac{1}{V}\int\eta(\mathbf{r})|u(\mathbf{r})|^4\,d^3r. \tag{18.2.21б}$$

Тогда приходим к следующему уравнению движения

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \left[\frac{\omega\bar{\eta}(p_2-p_1)\mu_{12}^2T}{2\varepsilon_0\hbar}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right]\mathscr{E} - \frac{2\omega F\mu_{12}^4(p_2-p_1)T^3}{\varepsilon_0\hbar^3}|\mathscr{E}|^2\mathscr{E}. \tag{18.2.22}$$

Полученное уравнение похоже по структуре на уравнение, впервые выведенное ван дер Полем (van der Pol, 1922) и описывающее поведение электронного осциллятора в приближении медленно меняющейся амплитуды. Уравнение применимо в случае однородно уширенной активной среды, в которой все атомы резонансно взаимодействуют с полем. Если среда является неоднородно уширенной, уравнение (18.2.22) все еще имеет силу, при условии, что атомная плотность $\eta(\mathbf{r})$ относится только к тем атомам, частоты которых лежат в пределах естественной ширины лазерной линии.

Рассмотрим кратко следствия из этого уравнения. Когда амплитуда поля $\mathscr{E}$ достаточно мала, то в первом приближении можно пренебречь кубическим членом по $\mathscr{E}$. В этом случае уравнение описывает либо экспоненциальный рост, либо экспоненциальный спад, согласно формуле

$$\frac{\omega\bar{\eta}(p_2-p_1)\mu_{12}^2 T}{2\varepsilon_0\hbar} \gtrless \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Левая часть, которая пропорциональна инверсии населенностей, очевидно, характеризует *усиление* среды (при условии, что $p_2 > p_1$), а правая часть, которая пропорциональна проводимости σ, очевидно, соответствует *потерям*. Действительно, σ может быть связана с добротностью Q моды резонатора соотношением $\sigma/2\varepsilon_0 = \omega/Q$. Когда имеет силу точное равенство, усиление точно равно потерям, что соответствует *порогу* генерации. Таким образом, порог характеризуется минимальной плотностью атомной инверсии, которая определяется соотношением

$$\bar{\eta}(p_2-p_1)_{\text{порог}} = \frac{\hbar\sigma}{\omega\mu_{12}^2 T}. \tag{18.2.23}$$

Выше порога, когда усиление превышает потери, амплитуда $\mathscr{E}(t)$ растет экспоненциально до тех пор, пока нелинейный член или член насыщения не начнет проявлять себя и подавлять дальнейший рост. Однако, необходимо отметить, что начальный рост зависит от наличия в начале процесса ненулевого поля. В отсутствии последнего, поле остается нулевым во все последующие моменты времени, какой бы высокой ни была инверсия. В этом состоит основной недостаток полуклассического подхода. С использованием более компактных обозначений[1]

$$\mathscr{A} \equiv \omega\bar{\eta}(p_2-p_1)\mu_{12}^2 T/2\varepsilon_0\hbar, \quad \mathscr{C} \equiv \sigma/2\varepsilon_0, \quad \mathscr{B} \equiv 2\omega F(p_2-p_1)\mu_{12}^4 T^3/\varepsilon_0\hbar^3 \tag{18.2.24}$$

для коэффициентов усиления, потерь и нелинейных членов, уравнение (18.2.22) запишется в виде

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \mathscr{B}\left[\frac{\mathscr{A}-\mathscr{C}}{\mathscr{B}} - |\mathscr{E}|^2\right]\mathscr{E}. \tag{18.2.25}$$

Иногда удобно исключить один или более из трех параметров $\mathscr{A}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{B}$ введением новых безразмерных переменных. Например, можно определить безразмерную меру $\tilde{\mathscr{E}}$ амплитуды поля, полагая

$$\tilde{\mathscr{E}}(t) \equiv (\mathscr{B}/\mathscr{A})^{1/2}\mathscr{E}(t), \tag{18.2.26}$$

и безразмерный *параметр накачки* a, нормируя разность коэффициентов усиления и потерь

$$a \equiv \frac{\mathscr{A}-\mathscr{C}}{\mathscr{A}}.$$

По определению, величина a положительна в области выше порога и отрицательна в области ниже порога. Тогда уравнение движения для амплитуды лазерного поля $\tilde{\mathscr{E}}$ принимает более компактный вид

$$\frac{d\tilde{\mathscr{E}}}{dt} - \mathscr{A}\left[a - |\tilde{\mathscr{E}}|^2\right]\tilde{\mathscr{E}} = 0. \tag{18.2.27}$$

Параметр $\mathscr{A}$ также можно исключить введением безразмерной меры времени $\tilde{t} = \mathscr{A}t$. Однако мы пока оставим $\mathscr{A}$ на месте, поскольку это окажется в дальнейшем более удобным.

[1] Не нужно путать $\mathscr{A}$ в данном случае с площадью поперечного сечения лазерного луча, которая обозначалась таким же образом в разд. 18.1.1.

Полагая $d\tilde{\mathscr{E}}/dt = 0$, получаем стационарное решение. Ниже порога единственным стационарным решением является решение $\tilde{\mathscr{E}} = 0$, тогда как выше порога существует ненулевое стационарное решение, и, в пределе больших времен, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathscr{E}} &= 0 \quad \text{для } a \leqslant 0, \\ |\tilde{\mathscr{E}}|^2 &= a \quad \text{для } a \geqslant 0. \end{aligned} \tag{18.2.28}$$

Выше порога, всякий раз когда интенсивность света $|\tilde{\mathscr{E}}(t)|^2$ оказывается меньше a, амплитуда растет со временем до тех пор, пока не станет $|\tilde{\mathscr{E}}(t)|^2 = a$, а всякий раз когда $|\tilde{\mathscr{E}}(t)|^2$ оказывается больше a, амплитуда падает до тех пор, пока не станет $|\tilde{\mathscr{E}}(t)|^2 = a$. Очевидно, в наших безразмерных единицах величина a задает интенсивность лазерного поля в стационарном состоянии выше порога. На рис. 18.4 показаны зависимости амплитуды и интенсивности лазерного поля в стационарном состоянии от параметра накачки a, который, в свою очередь, является линейной функцией от скорости возбуждения. Как только инверсия населенности превышает критическое значение, задаваемое формулой (18.2.23), стационарная интенсивность света растет пропорционально a. Конечно, когда параметр накачки становится очень большим и интенсивность света достаточно высокой, кубическое приближение в (18.2.17) может стать неудовлетворительным. Это, обычно, случается, когда усиление превосходит потери хотя бы на несколько процентов, что, однако, уже соответствует довольно сильному возбуждению. Тем не менее, кубическое приближение имеет силу в довольно широких пределах работы лазера.

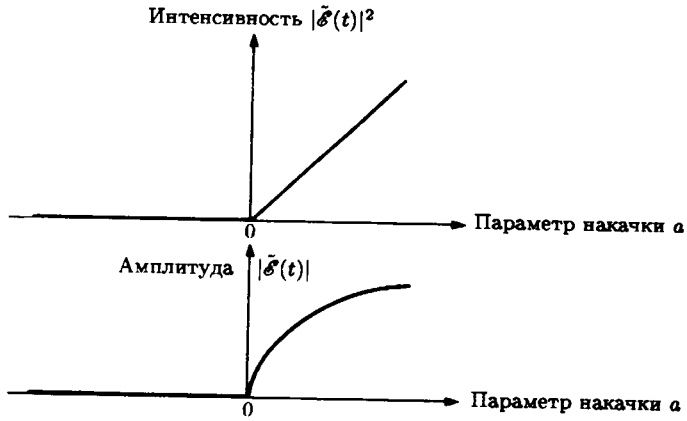


Рис. 18.4. Зависимость стационарных значений интенсивности и абсолютной амплитуды лазерного поля от параметра накачки

Несмотря на простоту уравнения (18.2.27), его общее решение не является очень простым из-за нелинейного характера уравнения. Мы обсудим временны́е свойства лазерного поля немного позже в разд. 18.6, после того, как учтем шум спонтанного излучения.

18.2.3. Аналогия с фазовым переходом

Можно представить стационарное решение уравнения движения (18.2.27) в виде

$$(\mathscr{A} - \mathscr{C})\tilde{\mathscr{E}} - \mathscr{A}|\tilde{\mathscr{E}}|^2\tilde{\mathscr{E}} = 0. \tag{18.2.29}$$

Ряд исследователей, занимающихся лазерной проблематикой, заметили, что это уравнение имеет поразительное сходство с уравнениями, которые используются для описания *фазовых переходов* в некоторых физических системах (Degiorgio and Scully, 1970; Graham and Haken, 1970; Scully, 1973; Graham, 1975; Haken 1975a, b, 1977, гл. 6, 1985). Например, намагниченность M ферромагнитного вещества в окрестности температуры Кюри T_C (температура, при которой происходит фазовый переход) зависит от температуры T, согласно уравнению (закон Вейсса)

$$c(T - T_C)M + gTM^3 = 0, \tag{18.2.30}$$

где c, g — положительные константы. До тех пор, пока температура остается выше температуры Кюри, единственное решение уравнения есть $M = 0$. Однако, как только $T < T_C$, уравнение (18.2.30) дает ненулевое решение для намагниченности, и мы имеем

$$\begin{aligned} M &= 0 && \text{для } T \geqslant T_C, \\ M^2 &= \frac{c}{g}\left(\frac{T_C - T}{T}\right) && \text{для } T \leqslant T_C. \end{aligned} \tag{18.2.31}$$

Если намагниченности M сопоставить абсолютную амплитуду лазерного поля $|\tilde{\mathscr{E}}|$, температуре Кюри T_C — коэффициент потерь $\mathscr{C}$, а температуре T — коэффициент усиления $\mathscr{A}$, то получим почти полное соответствие между уравнениями (18.2.29) и (18.2.30) и между решениями (18.2.28) и (18.2.31). В случае

ферромагнетика появление спонтанной намагниченности M ниже температуры Кюри связано с определенным упорядочением магнитных диполей, а в случае лазера появление макроскопического поля $\tilde{\mathscr{E}}$, когда усиление превосходит потери, связано с определенным упорядочением или сфазированием атомных осцилляторов. В обоих случаях, при $T = T_C$, или при $\mathscr{A} = \mathscr{C}$, имеет место существенное изменение в порядке системы, которое называется ***фазовым переходом***. Намагниченность M и амплитуда поля $|\tilde{\mathscr{E}}|$ называются ***параметрами порядка*** для соответствующих фазовых переходов. На рис. 18.5 приведены для сравнения зависимости $\tilde{\mathscr{E}}$ от $\mathscr{A}$ и M от T. В обоих случаях параметр порядка обращается в нуль в неупорядоченной



Рис. 18.5. Сравнение фазовых переходов в лазере и ферромагнетике. $|\mathscr{E}|$ является параметром порядка в первом случае, а M — во втором. Фазовый переход происходит при $\mathscr{A} = \mathscr{C}$ или при $T = T_C$

фазе и растет в упорядоченной фазе. Оба параметра порядка являются макроскопическими переменными, которые можно рассматривать как проявления величины микроскопического порядка в системе и, в то же время, как макроскопические силы, стремящиеся ***вынудить*** микроскопические системы принять определенное направление. Параметры порядка отражают коллективное воздействие всех микроскопических подсистем друг на друга. Они «дают указания» всем подсистемам и держат их в порядке. Таким образом, параметры порядка можно рассматривать в качестве генералов, контролирующих и отдающих приказ на марш войскам (Graham, 1975; Haken, 1975a, 1977). Аналогию между лазером и ферромагнетиком можно распространить еще дальше. Например, если наложить внешнее намагничивающее поле H на ферромагнитное вещество, то правую часть уравнения (18.2.30) нужно заменить величиной H, и оно принимает следующий вид

$$c(T - T_C)M + gTM^3 = H. \tag{18.2.32}$$

Если к лазеру приложить внешнее резонансное электромагнитное поле с амплитудой $\tilde{\mathscr{E}}_0$, то уравнение (18.2.29) заменяется следующим

$$(\mathscr{A} - \mathscr{C})\tilde{\mathscr{E}} - \mathscr{A}|\tilde{\mathscr{E}}|^2\tilde{\mathscr{E}} = -\tilde{\mathscr{E}}_0. \tag{18.2.33}$$

Введем теперь ***восприимчивость*** $\chi = \partial M/\partial H$ ферромагнетика, которая в пределе $H \to 0$ и с учетом (18.2.31) принимает вид

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_{H=0} = \begin{cases} \dfrac{1}{c(T - T_C)}, & \text{если } T > T_C, \\ \dfrac{1}{2c(T_C - T)}, & \text{если } T < T_C. \end{cases} \tag{18.2.34}$$

Очевидно, что восприимчивость расходится в точке фазового перехода и $\chi \propto M^{-2}$ при $T < T_C$. Подобным же образом (Degiorgio and Scully, 1970), мы можем определить ***чувствительность*** или восприимчивость лазера $\chi_L = \partial|\tilde{\mathscr{E}}|/\partial|\tilde{\mathscr{E}}_0|$. Из (18.2.33) в пределе $\tilde{\mathscr{E}}_0 \to 0$ следует, что

$$\chi_L = \left(\frac{\partial|\tilde{\mathscr{E}}|}{\partial|\tilde{\mathscr{E}}_0|}\right)_{\tilde{\mathscr{E}}_0=0} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathscr{C} - \mathscr{A}}, & \text{если } \mathscr{C} > \mathscr{A}, \\ \dfrac{1}{2(\mathscr{A} - \mathscr{C})}, & \text{если } \mathscr{A} > \mathscr{C}. \end{cases} \tag{18.2.35}$$

Так же как и χ при температуре Кюри, величина χ_L расходится на пороге генерации и имеет тот же критический индекс $\chi_L \propto |\tilde{\mathscr{E}}|^{-2}$, когда $\mathscr{A} > \mathscr{C}$. Причина состоит в том, что очень маленькое изменение

приложенного поля $\tilde{\mathscr{E}}_0$ может привести к большому изменению лазерного поля $\tilde{\mathscr{E}}$ на пороге генерации. Таким образом, поведение лазера вблизи порога имеет довольно близкое сходство с фазовым переходом типа порядок-беспорядок.

В действительности, при дальнейшем увеличении параметра накачки появляются дополнительные фазовые переходы, хотя это и не видно из уравнения движения (18.2.27), поскольку это уравнение ограничено одномодовым режимом и низшим порядком нелинейности. По мере постепенного роста степени возбуждения лазера могут возбуждаться все больше и больше мод. Если их фазы коррелированы или заперты, результирующее лазерное поле переходит в режим регулярных периодических пульсаций или пичковый режим, тогда как в случае незапертых фаз, поле становится по существу хаотическим, несмотря на то, что оно по-прежнему описывается детерминированным уравнением движения (Uspenskii, 1963; Korobkin and Uspenskii, 1963; Risken and Nummedal, 1968a, b; Graham, 1975; Haken, 1975a, b, 1977, гл. 6; Haken and Ohno, 1976a, b; Casperson, 1978; Mayr, Risken and Vollmer, 1981). Если учитывать влияние флуктуаций, то обнаружится, что резкие скачки в поведении системы, показанные на рис. 18.4, пропадают. Однако, концепция фазового перехода остается применимой, и аналогия между фазовыми переходами в лазерах и в других системах сохраняется. Хотя при учете квантовых флуктуаций амплитуда света $\mathscr{E}$ не равна больше нулю ниже порога, фазовый переход проявляется в изменении статистических свойств лазерного поля.

18.3. Полуклассическая теория лазера с учетом шума спонтанного излучения[1]

Хотя уравнение движения (18.2.27) описывает динамику лазерного поля, это описание имеет совершенно детерминированный характер. Оптическое поле лишено каких-либо флуктуаций, так что любые вопросы о когерентных свойствах лазерного излучения, которые существенно отличаются от свойств излучения других источников света, остаются за пределами теории. Например, уравнение (18.2.27) ничего не может сказать о спектральной ширине лазерного поля, которое в данном случае считается полностью монохроматичным, хотя конечная ширина спектра всегда наблюдается. Более того, скачкообразное образование излучения на пороге генерации, описываемое данным уравнением и проиллюстрированное на рис. 18.4, в действительности не наблюдается. Ключ к пониманию этих вопросов лежит в учете флуктуаций оптического поля, которые вызваны случайными процессами спонтанного излучения атомов. Процессы спонтанного излучения учитываются автоматически в рамках любого квантового рассмотрения лазера, например того, которое будет сделано ниже в разд. 18.4. Однако, они не появляются естественным образом в детерминированных полуклассических теориях. Тем не менее, были сделаны попытки учесть эффекты спонтанного излучения в полуклассической теории лазера путем добавления шумового члена в уравнение движения (18.2.27) (Risken, 1965, 1966; Risken and Vollmer, 1967a, b; Hempstead and Lax, 1967; Risken, 1970), которое в результате принимает вид

$$\frac{d\tilde{\mathscr{E}}(t)}{dt} - \mathscr{A}\left[a - |\tilde{\mathscr{E}}(t)|^2\right]\tilde{\mathscr{E}}(t) = \zeta(t). \tag{18.3.1}$$

Здесь $\zeta(t)$ — комплексная гауссовская случайная функция с нулевым средним значением, время корреляции которой порядка времени жизни спонтанного атомного излучения. Однако, поскольку это время жизни обычно очень короткое по сравнению со временем, в течение которого меняется амплитуда $\tilde{\mathscr{E}}$, то мы можем упростить задачу, считая $\zeta(t)$ комплексным *δ-коррелированным шумом, или белым шумом*, удовлетворяющим соотношениям

$$\langle\zeta(t)\rangle = 0, \quad \langle\zeta(t)\zeta(t')\rangle = 0, \quad \langle\zeta^*(t)\zeta(t')\rangle = 4Q_s\delta(t-t'). \tag{18.3.2}$$

Таким образом, шум $\zeta(t)$ является *марковским* (см. разд. 2.6). Значение Q_s выбирается так, чтобы соответствующим образом описывалась амплитуда флуктуаций спонтанного излучения.

Новое уравнение движения (18.3.1) есть уравнение *ланжевеновского* типа, в котором амплитуда поля $\tilde{\mathscr{E}}(t)$ не является больше детерминированной. Взамен этого, $\tilde{\mathscr{E}}(t)$ представляет собой случайный процесс,

[1] см. также книгу (*Ахманов, Дьяков, Чиркин, 1981) — *ред. пер.*

с определенной плотностью вероятности $p(\tilde{\mathscr{E}},t)$, которая определяется статистическими свойствами шума $\zeta(t)$. Теперь можно задаться вопросом о моментах и корреляционных функциях амплитуды $\tilde{\mathscr{E}}$ и получить ответы, которые недоступны при решении детерминированного уравнения.

18.3.1. Уравнение Фоккера — Планка

Как было показано в разд. 2.9, ланжевеновскому уравнению движения с марковским шумом соответствует уравнение движения для плотности вероятности $p(\tilde{\mathscr{E}},t)$, известное как *уравнение Фоккера — Планка*. Удобно заменить комплексную амплитуду $\tilde{\mathscr{E}}$ на двумерный действительный вектор $\tilde{\boldsymbol{\mathscr{E}}}$ с составляющими $\tilde{\mathscr{E}}_1$ и $\tilde{\mathscr{E}}_2$, которые, соответственно, являются действительной и мнимой частями $\tilde{\mathscr{E}}$. Уравнение Фоккера — Планка, соответствующее (18.3.1), тогда принимает вид (см. разд. 2.9)

$$\frac{\partial p(\tilde{\boldsymbol{\mathscr{E}}},t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathscr{E}}_i}\left[\mathscr{A}(a-\tilde{\boldsymbol{\mathscr{E}}}^2)\tilde{\mathscr{E}}_i p(\tilde{\boldsymbol{\mathscr{E}}},t)\right]+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial\tilde{\mathscr{E}}_i^2}Q_s p(\tilde{\mathscr{E}},t). \tag{18.3.3}$$

Решение этого уравнения дает возможность вычислить различные средние $\tilde{\boldsymbol{\mathscr{E}}}$. Уравнение содержит три параметра, два из которых можно исключить, перенормируя амплитуду $\tilde{\boldsymbol{\mathscr{E}}}$, время t и параметр накачки a. Если ввести новую безразмерную амплитуду $\boldsymbol{\mathscr{E}}'$ при помощи преобразования $\tilde{\mathscr{E}}_i\to\mathscr{E}_i'(Q_s/\mathscr{A})^{1/4}$ и новые безразмерные параметр a' и время t', осуществив замены $a\to a'(Q_s/\mathscr{A})^{1/2}$, $t\to t'(1/Q_s\mathscr{A})^{1/2}$, то придем к следующему уравнению

$$\frac{\partial p(\boldsymbol{\mathscr{E}},t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\mathscr{E}_i}\left[(a-\boldsymbol{\mathscr{E}}^2)\mathscr{E}_i p(\boldsymbol{\mathscr{E}},t)\right]+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 p(\boldsymbol{\mathscr{E}},t)}{\partial\mathscr{E}_i^2}, \tag{18.3.4}$$

в котором для простоты опущены штрихи. Уравнение содержит только один параметр — параметр накачки a и должно быть справедливо для любого лазера, активная среда которого состоит из двухуровневых атомов, при условии, что интенсивность света не слишком высока. Для конкретного лазера решение можно, конечно, переписать в размерном виде. Мы рассмотрим общее временно́е решение уравнения (18.3.4) позже в разд. 18.6 и разд. 18.7.

Как только уравнение будет проинтегрировано и получено решение $p(\boldsymbol{\mathscr{E}},t)$ для некоторого заданного начального состояния $p(\boldsymbol{\mathscr{E}},0)$, можно будет сразу вычислить любое одновременно́е среднее лазерного поля, например

$$\langle\mathscr{E}_i^r(t)\rangle=\int\mathscr{E}_i^r p(\boldsymbol{\mathscr{E}},t)\,d^2\mathscr{E},\quad r=1,2,\ldots. \tag{18.3.5}$$

Однако, $p(\boldsymbol{\mathscr{E}},t)$ еще не позволяет вычислить многовременны́е корреляционные функции. Для этого требуется дополнительная информация, такая как совместная плотность вероятности $p_2(\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(2)},t_2,\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(1)},t_1)$ для амплитуд поля $\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(1)}$, $\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(2)}$ в различные моменты времени t_1, t_2. К счастью, $p_2(\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(2)},t_2,\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(1)},t_1)$ выражается через условную плотность вероятности $P(\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(2)},t_2|\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(1)},t_1)$ для амплитуды поля $\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(2)}$ в момент времени t_2 при заданной амплитуде $\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(1)}$ в момент t_1 ($t_2\geqslant t_1$) и плотность $p(\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(1)},t_1)$ посредством соотношения

$$p_2(\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(2)},t_2;\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(1)},t_1)=P(\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(2)},t_2|\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(1)},t_1)p(\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(1)},t_1). \tag{18.3.6}$$

Далее, условная плотность вероятности $P(\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(2)},t_2|\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(1)},t_1)$ также является решением уравнения Фоккера — Планка с определенными граничными условиями. По определению, если два момента времени равны, то

$$P(\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(2)},t|\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(1)},t)=\delta^2(\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(2)}-\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(1)}). \tag{18.3.7}$$

Это означает, что $P(\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(2)},t_2|\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(1)},t_1)$ представляет собой функцию Грина уравнения в частных производных (18.3.4). Как только найдены $p(\boldsymbol{\mathscr{E}},t)$ и функция Грина $P(\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(2)},t_2|\boldsymbol{\mathscr{E}}^{(1)},t_1)$, становится возможным вычисление любой двухвременно́й тензорной корреляционной функции, такой как $\langle\mathscr{E}_i(t)\mathscr{E}_j(t')\rangle$, с помощью выражения

$$\langle\mathscr{E}_i(t)\mathscr{E}_j(t')\rangle=\iint\mathscr{E}_i'\mathscr{E}_j''P(\boldsymbol{\mathscr{E}}'',t'|\boldsymbol{\mathscr{E}}',t)p(\boldsymbol{\mathscr{E}}',t)\,d^2\mathscr{E}'\,d^2\mathscr{E}'',\quad t'>t. \tag{18.3.8}$$

Более того, вследствие марковского характера флуктуаций, можно выразить совместные плотности вероятности более высокого порядка через произведения функций Грина следующим образом

$$p_n(\mathscr{E}^{(n)}, t_n; \mathscr{E}^{(n-1)}, t_{n-1}; \ldots, \mathscr{E}^{(1)}, t_1) = \\ = P(\mathscr{E}^{(n)}, t_n | \mathscr{E}^{(n-1)}, t_{n-1}) P(\mathscr{E}^{(n-1)}, t_{n-1} | \mathscr{E}^{(n-2)}, t_{n-2}) \ldots P(\mathscr{E}^{(2)}, t_2 | \mathscr{E}^{(1)}, t_1) p(\mathscr{E}^{(1)}, t_1). \quad (18.3.9)$$

Эта формула позволяет также вычислить корреляции более высокого порядка, например

$$\langle \mathscr{E}_l(t_4) \mathscr{E}_k(t_3) \mathscr{E}_j(t_2) \mathscr{E}_i(t_1) \rangle = \\ = \iiiint \mathscr{E}_l'''' \mathscr{E}_k''' \mathscr{E}_j'' \mathscr{E}_i' p_4(\mathscr{E}'''', t_4; \mathscr{E}''', t_3; \mathscr{E}'', t_2; \mathscr{E}', t_1)\, d^2\mathscr{E}'\, d^2\mathscr{E}''\, d^2\mathscr{E}'''\, d^2\mathscr{E}''''. \quad (18.3.10)$$

Таким образом, как только получено общее решение уравнения (18.3.4), проблему того, как ведет себя лазерное поле, в принципе, можно считать решенной.

18.3.2. Стационарное решение

Перед тем, как пытаться получить временно́е решение уравнения (18.3.4), которое будет рассмотрено в разд. 18.6, рассмотрим решение в стационарном состоянии, которое достигается по истечении достаточно большого промежутка времени. В этом случае $p(\mathscr{E}, t)$ больше не зависит от времени t, и левая часть уравнения Фоккера — Планка обращается в нуль. Уравнение, следовательно, можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial J_i}{\partial \mathscr{E}_i} = 0,$$

где $\mathbf{J}$ есть *ток вероятности*, задаваемый формулой

$$J_i \equiv (a - \mathscr{E}^2)\mathscr{E}_i p_s - \frac{\partial p_s}{\partial \mathscr{E}_i}, \quad (18.3.11)$$

и $p_s(\mathscr{E})$ есть стационарное распределение лазерного поля $\mathscr{E}$. Вектор $(a - \mathscr{E}^2)\mathscr{E} \equiv \mathbf{A}$ называется *вектором дрейфа* и в частном случае, когда вектор дрейфа удовлетворяет условию потенциальности (см. разд. 2.9)

$$\frac{\partial A_i}{\partial \mathscr{E}_j} = \frac{\partial A_j}{\partial \mathscr{E}_i},$$

как в данном случае, решение уравнения Фоккера — Планка получается путем приравнивания тока вероятности $\mathbf{J}$ к нулю. Это дает следующее дифференциальное уравнение

$$(a - \mathscr{E}^2)\mathscr{E}_i p_s - \frac{\partial p_s}{\partial \mathscr{E}_i} = 0,$$

прямое интегрирование которого приводит к результату

$$\ln p_s = \int_0^{\mathscr{E}} (a - \mathscr{E}^2)\mathscr{E} \cdot d\mathscr{E} + \text{const} = \frac{1}{2}a\mathscr{E}^2 - \frac{1}{4}\mathscr{E}^4 + \text{const}$$

или

$$p_s(\mathscr{E}) = K \exp(\frac{1}{2}a\mathscr{E}^2 - \frac{1}{4}\mathscr{E}^4), \quad (18.3.12)$$

где K — константа, обеспечивающая нормировку $p_s(\mathscr{E})$. Иногда удобно ввести *потенциальную* функцию

$$U(\mathscr{E}) \equiv -\frac{1}{2}a\mathscr{E}^2 + \frac{1}{4}\mathscr{E}^4, \quad (18.3.13)$$

которая позволяет переписать стационарное решение в виде

$$p_s(\mathscr{E}) = K\,\mathrm{e}^{-U(\mathscr{E})}, \tag{18.3.14}$$

по аналогии с термодинамическими вероятностью и потенциалом. Необходимо подчеркнуть, однако, что данная аналогия является чисто формальной, поскольку лазер не является, как правило, системой, находящейся в состоянии термодинамического равновесия.

Поскольку стационарное распределение вероятности амплитуды поля $\mathscr{E}$ содержит только квадрат $\mathscr{E}$, более удобно ввести интенсивность света I и фазу ϕ поля, записывая

$$\mathscr{E}_1 = \sqrt{I}\cos\phi, \quad \mathscr{E}_2 = \sqrt{I}\sin\phi. \tag{18.3.15}$$

Тогда, совместная плотность вероятности $\mathscr{P}'(I,\phi)$ для I и ϕ связывается с $p_s(\mathscr{E})$ преобразованием

$$\mathscr{P}'(I,\phi)\,dI\,d\phi = p_s(\mathscr{E})\,d\mathscr{E}_1\,d\mathscr{E}_2$$

или, после замены $\mathscr{E}^2$ на I и $dI\,d\phi$ на $2\,d\mathscr{E}_1\,d\mathscr{E}_2$, преобразованием

$$\mathscr{P}'(I,\phi) = \frac{1}{2}K\exp(\frac{1}{2}aI - \frac{1}{4}I^2). \tag{18.3.16}$$

Поскольку фаза ϕ отсутствует в правой части уравнения, она, очевидно, равномерно распределена от 0 до 2π в стационарном состоянии. Интегрируя по ϕ от 0 до 2π, мы приходим к следующему выражению для плотности вероятности $\mathscr{P}(I)$ интенсивности света I

$$\mathscr{P}(I) = \pi K\exp(\frac{1}{2}aI - \frac{1}{4}I^2) = C\exp\left[-\frac{1}{4}(I-a)^2\right], \tag{18.3.17}$$

где C есть другая константа нормировки. Таким образом, плотность вероятности $\mathscr{P}(I)$ имеет структуру гауссовского распределения по I, если не считать того, что оно обрезается в точке $I = 0$, поскольку интенсивность света не может быть отрицательной.

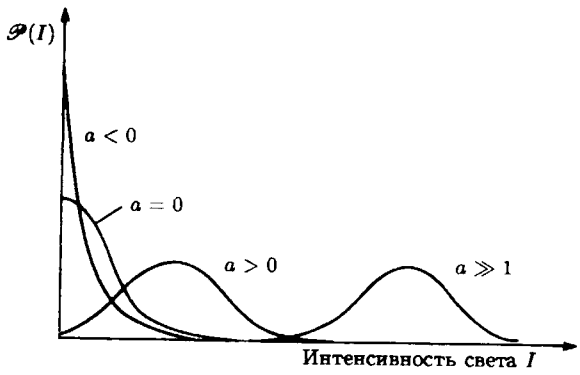


Рис. 18.6. Распределение вероятностей интенсивности I лазерного поля в стационарном состоянии при различных значениях параметра накачки a. Значение $a = 0$ соответствует порогу генерации

По мере того как режим работы лазера изменяется от «ниже порога» до «выше порога», а параметр накачки a изменяется от отрицательных до положительных значений, гауссовское распределение интенсивности смещается вправо вдоль I-оси (см. рис. 18.6). Оно также изменяется по высоте, поскольку сохраняется нормировка

$$\int_0^\infty \mathscr{P}(I)dI = 1. \tag{18.3.18}$$

Однако, как только a превысит значения 1 или 2, дальнейшие увеличения параметра накачки a приводят лишь к смещению гауссовского распределения с незначительным изменением формы, и дисперсия I остается приблизительно равной 2 в наших безразмерных единицах. Конечно, не следует ожидать, что этот результат, полученный в рамках теории третьего порядка, будет иметь силу значительно выше порога генерации. Однако, он применим, обычно, вплоть до средних значений интенсивности света, превышающих пороговую в 100 раз. Анализируя выражение (18.3.17) или рис. 18.6, мы сразу видим, что, если лазер работает значительно выше порога генерации, и $a \gg 1$, то

$$\langle I\rangle \approx a, \quad \langle(\Delta I)^2\rangle \approx 2, \quad \langle(\Delta I)^2\rangle^{1/2}/\langle I\rangle \approx \sqrt{2}/a. \tag{18.3.19}$$

Отсюда следует, что, хотя флуктуации интенсивности света выше порога генерации не уменьшаются по абсолютному значению, их относительная величина стремится к нулю по мере увеличения параметра накачки. С другой стороны, из (18.3.12) можно показать, что дисперсия абсолютной амплитуды $|\mathscr{E}|$ стремится

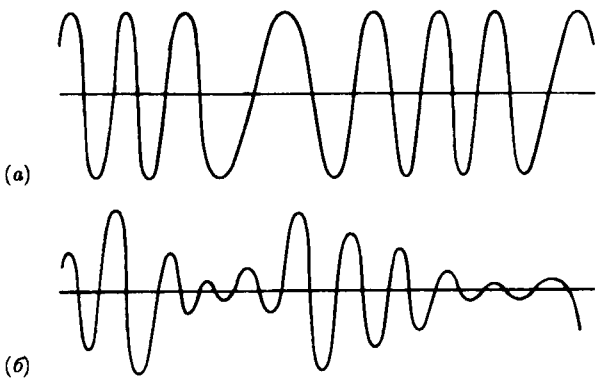


Рис. 18.7. Осцилляция лазерного поля во времени: *а* — значительно выше порога; *б* — ниже порога

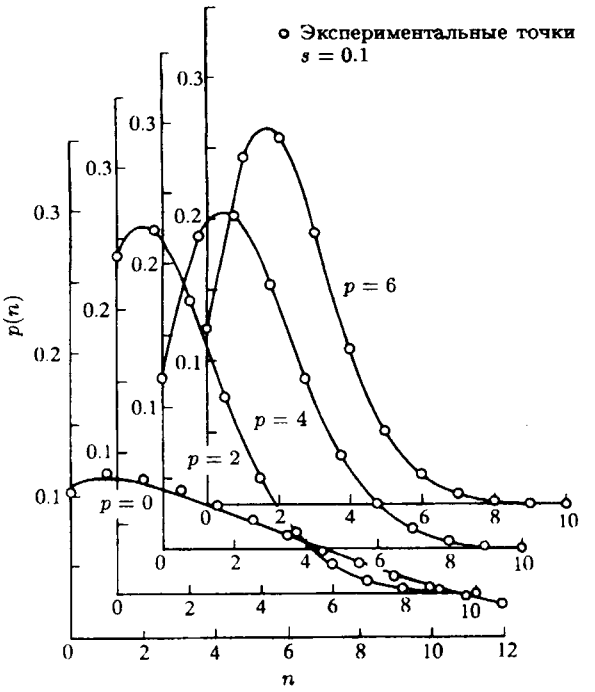


Рис. 18.8. Вероятности фотоотсчетов $P(n)$ для четырех значений параметра накачки (обозначенного здесь через p): кружки — экспериментальные значения, кривые — результат теоретического расчета. Отношение времени счета фотонов к времени когерентности равно $s = 0.1$. (из работы Meltzer, Davis and Mandel, 1970)

к нулю выше порога [ср. (18.5.15) далее]. Таким образом, поле лазера приобретает характер колебания с постоянной амплитудой, как показано на рис. 18.7*а*, которое, однако, все еще модулировано по частоте и имеет случайную фазу. Более того, как будет показано далее, ширина спектра становится все более узкой значительно выше порога генерации. Лазерное поле значительно выше порога генерации часто считают *когерентным* именно в том смысле, что оно имеет постоянную амплитуду и очень узкую спектральную ширину. Обратимся теперь к другому пределу, когда лазер работает значительно ниже порога генерации, и параметр накачки a является большой отрицательной величиной. В этом случае мы сразу видим из (18.3.17), что

$$\mathscr{P}(I) \propto \exp(-\frac{1}{2}|a|I - \frac{1}{4}I^2) \approx \exp(-\frac{1}{2}|a|I), \tag{18.3.20}$$

поскольку только малые значения I имеют ощутимую вероятность. Таким образом, распределение вероятности очень близко к экспоненциальному по I, что видно на рис. 18.6. Как было показано в разд. 13.3, это распределение вероятности характерно для поляризованного света от теплового источника, и из (18.3.20) имеем

$$\langle I\rangle \approx 2/|a|, \quad \langle(\Delta I)^2\rangle^{1/2}/\langle I\rangle \approx 1. \tag{18.3.21}$$

Само поле имеет гауссовское распределение и флуктуирует как по амплитуде, так и по фазе (см. рис. 18.7*б*).

Наконец, на пороге генерации, где параметр накачки $a = 0$, распределение $\mathscr{P}(I)$ имеет характер полуобрезанного гауссовского распределения, и наклон $\mathscr{P}(I)$ при $I = 0$ равен нулю. Следовательно, очень малые значения интенсивности света имеют приблизительно одинаковые вероятности.

Изменение формы $\mathscr{P}(I)$ при изменении параметра накачки может быть проверено в ходе измерений числа фотоотсчетов. В этих экспериментах лазерный луч направляется на фотодетектор и многократно записывается число фотоэлектрических импульсов, создаваемых в течение короткого интервала времени T, так что постепенно строится распределение вероятностей $p(n,T)$. Если T мало по сравнению с временем корреляции интенсивности, то $p(n,T)$ связывается с распределением вероятности $\mathscr{P}(I)$ интенсивности света I интегральным соотношением (14.8.12). Это дает возможность проверить теоретический вид $\mathscr{P}(I)$. В результате было получено хорошее согласие с формулой (18.3.17) (Arecchi, Berné and Burlamacchi, 1966; Freed and Haus, 1966a, b; Smith and Armstrong, 1966; Meltzer, Davis and Mandel, 1970). Пример такого измерения показан на рис. 18.8.

Другой способ проверки теории основан на использовании факториальных моментов фотоэлектрических отсчетов, получаемых из $p(n,T)$ и их соотношения с моментами интенсивности I [ср. (14.9.4)]. Мы

обнаружим, что $\langle I\rangle$ плавно меняется при изменении параметра накачки a и что, вследствие квантовых флуктуаций, отсутствует резкое изменение $\langle I\rangle$ на пороге генерации, как это было в детерминированном случае, описываемом формулой (18.2.29). Тем не менее, можно опять определить параметр порядка, который обращается в нуль ниже порога генерации, со стороны неупорядоченной фазы, и не равен нулю выше порога генерации.

18.3.3. Аналогия с фазовым переходом для флуктуирующего лазерного поля

Несмотря на то, что распределение вероятности $\mathscr{P}(I)$ интенсивности лазерного света меняется непрерывно по мере перехода рабочей точки лазера из области ниже порога в область выше порога, электромагнитное поле все еще испытывает фазовый переход на пороге. Однако, в отличие от ситуации, с которой мы сталкивались в разд. 18.2, ни средняя амплитуда поля $\langle|\mathscr{E}|\rangle$, ни средняя интенсивность $\langle I\rangle$ не являются теперь подходящими параметрами порядка, поскольку оба не равны нулю при любых значениях параметра накачки a.

Для того, чтобы определить подходящий параметр порядка, удобно рассмотреть потенциальную функцию $U(\mathscr{E})$, задаваемую формулой (18.3.13), которая была введена для описания $p_s(\mathscr{E})$. Данный потенциал, как функция от $|\mathscr{E}|$, показан на рис. 18.9a при отрицательном, нулевом и положительном значении параметра накачки a. Из (18.3.14) ясно видно, что имеется взаимнооднозначное соответствие между вероятностью

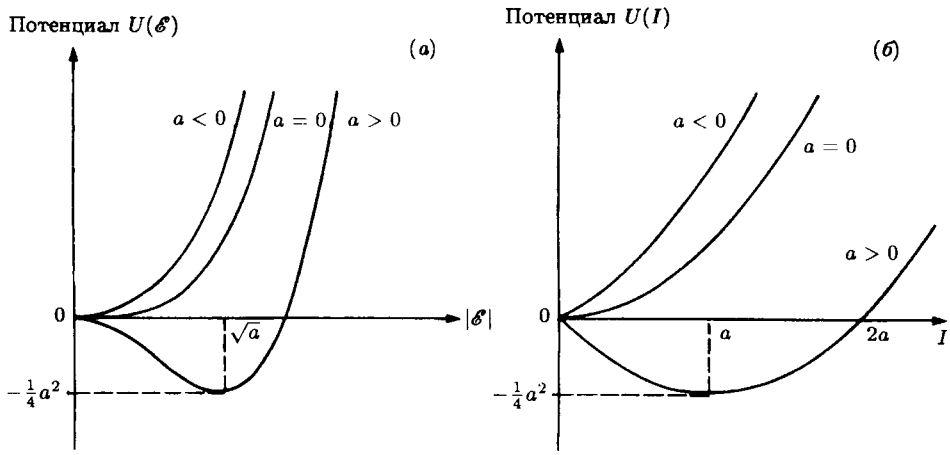


Рис. 18.9. Зависимость потенциала от абсолютной амплитуды поля $|\mathscr{E}|$ (a) и от интенсивности I ($б$) при различных значениях параметра накачки: ниже порога ($a<1$), на пороге ($a=1$) и выше порога ($a>1$)

$p_s(\mathscr{E})$ и потенциалом $U(\mathscr{E})$, такое, что наиболее вероятное значение $|\mathscr{E}|$ всегда соответствует наименьшему значению потенциала $U(\mathscr{E})$. Тогда из рис. 18.9a сразу следует, что до тех пор, пока лазер работает ниже порога или на пороге, и $a\leqslant 0$, наиболее вероятной является амплитуда поля $|\mathscr{E}|$, равная нулю. Однако, как только порог превышается, и $a>0$, наиболее вероятным значением $|\mathscr{E}|$ становится $\sqrt{a}$. Таким образом, наиболее вероятное значение амплитуды поля $|\mathscr{E}|$ становится ненулевым при прохождении порога и является естественным параметром порядка для фазового перехода. Можно дать равносильное описание фазового перехода через интенсивность света I. Введем потенциал $U(I)$, записывая (18.3.17) в виде

$$\mathscr{P}(I)=\pi K\,\mathrm{e}^{-U(I)},\quad U(I)=-\frac{1}{2}aI+\frac{1}{4}I^2. \tag{18.3.22}$$

Форма потенциала $U(I)$ показана на рис. 18.9$б$ при трех различных значениях параметра накачки a. Наиболее вероятное значение интенсивности света опять соответствует наименьшему значению потенциала, которое, как видно, равно нулю ниже или на пороге и не равно нулю, а равно a только выше порога. Следовательно, наиболее вероятная интенсивность света также может служить параметром порядка для фазового перехода.

В теории Ландау фазовых переходов принято раскладывать термодинамический потенциал в области фазового перехода по степеням параметра порядка (Haken, 1977, гл. 6; Landau and Lifshitz, 1980). Коэффициенты разложения, некоторые из которых по соображениям симметрии обращаются в нуль, являются, обычно, функциями температуры. Если подставить в потенциал надлежащее значение параметра порядка при каждой температуре, то, как правило, можно обнаружить, что некоторые производные потенциала имеют точки разрыва как функции температуры. Эти точки разрыва определяют порядок фазового перехода.

Мы можем применить аналогичную процедуру к потенциалу, задаваемому формулой (18.3.22). Будем считать $U(I,a)$ аналогом термодинамического потенциала, а взятую с обратным знаком величину параметра накачки a — аналогом температуры. Тогда, наиболее вероятное значение интенсивности света $I_{\mathrm{m}}(a)$, как мы только что видели, является параметром порядка и задается соотношениями

$$I_{\mathrm{m}}(a)=\begin{cases}0, & \text{если } a\leqslant 0,\\ a, & \text{если } a\geqslant 0.\end{cases} \tag{18.3.23}$$

Если подставить $I_{\mathrm{m}}(a)$ вместо I в $U(I,a)$, то получим наиболее вероятное значение потенциала

$$U_{\mathrm{m}}(a)=\begin{cases}0, & \text{если } a\leqslant 0,\\ -\frac{1}{4}a^2, & \text{если } a\geqslant 0.\end{cases} \tag{18.3.24}$$

вид которого показан на рис. 18.10. Он имеет непрерывную первую производную, но его вторая производная $d^2U_{\mathrm{m}}(a)/da^2$ терпит разрыв на пороге $a=0$. Мы можем также построить величину, которая является аналогом *термодинамической энтропии* S, несмотря на то, что лазер не является системой, находящейся в состоянии теплового равновесия, записывая

$$S(a)=\left.\frac{\partial U(I,a)}{\partial a}\right|_{I=I_{\mathrm{m}}}. \tag{18.3.25}$$

С помощью (18.3.22) и (18.3.23) сразу находим

$$S(a)=\begin{cases}0, & \text{если } a\leqslant 0,\\ -\frac{1}{2}a, & \text{если } a\geqslant 0,\end{cases} \tag{18.3.26}$$

т.е. S в данном случае оказывается равной производной от $U_{\mathrm{m}}(a)$. Вид функции $S(a)$ также показан на рис. 18.10. Она непрерывна в точке фазового перехода, но ее производная терпит разрыв. Таким образом, лазер испытывает на пороге *непрерывный* или *фазовый переход второго рода*. Дискретный или фазовый переход первого рода, был бы связан с разрывом энтропии и с менее гладким наиболее вероятным потенциалом. В гл. 19 мы увидим, что двухмодовый лазер, при определенных условиях может проявлять фазовый переход первого рода вследствие эффектов конкуренции между модами. Потенциал $U(I,a)$ или $U(\mathscr{E},a)$ иногда определяется так, что в него включается константа нормировки для распределения вероятности. Ясно, что это не влияет на его зависимость от интенсивности света I, положения максимумов, минимумов или точек разрыва. Энтропия $S(a)$ изменяется в пределах добавочной, гладкой функции от a. Но, разрывы энтропии или ее производные остаются неизменными.

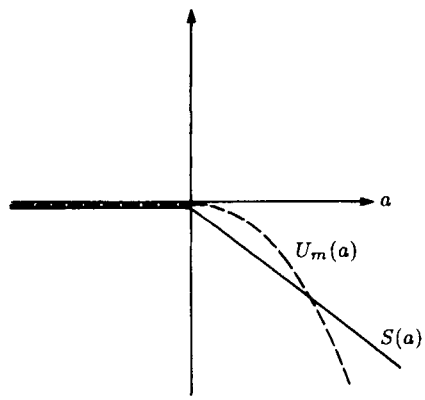


Рис. 18.10. Зависимость наиболее вероятного значения потенциала $U_m(a)$ и энтропии $S(a)$ от параметра накачки a

18.3.4. Моменты интенсивности света

Используя распределение вероятности (18.3.17), мы можем легко вычислить моменты интенсивности света I как функции параметра накачки a (Risken, 1956, 1966, 1970; Risken and Vollmer, 1967a, b; Hempstead and Lax, 1967). Например, для средней интенсивности имеем

$$\langle I\rangle=\int_0^\infty I\,\mathrm{e}^{-(I-a)^2/4}\,dI\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(I-a)^2/4}\,dI\right]^{-1}.$$

После замены переменных $(I-a)/2=x$ данное выражение принимает вид

$$\langle I\rangle = a + 2\int_{-a/2}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}dx\left[\int_{-a/2}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}dx\right]^{-1} = a + \mathrm{e}^{-a^2/4}\left[\int_{-a/2}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}dx\right]^{-1}.$$

Введем теперь обычным образом *гауссовскую функцию ошибок*

$$\operatorname{erf} y \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \mathrm{e}^{-x^2}dx.$$

Эта функция имеет свойства $\operatorname{erf}(-y) = -\operatorname{erf}(y)$ и $\operatorname{erf}(\infty) = 1$, так что средняя интенсивность света сразу выражается в виде

$$\langle I(a)\rangle = a + \frac{2\,\mathrm{e}^{-a^2/4}}{\sqrt{\pi}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}a\right)\right]}. \tag{18.3.27}$$

При больших значениях параметра накачки a второе слагаемое оказывается малым и дает малую поправку к решению $\langle I\rangle \approx a$, задаваемому формулой (18.3.19). Для больших отрицательных значений параметра накачки a опять получаем результат (18.3.21) после асимптотического разложения функции ошибок. На пороге, когда $a=0$, в наших безразмерных единицах получаем $\langle I(0)\rangle = 2/\sqrt{\pi}$. На рис. 18.11*а* показан график средней интенсивности света $\langle I\rangle$, как функции параметра a. Приведенную кривую следует сравнить с кривой на рис. 18.4, которая получена на основе детерминированного уравнения движения лазера. Основное отличие состоит в том, что средняя интенсивность света не равна нулю ниже порога, поскольку некоторое количество света излучается в любых условиях вследствие спонтанного излучения, так что на пороге разрыв отсутствует. Значительно ниже порога ($-a \gg 1$) асимптотическое разложение функции ошибок дает $\langle I\rangle \to 2/|a|$. Эти результаты подтверждены экспериментально (см. рис. 18.11*б,в*).

Таким же способом можно вычислить моменты интенсивности света более высокого порядка по формуле

$$\langle I^r\rangle = \int_0^{\infty} I^r\,\mathrm{e}^{-(I-a)^2/4}\,dI\left[\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(I-a)^2/4}\,dI\right]^{-1}, \quad r=1,2,3,\ldots.$$

Используя ту же, что и выше, замену переменных, можно легко показать, что дисперсия задается соотношением

$$\langle(\Delta I)^2\rangle = \langle I^2\rangle - \langle I\rangle^2 = 2\left[1 - \frac{a\,\mathrm{e}^{-a^2/4}}{\sqrt{\pi}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}a\right)\right]} - \frac{2\,\mathrm{e}^{-a^2/2}}{\pi\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}a\right)\right]^2}\right]. \tag{18.3.28}$$

Данное выражение стремится к 2 при больших a, что согласуется с (18.3.19). На пороге $a=0$, $\langle(\Delta I)^2\rangle = 2-4/\pi$ и $\langle(\Delta I)^2\rangle/\langle I\rangle^2 = \pi/2-1 \approx 0.57$. Последнее число является удобным для практического определения лазерного порога. Формулы (18.3.27) и (18.3.28) позволяют построить график зависимости отношения $\langle(\Delta I)^2\rangle/\langle I\rangle^2$ от средней интенсивности $\langle I\rangle$. Результат расчета (непрерывная кривая на рис. 18.12) хорошо согласуется с результатами фотоэлектрических корреляционных измерений и измерений числа фотоотсчетов (Freed and Haus, 1966a, b; Smith and Armstrong, 1966; Arecchi, Rodary and Sona, 1967; Davidson and Mandel, 1967; Chang, Korenman, Alley and Detenbeck, 1969). Напомним [см. (14.9.4)], что число фотоотсчетов n, регистрируемых освещаемым фотодетектором в течение времени, которое намного короче времени корреляции интенсивности, имеет факториальные моменты, которые просто связаны с моментами интенсивности света, а именно,

$$\frac{\langle n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\rangle}{\langle n\rangle^r} = \frac{\langle I^r\rangle}{\langle I\rangle^r}, \quad r=1,2,3,\ldots. \tag{18.3.29}$$

Таким образом, моменты интенсивности I легко определяются по результатам измерений числа фотоотсчетов. С другой стороны, можно построить график зависимости $\langle(\Delta I)^2\rangle/\langle I\rangle^2$ непосредственно от параметра a и получить кривую, показанную на рис. 18.13. Однако этот вариант труднее подтверждается экспериментом, что обусловлено сложностью определения параметра накачки. Фактически a часто определяется по результатам измерений $\langle(\Delta I)^2\rangle/\langle I\rangle^2$ с помощью соотношений (18.3.27) и (18.3.28). Мы не будем прямо вычислять моменты интенсивности света высших порядков, поскольку оказывается проще вычислить

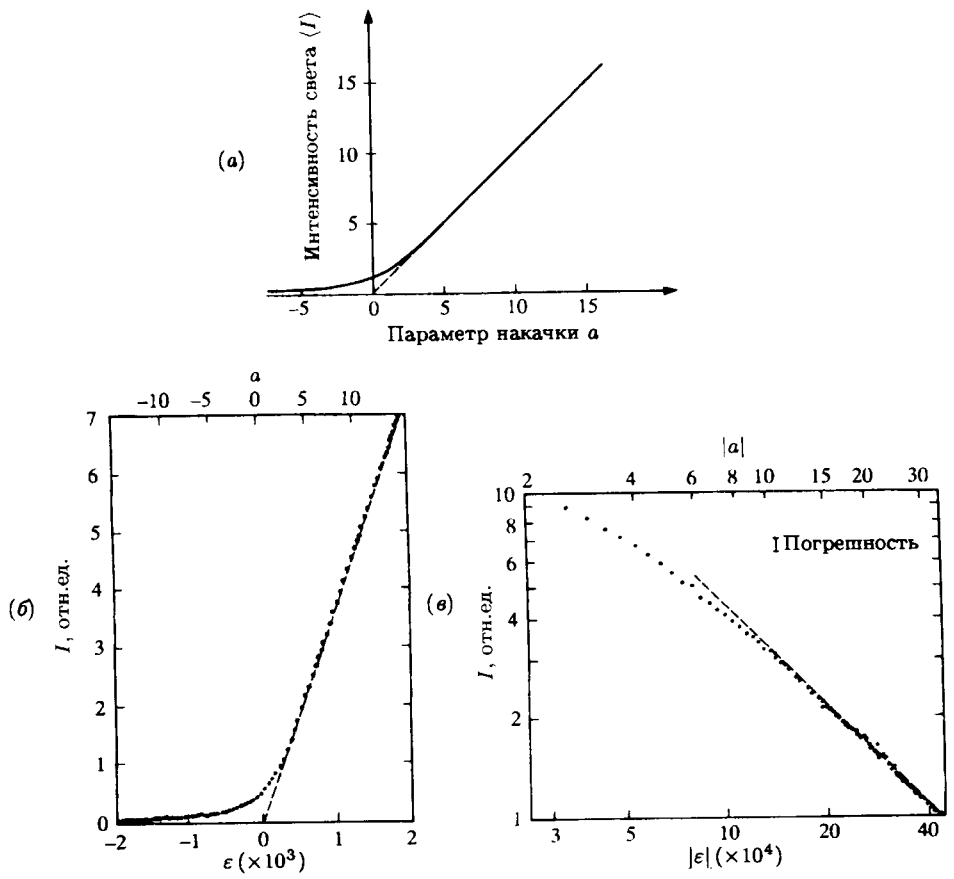


Рис. 18.11. *а* — Теоретическая зависимость средней интенсивности лазерного поля от параметра накачки; *б* и *в* — измеренная зависимость средней интенсивности лазерного поля от относительной инверсии населенностей ε выше критического значения и от параметра накачки a: *б* — выше и ниже порога; *в* — существенно ниже порога. (Из работы Corti and Degiorgio, 1976b)

кумулянты (ср. разд. 1.4), которые связаны с моментами и могут быть получены друг из друга последовательным дифференцированием (Risken, 1965, 1966, 1970). Для того, чтобы это показать, определим

$$F(a) \equiv \int_0^\infty \exp(\tfrac{1}{2}aI - \tfrac{1}{4}I^2)\,dI.$$

Тогда производящая функция $M(s,a)$ моментов интенсивности I (ср. разд. 1.4) задается соотношением

$$M(s,a) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{sI} \exp(\tfrac{1}{2}aI - \tfrac{1}{4}I^2)\,dI \left[\int_0^\infty \exp(\tfrac{1}{2}aI - \tfrac{1}{4}I^2)\,dI\right]^{-1} = F(a+2s)/F(a), \tag{18.3.30}$$

и моменты интенсивности I можно получить последовательным дифференцированием функции $M(s,a)$. Например, средняя интенсивность записывается в виде

$$\langle I\rangle = \frac{1}{F(a)}\left[\frac{d}{ds}F(a+2s)\right]_{s=0} = \left[\frac{d}{ds}\ln F(a+2s)\right]_{s=0}. \tag{18.3.31}$$

Теперь кумулянты $\kappa_n\,(n = 1,2,\ldots)$ плотности вероятности $\mathscr{P}(I)$ определяются как коэффициенты при

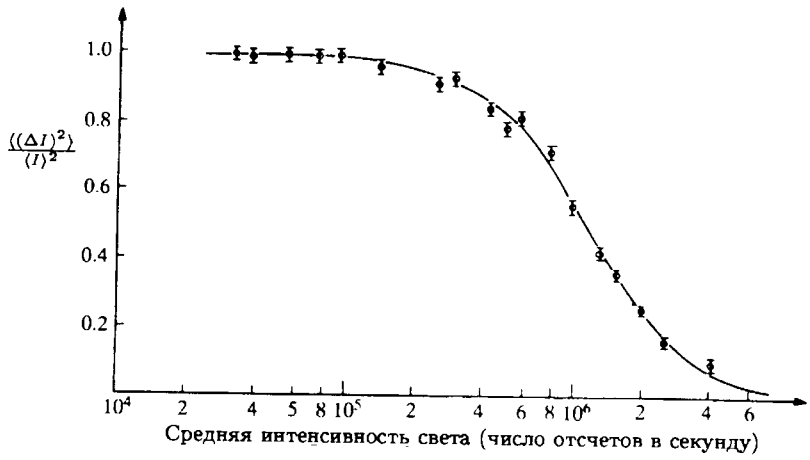


Рис. 18.12. Зависимость относительной среднеквадратичной флуктуации интенсивности лазерного поля от средней интенсивности. Сплошная кривая построена по формулам (18.3.27) и (18.3.28). Масштабный множитель для логарифмической шкалы интенсивности подобран таким образом, чтобы достигалось лучшее соответствие экспериментальным значениям. (Из работы Davidson and Mandel, 1967)

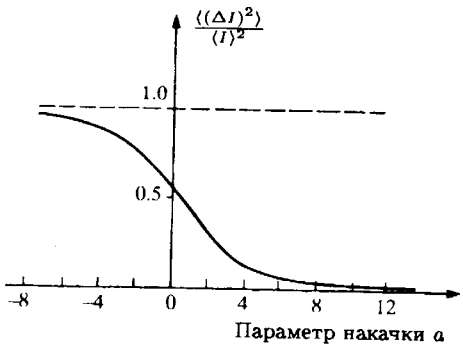


Рис. 18.13. Теоретическая зависимость относительной среднеквадратичной флуктуации интенсивности от параметра накачки a

$s^n/n!$ в разложении $\ln[M(s,a)]$ по степеням s (ср. разд. 1.4), так что

$$\kappa_{n+1}(a) = \left[\frac{d^n}{ds^n}\frac{d}{ds}\ln F(a+2s)\right]_{s=0} = 2^n\frac{d^n}{da^n}\left[\frac{d}{ds}\ln F(a+2s)\right]_{s=0} = 2^n\frac{d^n}{da^n}\langle I(a)\rangle. \qquad (18.3.32)$$

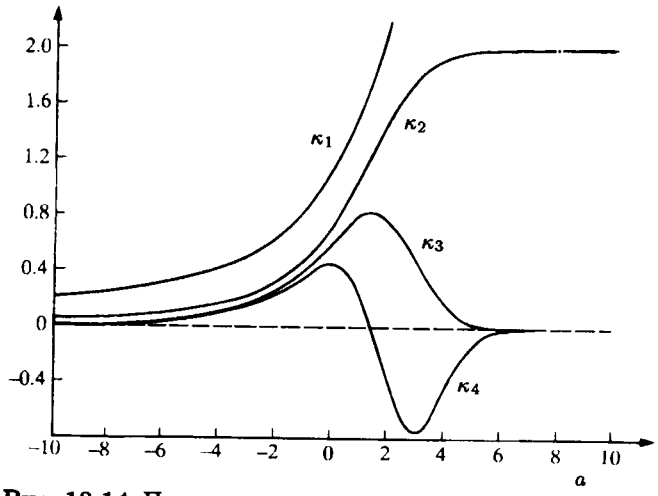


Рис. 18.14. Первые четыре кумулянта интенсивности лазерного поля как функции параметра накачки a (Risken, 1970)

Последняя строка сразу следует из (18.3.31). Первый кумулянт $\kappa_1(a)$ есть как раз средняя интенсивность света $\langle I(a)\rangle$, а последующие кумулянты получаются последовательным дифференцированием. Вид первых четырех кумулянтов как функций от a показан на рис. 18.14.

Практически, часто предпочтительнее работать с нормированными кумулянтами

$$c_n(a) \equiv \kappa_n(a)/\langle I(a)\rangle^n. \qquad (18.3.33)$$

Зависимость $c_n(a)$ от нормированной средней интенсивности лазерного света $\langle I(a)\rangle/\langle I(0)\rangle$ была проверена до значений $n = 4$ в ходе измерений числа фотоотсчетов (Chang, Korenman, Alley and Detenbeck, 1969). Результаты, показанные на рис. 18.15, демонстрируют хорошее согласие между теорией и экспериментом. Поскольку n-ый кумулянт есть мера собственных флуктуаций n-го порядка (или, в определенном смысле, собственных n-фотонных корреляций), то эти измерения являются довольно сильной проверкой стационарного решения (18.3.17). Таким образом, стационарная теория лазера имеет очень хорошее экспериментальное подтверждение.

Перед тем, как возвратиться к нестационарному уравнению движения (18.3.4) и исследовать его общее решение, мы рассмотрим лазер в рамках квантовой теории излучения. Мы увидим в разд. 18.5 с помощью диагонального представления по когерентным состояниям, которое обсуждалось в разд. 11.8, и с помощью некоторых приближений, что квантовая теория приводит к тому же уравнению Фоккера — Планка (18.3.4), что и полуклассическая теория с учетом шума.

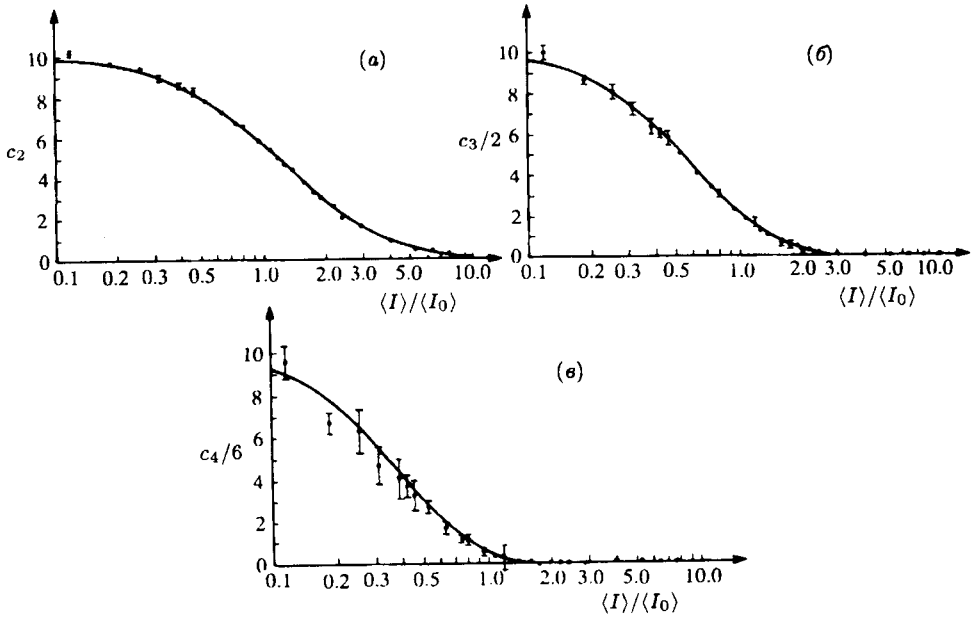


Рис. 18.15. Зависимость нормированных второго (*а*), третьего (*б*) и четвертого (*в*) кумулянтов интенсивности лазерного поля от средней его интенсивности. Точки — экспериментальные значения, кривые — результаты теоретического расчета. (Из работы Chang, Korenman, Alley and Detenbeck, 1969)

18.4. Квантовая теория лазера[1]

Как мы увидели, полуклассическая теория лазера приводит к детерминированному уравнению движения для амплитуды поля, и вопросы, касающиеся ширины линии и флуктуаций, строго говоря, остаются за рамками теории. Флуктуации вносятся на более поздней стадии путем введения ланжевеновских источников шума, что является надуманной процедурой, для которой нелегко найти строгое обоснование, и справедливость которой, в значительной степени, оправдана согласованностью с другими подходами. Квантово-полевой подход служит более последовательной основой для теории лазера. Кроме того, он позволяет ответить на некоторые вопросы, которые, вообще, бессмысленны в рамках полуклассической теории, например, сколько фотонов имеется в резонаторе на пороге и каково их распределение вероятностей.

Лазер рассматривался полностью квантово-механически несколькими авторами (Haken and Sauermann, 1963a, b; Haken 1964, 1970; см. также Lax and Louisell, 1967). Далее мы будем широко использовать подход, развитый Скалли и Лэмбом (Scully and Lamb, 1967, 1969, 1970; Sargen, Scully and Lamb, 1974). Однако, для простоты, мы заменим использованную ими процедуру Вайскопа — Вигнера на более простую, которая приводит по существу к той же динамике, но к немного другим коэффициентам (Scully, 1969). Мы сделаем другие упрощающие предположения, проводя параллели с приведенной выше полуклассической теорией. Например, мы пренебрежем любым движением или неоднородным уширением атомных систем и возьмем резонатор, резонансная частота которого очень близка к частоте атомного перехода ω_0.

Рассмотрим опять множество одинаковых двухуровневых атомов или атомных диполей, расположенных в различных точках лазерного резонатора и взаимодействующих с полем одной моды резонатора. Если населенности атомов инвертированы, то взаимодействие между атомами и полем может привести к росту со временем числа фотонов в резонаторе. Рассмотрим, для начала, влияние одного возбужденного атома на состояние лазерного поля.

Гамильтониан полной системы, состоящей из одномодового электромагнитного поля частоты ω и двухуровневого атома с частотой резонансного перехода ω_0, находящегося в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$,

[1] Эта теория прекрасно изложена также в книге (*Scully, Zubairy, 1997) и в статье (*Быков, Шепелев, 1986) — *ред. пер.*

можно записать в виде [ср. (15.3.1)]

$$\hat{H} = E_0 + \hbar\omega_0 \hat{R}_3 + \hbar\omega(\hat{n} + \frac{1}{2}) - \boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \left[\hat{b}(t) + \hat{b}^\dagger(t)\right]. \tag{18.4.}$$

Здесь E_0 — средняя энергия двух рабочих уровней, $\boldsymbol{\mu}_{12}$ — матричный элемент оператора дипольног момента перехода атома, который будет считаться действительным, как в случае перехода $\Delta m = 0$, $\hat{n}$, как обычно, оператор числа фотонов. Далее будет удобно работать в картине взаимодействия (ср разд. 14.1), в которой атомные понижающие и повышающие операторы изменяются со временем согласн формулам

$$\hat{b}(t) = \hat{b}(t_0)\, \mathrm{e}^{-i\omega_0(t-t_0)}, \quad \hat{b}^\dagger(t) = \hat{b}^\dagger(t_0)\, \mathrm{e}^{i\omega_0(t-t_0)},$$

где t_0 — начальный момент времени, с которого начинается эволюция. Одномодовое электрическое пол $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ в картине взаимодействия выражается тогда в виде [ср. (18.2.4)]

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{V}} \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2} \left[\hat{a}(t_0) u(\mathbf{r})\, \mathrm{e}^{-i\omega(t-t_0)} + \text{э.с.}\right], \tag{18.4.2}$$

где $u(\mathbf{r})$ — нормированная модовая функция резонатора, которая обсуждалась в разд. 18.2; V — объем резо натора и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — действительный единичный вектор поляризации, представляющий линейно-поляризованную волну. Слагаемое, описывающее взаимодействия в (18.4.1), принимает вид

$$\hat{H}_I(t) = \hbar g \left[\hat{a}\, \hat{b}^\dagger u(\mathbf{r})\, \mathrm{e}^{i(\omega_0-\omega)(t-t_0)} + \text{э.с.} + \hat{a}\, \hat{b}\, u(\mathbf{r})\, \mathrm{e}^{-i(\omega_0+\omega)(t-t_0)} + \text{э.с.}\right]. \tag{18.4.3}$$

Мы скрыли временные аргументы в операторах $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, $\hat{b}$, $\hat{b}^\dagger$, подразумевая, что по умолчанию они всегда равны t_0, и определили

$$g \equiv -\left(\frac{\omega}{2\hbar\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{18.4.4}$$

Здесь g есть константа, характеризующая эффективность взаимодействия.

Предположим, что в момент t_0, когда взаимодействие выключено, состояние полной системы факто ризуется, так что оператор плотности записывается в виде

$$\hat{\rho}(t_0) = \hat{\rho}_\mathrm{A}(t_0) \otimes \hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0), \tag{18.4.5}$$

где $\hat{\rho}_\mathrm{A}(t_0)$, $\hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0)$ — приведенные операторы плотности атома и поля, соответственно. Результатом взаи модействия является изменение во времени оператора $\hat{\rho}$ в картине взаимодействия, и его вид в момент t задается разложением (14.1.11). Вычисляя след по атомным переменным, мы можем выразить влияние взаимодействия на состояние лазерного поля в момент времени t в виде

$$\hat{\rho}_\mathrm{F}(t) = \hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0) + \mathrm{Tr}_\mathrm{A} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^r} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{r-1}} dt_r \times$$

$$\times \left[\hat{H}_\mathrm{I}(t_1), \left[\hat{H}_\mathrm{I}(t_2), \left[\ldots \left[\hat{H}_\mathrm{I}(t_r), \hat{\rho}(t_0)\right]\right] \ldots\right]\right]. \tag{18.4.6}$$

18.4.1. Основное кинетическое уравнение для лазерного поля

Для того, чтобы определить влияние одного возбужденного атома на поле лазера предположим, что начальное состояние атома есть верхнее состояние

$$\hat{\rho}_\mathrm{A}(t_0) = |2\rangle\langle 2|, \tag{18.4.7}$$

и допустим, что взаимодействие продолжается в течение времени, которое того же порядка, что и время жизни верхнего состояния. Предположим, как отмечено на рис. 18.16, что два рабочих уровня $|1\rangle$ и $|2\rangle$

имеют средние времена жизни T_1 и T_2, соответственно. Влияние ансамбля таких возбужденных атомов на поле можно рассчитать, по крайней мере, приближенно, выбирая в разложении (18.4.6) $t - t_0 = \Delta t$ равным времени жизни атома (в возбужденном состоянии) и усредняя по Δt с экспоненциальным распределением вероятности для среднего значения T_2, как в разд. 18.2. Конечно, более реалистично было бы предположить, что населенность возбужденного состояния распадается по экспоненциальному закону непрерывно во времени, как это сделано в методе Вайскопфа-Вигнера, которым воспользовались Скалли и Лэмб (Scally and Lamb, 1967, 1969, 1970) (см. также Sargent, Scully and Lamb, 1974, гл. 17). Однако, метод теории возмущений приводит к значительному упрощению задачи и, по существу, к тому же решению (Scully, 1969), сохраняя, кроме того, связь с полуклассическим рассмотрением, сделанным ранее в разд. 18.2. Более того, мы ограничимся, как и прежде, первыми двумя ненулевыми членами в разложении (18.4.6).

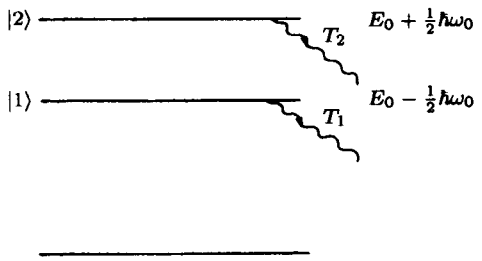


Рис. 18.16. Схема энергетических уровней рабочей частицы лазера

Подставим теперь (18.4.3) и (18.4.5) в (18.4.6). Сразу ясно, что если время жизни $\Delta t = t - t_0$ очень большое по сравнению с оптическим периодом $2\pi/\omega_0$, то члены, содержащие $e^{\pm i(\omega+\omega_0)t}$ в выражении (18.4.3), дают при интегрировании нуль и ими можно пренебречь. С другой стороны, вклад членов, содержащих $e^{\pm i(\omega-\omega_0)t}$, сильно зависит от величины расстройки $\omega - \omega_0$. Для простоты предположим, что расстройка настолько мала, что

$$|\omega - \omega_0|\Delta t \ll 1.$$

Это позволяет совсем пренебречь осциллирующими множителями и рассматривать $\hat{H}_\mathrm{I}$ под знаком интеграла в формуле (18.4.6), как независимую от времени величину. В результате приходим к уравнению

$$\hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0 + \Delta t) = \hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0) + \mathrm{Tr}_\mathrm{A}\left\{\frac{\Delta t}{i\hbar}\left[\hat{H}_\mathrm{I}, \hat{\rho}(t_0)\right] + \left(\frac{\Delta t}{i\hbar}\right)^2 \frac{1}{2!}\left[\hat{H}_\mathrm{I}, \left[\hat{H}_\mathrm{I}, \hat{\rho}(t_0)\right]\right] + \ldots\right\}. \tag{18.4.8}$$

Таким образом, задача сводится к вычислению коммутаторов все более высокого порядка.

Последние легко вычисляются с помощью соотношений (15.1.4) и (15.1.5). В результате, находим

$$\left[\hat{H}_\mathrm{I}, \hat{\rho}(t_0)\right] = \hbar g\left[\hat{a}\,\hat{b}^\dagger u(\mathbf{r}) + \text{э.с.}, |2\rangle\langle 2| \otimes \hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0)\right] = \hbar g\left[\hat{b}\,\hat{a}^\dagger \hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0)u^*(\mathbf{r}) - \hat{b}^\dagger \hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0)\hat{a}u(\mathbf{r})\right], \tag{18.4.9}$$

где учтено, что атомные и полевые операторы коммутируют в один и тот же момент времени, и что операторы $|1\rangle\langle 2|$ и $|2\rangle\langle 1|$ представляют собой понижающий $\hat{b}$ и повышающий $\hat{b}^\dagger$ операторы, соответственно. Поскольку след операторов $\hat{b}$ и $\hat{b}^\dagger$ равен нулю, то из (18.4.9) непосредственно следует, что

$$\mathrm{Tr}_\mathrm{A}\left[\hat{H}_\mathrm{I}, \hat{\rho}(t_0)\right] = 0, \tag{18.4.10}$$

так что первый член под знаком следа в разложении (18.4.8) обращается в нуль. Теперь с помощью (18.4.9) вычисляем коммутатор второго порядка и находим, что

$$\left[\hat{H}_\mathrm{I}, \left[\hat{H}_\mathrm{I}, \hat{\rho}(t_0)\right]\right] = (\hbar g)^2\left[\hat{a}\,\hat{b}^\dagger u(\mathbf{r}) + \text{э.с.}, \hat{b}\,\hat{a}^\dagger \hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0)u^*(\mathbf{r}) - \hat{b}^\dagger \hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0)\hat{a}u(\mathbf{r})\right] =$$
$$= (\hbar g)^2|u(\mathbf{r})|^2\left[\hat{b}^\dagger\hat{b}(\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0) + \hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0)\hat{a}\,\hat{a}^\dagger) - 2\hat{b}\,\hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0)\hat{a}\right]. \tag{18.4.11}$$

Поскольку $\mathrm{Tr}_\mathrm{A}\hat{b}\,\hat{b}^\dagger = 1 = \mathrm{Tr}_\mathrm{A}\hat{b}^\dagger\hat{b}$, следовательно, имеем

$$\mathrm{Tr}_\mathrm{A}\left[\hat{H}_\mathrm{I}, \left[\hat{H}_\mathrm{I}, \hat{\rho}(t_0)\right]\right] = (\hbar g)^2|u(\mathbf{r})|^2\left[\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0) - \hat{a}^\dagger\hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0) + \text{э.с.}\right], \tag{18.4.12}$$

что, очевидно, представляет собой первый неисчезающий член в разложении по теории возмущений. Этот член имеет второй порядок по амплитуде поля. Подобным же образом легко находим, что

$$\left[\hat{H}_\mathrm{I}, \left[\hat{H}_\mathrm{I}, \left[\hat{H}_\mathrm{I}, \hat{\rho}(t_0)\right]\right]\right] = (\hbar g)^3|u(\mathbf{r})|^2\left[u^*(\mathbf{r})\hat{b}(\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0) + 3\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_\mathrm{F}(t_0)\hat{a}\,\hat{a}^\dagger) - \text{э.с.}\right]. \tag{18.4.13}$$

Данное выражение снова обращается в нуль под знаком следа, тогда как

$$\left[\hat{H}_{\rm I},\left[\hat{H}_{\rm I},\left[\hat{H}_{\rm I},\left[\hat{H}_{\rm I},\hat{\rho}(t_0)\right]\right]\right]\right] = \\ = (\hbar g)^4|u(\mathbf{r})|^4\left[\hat{b}^\dagger\hat{b}(\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}(t_0)+3\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}(t_0)\hat{a}\,\hat{a}^\dagger+\text{э.с.})-4\hat{b}\,\hat{b}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}(t_0)\hat{a}+\text{э.с.})\right], \quad (18.4.14)$$

что приводит к следующему выражению

$$\mathrm{Tr_A}\left[\hat{H}_{\rm I},\left[\hat{H}_{\rm I},\left[\hat{H}_{\rm I},\left[\hat{H}_{\rm I},\hat{\rho}(t_0)\right]\right]\right]\right] = \\ = (\hbar g)^4|u(\mathbf{r})|^4\left[\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}(t_0)+3\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}(t_0)\hat{a}\,\hat{a}^\dagger-4\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}(t_0)\hat{a}+\text{э.с.}\right]. \quad (18.4.15)$$

Окончательно, после усреднения по времени жизни Δt с экспоненциальным распределением вероятности

$$P(\Delta t) = (1/T_2)\,\mathrm{e}^{-\Delta t/T_2},$$

мы получаем из (18.4.8), с помощью (18.4.12) и (18.4.15), следующее выражение

$$\Delta\hat{\rho}_{\rm F}(t_0) = -(gT_2)^2|u(\mathbf{r})|^2\left[\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}(t_0)-\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}(t_0)\hat{a}+\text{э.с.}\right]+ \\ +(gT_2)^4|u(\mathbf{r})|^4\left[\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}(t_0)+3\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}(t_0)\hat{a}\,\hat{a}^\dagger-4\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}(t_0)\hat{a}+\text{э.с.}\right] \quad (18.4.16)$$

для среднего изменения состояния лазерного поля, вызванного взаимодействием с одним атомом в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$. Как и в полуклассическом подходе, изложенном в разд. 18.2, вычисление было проведено до второго неисчезающего члена в разложении по теории возмущений. Первое слагаемое в (18.4.16) соответствует испусканию возбужденным атомом одного фотона, тогда как второе описывает вклад двух циклов: испускания и повторного возбуждения атома.

Реальный лазер, естественно, содержит много возбужденных атомов или молекул, распределенных в активной среде, которые постоянно переводятся в возбужденное состояние при помощи некоторого механизма накачки со скоростью R_2. Вклад любого из них в изменение $\hat{\rho}_{\rm F}$, следовательно, мал, и если атомное поле эволюционирует медленно, то изменение $\Delta\hat{\rho}_{\rm F}(t_0)$ из выражения (18.4.16) можно рассматривать как бесконечно малое. Умножая $\Delta\hat{\rho}_{\rm F}(t_0)$ на R_2 и усредняя по радиус-вектору $\mathbf{r}$, получаем среднюю скорость изменения оператора плотности лазерного поля, вызванного накачкой или механизмом усиления, при условии, что состояние поля меняется намного медленнее, чем состояние каждого атома. Результат имеет вид

$$\left(\frac{\partial\hat{\rho}_{\rm F}}{\partial t}\right)_{\text{усил}} = -\frac{1}{N}R_2(gT_2)^2\int\eta(\mathbf{r})|u(\mathbf{r})|^2\left[\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}-\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}\hat{a}+\text{э.с.}\right]d^3r+ \\ +\frac{1}{N}R_2(gT_2)^4\int\eta(\mathbf{r})|u(\mathbf{r})|^4\left[\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}+3\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}\hat{a}\,\hat{a}^\dagger-4\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\rm F}\hat{a}+\text{э.с.}\right]d^3r. \quad (18.4.17)$$

Здесь, как и раньше, $\eta(\mathbf{r})$ — плотность активных атомов, N — их общее число и интеграл берется по внутреннему объему резонатора, как в формуле (18.2.9). Полученная таким образом средняя скорость изменения поля иногда называется *крупнозернистой производной*. Существенной особенностью вывода является то, что состояние лазерного поля изменяется намного медленнее, чем состояние атома, так что оно остается практически неизменным в течение среднего времени взаимодействия T_2 с атомом. Это предположение, которое хорошо подтверждается на практике для так называемых «хороших» резонаторов, позволяет нам осуществить *адиабатическое исключение* атомных переменных из уравнения движения для поля. Необходимо подчеркнуть, что хотя мы вычисляли вклады атомов, рассматривая их по отдельности, тем не менее взаимодействие атомов посредством лазерного поля учтено неявно.

До сих пор наша модель лазера не содержала никакого механизма затухания, позволяющего вычислить потери фотонов в резонаторе. В полуклассической лэмбовской теории лазера, приведенной в разд. 18.2, потери вводились искусственным образом, когда активная среда считалась слабо проводящей или рассеивающей. В полностью квантовой теории опять необходима некоторая уловка, поскольку фотоны могут исчезать только через их взаимодействие с другой квантовой системой. Вследствие этого мы введем множество резонаторов теплового резервуара, представляющих собой «атомы» с такой же структурой энергетических уровней, как на рис. 18.16, находящиеся первоначально в нижнем состоянии $|1\rangle$. Назначение этих

«атомов» состоит в поглощении фотонов лазерного поля со скоростью, пропорциональной интенсивности света, но без переизлучения.

Мы можем вычислить влияние одного атома теплового резервуара, находящегося в нижнем состоянии, тем же методом, который использовался при выводе (18.4.16), если не считать того, что выражение (18.4.7) для начального атомного состояния заменяется следующим $\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(t_0) = |1\rangle\langle 1|$, а разложение по теории возмущений обрывается на первом неисчезающем члене. Последнее гарантирует, что потери будут пропорциональны интенсивности лазера, и что переизлучение атома теплового резервуара будет отсутствовать. Если T_1 есть время жизни состояния $|1\rangle$, в течение которого продолжается взаимодействие, то для изменения состояния поля, вызванного атомом теплового резервуара в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$, получим вместо (18.4.16) следующее выражение

$$\Delta\hat{\rho}_{\mathrm{F}}(t_0) = -(gT_1)^2|u(\mathbf{r})|^2\left[\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}_{\mathrm{F}}(t_0) - \hat{a}\hat{\rho}_{\mathrm{F}}(t_0)\hat{a}^\dagger + \text{э.с.}\right]. \tag{18.4.18}$$

Если данное выражение умножить на скорость R_1, с которой атомы теплового резервуара приводятся в состояние $|1\rangle$, то получим среднюю скорость изменения $\hat{\rho}_{\mathrm{F}}$, при условии, что состояние поля меняется намного медленнее, чем состояние атомов. Далее усредняем по радиус-вектору $\mathbf{r}$, полагая, что N_1 атомов теплового резервуара распределены с некоторой плотностью $\eta_1(\mathbf{r})$. Это приводит к уравнению

$$\left(\frac{\partial\hat{\rho}_{\mathrm{F}}}{\partial t}\right)_{\text{столкн.}} = -\frac{1}{N_1}R_1(gT_1)^2\int\eta_1(\mathbf{r})|u(\mathbf{r})|^2\left[\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{\rho}_{\mathrm{F}} - \hat{a}\,\hat{\rho}_{\mathrm{F}}\hat{a}^\dagger + \text{э.с.}\right]d^3r, \tag{18.4.19}$$

где скорость изменения опять представляет собой крупнозернистую производную. Несмотря на нефизическую природу нашей модели затухания, получаемый эффект хорошо соответствует действию реальных механизмов потерь, поскольку он выражается в поглощении фотонов.

Наконец, мы объединим эффекты усиления и потерь, складывая вклады, описываемые выражениями (18.4.17) и (18.4.19). Это приводит к следующему *основному кинетическому уравнению* для оператора плотности $\hat{\rho}_{\mathrm{F}}$ лазерного поля:

$$\frac{\partial\hat{\rho}_{\mathrm{F}}}{\partial t} = -\frac{1}{2}A\left[\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\mathrm{F}} - \hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\mathrm{F}}\hat{a} + \text{э.с.}\right] - \frac{1}{2}C\left[\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{\rho}_{\mathrm{F}} - \hat{a}\,\hat{\rho}_{\mathrm{F}}\hat{a}^\dagger + \text{э.с.}\right] + \\ + \frac{1}{8}B\left[\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\mathrm{F}} + 3\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\mathrm{F}}\hat{a}\,\hat{a}^\dagger - 4\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_{\mathrm{F}}\hat{a} + \text{э.с.}\right], \tag{18.4.20}$$

где введены сокращения[1]

$$A \equiv 2(R_2/N)(gT_2)^2\int\eta(\mathbf{r})|u(\mathbf{r})|^2\,d^3r,$$
$$C \equiv 2(R_1/N_1)(gT_1)^2\int\eta_1(\mathbf{r})|u(\mathbf{r})|^2\,d^3r, \tag{18.4.21}$$
$$B \equiv 8(R_2/N)(gT_2)^4\int\eta(\mathbf{r})|u(\mathbf{r})|^4\,d^3r$$

для коэффициентов, характеризующих усиление, потери и нелинейность или насыщение лазера, соответственно. Фактически, скорость потерь можно отождествить с реальной скоростью потери фотонов в резонаторе лазера, которая определяется, главным образом, коэффициентами отражения зеркал. Более того, обычно скорости усиления A и потерь C соизмеримы, даже значительно выше или значительно ниже порога. С другой стороны, отношение B к A, как правило, чрезвычайно мало. Оно определяется соотношением

$$\frac{B}{A} = 2(gT_2)^2\frac{\int\eta(\mathbf{r})|u(\mathbf{r})|^4\,d^3r}{\int\eta(\mathbf{r})|u(\mathbf{r})|^2\,d^3r} \sim (gT_2)^2F, \tag{18.4.22}$$

где F — безразмерный множитель порядка единицы. Мы можем сделать грубую численную оценку величины B/A, выражая g через коэффициент Эйнштейна A $(1/T)$ для атомного перехода из состояния $|2\rangle$ в состояние $|1\rangle$, задаваемый формулой (15.4.11). В результате получим

$$\frac{B}{A} \sim (gT_2)^2 \approx \frac{3}{8\pi}\frac{cT_2^2\lambda^2}{TV}.$$

[1]Символ A использовался также для коэффициента Эйнштейна A и для некоторых других величин. Однако, вряд ли возникнут недоразумения с обозначениями в (18.4.21), которые являются стандартными и широко используются.

Подставляя типичные для лазеров значения $T_2 \sim T \sim 10^{-8}$ с, $\lambda \sim 6 \times 10^{-5}$ см, $V \sim 10^{-1} \div 1\,\text{см}^3$, получаем

$$B/A \sim 10^{-6} \div 10^{-7}.$$

Как правило, чем меньше коэффициент насыщения B, тем сильнее будет лазерное поле в резонаторе, необходимое для достижения стационарного состояния.

18.4.2. Статистика фотонов

Операторное уравнение движения (18.4.20) позволяет вывести уравнения для средних значений или распределений вероятностей различных динамических переменных поля. В качестве иллюстрации, получим уравнение движения для вероятности $p(n,t)$ того, что в момент времени t в резонаторе имеется n фотонов. Эта вероятность задается средним значением оператора $\hat{\rho}_F(t)$ в фоковском состоянии $|n\rangle$

$$p(n,t) = \langle n|\hat{\rho}_F(t)|n\rangle. \tag{18.4.23}$$

Умножим каждое слагаемое в (18.4.20) на $|n\rangle$ справа и на $\langle n|$ слева и воспользуемся соотношениями (10.4.5) и (10.4.8). В результате получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p(n,t)}{\partial t} = \\
&= -A\left[(n+1)p(n,t) - np(n-1,t)\right] - C\left[np(n,t) - (n+1)p(n+1,t)\right] + B\left[(n+1)^2 p(n,t) - n^2 p(n-1,t)\right] = \\
&= -A(n+1)\left[1 - \frac{B}{A}(n+1)\right]p(n,t) + An\left[1 - \frac{B}{A}n\right]p(n-1,t) + C(n+1)p(n+1,t) - Cnp(n,t).
\end{aligned} \tag{18.4.24}$$

Если рассматривать только такие числа фотонов n, для которых члены $(B/A)n$ оказываются намного меньше единицы, то можно переписать последнее уравнение в виде

$$\frac{\partial p(n,t)}{\partial t} = -\frac{A(n+1)}{1+(B/A)(n+1)}p(n,t) + \frac{An}{1+(B/A)n}p(n-1,t) + C(n+1)p(n+1,t) - Cnp(n,t). \tag{18.4.25}$$

Данная формула имеет точно такой же вид, как и формула, получаемая методом Вайскопфа — Вигнера (Haken, 1964, 1970; Scully and Lamb, 1967, 1969), в котором отсутствует ограничение на величину напряженности поля. Отметим, что уравнение движения (18.4.24), выведенное методом теории возмущений, следует из более общего уравнения (18.4.25) при разложении двух знаменателей и сохранении только двух первых членов в разложении. Это иллюстрирует связь между двумя методами и подчеркивает тот факт, что лазер не должен работать при сильном превышении порога. Таким образом, если мы хотим, чтобы (18.4.24) имело силу, необходимо, чтобы $nB/A \ll 1$. Коэффициенты A и B, получаемые методом Вайскопфа-Вигнера, также немного отличаются и принимают вид (Scully and Lamb, 1967, 1969)

$$A = \frac{2R_2 g^2}{\gamma_2 \gamma_{12}}, \quad B = \frac{8R_2 g^4}{\gamma_1 \gamma_2^2 \gamma_{12}}, \tag{18.4.26}$$

где $\gamma_2 \approx 1/T_2$ — скорость распада верхнего состояния $|2\rangle$, γ_1 — скорость распада нижнего состояния $|1\rangle$ и γ_{12} — среднее значение $\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$.

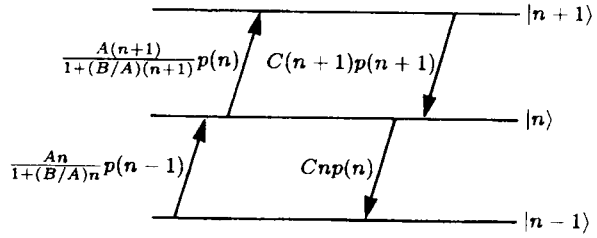


Рис. 18.17. Поток вероятности между соседними состояниями лазерного поля (Scully and Lamb, 1967)

Основное кинетическое уравнение (18.4.25) имеет характер скоростного уравнения, в котором изменение населенности фотонами состояния $|n\rangle$ приписывается переходам из и на соседние состояния $|n-1\rangle$ и $|n+1\rangle$. Это проиллюстрировано на рис. 18.17. Первый член справа в уравнении (18.4.25) описывает, очевидно, уменьшение вероятности $p(n)$, которое обусловлено вынужденным излучением атома с переходом поля из состояния $|n\rangle$ в состояние $|n+1\rangle$, а второй член описывает увеличение вероятности $p(n)$, которое обусловлено вынужденным излучением с переходом поля из состояния $|n-1\rangle$ в состояние $|n\rangle$. Аналогично, третий и четвертый члены описывают увеличение и уменьшение $p(n)$, связанное с поглощением лазерного излучения.

18.4.3. Стационарная вероятность

Рассмотрим стационарное решение уравнения (18.4.25). В установившемся режиме $\partial p(n,t)/\partial t = 0$, и имеет место детальное равновесие между соседними состояниями, так что (см. рис. 18.17)

$$\frac{A(n+1)}{1+(B/A)(n+1)}p(n) = C(n+1)p(n+1), \quad \frac{An}{1+(B/A)n}p(n-1) = Cnp(n).$$

Сразу видно, что эти два уравнения эквивалентны и имеют следующее решение

$$p(n) = \frac{A/C}{1+(B/A)n}p(n-1). \tag{18.4.27}$$

Данная формула является рекуррентным соотношением, многократное применение которого приводит к результату

$$p(n) = p(0)\prod_{r=1}^{n}\left(\frac{A/C}{1+r(B/A)}\right). \tag{18.4.28}$$

Если бы мы исходили из уравнения (18.4.24), которое получено в результате обрыва разложения по теории возмущений на втором неисчезающем члене, то пришли бы к следующему результату:

$$p(n) = p(0)\prod_{r=1}^{n}\left[\frac{A}{C}\left(1-r\frac{B}{A}\right)\right]. \tag{18.4.29}$$

Формулы (18.4.29) и (18.4.28) эквивалентны, когда nB/A достаточно мало. Только в том случае, когда лазер работает при значительном превышении порога, нам необходимо делать различие между двумя этими выражениями и использовать (18.4.28). Выражение (18.4.28) можно записать в эквивалентном виде

$$p(n) = \text{const} \times \frac{(A^2/BC)^n}{\Gamma/\left[(A/B)+n+1\right]}. \tag{18.4.30}$$

Данное распределение вероятностей приближается к пуассоновскому, когда лазер работает при таком превышении порога, что число фотонов n значительно превышает A/B. Однако, это означает, что $A \gg C$, а такое условие не всегда достижимо в стационарном режиме. Часто коэффициенты усиления A и потерь C сравнимы, и число фотонов n существенно меньше A/B. Нетрудно показать, что (18.4.30) приобретает в этих условиях аналитически более простой вид.

Начнем с того, что заменим Γ-функцию разложением Стирлинга (Korn and Korn, 1961, с. 822)

$$\Gamma\left(\frac{A}{B}+n+1\right) = \sqrt{2\pi}\left(n+\frac{A}{B}\right)^{n+(A/B)+1/2}\exp\left(-n-\frac{A}{B}\right) =$$

$$= \sqrt{2\pi}\left(\frac{A}{B}\right)^{n+(A/B)+1/2}\left(1+n\frac{B}{A}\right)^{n+(A/B)+1/2}\exp\left(-n-\frac{A}{B}\right) \tag{18.4.31}$$

и подставим данное выражение в (18.4.30). В результате получим

$$p(n) = \text{const}\left(\frac{A}{C}\right)^n \mathrm{e}^n \exp\left[-\left(n+\frac{A}{B}+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+n\frac{B}{A}\right)\right] =$$

$$= \text{const}\left(\frac{A}{C}\right)^n \mathrm{e}^n \exp\left[-\left(n+\frac{A}{B}+\frac{1}{2}\right)\left(n\frac{B}{A}-\frac{1}{2}n^2\frac{B^2}{A^2}+\ldots\right)\right],$$

где в последней строке мы разложили логарифмическую функцию в степенной ряд относительно малого параметра nB/A. Это приводит к соотношению

$$p(n) = \text{const}\left(\frac{A}{C}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}n^2\frac{B}{A}\right]\exp\left[O\left(n\frac{B}{A}\right)\right], \tag{18.4.32}$$

где O обозначает бесконечно малую высшего порядка.

С помощью подстановок

$$n_0 \equiv (A/B)^{1/2}, \tag{18.4.33}$$

$$\exp[a/(\sqrt{2n_0})] \equiv A/C, \tag{18.4.34}$$

выражение (18.4.32) упрощается следующим образом:

$$p(n) = \text{const} \times \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}n}{n_0} - a\right)^2\right]. \tag{18.4.35}$$

Такое же выражение получится, если исходить из (18.4.29). Данное распределение является усеченным гауссовским распределением величины n/n_0, если не считать того, что n — дискретная, а не непрерывная переменная. Полученный результат можно сравнить с выражением (18.3.17) для распределения вероятности классической интенсивности света I. Два распределения идентичны, если рассматривать n/n_0 как почти непрерывную и отождествить $(\sqrt{2})n/n_0$ с интенсивностью света I. Безразмерный параметр a, введенный в (18.4.34), есть параметр накачки лазера. Он положителен выше порога, когда $A > C$, и отрицателен ниже порога, когда $A < C$. Рис. 18.6, иллюстрирующий форму распределения вероятностей $\mathscr{P}(I)$ классической интенсивности света I для различных значений параметра накачки, показывает, следовательно, и формы распределения $p(n)$. Более того, тот же расчет, который был сделан в разд. 18.3 для определения первых двух моментов интенсивности света, дает теперь следующие моменты величины n

$$\langle n\rangle = \frac{n_0}{\sqrt{2}}\left[a + \frac{2\,\mathrm{e}^{-a^2/4}}{\sqrt{\pi}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}a\right)\right]}\right], \tag{18.4.36}$$

$$\langle(\Delta n)^2\rangle = n_0^2\left[1 - \frac{a\,\mathrm{e}^{-a^2/4}}{\sqrt{\pi}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}a\right)\right]} - \frac{2\,\mathrm{e}^{-a^2/2}}{\pi\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}a\right)\right]^2}\right]. \tag{18.4.37}$$

Хотя выражение (18.4.35) довольно похоже на полуклассическое выражение (18.3.17), оно, в отличие от последнего, предоставляет информацию об абсолютном числе фотонов.

Раскроем физический смысл n_0. Из (18.4.36) следует, что на пороге, когда $a = 0$, $\langle n\rangle = n_0\sqrt{2/\pi}$. Следовательно, с точностью до множителя порядка единицы, n_0 есть среднее число фотонов, имеющихся в резонаторе на пороге. Из определения (18.4.33) и приближенного значения B/A находим, что для типичного лазера число фотонов n_0 порядка нескольких тысяч. Следовательно, условие $nB/A \ll 1$, которое использовалось при выводе (18.4.35), эквивалентно неравенству

$$n \ll n_0^2. \tag{18.4.38}$$

Тогда из выражения (18.4.34) следует, что

$$a/\sqrt{2n_0} \approx (A - C)/C \approx (A - C)/A,$$

когда $A \approx C$, и

$$a \approx \frac{A - C}{(AB/2)^{1/2}}, \tag{18.4.39}$$

что является альтернативным определением параметра накачки a. При значительном превышении порога, когда $a \gg 1$, выражение (18.4.36) дает

$$\langle n\rangle \approx an_0/\sqrt{2} \approx (A - C)/B, \tag{18.4.40}$$

так что среднее число фотонов есть разность между коэффициентами усиления и потерь, деленная на коэффициент насыщения.

Условие $n \ll n_0^2$, которое предполагалось при выводе (18.4.35), можно теперь преобразовать в условие, налагаемое на параметр накачки a. С учетом (18.4.40) получаем

$$a \ll n_0. \tag{18.4.41}$$

Поскольку n_0, обычно, как минимум равно нескольким тысячам, то безразмерный параметр a может достигать 100 без противоречия с условиями $nB/A \ll 1$ и $A \approx C$. Таким образом, возможно, что лазер работает при значительном превышении порога и все еще хорошо описывается уравнениями движения, для которых разложение по теории возмущений обрывается на втором неисчезающем члене. Однако, необходимо подчеркнуть, что это не предел для параметра накачки, и что при данном уровне возбуждения $p(n)$ еще далеко от пуассоновского. На рис. 18.18 показаны для сравнения форма распределения $p(n)$, задаваемого выражением (18.4.30) при $\langle n \rangle = 10^6$ и значении параметра накачки около 500, что соответствует $(A - C)/C = 0.2$, и форма пуассоновского распределения с тем же средним. Последнее было бы характерно для поля в когерентном состоянии.

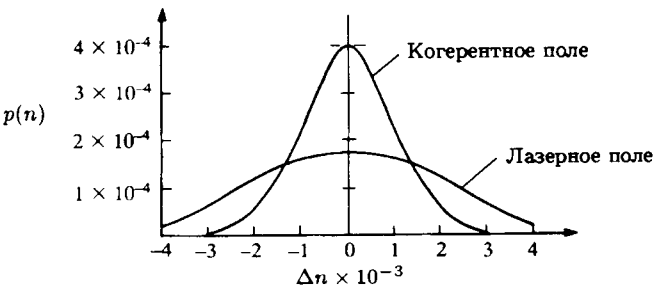


Рис. 18.18. Сравнение распределения вероятностей $p(n)$ числа фотонов, задаваемого выражением (18.4.30) при $A/C = 1.2$ и $\langle n \rangle = 10^6$ с распределением Пуассона, имеющим то же значение среднего (Scully and Lamb, 1967)

Распределение вероятностей $p(n)$, как и распределение $\mathscr{P}(I)$, можно легко связать с измерениями числа фотоотсчетов, если предположить, что каждый фотон в лазерном резонаторе имеет одинаковую малую вероятность β вылета из резонатора и регистрации фотодетектором в течение определенного временно́го интервала. Если имеется n фотонов, то вероятность того, что m из них ($m \leqslant n$) будут сосчитаны в эксперименте задается распределением Бернулли

$$\binom{n}{m} \beta^m (1-\beta)^{n-m}.$$

В более общем случае, когда n фотонов характеризуются распределением вероятностей $p(n)$, вероятность $P(m)$ регистрации m фотоэлектрических отсчетов задается сверткой

$$P(m) = \sum_{n=m}^{\infty} p(n) \binom{n}{m} \beta^m (1-\beta)^{n-m}. \tag{18.4.42}$$

Из этого соотношения сразу следует, что факториальные моменты числа фотоотсчетов m пропорциональны соответствующим факториальным моментам числа фотонов n. Ибо

$$\langle m^{(r)} \rangle = \langle m(m-1)\dots(m-r+1) \rangle = \sum_{m=r}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{m!}{(m-r)!} p(n) \binom{n}{m} \beta^m (1-\beta)^{n-m} =$$

$$= \sum_{n=r}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} p(n) \frac{n!}{(n-r)!} \beta^r \binom{n-r}{s} \beta^s (1-\beta)^{n-r-s} = \sum_{n=r}^{\infty} p(n) \frac{n!}{(n-r)!} \beta^r = \langle n^{(r)} \rangle \beta^r. \tag{18.4.43}$$

Третья строка следует из второй, если изменить порядок суммирования и положить $s = m - r$. Таким образом, измерения факториальных моментов числа фотоотсчетов можно очень легко связать с расчетной статистикой фотонов. Однако вследствие близкого соответствия между (18.3.17) и (18.4.35), предсказания квантовой теории лазера для фотоэлектрического счета существенно не отличаются от предсказаний полуклассической теории с учетом квантового шума.

18.5. Взаимосвязь между квантовой и полуклассической теориями лазера

Мы видели, что квантовая теория лазера дает информацию об абсолютной величине, или абсолютном числе фотонов, лазерного поля. Однако распределение интенсивности света в стационарном состоянии не отличается от того, которое получается в рамках полуклассической теории с учетом ланжевеновского шума. Это наводит на мысль о глубинной и более общей связи между двумя различными подходами, которую мы сейчас и будем исследовать. Мы обнаружим, с помощью диагонального представления лазерного поля по когерентным состояниям, введенного в разд. 11.8, что операторное основное кинетическое уравнение (18.4.20) можно привести к виду уравнения Фоккера — Планка (18.3.4) (Lax and Louisell, 1969; Louisell 1969; Wang and Lamb 1973). Это показывает полную эквивалентность двух подходов с точки зрения вычисления средних значений нормально упорядоченных операторов.

18.5.1. Представление лазерного поля по когерентным состояниям

Согласно (11.8.1) оператор плотности $\hat{\rho}_F(t)$ одномодового лазерного поля можно представить в диагональном виде

$$\hat{\rho}_F(t) = \int \phi(v,t)|v\rangle\langle v|\, d^2v, \tag{18.5.1}$$

где интеграл берется по всей комплексной v-плоскости. Здесь $|v\rangle$ — вектор когерентного состояния с комплексной амплитудой v, и $\phi(v,t)$ — действительная весовая функция или плотность распределения в фазовом пространстве, которая не обязательно является истинной плотностью вероятности. Подставим теперь $\hat{\rho}_F(t)$ в данном представлении в основное кинетическое уравнение (18.4.20) и попытаемся исключить операторы $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$. Для некоторых произведений операторов, таких, как

$$\hat{a}|v\rangle\langle v| = v|v\rangle\langle v|, \quad \hat{a}|v\rangle\langle v|\hat{a}^\dagger = |v|^2|v\rangle\langle v|, \tag{18.5.2}$$

исключение тривиально, если вспомнить, что $|v\rangle$ является правым собственным состоянием оператора $\hat{a}$. Для других произведений, типа $\hat{a}^\dagger|v\rangle\langle v|$ и $|v\rangle\langle v|\hat{a}$, решение менее тривиально. Воспользуемся процедурой, разработанной Лоузеллом (Louisell, 1969) для замены $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$ дифференциальными операторами, описанными в разд. 12.9, где было показано, что

$$\hat{a}^\dagger|v\rangle\langle v| = \left(v^* + \frac{\partial}{\partial v}\right)|v\rangle\langle v|, \quad |v\rangle\langle v|\hat{a} = \left(v + \frac{\partial}{\partial v^*}\right)|v\rangle\langle v|.$$

Данные соотношения позволяют исключить операторы $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$. В дополнение к соотношениям (12.9. 18) и (12.9.20), выведенным в разд. 12, нам понадобятся следующие результаты

$$\begin{aligned}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger|v\rangle\langle v| &= (\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 + 3\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)|v\rangle\langle v| = \\ &= \left[v^2\left(v^* + \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 + 3v\left(v^* + \frac{\partial}{\partial v}\right) + 1\right]|v\rangle\langle v| = \\ &= \left[|v|^4 + 2v^2v^*\frac{\partial}{\partial v} + v^2\frac{\partial^2}{\partial v^2} + 3v\frac{\partial}{\partial v} + 3|v|^2 + 1\right]|v\rangle\langle v|, \end{aligned} \tag{18.5.3}$$

$$\begin{aligned}\hat{a}\hat{a}^\dagger|v\rangle\langle v|\hat{a}\hat{a}^\dagger &= (\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)|v\rangle\langle v|(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) = \\ &= \left[v\left(v^* + \frac{\partial}{\partial v}\right) + 1\right]\left[v^*\left(v + \frac{\partial}{\partial v^*}\right) + 1\right]|v\rangle\langle v| = \\ &= \left[|v|^4 + 3|v|^2 + (|v|^2 + 1)\left(v\frac{\partial}{\partial v} + v^*\frac{\partial}{\partial v^*}\right) + |v|^2\frac{\partial^2}{\partial v\partial v^*} + 1\right]|v\rangle\langle v|, \end{aligned} \tag{18.5.4}$$

$$\hat{a}^\dagger|v\rangle\langle v|\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{a}^\dagger|v\rangle\langle v|(\hat{a}^\dagger\hat{a}^2 + \hat{a}) =$$

$$= \left[v^*\left(v^* + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(v + \frac{\partial}{\partial v^*}\right)^2 + \left(v^* + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(v + \frac{\partial}{\partial v^*}\right)\right]|v\rangle\langle v| =$$

$$= \left[|v|^4 + v^*(2|v|^2+3)\frac{\partial}{\partial v^*} + v(|v|^2+1)\frac{\partial}{\partial v} + \right.$$

$$\left. + (2|v|^2+1)\frac{\partial^2}{\partial v\partial v^*} + v^{*2}\frac{\partial^2}{\partial v^{*2}} + v^*\frac{\partial^3}{\partial v\partial v^{*2}} + 3|v|^2 + 1\right]|v\rangle\langle v|. \quad (18.5.5)$$

Теперь подставим представление (18.5.1) оператора плотности $\hat{\rho}_F(t)$ в основное кинетическое уравнение (18.4.20) и исключим операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$ с помощью приведенных соотношений. После некоторой перестановки членов приходим к следующему уравнению движения

$$\int \frac{\partial\phi(v,t)}{\partial t}|v\rangle\langle v|\,d^2v = \int \phi(v,t)\left\{\frac{1}{2}A\left[v\frac{\partial}{\partial v} + v^*\frac{\partial}{\partial v^*} + \frac{2\partial^2}{\partial v\partial v^*}\right] - \frac{1}{2}C\left[v\frac{\partial}{\partial v} + v^*\frac{\partial}{\partial v^*}\right] + \right.$$

$$+ B\left[-\frac{1}{2}|v|^2\left(v\frac{\partial}{\partial v} + v^*\frac{\partial}{\partial v^*}\right) - \frac{3}{8}\left(v^2\frac{\partial^2}{\partial v^2} + v^{*2}\frac{\partial^2}{\partial v^{*2}}\right) - \frac{5}{4}|v|^2\frac{\partial^2}{\partial v\partial v^*} - \right.$$

$$\left.\left. -\frac{7}{8}\left(v\frac{\partial}{\partial v} + v^*\frac{\partial}{\partial v^*}\right) - \frac{\partial^2}{\partial v\partial v^*} - \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial^3}{\partial v^*\partial v^2} + v^*\frac{\partial^3}{\partial v\partial v^{*2}}\right)\right]\right\}|v\rangle\langle v|\,d^2v, \quad (18.5.6)$$

где дифференциальные операторы под интегралом в правой части действуют на проектор $|v\rangle\langle v|$. Предполагая, что $\phi(v,t)$ обращается на бесконечности в нуль быстрее, чем любая степень v, v^* и формально интегрируя по частям, можно преобразовать подынтегральное выражение в правой части в произведение $|v\rangle\langle v|$ и c-числовой функции от v, v^*. В результате получим

$$\int |v\rangle\langle v|\frac{\partial\phi(v,t)}{\partial t}\,d^2v = \int |v\rangle\langle v|\left\{-\frac{1}{2}(A-C)\left(\frac{\partial}{\partial v}v + \frac{\partial}{\partial v^*}v^*\right) + A\frac{\partial^2}{\partial v\partial v^*} + \right.$$

$$+ B\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v}v + \frac{\partial}{\partial v^*}v^*\right)|v|^2 - \frac{3}{8}\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2}v^2 + \frac{\partial^2}{\partial v^{*2}}v^{*2}\right) - \frac{5}{4}\frac{\partial^2}{\partial v\partial v^*}|v|^2 + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{7}{8}\left(\frac{\partial}{\partial v}v + \frac{\partial}{\partial v^*}v^*\right) - \frac{\partial^2}{\partial v\partial v^*} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3}{\partial v^*\partial v^2}v + \frac{\partial^3}{\partial v\partial v^{*2}}v^*\right)\right]\right\}\phi(v,t)\,d^2v. \quad (18.5.7)$$

Сопоставление коэффициентов при $|v\rangle\langle v|$ в правой и левой частях данного уравнения приводит к дифференциальному уравнению в частных производных для $\phi(v,t)$, из которого все операторы гильбертова пространства оказались удаленными. Упростим данное уравнение, отбрасывая некоторые члены. Сначала напомним, что B является очень малым коэффициентом по сравнению с A или C, так что, обычно, B/A порядка 10^{-6} и меньше. Вследствие этого удержим только наиболее важные члены, пропорциональные B. С другой стороны, когда режим работы лазера близок к стационарному, $|v|$ является большим числом, и значение $|v|^2$ по порядку величины равно среднему числу фотонов. Следовательно, среди членов, пропорциональных B и содержащих первые производные, член

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v}v + \frac{\partial}{\partial v^*}v^*\right)|v|^2\phi(v,t)$$

является наиболее важным, а среди членов, пропорциональных B и содержащих вторые производные, наиболее важными будут следующие:

$$-\frac{3}{8}\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2}v^2 + \frac{\partial^2}{\partial v^{*2}}v^{*2}\right)\phi(v,t) - \frac{5}{4}\frac{\partial^2}{\partial v\partial v^*}|v|^2\phi(v,t).$$

Но до тех пор, пока лазер не работает при таком превышении порога, что $|v|^2$, скажем, в 1000 раз превосходит пороговое значение (это означает, что параметр накачки имеет порядок 1000 и более), последние указанные члены будут все еще малы по сравнению со второй производной при множителе A. Подобным же образом, можно доказать, что члены пропорциональные B, содержащие третьи производные малы по сравнению членами, содержащими первые производные. Исходя из предположения, что лазер не работает слишком далеко над порогом, мы удерживаем только первый член, пропорциональный B. Тогда дифференциальное уравнение для $\phi(v,t)$ принимает намного более простой вид

$$\frac{\partial\phi(v,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left[B|v|^2-(A-C)\right]v\phi(v,t)++\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v^*}\left[B|v|^2-(A-C)\right]v^*\phi(v,t)+A\frac{\partial^2\phi(v,t)}{\partial v\partial v^*} \tag{18.5.8}$$

и превращается в уравнение Фоккера — Планка для весовой функции $\phi(v,t)$.

Часто удобно заменить комплексную амплитуду v на действительный двумерный вектор $\mathbf{x}$, так что $v=x_1+ix_2$. Тогда

$$x_1=\frac{1}{2}(v+v^*),\quad x_2=\frac{1}{2i}(v-v^*),$$

и

$$\frac{\partial}{\partial v}\to\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-i\frac{\partial}{\partial x_2}\right),\quad \frac{\partial}{\partial v^*}\to\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right),$$

и уравнение Фоккера — Планка принимает вид

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{x},t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(A-C-B\mathbf{x}^2)x_i\phi(\mathbf{x},t)+\frac{1}{4}A\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\phi(\mathbf{x},t). \tag{18.5.9}$$

Наконец, можно ввести новые масштабы переменных в уравнении, полагая

$$(AB/8)^{1/2}t\equiv t',\quad (2B/A)^{1/4}\mathbf{x}\equiv\mathbf{x}'. \tag{18.5.10}$$

Тогда, определив

$$\frac{A-C}{(AB/2)^{1/2}}\equiv a, \tag{18.5.11}$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{x},t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(a-\mathbf{x}^2)x_i\phi(\mathbf{x},t)\right]+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2\phi(\mathbf{x},t)}{\partial x_i^2}. \tag{18.5.12}$$

Для простоты мы снова опустили штрихи, введенные в (18.5.10). Это уравнение движения эквивалентно масштабированному уравнению (18.3.4), которое было получено в рамках полуклассической теории с учетом шума, и где a — безразмерный параметр накачки. Следовательно, в рамках сделанных предположений, можно отождествить $\mathbf{x}$ с масштабированной амплитудой лазерного электрического поля, а $\phi(\mathbf{x},t)$ — с плотностью вероятности. Однако квантово-полевое рассмотрение имеет то преимущество перед полуклассическим, что для него не требуется надуманного предположения о величине квантовых флуктуаций. Все масштабирующие множители точно определены через основные коэффициенты усиления A, потерь C и насыщения B лазера.

18.5.2. Стационарное решение основного кинетического уравнения

Как было показано в разд. 18.3, в частности, с помощью выражения (18.3.12), стационарное решение уравнения Фоккера — Планка можно записать в виде

$$\phi_s(v)=\text{const}\times\exp\left[-\frac{1}{4}(a-|v|^2)^2\right]. \tag{18.5.13}$$

В случае больших значений параметра накачки a, данное решение имеет вид гауссовского распределения по $|v|^2$. Фаза амплитуды v — совершенно случайная величина, равномерно распределенная от 0 до 2π, в то время как для больших a, первые два момента величины $|v|$ задаются приблизительно соотношениями

$$\langle |v| \rangle \approx \sqrt{a}(1 - 1/4a^2), \quad \langle |v|^2 \rangle \approx a. \tag{18.5.14}$$

Следовательно,

$$\langle (\Delta|v|)^2 \rangle \approx \frac{1}{2a}, \quad \frac{\langle (\Delta|v|)^2 \rangle^{1/2}}{\langle |v| \rangle} \approx \frac{1}{\sqrt{2}a}. \tag{18.5.15}$$

При увеличении параметра накачки a плотность распределения в фазовом пространстве $\phi_s(v)$, рассматриваемая как функция от $|v|$, становится, следовательно, все уже и уже, как в абсолютном, так и в относительном смысле, в то время как фаза амплитуды v остается случайной. Для больших значений a, $\phi_s(v)$ иногда аппроксимируется дельта-функцией от $|v|$, и можно записать [ср. (11.8.14)]

$$\phi_s(v) \to \frac{1}{2\pi\sqrt{a}}\delta(|v| - \sqrt{a}). \tag{18.5.16}$$

Именно в том смысле, что $\phi_s(v)$ стремится к дельта-функции, лазерное поле при значительном превышении порога рассматривают иногда как поле в когерентном состоянии. Более точно, оно стремится к смеси когерентных состояний со случайными фазами.

18.6. Решение зависящего от времени уравнения движения

Ранее мы получили и обсудили только стационарное поведение лазерного поля. Теперь, показав, что поле описывается уравнением Фоккера — Планка как в рамках полностью квантовой, так и в рамках полуклассической теорий, обратимся к общему решению зависящего от времени уравнения движения (18.3.4) или (18.5.12) (Risken, 1965, 1966; Risken and Vollmer, 1967a, b; Hempstead and Lax, 1967)

$$\frac{\partial p(\mathscr{E},t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \mathscr{E}_i}\left[(a - \mathscr{E}^2)\mathscr{E}_i p(\mathscr{E},t)\right] + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 p(\mathscr{E},t)}{\partial \mathscr{E}_i^2}. \tag{18.6.1}$$

Решение можно получить разделением переменных. Представим зависящую от времени плотность вероятности $p(\mathscr{E},t)$ в виде

$$p(\mathscr{E},t) = f(\mathscr{E})k(t) \tag{18.6.2}$$

и подставим ее в (18.6.1). В результате получим уравнение

$$-\frac{1}{k(t)}\frac{dk(t)}{dt} = \frac{1}{f(\mathscr{E})}\left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \mathscr{E}_i}(a - \mathscr{E}^2)\mathscr{E}_i f(\mathscr{E}) - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 f(\mathscr{E})}{\partial \mathscr{E}_i^2}\right].$$

Поскольку левая часть уравнения зависит только от t, а правая часть только от $\mathscr{E}$, каждая из них должна быть равна некоторой константе λ. Таким образом, получаем два отдельных уравнения для $k(t)$ и $f(\mathscr{E})$:

$$\frac{dk(t)}{dt} = -\lambda k(t),$$

решение которого имеет вид

$$k(t) = k(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}, \tag{18.6.3}$$

и

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \mathscr{E}_i}(a - \mathscr{E}^2)\mathscr{E}_i f(\mathscr{E}) - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 f(\mathscr{E})}{\partial \mathscr{E}_i^2} = \lambda f(\mathscr{E}). \tag{18.6.4}$$

Уравнение (18.6.4) представляет собой уравнение на собственные значения в двумерном векторном пространстве, а соответствующие собственные значения λ и собственные функции $f(\mathscr{E})$ образуют двумерный массив, и их удобно различать индексами m, n. Общее решение $p(\mathscr{E},t)$, таким образом, принимает вид

$$p(\mathscr{E},t)=\sum_{m,n}c_{mn}f_{mn}(\mathscr{E})\,\mathrm{e}^{-\lambda_{mn}t}, \tag{18.6.5}$$

где постоянные c_{mn} определяются из начальных условий. Поскольку существует стационарное решение $p_s(\mathscr{E})$, задаваемое формулой (18.3.12), одно из собственных значений должно быть равно нулю. В качестве такового выберем $\lambda_{00}=0$. Соответствующая ему собственная функция $f_{00}(\mathscr{E})$, следовательно, есть $p_s(\mathscr{E})$. С помощью преобразования

$$f_{mn}(\mathscr{E})=[p_s(\mathscr{E})]^{1/2}\,g_{mn}(\mathscr{E}), \tag{18.6.6}$$

дифференциальное уравнение (18.6.4) преобразуется в уравнение Штурма — Лиувилля

$$\left[-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial\mathscr{E}_i^2}+a-2\mathscr{E}^2+\frac{1}{4}\mathscr{E}^2(a-\mathscr{E}^2)^2\right]g_{mn}(\mathscr{E})=\lambda_{mn}g_{mn}(\mathscr{E}), \tag{18.6.7}$$

где

$$g_{00}(\mathscr{E})=[p_s(\mathscr{E})]^2=\text{const}\times\exp\left[-\frac{1}{8}(\mathscr{E}^2-a^2)\right],\quad \lambda_{00}=0. \tag{18.6.8}$$

Исходя из общих свойств решения такого уравнения (Ross, 1964, гл. 12), можно показать, что различные собственные функции ортогональны. Кроме того, будем считать их нормированными, так что

$$\int g^*_{mn}(\mathscr{E})g_{m'n'}(\mathscr{E})\,d^2\mathscr{E}=\delta_{mm'}\delta_{nn'}. \tag{18.6.9}$$

Более того, если собственные значения λ_{mn} имеют нижнюю границу (как в данном случае, ибо наименьшее собственное значение должно быть равно нулю, если решение (18.6.5) не расходится при $t\to\infty$), то собственные функции образуют полный набор

$$\sum_{m,n}g_{mn}(\mathscr{E})g^*_{mn}(\mathscr{E}')=\delta^{(2)}(\mathscr{E}-\mathscr{E}'). \tag{18.6.10}$$

Уравнение (18.6.7) легче решается в полярных координатах r, θ. Положим

$$\mathscr{E}_1=r\cos\theta,\quad \mathscr{E}_2=r\sin\theta, \tag{18.6.11}$$

так что

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial\mathscr{E}_i^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}, \tag{18.6.12}$$

и сделаем другое разделение переменных, записывая

$$g_{mn}(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{r}}\psi_{mn}(r)\chi_n(\theta). \tag{18.6.13}$$

Подстановка в уравнение (18.6.7) и деление на $g_{mn}(r,\theta)r^{-2}$ приводит к уравнению

$$\frac{1}{\psi_{mn}(r)}\left[-r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{4}r^4(a-r^2)^2+r^2(a-2r^2)-\lambda_{mn}r^2-\frac{1}{4}\right]\psi_{mn}(r)=\frac{1}{\chi_n(\theta)}\frac{\partial^2\chi_n(\theta)}{\partial\theta^2}.$$

Еще раз отметим, что левая часть данного уравнения зависит только от r, а правая часть только от θ, так что обе части должны быть равны константе и не должны зависеть ни от r, ни от θ, хотя константа

в общем случае будет зависеть от n. Поскольку мы ищем решения, периодичные по θ, естественно положить константу равной $-n^2$. Это приводит к следующему дифференциальному уравнению относительно θ:

$$\frac{\partial^2 \chi_n(\theta)}{\partial \theta^2} = -n^2 \chi_n(\theta), \tag{18.6.14}$$

с нормированным решением

$$\chi_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-in\theta}, \tag{18.6.15}$$

и уравнению относительно r

$$-\frac{\partial^2 \psi_{mn}(r)}{\partial r^2} + V_n(r)\psi_{mn}(r) = \lambda_{mn}\psi_{mn}(r), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{18.6.16}$$

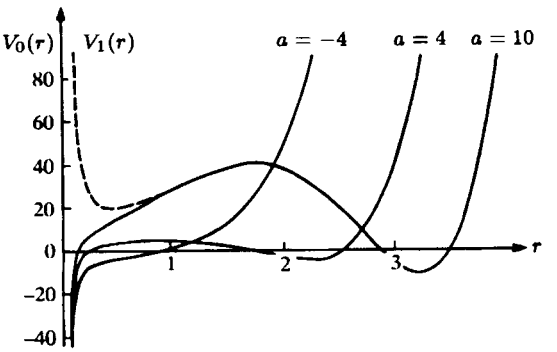


Рис. 18.19. Форма потенциала $V_0(r)$ для трех различных значений параметра накачки a (Risken and Vollmer, 1967a). Потенциалы $V_n(r)$, $n = 1, 2, \ldots$ стремятся к ∞ в точке $r = 0$

где

$$V_n(r) \equiv (n^2 - \frac{1}{4})\frac{1}{r^2} + a + (\frac{1}{4}a^2 - 2)r^2 - \frac{1}{2}ar^4 + \frac{1}{4}r^6. \tag{18.6.17}$$

Последнее можно рассматривать как одномерное уравнение Шредингера, описывающее движение частицы в «потенциале» $V_n(r)$. Таким образом, задача лазера свелась к задаче нахождения собственных функций $\psi_{mn}(r)$ и собственных значений λ_{mn} уравнения шредингеровского типа. Форма потенциала $V_0(r)$ показана на рис. 18.19 для нескольких значений параметра накачки a. Функции $V_n(r)$ при $|n| \geqslant 1$ качественно похожи друг на друга, за исключением того, что они не убывают, а возрастают в области $r = 0$.

Из рис. 18.19 ясно видно, что решения $\psi_{mn}(r)$ соответствуют связанным состояниям, и что как собственные функции, так и собственные состояния, очевидно, одинаковы для n и $-n$. До сих пор не удалось найти аналитических решений уравнения (18.6.16), но получены численные решения как для $\psi_{mn}(r)$, так и для λ_{mn} (Risken, 1965, 1966; Risken and Vollmer, 1967a,b; Hempstead and Lax, 1967). На рис. 18.20 показаны первые четыре собственные значения типа λ_{m0} как функции параметра накачки a. Отметим, что

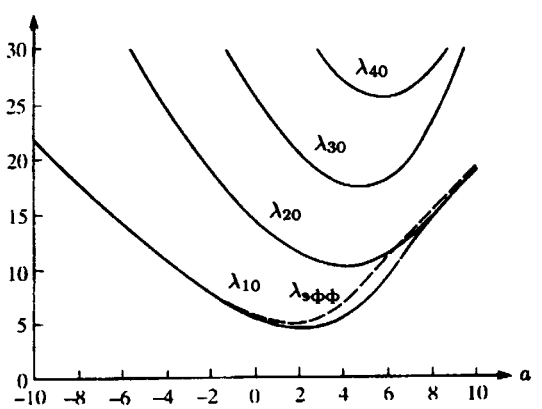


Рис. 18.20. Зависимость первых четырех собственных значений λ_{m0} от параметра накачки a. Пунктирная кривая описывает зависимость $\lambda_{эфф}^{-1}$ — эффективного среднего обратных собственных значений $1/\lambda_{m0}$

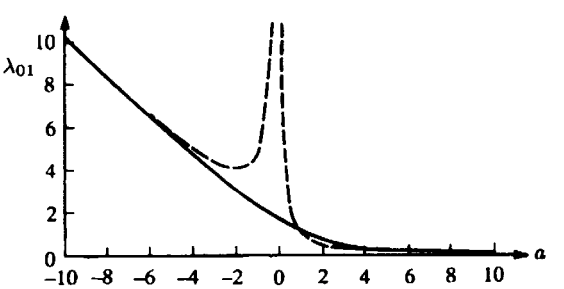


Рис. 18.21. Зависимость собственного значения λ_{01} от параметра накачки a. Пунктирная кривая соответствует аппроксимациям: $|a| + 4/|a|$ для отрицательного a и $|a| \gg 1$, и $1/a$ для $a \gg 1$ (Risken, 1970)

все собственные значения имеют минимум немного выше порога. Сплошная кривая на рис. 18.21 изображает собственное значение λ_{01} как функцию параметра накачки a. Собственное значение λ_{01} стремится асимптотически к нулю как $1/a$ для больших a, однако собственные значения типа λ_{0n} высшего порядка проходят через минимум, точно так же, как λ_{m0}. Собственное значение λ_{00}, конечно, равно нулю, и

из выражений (18.6.8), (18.6.13) и (18.6.15) следует, что собственная функция нулевого порядка задается выражением

$$\psi_{00}(r) = [2\pi r p_s(r)]^{1/2} = \text{const} \times \sqrt{r}\, \mathrm{e}^{-(r^2-a)^2/8}, \tag{18.6.18}$$

где константа выбирается подходящим образом, чтобы гарантировалась нормировка $\psi_{00}(r)$. Вследствие соотношений ортонормальности (18.6.9) все собственные функции $\psi_{mn}(r)$ нормированы, так что

$$\delta_{mm'}\delta_{nn'} = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta \psi^*_{mn}(r)\psi_{m'n'}(r)\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-n')\theta} = \delta_{nn'}\int_0^\infty \psi^*_{mn}(r)\psi_{m'n'}(r)\,dr, \tag{18.6.19}$$

тогда как соотношение полноты (18.6.10) означает, что

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta'-\theta)}\psi_{mn}(r)\psi^*_{mn}(r') = \delta(r-r')\delta(\theta-\theta'). \tag{18.6.20}$$

С учетом выражений (18.6.5), (18.6.6), (18.6.15) и (18.6.18) общее решение уравнения Фоккера — Планка (18.6.1) можно теперь записать в виде

$$p(r,\theta,t) = \frac{1}{2\pi r}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn}\psi_{00}(r)\psi_{mn}(r)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{e}^{-\lambda_{mn}t}, \quad t \geqslant 0, \tag{18.6.21}$$

с условием нормировки

$$\int_0^\infty dr\, r \int_0^{2\pi} d\theta p(r,\theta,t) = 1. \tag{18.6.22}$$

Константы c_{mn} выбираются так, чтобы выполнялись граничные условия при $t = 0$.

18.6.1. Развитие лазерного поля из вакуумного состояния[1]

В качестве примера рассмотрим решение для случая, когда лазерное поле развивается из вакуумного состояния. Если амплитуда поля равна нулю в начальный момент времени $t = 0$, то коэффициенты c_{mn} задаются выражением

$$c_{mn} = \delta_{n0}\left[\psi^*_{m0}/\psi_{00}(0)\right]. \tag{18.6.23}$$

Отношение в правой части можно рассматривать как предел $\psi^*_{m0}(r)/\psi_{00}(r)$ при $r \to 0$, поскольку $\psi_{m0}(0)$ обращается в нуль при $m = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда решение принимает вид

$$p(r,\theta,t) = \frac{1}{2\pi r}\frac{\psi_{00}(r)}{\psi_{00}(0)}\sum_{m=0}^{\infty}\psi^*_{m0}(0)\psi_{m0}(r)\,\mathrm{e}^{-\lambda_{m0}t}, \quad t \geqslant 0. \tag{18.6.24}$$

Полагая $t = 0$ и используя соотношение полноты для собственных функций, сразу получаем

$$p(r,\theta,0) = \frac{1}{2\pi r}\delta(r),$$

что соответствует начальному вакуумному состоянию. Поскольку функция $p(r,\theta,t)$, задаваемая выражением (18.6.24), удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка (18.6.1) и подходящему граничному условию, она и есть искомое решение. Стоит отметить, что все фазы в интервале от 0 до 2π одинаково вероятны в момент времени t, точно так же, как и в момент $t = 0$. Используя $p(r,\theta,t)$, можно сразу получить плотность вероятности $\mathscr{P}(I,t)$ интенсивности света $I = r^2$ в момент времени t

$$\mathscr{P}(I,t) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(r=\sqrt{I},\theta,t)\,d\theta = \frac{1}{2\sqrt{I}}\frac{\psi_{00}(\sqrt{I})}{\psi_{00}(0)}\sum_{m=0}^{\infty}\psi^*_{m0}(0)\psi_{m0}(\sqrt{I})\,\mathrm{e}^{-\lambda_{m0}t}, \quad t \geqslant 0. \tag{18.6.25}$$

Изменение распределения вероятностей, предсказываемое выражением (18.6.25), рассчитывается численно и результаты расчета показаны на рис. 18.22 для случая $a = 8$. В начальный момент $t = 0$ плотность вероятности $\mathscr{P}(I,t)$ имеет вид дельта-функции в точке $I = 0$, затем принимает экспоненциальную форму, как для теплового излучения, далее у нее развивается максимум, и, в конце концов, в стационарном

[1] см. также книгу (*Ахманов, Дьяков, Чиркин, 1981) и книгу (*Scully, Zubairy, 1997) — *ред. пер.*

состоянии, она приобретает вид гауссовской функции [ср. (18.3.17)]. Данное решение $\mathscr{P}(I,t)$, конечно, можно использовать для вычисления моментов интенсивности света как функций времени t с помощью соотношения

$$\langle I^r(t)\rangle = \int_0^\infty I^r \mathscr{P}(I,t)\,dI. \qquad (18.6.26)$$

Результаты вычисления $\langle I(t)\rangle$ показаны сплошными кривыми на рис. 18.23 для трех различных значений параметра накачки. Стоит отметить, что начальное развитие $\langle I(t)\rangle$ во времени t не зависит от параметра накачки a, тогда как стационарные значения сильно зависят от a. Сплошные кривые на рис. 18.24 иллюстрируют временно́е развитие нормированных относительных флуктуаций интенсивности для тех же трех параметров накачки. Мы видим, что относительные флуктуации интенсивности первоначально равны единице, как для света от теплового источника. Однако со временем, по мере развития особенностей лазерного поля относительные флуктуации интенсивности падают и, в конце концов, становятся очень малыми при больших значениях параметра накачки.

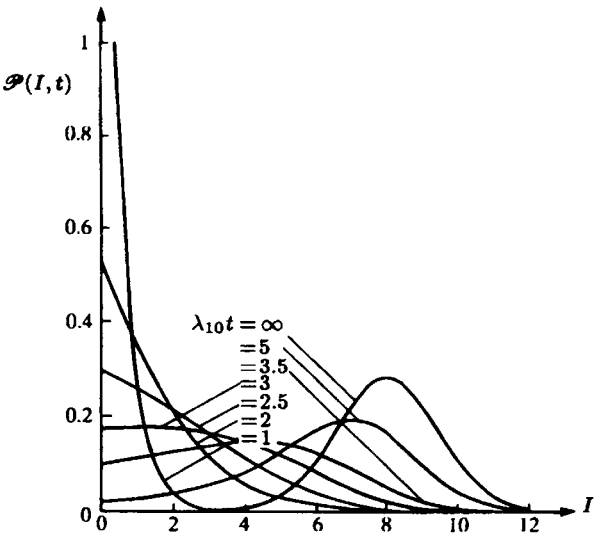


Рис. 18.22. Развитие во времени распределения вероятностей $\mathscr{P}(I,t)$, задаваемого выражением (18.6.25), при значении параметра накачки $a = 8$. Различные кривые соответствуют различным моментам времени t, пробегающим значения от $1/\lambda_{10}$ до ∞, где $\lambda_{10} = 14.651$. (Из работы Risken, 1970)

В действительности, для коротких времен t можно получить намного более простое решение сразу из уравнения Фоккера — Планка. В случае, когда начальное состояние представляет собой вакуумное состояние или состояние поля с нулевой амплитудой, поле остается слабым в течение короткого промежутка времени t, и можно отбросить нелинейный член в уравнении Фоккера — Планка (18.6.1). Тогда уравнение

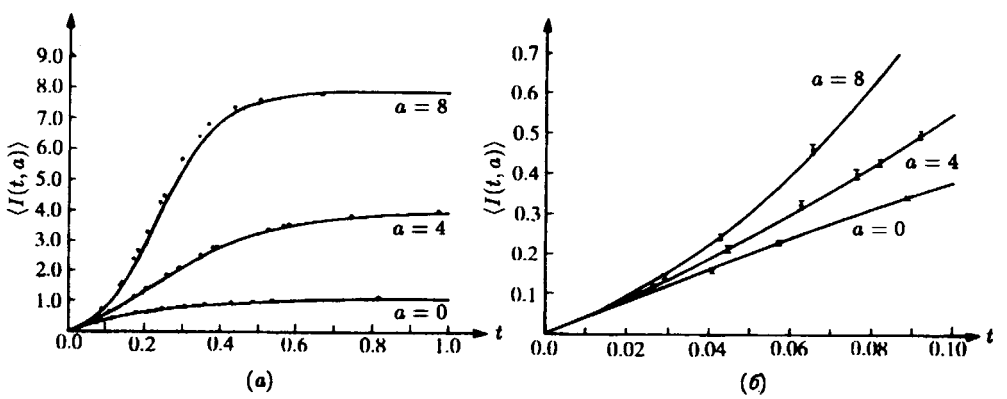


Рис. 18.23. Зависимость средней интенсивности $\langle I(t)\rangle$ от времени для трех различных значений параметра накачки a. Сплошные кривые построены с помощью формулы (18.6.25). Экспериментальные точки получены в результате измерений числа фотоотсчетов. Рисунок *б* является увеличенным фрагментом рисунка *а* в области начала системы координат. (Из работы Meltzer and Mandel, 1970)

упрощается настолько, что допускает прямое интегрирование, и нетрудно убедиться, что зависящая от времени плотность вероятности

$$\mathscr{P}(I,t) = \frac{a}{2(e^{2at}-1)} \exp\left[\frac{-aI}{2(e^{2at}-1)}\right] \qquad (18.6.27)$$

удовлетворяет упрощенному уравнению Фоккера — Планка. Эта же $\mathscr{P}(I,t)$ должна быть решением нелинейного уравнения (18.6.1) для малых значений t, когда интенсивность света еще не сильно возросла.

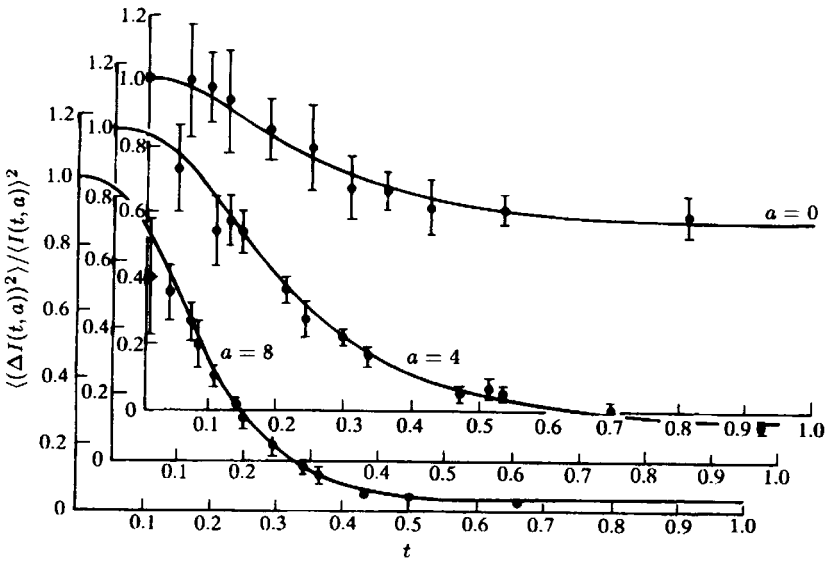


Рис. 18.24. Зависимость относительных флуктуаций интенсивности $\langle(\Delta I(t))^2\rangle/\langle I(t)\rangle^2$ от времени для трех различных значений параметра накачки a. Сплошные кривые построены с помощью формул (18.6.25) и (18.6.26). Экспериментальные точки получены в результате измерений числа фотоотсчетов. (Из работы Meltzer and Mandel, 1970)

Данная экспоненциальная форма распределения вероятности характерна для теплового излучения (ср. разд. 13.2), и средняя интенсивность равна

$$\langle I(t)\rangle = (2/a)(\mathrm{e}^{2at} - 1) \approx 4t \tag{18.6.28}$$

для малых t. Начальный рост $\langle I(t)\rangle$, таким образом, не зависит от значения параметра накачки a, как показано на рис. 18.23.

18.6.2. Экспериментальные исследования

Некоторые из вышеупомянутых свойств динамики лазера были проверены в экспериментах по фотоэлектрическому счету, в которых лазер включался при различных режимах возбуждения (Arecchi, Degiorgio and Querzola, 1967; Meltzer and Mandel, 1970, 1971; Arecchi and Degiorgio, 1971). На рис. 18.25 показана схема экспериментальной установки, использованной Мельтзером и Манделем. Плазменная трубка, содержащая в качестве активной среды He:Ne-смесь, помещалась между зеркалами M_1 и M_2 резонатора. Основной выходящий луч лазера направлялся после ослабления на счетный фотоумножитель, импульсы с которого, после усиления и формирования, подсчитывались электронным счетчиком в течение интервала времени порядка 1 мкс, что короче естественного времени роста лазерного поля. Зеркало M_2 было установлено на пьезоэлектрический кристалл, что позволяло варьировать длину резонатора в пределах одной или двух длин волн. Поскольку активная среда была неоднородно уширена, можно было менять число атомов, участвующих в работе лазера и, следовательно, менять параметр усиления лазера, перестраивая резонатор. С помощью контрольного фотоумножителя и усилителя, включенных в цикл обратной связи, рабочая точка лазера в стационарном состоянии могла поддерживаться где-то между уровнями «ниже» и «значительно выше» порога. Для быстрого включения и выключения системы использовалось внешнее зеркало M_3, которое помещалось на оси лазера так, чтобы отражаемый луч был в достаточной для погашения лазера степени расфазирован по отношению к стоячей волне в резонаторе. Ячейка Поккельса и два поляризатора, помещенные между зеркалом M_3 и лазером, позволяли эффективно блокировать возвращающийся луч в течение нескольких наносекунд при помощи импульса, прикладываемого к ячейке Поккельса. Это блокирование приводило к включению лазера. Импульс, инициирующий включение,

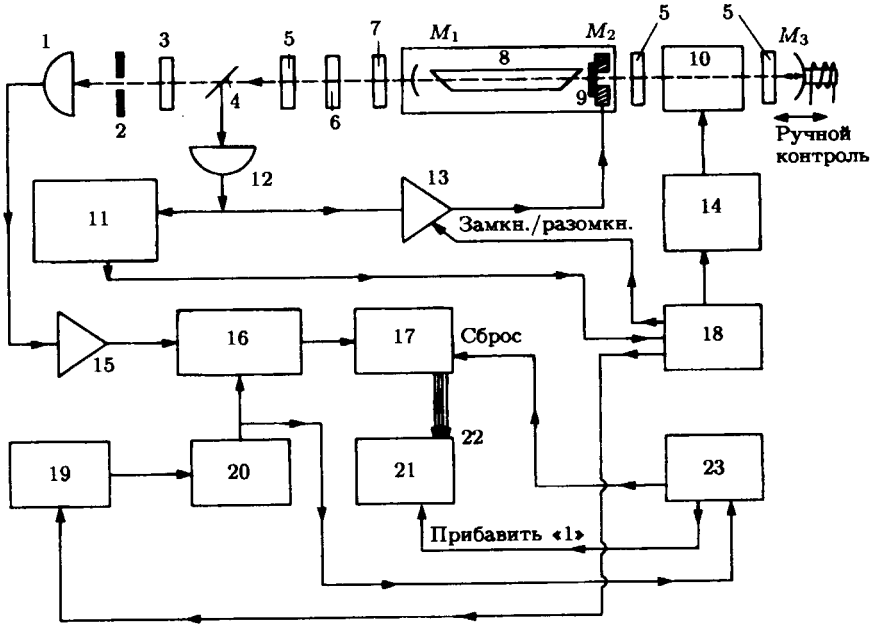


Рис. 18.25. Блок-схема экспериментальной установки, использованной для исследования временно́й эволюции поля гелий-неонового лазера после момента включения последнего (Meltzer and Mandel, 1971). 1 — ФЭУ для счета фотонов, 2 — Диафрагма, 3 — Нейтральный фильтр, 4 — Делитель пучка, 5 — Поляризатор, 6 — Интерференционный фильтр, 7 — Красный фильтр, 8 — He:Ne - лазер, 9 — Пьезоэлемент, 10 — Ячейка Поккельса, 11 — Контроль интенсивности (выключен ли лазер?), 12 — Контрольный ФЭУ, 13 — Усилитель обратной связи, 14 — Высоковольтный переключатель, 15 — Усилитель, 16 — Дискриминатор, 17 — Счетчик, 18 — Схема контроля, 19 — Задержка, 20 — Затвор, 21 — Анализатор, 22 — Регистр адреса, 23 — Схема счета

посылался также через различное время задержки τ на электронный затвор, который контролировал положение микросекундного интервала счета фотонов по отношению к инициирующему импульсу. Число отсчетов n, регистрируемое счетчиком в конце интервала счета, использовалось для приращения числа, хранящегося по n-му адресу цифрового запоминающего устройства. После этого лазер гасился, счетчик очищался, и цикл повторялся заново. Число, хранящееся по адресу n после многих тысяч повторений подобных циклов счета, дает меру вероятности $p(n,\tau)$ того, что через время задержки τ после инициирующего импульса было сосчитано n фотонов. Как известно из гл. 14, в случае кротких интервалов счета T вероятность $p(n,\tau)$ связывается с плотностью вероятности $\mathscr{P}(I,\tau)$ с помощью соотношения [ср. (14.8.12)]

$$p(n,\tau)=\frac{1}{n!}\int_0^\infty \mathscr{P}(I,\tau)(\alpha IT)^n\,\mathrm{e}^{-\alpha IT}\,dI, \tag{18.6.29}$$

где α — масштабный множитель, который преобразует среднюю интенсивность света $\langle I\rangle$ в наших безразмерных единицах в среднюю за секунду скорость счета за интервал счета T. Данное выражение позволяет проверить предсказываемую форму $\mathscr{P}(I,\tau)$ по результатам измерений числа фотоотсчетов. В частности, факториальные моменты величины n пропорциональны моментам интенсивности света I [ср. (14.9.4)], так что

$$\langle n(\tau)\rangle=\alpha\langle I(\tau)\rangle T,\quad \langle n(\tau)(n(\tau)-1)\rangle=\alpha^2\langle I^2(\tau)\rangle T^2. \tag{18.6.30}$$

Последние формулы позволяют подвергнуть непосредственной экспериментальной проверке теоретические кривые, приведенные на рис. 18.23 и рис. 18.24. Результаты измерений, показанные точками на этих рисунках, подтверждают динамические предсказания лазерной теории. Сложнее непосредственно проверить кривые, приведенные на рис. 18.22, поскольку трудно инвертировать выражение (18.6.29) и получить $\mathscr{P}(I,\tau)$. Однако можно использовать выражение (18.6.29) для сравнения измеренных вероятностей $p(n,\tau)$

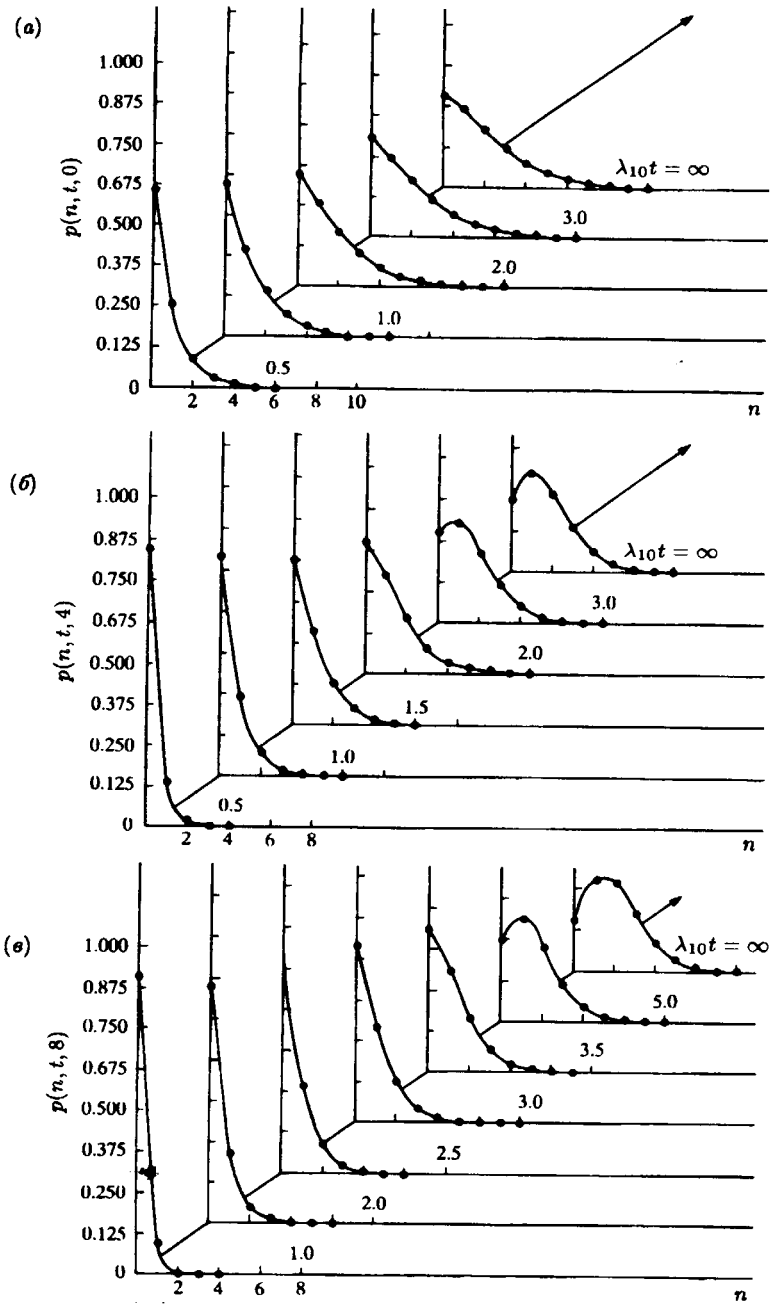


Рис. 18.26. Сравнение экспериментально измеренных распределений $p(n,t,a)$ с теоретическими (18.6.25) и (18.6.27), при различных значениях времени задержки t, выраженного в единицах $1/\lambda_{10}$. Стационарные значения параметра накачки равны: *а* — $a=0$; *б* — $a=4$; *в* — $a=8$. (Из работы Meltzer and Mandel, 1971)

с вероятностями, которые следуют из теоретически полученной формы $\mathscr{P}(I,\tau)$ по формуле (18.6.25). Результаты показаны на рис. 18.26 для трех различных значений параметра накачки a. Экспериментальные точки опять оказываются в очень хорошем согласии с теоретическими кривыми.

18.7. Корреляционные функции

Мы получили стационарное решение уравнения Фоккера — Планка (18.6.1) для лазера, а также переходное, или зависящее от времени, решение. Однако, как было отмечено в разд. 18.3, для вычисления многовременны́х функций корреляции лазерного поля необходима еще одна величина. Это функция Грина или условная плотность вероятности $P(\mathscr{E}_2, t_2|\mathscr{E}_1, t_1)$ того, что поле имеет амплитуду $\mathscr{E}_2$ в момент времени t_2 при условии, что оно имело амплитуду $\mathscr{E}_1$ в более ранний момент времени t_1.

18.7.1. Функции Грина

Поскольку функция Грина сама является плотностью вероятности, она также является решением уравнения (18.6.1). Следовательно, в полярных координатах она должна иметь вид (18.6.21), где r, θ заменяются величинами r_2, θ_2, интервал t интервалом $t_2 - t_1$, а константы c_{mn} задаются начальными значениями r_1, θ_1. Более того, если $t_2 = t_1$, то функция Грина сводится к следующей

$$P(r_2, \theta_2, t_1|r_1, \theta_1, t_1) = \delta^{(2)}(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1) = \frac{1}{r_1}\delta(r_2 - r_1)\delta(\theta_2 - \theta_1). \tag{18.7.1}$$

Положим в (18.6.21), что

$$c_{mn} = \frac{\psi^*_{mn}(r_1)\,\mathrm{e}^{in\theta_1}}{\psi_{00}(r_1)}. \tag{18.7.2}$$

Тогда результирующая плотность вероятности принимает вид функции Грина

$$P(r_2, \theta_2, t_2|r_1, \theta_1, t_1) = \frac{1}{2\pi r_2}\frac{\psi_{00}(r_2)}{\psi_{00}(r_1)}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi_{mn}(r_2)\psi^*_{mn}(r_1)\,\mathrm{e}^{in(\theta_1-\theta_2)}\,\mathrm{e}^{-\lambda_{mn}(t_2-t_1)}, \quad t_2 \geqslant t_1. \tag{18.7.3}$$

Для проверки положим $t_2 = t_1$ и воспользуемся (18.6.20). Сразу видно, что правая часть, как и требуется, примет вид $(1/r_1)\delta(r_2 - r_1)\delta(\theta_2 - \theta_1)$. Таким образом, функция Грина зависит только от разности между двумя временны́ми аргументами, что справедливо при достижении стационарного состояния.

Умножая $P(r_2, \theta_2, t_2|r_1, \theta_1, t_1)$ на стационарное распределение вероятности $p_s(r_1, \theta_1)$, задаваемое формулой (18.6.18), получаем совместную плотность вероятности $p_2(r_2, \theta_2, t_2; r_1, \theta_1, t_1)$ для поля в моменты времени t_1 и t_2 в стационарном состоянии

$$\begin{aligned} p_2(r_2, \theta_2, t_2; r_1, \theta_1, t_1) &= P(r_2, \theta_2, t_2|r_1, \theta_1, t_1)p_s(r_1, \theta_1) = \\ &= \frac{\psi_{00}(r_2)\psi_{00}(r_1)}{2\pi r_2 2\pi r_1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi_{mn}(r_2)\psi^*_{mn}(r_1)\,\mathrm{e}^{in(\theta_1-\theta_2)}\,\mathrm{e}^{-\lambda_{mn}(t_2-t_1)}, \quad t_2 \geqslant t_1. \end{aligned} \tag{18.7.4}$$

18.7.2. Корреляция интенсивности

Теперь мы в состоянии вычислить любую двухвременну́ю автокорреляционную функцию, такую, как корреляционная функция интенсивности $\langle I(t_1)I(t_2)\rangle$ при $t_2 \geqslant t_1$, по формуле

$$\langle I(t_1)I(t_2)\rangle = \int_0^{\infty}\int dr_1\,dr_2 r_1 r_2 \int_0^{2\pi}\int d\theta_1\,d\theta_2 r_1^2 r_2^2 p_2(r_2, \theta_2, t_2; r_1, \theta_1, t_1). \tag{18.7.5}$$

С учетом (18.7.4), последнее выражение принимает вид

$$\begin{aligned} \langle I(t_1)I(t_2)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\int dr_1\,dr_2 r_1^2 r_2^2 \psi_{00}(r_2)\psi_{00}(r_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi_{mn}(r_2)\psi^*_{mn}(r_1)\times \\ \times \int_0^{2\pi}\int d\theta_1\,d\theta_2\,\mathrm{e}^{in(\theta_1-\theta_2)}\,\mathrm{e}^{-\lambda_{mn}(t_2-t_1)} = \int_0^{\infty}\int dr_1\,dr_2 r_1^2 r_2^2 \psi_{00}(r_2)\psi_{00}(r_1)\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{m0}(r_2)\psi^*_{m0}(r_1)\,\mathrm{e}^{-\lambda_{m0}(t_2-t_1)}, \end{aligned}$$

что можно записать в виде ряда

$$\langle I(t_1)I(t_2)\rangle = \langle(\Delta I)^2\rangle \sum_{m=0}^{\infty} M_m \, \mathrm{e}^{-\lambda_{m0}|t_2-t_1|}. \tag{18.7.6}$$

Коэффициенты M_m задаются формулой

$$M_m \equiv \left| \int_0^{\infty} dr\, r^2 \psi_{00}(r)\psi_{m0}(r) \right|^2 / \langle(\Delta I)^2\rangle, \tag{18.7.7}$$

где $\langle(\Delta I)^2\rangle$ получается из (18.3.28). Мы заменили $t_2 - t_1$ в экспоненте из формулы (18.7.6) на $|t_2 - t_1|$ для того, чтобы обеспечить симметрию величины $\langle I(t_1)I(t_2)\rangle$ по $t_2 - t_1$ в стационарном состоянии. Первый член, соответствующий $m = 0$ в ряду (18.7.6), является единственным, который сохраняется при $|t_2 - t_1| \to \infty$ и, следовательно, должен быть равен $\langle I\rangle^2$. Вычитание $\langle I\rangle^2$ из обеих частей выражения (18.7.6) и деление на $\langle(\Delta I)^2\rangle$ приводит к выражению

$$\frac{\langle \Delta I(t)\Delta I(t+\tau)\rangle}{\langle(\Delta I)^2\rangle} = \sum_{m=1}^{\infty} M_m \, \mathrm{e}^{-\lambda_{m0}|\tau|}, \tag{18.7.8}$$

которое описывает зависимость от времени нормированной функции корреляции интенсивности. Из выражений (18.7.6) и (18.7.8) ясно, что коэффициенты M_m нормированы так, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} M_m = 1 = \frac{\langle(\Delta I)^2\rangle}{\langle I^2\rangle} \sum_{m=0}^{\infty} M_m. \tag{18.7.9}$$

Видно, что для вычисления корреляционной функции необходимы только собственные функции и собственные значения типа $\psi_{m0}(r)$ и λ_{m0}.

Мы уже видели, как изменяются собственные значения $\lambda_{m0}(a)$ при изменении параметра накачки лазера a (см. рис. 18.20). Около порога первые несколько собственных значений, как правило, одного порядка величины, несмотря на их постепенный рост. Однако для того, чтобы определить, сколько членов в (18.7.8) вносят ощутимый вклад, необходимо вычислить коэффициенты $M_m(a)$. Это было сделано в работах (Hempstead and Lax, 1967; Risken and Vollmer, 1967a, b; Risken, 1970). На рис. 18.27 показаны первые четыре коэффициента $M_m(a)$ как функции от параметра накачки a. Видно, что ниже порога, примерно до значения $a = -4$, ряд в (18.7.9) целиком определяется первым членом, и форма функции корреляции интенсивности очень близка к экспоненциальной с временем корреляции $1/\lambda_{10}$. Однако немного выше порога будут давать вклад также другие члены ряда, и корреляционная функция не будет больше чисто экспоненциальной. Конечно, при значительном превышении порога относительные флуктуации интенсивности становятся очень малыми, и форма функции корреляции становится тогда спорной.

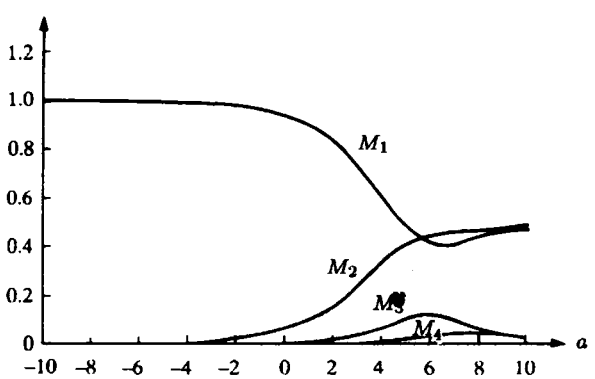


Рис. 18.27. Зависимость первых четырех коэффициентов M_m в разложении корреляционной функции интенсивности от параметра накачки a (Risken and Vollmer, 1967a)

Формулу (18.7.8) можно проверить фотоэлектрическими корреляционными измерениями (Chopra and Mandel, 1972, 1973a; Corti, Degiorgio and Arecchi, 1973), по результатам которых точно определяется вид функции корреляции интенсивности. На рис. 18.28 показаны некоторые экспериментальные результаты, полученные Корти, Дегиоргио и Арекки для первых четырех собственных значений λ_{m0} $(m = 1, 2, 3, 4)$ как функций средней интенсивности лазерного света, совмещенные с теоретически предсказанными кривыми. В других экспериментах определялось среднее время корреляции T_c интенсивности, соответствующее этим собственным значениям. На рис. 18.29 показаны некоторые результаты, полученные в работе (Sihgh, Friberg and Mandel, 1983), авторы которой также исследовали поведение лазера при ненулевой расстройке. Еще раз отметим, что теория хорошо подтверждается экспериментальными результатами.

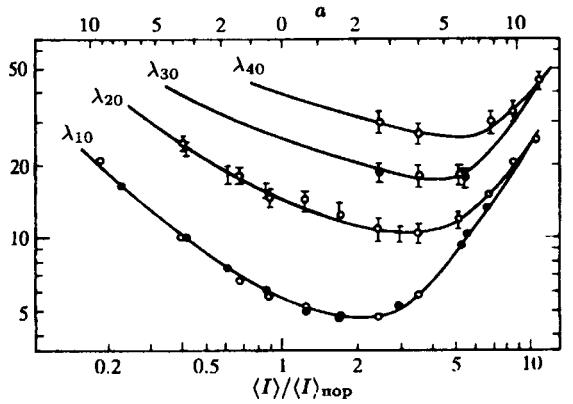


Рис. 18.28. Собственные значения λ_{m0} как функции отношения средней интенсивности $\langle I\rangle$ к пороговой $\langle I\rangle_{\text{пор}}$. Точки — экспериментальные значения, кривые — результаты теоретического расчета. (Из работы Corti, Degiorgio and Arecchi, 1973)

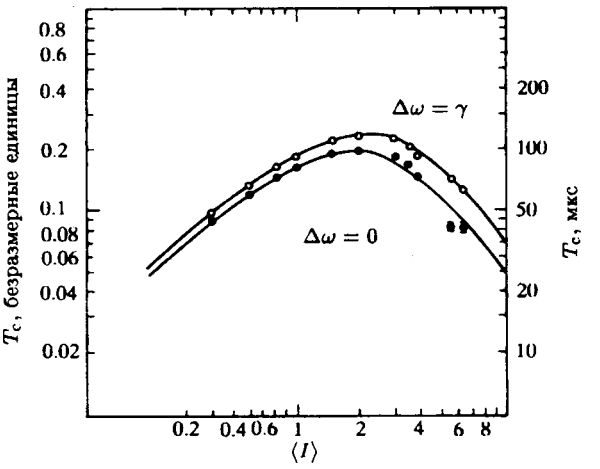


Рис. 18.29. Среднее время корреляции интенсивности T_c как функция средней интенсивности $\langle I\rangle$. Точки — экспериментальные значения, кривые — результаты теоретического расчета. Одна кривая соответствует точному резонансу ($\Delta\omega = 0$), а другая — расстройке, равной одной естественной ширине линии ($\Delta\omega = \gamma$) (Singh, Friberg and Mandel, 1983)

18.7.3. Функция корреляции амплитуды поля и спектральная плотность

Рассмотрим функцию корреляции второго порядка комплексной амплитуды лазерного поля $\mathscr{E}(t)$, которая в наших обозначениях задается формулой

$$\langle \mathscr{E}^*(t_1)\mathscr{E}(t_2)\rangle\, e^{-i\omega_1(t_2-t_1)} = \langle r(t_1)r(t_2)\, e^{i[\theta(t_2)-\theta(t_1)]}\rangle\, e^{-i\omega_1(t_2-t_1)}, \tag{18.7.10}$$

где ω_1 — частота, на которую настроен резонатор. С учетом (18.7.4), получаем в пределе больших времен

$$\langle \mathscr{E}^*(t_1)\mathscr{E}(t_2)\rangle = \int_0^\infty\!\!\int dr_1\, dr_2 r_1^2 r_2^2 \int_0^{2\pi}\!\!\int d\theta_1\, d\theta_2\, e^{i(\theta_2-\theta_1)} p_2(r_2,\theta_2,t_2;r_1,\theta_1,t_1) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\!\!\int dr_1\, dr_2 r_1 r_2 \psi_{00}(r_2)\psi_{00}(r_1) \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_{mn}(r_2)\psi_{mn}^*(r_1) \int_0^{2\pi}\!\!\int d\theta_1\, d\theta_2\, e^{i(n-1)(\theta_1-\theta_2)}\, e^{-\lambda_{mn}(t_2-t_1)} =$$

$$= \int_0^\infty\!\!\int dr_1\, dr_2 r_1 r_2 \psi_{00}(r_2)\psi_{00}(r_1) \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{m1}(r_2)\psi_{m1}^*(r_1)\, e^{-\lambda_{m1}(t_2-t_1)}, \quad t_2 \geqslant t_1. \tag{18.7.11}$$

Результирующая функция корреляции может быть записана в виде

$$\Gamma(\tau) = \langle \mathscr{E}^*(t)\mathscr{E}(t+\tau)\rangle\, e^{-i\omega_1\tau} = \langle I\rangle \sum_{m=0}^{\infty} V_m\, e^{-\lambda_{m1}|\tau|}\, e^{-i\omega_1\tau}, \tag{18.7.12}$$

где обозначено

$$V_m \equiv \left|\int_0^\infty dr\, r\psi_{00}(r)\psi_{m1}(r)\right|^2 / \langle I\rangle, \tag{18.7.13}$$

и $\langle I\rangle$ задается выражением (18.3.27).

Поскольку $\Gamma(\tau)\,e^{i\omega_1\tau}$ оказывается действительной величиной, и $\Gamma(-\tau)=\Gamma^*(\tau)$ для стационарного поля, экспоненты $-\lambda_{m1}\tau$ в (18.7.12) должны зависеть только от модуля τ. Полагая $\tau=0$ в обеих частях данного выражения, сразу получаем, что коэффициенты V_m нормированы так, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} V_m = 1. \tag{18.7.14}$$

Более того, нормированная функция корреляции второго порядка (комплексная степень автокогерентности) лазерного поля задается формулой

$$\gamma(\tau)=\langle \mathscr{E}^*(t)\mathscr{E}(t+\tau)\rangle\, e^{-i\omega_1\tau}/\langle I\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} V_m\, e^{-\lambda_{m1}|\tau|}\, e^{-i\omega_1\tau}, \tag{18.7.15}$$

и фурье-преобразование от $\gamma(\tau)$ дает, как обычно, нормированную спектральную плотность $\phi(\omega)$. В данном случае

$$\phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(\tau)\,e^{i\omega\tau}\,d\tau = \sum_{m=0}^{\infty} V_m\left[\frac{2\lambda_{m1}}{\lambda_{m1}^2+(\omega-\omega_1)^2}\right]. \tag{18.7.16}$$

Таким образом, спектральная плотность лазерного поля представляет собой сумму лоренцевых спектральных плотностей, каждая из которых центрирована на частоте ω_1, но имеет свою ширину λ_{m1}. Важность членов высшего порядка в ряду (18.7.15) опять определяется величиной коэффициентов V_m. Вычисления показывают, что V_0 намного больше всех остальных коэффициентов, сумма которых не превышает 2 % от V_0 и еще меньше вдали от порога. Следовательно, спектральная плотность хорошо аппроксимируется одной лоренцевой функцией с шириной λ_{01}.

На рис. 18.21 показана собственное значение λ_{01} как функция параметра накачки a. Видно, что оно монотонно убывает по мере увеличения a. В первом приближении, можно считать, что λ_{01} обратно пропорционально средней интенсивности света $\langle I\rangle$, и записать

$$\lambda_{01}(a)=\frac{\alpha_{\mathrm{L}}(a)}{\langle I(a)\rangle}, \tag{18.7.17}$$

где $\alpha_{\mathrm{L}}(a)$ — величина порядка единицы, которая существенно не меняется. Это подчеркивает тот факт, что спектральная ширина лазера становится все более узкой по мере увеличения возбуждения и интенсивности света. В пределе поле становится строго монохроматичным. Однако, этот предел недостижим, так что, практически, часто оказывается, что при значительном превышении порога спектральная ширина лазера ограничивается колебаниями резонатора, а не этими более фундаментальными соображениями. Тем не менее, соблюдая большую осторожность, можно получить спектральные ширины менее 1 кГц. Это означает, что частота может быть задана с относительной точностью, превышающей 10^{-12}.

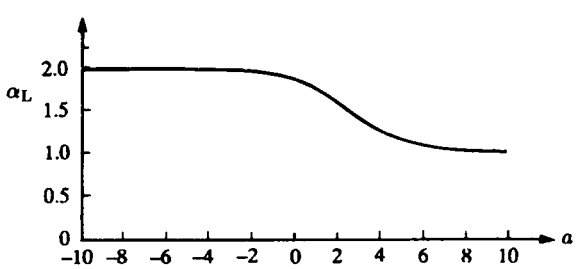


Рис. 18.30. Зависимость параметра ширины линии α_{L} от параметра накачки a (Risken, 1970)

Зависимость $\alpha_{\mathrm{L}}(a)$ от a, задаваемая формулой (18.7.17), показана на рис. 18.30. Видно, что $\alpha_{\mathrm{L}}(a)$ меняется от 2 в области ниже порога до 1 в области выше порога. Уменьшение спектральной ширины наполовину выше порога можно рассматривать как отражение того факта, что в этой области остаются только фазовые флуктуации, а флуктуации интенсивности пропадают. Последние, таким образом, перестают вносить вклад в спектральную ширину лазера выше порога, тогда как и фазовые флуктуации, и флуктуации интенсивности вносят одинаковый вклад в спектральную ширину ниже порога.

Эти предсказания теории были проверены в экспериментах по интерференции и гетеродинированию (Siegman, Daino and Manes, 1967; Siegman and Arrathoon, 1968; Manes and Siegman, 1971; Gerhardt, Welling and Güttner, 1972; Güttner, Welling, Gericke and Seifert, 1978). Несмотря на то, что функции корреляции близки к экспоненциальным, наблюдались малые предсказываемые отклонения от экспоненциальной формы и были определены значения нескольких первых констант

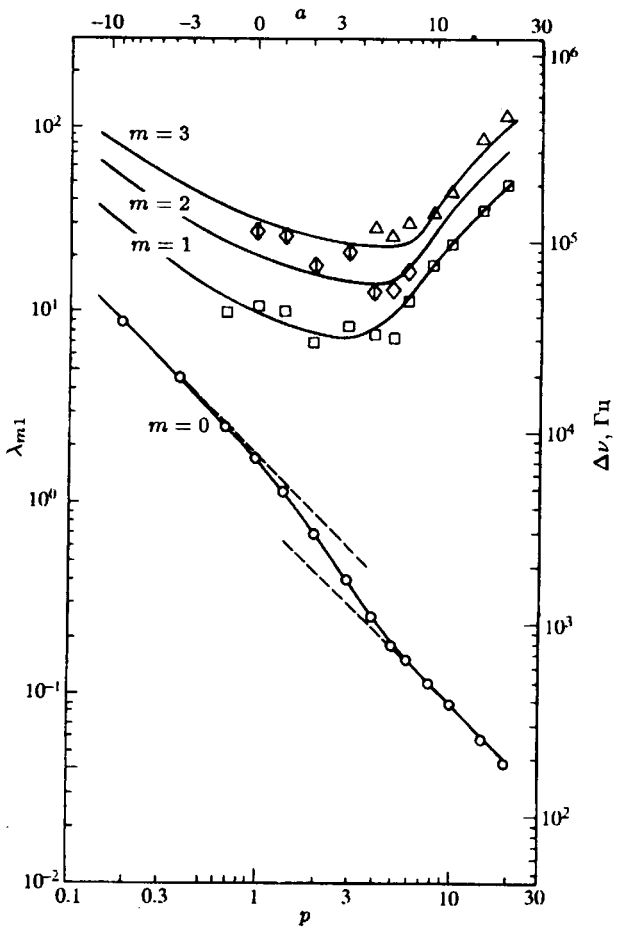


Рис. 18.31. Зависимость первых четырех собственных значений λ_{m1} от параметра накачки (верхняя горизонтальная ось) (Güttner, Welling, Gericke and Seifert, 1978). Точки — экспериментальные значения, кривые — результаты теоретического расчета

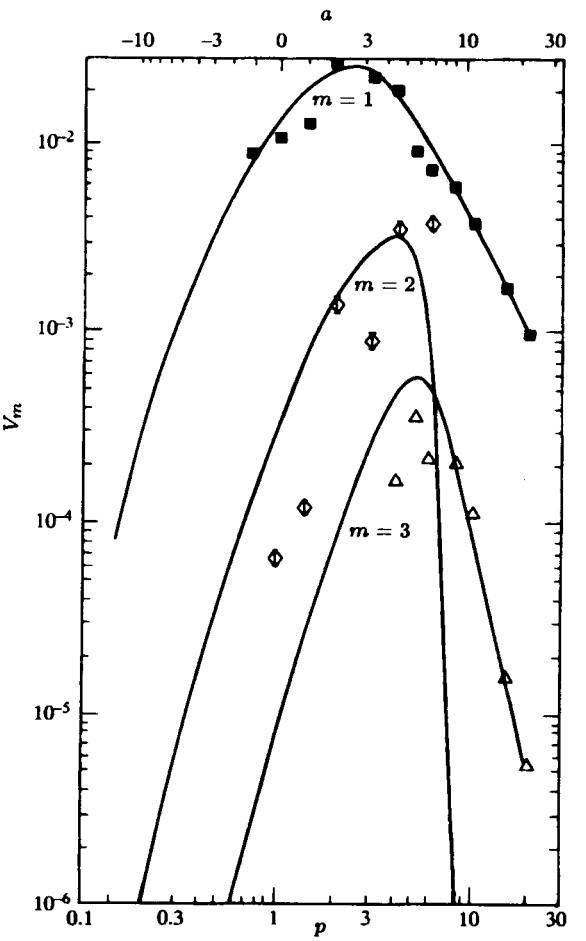


Рис. 18.32. Зависимость коэффициентов V_m, $m = 1, 2, 3$, задаваемых выражением (18.7.13), от параметра накачки (верхняя горизонтальная ось) (Güttner, Welling, Gericke and Seifert, 1978). Точки — экспериментальные значения, кривые — результаты теоретического расчета

в разложении (18.7.15). На рис. 18.31 в логарифмическом масштабе показаны результаты измерений Кетнера, Веллинга, Герике и Сейферта первых четырех собственных значений λ_{m1} как функций параметра накачки a. Видно, что изменение, предположенное на рис. 18.30, наблюдается на графике λ_{01}, и что, в общем, имеется хорошее согласие между теорией и экспериментом. На рис. 18.32 показаны значения коэффициентов V_m $(m = 1, 2, 3)$, полученные из экспериментов. Вследствие малости величин V_m и трудности выделения их значений из данных эксперимента, результаты имеют намного больший разброс, но, в общем, остаются в согласии с теоретическими предсказаниями.

18.7.4. Корреляции высшего порядка

Функцию Грина, задаваемую выражением (18.7.3), можно сразу использовать для нахождения корреляций высшего порядка. Например, для того, чтобы вычислить трехвременну́ю функцию корреляции интенсивности света, рассмотрим трехкратную плотность совместной вероятности $p_3(r_3, \theta_3, t_3; r_2, \theta_2, t_2; r_1, \theta_1, t_1)$ лазерного поля для трех различных моментов времени. Вследствие марковского характера системы, функции Грина оказывается вполне достаточно для определения всех совместных плотностей вероятности, как

это показывает формула (18.3.9). В стационарном состоянии, при условии $t_3 \geqslant t_2 \geqslant t_1$, с учетом (18.6.18) и (18.7.13), имеем

$$p_3(r_3,\theta_3,t_3;r_2,\theta_2,t_2;r_1,\theta_1,t_1) = P(r_3,\theta_3,t_3|r_2,\theta_2,t_2)P(r_2,\theta_2,t_2|r_1,\theta_1,t_1)p_s(r_1,\theta_1) =$$
$$= \frac{\psi_{00}(r_3)\psi_{00}(r_1)}{(2\pi)^3 r_1 r_2 r_3} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m'=0}^{\infty}\sum_{n'=-\infty}^{\infty} \psi_{mn}(r_3)\psi^*_{mn}(r_2)\times$$
$$\times\, \psi_{m'n'}(r_2)\psi^*_{m'n'}(r_1)\, e^{in(\theta_2-\theta_3)}\, e^{in'(\theta_1-\theta_2)}\, e^{-\lambda_{mn}(t_3-t_2)}\, e^{-\lambda_{m'n'}(t_2-t_1)}. \quad (18.7.18)$$

Таким образом, трехвременна́я функция корреляции интенсивности записывается в виде

$$\langle I(t)I(t+\tau_1)I(t+\tau_1+\tau_2)\rangle = \iiint_0^{\infty} dr_1\, dr_2\, dr_3 \iiint_0^{2\pi} d\theta_1\, d\theta_2\, d\theta_3 r_1^3 r_2^3 r_3^3 \times$$
$$\times\, p_3(r_3,\theta_3,t+\tau_1+\tau_2;r_2,\theta_2,t+\tau_1;r_1,\theta_1,t) = \langle I^3\rangle \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m'=0}^{\infty} N_{mm'}\, e^{-\lambda_{m0}\tau_2}\, e^{-\lambda_{m'0}\tau_1}, \quad \tau_1,\tau_2 \geqslant 0, \quad (18.7.19)$$

где коэффициенты $N_{mm'}$ нормированы так, что

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m'=0}^{\infty} N_{mm'} = 1, \quad (18.7.20)$$

и задаются выражением

$$N_{mm'} = \frac{1}{\langle I^3\rangle} \iiint_0^{\infty} dr_1\, dr_2\, dr_3 r_1^2 r_2^2 r_3^2 \psi_{00}(r_1)\psi^*_{m'0}(r_1)\psi^*_{m0}(r_2)\psi_{m'0}(r_2)\psi_{00}(r_3)\psi_{m0}(r_3). \quad (18.7.21)$$

Как обычно, удобно ввести нормированную функцию корреляции интенсивности, которая определяется соотношением

$$\lambda^{(3)}(\tau_1,\tau_2) \equiv \langle \Delta I(t)\Delta I(t+\tau_1)\Delta I(t+\tau_1+\tau_2)\rangle / \langle I^3\rangle \quad (18.7.22)$$

и является функцией двух временны́х аргументов τ_1 и τ_2.

Форма $\lambda^{(3)}(\tau_1,\tau_2)$ была вычислена для нескольких комбинаций τ_1, τ_2 и значений параметра накачки a. На рис. 18.33 показаны некоторые результаты вычислений. Близко к порогу или ниже порога зависимость от τ_1, τ_2 близка к экспоненциальной. Выше порога функция $\lambda^{(3)}(\tau_1,\tau_2)$ может стать отрицательной и иметь минимум, хотя ее абсолютные значения малы. Подобным образом, были также вычислены корреляции еще более высокого порядка (Cantrell and Smith, 1971; Cantrell, Lax and Smith, 1973a, b).

Эти теоретические предсказания были проверены путем фотоэлектрических корреляционных измерений при детектировании трех фотонов. Как нам известно из гл. 14, трехкратная совместная вероятность фотоэлектрического детектирования в моменты t, $t+\tau_1$ и $t+\tau_1+\tau_2$ пропорциональна $\langle I(t)I(t+\tau_1)I(t+\tau_1+\tau_2)\rangle$, так что измерение скорости поступления троек фотоэлектрических импульсов, как функции временны́х интервалов τ_1 и τ_2 между парами импульсов, дает необходимую корреляционную функцию. Такие измерения были выполнены в работах (Davidson and Mandel, 1968; Davidson, 1969; Chopra and Mandel, 1973b; Corti and Degiorgio, 1976a, b). На рис. 18.34*а* и *б* показаны измеренные значения $\lambda^{(3)}(\tau_1,\tau_2)$ ниже и выше порога, совмещенные с теоретическими кривыми, полученными по формулам (18.7.19) и (18.7.21).

Видно, что, в общем, имеется хорошее согласие между теорией и экспериментом. Измерения корреляций высшего порядка, вероятно, являются на сегодня самой тщательной проверкой теории лазера. Несмотря на сделанные с самого начала упрощения, последняя, очевидно, оказалась успешной.

18.8. Нестабильности лазера и хаос

В предыдущих параграфах мы исследовали различные свойства лазерного поля, как классически, так и квантово-механически. Квантовое рассмотрение автоматически включает флуктуации и вводит в описание

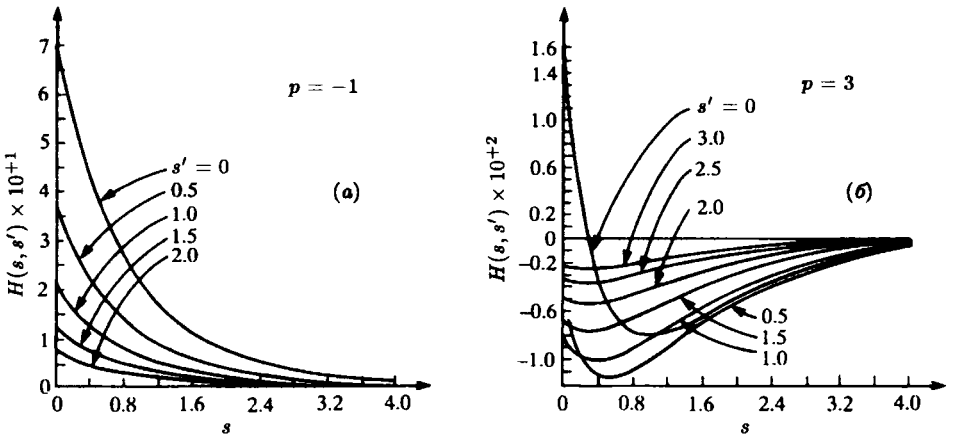


Рис. 18.33. Теоретическая зависимость $\lambda^{(3)}(\tau_1, \tau_2)$ (обозначенная здесь через $H(s,s')$) от τ_1, τ_2 (обозначенные здесь через s,s'): *а* — ниже порога (параметр накачки равен -1) и *б* — выше порога (параметр накачки равен 3) (Cantrell, Lax and Smith, 1973a)

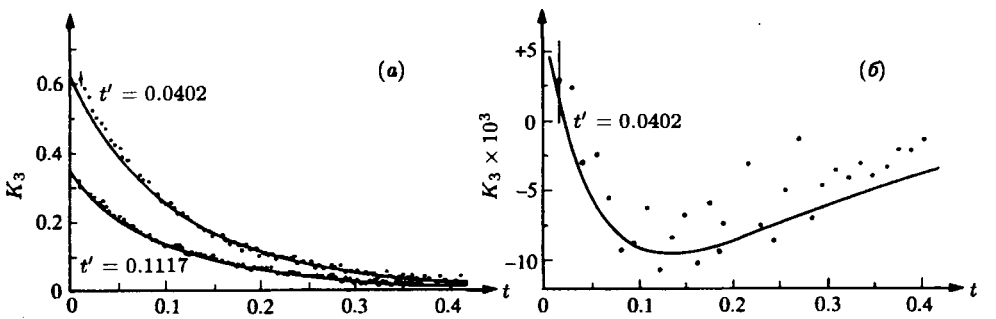


Рис. 18.34. Нормированная корреляционная функция интенсивности третьего порядка $\lambda^{(3)}(t,t')$ (обозначена здесь через $K_3(t,t')$): *а* — параметр накачки равен -2; *б* — параметр накачки равен 2.8. Точки — экспериментальные значения, кривые — результаты теоретического расчета. (Из работы Corti and Degiorgio, 1974)

стохастические свойства. Иногда эти статистические свойства моделируются полуклассически посредством искусственного введения ланжевеновских сил в уравнения движения, но их происхождение, тем не менее, является квантово-механическим. Мы видели, что в отсутствии квантовых эффектов поведение лазера является детерминированным, и что стационарное состояние всегда достигается по истечении достаточно большого промежутка времени.

Однако было обнаружено, что даже когда лазер рассматривается полуклассически при помощи детерминированных уравнений, последние допускают квазипериодическое или даже хаотическое поведение, но это не имеет ничего общего с квантовыми флуктуациями (Uspenskii, 1963; Buley and Cummings, 1964; Risken and Nummendal, 1968a, b). Вместо этого поведение лазера напоминает турбулентность, которая моделируется классическими уравнениями динамики жидкости (Lorenz, 1963; Haken, 1975a, b, 1985). Однако, для получения этих особенностей необходимо выйти за рамки некоторых упрощающих приближений, использованых в полуклассическом рассмотрении в разд. 18.2. В частности, нужно избежать адиабатического исключения атомных переменных, позволяющего связать среднее значение атомного дипольного момента в момент t с электрическим полем в тот же момент времени, если поле изменяется относительно медленно [ср. (18.2.16)]. Чтобы продемонстрировать возможность хаотического поведения, будем исходить из связанной системы уравнений движения для системы одинаковых двухуровневых атомов, резонансно взаимодействующих с одномодовым полем лазерного резонатора. Уравнением движения для амплитуды $\mathscr{E}(t)$ в приближении вращающейся волны опять является уравнение (18.2.13). Для упрощения вычислений

будем полагать, что поле представляет собой бегущую плоскую волну и задается модовой функцией

$$u(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{ikz} \tag{18.8.1}$$

в резонаторе длиной L и площадью поперечного сечения A, а атомная плотность η постоянна. Как и прежде, атомная поляризация $P(t)$ определяется выражением $P(t) = \eta\langle\hat{\mu}(t)\rangle$, и, с учетом (15.2.16), имеем

$$P(t) = \eta\left[\mathrm{Re}(\mu_{12})r_1(t) + \mathrm{Im}(\mu_{12})r_2(t)\right] = \frac{1}{2}\eta\mu_{12}\left[r_1(t) - ir_2(t)\right] + \text{к.с.},$$

где $r_1(t)$, $r_2(t)$ — составляющие атомного вектора Блоха. Переходя во вращающуюся систему координат, как описано в разд. 15.3.2, при помощи (15.3.17б) найдем

$$P(t) = \frac{1}{2}\eta\mu_{12}\left[r_1'(t) - ir_2'(t)\right]\mathrm{e}^{-i\omega t} + \text{к.с.}, \tag{18.8.2}$$

где $r_1'(t)$ и $r_2'(t)$ — медленно меняющиеся составляющие вектора Блоха, зная которые можно найти положительно-частотную часть $P^{(+)}(t)$. Тогда из уравнения (18.2.13) получаем следующее дифференциальное уравнение

$$-i\omega\left(2\frac{d\mathscr{E}}{dt} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathscr{E}\right) = \frac{1}{2}\eta\frac{\omega^2}{\varepsilon_0}\mu_{12}\left[r_1'(t) - ir_2'(t)\right]\left[\frac{\sin(kL/2)}{(kL/2)}\right]. \tag{18.8.3}$$

В частном случае, когда матричный элемент дипольного момента перехода μ_{12} и амплитуда $\mathscr{E}(t)$ являются действительными величинами, вектор Блоха вращается в $y'z'$-плоскости и $r_1'(t) = 0$. Уравнение движения для поля сводится тогда к следующему

$$\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sigma}{2\varepsilon}\Omega = \frac{\mu_{12}^2\omega\eta}{2\varepsilon_0\hbar}\left[\frac{\sin(kL/2)}{(kL/2)}\right]r_2'$$

или

$$\frac{d\Omega}{dt} + \gamma_\mathrm{c}\Omega = \omega g r_2'. \tag{18.8.4}$$

Здесь мы использовали (18.2.18), чтобы представить амплитуду поля $\mathscr{E}(t)$ через частоту Раби $\Omega(t)$, исходя из предположения, что она может быть положительной или отрицательной, и записали

$$\gamma_\mathrm{c} \equiv \sigma/2\varepsilon_0, \quad g \equiv \frac{\mu_{12}^2\eta}{2\varepsilon_0\hbar}\left[\frac{\sin(kL/2)}{(kL/2)}\right] \tag{18.8.5}$$

для скорости затухания резонатора и для константы взаимодействия между полем резонатора и атомом.

Далее нам потребуются уравнения движения для атомного вектора Блоха, которые будут дополнять уравнение (18.8.4). Они представляют собой уравнения Блоха (15.3.19) во вращающейся системе координат, с учетом принятых упрощающих предположений $\phi = 0$, $r_1' = 0$ и $\omega_0 = \omega_1 = \omega$. Однако мы добавим в уравнения Блоха феноменологические релаксационные члены $\gamma_\perp r_2'$ и $\gamma_\parallel r_3'$ для r_2' и атомной инверсии r_3'. В результате три связанных уравнения движения лазера примут вид

$$\begin{aligned}
\frac{dr_2'}{dt} &= -\gamma_\perp r_2' + \Omega r_3', \\
\frac{dr_3'}{dt} &= -\gamma_\parallel(r_3' - r_\mathrm{e}') - \Omega r_2', \\
\frac{d\Omega}{dt} &= -\gamma_\mathrm{c}\Omega + \omega g r_2',
\end{aligned} \tag{18.8.6}$$

где r_e' есть равновесное значение r_3' в отсутствии поля.

Хотя данные уравнения сильно отличаются от уравнения для осциллятора ван дер Поля (18.8.25), которое мы вывели ранее, они действительно сводятся к уравнению данного типа после адиабатического исключения атомных переменных. Обычный порог лазера, при котором скорость усиления равна скорости потерь, соответствует условию

$$\frac{\omega g r_\mathrm{e}'}{\gamma_\perp} = \gamma_\mathrm{c}. \tag{18.8.6а}$$

Однако в процессе сведения задачи с тремя переменными к задаче с одной переменной мы также исключаем возможность обнаружения некоторых нестабильностей, которые не могут быть смоделированы одномерными уравнениями.

18.8.1. Связь с моделью Лоренца

В 1963 году Лоренц (Lorenz, 1963) разработал упрощенную модель конвективного течения жидкости, которая имеет вид следующей системы связанных уравнений трех переменных x, y и z:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -\sigma(x-y), \\ \frac{dy}{d\tau} &= -y - xz + \rho x, \\ \frac{dz}{d\tau} &= xy - bz, \qquad \sigma, \rho, b > 0. \end{aligned} \tag{18.8.7}$$

Хотя вопрос о течении жидкости нас прямо не касается, обратим внимание на тот факт, что эти уравнения могут описывать турбулентное движение и *хаос*, когда $\sigma > b + 1$. Термин «хаос» стал использоваться для обозначения поведения, которое описывается детерминированными уравнениями (но, тем не менее, является нерегулярным и как бы случайным), решение которых на больших временах t чувствительно к заданию начальных условий. Нерегулярность движения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ отражает также тот факт, что спектры, или фурье-образы от $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ являются непрерывными функциями частоты.

Хакен (Haken, 1975a, b) впервые обнаружил, что лазерные уравнения (18.8.6) действительно изоморфны уравнениям Лоренца, так что лазер, описываемый этими уравнениями, может проявить аналогичное хаотическое поведение. Для доказательства этого соответствия сделаем в уравнениях (18.8.6) подстановки

$$\begin{gathered} r_2' \to \left(\frac{\gamma_c\gamma_\perp}{\omega g}\right) y, \quad r_3' - r_e' \to -\left(\frac{\gamma_c\gamma_\perp}{\omega g}\right) z, \\ \Omega \to \gamma_\perp x, \quad t \to \tau/\gamma_\perp, \\ \frac{\omega g r_e'}{\gamma_c\gamma_\perp} \to \rho, \quad \gamma_\parallel/\gamma_\perp \to b, \quad \gamma_c/\gamma_\perp \to \sigma \end{gathered} \tag{18.8.8}$$

в результате которых эти уравнения становятся тождественными (18.8.7). Условие $\sigma > b + 1$, требуемое для хаоса, преобразуется в следующее условие для констант затухания

$$\gamma_c > \gamma_\parallel + \gamma_\perp. \tag{18.8.9}$$

Это означает, что скорость затухания резонатора должна превышать атомные скорости затухания. Последнее как раз противоположно обычному условию, которое предполагалось в разд. 18.2 для адиабатического исключения атомных переменных. Теперь ясно, почему хаос не проявлялся в рамках предыдущего детерминированного рассмотрении лазера: для него необходим «плохой резонатор», в котором спектральная ширина поля превышает атомную однородную ширину линии. Кроме того, трехмерная система уравнений типа (18.8.6) имеет наименьшую размерность, при которой может проявиться хаос.

18.8.2. Линейный анализ устойчивости

Стационарные решения уравнений (18.8.6) можно получить, полагая временные производные равными нулю. В результате, находим следующие ненулевые решения

$$\begin{aligned} r_{3ss}' &= \gamma_c\gamma_\perp/\omega g, \\ r_{2ss}' &= (\gamma_\parallel\gamma_c)^{1/2}(-\gamma_c\gamma_\perp + \omega g r_e')^{1/2}/\omega g, \\ \Omega_{ss} &= (\gamma_\parallel/\gamma_c)^{1/2}(-\gamma_c\gamma_\perp + \omega g r_e')^{1/2}, \end{aligned} \tag{18.8.10}$$

при условии, что $\omega g r_e' \geqslant \gamma_c\gamma_\perp$. Используя данные стационарные значения, удобно ввести нормированные переменные, как это сделали Рискен и Нуммедаль (Risken and Nummedal, 1968a)

$$\tilde{r}_2 = r_2'/r_{2ss}', \quad \tilde{r}_3 = r_3'/r_{3ss}', \quad \tilde{\Omega} = \Omega/\Omega_{ss}. \tag{18.8.11}$$

В этих нормированных переменных уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{r}_2}{dt} &= -\gamma_\perp \tilde{r}_2 + \gamma_\perp \tilde{\Omega} \tilde{r}_3, \\
\frac{d\tilde{r}_3}{dt} &= \gamma_\parallel \left(-\tilde{r}_3 + \frac{\omega g r'_e}{\gamma_c \gamma_\perp} \right) - \gamma_\parallel \left(-1 + \frac{\omega g r'_e}{\gamma_c \gamma_\perp} \right) \tilde{\Omega} \tilde{r}_2, \\
\frac{d\tilde{\Omega}}{dt} &= -\gamma_c \tilde{\Omega} + \gamma_c \tilde{r}_2.
\end{aligned} \tag{18.8.12}$$

Проверим является ли стационарное решение (18.8.10), определяющее неподвижную точку, устойчивым. Для этого рассмотрим уравнения движения в окрестности неподвижной точки, используя линейное приближение

$$\tilde{r}_2 = 1 + h_2, \quad \tilde{r}_3 = 1 + h_3, \quad \tilde{\Omega} = 1 + h_4. \tag{18.8.13}$$

Подставляя данные выражения в (18.8.12) и сохраняя только величины первого порядка малости по h_1, h_2, h_3, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{h}_2 &= -\gamma_\perp (h_2 - h_3 - h_4), \\
\dot{h}_3 &= -\gamma_\parallel \left[\left(\frac{\omega g r'_e}{\gamma_c \gamma_\perp} - 1 \right) (h_2 + h_4) + h_3 \right], \\
\dot{h}_4 &= -\gamma_c (h_4 - h_2).
\end{aligned} \tag{18.8.14}$$

Эти уравнения можно решить, полагая, что

$$h_j(t) = h_j(0)\, \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad (j = 2, 3, 4). \tag{18.8.15}$$

Нетривиальное решение получается, только если

$$\begin{vmatrix}
\lambda - \gamma_\perp & \gamma_\perp & \gamma_\perp \\
-\gamma_\parallel \left(\dfrac{\omega g r'_e}{\gamma_c \gamma_\perp} - 1 \right) & \lambda - \gamma_\parallel & -\gamma_\parallel \left(\dfrac{\omega g r'_e}{\gamma_c \gamma_\perp} - 1 \right) \\
\gamma_c & 0 & \lambda - \gamma_c
\end{vmatrix} = 0. \tag{18.8.16}$$

Последнее условие дает кубическое уравнение относительно константы затухания λ. Очевидно, что в случае устойчивой неподвижной точки действительные части всех трех корней λ должны быть положительными.

Детальный анализ корней этого уравнения показывает, что нестабильность появляется при условии

$$\gamma_c > \gamma_\parallel + \gamma_\perp \tag{18.8.17}$$

и когда

$$\frac{\omega g r'_e}{\gamma_c \gamma_\perp} > \frac{\gamma_c}{\gamma_\perp} \left(\frac{\gamma_c + \gamma_\parallel + 3\gamma_\perp}{\gamma_c - \gamma_\parallel - \gamma_\perp} \right). \tag{18.8.18}$$

Первое неравенство означает, что скорость затухания поля в резонаторе должна превышать атомные скорости затухания, т.е. необходим «плохой резонатор». Второе неравенство устанавливает нижнюю границу возбуждения или уровня накачки лазера. Согласно (18.8.6а) параметр $\omega g r'_e/\gamma_\perp$ представляет собой «скорость усиления» лазера, которая равна скорости затухания γ_c на пороге. Таким образом, отношение $\omega g r'_e/\gamma_c\gamma_\perp$ есть мера того, во сколько раз усиление превышает потери. Посмотрим, насколько велико оно должно быть, чтобы появилась нестабильность.

Правая часть неравенства (18.8.18), рассматриваемая как функция от $\gamma_c/\gamma_\perp$, имеет минимум при условии

$$\gamma_c/\gamma_\perp = \gamma_\parallel/\gamma_\perp + 1 + \left[2(\gamma_\parallel/\gamma_\perp + 1)(\gamma_\parallel/\gamma_\perp + 2) \right]^{1/2},$$

т.е. когда

$$\frac{\gamma_c}{\gamma_\perp + \gamma_\parallel} = 1 + \left[\frac{2(\gamma_\parallel/\gamma_\perp + 2)}{(\gamma_\parallel/\gamma_\perp + 1)} \right]^{1/2}, \tag{18.8.19}$$

При этом

$$\text{минимальное отношение усиления к потерям} = 2\left[2\left(\frac{\gamma_\parallel}{\gamma_\perp}+1\right)\left(\frac{\gamma_\parallel}{\gamma_\perp}+2\right)\right]^{1/2}+3\left(\frac{\gamma_\parallel}{\gamma_\perp}+1\right)+2. \tag{18.8.20}$$

Данное минимальное значение отношения усиления к потерям, которое иногда называется вторым лазерным порогом, зависит от $\gamma_\parallel/\gamma_\perp$, но всегда больше 9. Оно равно приблизительно 15, когда $\gamma_\parallel/\gamma_\perp = 1$ и равно приблизительно 21, когда $\gamma_\parallel/\gamma_\perp = 2$. В последнем случае согласно (18.8.19) минимум отношения усиления к потерям означает, что $\gamma_c/(\gamma_\perp+\gamma_\parallel) \sim 2.6$. Следовательно, для появления нестабильности усиление лазера должно превышать потери, более чем на порядок. С точки зрения интенсивности на выходе, такой лазер оказывается существенно выше порога.

18.8.3. Примеры нестабильностей лазера

Уравнения движения (18.8.6) могут быть решены численно. На рис. 18.35*а*, *б* показаны решения, полученные в работе (Ackerhalt, Milonni and Shih, 1985), для атомной переменной $r_2'(t)$ при двух различных значениях параметра возбуждения $\omega g r_e'/\gamma_c\gamma_\perp$, при начальных условиях $r_2'(0)\omega g/\gamma_c\gamma_\perp = 1$, $(r_3'(0)-r_e')\omega g/\gamma_c\gamma_\perp = -1$, $\Omega(0)/\gamma_\perp = 1$ и при условии $\gamma_\parallel/\gamma_\perp = 1$, $\gamma_c/\gamma_\perp = 3$, так что удовлетворяется неравенство (18.8.17). Видно, что зависимость $r_2'(t)$ имеет вид затухающего колебания, когда $\omega g r_e'/\gamma_c\gamma_\perp = 4$, но становится хаотической, когда $\omega g r_e'/\gamma_c\gamma_\perp$ увеличивается до 22. Очевидно, имеется фундаментальное изменение в поведении лазерной системы, когда $\omega g r_e'/\gamma_c\gamma_\perp$ превышает некоторое пороговое значение.

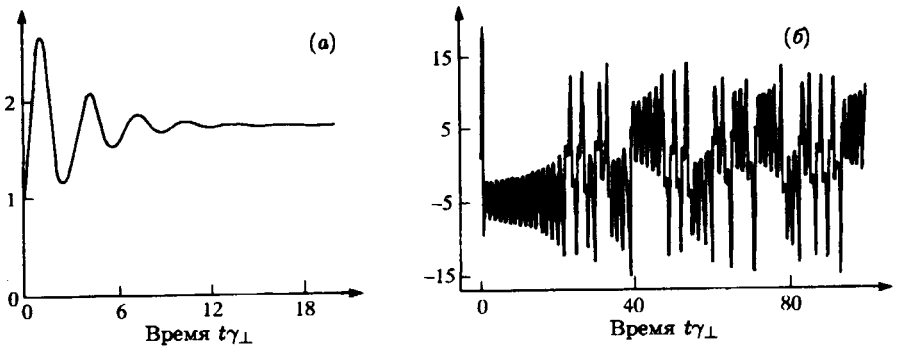


Рис. 18.35. Величина $r_2'(t)\omega g/\gamma_c\gamma_\perp$, задаваемая формулой (18.8.6), как функция времени при следующих значениях параметра возбуждения: *а* — $\omega g r_e'/\gamma_c\gamma_\perp = 4$ и *б* — $\omega g r_e'/\gamma_c\gamma_\perp = 22$ (Ackerhalt, Milonni and Shih, 1985)

С точки зрения эксперимента, порог нестабильности, как правило, слишком высок для наблюдения в однородно-уширенном одномодовом лазере. Однако используя одномодовый кольцевой NH_3-лазер с очень большим коэффициентом усиления, работающий в дальней инфракрасной области спектра, авторы работы (Weiss, Klische, Ering and Cooper, 1985) добились наблюдения последовательности пульсаций выходящего света, включающих последовательность удвоения периода и, в конечном счете, — хаос. Хаотическое состояние наиболее легко распознается по изменению спектра от дискретного к непрерывному. На рис. 18.36 показана последовательность спектров, записанных по мере постепенной настройки кольцевого NH_3-лазера на центр линии. Видно продвижение от линейчатого спектра к непрерывному. Сценарий перехода детерминированной системы к хаотическому состоянию через последовательность удвоения периода был впервые изложен Фейгенбаумом (M.J.Feigenbaum, 1978, 1979).

В работе (Risken and Nummedal, 1968a) было показано, что в многомодовом случае самопульсирующая нестабильность может появиться при условии, что $\omega g r_e'/\gamma_c\gamma_\perp$ больше примерно 9. Самопульсирующий режим работы лазера при существенном превышении порога впервые наблюдался экспериментально в неоднородно уширенных Xe-, He:Xe- и He:Ne-лазерах (Casperson 1978, 1983; Maeda and Abraham, 1982; Bentley and Abraham, 1982; Weiss and King, 1982; Weiss, Godone and Olafsson, 1983; Giorggia and Abraham, 1983) и описывается несколько более сложными уравнениями, чем (18.8.6). В некоторых случаях

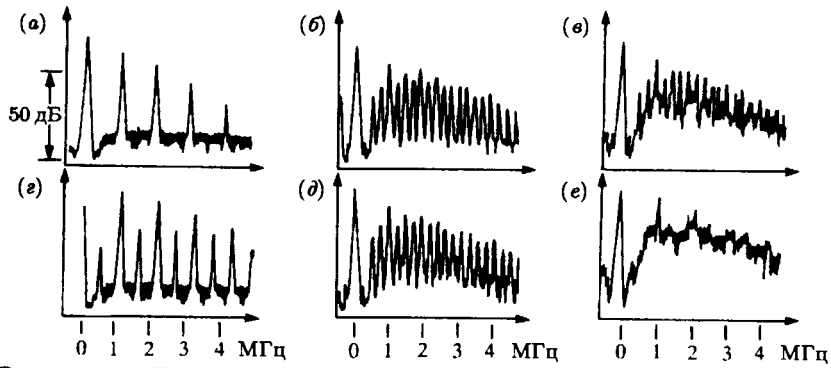


Рис. 18.36. Последовательность нестабильностей, наблюдаемая в NH_3 кольцевом лазере, демонстрирующая удвоения периода *а-г* и хаос *д,е* (Weiss, Klische, Ering and Cooper, 1985)

наблюдались также удвоение периода пульсаций и хаос.

Хотя хаотическое состояние детерминированной системы имеет некоторое сходство со случайным шумом и, возможно, даже с квантовыми флуктуациями, необходимо подчеркнуть, что оно, тем не менее, существенно от них отличается. Квантовый шум, как правило, стационарен и эргодичен, тогда как хаотическое состояние, обычно, таковым не является. Более того, хаотическое состояние, по истечении большого промежутка времени, обычно, чувствительно к заданию начального состояния, вместо того, чтобы быть независимым от него. Более точно, если $\mathbf{x}(t)$ описывает некоторый векторный хаотический процесс, и $\mathbf{x}(0)$ изменяется на малую величину $\delta\mathbf{x}(0)$, то соответствующее отклонение $\delta\mathbf{x}(t)$ от $\mathbf{x}(t)$ при больших t расходится экспоненциально во времени, и можно записать

$$\delta x_i(t) = \sum_j c_{ij}(t)\delta x_j(0)\,\mathrm{e}^{\lambda_j t}, \tag{18.8.21}$$

где λ называется *показателем Ляпунова*. Именно то свойство детерминированного хаотического процесса, что он имеет хотя бы один положительный показатель Ляпунова, делает величину $\mathbf{x}(t)$ чрезвычайно чувствительной к малым изменениям начальных условий.

18.8.4. Тест на детерминированный хаос

Поскольку хаотические и стохастические процессы имеют некоторые сходства, полезно иметь практический способ определения того, является ли записанное множество данных детерминировано хаотическим или стохастическим. Такой тест был разработан (Grassberger and Procaccia, 1983; Ben-Mizrachi, Procaccia and Grassberger, 1984) и применен к некоторым лазерным полям (Albano, Abounadi, Chyba, Searle, Yong, Gioggia and Abraham, 1985; Chyba, Christian, Gage, Lett and Mandel, 1986). Мы рассмотрим подход, который использовался в последнем эксперименте.

Предположим, что имеется некоторая временна́я последовательность данных, например, значений интенсивности лазерного света $I(t)$ в моменты времени $t = t_0 + n\tau$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, где τ — постоянный шаг во времени. Обозначим $I(t_0 + n\tau)$ через I_n. Построим из чисел I_1, I_2, I_3, ... d-мерный $(d = 1, 2, \ldots)$ разностный вектор, задаваемый формулой

$$\boldsymbol{\Delta}_{nm} \equiv (I_n - I_m, I_{n+1} - I_{m+1}, \ldots, I_{n+d-1} - I_{m+d-1}) \quad (m > n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Величина d, обычно, называется *размерностью вложения*. Пусть $N^d(\varepsilon)$ есть число разностных векторов, длина которых $|\boldsymbol{\Delta}_{nm}|$ меньше ε. Мы можем построить график зависимости $\ln N^d(\varepsilon)$ от $\log\varepsilon$ для возрастающих размерностей вложения d. Результирующие кривые, обычно, имеют линейный участок в области малых ε, если не считать возможных возмущающих эффектов, вызванных посторонним шумом. Для больших ε кривые, обычно, выходят на одинаковый горизонтальный уровень, что связано с конечными размерами образца. Сосредоточимся на линейном участке кривых для малых ε и обозначим наклон кривых через $D_2^d(\varepsilon)$. В случае чисто случайного процесса, изображающие точки в фазовом пространстве должны быть равномерно распределены внутри d-мерной сферы достаточно малого радиуса ε, так что величина $N^d(\varepsilon)$ пропорциональна ε^d. При $\varepsilon \to 0$ наклон $D_2^d(\varepsilon)$ совпадает с размерностью вложения d и неограниченно возрастает при $d \to \infty$ для стохастического процесса. С другой стороны, в случае детерминированной системы с хаотическим поведением, изображающие точки которой не распределены равномерно в малом

масштабе, наклон стремится к конечному значению при увеличении d. Предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{d\to\infty} D_2^d(\varepsilon) = D_2, \qquad (18.8.22)$$

если он существует, называется ***информационной размерностью второго порядка*** множества данных и является характеристикой хаотического поведения.

На рис. 18.37 показаны зависимости $N^d(\varepsilon)$ от $\log\varepsilon$ для нескольких различных значений d, которые получены в результате измерений интенсивности света примесного кольцевого лазера. График зависимости наклона прямых участков на рис. 18.37 от размерности вложения d будет демонстрировать наличие постоянного неограниченного роста. Последнее означает, что лазер является стохастическим, а не хаотическим.

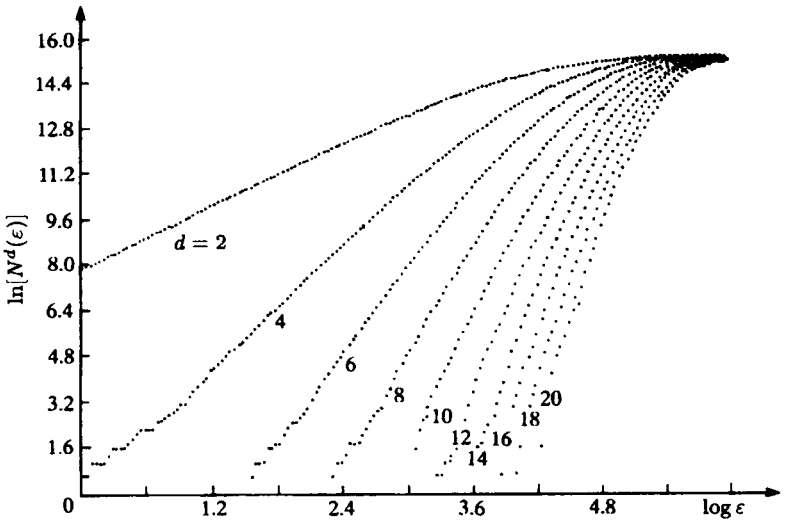


Рис. 18.37. Пример зависимости $\ln[N^d(\varepsilon)]$ от $\log\varepsilon$ при различных значениях d от 2 до 20, полученной экспериментально (Chyba, 1990)

Другой полезный тест детерминистического хаоса основан на отношении соседних кривых $N^d(\varepsilon)$. Для того, чтобы увидеть, как данное отношение ведет себя в случае истинно случайного процесса, нам необходимо более тщательно рассмотреть структуру $N^d(\varepsilon)$. В случае, когда изображающие точки равномерно распределены в малой области фазового пространства, $N^d(\varepsilon)$ равно произведению плотности точек ρ на объем V гиперсферы радиуса ε. Если a есть средний интервал между I_1, I_2, I_3, ..., то $\rho = a^{-d}$, и объем гиперсферы в d измерениях равен

$$V = \frac{\pi^{(1/2)d}\varepsilon^d}{\Gamma(1+\frac{1}{2}d)}.$$

Следовательно,

$$N^d(\varepsilon) = \left[\frac{\sqrt{\pi}\varepsilon}{a}\right]^d \frac{1}{\Gamma(1+\frac{1}{2}d)}, \qquad (18.8.23)$$

так что

$$\frac{N^d(\varepsilon)}{N^{d+1}(\varepsilon)} = \left[\frac{a}{\sqrt{\pi}\varepsilon}\right]\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}d)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}d)}. \qquad (18.8.24)$$

В случае больших d, можно использовать аппроксимацию Стирлинга для Γ-функции, что приводит к следующему результату

$$\frac{N^d(\varepsilon)}{N^{d+1}(\varepsilon)} = \frac{a}{\sqrt{2\pi\,\mathrm{e}\varepsilon}} d^{1/2}\,[1+(1/d)]^{1+(1/2)d} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi\,\mathrm{e}\varepsilon}} d^{1/2}\exp\left[(1+\frac{1}{2}d)\ln(1+(1/d))\right] = \frac{a}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} d^{1/2}\,\mathrm{e}^{3/4d-1/3d+\ldots}, \qquad (18.8.25)$$

где в последней строке логарифмическая функция под знаком экспоненты представлена в виде степенного ряда. Пусть

$$K_2^d(\varepsilon) = \frac{1}{\tau}\ln\left[\frac{N^d(\varepsilon)}{N^{d+1}(\varepsilon)}\right] = \frac{1}{\tau}\left[-\frac{1}{2}\ln 2\pi - \ln\left(\frac{\varepsilon}{a}\right) + \frac{1}{2}\ln d + \frac{3}{4d} - \frac{1}{3d^2} + \ldots\right]. \qquad (18.8.26)$$

Тогда ясно, что $K_2^d(\varepsilon)$ возрастает неограниченно по логарифмическому закону при увеличении d для этого

полностью случайного процесса. С другой стороны, в случае детерминированного процесса $K_2^d(\varepsilon)$ стремится к некоторому пределу при увеличении d для малых ε. Если предел существует, то можно записать

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{d\to\infty} K_2^d(\varepsilon) = K_2. \tag{18.8.27}$$

Предел K_2 называется *энтропией Колмогорова второго порядка* и характеризует хаотическое поведение системы. Данные из рис. 18.37 демонстрируют постоянное увеличение $K_2^d(\varepsilon)$ при увеличении d, показывая, что данный лазер флуктуирует стохастически, а не хаотически.

Задачи

18.1 Одномодовый гелий-неоновый лазер излучает дифракционно-ограниченный пучок света диаметром 1 мм и мощностью 1 мВт, спектральная ширина которого 30 кГц. Вычислите среднее число заполнения фотонами элементарной ячейки фазового пространства лазерного пучка.

18.2 Одномодовый лазер имеет выходное зеркало с коэффициентом пропускания по интенсивности $\mathscr{T}$, который может изменяться от долей процента до нескольких процентов. Потери фотонов на данном зеркале являются основными для лазера. Определите, как зависит от $\mathscr{T}$ интенсивность выходящего света, если лазер работает при существенном превышении порога, но коэффициент усиления лишь немного превосходит коэффициент потерь.

18.3 Рассмотрим одномодовый лазер, активная среда которого занимает лишь малую часть длины резонатора. Покажите, что при существенном превышении порога средняя интенсивность лазерного света $\langle I\rangle$ не зависит от длины резонатора, тогда как дисперсия $\langle(\Delta I)^2\rangle$ обратно пропорциональна длине резонатора. Объясните физически эти закономерности. Как зависели бы $\langle I\rangle$ и $\langle(\Delta I)^2\rangle$ от длины резонатора в области существенно ниже порога?

18.4 Пусть $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — действительная и мнимая части комплексной амплитуды $\mathscr{E}$ электрического поля одномодового лазера. Покажите, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\Delta\mathscr{E}_1(t)\Delta\mathscr{E}_2(t)\rangle = \langle\Delta\mathscr{E}_1(t)\Delta\left[\mathscr{E}_2(t)(a-|\mathscr{E}(t)|^2)\right]\rangle + \langle\Delta\mathscr{E}_2(t)\Delta\left[\mathscr{E}_1(t)(a-|\mathscr{E}(t)|^2)\right]\rangle,$$

где a — безразмерный параметр накачки.

Глава 19

ДВУХМОДОВЫЙ КОЛЬЦЕВОЙ ЛАЗЕР

В случае, когда возбуждено несколько мод лазера, необходимо использовать разложение (18.2. 4) электромагнитного поля в оптическом резонаторе. Тогда лазерное поле описывается несколькими амплитудами мод $\mathscr{E}_1(t)$, $\mathscr{E}_2(t)$ и т.д. и поэтому имеет больше степеней свободы, чем раньше. Хотя несложно повторить вычисления, приведенные в разд. 18.2 и разд. 18.3 и вывести уравнения движения, дополнительные степени свободы существенно усложняют поведение лазера, который может демонстрировать совершенно новые явления. По этой причине мы посвящаем двухмодовому лазеру отдельную главу.

Среди различных видов двухмодовых лазеров особенно интересным и удобным для эксперимента является кольцевой лазер, одна из возможных схем которого показана на рис. 19.1. В отличие от обычного лазера, оптический резонатор которого имеет два зеркала и нормальные моды в виде стоячих волн (ср. разд. 18.2), в *кольцевом лазере* используется открытый резонатор, образованный тремя или более зеркалами, расположенными в углах полигона или «кольца», нормальные моды которого являются бегущими волнами. Некоторые волны распространяются по часовой стрелке в резонаторе, а некоторые — против часовой. Хотя моды, бегущие в обоих направлениях, могут иметь одинаковую частоту, они, тем не менее, являются различными модами резонатора, которые можно возбуждать независимо. Более того, как видно из рис. 19.1, излучение разных мод покидает резонатор в различных направлениях, что облегчает изучение возбуждений мод по отдельности. Наоборот, две продольные моды лазера стоячей волны, обычно, можно разделить только с помощью интерферометра.

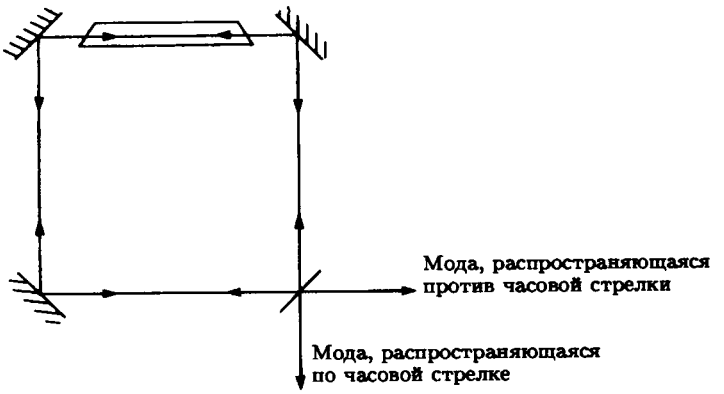


Рис. 19.1. Возможная схема кольцевого лазера

В этой главе мы сосредоточимся на двухмодовом кольцевом лазере, в котором волны распространяются по кольцу в каждом направлении. Вместо простых модовых функций стоячей волны, задаваемых выражением (18.2.5), мы представим две моды, бегущие вдоль одного плеча кольца, через моды плоских волн

$$u_1(\mathbf{r}) = K\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}}, \quad u_2(\mathbf{r}) = K\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}}, \tag{19.1.1}$$

с векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, направленными одинаково. Длины этих векторов равны $\pi n_i/l$, где n_i — целое число, l — длина пути по кольцу. Нормализация этих модовых функций возможна только тогда, когда предполагается, что плоские волны имеют площадь поперечного сечения $\mathscr{A}$. В этом случае можно выбрать нормировочную константу K, равную $(\mathscr{A}l)^{-1/2}$. С другой стороны, для более реалистического описания мод конфокального кольцевого лазера, можно использовать модовые функции типа тех, которые задавались формулой (18.2.6), если не считать того, что множитель $\sin\psi$ заменяется величиной $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\psi}$. Поскольку противоположно распространяющиеся волны кольцевого лазера делят между собой одну и ту же активную среду и один и тот же резонатор, то процессы усиления и потерь двух мод, обычно, довольно похожи. Тем не менее, поскольку геометрия лазера может быть несимметричной, и поскольку потери при отра-

жении и дифракции могут немного отличаться для двух направлений, для описания системы необходимо использовать два параметра накачки a_1, a_2, несмотря на то, что они, обычно, не очень сильно отличаются.

Пока двухмодовый кольцевой лазер остается в покое, две противоположно распространяющиеся моды бегущей волны, обычно, имеют одну частоту. Однако, когда система вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости кольца, частота одной моды увеличивается, а частота другой уменьшается. Разность частот пропорциональна угловой скорости вращения, что дает возможность использовать кольцевой лазер в качестве инерционного гироскопа для абсолютных измерений вращения (Lamb, 1964; Aronowitz, 1965, 1971; Menegozzi and Lamb, 1973; Sargent, Scully and Lamb, 1974).

19.1. Уравнения движения

Для полуклассического рассмотрения двухмодового лазера воспользуемся тем же общим методом, что и в разд. 18.2. Выражение (18.2.11) для поля необходимо заменить более общим разложением по модам (18.2.4), и тогда уравнение движения (18.2.12) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{2} -i\omega_n \left[2\frac{d\mathscr{E}_n}{dt} + \frac{\sigma_n}{\varepsilon_0}\mathscr{E}_n\right] \mathrm{e}^{-i\omega_n t} u_n(\mathbf{r}) + \text{к.с.} = \frac{\bar{\omega}^2}{\varepsilon_0} P(\mathbf{r}, t), \tag{19.1.2}$$

где ω_1, ω_2 — частоты двух мод лазера, а $\bar{\omega}$ — их среднее значение. Мы допустили, что «проводимости» σ_n могут быть разными для двух мод, чтобы получить возможность рассмотрения случая разных потерь. Выражение (18.2.19) для среднего значения дипольного момента заменяется теперь следующим:

$$\langle \hat{\mu}(\mathbf{r}, t)\rangle = $$

$$= \frac{-i(p_2 - p_1)\mu_{12}^2 T}{\hbar} \sum_{n=1}^{2} \mathscr{E}_n(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega_n t} u_n(\mathbf{r}) \left[1 - \frac{2\mu_{12}^2 T^2}{2\hbar^2} \left|\sum_{n=1}^{2} \mathscr{E}_n(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega_n t} u_n(\mathbf{r})\right|^2 + \ldots\right] + \text{к.с.} \tag{19.1.3}$$

С этого момента будем считать, для простоты, что частоты двух мод одинаковы и совпадают с частотой ω_0 атомного перехода, так что уравнения описывают невращающийся кольцевой лазер.

Выделим теперь амплитуду одной моды в левой части (19.1.2), например $\mathscr{E}_1$, умножая обе части уравнения на $u_1^*(\mathbf{r})$ и интегрируя, как и раньше, по объему резонатора. Из-за свойства ортонормированности (18.2.9), члены в левой части, пропорциональные $\mathscr{E}_2$, обращаются в нуль. Используя (19.1.3), для выражения поляризации $P(\mathbf{r})$ через атомную плотность $\eta(\mathbf{r})$, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathscr{E}_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\mathscr{E}_1 = \frac{(p_2 - p_1)\mu_{12}^2 \omega_0 T}{2\varepsilon_0 \hbar} \Bigg\{ & \mathscr{E}_1 \int \eta(\mathbf{r}) |u_1(\mathbf{r})|^2 \, d^3r + \mathscr{E}_2 \int \eta(\mathbf{r}) u_2(\mathbf{r}) u_1^*(\mathbf{r})\, d^3r - \\
& - \frac{2}{3}\left(\frac{\mu_{12} T}{\hbar}\right)^2 \Bigg[\mathscr{E}_1 |\mathscr{E}_1|^2 \int \eta(\mathbf{r}) |u_1(\mathbf{r})|^4 \, d^3r + 2\mathscr{E}_1 |\mathscr{E}_2|^2 \int \eta(\mathbf{r}) |u_1(\mathbf{r})|^2 |u_2(\mathbf{r})|^2 \, d^3r + \\
& + 2\mathscr{E}_2 |\mathscr{E}_1|^2 \int \eta(\mathbf{r}) |u_1(\mathbf{r})|^2 u_1^*(\mathbf{r}) u_2(\mathbf{r})\, d^3r + \mathscr{E}_2 |\mathscr{E}_2|^2 \int \eta(\mathbf{r}) |u_2(\mathbf{r})|^2 u_1^*(\mathbf{r}) u_2(\mathbf{r})\, d^3r + \\
& + \mathscr{E}_2^* |\mathscr{E}_1|^2 \int \eta(\mathbf{r}) |u_1(\mathbf{r})|^2 u_1^*(\mathbf{r}) u_2^*(\mathbf{r})\, d^3r + \mathscr{E}_1^* |\mathscr{E}_2|^2 \int \eta(\mathbf{r}) u_1^{*2}(\mathbf{r}) u_2^2(\mathbf{r})\, d^3r \Bigg] \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{19.1.4}$$

Если модовые функции $u_1(\mathbf{r})$ и $u_2(\mathbf{r})$ удается аппроксимировать выражениями (19.1.1), которые соответствуют бегущим волнам в активной среде, то несколько подынтегральных выражений становятся сильно осциллирующими, и соответствующие интегралы дают пренебрежимо малый вклад. Среди членов, линейных по $\mathscr{E}$, выживает только первый, а среди нелинейных по $\mathscr{E}$ членов, только первые два вносят ощутимый вклад. Если обозначить

$$\bar{\eta} \equiv \int \eta(\mathbf{r}) |u_i(\mathbf{r})|^2 \, d^3r, \quad i = 1, 2, \tag{19.1.5а}$$

$$F \equiv \int \eta(\mathbf{r}) |u_i(\mathbf{r})|^4 \, d^3r = \int \eta(\mathbf{r}) |u_1(\mathbf{r})|^2 |u_2(\mathbf{r})|^2 \, d^3r, \quad i = 1, 2, \tag{19.1.5б}$$

как и в разд. 18.2, то (19.1.4) принимает более простой вид

$$\frac{d\mathscr{E}_1}{dt} = \left[\frac{\omega_0\bar{\eta}(p_2-p_1)\mu_{12}^2 T}{2\varepsilon_0\hbar} - \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\right]\mathscr{E}_1 - \frac{\omega_0 F(p_2-p_1)\mu_{12}^4 T^3}{3\varepsilon_0\hbar^3}(|\mathscr{E}_1|^2 + 2|\mathscr{E}_2|^2)\mathscr{E}_1. \tag{19.1.6}$$

После введения, как и раньше, параметров $\mathscr{A}$, $\mathscr{C}_i$ и $\mathscr{B}$, представляющих, усиление, потери и нелинейность

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A} \equiv \omega_0\bar{\eta}(p_2-p_1)\mu_{12}^2 T/2\varepsilon_0\hbar,\\
&\mathscr{C}_i \equiv \sigma_i/2\varepsilon_0, \quad i=1,2,\\
&\mathscr{B} \equiv \omega_0 F(p_2-p_1)\mu_{12}^4 T^3/3\varepsilon_0\hbar^3,
\end{aligned} \tag{19.1.7}$$

уравнение (19.1.6) сводится к следующему:

$$\frac{d\mathscr{E}_1}{dt} = [\mathscr{A} - \mathscr{C}_1 - \mathscr{B}(|\mathscr{E}_1|^2 + 2|\mathscr{E}_2|^2)]\mathscr{E}_1. \tag{19.1.8}$$

Таким же образом, умножая каждый член в (19.1.2) на $u_2^*(\mathbf{r})$ и интегрируя, получаем уравнение движения

$$\frac{d\mathscr{E}_2}{dt} = [\mathscr{A} - \mathscr{C}_2 - \mathscr{B}(|\mathscr{E}_2|^2 + 2|\mathscr{E}_1|^2)]\mathscr{E}_2 \tag{19.1.9}$$

для амплитуды другой моды. Если не считать перекрестных членов $2\mathscr{B}|\mathscr{E}_2|^2\mathscr{E}_1$ и $2\mathscr{B}|\mathscr{E}_1|^2\mathscr{E}_2$, эти уравнения подобны полученному в предыдущей главе уравнению (18.2.25), описывающему поведение одномодового лазера. Однако из-за перекрестных членов, два уравнения движения оказываются связанными и должны решаться одновременно. Эта связь, как мы еще увидим, приводит к некоторым новым явлениям. Необходимо отметить, что если интенсивности двух мод $|\mathscr{E}_1|^2$ и $|\mathscr{E}_2|^2$ приблизительно равны, то нелинейный вклад перекрестных членов в два раза больше вклада членов $2\mathscr{B}|\mathscr{E}_1|^2\mathscr{E}_1$ или $2\mathscr{B}|\mathscr{E}_2|^2\mathscr{E}_2$, поскольку в два раза больше путей для реализации вклада перекрестного взаимодействия в нелинейную поляризацию.

Однако это справедливо только до тех пор, пока активная среда однородно уширена, и все атомы вносят одинаковый вклад в лазерное поле. Если доминирует неоднородное уширение, обусловленное доплеровскими сдвигами, возникающими из-за движения атомов, то связь мод ослабляется в 2 раза в центре линии. В общем случае, она зависит от расстройки $\Delta\omega$ между частотой резонатора и центральной частотой неоднородно уширенной линии. Можно показать, что константа связи, представленная в уравнениях (19.1.8) и (19.1.9) множителем $2\mathscr{B}$, заменяется величиной $1/[1+(\Delta\omega T_1)^2]$, где T_1 — естественное время жизни лазерного перехода (Smirnov and Zhelnov, 1969; M-Tehrani and Mandel, 1976, 1977). Кроме того, коэффициенты усиления $\mathscr{A}$ и насыщения $\mathscr{B}$ становятся функциями расстройки $\Delta\omega$. Мы не будем учитывать все эти особенности, но для того, чтобы охватить различные случаи, запишем уравнения (19.1.8) и (19.1.9) в более общем виде

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathscr{E}_1}{dt} &= [\mathscr{A} - \mathscr{C}_1 - \mathscr{B}(|\mathscr{E}_1|^2 + \xi|\mathscr{E}_2|^2)]\mathscr{E}_1,\\
\frac{d\mathscr{E}_2}{dt} &= [\mathscr{A} - \mathscr{C}_2 - \mathscr{B}(|\mathscr{E}_2|^2 + \xi|\mathscr{E}_1|^2)]\mathscr{E}_2,
\end{aligned} \tag{19.1.10}$$

исходя из предположения, что безразмерная константа связи ξ задается следующим образом

$$\begin{aligned}
&\xi = 2 \quad \text{для однородно уширенной активной среды;}\\
&\xi = 1 \quad \text{для неоднородно уширенной активной среды при нулевой расстройке;}\\
&\xi < 1 \quad \text{для неоднородно уширенной активной среды при ненулевой расстройке.}
\end{aligned} \tag{19.1.11}$$

Если расстройка $\Delta\omega$ достаточно большая, то $\xi \ll 1$, и тогда два уравнения (19.1.10) описывают два почти независимых одномодовых лазера.

Для того чтобы понять причину зависимости ξ от частоты, рассмотрим атом, движущийся со скоростью v в направлении моды 1 резонатора (рис. 19.2). Этот атом будет взаимодействовать с модой 1, только если частота моды ω_1 превышает частоту атомного перехода ω_0, так что $\omega_1 = \omega_0 + \omega_1 v/c$

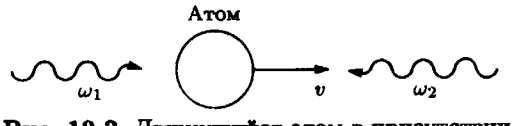


Рис. 19.2. Движущийся атом в присутствии двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях

($\pm$ естественная ширина атомного перехода). Причина этого в том, что в сопутствующей атому системе координат, частота ω_1 воспринимается как доплеровски смещенная: $\omega_1 - \omega_1 v/c$. Аналогично, этот атом будет взаимодействовать с модой 2, только если частота этой моды $\omega_2 = \omega_0 - \omega_2 v/c$ ($\pm$ естественная ширина атомного перехода), поскольку частота ω_2 воспринимается атомом, как доплеровски смещенная вверх. Если ω_1 фактически равна ω_2, но отличается от ω_0 более чем на естественную ширину атомного перехода, то две моды не могут взаимодействовать с одним и тем же атомом, а взаимодействуют лишь с разными атомами, так что они практически не связаны. Только если ω_1 и ω_2 находятся в пределах естественной ширины атомного перехода, имеется ощутимая связь между модами. Можно показать (Sargent, Scully and Lamb, 1974; Singh, 1980), что для некоторых атомных переходов двухмодового зеемановского лазера, ξ может иметь значения между 1 и 2.

Хотя основное внимание в этой главе уделено кольцевому лазеру, при некоторых условиях уравнения (19.1.10) с $\xi = 2$ могут также описывать в первом приближении однородно уширенный двухмодовый лазер стоячей волны, при условии, что разность частот двух мод мала по сравнению с естественной шириной атомного перехода.

19.1.1. Учет флуктуаций спонтанного излучения

Как было показано в разд. 18.3 и разд. 18.5, можно учесть эффекты спонтанного атомного излучения, добавляя шумовые члены в уравнение движения, и прийти к результатам, которые почти не отличаются от результатов полностью квантово-полевой теории. Поскольку полуклассическая теория намного проще, воспользуемся здесь тем же приемом и заменим уравнения (19.1.10) следующими

$$\begin{aligned} \frac{d\mathscr{E}_1}{dt} &= [\mathscr{A} - \mathscr{C}_1 - \mathscr{B}(|\mathscr{E}_1|^2 + \xi|\mathscr{E}_2|^2)]\mathscr{E}_1 + n_1(t), \\ \frac{d\mathscr{E}_2}{dt} &= [\mathscr{A} - \mathscr{C}_2 - \mathscr{B}(|\mathscr{E}_2|^2 + \xi|\mathscr{E}_1|^2)]\mathscr{E}_2 + n_2(t), \end{aligned} \tag{19.1.12}$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ представляют два независимых, комплексных, гауссовских, белых шума с одинаковой средней амплитудой, так что

$$\begin{aligned} \langle n_1^*(t)n_1(t')\rangle &= 2S\delta(t-t') = \langle n_2^*(t)n_2(t')\rangle, \\ \langle n_1^*(t)n_2(t')\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{19.1.13}$$

Нам потребовались два независимых шума, поскольку спонтанное излучение происходит почти независимо в каждую моду резонатора. Как и раньше, дельта-коррелированный вид $n_i(t)\,(i = 1,2)$ является приближением, отражающим тот факт, что временно́й масштаб спонтанного излучения, обычно, меньше, чем времена, за которые изменяются амплитуды $\mathscr{E}_1(t)$, $\mathscr{E}_2(t)$ поля.

Как и в разд. 18.3, удобно заменить различные величины обезразмеренными переменными. Если рассматривать резонатор, настроенный на частоту атомного перехода и положить

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_i &= (S/\mathscr{B})^{1/4}\tilde{\mathscr{E}}_i, \qquad i = 1,2, \\ \mathscr{A} - \mathscr{C}_i &= (S\mathscr{B})^{1/2}a_i, \qquad i = 1,2, \\ n_i &= S^{3/4}\mathscr{B}^{1/4}q_i, \qquad i = 1,2, \\ t &= (S\mathscr{B})^{-1/2}\tilde{t}, \end{aligned} \tag{19.1.14}$$

то перенормированные шумовые функции $q_i(\tilde{t})$ будут иметь корреляции

$$\begin{aligned} \langle q_1^*(\tilde{t})q_1(\tilde{t}')\rangle &= 2\delta(\tilde{t}-\tilde{t}') = \langle q_2^*(\tilde{t})q_2(\tilde{t}')\rangle, \\ \langle q_1^*(\tilde{t})q_2(\tilde{t}')\rangle &= 0, \end{aligned} \tag{19.1.15}$$

а перенормированные амплитуды $\tilde{\mathscr{E}}_i$ поля будут подчиняться уравнениям движения

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathscr{E}}_1}{d\tilde{t}} &= [a_1 - (|\tilde{\mathscr{E}}_1|^2 + \xi|\tilde{\mathscr{E}}_2|^2)]\tilde{\mathscr{E}}_1 + q_1(\tilde{t}), \\ \frac{d\tilde{\mathscr{E}}_2}{d\tilde{t}} &= [a_2 - (|\tilde{\mathscr{E}}_2|^2 + \xi|\tilde{\mathscr{E}}_1|^2)]\tilde{\mathscr{E}}_2 + q_2(\tilde{t}). \end{aligned} \tag{19.1.16}$$

Параметры a_1, a_2 являются безразмерными параметрами накачки, имеющими тот же вид, что и параметр a, введенный в разд. 18.3. Далее мы будем работать с перенормированными уравнениями, поскольку их структура немного проще. Однако для упрощения обозначений, мы в дальнейшем отбросим знак $\tilde{}$, понимая, что масштабные множители, использованные в (19.1.14), должны быть возвращены в уравнения, как только понадобятся размерные переменные.

Из-за наличия членов квантового шума, комплексные амплитуды $\mathscr{E}_1(t)$ и $\mathscr{E}_2(t)$ мод являются теперь случайными процессами с некоторой плотностью вероятности $p(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, t)$. В отличие от $\mathscr{E}_1(t)$ и $\mathscr{E}_2(t)$, подчиняющихся стохастическим уравнениям движения (19.1.16), $p(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, t)$ подчиняется четырехмерному уравнению Фоккера — Планка, имеющему общий вид (Singh, 1984, разд. 2.1)

$$\frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_i}[A_i p(\mathbf{x},t)] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}[D_{ij} p(\mathbf{x},t)]. \tag{19.1.17}$$

Две комплексные амплитуды $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ мод заменены действительной, четырехмерной векторной амплитудой $\mathbf{x}$, компоненты которой характеризуют состояние лазерного поля в произвольный момент времени и связаны с $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ соотношениями

$$\mathscr{E}_1 \equiv x_1 + ix_2, \quad \mathscr{E}_2 \equiv x_3 + ix_4. \tag{19.1.18}$$

Вектор дрейфа $\mathbf{A}$ имеет компоненты

$$\begin{aligned} A_1 &= [a_1 - (x_1^2 + x_2^2) - \xi(x_3^2 + x_4^2)]x_1, \\ A_2 &= [a_1 - (x_1^2 + x_2^2) - \xi(x_3^2 + x_4^2)]x_2, \\ A_3 &= [a_2 - (x_3^2 + x_4^2) - \xi(x_1^2 + x_2^2)]x_3, \\ A_4 &= [a_2 - (x_3^2 + x_4^2) - \xi(x_1^2 + x_2^2)]x_4, \end{aligned} \tag{19.1.19}$$

и вследствие (19.1.15) тензор диффузии D_{ij} имеет простой диагональный вид

$$D_{ij} = 2\delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,3,4. \tag{19.1.20}$$

Как было показано в разд. 18.3, общее решение уравнения Фоккера — Планка позволяет вычислить любое, интересующее нас среднее, включая многовременные корреляционные функции. Однако, четырехмерное уравнение преподносит более серьезные проблемы, чем соответствующее двумерное уравнение для одномодового лазера, которое рассматривалось в гл. 18.

19.2. Стационарное решение

Нетрудно найти стационарное решение $p_s(\mathbf{x})$ уравнения Фоккера — Планка (19.1.17). В стационарном состоянии левая часть обращается в нуль, и уравнение можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0, \tag{19.2.1}$$

где

$$j_i \equiv A_i p_s - \partial p_s / \partial x_i.$$

Вектор $\mathbf{j}$ есть четырехмерная *плотность тока вероятности*, которая обращается в нуль, когда вектор дрейфа $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию (называемому условием потенциальности) (Stratonovich, 1963, гл. 4)

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}, \tag{19.2.2}$$

и можно легко доказать, что компоненты, определяемые формулой (19.1.19), удовлетворяют этому условию. Тогда, вектор дрейфа $\mathbf{A}$ выражается в виде градиента скалярной потенциальной функции $U(\mathbf{x})$

$$A_i(\mathbf{x}) = -\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_i}. \tag{19.2.3}$$

Интегрируя это уравнение, например вдоль прямой, проведенной из начала системы координат в точку $\mathbf{x}$, получаем с точностью до аддитивной постоянной (M-Tehrani and Mandel, 1977, 1978a, b; Singh and Mandel, 1979), что

$$U(\mathbf{x}) = -\int_0^{\mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}')\cdot d\mathbf{x}' = -\frac{1}{2}a_1(x_1^2+x_2^2) - \frac{1}{2}a_2(x_3^2+x_4^2) + \\ + \frac{1}{4}(x_1^4+x_2^4+2x_1^2x_2^2+x_3^4+x_4^4+2x_3^2x_4^2) + \frac{1}{2}\xi(x_1^2+x_2^2)(x_3^2+x_4^2). \tag{19.2.4}$$

Наконец, приравнивая плотность тока вероятности $\mathbf{j}$ к нулю и интегрируя дифференциальное уравнение, находим для плотности вероятности $p_s(\mathbf{x})$ в стационарном состоянии следующее выражение:

$$p_s(\mathbf{x}) = \exp\left[\int_0^{\mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} + \text{const}\right] = B\,\mathrm{e}^{-U(\mathbf{x})}, \tag{19.2.5}$$

где B — нормировочный множитель. Очевидно, что $U(\mathbf{x})$ играет ту же роль, что и потенциал в разд. 18.3.

Здесь удобно ввести интенсивности I_1 и I_2 двух лазерных мод, задаваемые выражением

$$I_1 \equiv |\mathscr{E}_1|^2 = x_1^2+x_2^2, \quad I_2 \equiv |\mathscr{E}_2|^2 = x_3^2+x_4^2, \tag{19.2.6}$$

поскольку потенциал U полностью выражается через I_1 и I_2 в виде

$$U = -\frac{1}{2}a_1I_1 - \frac{1}{2}a_2I_2 + \frac{1}{4}I_1^2 + \frac{1}{4}I_2^2 + \frac{1}{2}\xi I_1I_2. \tag{19.2.7}$$

Фазы двух мод в стационарном решении отсутствуют, так что они должны быть абсолютно случайными. Из (19.2.5) получаем для совместной плотности вероятности $\mathscr{P}(I_1,I_2)$ интенсивностей двух мод в стационарном состоянии следующее выражение:

$$\mathscr{P}(I_1,I_2) = K^{-1}\exp\left(\frac{1}{2}a_1I_1 + \frac{1}{2}a_2I_2 - \frac{1}{4}I_1^2 - \frac{1}{4}I_2^2 - \frac{1}{2}\xi I_1I_2\right). \tag{19.2.8}$$

Постоянная $K(a_1,a_2,\xi)$ определяется из условия нормировки $\iint_0^\infty \mathscr{P}(I_1,I_2)\,dI_1\,dI_2 = 1$ и равна

$$K = \iint_0^\infty \exp\left(\frac{1}{2}a_1I_1 + \frac{1}{2}a_2I_2 - \frac{1}{4}I_1^2 - \frac{1}{4}I_2^2 - \frac{1}{2}\xi I_1I_2\right) dI_1\,dI_2. \tag{19.2.9}$$

Мы скоро увидим, что K играет роль производящей функции для моментов I_1 и I_2.

Можно сразу установить некоторые предельные формы $\mathscr{P}(I_1,I_2)$. Например, если лазер работает существенно ниже порога, так что два параметра накачки a_1, a_2 имеют большие отрицательные значения, то только очень маленькие интенсивности света I_1, I_2 имеют значительную вероятность. В этом случае выражение (19.2.8) сводится к

$$\mathscr{P}(I_1,I_2) \approx \frac{1}{4}|a_1a_2|\,\mathrm{e}^{-|a_1|I_1/2}\,\mathrm{e}^{-|a_2|I_2/2}, \tag{19.2.10}$$

т.е. принимает вид произведения двух экспоненциальных распределений как для двух независимых, поляризованных, тепловых пучков света [ср. (13.3.7)]. С другой стороны, при существенном превышении порога, когда оба a_1, a_2 имеют большие положительные значения, и когда $\xi \leqslant 1$, выражение для $\mathscr{P}(I_1,I_2)$

сводится приближенно к гауссовскому распределению двух переменных I_1, I_2. Однако, ситуация становится намного сложнее, когда константа связи ξ превышает единицу.

Мы можем проинтегрировать совместную плотность вероятности $\mathscr{P}(I_1, I_2)$ по одной переменной, скажем, по I_2, чтобы получить плотность вероятности $\mathscr{P}_1(I_1)$ интенсивности другой моды. Из (19.2.8) легко находим (Singh and Mandel, 1979; см. также Singh, 1981), что

$$\mathscr{P}_1(I_1) = \int_0^\infty \mathscr{P}(I_1, I_2)\, dI_2 = \\ = K^{-1}\sqrt{\pi}\exp\left[\frac{1}{4}(\xi^2-1)I_1^2 - \frac{1}{2}(a_2\xi - a_1)I_1 + \frac{1}{4}a_2^2\right]\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\xi I_1 - \frac{1}{2}a_2\right)\right]. \quad (19.2.11)$$

Это распределение вероятности имеет различный вид при $\xi < 1$ и при $\xi > 1$, что соответствует совершенно различным типам поведения кольцевого лазера.

19.2.1. Моменты интенсивности света

Как только найдена стационарная плотность вероятности $\mathscr{P}(I_1, I_2)$, можно легко вычислить любой момент интенсивностей света I_1, I_2 по формуле

$$\langle I_1^n I_2^m\rangle = K^{-1}\iint_0^\infty I_1^n I_2^m \exp\left(\frac{1}{2}a_1 I_1 + \frac{1}{2}a_2 I_2 - \frac{1}{4}I_1^2 - \frac{1}{4}I_2^2 - \frac{1}{2}\xi I_1 I_2\right) dI_1\, dI_2 = \\ = \frac{2^{n+m}}{K(a_1, a_2, \xi)}\frac{\partial^n}{\partial a_1^n}\frac{\partial^m}{\partial a_2^m}\iint_0^\infty \exp\left(\frac{1}{2}a_1 I_1 + \frac{1}{2}a_2 I_2 - \frac{1}{4}I_1^2 - \frac{1}{4}I_2^2 - \frac{1}{2}\xi I_1 I_2\right) dI_1\, dI_2 = \\ = \frac{2^{n+m}}{K(a_1, a_2, \xi)}\frac{\partial^{n+m}}{\partial a_1^n\, \partial a_2^m}K(a_1, a_2, \xi). \quad (19.2.12)$$

Средние интенсивности света, дисперсии и функции взаимной корреляции являются специальными случаями выражения (19.2.12), так что $K(a_1, a_2, \xi)$ выступает в качестве ***производящей функции*** для всех моментов I_1, I_2. Можно показать, после некоторых преобразований, что (Grossmann and Richter, 1971; M-Tehrani and Mandel, 1978a, b)

$$\langle I_1\rangle = \frac{a_1 - \xi a_2}{1-\xi^2} + \frac{2\sqrt{\pi}}{(1-\xi^2)K}[\mathrm{e}^{a_2^2/4}(1 + \operatorname{erf}\tfrac{1}{2}a_2) - \xi\,\mathrm{e}^{a_1^2/4}(1 + \operatorname{erf}\tfrac{1}{2}a_1)], \quad (19.2.13)$$

$$\langle(\Delta I_1)^2\rangle = \frac{2}{1-\xi^2} - \left(\langle I_1\rangle - \frac{a_1 - \xi a_2}{1-\xi^2}\right)^2 - \frac{2\sqrt{\pi}}{(1-\xi^2)^2 K}\times \\ \times\left[\mathrm{e}^{a_2^2/4}(a_1 - \xi a_2)(1 + \operatorname{erf}\tfrac{1}{2}a_2) + \xi^2\,\mathrm{e}^{a_1^2/4}(a_2 - \xi a_1)(1 + \operatorname{erf}\tfrac{1}{2}a_1) + \frac{2\xi}{\sqrt{\pi}}(1-\xi^2)\right]. \quad (19.2.14)$$

Аналогичные выражения, с перестановкой a_1 и a_2, имеют место для $\langle I_2\rangle$ и $\langle(\Delta I_2)^2\rangle$. Функция взаимной корреляции определяется выражением

$$\langle\Delta I_1 \Delta I_2\rangle = -\frac{2\xi}{1-\xi^2} - \left(\langle I_1\rangle - \frac{a_1 - \xi a_2}{1-\xi^2}\right)\left(\langle I_2\rangle - \frac{a_2 - \xi a_1}{1-\xi^2}\right) + \frac{2\xi\sqrt{\pi}}{(1-\xi^2)^2 K}\times \\ \times\left[\mathrm{e}^{a_1^2/4}(a_2 - \xi a_1)(1 + \operatorname{erf}\tfrac{1}{2}a_1) + \mathrm{e}^{a_2^2/4}(a_1 - \xi a_2)(1 + \operatorname{erf}\tfrac{1}{2}a_2) + \frac{2(1-\xi^2)}{\xi\sqrt{\pi}}\right]. \quad (19.2.15)$$

Для выяснения смысла полученных соотношений удобно отдельно рассмотреть случаи: $\xi \leqslant 1$, соответствующий неоднородно-уширенной активной среде, и $\xi = 2$, соответствующий однородно-уширенной активной среде.

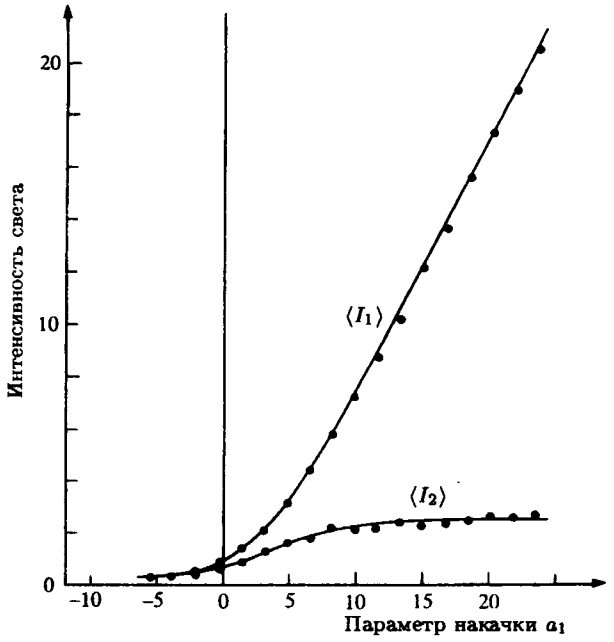


Рис. 19.3. Средние интенсивности света двух мод кольцевого лазера, работающего на центре линии, как функции параметра накачки a_1 (M-Tehrani and Mandel, 1978b). Точки — экспериментальные значения, кривые — результат теоретического расчета при $\Delta a = 0.8$

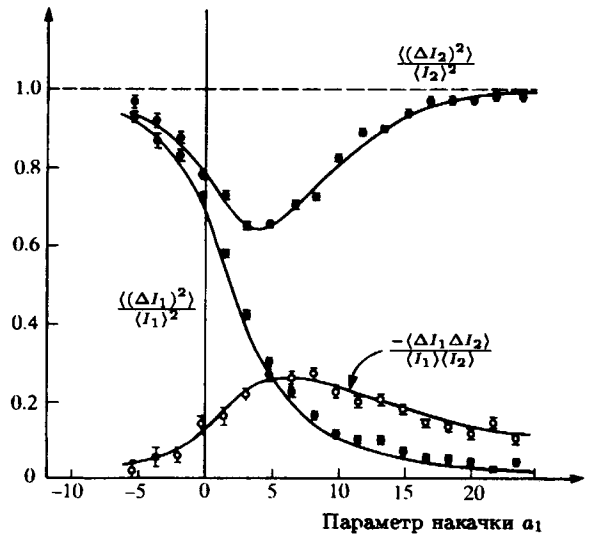


Рис. 19.4. Относительные флуктуации интенсивности и взаимные корреляции двух мод кольцевого лазера, работающего на центре линии, как функции параметра накачки a_1 (M-Tehrani and Mandel, 1978b). Точки — экспериментальные значения, кривые — результат расчета при $\Delta a = 0.8$

Рассмотрим сначала неоднородно уширенный кольцевой лазер, работающий на частоте центра линии, так что $\xi = 1$. На рис. 19.3 приведены средние интенсивности $\langle I_1 \rangle$ и $\langle I_2 \rangle$ как функции от a_1 в случае небольшой асимметрии $\Delta a = a_1 - a_2 = 0.8$. На практике, для большинства кольцевых лазеров разность Δa, обычно, меньше, но не равна нулю и не очень сильно меняется при изменении параметра a_1. Более необычное поведение наблюдается у более затухающей моды 2 (моды, которая несет бóльшие потери). При увеличении a_1, средняя интенсивность $\langle I_1 \rangle$ монотонно растет выше порога, как в случае одномодового лазера, но рост $\langle I_2 \rangle$ ограничен выше порога и $\langle I_2 \rangle$ достигает своего асимптотического значения. Другими словами, менее затухающая мода 1 подавляет рост более затухающей моды 2 при увеличении a_1. Еще более интересное поведение наблюдается у относительных флуктуаций интенсивности $\langle (\Delta I)^2 \rangle / \langle I \rangle^2$ двух мод, показанных на рис. 19.4 для случая $\Delta a = a_1 - a_2 = 0.8$. В отличие от относительных флуктуаций моды 1, стремящихся к нулю при увеличении a_1, что характерно для лазера выше порога, относительные флуктуации более затухающей моды 2 на частоте центра линии достигают минимума чуть выше порога, а затем опять становятся равными единице, которая является численной характеристикой «теплового» или некогерентного света (ср. разд. 13.3). Таким образом, конкуренция мод проявляется в сильной асимметрии не только интенсивностей двух мод, но и их флуктуационных свойств. В заключение на рис. 19.4 показана также функция взаимной корреляции интенсивностей двух мод. Она всегда отрицательна, поскольку моды соревнуются из-за фотонов, испускаемых общей системой атомов, и достигает своего наибольшего численного значения чуть выше порога. Внимательный анализ выражений (19.2. 13) и (19.2.15) на частоте центра линии ($\xi = 1$) показывает, что в асимптотическом пределе $a_1 \to \infty$

$$\langle I_1 \rangle \sim a_1 - \frac{2}{\Delta a}, \quad \langle I_2 \rangle \sim \frac{2}{\Delta a},$$
$$\frac{\langle (\Delta I_1)^2 \rangle}{\langle I_1 \rangle^2} \sim \frac{2 + 4/(\Delta a)^2}{a_1^2}, \quad \frac{\langle (\Delta I_2)^2 \rangle}{\langle I_2 \rangle^2} \sim 1, \quad \frac{\langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \sim -\frac{2}{a_1 \Delta a}. \tag{19.2.16}$$

19.2.2. Сравнение с экспериментом

Многие из этих теоретических предсказаний были подтверждены измерениями фотоэлектрических отсчетов для двух мод гелий-неонового неоднородно уширенного кольцевого лазера. На рис. 19.5 приведена схема установки, которая использовалась в одной серии измерений. Кольцевой лазер имел два плоских и два вогнутых зеркала, расположенных в углах квадрата со стороной 12.5 см. В одном плече резонатора располагалась гелий-неоновая плазменная трубка. Одно из зеркал монтировалось на пьезоэлектрический кристалл, что позволяло изменять частоту резонатора. Острие ножа, приводимое в движение другим пьезоэлектрическим двигателем и введенное в одно плечо резонатора, выступало в качестве переменного источника потерь и позволяло перемещать рабочую точку лазера из области ниже порога в область выше порога. Средняя интенсивность света с помощью контрольного фотоэлемента поддерживалась постоянной, вопреки «уходам», вызванным отрицательной обратной связью. Свет, испускаемый двумя противоположно распространяющимися модами, падал на два фотоумножителя, выходные импульсы которых, после усиления и формирования, подсчитывались, в конце концов, счетчиком в течение интервалов длительностью 1 мкс. Это давало среднюю интенсивность света $\langle I\rangle$, а также относительную флуктуацию интенсивности $\langle(\Delta I)^2\rangle/\langle I\rangle^2$, как описано в разд. 14.9. Скорость совпадений импульсов от обоих каналов давала меру взаимной корреляции $\langle\Delta I_1\Delta I_2\rangle$.

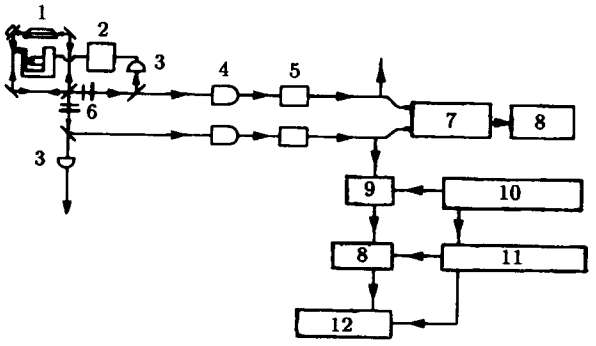


Рис. 19.5. Блок-схема экспериментальной установки, использованной для измерений числа фотоотсчетов на гелий-неоновом лазере (M-Tehrani and Mandel, 1978b). 1 — кольцевой лазер, 2 — контроль, 3 — контрольный ФЭУ, 4 — счетный ФЭУ, 5 — усилитель и дискриминатор, 6 — фильтры, 7 — схема совпадений, 8 — счетчик, 9 — затвор, 10 — генератор импульсов, 11 — контроль счета, 12 — накопитель

На рис. 19.3 и 19.4 показаны результаты измерений, совмещенные с теоретическими кривыми, полученными по формулам (19.2.13) и (19.2.15). Видно, что предсказанные эффекты действительно наблюдались. Рост моды 2 подавляется модой 1, а относительные флуктуации интенсивности моды 2 становятся близкими к единице при существенном превышении порога. В случае большого значения параметра накачки a_1, электромагнитные волны, распространяющиеся в одном направлении по кольцу приобретают характеристики когерентного лазерного света, тогда как волны, распространяющиеся в противоположном направлении, имеют характер «теплового» или некогерентного света. Мы здесь имеем поразительное проявление конкуренции мод в лазере, причем большая асимметрия в свойствах двух мод вызвана относительно малой асимметрией соответствующих потерь. Было обнаружено, что конкуренция мод становится менее выраженной при увеличении расстройки, и вдали от центра линии ($\Delta\omega T_1 \gg 1$) две моды ведут себя, по существу, как моды двух несвязанных одномодовых лазеров (M-Tehrani and Mandel, 1977, 1978a, b).

Выражения (19.2.13) и (19.2.15) предсказывают еще более сильные эффекты конкуренции в однородно уширенном кольцевом лазере, для которого $\xi = 2$. На рис. 19.6 показаны средние значения интенсивностей двух мод, как функции от a_1 и Δa при $\xi = 2$. Предполагается, что расстройка резонатора равна нулю. Видно, что как только имеется асимметрия и $\Delta a \neq 0$, мода 1 не только подавляет рост моды 2 с увеличением a_1, но фактически обращает интенсивность последней в нуль. На рис. 19.7 показаны относительные флуктуации интенсивности каждой моды как функции a_1. Несмотря на то, что флуктуации моды 1 стремятся к нулю при увеличении накачки и при $\Delta a > 0$, флуктуации моды 2 могут существенно превысить единицу, хотя они стремятся асимптотически к единице при $a_1 \to \infty$. Большие относительные флуктуации интенсивности часто связаны с процессами типа «включение — выключение», и мы далее увидим, что такое переключение действительно может иметь место в двухмодовом лазере. На рис. 19.8 показана относительная взаимная корреляция, которая опять всегда отрицательна, как функция от a_1 и Δa. При $\Delta a \gtrsim 1$ зависимость от a_1 качественно похожа на зависимость для неоднородно уширенного кольцевого лазера. Однако когда $\Delta a = 0$, относительная взаимная корреляция $\langle I_1 I_2\rangle/\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle$ стремится к нулю при увеличении a, несмотря на то, что как интенсивность $I_1/\langle I_1\rangle$, так и интенсивность $I_2/\langle I_2\rangle$ неотрицательны и среднее обеих равно единице. Корреляция может обратиться в нуль только в том случае, если интенсив-

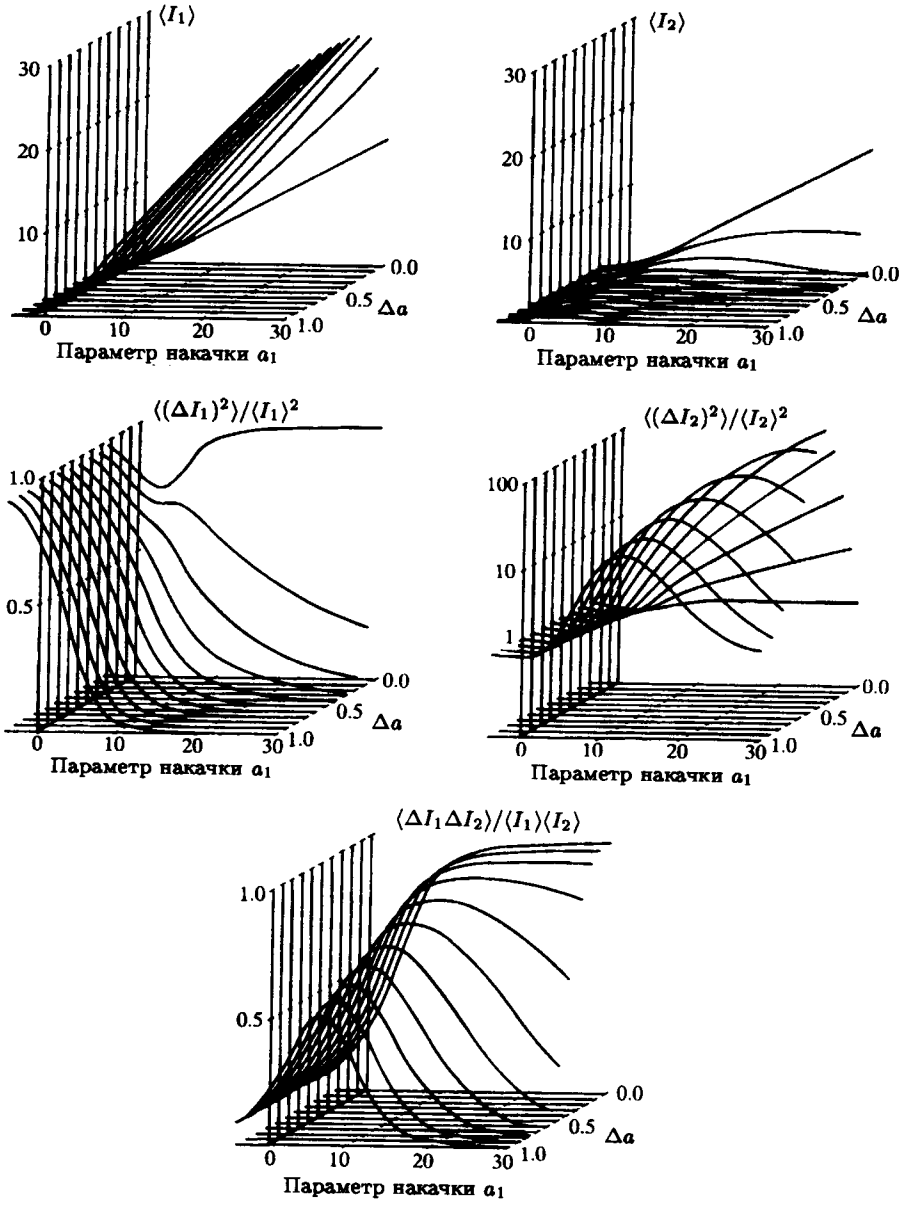


Рис. 19.6. Теоретическая зависимость средних интенсивностей двух мод кольцевого лазера от параметра накачки a_1 при различных значениях Δa и при $\xi = 2$ (Singh and Mandel, 1979)

Рис. 19.7. Теоретическая зависимость относительных флуктуаций интенсивности двух мод кольцевого лазера от параметра накачки a_1 при различных значениях Δa и при $\xi = 2$ (Singh and Mandel, 1979)

Рис. 19.8. Теоретическая зависимость взаимной корреляции двух мод кольцевого лазера от параметра накачки a_1 при различных значениях Δa и при $\xi = 2$ (Singh and Mandel, 1979)

ность одной моды равна нулю, а интенсивность второй — нет, что означает переключение возбуждения между двумя противоположно распространяющимися модами. Мы еще вернемся к обсуждению данного явления в разд. 19.4.

19.3. Аналогия с фазовым переходом

Как и в предыдущей главе, удобно провести аналогию между поведением лазерного поля и некоторыми типами фазовых переходов (см., например, Graham, 1975; Haken, 1975, 1977, гл. 6 и 7). Для простоты начнем с детерминированных уравнений движения, а затем добавим члены, представляющие квантовый шум. В стационарном состоянии, когда производные по времени обращаются в нуль, из уравнений (19.1.16) при $q_1 = 0 = q_2$ получаем, что

$$(a_1 - I_1 - \xi I_2)I_1 = 0, \quad (a_2 - I_2 - \xi I_1)I_2 = 0. \tag{19.3.1}$$

В общем случае решение этих двух связанных уравнений содержит три различных ветви, которые обозначим через (а), (б) и (в), и которые имеют следующий вид (Mandel, Roy and Singh, 1981)

$$\text{(а)} \quad I_1 = 0, \quad \begin{cases} I_2 = a_2 = a - \frac{1}{2}\Delta a, & \text{если } a_2 > 0, \\ I_2 = 0, & \text{если } a_2 < 0, \end{cases} \tag{19.3.2}$$

$$\text{(б)} \quad I_2 = 0, \quad \begin{cases} I_1 = a_1 = a + \frac{1}{2}\Delta a, & \text{если } a_1 > 0, \\ I_1 = 0, & \text{если } a_1 < 0, \end{cases} \tag{19.3.3}$$

$$\text{(в)} \quad \begin{aligned} I_1 &= \frac{a_2\xi - a_1}{\xi^2 - 1} = \frac{a}{\xi + 1} - \frac{\frac{1}{2}\Delta a}{\xi - 1}, \\ I_2 &= \frac{a_1\xi - a_2}{\xi^2 - 1} = \frac{a}{\xi + 1} + \frac{\frac{1}{2}\Delta a}{\xi - 1}, \end{aligned} \tag{19.3.4}$$

при условии, что

$$-\frac{2a}{\xi + 1} \leqslant \frac{\Delta a}{\xi - 1} \leqslant \frac{2a}{\xi + 1},$$

где

$$a \equiv \frac{1}{2}(a_1 + a_2), \quad \Delta a \equiv a_1 - a_2 \tag{19.3.5}$$

есть среднее и разность двух параметров накачки. На рис. 19.9 показана интенсивность моды I_1, как функция параметра асимметрии Δa при фиксированном a для нескольких значений константы связи ξ. Значение I_1 всегда равно нулю при больших отрицательных Δa и всегда равно $a_1 = a + \frac{1}{2}\Delta a$ при больших положительных Δa. Но эти две ветви решения связываются линией, наклон которой зависит от ξ. Наклон положителен при $\xi < 1$, отрицателен при $\xi > 1$ и бесконечен при $\xi = 1$. Отрицательный наклон соответствует многозначному и, в общем, нестабильному решению, и система, описываемая графиком типа $DACB$, должна проявлять гистерезис со скачком от A к B, когда Δa становится больше $2a/3$ и со скачком от C к D, когда Δa становится меньше $-2a/3$. Таким образом, решение, задаваемое формулой (19.3.4), у которого интенсивности обеих мод не равны нулю, нестабильно, когда константа связи ξ превышает 1. Следовательно, значение $\xi = 1$ разделяет две области, отвечающие довольно разному поведению лазера. На рис. 19.10 показано решение связанных, зависящих от времени уравнений движения (без квантового шума), при $a_1 = a_2$ и $\xi = 2$. Необходимо отметить, что в стационарном состоянии интенсивность той или иной моды, в зависимости от начальных условий, обращается в нуль.

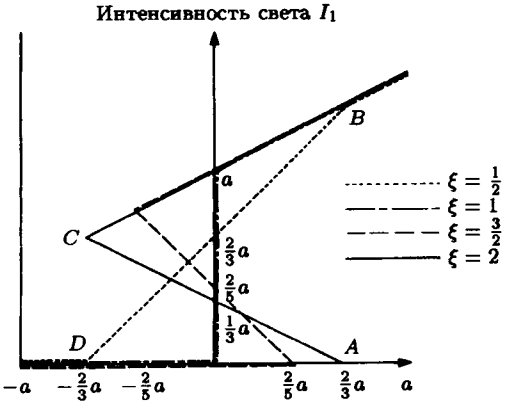


Рис. 19.9. Зависимость интенсивности I_1 одной моды лазера от Δa при различных значениях константы связи ξ в стационарном состоянии согласно детерминированным уравнениям движения (Mandel, Roy and Singh, 1981)

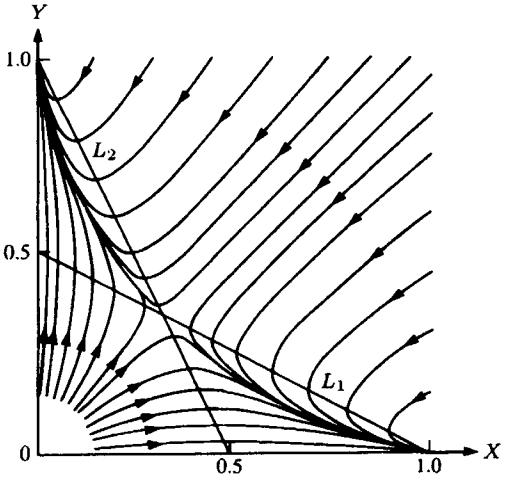


Рис. 19.10. Кривые, иллюстрирующие решения детерминированных уравнений движения для двух интенсивностей лазерных мод I_1 и I_2 (обозначенных здесь через X и Y) при $a_1 = a_2 = 1$ и $\xi = 2$ (Lamb, 1964)

19.3.1. Минимумы потенциалов

Эти выводы основаны на детерминированных уравнениях движения и должны быть пересмотрены в рамках статистического решения, задаваемого выражениями (19.2.7) или (19.2.8). Вследствие этого, найдем наиболее вероятные значения интенсивностей двух мод I_1, I_2 из условия минимума потенциала U. Мы опять сталкиваемся с различными ветвями решения, которые будем рассматривать по отдельности.

(а) $a_1 < 0$, $a_2 < 0$.
Из (19.2.7) следует, очевидно, что ниже порога, когда оба a_1 и a_2 отрицательны, потенциал U имеет наименьшее возможное значение, когда

$$I_1 = 0 = I_2, \tag{19.3.6}$$

что соответствует наиболее вероятному состоянию лазера. Эту фазу мы будем обозначать через I.

(б) $a_1 < 0$, $a_2 > 0$.
Из (19.2.7) следует, что потенциал U наименьший, когда $I_1 = 0$ и $I_2 \neq 0$, и оптимальное значение I_2 определяется условием $\partial U/\partial I_2 = 0$ или $-a_2 + I_2 + \xi I_1 = 0$, так что

$$I_1 = 0, \quad I_2 = a_2. \tag{19.3.7}$$

(в) $a_2 < 0$, $a_1 > 0$.
Таким же образом устанавливаем, что наиболее вероятное состояние имеет вид

$$I_1 = a_1, \quad I_2 = 0. \tag{19.3.8}$$

Область, где a_1 и a_2 оба положительны, требует дальнейшей детализации.

(г) $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_2\xi > a_1$.
Полагая $\partial U/\partial I_2 = 0$ и считая I_1 очень малым, легко доказать, что состояние

$$I_1 = 0, \quad I_2 = a_2 \tag{19.3.9}$$

соответствует локальному минимуму. Это решение совпадает с решением (19.3.7), так что области (б) и (г) объединяются в одну фазу, характеризуемую условиями $a_2 > 0$, $a_2\xi > a_1$, которую будем обозначать через II.

(д) $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1\xi > a_2$.
Подобным же образом можно показать, что состояние

$$I_1 = a_1, \quad I_2 = 0 \tag{19.3.10}$$

представляет локальный минимум. Следовательно, (в) и (д) можно также объединить в одну фазу, характеризуемую условиями $a_1 > 0$, $a_1\xi > a_2$, которую будем обозначать через III.

(е) $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_2\xi < a_1$, $a_1\xi < a_2$.
Приравнивая обе частные производные $\partial U/\partial I_1$ и $\partial U/\partial I_2$ к нулю, получаем формулы

$$-a_1 + I_1 + \xi I_2 = 0, \quad -a_2 + I_2 + \xi I_1 = 0.$$

Данная система уравнений имеет ненулевое решение, совпадающее с (19.3.4), а именно

$$I_1 = \frac{a_2\xi - a_1}{\xi^2 - 1}, \quad I_2 = \frac{a_1\xi - a_2}{\xi^2 - 1}. \tag{19.3.11а}$$

Однако эти решения соответствуют локальному минимуму потенциала U, только если

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial I_1 \partial I_2}\right)^2 < \frac{\partial^2 U}{\partial I_1^2}\frac{\partial^2 U}{\partial I_2^2},$$

т.е. если

$$\xi < 1. \tag{19.3.11б}$$

При этом из выражений (19.3.11а), очевидно, следуют ограничения $a_2\xi < a_1$ и $a_1\xi < a_2$. Обозначим эту фазу через IV. С другой стороны, когда $\xi > 1$, не существует минимума потенциала, при котором I_1 и I_2 обе не равны нулю, и фаза IV не существует. Можно показать, что в этом случае координаты, задаваемые выражением (19.3.11а), соответствуют седловой точке потенциала. Позже мы рассмотрим ситуацию $\xi > 1$ более тщательно.

19.3.2. Случай константы связи $\xi < 1$: фазовый переход второго рода

Наиболее вероятные интенсивности I_1 и I_2 играют роль параметров порядка для фазового перехода лазерного поля, так же как и для одномодового лазера. Но в результате того, что имеется два параметра, вместо одного, мы обнаруживаем четыре различные фазы при $\xi < 1$. Последние показаны на фазовой диаграмме на рис. 19.11*а*, которая воспроизводит схему Агарвала и Даттагупта (Agarwal and Dattagupta, 1982). Толстые линии разделяют различные стабильные фазы. В фазе I оба параметра порядка обращают-

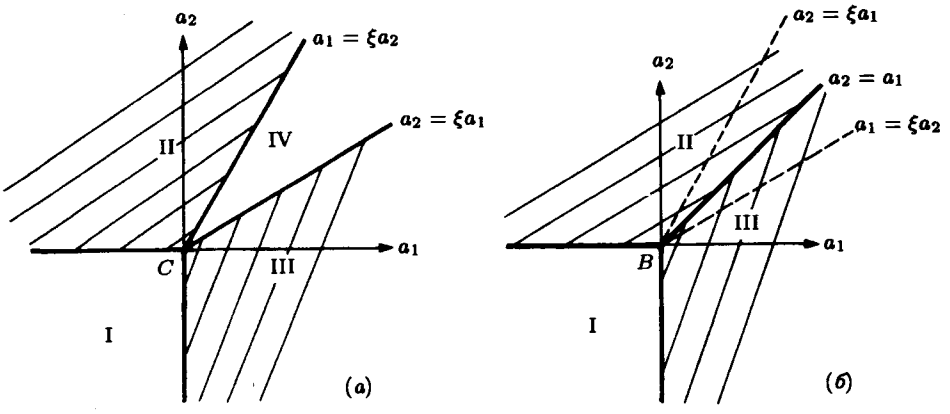


Рис. 19.11. Фазовые диаграммы, иллюстрирующие различные типы решений уравнения Фоккера — Планка для двухмодового лазера: *а* — константа связи $\xi < 1$ и *б* — константа связи $\xi > 1$.

ся в нуль. В фазах II и III один из двух параметров порядка равен нулю, тогда как другой не равен нулю. В фазе IV оба параметра не равны нулю. Обе фазы встречаются в точке C, которая является критической точкой. Если подставить наиболее вероятные значения интенсивностей в потенциал U, мы получим наиболее вероятный потенциал $U_{\mathrm{m}}(a_1, a_2, \xi)$ (ср. разд. 18.3), который, в некоторой степени, аналогичен термодинамическому потенциалу типа свободной энергии. С помощью (19.2.7) и формул (19.3.6)—(19.3.11) находим для четырех фаз

$$\begin{aligned}
&U_{\mathrm{m}} = 0 && \text{в фазе I,}\\
&U_{\mathrm{m}} = -\tfrac{1}{4}a_2^2 && \text{в фазе II,}\\
&U_{\mathrm{m}} = -\tfrac{1}{4}a_1^2 && \text{в фазе III,}\\
&U_{\mathrm{m}} = -\left[\tfrac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2) - \tfrac{1}{2}a_1 a_2 \xi\right]/(1-\xi^2) && \text{в фазе IV.}
\end{aligned} \tag{19.3.12}$$

С другой стороны, как и в разд. 18.3, можно определить величины, которые являются аналогами энтропии

$$S_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial a_1}\right)_{\substack{I_1 = I_{\mathrm{m}1}\\ I_2 = I_{\mathrm{m}2}}}, \quad S_2 = \left(\frac{\partial U}{\partial a_2}\right)_{\substack{I_1 = I_{\mathrm{m}1}\\ I_2 = I_{\mathrm{m}2}}},$$

где $I_{\mathrm{m}1}$, $I_{\mathrm{m}2}$ обозначают наиболее вероятные значения интенсивностей I_1, I_2 в соответствующей фазе. Тогда получаем с помощью (19.2.7), (19.3.6)—(19.3.11) следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&S_1 = 0, \quad S_2 = 0 && \text{в фазе I,}\\
&S_1 = 0, \quad S_2 = -\tfrac{1}{2}a_2 = -\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{4}\Delta a && \text{в фазе II,}\\
&S_1 = -\tfrac{1}{2}a_1 = -\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}\Delta a, \quad S_2 = 0 && \text{в фазе III,}\\
&S_1 = \frac{-a_1 + a_1\xi}{2(1-\xi^2)}, \quad S_2 = \frac{-a_2 + a_1\xi}{2(1-\xi^2)} && \text{в фазе IV.}
\end{aligned} \tag{19.3.13}$$

Легко показать, что все эти энтропии являются непрерывными на границах между фазами. Следовательн
если $\xi < 1$, то кольцевой лазер демонстрирует *непрерывный* или *фазовый переход второго рода*, точно т
же, как одномодовый лазер (ср. разд. 18.3).

19.3.3. Случай константы связи $\xi > 1$: фазовый переход первого рода

Если $\xi > 1$, как в случае однородно уширенного двухмодового лазера, фазовая диаграмма меняетс
(Hembenne and Sargent, 1975). Мы уже видели, что фаза IV отсутствует в этом случае. Однако, согласн
определению, фазы, ранее обозначенные через II и III, теперь частично перекрываются в области $a_1\xi$
$< a_2 < a_1\xi$, поскольку существуют положительные значения параметров накачки a_1, a_2, при которы
оба неравенства $a_2\xi > a_1$ и $a_1\xi > a_2$ выполняются одновременно. Но, поскольку минимальный потенциа
равен $-\frac{1}{4}a_2^2$ в фазе II и равен $-\frac{1}{4}a_1^2$ в фазе III, состояние II будет, в действительности, более вероятным
чем состояние III в области $a_1 < a_2$, тогда как состояние III будет, в действительности, более вероятным
чем состояние II в области $a_2 < a_1$. Ясно, что линия $a_1 = a_2$ разделяет эти две области. Если определять
фазу через наиболее вероятное состояние, то в случае $\xi > 1$, нужно переопределить фазу II, как области
$a_2 > 0$, $a_2 > a_1$, а фазу III, как область $a_1 > 0$, $a_1 > a_2$. Соответствующая фазовая диаграмма приведена
на рис. 19.11*б*. Наиболее вероятные значения потенциала для данных трех фаз равны

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{m}} &= 0 && \text{в фазе I,} && a_1 < 0, a_2 < 0, \\ U_{\mathrm{m}} &= -\tfrac{1}{4}a_2^2 && \text{в фазе II,} && a_2 > 0, a_2 > a_1, \\ U_{\mathrm{m}} &= -\tfrac{1}{4}a_1^2 && \text{в фазе III,} && a_1 > 0, a_1 > a_2. \end{aligned} \tag{19.3.14}$$

Для соответствующих энтропий находим

$$\begin{aligned} &S_1 = 0, \quad S_2 = 0 && \text{в фазе I,} \\ &S_1 = 0, \quad S_2 = -\tfrac{1}{2}a_2 = -\tfrac{1}{2}(a - \tfrac{1}{2}\Delta a) && \text{в фазе II,} \\ &S_1 = -\tfrac{1}{2}a_1 = -\tfrac{1}{2}(a + \tfrac{1}{2}\Delta a), \quad S_2 = 0 && \text{в фазе III,} \end{aligned} \tag{19.3.15}$$

и мы видим, что обе S_1 и S_2 терпят разрыв на линии $a_1 = a_2$, разделяющей фазы II и III. Следовательно, фазовый переход через линию $a_1 = a_2$ на рис. 19.11*б* является *разрывным* или *фазовым переходом первого рода*. Точка B, где встречаются все линии, есть критическая точка двухмодового лазера. Фазовая диаграмма в окрестности точки B будет аналогична диаграмме для слабо анизотропного антиферромагнетика (Agarwal and Dattagupta, 1982), если два параметра накачки a_1, a_2, характеризующие состояние системы, заменить приложенным магнитным полем и температурой. Парамагнитная фаза отделена от антиферромагнитной фазы и от так называемой спин-флоп фазы линиями фазового перехода второго рода, тогда как антиферромагнитная и спин-флоп фазы разделяются линией фазового перехода первого рода.

На рис. 19.12 приведен трехмерный график зависимости потенциала $U(I_1, I_2)$ от I_1, I_2, когда $a_1 = 15$, $a_2 = 14.5$, как для случая $\xi = 0.5$, так и для случая $\xi = 2$. Первый случай соответствует фазе IV из диаграммы 19.11*а*, тогда как второй соответствует фазе III из диаграммы 19.11*б*. Ясно, что ситуации $\xi = 0.5$ и $\xi = 2$ коренным образом различаются. В первом случае U имеет один минимум, тогда как во втором случае U имеет два локальных минимума, один при $I_1 \approx 15$, $I_2 = 0$ а второй при $I_1 = 0$, $I_2 \approx 14.5$ и эти минимумы разделены седлом. Оба минимума отвечают состояниям лазера с высокой степенью вероятности, но первый минимум чуть ниже и поэтому соответствует более вероятному состоянию. Трехмерные графики позволяют представить то, каким образом фазовый переход второго рода меняется на фазовый переход первого рода при увеличении ξ выше единицы.

Иногда полезно проинтегрировать по одной из переменных и иметь дело только с одной модой лазера (Mandel, Roy and Singh, 1981). Для этого можно воспользоваться формулой (19.2.11), определяющей распределение вероятности $\mathscr{P}_1(I_1)$ интенсивности моды 1 в стационарном состоянии, которое запишем следующим образом

$$\mathscr{P}_1(I_1) = \text{const} \times \mathrm{e}^{-U_1(I_1)}, \tag{19.3.16а}$$

где одномодовый потенциал $U_1(I_1)$ имеет вид

$$U_1(I_1) = -\frac{1}{4}(\xi^2 - 1)I_1^2 + \frac{1}{2}(a_2\xi - a_1)I_1 - \frac{1}{4}a_2^2 - \ln[1 - \operatorname{erf}(\tfrac{1}{2}\xi I_1 - \tfrac{1}{2}a_2)]. \tag{19.3.16б}$$

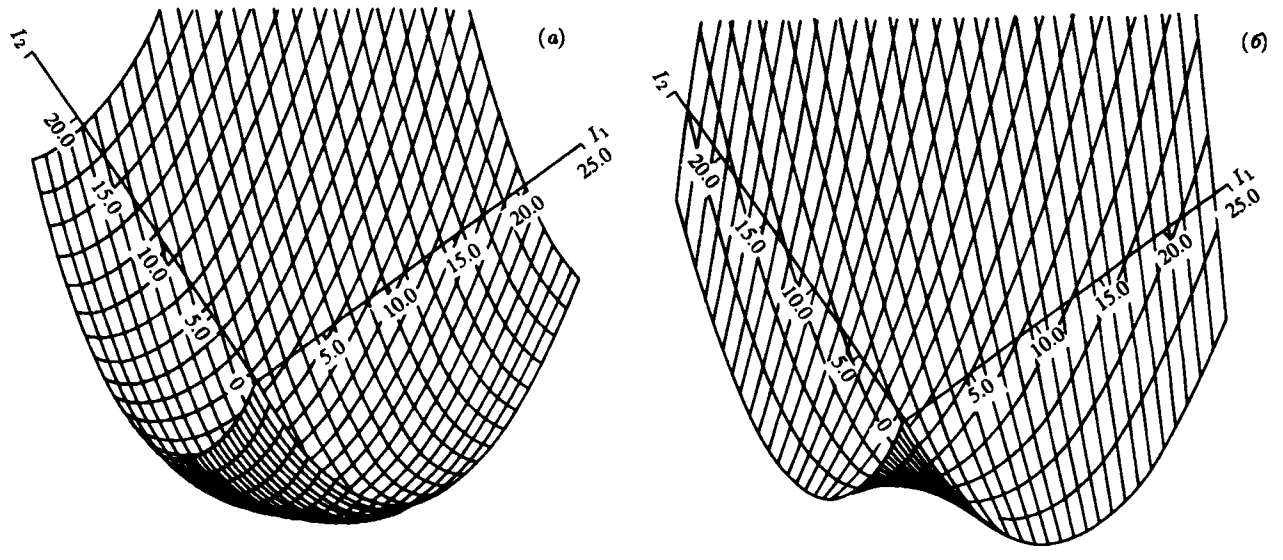


Рис. 19.12. Графики, иллюстрирующие форму потенциала $U(I_1, I_2)$ при $a_1 = 15$, $a_2 = 14.5$: *а* — константа связи $\xi = 0.5$ и *б* — константа связи $\xi = 2$ (Lett, Christian, Singh and Mandel, 1981)

На рис. 19.13 показаны графики потенциала $U_1(I_1)$ для нескольких значений константы связи ξ при фиксированных значениях параметров накачки a_1 и Δa. Пока $\xi \leqslant 1$, потенциал $U_1(I_1)$ имеет один минимум чуть ниже значения $I_1 = a_1$, но как только ξ достаточно превышает единицу, потенциал имеет как минимум, так и максимум. Максимум, который наиболее ярко выражен при $\xi = 2$, разделяет два локальных минимума, около значений $I_1 = 0$ и $I_1 = a_1$, которые оба соответствуют наиболее вероятным состояниям. Конечно, интенсивность I_2 не равна нулю всякий раз, когда $I_1 = 0$, и наоборот. Хотя может показаться, что данные состояния стабильны, оба состояния, фактически, лишь метастабильны из-за квантовых флуктуаций. В каком бы состоянии ни была система в некоторый момент времени, она «встретит» рано или поздно достаточно большую флуктуацию, которая вызовет ее переход из одного метастабильного состояния в другое. Время жизни данного состояния зависит от высоты максимума потенциала и, как мы скоро убедимся, может быть довольно большим. В некоторых отношениях лазер в этом состоянии проявляет свойства, которые ассоциируются с квантово-механическим туннельным прохождением через потенциальный барьер.

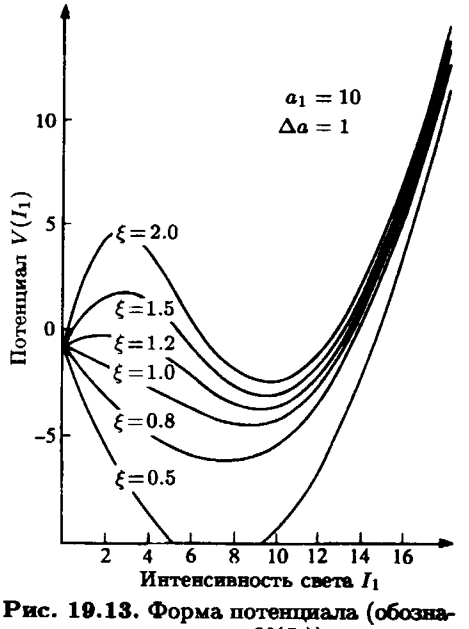


Рис. 19.13. Форма потенциала (обозначенного здесь через $V(I_1)$) одной моды двухмодового лазера при различных значениях константы связи ξ, когда $a_1 = 10$, $\Delta a = 1$ (Mandel, Roy, Singh, 1981)

Чтобы яснее увидеть, каким образом переход между этими двумя метастабильными состояниями соответствует фазовому переходу первого рода, нарисуем еще раз график потенциала $U_1(I_1)$, но теперь при фиксированном значении $\xi = 2$ для нескольких значений параметра накачки a_1 (при этом $\Delta a \equiv a_1 - a_2 = 1$). Вспоминая, что наименьший потенциал соответствует наиболее вероятному значению I_m интенсивности I_1, видим из рис. 19.14, что наиболее вероятная интенсивность равна нулю вплоть до некоторого значения a_1 между 4 и 6, а затем, при больших a_1, скачком принимает ненулевое значение. Пунктирная линия на рис. 19.14 есть годограф наиболее вероятной интенсивности I_m, являющейся параметром порядка фазового перехода. Как обычно, параметр порядка обращается в нуль в неупорядоченной фазе. Отметим, что он имеет точку разрыва с конечным скачком на фазовом переходе. В результате наиболее вероятный потенциал U_m, получаемый подстановкой наиболее вероятной интенсивности I_m в $U_1(I_1, a_1, a_2, \xi)$, имеет разрывную первую производную. Это ясно иллю-

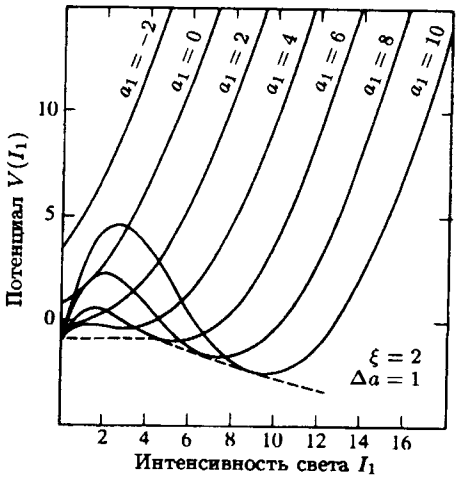


Рис. 19.14. Зависимость потенциала (обозначенного здесь через $V(I_1)$) от интенсивности I_1 одной моды двухмодового лазера при различных значениях параметра накачки a_1, когда $\Delta a = 1$, $\xi = 2$ (Mandel, Roy, Singh, 1981). Пунктирная линия — геометрическое место точек наиболее вероятной интенсивности I_1

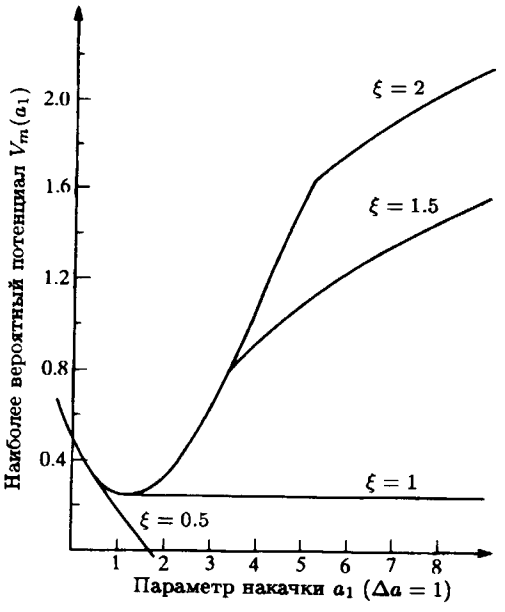


Рис. 19.15. Наиболее вероятный потенциал одной моды двухмодового лазера как функция параметра накачки a_1 при различных значениях константы связи ξ и при $\Delta a = 1$ (Mandel, Roy, Singh, 1981)

стрирует рис. 19.15, где наиболее вероятный потенциал U_m показан как функция от a_1 при нескольких значениях константы связи ξ. Из рисунка видно, что разрыв производной имеется тогда, когда константа связи ξ больше единицы.

Мы уже видели из (19.3.9) и (19.3.10), что нуль и a_1 являются наиболее вероятными значениями I_m интенсивности I_1. Тот же вывод справедлив и в том случае, когда используется одномерный потенциал $U_1(I_1, a_1, a_2, \xi)$ (19.3.16б). Пусть для удобства $a \equiv \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ и $\Delta a \equiv a_1 - a_2$. Анализ (19.3.16б) или рис. 19.14 ясно показывают, что $I_\mathrm{m} = 0$ в случае малых a. Для определения другого значения I_m продифференцируем $U_1(I_1, a, \Delta a, \xi)$ по I_1. Нетрудно найти (Mandel, Roy and Singh, 1981), что ненулевое значение I_m задается пересечением двух кривых

$$y = \left[(\xi^2 - 1)I_1 - a(\xi - 1) + \frac{1}{2}\Delta a(\xi + 1)\right][1 - \operatorname{erf}(\tfrac{1}{2}\xi I_1 - \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{4}\Delta a)],$$

$$y = \frac{2\xi}{\sqrt{\pi}} \exp -\tfrac{1}{4}(\xi I_1 - a + \tfrac{1}{2}\Delta a)^2,$$

которое лежит на высокоинтенсивном конце гауссовской функции. При условии, что a не слишком мало, можно воспользоваться асимптотическим разложением функции ошибок (Abramowitz and Stegun, 1965, разд. 7)

$$1 - \operatorname{erf} z \sim \frac{1}{z\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-z^2} \left(1 - \frac{1}{2z^2} + \ldots\right) \quad \text{при} \quad z \to \infty, \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4}. \tag{19.3.17}$$

Из этого разложения следует, что I_m является решением уравнения

$$(\xi^2 - 1)I_\mathrm{m} - a(\xi - 1) + \frac{1}{2}\Delta a(\xi + 1) = \xi\left(\xi I_\mathrm{m} - a + \frac{1}{2}\Delta a\right),$$

т.е.

$$I_{\rm m} = a + \frac{1}{2}\Delta a. \tag{19.3.18}$$

Таким образом, двумя наиболее вероятными значениями $I_{\rm m}$ являются 0 и $a_1 = a + \frac{1}{2}\Delta a$. Для того, чтобы определить какое из них более вероятно, необходимо вычислить разность между потенциалами $U_1(0, a, \Delta a)$ и $U_1(a_1, a, \Delta a)$. В том же приближении находим из (19.3.16б), что

$$U_1(0, a, \Delta a) - U_1(a_1, a, \Delta a) = \frac{1}{2}a\Delta a - \ln\{\sqrt{\pi}[(\xi - 1)a + \tfrac{1}{2}(\xi + 1)\Delta a]\}.$$

Следовательно, переключение с одного минимума U_1 на другой происходит в точке $a = a_0$, которая является решением трансцендентного уравнения

$$\frac{1}{2}a_0\Delta a = \ln\{\sqrt{\pi}[(\xi - 1)a_0 + \tfrac{1}{2}(\xi + 1)\Delta a]\}. \tag{19.3.19}$$

Если $\xi = 2$ и параметр Δa очень мал, то порядок приближенного решения равен

$$a_0 \sim \frac{10}{\Delta a}. \tag{19.3.20}$$

Следовательно, наиболее вероятное значение $I_{\rm m}$ интенсивности I_1 есть

$$I_{\rm m} = \begin{cases} 0, & \text{когда } a < a_0, \\ a + \frac{1}{2}\Delta a, & \text{когда } a > a_0. \end{cases} \tag{19.3.21}$$

Вспоминая, что величина параметра накачки a, взятая с обратным знаком, есть аналог температуры термодинамической системы, можно теперь ввести энтропию $S(a, \Delta a)$, дифференцируя потенциал по параметру накачки, т.е.

$$S_1(a, \Delta a) = \left[\frac{\partial U_1(I_1, a, \Delta a)}{\partial a}\right]_{I_1 = I_{\rm m}}. \tag{19.3.22}$$

Из (19.3.16б) следует, что

$$\left[\frac{\partial U_1(I_1, a, \Delta a)}{\partial a}\right]_{I_1 = I_{\rm m}} =$$

$$= \frac{1}{2}(\xi - 1)I_{\rm m} - \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\Delta a\right) - \frac{\exp[-\frac{1}{4}(\xi I_{\rm m} - a + \frac{1}{2}\Delta a)^2]}{\sqrt{\pi}[1 - \operatorname{erf}(\frac{1}{2}\xi I_{\rm m} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}\Delta a)]},$$

и можно использовать (19.3.21) для подстановки подходящих значений $I_{\rm m}$. Если a превышает значение, приблизительно равное 3, и $I_{\rm m} = a + \frac{1}{2}\Delta a$, то можно использовать приближение $\operatorname{erf}(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}\Delta a) \approx -1$ и асимптотическое разложение (19.3. 17) для $1 - \operatorname{erf}(\frac{1}{2}\xi I_{\rm m} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}\Delta a)$. Это приводит к следующему результату:

$$S_1(a, \Delta a) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\Delta a\right) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp[-\frac{1}{4}(a - \frac{1}{2}\Delta a)^2], & (a < a_0), \\ -\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\Delta a\right) - \frac{1}{2}\Delta a - \dfrac{1}{(\xi - 1)a + \frac{1}{2}(\xi + 1)\Delta a}, & (a > a_0). \end{cases} \tag{19.3.23}$$

Энтропия имеет разрыв при $a = a_0$, так что лазер имеет в этой точке разрывный или фазовый переход первого рода. Этот результат характерен для бистабильного потенциала. Действительно, потенциалы общего вида (19.2.4) использовались для описания фазовых переходов первого рода в других системах [обсуждение фазовых переходов первого рода имеется, например, в работе (Patashinskiĭ and Pokrovskiĭ, 1979, гл. 8)]. Пример энтропии, задаваемой формулой (19.3.23), показан на рис. 19.16.

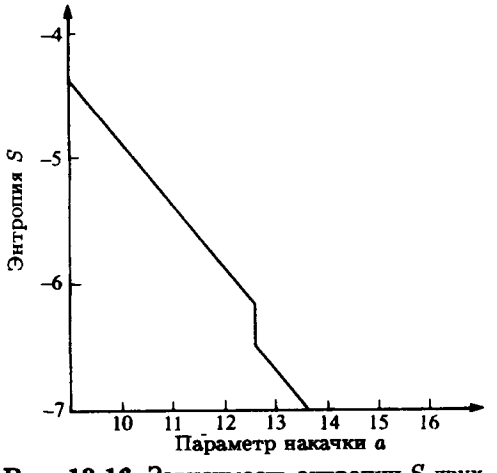


Рис. 19.16. Зависимость энтропии S двухмодового кольцевого лазера от параметра накачки a [по формуле (19.3.23)] при $\Delta a = 1/2$ (Mandel, 1982)

19.3.4. Скрытая теплота фазового перехода

Для больших a_0 скачок ΔS_1 энтропии определяется формулой

$$\Delta S_1 \equiv S_1(a_0-, \Delta a) - S_1(a_0+, \Delta a) \approx \frac{1}{2}\Delta a + \frac{1}{(\xi-1)a_0 + \frac{1}{2}(\xi+1)\Delta a}. \tag{19.3.24}$$

Если умножить это выражение на a_0, то получим величину L, являющуюся аналогом *скрытой теплоты*, связанной с фазовым переходом (Mandel, 1982), а именно,

$$L = a_0\,[S_1(a_0-, \Delta a) - S_1(a_0+, \Delta a)] \approx \frac{1}{2}a_0\Delta a + \frac{a_0}{(\xi-1)a_0 + \frac{1}{2}(\xi+1)\Delta a}. \tag{19.3.25}$$

В случае $\xi = 2$, как для однородно уширенного кольцевого лазера, используя оценочное соотношение (19.3.20), находим интересный, удивительно общий результат, что $L \sim 6$ в наших безразмерных единицах.

Бистабильная форма потенциала $U_1(I_1)$ в случае $\xi = 2$ отражается, конечно, в двухпиковой форме распределения вероятности $\mathscr{P}_1(I_1)$, задаваемого формулой (19.2.11). На рис. 19.17 показаны графики $\mathscr{P}_1(I_1)$ для трех значений Δa при $a_1 = 15$ (Singh and Mandel, 1979). Каждая плотность вероятности состоит из

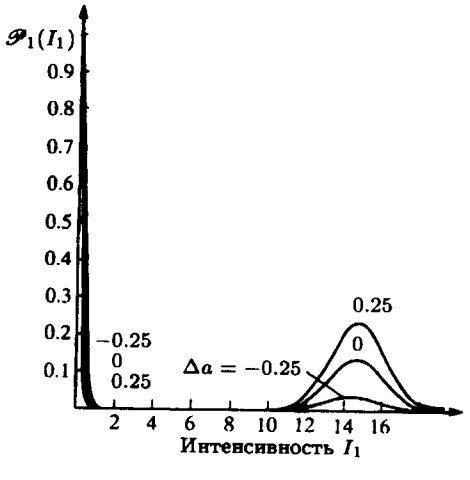


Рис. 19.17. Теоретическая форма распределения вероятности $\mathscr{P}_1(I_1)$ интенсивности I_1 одной моды кольцевого лазера при трех значениях Δa и при $a_1 = 15$ и $\xi = 2$ (Singh and Mandel, 1979)

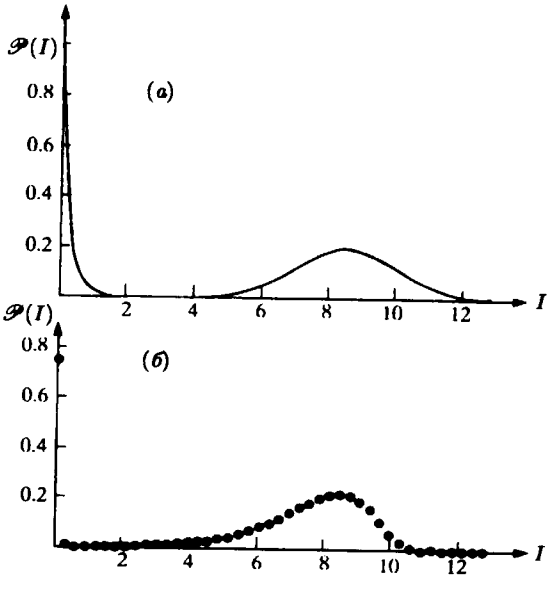


Рис. 19.18. Сравнение теоретической *а* и экспериментальной *б* форм распределения вероятности $\mathscr{P}(I)$ (Singh and Mandel, 1981)

двух почти несвязанных ветвей, одна из которых имеет пик при $I_1 = 0$, а другая — около значения $I_1 = 15$. Если $\Delta a \equiv a_1 - a_2 = 0$, то площади под каждой из этих ветвей точно равны, поскольку имеется одинаковая вероятность того, что мода 1 возбуждена, а мода 2 — нет, или того, что мода 2 возбуждена, а мода 1 — нет. Однако если два параметра накачки не равны, то одно из двух состояний более вероятно, чем другое.

Двухпиковая форма $\mathscr{P}_1(I_1)$ для кольцевого лазера с однородно уширенной активной средой (когда $\xi = 2$) была продемонстрирована экспериментально (Roy and Mandel, 1980; Lett, Christian, Singh and Mandel, 1981). В ходе измерений свет от одной моды кольцевого лазера на красителе направлялся на фотодетектор, а выборка с выхода фотодетектора осуществлялась в течение коротких промежутков времени через регулярные интервалы. Выборки изменяющейся амплитуды сортировались анализатором амплитуды импульсов, что давало $\mathscr{P}_1(I_1)$. На рис. 19.18 показаны результаты одного измерения вместе с соответствующим теоретическим предсказанием по формуле (19.2.11). Видно, что большой острый пик имеет

место при $I_1 = 0$, а более широкий близок к $I_1 = a + \frac{1}{2}\Delta a$, так как кольцевой лазер спонтанно переключается от моды, распространяющейся по часовой стрелке, к моде, распространяющейся против часовой стрелки, и обратно. Измеренное распределение спадает более быстро после пикового значения, чем ожидалось. Это может быть связано с обратным рассеянием света от одной лазерной моды к другой. Однако, существование двух высоко вероятных метастабильных состояний ясно подтверждено.

19.4. Зависящее от времени решение в случае константы связи $\xi = 1$

Поскольку уравнение Фоккера — Планка (19.1.17), описывающее двухмодовый кольцевой лазер, есть четырехмерное дифференциальное уравнение в частных производных, его общее решение представляет собой более сложную проблему, чем решение соответствующего уравнения для одномодового лазера. Однако, в некоторых случаях ситуация упрощается. В частности, если константа связи мод ξ равна единице, и если имеется симметрия, так что $a_1 = a_2$, то двухмодовая лазерная задача может быть решена с той же степенью полноты, что и задача одномодового лазера (ср. разд. 18.6). В случае малой асимметрии $|\Delta a| \ll a$ и $\xi = 1$, теория возмущений позволяет выразить решение через решения для симметричного лазера (Hioe, Singh and Mandel, 1979). С другой стороны, когда лазер работает при существенном превышении порога, можно получить решения, используя квадратичные приближения к минимуму стационарного потенциала (Hioe and Singh, 1981). В этом параграфе мы проиллюстрируем эти методы нахождением зависящих от времени решений для случая $\xi = 1$ и $a_1 = a = a_2$, поскольку такая процедура близка процедуре, использованной ранее в разд. 18.6 для одномодового лазера. Мы будем следовать методу, описанному М-Техрани и Манделем (M-Tehrani and Mandel, 1978a).

19.4.1. Решение методом разделения переменных для случая $\xi = 1$, $a_1 = a_2$

Если в уравнении Фоккера — Планка (19.1.17) положить

$$p(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})k(t), \tag{19.4.1}$$

воспользоваться соотношением (19.1.20) и разделить на $p(\mathbf{x}, t)$, то получим уравнение

$$\frac{1}{k(t)}\frac{dk(t)}{dt} = -\frac{1}{f(\mathbf{x})}\sum_{i=1}^{4}\left[\frac{\partial A_i f(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i^2}\right],$$

где $\mathbf{A}$ — вектор дрейфа, задаваемый формулой (19.1.19). Поскольку левая часть данного уравнения зависит только от t, а правая часть зависит только от $\mathbf{x}$, каждая из них должна быть равна константе λ. В результате получаем два уравнения

$$\frac{dk(t)}{dt} = -\lambda k(t),$$

имеющее решение

$$k(t) = k(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}, \tag{19.4.2}$$

и

$$-\sum_{i=1}^{4}\left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} - \frac{\partial A_i f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right] = \lambda f(\mathbf{x}). \tag{19.4.3}$$

Вследствие четырехмерности мы должны ожидать, что λ и f представляют собой четырехмерные массивы, и мы отметим их четырьмя индексами λ_{lmnp} и $f_{lmnp}(\mathbf{x})$.

Общее, зависящее от времени решение уравнения (19.1.17) имеет вид

$$p(\mathbf{x}, t) = \sum_{l,m,n,p} c_{lmnp} f_{lmnp}(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-\lambda_{lmnp} t}, \tag{19.4.4}$$

где коэффициенты c_{lmnp} определяются из начальных условий. Как и прежде, можно преобразовать дифференциальное уравнение (19.4.3) в уравнение Штурма — Лиувилля с помощью преобразования

$$f_{lmnp}(\mathbf{x}) = [p_s(x)]^{1/2} g_{lmnp}(\mathbf{x}) = \sqrt{B}\, \mathrm{e}^{-U(x)/2} g_{lmnp}(\mathbf{x}), \tag{19.4.5}$$

где $p_s(\mathbf{x})$ — стационарное решение (19.2.5). Функция $g_{lmnp}(\mathbf{x})$ удовлетворяет самосопряженному уравнению

$$\sum_{i=1}^{4} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{4} A_i^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i} \right) \right] g_{lmnp}(\mathbf{x}) = \lambda_{lmnp} g_{lmnp}(\mathbf{x}), \tag{19.4.6}$$

решения которого образуют полное ортогональное множество и могут быть нормированы так, что

$$\int g^*_{lmnp}(\mathbf{x}) g_{l'm'n'p'}\, d^4x = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{nn'}\delta_{pp'}, \tag{19.4.7}$$

$$\sum_{l,m,n,p} g_{lmnp}(\mathbf{x}) g^*_{lmnp}(\mathbf{x}') = \delta^4(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{19.4.8}$$

Вплоть до этого момента процедура совпадала с той, которая использовалась в гл. 18 при решении уравнения одномодового лазера.

Для дальнейшего упрощения дифференциального уравнения в частных производных сделаем замену переменных, сначала переходя к полярным координатам

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 &= \sqrt{I_1}\, \mathrm{e}^{i\phi_1}, \quad 0 \leqslant \phi_1 < 2\pi, \\ x_3 + ix_4 &= \sqrt{I_2}\, \mathrm{e}^{i\phi_2}, \quad 0 \leqslant \phi_2 < 2\pi, \end{aligned} \tag{19.4.9}$$

а затем, вводя переменные

$$\begin{aligned} u &= I_1 + I_2, \quad u \geqslant 0, \\ v &= (I_1 - I_2)/(I_1 + I_2), \quad -1 \leqslant v \leqslant 1, \end{aligned} \tag{19.4.10а}$$

полагая

$$I_1 = \frac{1}{2} u(1+v), \quad I_2 = \frac{1}{2} u(1-v). \tag{19.4.10б}$$

Подставляя в (19.4.6) явное выражение (19.1.19) для вектора дрейфа $\mathbf{A}$, обнаруживаем, что функция $g_{lmnp}(u, v, \phi_1, \phi_2)$ удовлетворяет уравнению (M-Tehrani and Mandel, 1978a, b)

$$\left[u^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{4} u \left(-2a + 3u - \frac{1}{4}(a-u)^2 u + \lambda_{lmnp} \right) + \right.$$

$$\left. + (1-v^2) \frac{\partial^2}{\partial v^2} - 2v \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{2(1+v)} \frac{\partial^2}{\partial \phi_1^2} + \frac{1}{2(1-v)} \frac{\partial^2}{\partial \phi_2^2} \right] g_{lmnp} = 0. \tag{19.4.11}$$

Отметим, что дифференциальные операторы по u и v разделены, так что можно сделать дальнейшее разделение переменных в виде

$$g_{lmnp}(u, v, \phi_1, \phi_2) = S_{lnp}(v) R_{lmnp}(u) V_n(\phi_1) W_p(\phi_2), \tag{19.4.12}$$

где предполагается, что каждая из четырех функций нормирована на единицу. Подстановка (19.4.12) в (19.4.11) сразу приводит к осцилляторным решениям для V_n, W_p

$$V_n(\phi_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-in\phi_1}, \quad W_p(\phi_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-ip\phi_2}, \quad n, p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{19.4.13}$$

тогда как уравнения для $S_{lnp}(v)$ и $R_{lnmp}(u)$ становятся несвязанными и сводятся к следующим:

$$\left[-(1-v^2) \frac{d^2}{dv^2} + 2v \frac{d}{dv} + \frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{1+v} + \frac{p^2}{1-v} \right) \right] S_{lnp}(v) = \beta_{lnp} S_{lnp}(v), \tag{19.4.14}$$

$$\left[u^2 \frac{d^2}{du^2} + 2u \frac{d}{du} + \frac{1}{4} u \left(-2a + 3u - \frac{1}{4} u(a-u)^2 + \lambda_{lmnp} \right) \right] R_{lmnp}(u) = \beta_{lnp} R_{lmnp}(u), \tag{19.4.15}$$

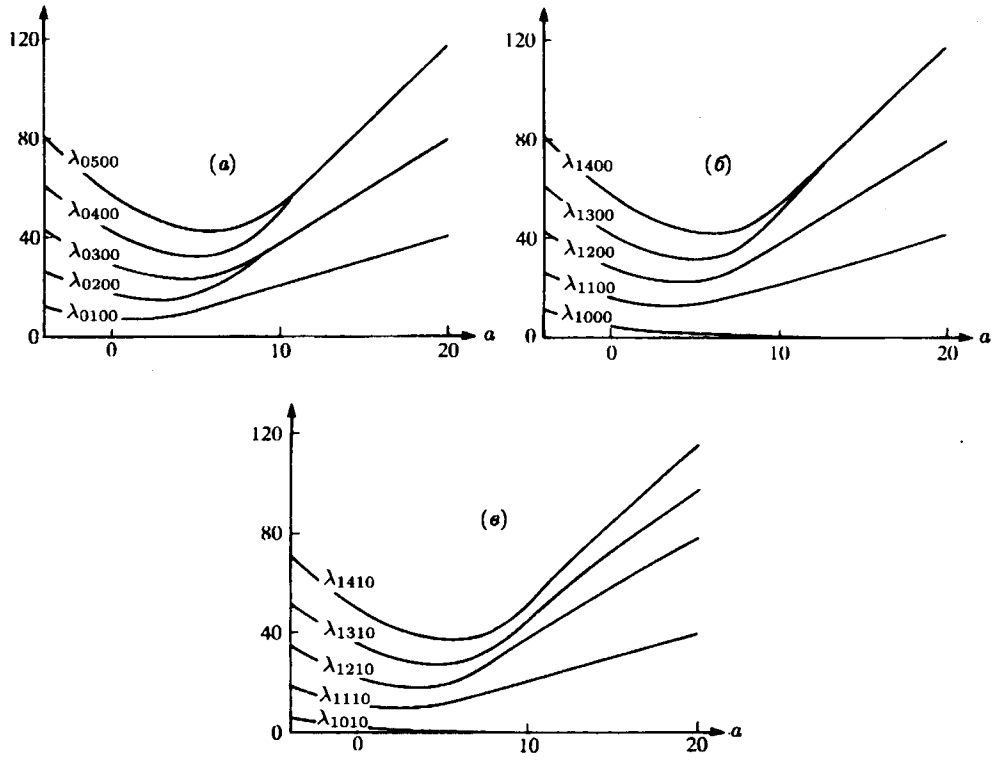


Рис. 19.19. Теоретическая зависимость собственных значений: *а* — λ_{0m00}; *б* — λ_{1m00}; *в* — λ_{1m10} от параметра накачки a при $\xi = 1$ и $\Delta a = 0$ (M-Tehrani and Mandel, 1978a)

где β_{lnp} — собственное значение или параметр, который должен быть определен. С помощью преобразования

$$S_{lnp} = \sqrt{M_{lnp}}(1+v)^{n/2}(1-v)^{p/2}P_l^{(p,n)}(v) \tag{19.4.16}$$

можно показать, что дифференциальное уравнение для $P_l^{(p,n)}(v)$ имеет вид

$$\left\{(1-v^2)\frac{d^2}{dv^2} + [n-p-(n+p+2)v]\frac{d}{dv} + \beta_{lnp} - \frac{1}{4}(n+p)(n+p+2)\right\} P_l^{(p,n)}(v) = 0, \tag{19.4.17}$$

и его решением являются полиномы Якоби $P_l^{(p,n)}(v)$ (см., например, Gradshteyn and Ryzhik, 1980, с. 1036, 8.964), причем

$$\beta_{lnp} = l(l+n+p+1) + \frac{1}{4}(n+p)(n+p+2), \quad l = 0,1,2,\ldots. \tag{19.4.18}$$

Тогда функции $S_{lnp}(v)$ будут ортогональными, с весом, равным единице, если константа нормировки M_{lnp} выбрана так, что

$$S_{lnp}(v) = \left[\frac{(2l+n+p+1)}{2^{n+p+1}}\frac{l!(l+n+p)!}{(l+n)!(l+p)!}\right]^{1/2}(1+v)^{n/2}(1-v)^{p/2}P_l^{(p,n)}(v). \tag{19.4.19}$$

Полиномы Якоби обычно определяются для неотрицательных целых n, p, но, с некоторым ограничением, их можно обобщить для отрицательных целых n, p. Однако, для вычисления наиболее важных корреляционных функций лазерного поля нам потребуются только комбинации $n = 0 = p$, $n = 1$, $p = 0$, $n = 0$, $p = 1$, для которых полиномы Якоби сводятся к полиномам Лежандра и присоединенным функциям Лежандра.

В заключение обратимся к дифференциальному уравнению (19.4.15) для $R_{lnmp}(u)$. С помощью преобразований

$$u = y^2, \quad y \geqslant 0, \quad R_{lmnp}(y^2) = 2y^{-3/2}\psi_{lmnp}(y) \tag{19.4.20}$$

легко показать, что $\psi_{lmnp}(y)$ является решением одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{d^2\psi_{lmnp}(y)}{dy^2} + V_{lnp}(y)\psi_{lmnp}(y) = \lambda_{lmnp}\psi_{lmnp}(y), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{19.4.21}$$

где «потенциал» $V_{lnp}(y)$, задается формулой

$$V_{lnp}(y) = \left[4l(l+n+p+1) + (n+p)(n+p+2) + \frac{3}{4}\right] \Big/ y^2 + 2a + \left(\frac{1}{4}a^2 - 3\right) y^2 - \frac{1}{2}ay^4 + \frac{1}{4}y^6, \tag{19.4.22}$$

а λ_{lmnp} является соответствующим собственным значением. Хотя в (19.4.22) присутствуют все три индекса l, n, p, некоторые их комбинации приводят к одинаковому потенциалу. Если обозначить через L комбинацию

$$L \equiv 2l + n + p, \tag{19.4.23}$$

то потенциал будет полностью определяться только значением L, и можно записать

$$V_L(y) = \left[L(L+2) + \frac{3}{4}\right] \Big/ y^2 + 2a + \left(\frac{1}{4}a^2 - 3\right) y^2 - \frac{1}{2}ay^4 + \frac{1}{4}y^6. \tag{19.4.24}$$

Таким образом, можно заменить три индекса l, n, p на L и записать $\psi_{Lm}(y)$, $R_{Lm}(y^2)$, λ_{Lm} для собственных функций и собственных значений. Однако, мы все же сохраним более длинное обозначение для функций $S_{lnp}(v)$, $V_n(\phi_1)$, $W_p(\phi_2)$.

Решением уравнения Шредингера (19.4.21), в принципе, будет решена задача нахождения зависящего от времени решения уравнения Фоккера — Планка. Интересно отметить, что уравнение Шредингера опять является одномерным, как и в случае одномодового лазера, так что собственные функции можно выбрать действительными, и что потенциал удивительно похож в обоих случаях [ср. (18.6.17)]. К сожалению, пока не найдено аналитическое решение данного уравнения, хотя имеются его численные решения. На рис. 19.19 показаны графики некоторых собственных значений типа λ_{0m00}, λ_{1m00}, λ_{1m10}, как функций от a. Необходимо отметить, что λ_{1000} и λ_{1010}, в отличие от других собственных значений, стремятся к нулю при увеличении параметра накачки a. Как всегда, наименьшее собственное значение

$$\lambda_{0000} = 0, \tag{19.4.25}$$

и соответствующая собственная функция

$$R_{0000}(u) = 2\pi(2B)^{1/2}\exp(\tfrac{1}{4}au + \tfrac{1}{8}u^2) \tag{19.4.26}$$

дают стационарное решение уравнения Фоккера — Планка. Этот вывод, очевидно, следует из (19.4.4). Таким образом, наиболее общее решение уравнения, выраженное через u, v, ϕ_1, ϕ_2, принимает вид

$$p(u, v, \phi_1, \phi_2) = \sum_{l,m,n,p} c_{lmnp}[p_s(u,v)]^{1/2} S_{lnp}(v) R_{lmnp}(u) \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-in\phi_1 - ip\phi_2}. \tag{19.4-27}$$

Из преобразований (19.4.9) и (19.4.10) следует, что элемент объема имеет вид

$$d^4x = \frac{1}{8}u\,du\,dv\,d\phi_1\,d\phi_2, \tag{19.4.28}$$

и собственные функции $S_{lnp}(v)$ и $R_{lmnp}(u)$ нормированы так, что

$$\int_{-1}^{1} |S_{lnp}(v)|^2\,dv = 1, \quad \frac{1}{8}\int_0^\infty |R_{lmnp}(u)|^2\,du = 1. \tag{19.4.29}$$

19.4.2. Функция Грина

Для вычисления различных двухвременны́х корреляционных функций лазерного поля, необходимо также знать функцию Грина́ или плотность условной вероятности $G(\mathbf{x}, t+\tau|\mathbf{x}_0, t)$ того, что $\mathbf{x}$ характеризует состояние в момент времени $t+\tau$, если $\mathbf{x}_0$ характеризовал в момент t. В стационарном состоянии функция $G(\mathbf{x}, t+\tau|\mathbf{x}_0, t)$ зависит только от τ и не зависит от t, и, будучи плотностью вероятности, должна удовлетворять тому же уравнению Фоккера — Планка, что и $p(\mathbf{x}, t)$. Следовательно, $G(\mathbf{x}, t+\tau|\mathbf{x}_0, t)$ должна также выражаться в виде (19.4.4), с тем ограничением, что она сводится к $\delta^4(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ при $\tau = 0$.

Анализ (19.4.4) показывает, что выбор

$$c_{lmnp} = \frac{f^*_{lmnp}(\mathbf{x}_0)}{p_s(\mathbf{x}_0)} = \frac{g^*_{lmnp}(\mathbf{x}_0)}{[p_s(\mathbf{x}_0)]^{1/2}}$$

приводит к правильной функции Грина

$$G(\mathbf{x}, \tau|\mathbf{x}_0, 0) = \sum_{l,m,n,p} \left(\frac{p_s(\mathbf{x})}{p_s(\mathbf{x}_0)}\right)^{1/2} g^*_{lmnp}(\mathbf{x}_0) g_{lmnp}(\mathbf{x})\, \mathrm{e}^{-\lambda_{lmnp}\tau}, \tag{19.4.30}$$

поскольку она сводится к $\delta^4(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ при $\tau = 0$. Таким образом, в стационарном состоянии совместная плотность вероятности $p(\mathbf{x}, t+\tau; \mathbf{x}_0, t)$ $(\tau \geqslant 0)$ определяется формулой

$$p(\mathbf{x}, t+\tau; \mathbf{x}_0, t) = G(\mathbf{x}, \tau|\mathbf{x}_0, 0) p_s(\mathbf{x}_0) = [p_s(\mathbf{x}) p_s(\mathbf{x}_0)]^{1/2} \sum_{l,m,n,p} g^*_{lmnp}(\mathbf{x}_0) g_{lmnp}(\mathbf{x})\, \mathrm{e}^{-\lambda_{lmnp}\tau}. \tag{19.4.31}$$

В новых переменных u, v, ϕ_1, ϕ_2 это выражение принимает вид

$$p(u, v, \phi_1, \phi_2, t+\tau; u_0, v_0, \phi_{10}, \phi_{20}, t) = B \exp(\tfrac{1}{4}au - \tfrac{1}{8}u^2 + \tfrac{1}{4}au_0 - \tfrac{1}{8}u_0^2) \times$$
$$\times \sum_{l,m,n,p} S^*_{lnp}(v_0) S_{lnp}(v) R^*_{lmnp}(u_0) R_{lmnp}(u) \frac{1}{(2\pi)^2}\, \mathrm{e}^{in(\phi_{10}-\phi_1)}\, \mathrm{e}^{ip(\phi_{20}-\phi_2)}\, \mathrm{e}^{-\lambda_{lmnp}\tau}, \quad (\tau \geqslant 0). \tag{19.4.32}$$

19.4.3. Корреляционные функции

Теперь легко вычислить любую двухвременну́ю функцию корреляции. Из (19.4.10) сразу получаем при $s, s' = 1, 2$:

$$\langle I_{s'}(t) I_s(t+\tau)\rangle = \int_0^\infty du_0\, du\, \frac{1}{64} u_0 u \int_{-1}^1 dv_0\, dv\, \frac{1}{4} u_0 u [1-(-1)^{s'} v_0][1-(-1)^s v] \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} d\phi_1\, d\phi_2\, d\phi_{10}\, d\phi_{20}\, p(u, v, \phi_1, \phi_2, t+\tau; u_0, v_0, \phi_{10}, \phi_{20}, t) =$$
$$= \frac{B}{64} \int_0^\infty du_0\, du \int_{-1}^1 dv_0\, dv \exp(\tfrac{1}{4}au - \tfrac{1}{8}u^2 + \tfrac{1}{4}au_0 - \tfrac{1}{8}u_0^2) \frac{1}{4} u_0^2 u^2 [1-(-1)^{s'} v_0][1-(-1)^s v] \times$$
$$\times \sum_{l,m,n,p} R^*_{lmnp}(u_0) R_{lmnp}(u) S^*_{lnp}(v_0) S_{lnp}(v) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi_{10}\, d\phi_{20}\, d\phi_1\, d\phi_2\, \mathrm{e}^{in(\phi_{10}-\phi_1)}\, \mathrm{e}^{ip(\phi_{20}-\phi_2)}\, \mathrm{e}^{-\lambda_{lmnp}\tau} =$$
$$= \frac{B\pi^2}{64} \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \left| \int_0^\infty du\, u^2 \exp(\tfrac{1}{4}au - \tfrac{1}{8}u^2) R_{lm00}(u) \right|^2 \times$$
$$\times \int_{-1}^1 dv_0\, dv\, [1-(-1)^{s'} v_0][1-(-1)^s v] S_{l00}(v_0) S_{l00}(v)\, \mathrm{e}^{-\lambda_{lm00}\tau}.$$

Используя свойства полиномов Якоби, можно показать, что

$$\int_{-1}^1 [1-(-1)^s v] S_{l00}(v)\, dv = \frac{1}{(l+\frac{1}{2})^{1/2}} \left[\delta_{l0} - \frac{2}{3}(-1)^s \delta_{l1}\right],$$

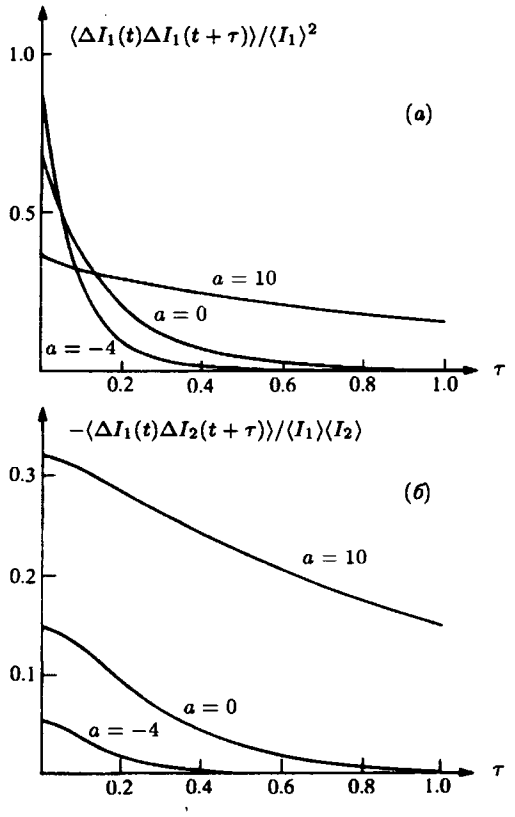


Рис. 19.20. Нормированные функции корреляции интенсивности, вычисленные по формуле (19.4.33) для различных значений параметра накачки a: a — функция автокорреляции; $б$ — функция взаимной корреляции (M-Tehrani and Mandel, 1978a)

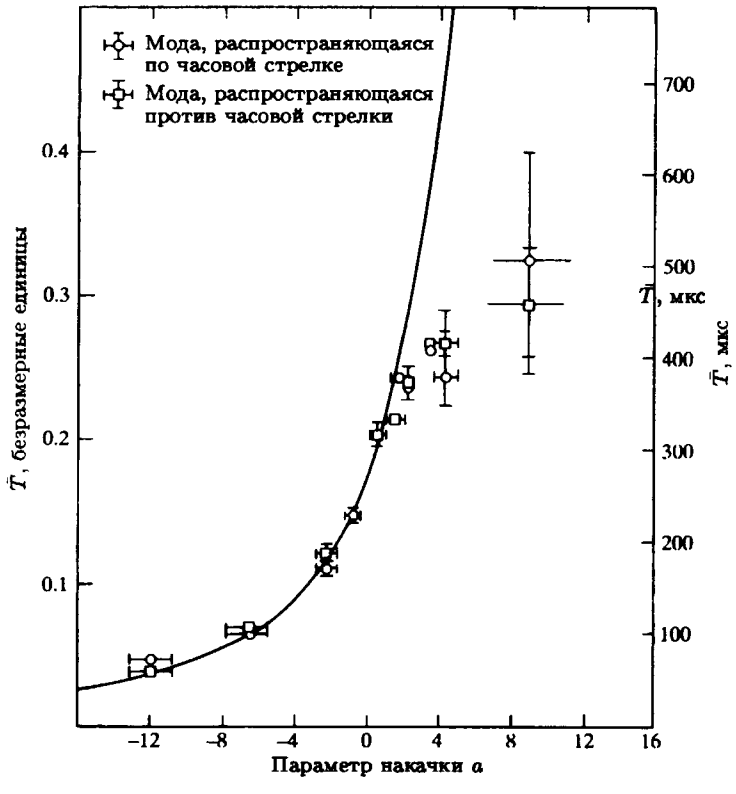


Рис. 19.21. Сравнение теоретической и экспериментальной зависимостей среднего времени автокорреляции интенсивности $\bar{T}$ кольцевого лазера от параметра накачки a. Сплошная кривая — результат расчета по формуле (19.4.33) (Singh and Mandel, 1981)

так что, окончательно,

$$\langle I_{s'}(t)I_s(t+\tau)\rangle = \frac{\pi^2 B}{32}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\left|\int_0^\infty u^2\exp(\tfrac{1}{4}au-\tfrac{1}{8}u^2)R_{0m00}(u)\,du\right|^2 e^{-\lambda_{0m00}\tau}+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{s+s'}}{3}\left|\int_0^\infty u^2\exp(\tfrac{1}{4}au-\tfrac{1}{8}u^2)R_{1m00}(u)\,du\right|^2 e^{-\lambda_{1m00}\tau}\right\},\quad \tau\geqslant 0. \quad (19.4.33)$$

Некоторые примеры функций корреляции, вычисленных по данной формуле, показаны на рис. 19.20. В области порога форма автокорреляционных функций близка к экспоненциальной, однако выше порога становятся заметными вклады дополнительных экспоненциальных членов. Поскольку собственное значение λ_{1000} стремится к нулю при увеличении a, как показано на рис. 19.19, корреляционные функции целиком определяются при больших τ членом $\exp(-\lambda_{1000}\tau)$, а времена корреляции монотонно возрастают с увеличением параметра накачки выше порога. В этом отношении двухмодовый кольцевой лазер существенно отличается от одномодового лазера.

На рис. 19.21 показаны результаты измерений скорости затухания функции корреляции интенсивности в кольцевом лазере при $\xi = 1$, в случае малой асимметрии $\Delta a = 0.1$ между модами. Среднее время затухания $\bar{T}$, определяемое по формуле

$$\bar{T} = \sum_{l=0}^{1}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{lm}}{\lambda_{lm00}} \Big/ \sum_{l=0}^{1}\sum_{m=0}^{\infty} c_{lm} \tag{19.4.34}$$

показано как функция параметра накачки a, где коэффициенты c_{lm}, задаются соответствующими коэффициентами перед $\exp(-\lambda_{lm00}\tau)$ в (19.4.33). Вследствие асимметрии, следует ожидать небольшое различие между константами затухания для двух мод, однако оно слишком мало, чтобы его можно было обнаружить экспериментально. Необходимо отметить, что наблюдаемая зависимость, обычно, соответствует поведению собственного значения λ_{1000} (см. рис. 19.19*б*) в области значений параметра накачки от -12 до 2. Выше $a = 2$ имеются возрастающие отклонения от теоретических зависимостей, которые, как полагают, обязаны обратному рассеянию из одной моды в другую.

Корреляционные функции второго порядка, типа $\langle \mathscr{E}^*(t)\mathscr{E}(t+\tau)\rangle$, можно вычислить подобным же образом. Вследствие статистической независимости двух фаз, $\langle \mathscr{E}_1^*(t)\mathscr{E}_2(t+\tau)\rangle = 0$ и, в силу симметрии, имеем

$$\langle \mathscr{E}_1^*(t)\mathscr{E}_1(t+\tau)\rangle = \langle \mathscr{E}_2^*(t)\mathscr{E}_2(t+\tau)\rangle. \tag{19.4.35}$$

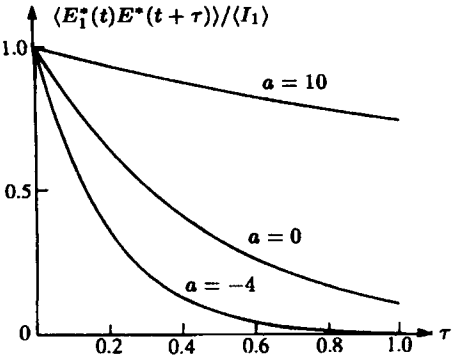


Рис. 19.22. Теоретическая форма нормированной корреляционной функции второго порядка комплексной амплитуды $\mathscr{E}_1(t)$ моды кольцевого лазера, полученная из (19.4.36) при различных значениях параметра накачки a и при $\Delta a = 0$ (M-Tehrani and Mandel, 1978a)

Теперь,

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{E}_1^*(t)\mathscr{E}_1(t+\tau)\rangle &= \int_0^\infty du_0\,du\,\frac{1}{64}u_0 u\int_{-1}^{1} dv_0\,dv\,\left[\frac{1}{4}u_0 u(1+v_0)(1+v)\right]^{1/2}\times \\
&\times \int_0^{2\pi} d\phi_{10}\,d\phi_{20}\,d\phi_1\,d\phi_2\,\mathrm{e}^{i(\phi_1-\phi_{10})}p(u,v,\phi_1,\phi_2,t+\tau;u_0,v_0,\phi_{10},\phi_{20},t) = \\
&= \frac{B}{64}\int_0^\infty du_0\,du\int_{-1}^{1} dv_0\,dv\exp(\tfrac{1}{4}au-\tfrac{1}{8}u^2+\tfrac{1}{4}au_0-\tfrac{1}{8}u_0^2)\left[\frac{1}{4}u^3u_0^3(1+v_0)(1+v)\right]^{1/2}\times \\
\times \sum_{l,m,n,p} R^*_{lmnp}(u_0)R_{lmnp}(u)S^*_{lnp}(v_0)S_{lnp}(v)\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\phi_{10}\,d\phi_{20}\,d\phi_1\,d\phi_2\,\mathrm{e}^{i(n-1)(\phi_{10}-\phi_1)}\,\mathrm{e}^{ip(\phi_{20}-\phi_2)}\,\mathrm{e}^{-\lambda_{lmnp}\tau} = \\
&= \frac{\pi^2 B}{32}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left|\int_0^\infty u^{3/2}\exp(\tfrac{1}{4}au-\tfrac{1}{8}u^2)R_{lm10}(u)\,du\right|^2\left|\int_{-1}^{1}(1+v)^{1/2}S_{l10}(v)\,dv\right|^2\mathrm{e}^{-\lambda_{lm10}\tau}.
\end{aligned}$$

Согласно свойствам полиномов Якоби

$$\int_{-1}^{1}(1+v)^{1/2}S_{l10}(v)\,dv = \sqrt{2}\delta_{l1},$$

так что окончательно

$$\langle \mathscr{E}_1^*(t)\mathscr{E}_1(t+\tau)\rangle\,\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau} = \frac{\pi^2 B}{16}\sum_{m=0}^{\infty}\left|\int_0^\infty u^{3/2}\exp(\tfrac{1}{4}au-\tfrac{1}{8}u^2)R_{1m10}(u)\,du\right|^2\mathrm{e}^{-\lambda_{1m10}\tau}\,\mathrm{e}^{-i\omega_0\tau},\quad \tau\geqslant 0. \tag{19.4.36}$$

Таким образом, спектральная плотность лазерного поля представляет собой сумму лоренцевых функций, имеющих различную ширину и центрированных на частоте ω_0. Однако поскольку собственное значение λ_{1010}, в отличие от остальных, спадает до нуля при увеличении a, следует ожидать, что это собственное значение будет целиком определять поведение функции корреляции при увеличении a. На рис. 19.22 показаны некоторые примеры корреляционных функций второго порядка, вычисленных по формуле (19.4.35) для различных значений a. Видно, что они имеют почти экспоненциальный вид, так что спектральная плотность должна быть почти лоренцевой.

19.5. Зависящее от времени решение в более общем случае взаимодействия между модами $\xi \neq 1$

До сих пор, имея дело с зависящим от времени решением лазерной задачи, мы ограничивались случаем, когда $\xi = 1$ и имеется симметрия $a_1 = a_2$. Это соответствует симметричному, неоднородно уширенному кольцевому лазеру в условиях резонанса. Сейчас мы кратко рассмотрим более общий случай, когда ξ может быть больше или меньше единицы, и отсутствует симметрия. Хотя самосопряженное дифференциальное уравнение (19.4.6), по-прежнему, имеет силу, отдельные уравнения (19.4.14) и (19.4.15), полученные из него, больше не действительны. Однако вводя для комплексных амплитуд двух мод полярные координаты

$$x_1 = r_1 \cos\phi_1, \quad x_2 = r_1 \sin\phi_1,$$
$$x_3 = r_2 \cos\phi_2, \quad x_4 = r_2 \sin\phi_2$$

и разлагая $g_{lmnp}(\mathbf{x})$, как и прежде, на множители

$$g_{lmnp}(\mathbf{x}) = \chi_{lmnp}(r_1, r_2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-in\phi_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip\phi_2}, \tag{19.5.1}$$

можно показать, что радиальная часть решения удовлетворяет уравнению (Hioe and Singh, 1981)

$$\left[\left(-\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1} r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} - \frac{1}{r_2}\frac{\partial}{\partial r_2} r_2 \frac{\partial}{\partial r_2}\right) + \frac{n^2}{r_1^2} + \frac{p^2}{r_2^2} + V(r_1, r_2)\right] \chi_{lmnp}(r_1, r_2) = \lambda_{lmnp} \chi_{lmnp}(r_1, r_2). \tag{19.5.2}$$

«Потенциал» $V(r_1, r_2)$ задается выражением

$$V(r_1, r_2) = a_1 + a_2 - (2+\xi)(r_1^2 + r_2^2) + \frac{1}{4} r_1^2 (a_1 - r_1^2 - \xi r_2^2)^2 + \frac{1}{4} r_2^2 (a_2 - r_2^2 - \xi r_1^2)^2. \tag{19.5.3}$$

Данное уравнение опять имеет вид уравнения Шредингера, хотя оно является уравнением двух переменных. Как обычно, возможные решения уравнения целиком определяются поведением потенциала $V(r_1, r_2)$ в области его минимумов. Если потенциал хорошо аппроксимируется квадратичной функцией в окрестности каждого минимума, то, как показали Хиое и Сингх (Hioe and Singh, 1981), можно получить аналитические решения. Им удалось получить приближенные аналитические выражения как для собственных значений, так и для собственных функций из (19.5.2), которые справедливы как существенно ниже, так и существенно выше порога. Мы не будем здесь рассматривать детали их решения.

19.5.1. Переключение мод и времена первого прохождения

Наиболее интересные свойства решения обнаруживаются тогда, когда константа связи $\xi > 1$, в частности, когда $\xi = 2$, как в случае однородно уширенного двухмодового лазера. В этом случае, при условии, что $\xi a_2 > a_1$ и $\xi a_1 > a_2$, шредингеровский потенциал $V(r_1, r_2)$ имеет четыре минимума, два из которых связаны с нулевыми собственными значениями и, следовательно, со стационарным решением. Они приводят к наличию двух пиков у стационарных распределений вероятности $\mathscr{P}_1(I_1)$ и $\mathscr{P}_2(I_2)$ интенсивностей каждой моды, как мы уже видели в разд. 19.2. Каждый пик соответствует метастабильному состоянию, и время от времени лазер переключается от одного метастабильного состояния, в котором интенсивность одной моды равна нулю, к другому, в котором обращается в нуль интенсивность второй моды. Скорость переключения определяется двумя наименьшими ненулевыми собственными значениями λ_{1000} и λ_{0100}, которые намного меньше остальных. Если высшие собственные значения определяют приближение системы к тому или иному локальному, метастабильному состоянию равновесия, то два наименьших ненулевых собственных значения определяют скорость перехода или переключения между этими метастабильными состояниями. Действительно, при наличии симметрии, когда $\Delta a = 0$, все высшие собственные значения расщепляются на величину, равную интервалу между двумя низшими собственными значениями. Аналогичное расщепление энергетических уровней в присутствии двойной потенциальной ямы хорошо известно в квантовой механике. В случае $a_1 = a_2 = a$ находим

$$\lambda_{1000} = \lambda_{0100} = \frac{a^2\left[(1+\xi)^{1/2} - 1\right]}{\left[\pi(1+\xi)\right]^{1/2}} \exp\left[-\frac{a^2\left[(1+\xi)^{1/2} - 1\right]^2}{1+\xi}\right]. \tag{19.5.4}$$

Это собственное значение определяет скорость переключения лазера между его метастабильными состояниями.

Такое переключение мод в однородно уширенных двухмодовых лазерах наблюдалось экспериментально (Rigrod and Bridges, 1965). На рис. 19.23 показаны осциллограммы временно́го развития интенсивностей двух мод кольцевого лазера на красителе. Видно, что интенсивность света каждой моды включается и выключается случайным образом, и что, как только одна мода включается, другая мода выключается, и наоборот. Очевидно, что интенсивности двух мод строго антикоррелированы, что следует уже из рис. 19.8.

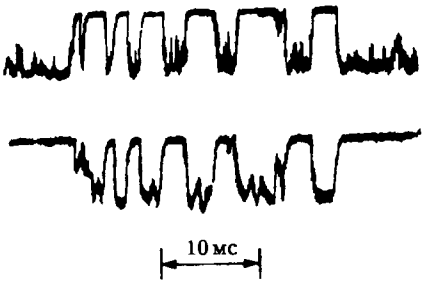


Рис. 19.23. Осциллограммы, иллюстрирующие одновременные изменения интенсивностей двух мод кольцевого лазера на красителе (Mandel, Roy and Singh, 1981)

Можно оценить скорость переключения мод другим способом, используя формализм времени первого прохождения в фазовом пространстве (см., например, Stratonovich, 1963; а также Weiss, 1977), который приводит к значениям, подобным (19.5.4) (Singh and Mandel, 1979; Lenstra and Singh, 1983; Shenoy and Agarwal, 1984). По форме стационарного решения, которая иллюстрируется графиком потенциала $U(I_1, I_2)$ на рис. 19.12, ясно видно, что изображающая точка в фазовом пространстве, характеризующая мгновенное состояние, проводит большую часть своего времени около какого-то минимума потенциала: или около $I_1 = a_1$, $I_2 = 0$, или около $I_1 = 0$, $I_2 = a_2$. Однако, время от времени достаточно большая флуктуация вызывает переход изображающей точки из окрестности одного минимума в окрестность другого, что проявляется в переключении, изображенном на рис. 19.23. Хотя точная траектория между минимумами в фазовом пространстве не рассчитывается, она, наиболее вероятно, проходит по впадине $U(I_1, I_2)$ через седловую точку. Следовательно, движение в фазовом пространстве в первом приближении можно рассматривать как одномерное. Это позволяет получить грубую оценку среднего времени, которое необходимо для перемещения из одного метастабильного состояния в другое, используя формализм времен первых прохождений в одном измерении.

Для того, чтобы это понять, рассмотрим кривую, обозначенную через $\xi = 2$ на рис. 19.13, которая задает форму потенциала $U(I_1)$, отвечающую стационарному решению для одной моды лазера. Если изображающая точка лежит около минимума $I_1 = 0$, так что эта мода выключена, то можно считать, что первое прохождение во включенное состояние произойдет тогда, когда изображающая точка сначала пересечет максимум потенциала, после чего быстро упадет во впадину в точку $I_1 = a_1$.

В общем случае предположим, что значение $I = I_A$ делит одномерное фазовое пространство на две области Ω и $\bar{\Omega}$, и что первое прохождение происходит тогда, когда изображающая точка, начиная от $I_0 \in \Omega$ в момент $t = 0$, сначала покидает Ω и пересекает I_A. Пусть T есть время, необходимое для первого прохождения. В общем случае T является случайной переменной, имеющей некоторое распределение вероятности $\eta(T|I_0)$, зависящее от I_0. Мы сейчас покажем, что интеграл от $\eta(T|I_0)$ связан с функцией Грина $G(I, t|I_0, 0)$ одномерного случайного процесса $I(t)$ и удовлетворяет обращенному уравнению Фоккера — Планка или уравнению Колмогорова.

Для демонстрации этого введем интегральное распределение времени первого прохождения

$$\Phi(T|I_0) = \int_0^T \eta(t'|I_0)\, dT', \tag{19.5.5}$$

дающее вероятность того, что время первого прохождения меньше T. Согласно определению $\Phi(T|I_0)$ подчиняется закону композиции

$$\Phi(T + \Delta T|I_0) = \int_\Omega G(I', \Delta T|I_0, 0)\Phi(T|I')\, dI'. \tag{19.5.6}$$

Это лишь отражает тот факт, что $\Phi(T+\Delta T|I_0)$ является вероятностью перехода от I_0 к соседнему значению I' за некоторый короткий интервал ΔT, которая умножается на вероятность того, что время первого прохождения из I' не превышает T, и затем интегрируется относительно I' по области Ω. Сделаем далее замену переменных, полагая $I' - I_0 = \Delta I$ и разлагая $\Phi(T|I_0 + \Delta I)$ в ряд Тейлора по ΔI в окрестности

I_0. Вычитая $\Phi(T|I_0)$ из обеих частей выражения, деля на ΔT и переходя к пределу $\Delta T \to 0$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial \Phi(T|I)}{\partial T} = A(I)\frac{\partial \Phi(T|I)}{\partial I} + \frac{1}{2}D(I)\frac{\partial^2 \Phi(T|I)}{\partial I^2}, \tag{19.5.7}$$

где $A(I)$ и $D(I)$ являются обычными коэффициентами дрейфа и диффузии, которые определяются формулами

$$A(I) = \lim_{\Delta T \to 0} \int \Delta I G(I + \Delta I, \Delta T | I, 0)\, d(\Delta I),$$
$$D(I) = \lim_{\Delta T \to 0} \int (\Delta I)^2 G(I + \Delta I, \Delta T | I, 0)\, d(\Delta I).$$

Как обычно, предположим, что высшие моменты обращаются в нуль. Данное дифференциальное уравнение есть сопряженное обычному уравнению Фоккера — Планка и называется *обращенным уравнением Фоккера — Планка* или уравнением *Колмогорова*. Поскольку $\partial \Phi(T|I)/\partial T$ есть распределение вероятности $\eta(T|I)$, можно получить уравнение для среднего времени первого прохождения

$$\langle T(I) \rangle \equiv \mu_1(I) = \int_0^\infty T \eta(T|I)\, dT$$

, дифференцируя каждое слагаемое в (19.5.7) по T, умножая на T и интегрируя по всем T. В результате находим, что

$$\int_0^\infty T \frac{\partial^2 \Phi(T|I)}{\partial T^2}\, dT = A(I)\frac{d\mu_1(I)}{dI} + \frac{1}{2}D(I)\frac{d^2\mu_1(I)}{dI^2}.$$

После интегрирования по частям левая часть сводится к

$$-\int_0^\infty \frac{\partial \Phi(T|I)}{\partial T}\, dT = -1,$$

так что

$$-1 = A(I)\frac{d\mu_1(I)}{dI} + \frac{1}{2}D(I)\frac{d^2\mu_1(I)}{dI^2}. \tag{19.5.8}$$

Это есть обыкновенное дифференциальное уравнение по $\mu_1(I)$, которое можно проинтегрировать. Общее решение имеет вид

$$\mu_1(I) = -2\int_0^I dI' \, \mathrm{e}^{U(I')} \int_0^{I'} dI'' \, \frac{\mathrm{e}^{-U(I'')}}{D(I'')} + C_1 \int_0^I \mathrm{e}^{U(I')}\, dI' + C_2, \tag{19.5.9}$$

где C_1, C_2 — константы, и

$$U(I) = -2\int_0^I \frac{A(I')}{D(I')}\, dI' \tag{19.5.10}$$

есть тот же потенциал, который входит в стационарное решение $\mathscr{P}(I)$ для интенсивности одной лазерной моды I [см. (19.3.16)]. Интегрируя двухмодовое уравнение Фоккера — Планка (19.1.17) по всем переменным помимо I_1, легко показать (Singh and Mandel, 1979), что одномерная константа диффузии $D(I_1) = 8I_1$. Граничные условия

$$\mu_1(I_\mathrm{A}) = 0,$$

$$\mu_1(0) \geqslant \mu_1(I), \quad \text{если } I < I_\mathrm{A},$$
$$\frac{d\mu_1(I)}{dI} \to 0 \quad \text{при } I \to \infty, \quad \text{если } I > I_\mathrm{A},$$

позволяют вычислить константы C_1, C_2 в (19.5.9). Окончательно, для среднего времени первого прохождения $\langle T_{\text{выкл.}}\rangle$, соответствующего переходу из выключенного состояния $I_1 = 0$ во включенное состояние, получаем выражение

$$\langle T_{\text{выкл.}}\rangle = \int_0^{I_A} dI' \, \frac{2}{\mathscr{P}(I')D(I')} \int_0^{I'} dI'' \, \mathscr{P}(I''). \tag{19.5.11}$$

Аналогично, если система находится первоначально во включенном состоянии с $I_1 \sim a_1$, то среднее время первого прохождения задается формулой

$$\langle T_{\text{вкл.}}\rangle = \int_{I_A}^{a_1} dI' \, \frac{2}{\mathscr{P}(I')D(I')} \int_{I'}^{\infty} dI'' \, \mathscr{P}(I''). \tag{19.5.12}$$

Вычисление этих интегралов намного упрощается, благодаря двухпиковой форме $\mathscr{P}(I)$ выше порога. В области $I < I_A$, функция $\mathscr{P}(I)$ имеет заметные значения только в окрестности точки $I = 0$, а в области $I > I_A$ — только в окрестности точки $I = a_1$. В обоих случаях $\mathscr{P}(I)$ очень мала вблизи границы $I = I_A$. Следовательно, основной вклад в интегралы по I' в формулах (19.5.11) и (19.5.12) дают значения I', близкие к I_A, при которых интегралы по I'' почти не зависят от I' и их можно заменить величинами

$$\int_0^{I_A} \mathscr{P}(I'')\, dI'' \equiv P_{\text{L}}, \quad \int_{I_A}^{\infty} \mathscr{P}(I'')\, dI'' \equiv P_{\text{H}}. \tag{19.5.13}$$

Здесь P_{L}, P_{H} — вероятности найти интенсивность света «низкой» или «высокой», так что

$$P_{\text{L}} + P_{\text{H}} = 1.$$

Используя (19.3.16) для $\mathscr{P}(I)$ и асимптотический вид функции ошибок при больших аргументах, можно показать, что

$$P_{\substack{\text{H}\\\text{L}}} \sim \left[1 + \mathrm{e}^{\mp a\Delta a/2} \frac{(\xi-1)a \pm \frac{1}{2}(\xi+1)\Delta a}{(\xi-1)a \mp \frac{1}{2}(\xi+1)\Delta a}\right]^{-1}, \tag{19.5.14а}$$

и, в случае малой асимметрии, что

$$P_{\substack{\text{H}\\\text{L}}} \approx \{1 + \exp[\mp\tfrac{1}{2}a\Delta a \pm (\xi+1)\Delta a/(\xi-1)a]\}^{-1}, \tag{19.5.14б}$$

где $a \equiv \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, $\Delta a \equiv a_1 - a_2$. Интегралы по I' в формулах (19.5.1) и (19.5.12) можно вычислить приближенно, учитывая, что в окрестности точки $I' = I_A$ функция $1/\mathscr{P}(I')$ ведет себя почти как гауссовское распределение по I', центрированное в точке $I' = I_A$. Если еще аппроксимировать функцию $1/D(I')$ ее значением $1/D(I_A) = 1/8I_A$ на гауссовском пике, то можно сразу записать интегралы по I'. Окончательно, приходим к результату (Roy, Short, Durnin and Mandel, 1980)

$$\langle T_{\text{выкл}}\rangle \approx \frac{\sqrt{\pi}\exp[\frac{1}{4}(\xi^2-1)I_A^2]}{2I_A^2(\xi^2-1)^{3/2}}, \tag{19.5.15}$$

где I_A есть точка максимума потенциала $U(I)$. Дифференцируя выражение (19.3.16б) для потенциала, можно показать, что

$$I_A \approx \frac{a}{\xi+1} - \frac{\Delta a/2}{\xi-1}. \tag{19.5.16}$$

Выражение для $\langle T_{\text{вкл}}\rangle$ имеет такой же вид, только Δa заменяется величиной $-\Delta a$. В частном случае: $\xi = 2$, $\Delta a = 0$, который имеет силу для однородно уширенного, симметричного кольцевого лазера, приближенно получаем

$$\langle T_{\text{выкл}}\rangle = \langle T_{\text{вкл}}\rangle \approx \frac{1.5}{a^2}\,\mathrm{e}^{a^2/12}. \tag{19.5.17}$$

Это выражение можно сравнить с (19.5.4) для наименьшего собственного значения в случае $\xi = 2$

$$\frac{1}{\lambda_{1000}} \approx \frac{4}{a^2}\,\mathrm{e}^{a^2/5.6}.$$

Оба выражения имеют одинаковую структуру, хотя и различаются в деталях.

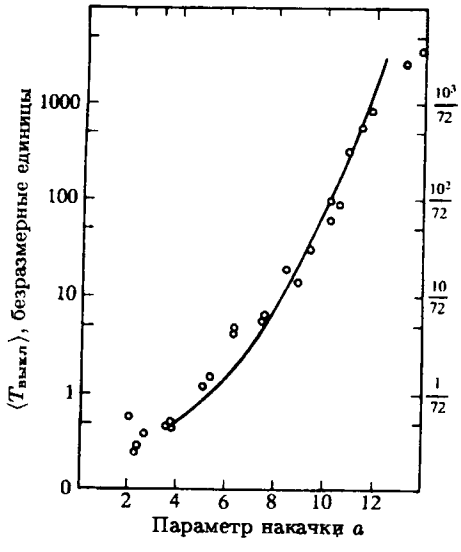


Рис. 19.24. Сравнение теоретической и экспериментальной зависимостей среднего времени первого прохождения $\langle T_{\text{выкл}}\rangle$ от параметра накачки a. Шкала справа показывает значения времени в секундах (Roy, Short, Durnin and Mandel, 1980)

Нужно отметить, что среднее время, определяемое выражением (19.5.17), должно быть удвоено (Lenstra and Singh, 1983), поскольку как только изображающая точка достигает границы, она почти с равной вероятностью может упасть как обратно в первую потенциальную яму, так и в другую. Кроме того, мы получили решение, рассматривая развитие во времени интенсивности только одной моды, тогда как изображающая точка в действительности движется по трехмерной поверхности, изображенной на рис. 19.12. Более реалистическое рассмотрение задачи времени первого прохождения (Shenoy and Agarwal, 1984) приводит к значению, которое в шесть раз больше значения (19.5.17).

Из-за экспоненциального множителя в (19.5.17) среднее время первого прохождения становится очень большим при увеличении параметра накачки. Сплошная кривая на рис. 19.24 есть график $\langle T_{\text{выкл}}\rangle$ как функции от a при $\Delta a \ll 1$. Видно, что $\langle T_{\text{выкл}}\rangle$ увеличивается на четыре порядка при небольшом увеличении a от 4 до 12. Причина этого в том, что высота максимума потенциала в точке I_{A} становится все больше и больше при увеличении a, так что требуются все большие флуктуации, чтобы вызвать переход из одного метастабильного состояния в другое. Излишне говорить, что чем больше флуктуации, тем реже они появляются, так что при достаточно больших значениях параметра накачки значения $\langle T_{\text{вкл}}\rangle$ и $\langle T_{\text{выкл}}\rangle$ становятся настолько большими, что лазер может казаться стабильным. Эти времена переключения или времена первого прохождения были измерены у однородно уширенного двухмодового кольцевого лазера на красителе (Roy, Short, Durnin and Mandel, 1980). Как показано на рис. 19.24, после скэйлинга получается удовлетворительное согласие теории с экспериментом.

19.5.2. Распределения времен первого прохождения

Предшествующий формализм позволяет также вычислить моменты высшего порядка времен $T_{\text{выкл}}$ и $T_{\text{вкл}}$ первого прохождения. Умножая каждое слагаемое в (19.5.7) на T^r ($r = 2, 3, \ldots$) и действуя так же, как при выводе $\mu_l(I)$, можно легко получить дифференциальное уравнение для r-го момента $\langle T^r(I)\rangle \equiv \mu_r(I)$ величины T в виде

$$-r\mu_{r-1}(I) = A(I)\frac{d\mu_r(I)}{dI} + \frac{1}{2}D(I)\frac{d^2\mu_r(I)}{dI^2}. \tag{19.5.18}$$

Таким образом, моменты высшего порядка времени T первого прохождения можно вывести рекуррентно из моментов низшего порядка. Интегрируя (19.5.18), можно выразить $\mu_r(I)$ в виде многократного интеграла

$$\langle T^r_{\text{выкл}}\rangle = r!\int_0^{I_{\text{A}}} dI_{2r}\,\frac{2}{\mathscr{P}(I_{2r})D(I_{2r})}\int_0^{I_{2r}} dI_{2r-1}\,\mathscr{P}(I_{2r-1})\int_{I_{2r-1}}^{I_{\text{A}}} dI_{2r-2}\ldots\int_0^{I_4} dI_3\,\mathscr{P}(I_3)\times$$
$$\times\int_{I_3}^{I_{\text{A}}} dI_2\,\frac{2}{\mathscr{P}(I_2)D(I_2)}\int_0^{I_2} dI_1\,\mathscr{P}(I_1), \quad r = 2,3,\ldots, \tag{19.5.19}$$

$$\langle T^r_{\text{вкл}}\rangle = r!\int_{I_{\text{A}}}^{a_1} dI_{2r}\,\frac{2}{\mathscr{P}(I_{2r})D(I_{2r})}\int_{I_{2r}}^{\infty} dI_{2r-1}\,\mathscr{P}(I_{2r-1})\int_{I_{\text{A}}}^{I_{2r-1}} dI_{2r-2}\ldots\int_{I_4}^{\infty} dI_3\,\mathscr{P}(I_3)\times$$
$$\times\int_{I_{\text{A}}}^{I_3} dI_2\,\frac{2}{\mathscr{P}(I_2)D(I_2)}\int_{I_2}^{\infty} dI_1\,\mathscr{P}(I_1), \quad r = 2,3,\ldots. \tag{19.5.20}$$

Интегралы можно вычислить, используя те же приближения, что и при вычислении по формулам (19.5.11) и (19.5.12), и результат имеет вид (Roy, Short, Durnin and Mandel, 1980)

$$\langle T^r_{\text{выкл}}\rangle \approx r!\langle T_{\text{выкл}}\rangle^r, \quad \langle T^r_{\text{вкл}}\rangle \approx r!\langle T_{\text{вкл}}\rangle^r. \tag{19.5.21}$$

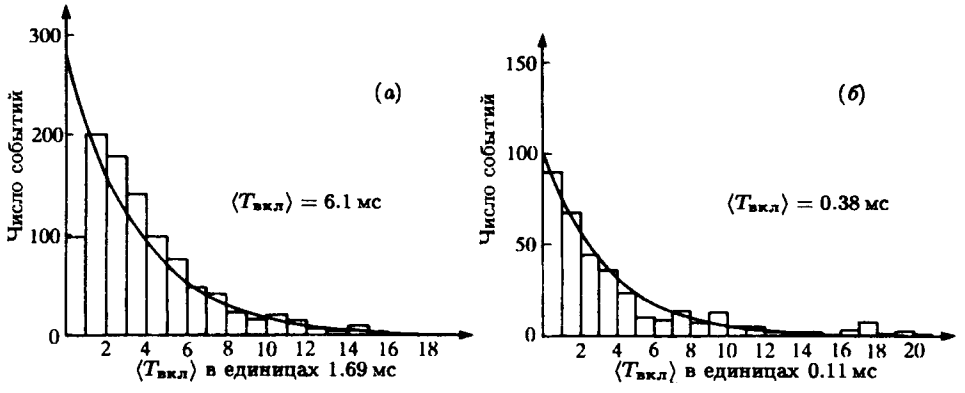


Рис. 19.25. Гистограммы измеренных распределений вероятности времени первого прохождения $T_{вкл}$: *а* — для параметра накачки 3.5; *б* — для параметра накачки 9. Сплошные кривые — экспоненциальные распределения, имеющие такое же значение среднего $\langle T_{вкл} \rangle$ (Roy, Short, Durnin and Mandel, 1980)

Это означает, что времена $T_{выкл}$ и $T_{вкл}$ распределены приблизительно экспоненциально, так что наиболее короткие времена оказываются наиболее вероятными. В действительности, поскольку вероятность первого прохождения в нулевой момент времени равна нулю, полученный результат, строго говоря, неправилен, но распределение вероятности может очень быстро возрасти с нулевого значения. На рис. 19.25 показаны результаты некоторых измерений данного распределения времен переключения $T_{вкл}$ в двухмодовом лазере на красителе для двух значений параметра накачки. Распределения являются почти экспоненциальными, но в случае $\langle T_{вкл} \rangle \approx 6.1$ мс наблюдался быстрый рост в первую миллисекунду до наиболее вероятного значения. При больших значениях времени переключения, таких как $\langle T_{вкл.} \rangle \approx 0.38$ с, этот рост не разрешался аппаратурой, но предполагается, что он все еще имеет место и его форма может быть получена из более тщательного и более реалистичного рассмотрения проблемы (Lenstra and Singh, 1983). С точки зрения упрощения, при котором задача первого прохождения решалась как одномерная, общее согласие между теорией и экспериментом достаточно удовлетворительное.

Одним из интересных аспектов явления переключения мод является то, что данное явление есть макроскопическое проявление микроскопических квантовых флуктуаций. Всего лишь один спонтанно излученный фотон может инициировать процесс переключения, при котором один довольно интенсивный лазерный пучок включается, а другой выключается. В физике не так много явлений, в которых квантовые флуктуации так удивительно наглядны.

В этой главе мы встретились с различными явлениями, такими как когерентность и некогерентность, метастабильность и переключение мод, фазовые переходы первого и второго рода, которые проявляются в кольцевых лазерах при различных условиях. Все они, в некоторой степени, являются следствием конкуренции мод. Однако наше рассмотрение кольцевого лазера отнюдь не исчерпывает возможных форм его поведения. При соответствующих условиях уравнения движения приводят к самопульсации (Risken and Nummedal, 1968; Graham and Haken, 1968), периодическому «дыханию» импульсов и хаотическому поведению, даже в отсутствии флуктуаций спонтанного излучения (Mayr, Risken and Vollmer, 1981). Кольцевой лазер, очевидно, является системой, чрезвычайно богатой физическими свойствами.

Задачи

19.1 Исходя из уравнения движения для совместной плотности вероятности двухмодового поля кольцевого лазера, покажите, что уравнение движения для плотности вероятности $\mathscr{P}(I_1)$ интенсивности I_1 одной моды можно привести к виду уравнения Фоккера — Планка, при условии, что условную среднюю интенсивность $\langle I_2 \rangle_{I_1}$ моды 2, при заданной I_1, можно заменить безусловной средней интенсивностью $\langle I_2 \rangle$. Получите отсюда скорость диффузии интенсивности I_1 в безразмерных единицах.

19.2 Покажите, используя стационарные решения для моментов $\langle I_j\rangle$, $\langle(\Delta I_j)^2\rangle$, $(j=1,2)$ и $\langle\Delta I_1\Delta I_2\rangle$ двухмодового кольцевого лазера, что в случае однородно уширенной активной среды, настройки лазера на центр линии, положительном и постоянном значении разности $\Delta a \equiv a_1 - a_2$, где a_1, a_2 — параметры накачки, моменты имеют следующий асимптотический вид при $a_1 \to \infty$

$$\langle I_1\rangle \sim a_1 - 2/\Delta a, \quad \langle I_2\rangle \sim 2/\Delta a,$$
$$\langle(\Delta I_1)^2\rangle/\langle I_1\rangle^2 \sim [2 + 4/\Delta a^2]/a_1^2, \quad \langle(\Delta I_2)^2\rangle/\langle I_2\rangle^2 \sim 1,$$
$$\langle\Delta I_1\Delta I_2\rangle/\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle \sim -2/(a_1\Delta a).$$

19.3 Используя условия задачи 19.2, покажите, что когда $\Delta a = 0$ и $a_1 = a = a_2$, асимптотические значения моментов при больших a определяются по формулам

$$\langle I_j\rangle \sim a/2 \quad (j=1,2),$$
$$\langle(\Delta I_j)^2\rangle/\langle I_j\rangle^2 \sim 1/3 \quad (j=1,2),$$
$$\frac{\langle\Delta I_1\Delta I_2\rangle}{\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle} \sim -1/3.$$

19.4 Двухмодовый кольцевой лазер с константой связи мод ξ $(0 \leqslant \xi < 1)$ работает на пороге $(a_1 = 0 = a_2)$. Покажите, что справедливы следующие соотношения между интенсивностями света:

$$\langle I_j\rangle = \sqrt{\pi}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{1/2}(\arccos\xi)^{-1} \qquad (j=1,2),$$
$$\frac{\langle(\Delta I_j)^2\rangle}{\langle I_j\rangle^2} = \frac{2(\arccos\xi)^2}{\pi(1-\xi)^2} - \frac{2\xi(1+\xi)\arccos\xi}{\pi(1-\xi)(1-\xi^2)^{1/2}} - 1 \qquad (j=1,2),$$
$$\frac{\langle\Delta I_1\Delta I_2\rangle}{\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle} = \frac{2\arccos\xi}{\pi(1-\xi^2)^{3/2}} - \frac{2\xi(\arccos\xi)^2}{\pi(1-\xi^2)^2} - 1.$$

Глава 20

ЛИНЕЙНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ СВЕТА

20.1. Введение

Как мы увидели в гл. 18 и 19, действие лазера является результатом объединения усилителя света с оптическим резонатором и источником накачки. Заметим, что описание усилителя света уже содержится в гл. 18 и 19. Однако, в лазере существенную роль играют эффекты насыщения и нелинейности, тогда как в линейном усилителе света они отсутствуют по определению. Таким образом, удобно рассмотреть линейный усилитель света отдельно, для того, чтобы сосредоточить внимание на его отличительных свойствах.

Иногда утверждается, что усилитель света, помещенный в плечо интерферометра, потенциально способен нарушить принцип неопределенности, поскольку он позволяет регистрировать путь фотона, пока имеет место интерференция. Рассмотрим интерферометр Маха — Цендера, показанный на рис. 20.1, который содержит линейный усилитель света в каждом плече, заканчивающимся делителем пучка и детектором. Предположим, что на вход интерферометра поступает фотон. Поскольку свет, выходящий из усилителя света, когерентен свету на входе, может показаться, что на выходе интерферометра должны наблюдаться интерференционные полосы, даже когда детектор A или детектор B указывают путь, по которому фотон прошел через интерферометр. Это, конечно, нарушило бы принцип, утверждающий, что интерференция всегда связана с внутренней неопределенностью этих двух путей. Однако приведенное рассуждение ошибочно: ошибка связана с игнорированием спонтанного излучения, выходящего из усилителя света. Данная проблема была точно проанализирована Глаубером (Glauber, 1986). Именно вследствие спонтанного излучения не существует линейного усилителя, способного точно клонировать падающий фотон, что было показано ранее исходя из довольно общих соображений (Wooters and Zurek, 1982; Mandel, 1983).

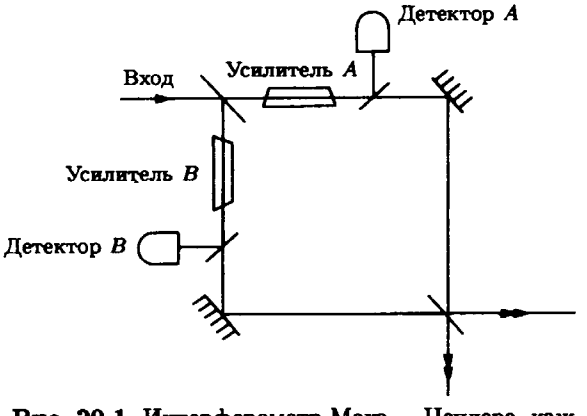


Рис. 20.1. Интерферометр Маха — Цендера, каждое плечо которого содержит усилитель света, что позволяет определить путь фотона по показаниям детекторов A или B на выходе

В настоящей главе мы сосредоточимся на простейшем типе усилителя, состоящего из частично инвертированных двухуровневых атомов, которые фактически находятся в одинаковом оптическом поле. Предполагается, что инверсия населенностей поддерживается некоторой системой оптической накачки, так что она ведет себя подобно резервуару. Мы рассмотрим, как усилитель реагирует на различные виды падающего поля, находящегося как в классических, так и неклассических состояниях, и обнаружим, что по мере возрастания коэффициента усиления свет теряет свои неклассические свойства (Friberg and Mandel 1983, 1984; Hong, Friberg and Mandel, 1985). Довольно общее рассмотрение флуктуаций в линейном усилителе, которое охватывает как чувствительные, так и нечувствительные к фазе ситуации, было сделано в работе (Caves, 1982).

20.2. Основное кинетическое уравнения для поля усилителя

Рассмотрим систему из N одинаковых двухуровневых атомов, взаимодействующих с одномодовым квантовым полем, из которых N_2 возбуждены, а N_1 не возбуждены. В гл. 18 обсуждалась подобная задача, связанная с лазером, и полагалось, что одномодовое поле является собственной модой резонатора. То же самое, конечно, можно сделать и в данном случае, только теперь большую роль будут играть коэффициенты пропускания зеркал, ибо усилитель имеет как вход, так и выход. С целью максимального упрощения задачи, предположим, что мы имеем дело с собственной модой свободного поля, и что все атомы «видят» фактически одинаковое поле. Допустим, что частота поля совпадает с частотой атомного перехода, и пренебрежем любыми непосредственными дипольными взаимодействиями между атомами. Далее будем считать, что значения N_1 и N_2 поддерживаются примерно постоянными во времени при помощи некоторого механизма накачки и потерь, который подробно рассматривать не будем. Пусть $\hat{\rho}$ есть приведенный оператор плотности электромагнитного поля. Наша цель — вывести основное кинетическое уравнение для $\hat{\rho}(t)$ в картине взаимодействия.

Данная задача, конечно, подобна той, которая решалась в разд. 18.4 при квантовом рассмотрении лазера. Основное отличие состоит в том, что теперь нас интересует только линейный режим работы лазера и мы исключаем любые нелинейные взаимодействия атомов, содержащие испускание более чем одного фотона. Тогда, рассуждая так же, как и прежде, приходим к основному кинетическому уравнению (18.4.20), за исключением того, что коэффициент B, описывающий насыщение или нелинейность лазера, полагается теперь равным нулю

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -\tfrac{1}{2}A(\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} + \text{ э.с. }) - \tfrac{1}{2}C(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + \text{ э.с. }). \tag{20.2.1}$$

Как и прежде, A есть коэффициент усиления, определяемый населенностью возбужденного уровня, C — коэффициент потерь, связанный с невозбужденными атомами. Для простоты возьмем коэффициенты усиления и потерь, пропорциональные населенностям N_2, N_1, так что

$$A = 2\lambda N_2, \quad C = 2\lambda N_1, \tag{20.1}$$

где коэффициент λ имеет порядок атомной ширины линии.

В разд. 18.5 было показано, что, используя диагональное представление оператора плотности $\hat{\rho}(t)$ по когерентным состояниям, а именно,

$$\hat{\rho}(t) = \int \phi(v,t)|v\rangle\langle v|\, d^2v, \tag{20.2.3}$$

подставляя его в основное кинетическое уравнение и заменяя $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ дифференциальными операторами, можно преобразовать операторное уравнение для $\hat{\rho}(t)$ в c-числовое уравнение Фоккера — Планка для $\phi(v,t)$. Тогда можно рассматривать начальную весовую функцию (или плотность распределения в фазовом пространстве) $\phi(v,0)$ как функцию, описывающую поле на входе усилителя света, а $\phi(v,t)$ — как функцию, описывающую поле на выходе в момент времени t. Полагая $B = 0$ и используя (20.2.2), получаем из (18.5.8), что

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\phi(v,t)}{\partial t} = -(N_2 - N_1)\left[\frac{\partial}{\partial v}(v\phi(v,t)) + \frac{\partial}{\partial v^*}(v^*\phi(v,t))\right] + 2N_2\frac{\partial^2\phi(v,t)}{\partial v\partial v^*}. \tag{20.2.4}$$

Будем считать это уравнение — уравнением движения, которое описывает линейный усилитель света, имеющий на входе $\phi(v,0)$ и на выходе $\phi(v,t)$.

20.3. Решение основного кинетического уравнения

В разд. 18.6 был описан метод решения уравнения Фоккера — Планка для лазера, в котором задача сводилась к решению уравнения Штурма — Лиувилля. Было получено решение в виде бесконечного ряда, который не собирается аналитически, но пригоден для численных расчетов. Однако, уравнение Фоккера — Планка (20.2.4) для линейного усилителя значительно проще и может быть решено аналитически (Carusotto, 1975; Abraham and Smith, 1977; Rockower, Abraham and Smith, 1978). Мы не будем здесь выводить это решение, а лишь приведем ответ, предоставляя читателю возможность проверить, удовлетворяет

ли оно уравнению (20.2.4). Можно показать, что $\phi(v,t)$, описывающая поле усилителя в момент времени t, которое мы будем считать полем на выходе усилителя, выражается в виде простой свертки поля на входе, то есть плотности в фазовом пространстве $\phi_0(v) \equiv \phi(v,0)$ в начальный момент времени, с плотностью фазового пространства $\phi(v,t)$ теплового поля [ср. (13.2.3)], связанного со спонтанным излучением. Таким образом,

$$\phi(v,t) = \int \phi_0(v')\phi_s(v - G(t)v', t)\, d^2v', \tag{20.3.1}$$

где

$$\phi_s(v,t) \equiv \frac{1}{\pi m(t)} \mathrm{e}^{-|v|^2/m(t)}, \tag{20.3.2}$$

$$m(t) \equiv \left(\frac{N_2}{N_2 - N_1}\right)[|G(t)|^2 - 1], \tag{20.3.3}$$

$$G(t) \equiv \mathrm{e}^{(N_2 - N_1)\lambda t} \mathrm{e}^{-i\omega t}. \tag{20.3.4}$$

Из (20.3.2) очевидно, что $m(t)$ есть среднее число фотонов теплового поля или поля спонтанного излучения. Мы скоро увидим, что $G(t)$ представляет собой коэффициент усиления в момент времени t.

Если в (20.3.1) сделать замену переменных $v - G(t)v' = v''$ и записать

$$\phi(v,t) = \int \phi_0\left(\frac{v - v''}{G}\right)\phi_s(v'')\, d^2v'', \tag{20.3.5}$$

то из структуры свертки станет ясно, что поле на выходе усилителя можно рассматривать, как результат интерференции усиленного поля на входе и поля спонтанного излучения [ср. обсуждение, приводящее к (11.8.26)]. Например, вычисляя среднюю амплитуду поля на выходе $\langle\hat{a}(t)\rangle$ в момент t, из (20.3.1) получаем

$$\langle\hat{a}(t)\rangle = \langle v\rangle_t = \int v\phi(v,t)\, d^2v = \iint (v - G(t)v')\phi_s(v - G(t)v', t)\phi_0(v')\, d^2v'\, d^2v + \\ + G(t)\iint v'\phi_0(v')\phi_s(v - G(t)v', t)\, d^2v'\, d^2v.$$

Первый интеграл в правой части дает нуль, поскольку среднее значение теплового поля равно нулю, т.е. $\int v\phi_s(v)d^2v = 0$, тогда как второй член дает $G(t)\int v'\phi_0(v')\, d^2v' = G(t)\langle v'\rangle_0$, поскольку интеграл по v равен единице. Окончательно

$$\langle\hat{a}(t)\rangle = \langle v\rangle_t = G(t)\langle v\rangle_0 = G(t)\langle\hat{a}(0)\rangle. \tag{20.3.6}$$

Следовательно, среднее поле на выходе равно среднему полю на входе, умноженному на величину $G(t)$, которая является коэффициентом усиления, ибо среднее поле спонтанного излучения равно нулю. Аналогичным образом можно показать, что

$$\langle\hat{a}^r(t)\rangle = G^r(t)\langle\hat{a}^r(0)\rangle. \tag{20.3.7}$$

Поле спонтанного излучения, однако, дает вклад в среднее число фотонов $\langle\hat{n}(t)\rangle$ на выходе. Таким образом, из (20.3.1) с помощью оптической теоремы эквивалентности (см. разд. 11.9) имеем

$$\langle\hat{n}(t)\rangle = \langle\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle = \langle|v|^2\rangle_t = \int |v|^2\phi(v,t)\, d^2v = \iint |v|^2\phi_s(v,t)\phi_0(v')\, d^2v'\, d^2v + \\ + |G(t)|^2\iint |v'|^2\phi_0(v')\phi_s(v,t)\, d^2v'\, d^2v + G(t)\iint v^*v'\phi_0(v')\phi_s(v,t)\, d^2v'\, d^2v + \text{к.с.} = \\ = m(t) + |G(t)|^2\langle\hat{n}(0)\rangle, \tag{20.3.8}$$

поскольку два последние интеграла в правой части обращаются в нуль. Следовательно, в поле на выходе в среднем усилитель дает $|G(t)|^2\langle\hat{n}(0)\rangle$ фотонов, а спонтанное излучение дает $m(t)$ фотонов.

20.3.1. Корреляции входа — выхода

С тем чтобы показать, что поле на выходе усилителя, если не считать спонтанного излучения, когерентно полю на входе, вычислим функцию взаимной корреляции входа — выхода $\langle \hat{a}^\dagger(0)\hat{a}(t)\rangle$. Для этого нам необходимо построить функцию Грина $\mathscr{G}(v,t|v_0,0)$, или условную плотность в фазовом пространстве, исходя из (20.3.1) и полагая $\phi_0(v') = \delta^2(v'-v_0)$. В результате получаем выражение

$$\mathscr{G}(v,t|v_0,0) = \phi_s(v - G(t)v_0, t) = \frac{1}{\pi m(t)}\,\mathrm{e}^{-|v-G(t)v_0|^2/m^2(t)}, \tag{20.3.9}$$

и, следовательно,

$$\langle \hat{a}^\dagger(0)\hat{a}(t)\rangle = \iint v_0^* v \mathscr{G}(v,t|v_0,0)\phi_0(v_0)\,d^2v_0\,d^2v = \iint v_0^*(v' + G(t)v_0)\frac{1}{\pi m(t)}\,\mathrm{e}^{-|v'|^2/m^2(t)}\phi_0(v_0)\,d^2v_0\,d^2v',$$

где было использовано (20.3.9) и было положено $v = v' + G(t)v_0$. Следовательно,

$$\langle \hat{a}^\dagger(0)\hat{a}(t)\rangle = G(t)\langle \hat{n}(0)\rangle, \quad \langle v^*(0)v(t)\rangle = G(t)\langle v^*(0)v(0)\rangle, \tag{20.3.10}$$

поскольку интеграл, содержащий член $v_0^* v'$, обращается в нуль. Таким образом, функция взаимной корреляции полей на входе и выходе совпадает с автокорреляционной функцией поля на входе, если не считать коэффициента усиления $G(t)$.

20.4. Статистика фотонов

Получив общее выражение (20.3.1) для поля на выходе через поле на входе, можно легко связать различные моменты числа фотонов на выходе усилителя с аналогичными моментами на входе, или, обобщая, можно связать распределение вероятности на выходе $p(n,t)$ с распределением вероятности на входе $p(n,0)$ (Friberg and Mandel, 1983, 1984).

Рассмотрим второй факториальный момент числа фотонов. Используя общее соотношение (12.10.13) и оптическую теорему эквивалентности для нормально упорядоченных операторов, получаем для второго факториального момента числа фотонов на выходе $\langle \hat{n}^{(2)}(t)\rangle = \langle \hat{a}^{\dagger 2}(t)\hat{a}^2(t)\rangle = \int |v|^4\phi(v,t)\,d^2v$. Воспользовавшись далее (20.3.1) и полагая $v = G(t)v' + v''$, находим

$$\langle \hat{n}^{(2)}(t)\rangle = \iint [|v''|^4 + |G(t)|^4|v'|^4 + 4|G(t)|^2|v'|^2|v''|^2]\phi_s(v'')\phi_0(v')\,d^2v'\,d^2v'',$$

поскольку все остальные члены при интегрировании дают нуль. После подстановки гауссовских моментов $\phi_s(v'')$ получаем формулу

$$\langle \hat{n}^{(2)}(t)\rangle = 2m^2(t) + |G(t)|^4\langle \hat{n}^2(0)\rangle + 4|G(t)|^4 m(t)\langle \hat{n}(0)\rangle. \tag{20.4.1}$$

Объединяя (20.3.8) с (20.4.1), легко находим, что

$$\langle \hat{n}^{(2)}(t)\rangle - \langle \hat{n}(t)\rangle^2 = m^2(t) + |G(t)|^4[\langle \hat{n}^{(2)}(0)\rangle - \langle \hat{n}(0)\rangle^2] + 2|G(t)|^2 m(t)\langle \hat{n}(0)\rangle. \tag{20.4.2}$$

Напомним теперь, что разность $\langle \hat{n}^{(2)}(t)\rangle - \langle \hat{n}(t)\rangle^2$ описывает отклонение от статистики Пуассона и является либо положительной либо отрицательной в зависимости от того, являются ли флуктуации супер- или субпуассоновскими. В последнем случае состояние поля не имеет классического описания. Из анализа выражения (20.4.2) ясно, что фотоны на выходе усилителя не могут быть субпуассоновскими, если фотоны на входе не являются субпуассоновскими. В общем случае статистика на выходе является субпуассоновской, если на входе выполняется соотношение

$$\langle \hat{n}^{(2)}(0)\rangle - \langle \hat{n}(0)\rangle^2 < -\frac{m(t)}{|G(t)|^2}\left[2\langle \hat{n}(0)\rangle + \frac{m(t)}{|G(t)|^2}\right]. \tag{20.4.3}$$

Введем обозначение

$$\frac{\langle\hat{n}^{(2)}(t)\rangle - \langle\hat{n}(t)\rangle^2}{\langle\hat{n}(t)\rangle} \equiv Q_t, \tag{20.4.4}$$

где $-1 \leqslant Q_t < 0$, когда статистика является субпуассоновской. Тогда из неравенства (20.4.3) следует, что субпуассоновская статистика на выходе усилителя будет, если

$$\left[\frac{m(t)}{|G(t)|^2}\right]^2 + 2\langle\hat{n}(0)\rangle\frac{m(t)}{|G(t)|^2} - \langle\hat{n}(0)\rangle|Q_0| < 0,$$

что вследствие квадратичной структуры левой части, означает

$$\frac{m(t)}{|G(t)|^2} < [\langle\hat{n}(0)\rangle^2 + \langle\hat{n}(0)\rangle|Q_0|]^{1/2} - \langle\hat{n}(0)\rangle. \tag{20.4.5}$$

Но из определения (20.3.3) следует, что

$$\frac{m(t)}{|G(t)|^2} = \frac{1 - 1/|G(t)|^2}{1 - N_1/N_2}. \tag{20.4.6}$$

Подставляя последнее выражение в левую часть неравенства (20.4.5), получаем верхнюю границу для $|G(t)|^2$, а именно,

$$|G(t)|^2 < \frac{1}{1 - (1 - N_1/N_2)\{[\langle\hat{n}(0)\rangle^2 + \langle\hat{n}(0)\rangle|Q_0|]^{1/2} - \langle\hat{n}(0)\rangle\}}. \tag{20.4.7}$$

Теперь учтем, что $[\langle\hat{n}(0)\rangle^2 + \langle\hat{n}(0)\rangle|Q_0|]^{1/2} - \langle\hat{n}(0)\rangle$ возрастает монотонно при увеличении $\langle\hat{n}(0)\rangle$ и ограничено сверху величиной $\frac{1}{2}|Q_0|$, поскольку $\langle\hat{n}(0)\rangle^2 + \langle\hat{n}(0)\rangle|Q_0| \leqslant [\langle\hat{n}(0)\rangle\frac{1}{2}|Q_0|]^2$. Следовательно, неравенство (20.4.7) означает, что

$$|G(t)|^2 < \frac{1}{1 - (|Q_0|/2)(1 - N_1/N_2)}. \tag{20.4.8}$$

Но $|Q_0|$ не может быть больше 1, если статистика является субпуассоновской, так что

$$|G(t)|^2 < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(1 - N_1/N_2)} \leqslant 2, \tag{20.4.9}$$

где равенство возможно только если $N_1 = 0$, когда атомная система полностью инвертирована. Таким образом, показано, что если фотоны на выходе усилителя должны быть субпуассоновскими, то коэффициент усиления по интенсивности $|G(t)|^2$ не должен превышать 2. Как только $|G(t)|^2$ превышает 2, неклассическая статистика фотонов исчезает, каким бы неклассическим не был свет на входе.

Значение $|G(t)|^2 = 2$ соответствует так называемому «клонирующему» значению коэффициента усиления, при котором один фотон на входе усилителя приводит к двум подобным фотонам на выходе, если не считать вклада спонтанного излучения. Но среднее число фотонов $m(t)$, вносимых спонтанным излучением, не является ничтожно малым. Из (20.4.6) следует, что

$$m(t) = [|G(t)|^2 - 1]/[1 - N_1/N_2] \geqslant |G(t)|^2 - 1, \tag{20.4.10}$$

так что $m(t) \geqslant 1$, когда $|G(t)|^2 = 2$. Таким образом, на каждый усиленный фотон, в среднем, приходится по крайней мере один спонтанно испущенный фотон.

20.4.1. Распределения вероятностей

Используя (20.3.1), несложно вычислить вероятность $p(n,t)$ того, что на выходе усилителя будет n фотонов, и связать ее с соответствующей вероятностью на входе $p(n,0)$. Вычисление, в принципе, несложно,

хотя несколько громоздко, и мы изложим его лишь в общих чертах (Friberg and Mandel, 1983, 1984). Из общего соотношения [ср. (12.10.2)] между $p(n,t)$ и плотностью в фазовом пространстве $\phi(v,t)$, а именно

$$p(n,t) = \frac{1}{n!}\int |v|^{2n}\,\mathrm{e}^{-|v|}\phi(v,t)\,d^2v, \tag{20.4.11}$$

имеем

$$p(n,t) = \frac{1}{n!}\iint |v|^{2n}\,\mathrm{e}^{-|v|}\,\frac{1}{\pi m(t)}\,\mathrm{e}^{-|v-G(t)v'|^2/m^2(t)}\phi_0(v')\,d^2v'\,d^2v. \tag{20.4.12}$$

Полагая $v = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{i\phi}$, $d^2v = \frac{1}{2}\,dx\,d\phi$ и интегрируя сначала по ϕ, а затем по x, находим

$$p(n,t) = \int d^2v' \int_0^\infty dx x^n\,\mathrm{e}^{-x(1+1/m(t))} I_0\left[\frac{2|G(t)||v'|\sqrt{x}}{m(t)}\phi_0(v')\right]\frac{1}{n!\,m(t)}\,\mathrm{e}^{-|G(t)|^2|v'|^2/m(t)} =$$
$$= \frac{1}{[1+(t)][1+1/m(t)]^n}\int \phi_0(v')\,\mathrm{e}^{-|G(t)|^2|v'|^2/m(t)}\,{}_1F_1(n+1,1,|G(t)|^2|v'|^2/m(t)[m(t)+1])\,d^2v', \tag{20.4.13}$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка и ${}_1F_1(a,b,z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Если теперь разложить ${}_1F_1$ в степенной ряд и почленно проинтегрировать по v', то получим разложение в ряд для $p(n,t)$

$$p(n,t) = \frac{1}{[1+(t)][1+1/m(t)]^n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(n+r)!}{n!\,r!(m+1)^r}\mathscr{P}_0(r,|G(t)|^2/m(t)), \tag{20.4.14}$$

где

$$\mathscr{P}_0(r,\alpha) = \frac{1}{r!}\int \phi_0(v')(\alpha|v'|^2)^r\,\mathrm{e}^{-\alpha|v'|^2}\,d^2v'. \tag{20.4.15}$$

Сравнение с (20.4.11) показывает, что $\mathscr{P}_0(r,\alpha)$ имеет структуру входного распределения $p(n,0)$, если не считать параметр $\alpha \equiv |G(t)|^2/m(t)$. Действительно, вспоминая рассмотрение фотоэлектрического детектирования, приведенное в разд. 14.8, мы видим, что $\mathscr{P}_0(r,\alpha)$ имеет вид вероятности регистрирования фотона детектором, поле на входе которого описывается функцией $\phi_0(v)$, а эффективный квантовый выход которого равен α. Эта интерпретация α позволяет выразить $\mathscr{P}_0(r,\alpha)$ в альтернативной форме — в виде свертки Бернулли между $p(m,0)$ и вероятностью детектирования n выходящих из m падающих фотонов, т.е.

$$\mathscr{P}_0(r,\alpha) = \sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n}\alpha^n(1-\alpha)^{m-n}p(m,0). \tag{20.4.16}$$

Фактически, интерпретация $\alpha = |G(t)|^2/m(t)$ через квантовый выход имеет смысл только при условии, если $|G(t)|^2/m(t) \le 1$, так что α является вероятностью. Однако выражения (20.4.15) и (20.4.16) формально эквивалентны, независимо от того, является ли α вероятностью.

Подставляя выражение (20.4.16) для $\mathscr{P}_0$ в формулу (20.4.14) и меняя порядок суммирования, приходим окончательно к выражению

$$p(n,t) =$$
$$= \frac{1}{1+m(t)[1+1/m(t)]^n}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{l}\binom{-n-1}{r}\binom{l}{r}\left[\frac{-|G(t)|^2/m(t)(m(t)+1)}{1-|G(t)|^2/m(t)}\right]^r\left[1-\frac{|G(t)|^2}{m(t)}\right]^l p(l,0), \tag{20.4.17}$$

которое выражает вероятность $p(n,t)$ на выходе усилителя через вероятность $p(l,0)$ на входе. Излишне говорить, что $p(n,t)$ должно выть вероятностью, независимо от того, является ли вероятностью $|G(t)|^2/m(t)$.

Рассмотрим более внимательно вид $|G(t)|^2/m(t)$. Из (20.4.6) сразу следует, что

$$|G(t)|^2/m(t) < 1 \quad \text{только если} \quad |G(t)|^2 > N_2/N_1. \tag{20.4.18}$$

Если коэффициент усиления не превышает N_2/N_1, то интерпретация $|G(t)|^2/m(t)$ через вероятность регистрации теряет силу. В частности, если система атомов в усилителе света полностью инвертирована, так что $N_1 = 0$, то данная интерпретация всегда ложна.

20.4.2. Полностью инвертированный усилитель света

Рассмотрим более детально последний предельный случай. Если $N_1 = 0$, то из определения (20.3.3) следует, что

$$-\frac{|G(t)|^2/m(t)(m(t)+1)}{1-|G(t)|^2/m(t)} = 1, \tag{20.4.19}$$

$$1-|G(t)|^2/m(t) = -1/[|G(t)|^2-1]. \tag{20.4.20}$$

Подставляя эти результаты в (20.4.17), можно выполнить суммирование по r. Используя алгебраические соотношения

$$\sum_{r=0}^{l}\binom{-n-1}{r}\binom{l}{r} = \begin{cases}\binom{n}{l}(-1)^l, & \text{если } l \leqslant n,\\ 0, & \text{если } l > n,\end{cases} \tag{20.4.21}$$

получаем формулу

$$p(n,t) = \frac{1}{[1+m(t)][1+1/m(t)]^n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left[\frac{1}{|G(t)|^2-1}\right]^l p(l,0). \tag{20.4.22}$$

Обрезание при $l = n$ есть следствие того факта, что полностью инвертированный усилитель света может только увеличивать число фотонов, но не уменьшать его.

Ряд в (20.4.22) можно просуммировать в некоторых частных случаях. Если $p(l,0)$ является распределением Бозе — Эйнштейна, как в случае теплового света на входе усилителя, то таковым является и $p(n,t)$. Если поле на входе находится в фоковском состоянии $|n_0\rangle$, то $p(l,0) = \delta_{ln_0}$, и сумма в (20.4.22) сводится к одному слагаемому. Используя подстановку $n = n_0 + r$, можно выразить $p(n,t)$ в виде отрицательного биномиального распределения, т.е.

$$p(n_0+r,t) = \frac{1}{|G(t)|^{2(n_0+1)}}\binom{-n_0-1}{r}[1/|G(t)|^2-1]^r. \tag{20.4.23}$$

Несмотря на появление отрицательного множителя $1/|G(t)|^2-1$, величина $p(n_0+r,t)$, конечно, положительна для всех $r \geqslant 0$.

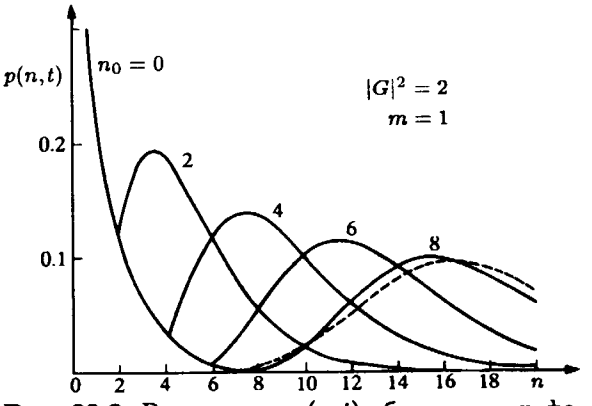


Рис. 20.2. Вероятность $p(n,t)$ обнаружить n фотонов на выходе усилителя (непрерывные кривые) при разных значениях числа фотонов n_0 на входе и при условии, что $|G(t)|^2 = 2$, $N_1 = 0$. Пунктирная линия — пуассоновское распределение, среднее которого совпадает со средним для $n_0 = 8$ (Friberg and Mandel, 1984)

На рис. 20.2 показана форма распределения $p(n,t)$ для различных значений числа фотонов на входе n_0, в частном случае, когда коэффициент усиления имеет клонирующее значение $|G(t)|^2$. Несмотря на то, что фотоны на входе усилителя являются, конечно, субпуассоновскими, фотоны на выходе являются суперпуассоновскими, что видно из (20.4.23) или непосредственно из (20.4.2), поскольку усилитель вносит спонтанное излучение. Из рис. 20.2 ясно видно, что если $|G(t)|^2 = 2$, то $p(n,t)$ стремится к пуассоновскому распределению при $n_0 \to \infty$.

20.5. Сжатый свет

Если свет на входе усилителя находится в (квадратурно) сжатом состоянии (см. разд. 21.1), то существует некоторый фазовый угол θ, такой, что действительная квадратурная амплитуда

$$\hat{Q}(0) \equiv \hat{a}(0)\,e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger(0)\,e^{i\theta} \tag{20.5.1}$$

имеет дисперсию, которая меньше вакуумного значения 1, т.е.

$$\langle(\Delta\hat{Q}(0))^2\rangle < 1. \tag{20.5.2}$$

Флуктуации квадратурной компоненты $\hat{Q}$ будут меньше, чем в вакуумном состоянии, за счет соответствующего увеличения флуктуаций сопряженной квадратурной амплитуды. Определим, при каких условиях медленно меняющееся поле на выходе усилителя $\hat{Q}(t)$, определяемое формулой

$$\hat{Q}(t) \equiv \hat{a}(t)\,\mathrm{e}^{i(\omega t-\theta)} + \hat{a}^\dagger(t)\,\mathrm{e}^{-i(\omega t\theta)} \tag{20.5.3}$$

оказывается сжатым, если на вход подается сжатое поле (Friberg and Mandel, 1983; Hong, Friberg and Mandel, 1985).

Из формулы (20.5.3) и коммутационных соотношений имеем

$$\langle(\Delta\hat{Q}(t))^2\rangle = \langle(\Delta\hat{a}(t))^2\rangle\,\mathrm{e}^{2i(\omega t-\theta)} + \langle(\Delta\hat{a}^\dagger(t))^2\rangle\,\mathrm{e}^{-2i(\omega t-\theta)} + 2\langle\Delta\hat{a}^\dagger(t)\Delta\hat{a}(t)\rangle + 1 \tag{20.5.4}$$

и с помощью (20.3.7) и (20.3.8) получаем соотношение

$$\langle(\Delta\hat{Q}(t))^2\rangle = |G(t)|^2[\langle[\Delta\hat{a}(0)]^2\rangle\,\mathrm{e}^{-2i(\omega t-\theta)} + \langle(\Delta\hat{a}^\dagger(0))^2\rangle\,\mathrm{e}^{2i(\omega t-\theta)} + 2\langle\Delta\hat{a}^\dagger(0)\rangle\langle\Delta\hat{a}(0)\rangle] + 2m(t) + 1. \tag{20.5.5}$$

Если ввести величину $\langle(\Delta\hat{Q}(0))^2\rangle$, используя формулу (20.5.1), и воспользоваться соотношением (20.3.3), то можно выразить последний результат в виде

$$\begin{aligned}\langle(\Delta\hat{Q}(t))^2\rangle &= |G(t)|^2\langle(\Delta\hat{Q}(t))^2\rangle + 2m(t) + 1 - |G(t)|^2 = \\ &= |G(t)|^2\langle(\Delta\hat{Q}(t))^2\rangle + [|G(t)|^2 - 1](N_2 + N_1)/(N_2 - N_1).\end{aligned} \tag{20.5.6}$$

Чтобы $\hat{Q}(t)$ была сжата, т.е. $\langle(\Delta\hat{Q}(t))^2\rangle$ была меньше единицы, необходимо выполнение условия

$$|G(t)|^2 < \frac{2}{(1 + N_1/N_2) + (1 - N_1/N_2)\langle(\Delta\hat{Q}(t))^2\rangle}. \tag{20.5.7}$$

Легко видеть, что это условие может быть удовлетворено, только если $\langle(\Delta\hat{Q}(0))^2\rangle < 1$, т.е. если на вход усилителя подается сжатый свет. Более того, поскольку $\langle(\Delta\hat{Q}(0))^2\rangle \geqslant 0$, условие (20.5.7) означает, что

$$|G(t)|^2 < \frac{2}{(1 + N_1/N_2)} \leqslant 2. \tag{20.5.8}$$

Следовательно, опять находим, что неклассические свойства, связанные в данном случае со сжатием света на выходе, пропадают, если коэффициент усиления по интенсивности превышает так называемое клонирующее значение $|G(t)|^2 = 2$.

20.6. Условие, при котором поле на выходе усилителя является классическим

Хотя мы показали, что два неклассических свойства света на выходе усилителя, а именно субпуассоновская статистика и сжатие, пропадают, если коэффициент усиления интенсивности $|G(t)|^2$ превышает значение 2, остается возможность существования некоторых других неклассических свойств. Однако нетрудно показать более общими рассуждениями, что все неклассические свойства света должны исчезнуть на выходе усилителя, если коэффициент усиления достаточно большой, хотя такое общее рассуждение приводит к существенно более слабому условию для $|G(t)|^2$.

Для начала перепишем выражение (20.3.1) для поля на выходе усилителя в виде

$$\phi(v,t) = \frac{1}{\pi m(t)}\int \phi_0(v')\exp[-|v' - v/G(t)|^2/(m(t)/|G(t)|^2)]\,d^2v'. \tag{20.6.1}$$

Из диагонального представления (20.2.3) сразу следует, что матричный элемент $\langle v/G(t)|\hat{\rho}(0)|v/G(t)\rangle$, где $|v/G(t)\rangle$ — когерентное состояние, задается формулой

$$\frac{1}{\pi m(t)}\langle v/G(t)|\hat{\rho}(0)|v/G(t)\rangle = \frac{1}{\pi m(t)}\int \phi_0(v')|\langle v/G(t)|v'\rangle|^2\, d^2v' = \frac{1}{\pi m(t)}\int \phi_0(v')\,\mathrm{e}^{-i|v'-v/G(t)|^2}\, d^2v', \quad (20.6.2)$$

если воспользоваться соотношением для скалярного произведения двух когерентных состояний. Теперь учтем, что матричный элемент $\langle v/G|\hat{\rho}(0)|v/G\rangle$, будучи средним значением эрмитового, неотрицательно определенного оператора, является, конечно, действительным и неотрицательным, так что

$$\frac{1}{\pi m(t)}\int \phi_0(v')\,\mathrm{e}^{-i|v'-v/G(t)|^2}\, d^2v' \geqslant 0 \quad (20.6.3)$$

для любого $\phi_0(v')$. Положим $v/G(t) = v_0$ под знаком интеграла, умножим на $\exp(-|v_0 - v''|^2/\beta)$, где β — действительная и положительная величина, и проинтегрируем относительно v_0 по всем комплексным v_0. Тогда из (20.6.3) получаем для всех v''

$$\frac{\pi}{1+1/\beta}\int \phi_0(v')\,\mathrm{e}^{-i|v'-v''|^2/(1+\beta)}\, d^2v' \geqslant 0. \quad (20.6.4)$$

При сравнении этого отношения с (20.6.1) становится ясным, что если $(1+\beta)$ отождествить с $m(t)/|G(t)|^2$, то $\phi(v,t)$ будет действительной величиной и

$$\phi(v,t) \geqslant 0. \quad (20.6.5)$$

Это неравенство означает, что плотность в фазовом пространстве $\phi(v,t)$ является плотностью вероятности, и что соответствующее квантовое состояние света на выходе усилителя имеет классическое описание. Другими словами, в этих условиях свет на выходе не имеет каких-либо квантовых свойств. Однако чтобы иметь возможность отождествить $1+\beta$ с $m(t)/|G(t)|^2$, необходимо, очевидно, чтобы

$$m(t)/|G(t)|^2 \geqslant 1, \quad (20.6.6)$$

а это, в свою очередь, с учетом (20.3.3), требует

$$|G(t)|^2 \geqslant N_2/N_1. \quad (20.6.7)$$

Таким образом, мы получили предельное значение для коэффициента усиления $|G(t)|^2$, при котором поле на выходе является классическим. Однако условие (20.6.7) не является необходимым для отсутствия квантовых свойств. В частности, если $N_2 \gg N_1$, то условие (20.6.7) трудно выполнимо, и более полезными оказываются условия (20.4.9) и (20.5.8). Область значений коэффициента усиления, лежащая между границами (20.4.9) или (20.5.8) и (20.6.7) была изучена Агарвалом и Тара (Agarwal and Tara, 1992). Они обнаружили, что действительная часть комплексного поля на выходе усилителя может также иметь неклассические свойства, но все они исчезают, когда $|G(t)|^2 > 2(1 + N_1/N_2)^{-1}$.

Задачи

20.1 Может ли линейный усилитель света «усилить» падающий фотон так, чтобы выходящий фотон не зависел от поляризации входящего? Рассмотрите усилитель, состоящий из двух двухуровневых атомов, которые оба облучаются одинаковым падающим полем.

20.2 Рассмотрите усилитель света, состоящий из N_2 возбужденных и N_1 невозбужденных двухуровневых атомов. Покажите, что условие $|G(t)|^2 \geqslant N_2/N_1$ для коэффициента усиления G не является необходимым для того, чтобы поле на выходе усилителя было классическим. Привести пример, когда это условие нарушается, а поле на выходе усилителя находится в классическом состоянии.

Глава 21

СЖАТЫЕ СОСТОЯНИЯ СВЕТА

В разд. 11.5 мы показали, что, хотя комплексная амплитуда электромагнитного поля хорошо определена в когерентном состоянии, однако, действительная и мнимая (эрмитова и антиэрмитова) части поля испытывают флуктуации с равными дисперсиями. Феномен вакуумных флуктуаций есть проявление этого эффекта потому, что вакуумное состояние является примером особого когерентного состояния. Это поведение поля полностью отличается от того, что происходит с обычным, классическим полем. В сжатом состоянии, которое даже более неклассическое, как мы еще увидим, одна часть поля флуктуирует меньше, а другая часть больше, чем в вакуумном состоянии. В общем случае сжатое состояние есть такое состояние, в котором распределение канонических переменных по фазовому пространству искажено, «сжато», таким образом, что дисперсия одной канонической переменной уменьшается ценой увеличения дисперсии другой переменной. Далее мы будем исследовать свойства сжатых состояний для случая, когда двумя каноническими переменными являются две квадратуры электромагнитного поля. Хотя понятие сжатия применяется иногда к иным переменным, чем две полевые квадратуры, оно менее значимо в таких случаях. Более детально ознакомиться со сжатыми состояниями можно в уже опубликованных обзорах: (Walls, 1983; Schumaker, 1986; Loudon and Knight, 1987; Teich and Saleh, 1989, Kimble, 1992)[1].

21.1. Определение квадратурного сжатия

Начнем с рассмотрения сжатия одномодового поля. Двухмодовое сжатие обладает дополнительными особенностями, и было исследовано в следующих работах: (Caves, 1981, 1982; Milburn, 1984; Caves and Schumaker, 1985; Fan, Zaidi and Klauder, 1987; Fan, 1990). Сначала определим две безразмерные переменные $\hat{P}'$ и $\hat{Q}'$, представляющие действительную и мнимую части комплексной амплитуды, через операторы уничтожения и рождения:

$$\hat{Q}' = \hat{a}^\dagger + \hat{a}, \quad \hat{P}' = i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \tag{21.1.1}$$

Из коммутационных соотношений для $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$ находим, что

$$[\hat{Q}', \hat{P}'] = 2i, \tag{21.1.2}$$

поэтому $\hat{Q}'$ и $\hat{P}'$ ведут себя подобно безразмерным канонически сопряженным переменным. Они, следовательно, удовлетворяют соотношению неопределенности

$$\langle(\Delta\hat{Q}')^2\rangle^{1/2}\langle(\Delta\hat{P}')^2\rangle^{1/2} \geqslant 1 \tag{21.1.3}$$

независимо от того, каким является квантовое состояние. Другая интерпретация $\hat{Q}'$ и $\hat{P}'$ напрашивается, если мы выразим полевой вектор $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ для одномодового, линейно поляризованного поля в виде

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = l(\omega)\boldsymbol{\varepsilon}[\hat{a}\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{a}^\dagger\,\mathrm{e}^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}], \tag{21.1.4}$$

[1] Детальное обсуждение сжатых состояний света можно найти также в книге (*Scully, Zubairy, 1997). Проблемы сжатия вакуумных флуктуаций, сжатия лазерного света и сжатых состояний в световых импульсах подробно обсуждаются в книге (*Ахманов, Белинский, Чиркин, 1990) — *ред. пер.*

где $l(\omega)$ — некоторая действительная функция частоты. Затем находим, выражая $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ через $\hat{Q}'$, $\hat{P}'$, что

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = l(\omega)\boldsymbol{\varepsilon}[\hat{Q}'\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t) - \hat{P}'\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)]. \tag{21.1.5}$$

Следовательно, канонические переменные $\hat{Q}'$, $\hat{P}'$ являются, кроме того, амплитудами квадратур, на которые может быть разложено осциллирующее поле.

Характерная особенность когерентного состояния, включая вакуумное состояние, состоит в том, что дисперсии безразмерных квадратурных амплитуд $\hat{Q}'$, $\hat{P}'$ равны между собой,

$$\langle(\Delta\hat{Q}')^2\rangle = 1, \quad \langle(\Delta\hat{P}')^2\rangle = 1, \tag{21.1.6}$$

так что произведение неопределенностей имеет минимальное значение. Для этого состояния мы можем найти, что распределение $\hat{Q}'$, $\hat{P}'$ в фазовом пространстве имеет круговую симметрию, а элементарная ячейка является кругом (см. рис. 21.1). Если существует состояние, для которого $\hat{Q}'$ или $\hat{P}'$ имеет дисперсию ниже единицы, т.е. ниже вакуумного уровня, ценой соответствующего увеличения дисперсии другой переменной, тогда соответствующее распределение в фазовом пространстве принимает форму эллипса, и мы называем соответствующее состояние *сжатым состоянием* (см. рис. 21.1).



Рис. 21.1. Иллюстрация сжатого (эллиптическая форма) распределения в фазовом пространстве в сравнении с соответствующим распределением для когерентного (круг) состояния

Сжатие необязательно ограничено переменными $\hat{Q}'$ или $\hat{P}'$, определенными выражениями (21.1.1), и, как показано на рис. 21.1, главная ось эллипса может смотреть в направлении, отличном от направления Q', P' осей. Мы можем легко учесть эту возможность в определении сжатого состояния, задавая более общие переменные $\hat{Q}$, $\hat{P}$ для произвольного угла β, соотношениями

$$\hat{Q} = \hat{a}^\dagger e^{i\beta} + \hat{a}e^{-i\beta}, \quad \hat{P} = \hat{a}^\dagger e^{i\beta+\pi/2} + \hat{a}e^{-i\beta+\pi/2}. \tag{21.1.7}$$

Они удовлетворяют тем же самым коммутационным соотношениям и соотношению неопределенности, что и $\hat{Q}'$, $\hat{P}'$, и их дисперсии равны единице в вакуумном состоянии. В переменных $\hat{Q}$ и $\hat{P}$, $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ имеет вид

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = l(\omega)\boldsymbol{\varepsilon}[\hat{Q}'\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\beta) - \hat{P}'\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\beta)]. \tag{21.1.8}$$

Из определения очевидно, что $\hat{P}$ отличается от $\hat{Q}$ только тем, что угол β увеличен на $\pi/2$. Отклонения $\Delta\hat{Q}$, $\Delta\hat{P}$ связаны с $\Delta\hat{Q}'$, $\Delta\hat{P}'$ поворотом на угол β, т.е.

$$\Delta\hat{Q} = \Delta\hat{Q}'\cos\beta + \Delta\hat{P}'\sin\beta, \quad \Delta\hat{P} = -\Delta\hat{Q}'\sin\beta + \Delta\hat{P}'\cos\beta. \tag{21.1.9}$$

Затем мы определяем сжатое состояние в общем случае условием, что существует угол β, для которого дисперсия $\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle$ меньше, чем в вакуумном состоянии, т.е. $\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle < 1$. Из соотношения неопределенности (21.1.3) тогда следует, что в этом состоянии обязательно $\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle > 1$. Произведение неопределенностей в сжатом состоянии может превышать свое минимальное значение, равное единице.

Поучительно проиллюстрировать эффект сжатия на флуктуациях электрического поля **E** так, как если бы они могли быть измерены и отображены на осциллографе. Результаты могли бы выглядеть, как показано на рис. 21.2. Здесь *а* соответствует вакуумному состоянию; *б* — когерентному состоянию, для которого неопределенности **E** распределены однородно по всему кругу; *в* — сжатому состоянию с уменьшенной фазовой неопределенностью и увеличенной амплитудной неопределенностью; *г* — сжатому состоянию с уменьшенной амплитудной неопределенностью и увеличенной фазовой неопределенностью.

Понятие сжатия иногда применяется к иным каноническим переменным, чем две квадратурные амплитуды, которые мы рассмотрели выше, даже когда обе переменные совершенно отличаются и имеют разные размерности. Это может привести к неоднозначности при интерпретации. Мы ограничим наше обсуждение только таким случаем, для которого канонические переменные являются полевыми квадратурами. К тому же, на явление сжатия иногда ссылаются, как на *квадратурное сжатие*. Такие сжатые состояния были введены и изучены в следующих работах: (Stoler, 1970, 1971; Yuen, 1976; Caves, 1981; Caves and Shumaker, 1985; Shumaker and Caves, 1985 и др).

21.2. Квантовая природа сжатого состояния

На первый взгляд может показаться, что квантовое состояние, в котором флуктуации слабее чем в когерентном состоянии, должно выглядеть даже более классическим, чем когерентное состояние. Но, конечно, в сжатом состоянии только одна полевая квадратура имеет малые флуктуации, в то время как флуктуации другой квадратуры сильнее. Хотя возможно построить распределение в классическом фазовом пространстве с особенностями, изображенными на рис. 21.2*в* и *г*, когда сжатое состояние является всегда неклассическим в обычном смысле; т.е., диагональное представление матрицы плотности через когерентные состояния не является классической плотностью вероятности (ср. разд. 11.8).

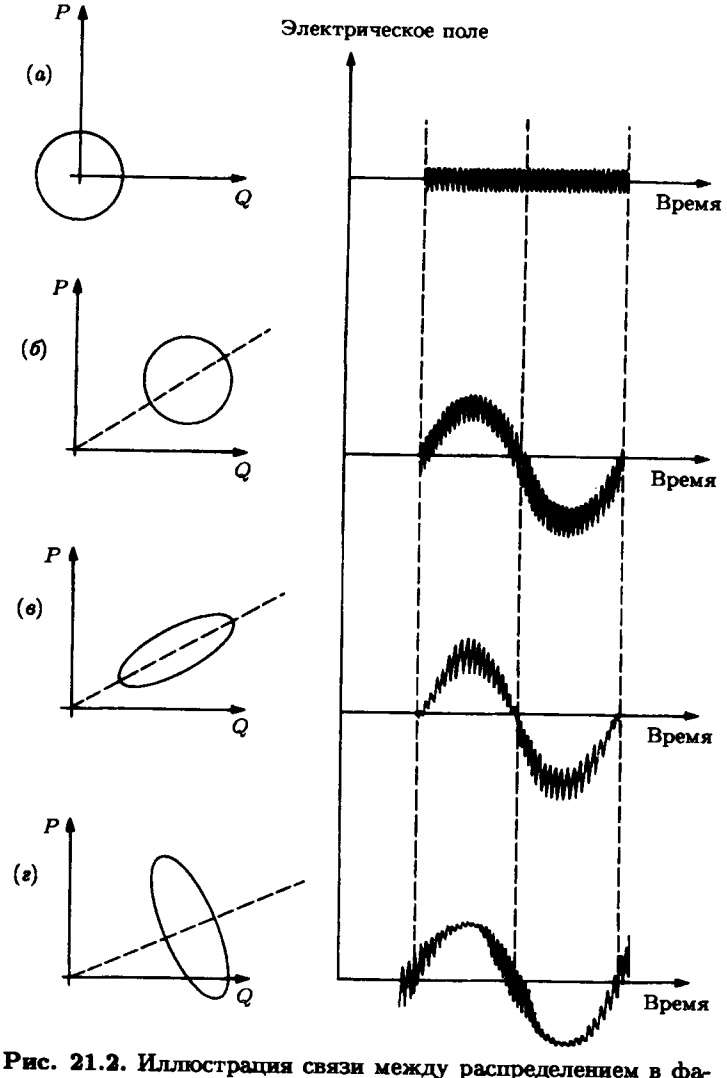


Рис. 21.2. Иллюстрация связи между распределением в фазовом пространстве и флуктуациями электрического поля для: *а* — вакуумного состояния; *б* — когерентного состояния; *в* — сжатого состояния с уменьшенной фазовой неопределенностью; *г* — сжатого состояния с уменьшенной амплитудной неопределенностью

Мы определяем сжатое состояние таким условием, что

$$\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle < 1 \quad \text{для некоторого } \beta, \qquad (21.2.1)$$

и используем (21.1.7), чтобы связать $\langle\hat{Q}^2\rangle$ с нормально упорядоченным математическим ожиданием $\langle: \hat{Q}^2 :\rangle$. Тогда получаем соотношения

$$\langle: \hat{Q}^2 :\rangle = \langle\hat{a}^{\dagger 2}\rangle\, e^{2i\beta} + \langle\hat{a}^2\rangle\, e^{-2i\beta} + \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle,$$
$$\langle\hat{Q}^2\rangle = \langle\hat{a}^{\dagger 2}\rangle\, e^{2i\beta} + \langle\hat{a}^2\rangle\, e^{-2i\beta} + \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle + \langle\hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle.$$

Поскольку $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, мы немедленно находим, что $\langle: \hat{Q}^2 :\rangle = \langle\hat{Q}^2\rangle - 1$, поэтому

$$\langle: (\Delta\hat{Q})^2 :\rangle = \langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle - 1. \qquad (21.2.2)$$

Из определения (21.2.1) следует, что для сжатого состояния

$$\langle: (\Delta\hat{Q})^2 :\rangle < 0 \quad \text{для некоторого } \beta, \qquad (21.2.3)$$

и это неравенство может быть рассмотрено в качестве альтернативного, но эквивалентного, определения сжатия.

Теперь обратимся к теореме оптической эквивалентности для средних значений нормально упорядоченных операторов (см. разд. 11.9). При этом выражение для оператора плотности $\hat{\rho}$ возьмем в диагональном представлении по когерентным состояниям, т.е.,

$$\hat{\rho} = \int \phi(v)|v\rangle\langle v|\, d^2v. \qquad (21.2.4)$$

Тогда мы имеем соотношение

$$\langle: (\Delta\hat{Q})^2 :\rangle = \int (\Delta\hat{Q})^2 \phi(v)\, d^2v. \qquad (21.2.5)$$

Здесь $(\Delta\hat{Q})^2$ является c-числом, соответствующим $: (\Delta\hat{Q})^2 :$, которое получается путем замены каждого $\hat{a}$ на v и каждого $\hat{a}^\dagger$ на v^*. Из (21.1.7) видно, что

$$(\Delta\hat{Q})^2 = (\Delta v^*\, e^{i\beta} + \Delta v\, e^{-i\beta})^2. \qquad (21.2.6)$$

Условие (21.2.3) сжатия может быть выражено в виде

$$\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle_\phi = \int \phi(v)(\Delta v^*\, e^{i\beta} + \Delta v\, e^{-i\beta})^2\, d^2v < 0 \quad \text{для некоторого } \beta. \tag{21.2.7}$$

Поскольку $(\Delta\hat{Q})^2$ — действительная и неотрицательная величина, $\phi(v) < 0$ и поэтому $\phi(v)$ не может быть классической функцией распределения, если неравенство (21.2.7) должно быть удовлетворено. Классические состояния характеризуются тем, что их весовая функция (плотность распределения в фазовом пространстве) есть истинная плотность вероятности. Следовательно, сжатое состояние всегда является квантово-механическим и не имеет аналогов в классической электромагнитной теории.

21.3. Унитарный оператор сжатия

Сжатое одномодовое состояние можно создать из несжатого состояния действием следующего простого унитарного оператора (Stoler, 1970, 1971; Yuen, 1976; Hollenhorst, 1979; Caves, 1981; Fisher, Nieto and Sandberg, 1984; Caves and Schumaker, 1985; Schumaker and Caves, 1985)

$$\hat{S}(z) = \exp\tfrac{1}{2}(z^*\hat{a}^2 - z\hat{a}^{\dagger 2}), \quad z = r\, e^{i\theta}, \tag{21.3.1}$$

который известен, как *оператор сжатия*. Это более общая форма оператора, с которым мы столкнулись в разд. 11.5. С помощью теоремы об операторном разложении (10.11.1) мы легко находим для унитарного преобразования оператора $\hat{a}$ оператором $\hat{S}(z)$, что

$$\hat{A}_z \equiv \hat{S}(z)\hat{a}\hat{S}^\dagger(z) = \hat{a} + z\hat{a}^\dagger + \frac{|z|^2\hat{a}}{2!} + \frac{z|z|^2\hat{a}^\dagger}{3!} + \ldots = \hat{a}\,\mathrm{ch}\, r + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}\,\mathrm{sh}\, r = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger, \tag{21.3.2}$$

где

$$\mu \equiv \mathrm{ch}\, r, \quad \nu \equiv e^{i\theta}\,\mathrm{sh}\, r. \tag{21.3.3}$$

Подобным образом получаем

$$\hat{A}^\dagger(z) = \hat{S}(z)\hat{a}^\dagger\hat{S}^\dagger(z) = \mu\hat{a}^\dagger + \nu^*\hat{a}. \tag{21.3.4}$$

Чтобы сократить обозначения, мы будем иногда писать $\hat{A}$ вместо $\hat{A}(z)$, но важно иметь в виду, что $\hat{A}$ зависит от z. Так как

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1 \tag{21.3.5}$$

по определению, то отсюда следует, что

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 1, \tag{21.3.6}$$

поэтому $\hat{A}$, $\hat{A}^\dagger$ являются операторами псевдоуничтожения и псевдорождения, подобными в некотором отношении $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$. Обращая выражения (21.3.2) и (21.3.4), немедленно получаем соотношения

$$\hat{a} = \mu\hat{A} - \nu\hat{A}^\dagger, \quad \hat{a}^\dagger = \mu\hat{A}^\dagger - \nu^*\hat{A}. \tag{21.3.7}$$

Состояние, полученное в результате действия оператора сжатия $\hat{S}(z)$ на когерентное состояние $|v\rangle$, было изучено недавно Йеном (Yuen, 1976), который назвал его *двухфотонным когерентным состоянием*. Мы будем использовать обозначение

$$|[z, v]\rangle \equiv \hat{S}(z)|v\rangle \tag{21.3.8}$$

для двухфотонного когерентного состояния. С учетом определений, легко находим, что

$$\hat{A}(z)|[z, v]\rangle = \hat{S}(z)\hat{a}\hat{S}^\dagger(z)\hat{S}(z)|v\rangle = \hat{S}(z)\hat{a}|v\rangle = v\hat{S}(z)|v\rangle = v|[z, v]\rangle, \tag{21.3.9}$$

и, после эрмитового сопряжения,

$$\langle[z, v]|\hat{A}^\dagger(z) = v^*\langle[z, v]|. \tag{21.3.10}$$

Следовательно, $\hat{A}$, $\hat{A}^\dagger$ находятся в той же самой связи и имеют те же самые собственные значения по отношению к $|[z, v]\rangle$, как и $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ по отношению к когерентному состоянию $|v\rangle$.

21.3.1. Сжатие двухфотонного когерентного состояния

Чтобы показать, что состояние $|[z,v]\rangle$ действительно является сжатым, вычислим теперь $\langle\hat{Q}\rangle$ и дисперсию $\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle$ в двухфотонном когерентном состоянии. Из определения (21.1.7) и выражений (21.3.7)—(21.3.10) получаем

$$\langle[z,v]|\hat{Q}|[z,v]\rangle = \langle[z,v]|(\mu\hat{A}^\dagger - \nu^*\hat{A})\,e^{i\beta} + (\mu\hat{A} - \nu\hat{A}^\dagger)\,e^{-i\beta}|[z,v]\rangle = \\ = (\mu v^* - \nu^* v)\,e^{i\beta} + (\mu v - \nu v^*)\,e^{-i\beta}, \quad (21.3.11)$$

$$\langle[z,v]|\hat{Q}^2|[z,v]\rangle = \langle[z,v]|[(\mu\hat{A}^\dagger - \nu^*\hat{A})^2\,e^{2i\beta} + (\mu\hat{A} - \nu\hat{A}^\dagger)^2\,e^{-2i\beta} + 2(\mu\hat{A}^\dagger - \nu^*\hat{A})(\mu\hat{A} - \nu\hat{A}^\dagger) + 1]|[z,v]\rangle = \\ = [(\mu v^* - \nu^* v)^2 - \mu\nu]\,e^{2i\beta} + [(\mu v - \nu v^*)^2 - \mu\nu]\,e^{-2i\beta} + 2|\mu v^* - \nu^* v|^2 + 2|\nu|^2 + 1, \quad (21.3.12)$$

поэтому

$$\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle = \langle\hat{Q}^2\rangle - \langle\hat{Q}\rangle^2 = 2|\nu|^2 + 1 - (\mu\nu^*\,e^{2i\beta} + \mu\nu\,e^{-2i\beta}) = \operatorname{ch} 2r - \operatorname{sh} 2r\cos(\theta - 2\beta). \quad (21.3.13)$$

Следовательно, когда $\beta = \theta/2$, $\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle$ принимает свое наименьшее значение

$$\langle[z,v]|(\Delta\hat{Q})^2|[z,v]\rangle = \operatorname{ch} 2r - \operatorname{sh} 2r = e^{-2r}, \quad (21.3.14)$$

которое меньше единицы для всех $z \neq 0$. Двухфотонное когерентное состояние $|[z,v]\rangle$ является, следовательно, сжатым состоянием, в соответствии с нашим определением. При таком выборе β мы получим из (21.3.11) и (21.3.12) для первых двух моментов $\hat{Q}$:

$$\langle[z,v]|\hat{Q}|[z,v]\rangle = 2|v|\cos(\arg v - \theta/2)\,e^{-r}, \quad (21.3.15)$$

$$\langle[z,v]|\hat{Q}^2|[z,v]\rangle = [1 + 4|v|^2\cos^2(\arg v - \theta/2)]\,e^{-2r}. \quad (21.3.16)$$

Подобным образом можно легко показать, что для того же значения β дисперсия $\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle = e^{2r}$. Флуктуации $\hat{P}$, следовательно, превосходят флуктуации в вакуумном состоянии, в то время как флуктуации $\hat{Q}$ ниже вакуумного уровня. Однако произведение неопределенностей остается равным единице и имеет минимальное значение. Распределение в фазовом пространстве является эллиптическим (см. рис. 21.1) с эксцентриситетом, задаваемым выражением $(1 - e^{-4r})^{1/2}$. Эксцентриситет близок к единице, когда $r \gg 1$. Тогда эллипс вырождается почти в прямую линию. Параметр r иногда называют *параметром сжатия*.

21.3.2. Действие оператора сжатия на произвольное состояние

Нетрудно показать, при том же значении β, что оператор сжатия $\hat{S}(z)$, действуя на произвольное квантовое состояние, уменьшает дисперсию $\hat{Q}$ с тем же самым коэффициентом e^{-2r}. Рассмотрим одномодовое электромагнитное поле в состоянии, описываемом матрицей плотности $\hat{\rho}$. Запишем диагональное представление $\hat{\rho}$ по когерентным состояниям (см. разд. 11.8) в виде

$$\hat{\rho} = \int \phi(v)|v\rangle\langle v|\,d^2v. \quad (21.3.17)$$

Первые два момента $\hat{Q}$ в этом состоянии есть

$$\langle\hat{Q}\rangle = \operatorname{Tr}(\hat{Q}\hat{\rho}) = \operatorname{Tr}\int \phi(v)(\hat{a}\,e^{-i\beta} + \hat{a}^\dagger e^{i\beta})|v\rangle\langle v|\,d^2v = \int \phi(v)2|v|\cos(\arg v - \beta)\,d^2v,$$

$$\langle\hat{Q}^2\rangle = \operatorname{Tr}(\hat{Q}^2\hat{\rho}) = \operatorname{Tr}\int \phi(v)(\hat{a}\,e^{-i\beta} + \hat{a}^\dagger e^{i\beta})^2|v\rangle\langle v|\,d^2v = \int \phi(v)[4|v|^2\cos^2(\arg v - \beta) + 1]\,d^2v,$$

поэтому

$$\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle = 1 + \langle 4|v|^2\cos^2(\arg v - \beta)\rangle_\phi - \langle 2|v|\cos(\arg v - \beta)\rangle_\phi^2. \tag{21.3.18}$$

Символ $\langle\ \rangle_\phi$ обозначает операцию усреднения с помощью весовой функции $\phi(v)$, независимо от того, является ли $\phi(v)$ истинной плотностью вероятности, или нет.

Под действием оператора сжатия $\hat{S}(z)$ начальное состояние матрицы плотности $\hat{\rho}$ принимает вид

$$\hat{\rho}'' = \hat{S}(z)\hat{\rho}\hat{S}^\dagger(z). \tag{21.3.19}$$

Первый момент $\hat{Q}$ в новом состоянии задается, следовательно, выражением

$$\langle\hat{Q}''\rangle = \mathrm{Tr}\,[\hat{Q}\hat{\rho}''] = \mathrm{Tr}\int \phi(v)\hat{Q}\hat{S}(z)|v\rangle\langle v|\hat{S}^\dagger(z)\,d^2v = \int \phi(v)\langle[z,v]|\hat{Q}|[z,v]\rangle\,d^2v,$$

и с помощью (21.3.15) мы получаем формулу

$$\langle\hat{Q}''\rangle = \mathrm{e}^{-r}\int \phi(v)2|v|\cos(\arg v - \theta/2)\,d^2v. \tag{21.3.20}$$

Подобным образом находим из (21.3.16), что

$$\langle\hat{Q}''^2\rangle = \mathrm{e}^{-2r}\int \phi(v)[1 + 4|v|^2\cos^2(\arg v - \theta/2)]\,d^2v. \tag{21.3.21}$$

Отсюда следует, что дисперсия $\hat{Q}$ в новом состоянии $\hat{\rho}''$ имеет вид

$$\langle(\Delta\hat{Q}'')^2\rangle = \mathrm{e}^{-2r}[1 + \langle 4|v|^2\cos^2(\arg v - \theta/2)\rangle_\phi - \langle 2|v|\cos(\arg v - \theta/2)\rangle_\phi^2]. \tag{21.3.22}$$

Сравнивая выражения (21.3.18) и (21.3.22), мы видим, что при $\beta = \theta/2$

$$\langle(\Delta\hat{Q}'')^2\rangle = \mathrm{e}^{-2r}\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle, \tag{21.3.23}$$

что и требовалось доказать.

21.4. Идеальное сжатое состояние

Мы уже встречались с двухфотонным когерентным состоянием $|[z,v]\rangle$ (Yuen, 1976), которое получается в результате действия оператора сжатия $\hat{S}(z)$ на когерентное состояние $|v\rangle$. Когерентное состояние $|v\rangle$ может быть получено при действии унитарного оператора смещения (Glauber, 1963) $D(v) \equiv \mathrm{e}^{(v\hat{a}^\dagger - v^*\hat{a})}$ на вакуумное состояние (ср. разд. 11.3), поэтому

$$|[z,v]\rangle \equiv \hat{S}(z)\hat{D}(v)|\mathrm{vac}\rangle. \tag{21.4.1}$$

С другой стороны, можно создать сжатое состояние, действуя двумя операторами $\hat{S}(z)$ и $\hat{D}(v)$ в обратном порядке. Результирующее состояние

$$|(v,z)\rangle \equiv \hat{D}(v)\hat{S}(z)|\mathrm{vac}\rangle \tag{21.4.2}$$

было названо *идеальным сжатым состоянием* (Caves, 1981) из-за своих простых свойств. Поскольку $\hat{S}(z)$ и $\hat{D}(v)$ не коммутируют, то два состояния $|[z,v]\rangle$ и $|(v,z)\rangle$ различны. Связь между этими двумя состояниями может быть получена из следующих операторных тождеств (Fisher, Nieto and Sandberg, 1984), которые мы приведем без доказательства,

$$\hat{D}(v)\hat{S}(z) = \hat{S}(z)\hat{D}(\tilde{v}_+), \quad \hat{S}(z)\hat{D}(v) = \hat{D}(\tilde{v}_-)\hat{S}(z), \tag{21.4.3}$$

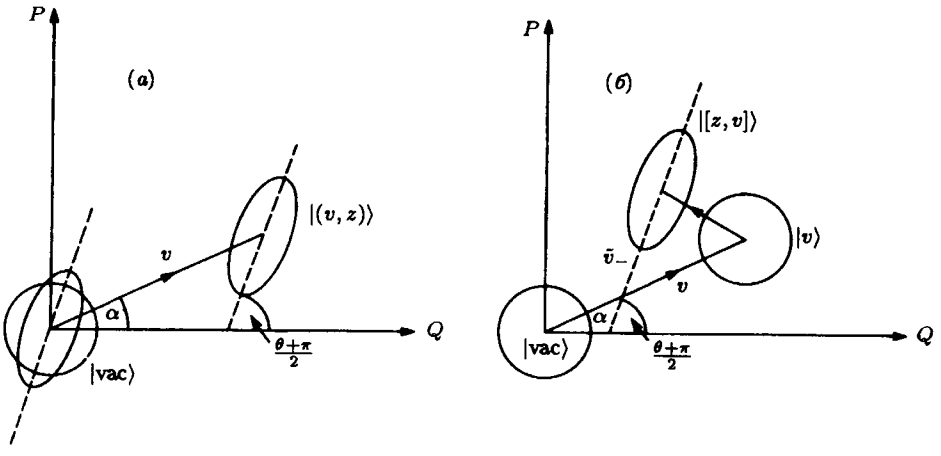


Рис. 21.3. Иллюстрация создания из вакуумного состояния (*а*) идеального сжатого состояния $|(v,z)\rangle$; (*б*) двухфотонного когерентного состояния $|[z,v]\rangle$. Угол θ на рисунке является отрицательным

где

$$\tilde{v}_{\pm}(z) = \mu v \pm \nu v^*, \tag{21.4.4}$$

и μ, ν были заданы выше выражениями (21.3.3). Чтобы упростить обозначение, мы часто будем писать $\tilde{v}_{\pm}$ вместо $\tilde{v}_{\pm}(z)$, но их зависимость от z все еще подразумевается. Это приводит к следующему соотношению между идеальным сжатым состоянием и двухфотонным когерентным состоянием:

$$|(v,z)\rangle = |[z,\tilde{v}_+]\rangle, \quad |[z,v]\rangle = |(\tilde{v}_-,z)\rangle. \tag{21.4.5}$$

Следовательно, каждое идеальное сжатое состояние также являет собой пример двухфотонного когерентного состояния, и наоборот. Так как последнее состояние, как мы уже видели, является сжатым, то предшествующее тоже сжатое. Следует подчеркнуть, что z и v в уравнениях выше являются независимыми переменными, тогда как $\tilde{v}_{\pm}$, определяемые выражением (21.4.4), есть функции как от v, так и от z.

Так же, как и двухфотонное когерентное состояние, идеальное сжатое состояние является правым собственным состоянием оператора псевдоуничтожения $\hat{A}$. Поэтому, из выражений (21.3.9) и (21.4.5) мы имеем

$$\hat{A}|(v,z)\rangle = \hat{A}|[z,\tilde{v}_+]\rangle = \tilde{v}_+|[z,\tilde{v}_+]\rangle = \tilde{v}_+|(v,z)\rangle, \tag{21.4.6}$$

и после операции сопряжения получаем

$$\langle(v,z)|\tilde{v}_+^* = \langle(v,z)|\hat{A}^\dagger. \tag{21.4.7}$$

С помощью (21.3.7), (21.4.4), (21.4.6) и (21.4.7) мы находим для среднего значения $\hat{a}$ в идеальном сжатом состоянии

$$\langle(v,z)|\hat{a}|(v,z)\rangle = \langle(v,z)|\mu\hat{A} - \nu\hat{A}^\dagger|(v,z)\rangle = \mu\tilde{v}_+ - \nu\tilde{v}_+^* = (|\mu|^2 - |\nu|^2)v + (\mu\nu - \mu\nu)v^* = v, \tag{21.4.8}$$

тогда как соответствующее среднее значение в двухфотонном когерентном состоянии равно

$$\langle[z,v]|\hat{a}|[z,v]\rangle = \langle[z,v]|\mu\hat{A} - \nu\hat{A}^\dagger|[z,v]\rangle = \mu v - \nu v^* = \tilde{v}_-. \tag{21.4.9}$$

Если говорить не очень строго, то $\langle\hat{a}\rangle$ отождествляется с центром распределения в фазовом пространстве для данного состояния. Эллипс, характеризующий идеальное сжатое состояние $|(v,z)\rangle$, следовательно, центрирован в v, тогда как для двухфотонного когерентного состояния $|[z,v]\rangle$ он центрирован в $\tilde{v}_-$ (ср. рис. 21.3).

Рис. 21.3 иллюстрирует формирование состояний $|(v,z)\rangle$ и $|[z,v]\rangle$ из вакуумного под действием сжатия и смещения. Вакуумное состояние представлено кругом с центром в начале координат фазового пространства. Если оператор сжатия применяется первым, то круг становится эллипсом, и соответствующее

состояние иногда называют *сжатым вакуумным состоянием*, хотя оно не является вакуумным, как мы покажем ниже (см. рис. 21.3*а*). Действие оператора смещения $\hat{D}(v)$ после этого сводится к перемещению эллипса на v от начала координат (см. рис. 21.3*а*). С другой стороны, если применить оператор смещения $\hat{D}(v)$ первым, то вакуумное состояние становится когерентным состоянием $|v\rangle$, при этом круг перемещается на v (см. рис. 21.3*б*). Последующее действие оператора сжатия $\hat{S}(z)$ превращает круг в эллипс, но оно также вызывает дополнительное смещение к точке $\tilde{v}_-$ в фазовой плоскости. Именно отсутствие такого интерференционного эффекта между сжатием и смещением на рис. 21.3*а* делает идеальное сжатое состояние чрезвычайно простым.

21.4.1. Фотонная статистика

Среднее число фотонов в идеально сжатом состоянии $|(v,z)\rangle$ определяется формулой

$$\begin{aligned}\langle(v,z)|\hat{a}^\dagger\hat{a}|(v,z)\rangle &= \langle(v,z)|(\mu\hat{A}^\dagger - \nu^*\hat{A})(\mu\hat{A} - \nu\hat{A}^\dagger)|(v,z)\rangle = \\ &= \langle(v,z)||\mu|^2\hat{A}^\dagger\hat{A} - \mu\nu\hat{A}^{\dagger 2} - \mu\nu^*\hat{A}^2 + |\nu|^2(\hat{A}^\dagger\hat{A}+1)|(v,z)\rangle = \\ &= (|\mu|^2|\tilde{v}_+|^2 - \mu\nu\tilde{v}_+^{*2} - \mu\nu^*\tilde{v}_+^2 + |\nu|^2(|\tilde{v}_+|^2+1).\end{aligned}$$

Подставляя $\tilde{v}_+$ из (21.4.4), мы находим после некоторых алгебраических преобразований, что

$$\langle(v,z)|\hat{n}|(v,z)\rangle = |v|^2 + |\nu|^2. \tag{21.4.10}$$

Следовательно, сжатие дает вклад $|\nu|^2$ фотонов в это среднее значение, в то время как вклад от смещения составляет $|v|^2$ фотонов. В особом, так называемом «сжатом вакуумном» состоянии $|(0,z)\rangle$, имеем

$$\langle(0,z)|\hat{n}|(0,z)\rangle = |\nu|^2, \tag{21.4.11}$$

откуда очевидно, что это состояние вообще не является вакуумным состоянием. В противоположность этому, мы находим с помощью (21.4.5), что для двухфотонного когерентного состояния

$$\langle[z,v]|\hat{n}|[z,v]\rangle = \langle(\tilde{v}_-,z)|\hat{n}|(\tilde{v}_-,z)\rangle = |\tilde{v}_-|^2 + |\nu|^2. \tag{21.4.12}$$

Далее рассмотрим фотонные флуктуации в идеальном сжатом состоянии. С помощью (21.3.7) можно записать

$$\langle(v,z)|\hat{n}(\hat{n}-1)|(v,z)\rangle = \langle(v,z)|\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2|(v,z)\rangle = \langle(v,z)|(\mu\hat{A}^\dagger - \nu^*\hat{A})^2(\mu\hat{A} - \nu\hat{A}^\dagger)^2|(v,z)\rangle.$$

После расположения операторов в нормальном порядке, использования соотношений (21.4.6) и (21.4.7) для собственных функций и приведения подобных членов мы получаем в результате некоторых алгебраических процедур

$$\begin{aligned}\langle(v,z)|\hat{n}(\hat{n}-1)|(v,z)\rangle &= |\tilde{v}_+|^4(\mu^4 + |\nu|^4 + 4\mu^2|\nu|^2) + (\tilde{v}_+^4\mu^2\nu^{*2} + \text{к.с.}) - 2|\tilde{v}_+|^2[\tilde{v}_+^2\mu\nu^*(|\nu|^2+\mu^2) + \text{ к.с.}]+ \\ &+ |\tilde{v}_+|^2(4|\nu|^4 + 8\mu^2|\nu|^2) - [|\tilde{v}_+|^2\mu\nu^*(5|\nu|^2+\mu^2) + \text{к.с.}] + 2|\nu|^4 + \mu^2|\nu|^2.\end{aligned}$$

Комбинируя это выражение с (21.4.10) для $\langle\hat{n}\rangle$ и используя (21.3.3), получаем для отклонения от пуассоновской статистики формулу

$$\begin{aligned}\langle\hat{n}(\hat{n}-1)\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2 \equiv \langle(\Delta\hat{n})^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle &= |\tilde{v}_+|^2(\operatorname{ch}2r-1)(2\operatorname{ch}2r+1) - \\ &- (\operatorname{ch}r)(\operatorname{sh}r)(2\operatorname{ch}2r-1)(\tilde{v}_+^2\,\mathrm{e}^{-i\theta} + \text{к.с.}) + \operatorname{sh}^2 r\operatorname{ch}2r.\end{aligned} \tag{21.4.13}$$

И, наконец, воспользуемся определением (21.4.4), чтобы получить соотношения ($v = |v|\mathrm{e}^{i\alpha}$)

$$\begin{aligned}|\tilde{v}_+|^2 &= |v|^2[\operatorname{ch}2r + \operatorname{sh}2r\cos(2\alpha-\theta)], \\ |\tilde{v}_+|^2\,\mathrm{e}^{-i\theta} &= |v|^2[i\sin(2\alpha-\theta) + \operatorname{ch}2r\cos(2\alpha-\theta) + \operatorname{sh}2r],\end{aligned} \tag{21.4.14}$$

и затем подставим их в (21.4.13). После перестановки слагаемых мы в итоге приходим к результату

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle = |v|^2[-1 + \operatorname{ch} 2r + \operatorname{sh} 2r \cos(2\alpha - \theta)] + \operatorname{sh}^2 r \operatorname{ch} 2r. \tag{21.4.15}$$

В зависимости от фазового угла α эта величина может быть или положительной, или отрицательной, поэтому фотонная статистика идеально сжатого состояния может быть супер- или субпуассоновской. Из рис. 21.3*а* видно, что когда $\alpha = \theta/2$, неосновная ось эллипса лежит вдоль радиус-вектора от начала координат к центру, и интенсивность или флуктуации числа фотонов тогда наименьшие. Мы уже видели (ср. разд. 12.10.3), что удобно характеризовать отклонение от пуассоновской статистики с помощью параметра

$$\mathscr{Q} = \frac{\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle}{\langle\hat{n}\rangle},$$

который отрицателен для субпуассоновской статистики и равен -1 для фоковского состояния. С помощью выражений (21.4.15) и (21.4.10) находим, когда $\alpha = \theta/2$, что

$$\mathscr{Q} = \frac{|v|^2(-1 + \mathrm{e}^{-2r}) + \operatorname{sh}^2 r \operatorname{ch} 2r}{|v|^2 + \operatorname{sh}^2 r}. \tag{21.4.16}$$

Предположим, что параметр сжатия $r \gg 1$ и что смещение достаточно большое $|v|^2 \gg \mathrm{e}^{2r}$. Тогда выражение (21.4.16) дает

$$\mathscr{Q} \approx -1 + \frac{\operatorname{sh}^2 r \operatorname{ch} 2r}{|v|^2}. \tag{21.4.17}$$

Если $|v|^2$ является достаточно большой величиной даже по сравнению с e^{4r}, тогда $\mathscr{Q} \approx -1$, что соответствует полному отсутствию флуктуаций числа фотонов. На сжатое состояние с $\mathscr{Q} < 0$ иногда ссылаются как на *сжатое по числам фотонов состояние.*

В противоположность этому, когда $\alpha = \theta/2 + \pi/2$, эллипс поворачивается на 90° и основная ось эллипса лежит вдоль радиуса вектора. Тогда $\mathscr{Q} \approx (-1 + \mathrm{e}^{2r}) + (\operatorname{sh}^2 r \operatorname{ch} 2r)/|v|^2$ есть большая и положительная величина, соответствующая большим суперпуассоновским флуктуациям числа фотонов, в то же время фазовые флуктуации поля снижены.

21.5. Двухфотонное когерентное состояние

Как мы уже видели, двухфотонное когерентное состояние $|[z, v]\rangle$ является одной из форм идеального сжатого состояния и два этих состояния связаны соотношением (21.4.5). Так как первое из этих состояний очень детально изучалось в работе Йена (Yuen, 1976), о нем известно больше, чем об идеальном сжатом состоянии, несмотря на то, что эти два состояния тесно связаны. Поэтому ниже мы будем обсуждать двухфотонные когерентные состояния несколько подробнее.

Следуя Йену (Yuen, 1976), сначала немного обобщим определение. Пусть $\hat{A}(\mu, \nu)$, $\hat{A}^\dagger(\mu, \nu)$ являются операторами псевдоуничтожения и псевдорождения, определяемыми соотношениями [ср. (21.3.2)]

$$\hat{A}(\mu, \nu) = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger, \quad \hat{A}^\dagger(\mu, \nu) = \mu^*\hat{a}^\dagger + \nu^*\hat{a} \tag{21.5.1a}$$

для двух комплексных чисел μ, ν, удовлетворяющих условию [ср. (21.3.5)]

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1. \tag{21.5.2b}$$

Пусть $\hat{U}(\mu, \nu)$ есть произвольное унитарное преобразование, которое создает $\hat{A}$, $\hat{A}^\dagger$ из $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$. Очевидно, оператор $\hat{U}(\mu, \nu) = \hat{S}(z)$ [см. (21.3.1)] является примером такого преобразования, но более общее унитарное преобразование

$$\hat{U} = \exp i(K\hat{a}^\dagger\hat{a} + k\hat{a}^2 + k^*\hat{a}^{\dagger 2}), \tag{21.5.2}$$

где K — действительная величина и k — константа, обладает этим же свойством. Показатель экспоненты имеет структуру квадратичного гамильтониана, соответствующего «двухфотонному» взаимодействию с классическим током, и содержит три свободных параметра, которые определяются комплексными числами μ, ν.

Обобщенное *двухфотонное когерентное состояние* $|[\mu,\nu;v]\rangle$ можно определить как состояние, являющееся результатом действия $\hat{U}(\mu,\nu)$ на когерентное состояние $|v\rangle$, т.е.

$$|[\mu,\nu;v]\rangle = \hat{U}(\mu,\nu)|v\rangle, \tag{21.5.3}$$

что, очевидно, соответствует выражению (21.3.8). Те же самые рассуждения, что и прежде, приводят к уравнению на собственные значения

$$\hat{A}(\mu,\nu)|[\mu,\nu;v]\rangle = \hat{U}(\mu,\nu)\hat{a}\hat{U}^{\dagger}(\mu,\nu)\hat{U}(\mu,\nu)|v\rangle = v\hat{U}(\mu,\nu)|v\rangle = v|[\mu,\nu;v]\rangle, \tag{21.5.4}$$

и это уравнение представляет собой альтернативное определение состояния $|[\mu,\nu;v]\rangle$. Термин «двухфотонное когерентное состояние», разумеется, связан с формой показателя экспоненты в (21.5.2).

Эти состояния обнаруживают некоторые из характерных свойств когерентных состояний. Например, так же как среднее значение нормально упорядоченного произведения $\hat{a}$, $\hat{a}^{\dagger}$ факторизуется в когерентном состоянии, так и среднее значение нормально упорядоченного произведения операторов $\hat{A}$, $\hat{A}^{\dagger}$ факторизуется в состоянии $|[\mu,\nu;v]\rangle$. Можно показать (Yuen, 1976), что под действием гамильтониана

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hbar(g\hat{a} + g^{*}\hat{a}^{\dagger}) + \hbar(f\hat{a}^{2} + f^{*}\hat{a}^{\dagger 2}) \tag{21.5.5}$$

двухфотонное когерентное состояние $|[\mu,\nu;v]\rangle$ переходит в другое двухфотонное когерентное состояние с другими v, μ, ν, которые, вообще говоря, изменяются во времени. Как мы видели в разд. 11.5, когерентное состояние эволюционирует в другое когерентное состояние, когда $f = 0$ в гамильтониане. По этой причине возникло предположение, что двухфотонные когерентные состояния могут создаваться лазерами, в которых атомы испытывают двухфотонное взаимодействие (Yuen, 1976), в то время как когерентные состояния создаются лазерами, в которых атомный источник испытывает однофотонное взаимодействие.

Однако в отличие от когерентных состояний $|v\rangle$, состояния $|[\mu,\nu;v]\rangle$ не являются состояниями с определенной комплексной амплитудой. Обращая выражения (21.5.1а) [ср. (21.3.7)], мы получаем соотношения

$$\langle[\mu,\nu;v]|\hat{a}|[\mu,\nu;v]\rangle = \langle[\mu,\nu;v]|\mu^{*}\hat{A} - \nu\hat{A}^{\dagger}|[\mu,\nu;v]\rangle = \mu^{*}v - \nu v^{*},$$
$$\langle[\mu,\nu;v]|\hat{a}^{2}|[\mu,\nu;v]\rangle = \langle[\mu,\nu;v]|\mu^{*2}\hat{A}^{2} - \nu^{2}\hat{A}^{\dagger 2} - 2\mu^{*}\nu\hat{A}^{\dagger}\hat{A} - \mu^{*}\nu|[\mu,\nu;v]\rangle = (\mu^{*}v - \nu v^{*})^{2} - \mu^{*}\nu.$$

Следовательно, дисперсия $\hat{a}$ определяется формулой

$$\langle[\mu,\nu;v]|(\Delta\hat{a})^{2}|[\mu,\nu;v]\rangle = -\mu^{*}\nu \tag{21.5.6}$$

и всегда отлична от нуля при $\nu \neq 0$.

21.5.1. Преобразованные фоковские состояния

Подобно тому, как состояние $|[\mu,\nu;v]\rangle$ было получено из $|v\rangle$ в результате унитарного преобразования $\hat{U}(\mu,\nu)$, с помощью того же преобразования можно получить состояние $|[\mu,\nu,n]\rangle$, являющееся обобщением фоковского состояния $|n\rangle$ (Yuen, 1976). Тогда

$$|[\mu,\nu;n]\rangle \equiv \hat{U}(\mu,\nu)|n\rangle. \tag{21.5.7}$$

Несложно показать, что вновь определенные состояния являются собственными состояниями оператора $\hat{N} = \hat{A}^{\dagger}\hat{A}$, в то время как фоковские состояния $|n\rangle$ есть собственные состояния $\hat{n} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$. Поскольку

$$\hat{N}|[\mu,\nu;n]\rangle = \hat{U}\hat{a}^{\dagger}\hat{U}^{\dagger}\hat{U}\hat{a}\hat{U}^{\dagger}\hat{U}|n\rangle = \hat{U}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|n\rangle = n|[\mu,\nu;n]\rangle, \tag{21.5.8}$$

спектр $\hat{N}$ тоже состоит из целых чисел 0, 1, 2, ... По этой причине оператор $\hat{N}$ был назван *оператором числа квазифотонов* (Yuen, 1976). Более того, действие $\hat{A}$ или $\hat{A}^\dagger$ на $|[\mu,\nu;n]\rangle$ подобно действию $\hat{a}$ или $\hat{a}^\dagger$ на $|n\rangle$, и мы находим, что

$$\hat{A}|[\mu,\nu;n]\rangle = \hat{U}\hat{a}\hat{U}^\dagger\hat{U}|n\rangle = \hat{U}\hat{a}|n\rangle = \begin{cases} n^{1/2}|[\mu,\nu;n-1]\rangle, & \text{если } n = 1,2,3,\ldots \\ 0, & \text{если } n = 0, \end{cases} \tag{21.5.9}$$

и таким же образом

$$\hat{A}^\dagger|[\mu,\nu;n]\rangle = (n+1)^{1/2}|[\mu,\nu;n+1]\rangle. \tag{21.5.10}$$

Из этого следует, что состояния $|[\mu,\nu;n]\rangle$ тоже могут быть записаны как

$$|[\mu,\nu;n]\rangle = \frac{\hat{A}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|[\mu,\nu;0]\rangle, \tag{21.5.11}$$

что довольно похоже на состояние $|n\rangle$.

Более того, мы можем легко показать, что состояния $|[\mu,\nu;n]\rangle$ образуют полный ортонормированный базис, точно так же как фоковские состояния, потому что

$$\langle[\mu,\nu;n]|[\mu,\nu;n']\rangle = \langle n|\hat{U}^\dagger\hat{U}|n'\rangle\delta_{nn'}, \tag{21.5.12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|[\mu,\nu;n]\rangle\langle[\mu,\nu;n]| = \hat{U}\sum_{n=0}^{\infty}\hat{U}^\dagger = 1. \tag{21.5.13}$$

Мы можем представить любое состояние в базисе $|[\mu,\nu;n]\rangle$. В частности, можно записать

$$|[\mu,\nu;v]\rangle\sum_n C_n|[\mu,\nu;n]\rangle,$$

и применение той же самой процедуры, что была использована в разд. 11.2 для разложения когерентного состояния $|v\rangle$ по $|n\rangle$, приводит к результату

$$|[\mu,\nu;v]\rangle = \mathrm{e}^{|v|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^n}{\sqrt{n!}}|[\mu,\nu;n]\rangle. \tag{21.5.14}$$

Комбинация последнего с (21.5.11) и теоремой Кемпбелла — Бейкера — Хаусдорфа (10.11.26) позволяет выразить $|[\mu,\nu;v]\rangle$ в виде

$$|[\mu,\nu;v]\rangle = \mathrm{e}^{v\hat{A}^\dagger - v^*\hat{A}}|[\mu,\nu;0]\rangle, \tag{21.5.15}$$

в полной аналогии с выражением (11.3.6). Мы можем также использовать разложение (21.5.14), чтобы показать, как в разд. 11.6, что двухфотонные когерентные состояния удовлетворяют соотношению

$$\langle[\mu,\nu;v]|[\mu,\nu;v']\rangle = \mathrm{e}^{(v^*v'-vv'^*)/2}\,\mathrm{e}^{-|v-v'|^2/2}, \tag{21.5.16}$$

поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int|[\mu,\nu;v]\rangle\langle[\mu,\nu;v]|\,d^2v = 1. \tag{21.5.17}$$

Двухфотонные когерентные состояния, следовательно, образуют переполненный базис для представления состояний и операторов. С тем же самым ограничением, что и раньше, существует диагональное представление оператора плотности по двухфотонным когерентным состояниям.

21.5.2. Представление по когерентным состояниям двухфотонного когерентного состояния

В разд. 11.7 было показано, что проекция $\langle v|\psi\rangle$ на когерентное состояние $\langle v|$ образует однозначное представление любого состояния $|\psi\rangle$. Соответственно, мы теперь получим представление по когерентным состояниям двухфотонного когерентного состояния $|[\mu,\nu;w]\rangle$. Следуя Йену (Yuen, 1976), мы сначала выведем дифференциальное уравнение для $\langle v|[\mu,\nu;w]\rangle$. Используя (21.5.4), получаем

$$\langle v|\hat{A}|[\mu,\nu;w]\rangle = \langle v|\mu\hat{a}+\nu\hat{a}^\dagger|[\mu,\nu;w]\rangle = w\langle v|[\mu,\nu;w]\rangle. \tag{21.5.18}$$

Теперь выразим $\langle v|\hat{a}|\psi\rangle$ в дифференциальной форме с помощью (11.3.1)

$$\langle v|\hat{a}|\psi\rangle = \langle \mathrm{vec}|\,\mathrm{e}^{-|v|^2/2+v^*\hat{a}}\hat{a}|\psi\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial v^*}+\frac{1}{2}v\right)\langle \mathrm{vec}|\,\mathrm{e}^{-|v|^2/2+v^*\hat{a}}|\psi\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial v^*}+\frac{1}{2}v\right)\langle v|\psi\rangle. \tag{21.5.19}$$

Если подставить этот результат в (21.5.18), то получим

$$\left[\mu\left(\frac{\partial}{\partial v^*}+\frac{1}{2}v\right)+\nu v^*\right]\langle v|[\mu,\nu;w]\rangle = \mu\langle v|[\mu,\nu;w]\rangle,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial v^*}\langle v|[\mu,\nu;w]\rangle = \left(\frac{w}{\mu}-\frac{1}{2}v-\frac{\nu v^*}{\mu}\right)\langle v|[\mu,\nu;w]\rangle.$$

Это уравнение может быть проинтегрировано немедленно по v^*, что дает

$$\langle v|[\mu,\nu;w]\rangle = \exp\left[\frac{wv^*}{\mu}-\frac{1}{2}|v|^2-\frac{1}{2}\frac{\nu v^{*2}}{\mu}+f(w,w^*)\right]. \tag{21.5.20}$$

Функция $f(w,w^*)$ является произвольной, но она будет выбрана так, чтобы гарантировать условие нормировки

$$\frac{1}{\pi}\int|\langle v|[\mu,\nu;w]\rangle|^2\,d^2v = 1.$$

Выражение (21.5.20) тогда дает, с точностью до произвольного фазового множителя,

$$\langle v|[\mu,\nu;w]\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\exp\left[-\frac{1}{2}|v|^2-\frac{1}{2}|w|^2-\frac{1}{2}\frac{\nu}{\mu}v^{*2}+\frac{w}{\mu}v^*+\frac{1}{2}\frac{\nu^*}{\mu}w^2\right]. \tag{21.5.21}$$

Если мы разложим комплексную переменную на действительную и мнимую части, записав $v=x+\mathrm{i}y$, то немедленно получим, что $|\langle v|[\mu,\nu;w]\rangle|^2$, которую можно интерпретировать как плотность вероятности в некотором ограниченном смысле, имеет форму двумерного гауссовского распределения по x и y. Однако переменные x и y, вообще говоря, не независимы, и их дисперсии не равны, пока v не нуль.

21.5.3. Фотонная статистика двухфотонного когерентного состояния

Хотя двухфотонное когерентное состояние имеет такое же разложение по состояниям $|[\mu,\nu;n]\rangle$, как и когерентное состояние по $|n\rangle$, фотонная статистика первого намного сложней, чем пуассоновская (Yuen, 1976; Yuen and Shapiro, 1980; Shapiro,Yuen and Machado Mato, 1979). В качестве первого шага, мы сейчас вычислим проекцию $\langle n|[\mu,\nu;w]\rangle$. Оказывается, что удобней использовать представление по когерентным состояниям (21.5.21), записывая

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}}\exp\left[-\frac{1}{2}|v|^2-\frac{1}{2}|w|^2-\frac{1}{2}\frac{\nu}{\mu}v^{*2}+\frac{w}{\mu}v^*+\frac{1}{2}\frac{\nu^*}{\mu}w^2\right] = \langle v|[\mu,\nu;w]\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\langle v|n\rangle\langle n|[\mu,\nu;w]\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-|v|^2/2}\frac{v^{*n}}{\sqrt{n!}}\langle n|[\mu,\nu;w]\rangle,$$

или

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\nu}{\mu}v^{*2}+\frac{w}{\mu}v^{*}\right)=(\sqrt{\mu})\exp\left(\frac{1}{2}|w|^2-\frac{1}{2}\frac{nu^{*}}{\mu}w^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^{*n}}{\sqrt{n!}}\langle n|[\mu,\nu;w]\rangle. \tag{21.5.22}$$

Теперь введем производящую функцию для полиномов Эрмита $H_n(z)$ [см., например, (Abramowitz and Stegun, 1965, разд. 22.9); (Rainville, 1960, гл. 11)]

$$\mathrm{e}^{-z^2+2sz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(s)z^n,$$

и воспользуемся этим результатом, чтобы разложить в ряд левую часть (21.5.22). После подстановки

$$z=v^{*}\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)^{1/2},\quad s=\frac{w}{(2\mu\nu)^{1/2}},$$

мы получаем формулу

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n\left[\frac{w}{(2\mu\nu)^{1/2}}\right]v^{*n}\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)^{n/2}=(\sqrt{\mu})\exp\left(\frac{1}{2}|w|^2-\frac{1}{2}\frac{nu^{*}}{\mu}w^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^{*n}}{\sqrt{n!}}\langle n|[\mu,\nu;w]\rangle. \tag{21.5.23}$$

Сравнение коэффициентов перед v^{*n} показывает, что

$$\langle n|[\mu,\nu;w]\rangle=\frac{1}{\sqrt{\mu n!}}\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)^{n/2}\exp\left(-\frac{1}{2}|w|^2+\frac{1}{2}\frac{nu^{*}}{\mu}w^2\right)H_n\left[\frac{w}{(2\mu\nu)^{1/2}}\right]. \tag{21.5.24}$$

Квадрат модуля этой величины дает вероятность $p(n)$ того, что в двухфотонном когерентном состоянии находится n фотонов:

$$p(n)=\mathrm{e}^{-|w|^2}\exp\left(\frac{1}{2}\frac{nu^{*}}{\mu}w^2+\frac{1}{2}\frac{nu}{\mu^{*}}w^{*2}\right)\frac{1}{|\mu n!|}\left|\frac{\nu}{2\mu}\right|^{n}\left|H_n\left[\frac{w}{(2\mu\nu)^{1/2}}\right]\right|^2. \tag{21.5.25}$$

Очевидно, что распределение $p(n)$ довольно сильно отличается от пуассоновского, а довольно сложная структура $p(n)$ делает его трудным для использования в вычислениях.

Как и прежде, два первых момента числа фотонов $\hat{n}$ получаются непосредственно из определений. Для среднего значения мы получаем соотношение

$$\begin{aligned}\langle\hat{n}\rangle&=\langle[\mu,\nu;w]|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|[\mu,\nu;w]\rangle=\langle[\mu,\nu;w]|(\mu\hat{A}^{\dagger}-\nu^{*}\hat{A})(\mu^{*}\hat{A}-\nu\hat{A}^{\dagger})|[\mu,\nu;w]\rangle=\\&=\langle[\mu,\nu;w]||\mu|^2\hat{A}^{\dagger}\hat{A}+|\nu|^2(\hat{A}^{\dagger}\hat{A}+1)-\mu\nu\hat{A}^{\dagger 2}-\mu^{*}\nu^{*}\hat{A}^2|[\mu,\nu;w]\rangle=|\mu w^{*}-\nu^{*}w|^2+|\nu|^2.\end{aligned} \tag{21.5.26}$$

Далее с помощью коммутационных соотношений для $\hat{a}$, $\hat{a}^{\dagger}$ находим

$$\begin{aligned}\langle\hat{n}(\hat{n}-1)\rangle&=\langle[\mu,\nu;w]|\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2|[\mu,\nu;w]\rangle=\langle[\mu,\nu;w]|(\mu\hat{A}^{\dagger}-\nu^{*}\hat{A})^2(\mu^{*}\hat{A}-\nu\hat{A}^{\dagger})^2|[\mu,\nu;w]\rangle=\\&=|(\mu w^{*}-\nu^{*}w)^2-\mu\nu^{*}|^2+|\nu|^2[4|\mu|^2|w|^2+4|\nu|^2|w|^2+2|\nu|^2-4\mu^{*}\nu^{*}w^2-4\mu\nu w^{*2}],\end{aligned} \tag{21.5.27}$$

поэтому

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle-\langle\hat{n}\rangle=\langle\hat{n}(\hat{n}-1)\rangle-\langle\hat{n}\rangle^2=|\nu|^2[8|\nu|^2|w|^2+6|w|^2+|\mu|^2+|\nu|^2]-(4|\nu|^2+1)[\mu\nu w^{*2}+\text{к.с.}]. \tag{21.5.28}$$

Разность $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle-\langle\hat{n}\rangle$, измеряющая отклонение от пуассоновской статистики, может быть положительной, отрицательной, или равной нулю, в зависимости от значений μ, ν, w. Она всегда равна нулю при $\nu=0$, когда мы вновь получаем когерентное состояние, но она может быть отрицательной для определенных комбинаций μ, ν, w, как было показано в разд. 21.4 для идеальных сжатых состояний.

21.6. Детектирование сжатия гомодинированием с когерентным светом

Мы уже видели, что в квадратурно-сжатом состоянии световой пучок имеет одну квадратуру, флуктуации которой меньше, чем в вакуумном состоянии, в то время как у другой — флуктуации больше. Если информация могла бы быть внесена и извлечена из первой квадратуры, то это дало бы очевидные преимущества при измерении слабых сигналов. До сих пор наше обсуждение сжатия было полностью теоретическим; теперь кратко обсудим вопрос о том, как сжатие может быть распознано на практике.

Рассмотрим экспериментальную ситуацию, схематически изображенную на рис. 21.4, в которой падающий одномодовый сжатый свет смешивается светоделителем с когерентным светом сильного локального осциллятора той же самой оптической частоты, фазу θ которого можно менять. Чтобы в максимальной степени упростить задачу, мы предположим, что коэффициент пропускания светоделителя близок к единице, поэтому светоделитель слабо влияет на сжатый световой луч, пока его амплитудный коэффициент отражения $\mathscr{R}$ очень мал. Предполагается, что комплексная амплитуда V локального осциллятора достаточно велика, так что $\mathscr{R}V = v$ еще является достаточно большой величиной и потому может быть рассмотрена классически, в то время как амплитуда $\hat{a}$ падающего сжатого света рассматривается как оператор. Комбинированный свет амплитуды $\hat{a} + v$ затем падает на фотодетектор, который считает число n фотонов, обнаруженных в некотором временно́м интервале, коротком по сравнению со временем когерентности. Цель эксперимента состоит в том, чтобы, изменяя фазу θ локального осциллятора, идентифицировать сжатую полевую квадратуру, которая проявляет себя в ослабленных флуктуациях интенсивности комбинированного света.

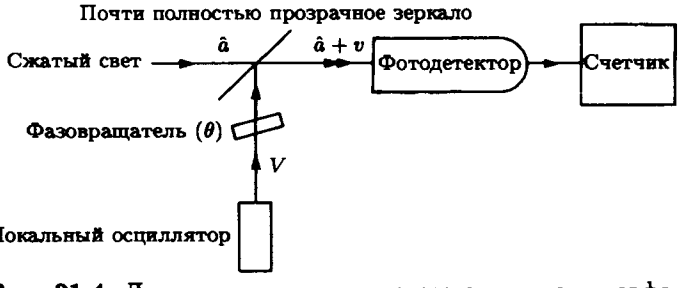


Рис. 21.4. Детектирование сжатого состояния по интерференции, или гомодинированию, с когерентным световым лучом локального осциллятора

Эта проблема интерференции, или гомодинирования, ранее уже рассматривалась несколько раз (Yuen and Shapiro, 1980; Shapiro,Yuen and Machado Mato, 1979; Mandel, 1982a). Здесь мы будем, в основном, следовать работе Манделя. Амплитуда поля в детекторе пропорциональна $\hat{a} + v$. Следовательно, среднее число отсчетов $\langle \hat{n} \rangle$, зарегистрированных в коротком интервале времени, определяется выражением

$$\langle \hat{n} \rangle = \eta \langle (\hat{a}^\dagger + v^*)(\hat{a} + v) \rangle, \tag{21.6.1}$$

и для второго факториального момента величины $\hat{n}$ мы имеем, так как $\hat{n}(2) =: \hat{n}^2 :$,

$$\langle \hat{n}(\hat{n} - 1) \rangle = \eta^2 \langle (\hat{a}^\dagger + v^*)^2 (\hat{a} + v)^2 \rangle. \tag{21.6.2}$$

Параметр η есть мера эффективности детектора и времени счета. Сначала используем уравнение (21.1.7), чтобы выразить $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ через квадратурные амплитуды $\hat{Q}$, $\hat{P}$,

$$\hat{a} = \tfrac{1}{2}(\hat{Q} + i\hat{P})\, e^{i\beta}, \quad \hat{a}^\dagger = \tfrac{1}{2}(\hat{Q} - i\hat{P})\, e^{-i\beta}. \tag{21.6.3}$$

Следовательно,

$$\langle \hat{n} \rangle = \eta \langle [\tfrac{1}{2}(\hat{Q} - i\hat{P})\, e^{-i\beta} + v^*][\tfrac{1}{2}(\hat{Q} + i\hat{P})\, e^{i\beta} + v] \rangle =$$
$$= \eta \{ \tfrac{1}{4}[\langle \hat{Q}^2 \rangle + \langle \hat{P}^2 \rangle + i\langle \hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q} \rangle] + [\tfrac{1}{2}(\langle \hat{Q} \rangle - i\langle \hat{P} \rangle) v\, e^{-i\beta} + \text{к.с.}] + |v|^2 \},$$

и с помощью правила коммутации $[\hat{Q}, \hat{P}] = 2i$ это соотношение при $v = |v| e^{i\theta}$ преобразуется к виду

$$\langle \hat{n} \rangle = \eta \{ \tfrac{1}{4}(\langle \hat{Q}^2 \rangle + \langle \hat{P}^2 \rangle - 2) + |v| [\langle \hat{Q} \rangle \cos(\theta - \beta) + \langle \hat{P} \rangle \sin(\theta - \beta)] + |v|^2 \}. \tag{21.6.4}$$

Таким же образом мы можем оценить второй факториальный момент $\langle\hat{n}(\hat{n}-1)\rangle$. И, наконец, объединим результаты, чтобы определить отклонение от пуассоновской статистики, и, после некоторой перегруппировки членов, получим

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle = \langle\hat{n}(\hat{n}-1)\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2 =$$
$$= \eta^2|v|^2[\langle:(\Delta\hat{Q})^2:\rangle\cos^2(\theta-\beta) + \langle:(\Delta\hat{P})^2:\rangle\sin^2(\theta-\beta) + \tfrac{1}{2}(\langle\Delta\hat{P}\Delta\hat{Q}\rangle + \langle\Delta\hat{Q}\Delta\hat{P}\rangle)\sin 2(\theta-\beta)] +$$
$$+ \eta^2[\langle\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2\rangle - \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle^2 + 2v\langle\Delta\hat{a}^\dagger\Delta\hat{n}_a\rangle + 2v^*\langle\Delta\hat{a}^\dagger\Delta\hat{n}_a\rangle], \quad (21.6.5)$$

где $\hat{n}_a \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$. Введем в явном виде фазу v, записывая

$$v = |v|\,e^{i\theta}, \quad (21.6.6)$$

чтобы показать, что разность $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle$ может зависеть от фазы θ поля когерентного локального осциллятора. Если это поле достаточно интенсивное, то доминирующим членом в (21.6.6) является слагаемое, пропорциональное $|v|^2$, а другие члены могут быть опущены.

Выбирая $\theta-\beta=0$ и $\theta-\beta=\pi/2$ по очереди, мы сразу видим, что

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle \approx \begin{cases} \eta^2|v|^2\langle:(\Delta\hat{Q})^2:\rangle, & \text{если } \theta-\beta=0, \\ \eta^2|v|^2\langle:(\Delta\hat{P})^2:\rangle, & \text{если } \theta-\beta=\pi/2. \end{cases} \quad (21.6.7)$$

Отсюда следует, что если состояние поля является сжатым состоянием, так что $\langle:(\Delta\hat{Q})^2:\rangle < 0$ для некоторого угла β [см. (21.2.3)], то тогда $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle < 0$ при указанном выборе фазы. Распределение флуктуаций счета фотонов становится, следовательно, более узким, чем пуассоновское для того же фазового угла β, и это подтверждает тот факт, что состояние является, по сути, квантово-механическим. Мы видим, что интерференция, или гомодинирование, сжатого света преобразует сжатие в субпуассоновскую фотонную статистику, которая легко обнаруживается в измерениях . Следовательно, подключение сжатого света на рис. 21.4 на самом деле *уменьшает* флуктуации фотоэлектрических отсчетов. Это отражает, конечно, тот факт, что флуктуации поля в сжатом состоянии слабее, чем в вакуумном состоянии. Так как β изменяется, то численно самое большое, наиболее отрицательное значение безразмерного отношения

$$\mathscr{Q} = [\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle]/\langle\hat{n}\rangle, \quad \mathscr{Q} \geqslant -1,$$

дает нам удобную меру степени достигнутого сжатия. Идеальное сжатое состояние $|(v,z)\rangle$ с $z\neq 0$ является примером состояния, для которого $\mathscr{Q}$ всегда отрицательная величина, и когда $\eta=1$, то $\mathscr{Q}$ стремится к своему предельному значению $\mathscr{Q}=-1$ при $|z|\to\infty$.

21.7. Сжатие, реализованное на практике: вырожденная параметрическая вниз-конверсия[1]

До сих пор мы обсуждали лишь сжатые состояния, которые были построены математически, хотя при рассмотрении двухфотонных когерентных состояний в разд. 21.5 уже предлагался возможный механизм создания условий, при которых сжатие может быть реализовано на практике. На самом деле, теория показывает, что сжатие должно проявляться в громадном количестве ситуаций, в которых свет взаимодействует с нелинейной средой. Примерами являются резонансная флуоресценция (Walls and Zoller, 1981), генерация гармоник (Mandel, 1982b), четырехволновое смешение (Yuen and Shapiro, 1979; Reid and Walls, 1985; Yurke, 1985a,b), параметрическое усиление и вниз-конверсия (Milburn and Walls, 1981; Lugiato and Strini, 1982a, b, c; Friberg and Mandel, 1984; Gardiner and Savage, 1984; Collett and Gardiner, 1984; Collett and Walls, 1985), оптическая бистабильность (Lugiato and Strini, 1982c).

Сжатие было впервые продемонстрировано в лабораторных условиях (Slusher, Hollberg, Yurke, Mertz and Valley, 1985) в процессах четырехволнового смешения в пучках натрия (см. гл. 22). Использованная

[1] down-conversion — эффект распада, или превращения (*conversion*), кванта первичного излучения накачки на пару вторичных фотонов, более *низкой*, естественно, частоты, иногда называют эффектом *параметрического рассеяния* или *параметрического преобразования частоты вниз*. Мы использовали термин *вниз-конверсия*. — *Прим. перев.*

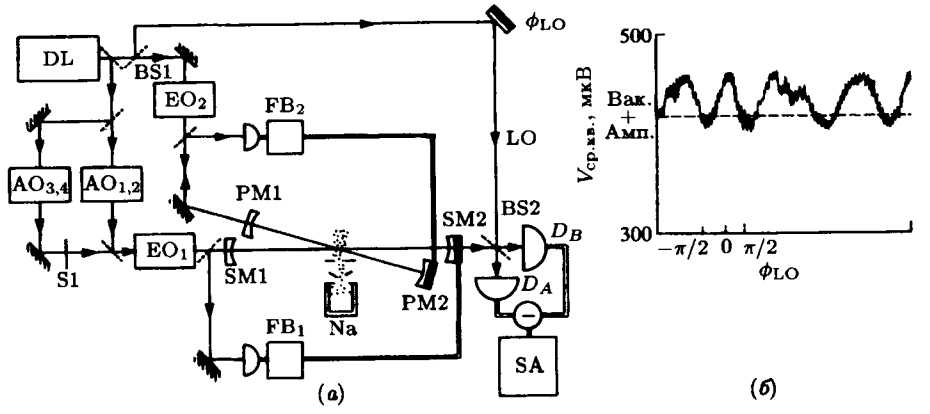


Рис. 21.5. *а* — Схема аппаратуры, использованной в первой успешной демонстрации сжатия. SM1 и SM2 — зеркала резонатора, используемого для сжатия света, PM1 и PM2 — зеркала резонатора, используемого для накачки, AO — устройство для сдвига частоты, BS1 и BS2 — светоделители, LO — локальный осциллятор, ϕ_{LO} — устройство для сдвига фазы локального осциллятора (фазовращатель). Разница между сигналами от двух фотонных детекторов D_A и D_B подается на спектральный анализатор SA; *б* — Наблюдаемый среднеквадратичный шум V_{rms} в зависимости от фазы локального осциллятора. Тонкая горизонтальная линия представляет результаты для случая, когда сжатый свет выключен. (Из работы Slusher, Hollberg, Yurke, Mertz and Valley, 1985)

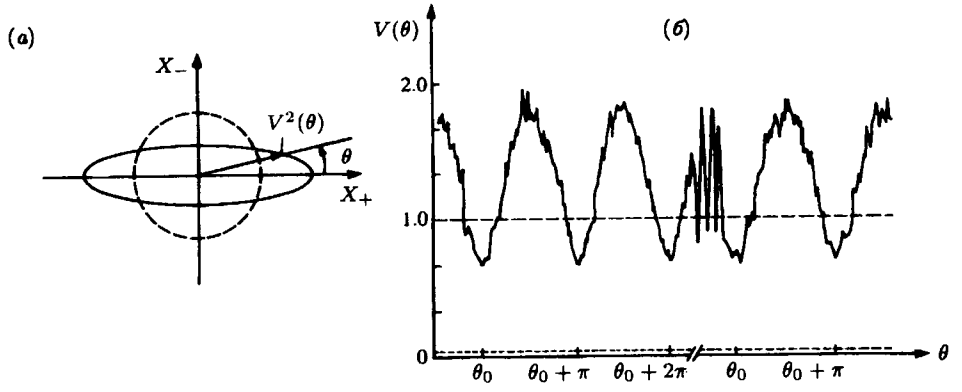


Рис. 21.6. *а* — Распределение в фазовом пространстве, соответствующее экспериментальным результатам, показанным на рис. *б*; *б* — среднеквадратичный шум, наблюдаемый в экспериментах по параметрической вниз-конверсии в зависимости от фазы локального осциллятора. (Воспроизведено из работы Wu, Kimble, Hall and Wu, 1986)

в этом эксперименте аппаратура показана на рис. 21.5*а*, а экспериментальные результаты воспроизведены на рис. 21.5*б*. Свет, выходящий через SM2 из резонансной кюветы, смешивается светоделителем со светом от локального осциллятора (лазера на красителях) и комбинированные лучи падают на детекторы D_A и D_B. Измеряется разность между флуктуациями двух фототоков, для того, чтобы погасить влияние шума локального осциллятора (Yuen and Chen, 1983). При изменении фазы Φ_{LO} локального осциллятора разность флуктуаций иногда падает на несколько процентов ниже уровня, соответствующего полю закрытой кюветы (вакуумный уровень). Это является признаком сжатого состояния.

Эффект намного большего сжатия наблюдался (Wu, Kimble, Hall and Wu, 1986) в процессе параметрической вниз-конверсии. Результаты этого эксперимента приведены на рис. 21.6*а* и *б*, на которых также показана зависимость среднеквадратичного шумового напряжения от фазы локального осциллятора. Рас-

пределение в фазовом пространстве *а* слева от экспериментальной кривой *б* приведено для того, чтобы продемонстрировать величину наблюдаемого эффекта сжатия по эксцентриситету эллипса. Так как эффект очень сильный, мы кратко обсудим теорию создания сжатого состояния в процессе вырожденной вниз-конверсии.

21.7.1. Создание сжатого состояния при вырожденной параметрической вниз-конверсии

В качестве примера сжатого состояния рассмотрим процесс вырожденной параметрической вниз-конверсии, в котором когерентный пучок света частоты ω_0 взаимодействует с нелинейным кристаллом, чтобы создать свет на частоте субгармоники $\frac{1}{2}\omega_0$. В результате фотон с энергией $\hbar\omega_0$ распадается на два фотона частоты $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_0$. Если падающее поле очень интенсивное, то оправданно считать его классическим, хотя вниз-конвертированное поле должно быть квантовым.

Самый простой гамильтониан, описывающий это взаимодействие, имеет вид

$$\widehat{H} = \hbar\omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hbar g(\hat{a}_1^{\dagger 2} v_0 \, \mathrm{e}^{-2i\omega_1 t} + v_0^* \hat{a}_1^2 \, \mathrm{e}^{2i\omega_1 t}), \tag{21.7.1}$$

где v_0 есть комплексная амплитуда падающего светового луча, и g является действительной константой связи, которая зависит от нелинейной восприимчивости среды. Слагаемое, описывающее взаимодействие, соответствует одновременному рождению или уничтожению двух фотонов моды 1. Уравнение движения Гейзенберга для $\hat{a}_1(t)$ тогда принимает вид

$$\dot{\hat{a}} - 1 = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}_1, \widehat{H}] = -i\omega_1 \hat{a}_1 - 2ig\hat{a}_1^{\dagger 2} v_0 \, \mathrm{e}^{-2i\omega_1 t}, \tag{21.7.2}$$

и оно имеет следующее общее решение [(Mollow, 1973); для общего обсуждения см. (Yariv, 1967), разд. 22.3]:

$$\hat{a}_1(t) = \hat{a}_1(0) \operatorname{ch}(2g|v_0|t) \, \mathrm{e}^{-i\omega_1 t} - i\frac{v_0}{|v_0|}\hat{a}_1^\dagger(0) \operatorname{sh}(2g|v_0|t) \, \mathrm{e}^{-i\omega_1 t}, \tag{21.7.3}$$

что может быть подтверждено обратной подстановкой в дифференциальное уравнение.

Можно использовать этот результат для вычисления любого интересующего нас среднего в момент времени t, если допустить, что поле эволюционирует из вакуумного состояния с $\hat{a}_1(0)|\mathrm{vac}\rangle = 0 = \langle \mathrm{vac}|\hat{a}_1^\dagger(0)$. Таким образом, видно, что $\langle \hat{a}_1(t)\rangle = 0$, тогда как

$$\langle \hat{a}_1^2(t)\rangle = -i\frac{v_0}{|v_0|} \operatorname{sh}(2g|v_0|t) \operatorname{ch}(2g|v_0|t) \, \mathrm{e}^{-2i\omega_1 t}\langle \hat{a}_1(0)\hat{a}_1^\dagger(0)\rangle = -\frac{1}{2}i\frac{v_0}{|v_0|} \operatorname{sh}(4g|v_0|t) \, \mathrm{e}^{-2i\omega_1 t}, \tag{21.7.4}$$

$$\langle \hat{n}_1(t)\rangle = \langle \hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t)\rangle = \operatorname{sh}^2(2g|v_0|t)\langle \hat{a}_1(0)\hat{a}_1^\dagger(0)\rangle = \operatorname{sh}^2(2g|v_0|t). \tag{21.7.5}$$

Если теперь построить эрмитов оператор

$$\widehat{Q} = \hat{a}_1 \, \mathrm{e}^{i(\omega_1 t - \beta)} + \hat{a}_1^\dagger \, \mathrm{e}^{-i(\omega_1 t - \beta)}, \tag{21.7.6}$$

(который превращается в $\hat{P}$, когда β заменяется на $\beta + \pi/2$), то для дисперсии величины $\hat{Q}$ находим

$$\langle [\Delta\widehat{Q}]^2\rangle = \langle \hat{a}_1^2(t)\rangle \, \mathrm{e}^{2i(\omega_1 t - \beta)} + \langle \hat{a}_1^{\dagger 2}(t)\rangle \, \mathrm{e}^{-2i(\omega_1 t - \beta)} + 2\langle \hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t)\rangle + 1,$$

и из выражений (21.7.4) и (21.7.5) следует

$$\langle [\Delta\widehat{Q}]^2\rangle = -\operatorname{sh}(4g|v_0|t) \sin(2\beta - \arg v) + \operatorname{ch}(4g|v_0|t). \tag{21.7.7}$$

Если же мы выберем фазовый угол β так, чтобы $2\beta - \arg v = \pi/2$, то получим $\langle (\Delta\hat{Q}(t))^2\rangle = \mathrm{e}^{-4g|v_0|t}$, что меньше единицы для всех $t > 0$. Следовательно, поле, которое появляется в результате вырожденной параметрической вниз-конверсии, или расщепления частоты когерентного света, всегда сжатое, и это сжатие может быть существенным (Wu, Kimble, Hall and Wu,1986).

21.8. Широкополосный сжатый свет

До сих пор мы обсуждали сжатие в контексте одномодового поля. В некоторых процессах, таких как невырожденная параметрическая вниз-конверсия, легко создаются два фотона одновременно в двух сопряженных модах, частоты которых просто связаны. Соответствующее состояние может быть получено из вакуумного действием *оператора двухмодового сжатия* [ср. (21.3.1)]

$$\hat{S}_{12}(z) = \mathrm{e}^{z^*\hat{a}_1\hat{a}_2 - z\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1^\dagger}. \tag{21.8.1}$$

Это действие может сопровождаться смещениями в каждой моде, представляемыми операторами

$$\hat{D}_1(v_1) = \mathrm{e}^{v_1\hat{a}_1^\dagger - v_1^*\hat{a}_1}, \quad \hat{D}_2(v_2) = \mathrm{e}^{v_2\hat{a}_2^\dagger - v_2^*\hat{a}_2}.$$

В общем случае нам следует рассмотреть поле, имеющее непрерывный спектр мод, часть из которых может проявлять сжатие, а другая часть нет. Экспериментально можно сделать спектральный анализ фотоэлектрического тока, вызванного гомодинированием или гетеродинированием, как показано на рис. 21.7, и измерить флуктуации различных фурье-компонент, а не полного фотоэлектрического сигнала в целом. Сжатие может иметь место только для некоторых компонент Фурье, а для других нет, или для различных фурье-компонент в разной степени.

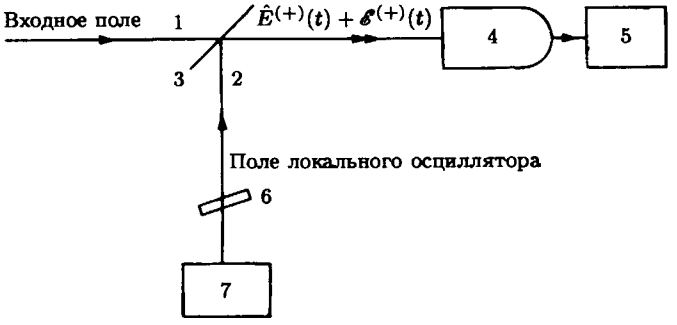


Рис. 21.7. Схема эксперимента по гомодинированию для изучения спектральной плотности флуктуаций поля. 1,2 — входные отверстия, 3 — светоделитель с амплитудным коэффициентом прохождения около 100%, 4 — фотодетектор, 5 — спектроанализатор, 6 — Устройство для сдвига фазы, 7 — локальный осциллятор

Мы кратко проанализируем эту ситуацию, которая уже рассматривалась много раз различными способами (Yuen and Shapiro, 1980; Walls and Zoller, 1981; Yuen and Chan, 1983; Collett, Walls and Zoller, 1984; Collett and Gardiner, 1984; Friberg and Mandel, 1984; Gardiner and Savage, 1984; Heidmann, Reynaud and Cohen-Tannoudji, 1984; Loudon, 1984; Richter, 1984; Shumaker, 1984; Caves and Shumaker, 1985; Shumaker and Caves, 1985; Collett and Walls, 1985; Gardiner and Collett, 1985; Shapiro, 1985; Yurke, 1985a, b; Ou, Hong and Mandel, 1987). Наш подход основывается на методе, использованном в последней из упомянутых работ. Для упрощения вычислений рассмотрим поляризованное, квазимонохроматическое квантовое поле средней частоты ω_1, положительно-частотная часть которого представляется скалярным оператором поля $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$. Начнем с разложения $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ по дискретным, нормальным модам плоских волн в виде [ср. (10.4.39)]

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\mathscr{V}}} \sum_{[\mathbf{k}]} l(\omega)\hat{a}_{\mathbf{k}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \tag{21.8.2}$$

где $\mathscr{V}$ есть объем квантования, $l(\omega)$ является некоторым частотно зависящим множителем [таким как $\mathrm{i}(\hbar\omega_0/2\varepsilon_0)^{1/2}$ для электрического поля], и $[\mathbf{k}]$ обозначает набор мод плоских волн, которыми ограничено наше внимание, и на которые откликается детектор. На последней стадии вычислений мы устремим $\mathscr{V} \to \infty$, в этом случае сумма переходит в интеграл по континууму. С этого момента мы опускаем пространственную координату $\mathbf{r}$, чтобы упростить обозначения. Член $\hat{E}^{(+)}(t)$ и сопряженный ему $\hat{E}^{(-)}(t)$ являются операторами уничтожения и рождения, которые подчиняются для одинаковых времен коммутационному соотношению

$$[\hat{E}^{(+)}(t), \hat{E}^{(-)}(t)] = \frac{1}{\mathscr{V}} \sum_{[\mathbf{k}]} |l(\omega)|^2 \equiv C. \tag{21.8.3}$$

Удобно использовать единицы измерений, в которых интенсивность света $\hat{I} = \hat{E}^{(-)}(t)\hat{E}^{(+)}(t)$ выражается в фотонах в секунду. Тогда C также выражается в фотонах в секунду.

По аналогии с (21.1.7) построим теперь два эрмитовых квадратурных оператора $\hat{E}_1(t)$, $\hat{E}_2(t)$, а именно,

$$\begin{aligned}\widehat{E}_1(t) &\equiv \widehat{E}^{(+)}(t)\,\mathrm{e}^{i(\omega_1 t-\beta)} + \widehat{E}^{(-)}(t)\,\mathrm{e}^{-i(\omega_1 t-\beta)},\\ \widehat{E}_2(t) &\equiv \widehat{E}^{(+)}(t)\,\mathrm{e}^{i(\omega_1 t-\beta-\pi/2)} + \widehat{E}^{(-)}(t)\,\mathrm{e}^{-i(\omega_1 t-\beta-\pi/2)},\end{aligned} \tag{21.8.4}$$

где β является пока произвольной величиной. Осциллирующие множители вводятся для того, чтобы сделать $\hat{E}_1(t)$, $\hat{E}_2(t)$ функциями, слабо зависящими от t. Это позволяет нам выразить полное поле $\hat{E}(t)$ в виде

$$\widehat{E}(t) = \widehat{E}_1(t)\cos(\omega_1 t-\beta) - \widehat{E}_2(t)\sin(\omega_1 t-\beta). \tag{21.8.5}$$

Из (21.8.3) следует, что $\hat{E}_1(t)$ и $\hat{E}_2(t)$ подчиняются для равных времен коммутационному соотношению

$$[\widehat{E}_1(t), \widehat{E}_2(t)] = 2iC, \tag{21.8.6a}$$

которое показывает, что они являются канонически сопряженными элементами, удовлетворяющими соотношению неопределенности

$$[\langle(\Delta\widehat{E}_1)^2\rangle, \langle(\Delta\widehat{E}_2)^2\rangle]^{1/2} \geqslant C. \tag{21.8.6b}$$

Легко показать, что в вакуумном состоянии $\langle(\Delta\hat{E}_1)^2\rangle = C = \langle(\Delta\hat{E}_2)^2\rangle$. Поэтому состояние является сжатым состоянием, если для некоторого угла β (ср. разд. 21.1) справедливо условие

$$\langle(\Delta\widehat{E}_1)^2\rangle < C, \tag{21.8.7}$$

и мы в дальнейшем будем ссылаться на это условие как на *сжатие в полном смысле*, потому, что мы имеем дело с флуктуациями полного поля.

21.8.1. Гомодинирование и корреляционные функции

Последующее обсуждение основывается на методах и подходах работы (Ou, Hong and Mandel, 1987). Предположим, что локальный осциллятор на рис. 21.7 создает сильное монохроматическое поле на частоте ω_1 в когерентном состоянии, которое перед светоделителем мы представляем классически c-числом $\mathscr{E}^{(+)}(t)/\mathscr{R}$, с

$$\mathscr{E}^{(+)}(t) = |\mathscr{E}|\,\mathrm{e}^{-i(\omega_1 t-\theta)}, \quad (\mathscr{E}^{(-)}\mathscr{E}^{(+)} = |\mathscr{E}|), \tag{21.8.8}$$

где $\mathscr{R}$ — амплитудный коэффициент отражения светоделителя. Если $|\mathscr{R}| \ll 1$ и амплитудный коэффициент прозрачности светоделителя близок к единице, то полное поле на детекторе становится равным $\hat{E}^{(+)}(t)+$ $+\mathscr{E}^{(+)}(t)$. Среднее значение интенсивности света на детекторе, следовательно, имеет вид

$$\begin{aligned}\langle\widehat{I}(t)\rangle &= \langle[\widehat{E}^{(-)}(t) + \mathscr{E}^{(-)}(t)][\widehat{E}^{(+)}(t) + \mathscr{E}^{(+)}(t)]\rangle =\\ &= |\mathscr{E}|^2 + \mathscr{E}^{(+)}(t)\langle\widehat{E}^{(+)}(t)\rangle + \langle\widehat{E}^{(-)}(t)\rangle\mathscr{E}^{(-)}(t) + \langle\widehat{E}^{(-)}(t)\widehat{E}^{(+)}(t)\rangle,\end{aligned} \tag{21.8.9}$$

а нормально упорядоченная, двухвременна́я корреляционная функция интенсивности (ср. разд. 12.2) для $\tau \geqslant 0$ определяется выражением

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2,2)}(\tau,\theta) &\equiv \langle[\widehat{E}^{(-)}(t) + \mathscr{E}^{(-)}(t)][\widehat{E}^{(-)}(t+\tau) + \mathscr{E}^{(-)}(t+\tau)][\widehat{E}^{(+)}(t+\tau) + \mathscr{E}^{(+)}(t+\tau)][\widehat{E}^{(+)}(t) + \mathscr{E}^{(+)}(t)]\rangle =\\ &= |\mathscr{E}|^4 + |\mathscr{E}|^3[\langle\widehat{E}^{(+)}(t)\rangle\,\mathrm{e}^{i(\omega_1 t-\theta)} + \langle\widehat{E}^{(+)}(t+\tau)\rangle\,\mathrm{e}^{i(\omega_1(t+\tau)-\theta)} + \text{к.с.}] +\\ &+ |\mathscr{E}|^2\{\langle\widehat{E}^{(-)}(t)\widehat{E}^{(+)}(t)\rangle + \langle\widehat{E}^{(-)}(t+\tau)\widehat{E}^{(+)}(t+\tau)\rangle + [\langle\widehat{E}^{(-)}(t)\widehat{E}^{(+)}(t+\tau)\rangle\,\mathrm{e}^{i\omega_1\tau} + \text{к.с.}] +\\ &+ [\langle\widehat{E}^{(-)}(t)\widehat{E}^{(-)}(t+\tau)\rangle\,\mathrm{e}^{-i(2\omega_1 t+\omega_1\tau-2\theta)} + \text{к.с.}]\} + O[|\mathscr{E}|].\end{aligned} \tag{21.8.10}$$

Если локальный осциллятор сильный, т. е., $|\mathscr{E}|^2 \gg 1$, то члены высшего порядка в $|\mathscr{E}|$ доминируют над членами более низкого порядка. Из выражений (21.8.9) и (21.8.10) получаем корреляционную функцию для флуктуаций интенсивности

$$\begin{aligned}\langle\mathscr{T} : \Delta\widehat{I}(t)\Delta\widehat{I}(t+\tau) :\rangle &= \Gamma^{(2,2)}(\tau,\theta) - \langle\widehat{I}(t)\rangle\langle\widehat{I}(t+\tau)\rangle =\\ &= |\mathscr{E}|^2\{\Gamma^{(1,1)}(\tau) + \Gamma^{(2,0)}(\tau)\,\mathrm{e}^{2i\theta} + \text{к.с.}\} + O(|\mathscr{E}|).\end{aligned} \tag{21.8.11}$$

Здесь мы ввели следующее обозначение для корреляционных функций второго порядка[1] :

$$\begin{aligned}\langle \Delta\hat{E}^{(-)}(t)\Delta\hat{E}^{(+)}(t+\tau)\rangle\, e^{i\omega_1\tau} &\equiv \Gamma^{(1,1)}(\tau)\\ \langle \Delta\hat{E}^{(-)}(t)\Delta\hat{E}^{(-)}(t+\tau)\rangle\, e^{-i\omega_1(2t+\tau)} &\equiv \Gamma^{(2,0)}(\tau) \quad (\Delta\hat{E}\equiv\hat{E}-\langle\hat{E}\rangle).\end{aligned} \tag{21.8.12}$$

Корреляции типа $\Gamma^{(2,0)}(\tau)$ обращаются в нуль для строго стационарных полей, но, так как флуктуации поля в сжатом состоянии предполагаются зависящими от фазы относительно некоторого приблизительно монохроматического носителя тока, то поле не является строго стационарным. Более того, $\langle \Delta\hat{E}^{(-)}(t)\Delta\hat{E}^{(-)}(t+\tau)\rangle$ еще зависит и от t, а $\Gamma^{(2,0)}(\tau)$ нет, и $\langle \hat{E}^{(+)}(t)\rangle e^{i\omega_1 t}$ не равняется нулю, но не зависит от t. Правая часть выражения (21.8.11) тогда также не зависит от t. Мы будем называть это поле *квазистационарным*. До сих пор предполагалось, что $\tau \geqslant 0$, но с помощью свойства симметрии

$$\Gamma^{(1,1)}(-\tau) = \Gamma^{(1,1)*}(\tau)\Gamma^{(2,0)}(-\tau) \quad = \Gamma^{(2,0)}(\tau), \tag{21.8.13}$$

выражение (21.8.11) оказывается справедливым как для положительных, так и для отрицательных τ.

И, наконец, введем нормированную корреляционную функцию интенсивности

$$\lambda(\tau,\theta) \equiv \langle \mathscr{T} : \Delta\hat{I}(t)\Delta\hat{I}(t+\tau) :\rangle / \langle \hat{I}(t)\rangle\langle \hat{I}(t+\tau)\rangle. \tag{21.8.14}$$

Так как из (21.8.9) в хорошем приближении следует $\langle \hat{I}(t)\rangle \approx |\mathscr{E}|^2$, то

$$\lambda(\tau,\theta) \approx \frac{1}{|\mathscr{E}|^2}[\Gamma^{(1,1)}(\tau) + \Gamma^{(2,0)}(\tau), e^{2i\theta} + \text{к.с.}]. \tag{21.8.15}$$

Поскольку $\Gamma^{(2,0)}(\tau) \geqslant 0$ по определению, получаем, что $\lambda(\tau,\theta) \geqslant -1$. Мы вскоре убедимся, что в сжатом состоянии $\lambda(\tau,\theta) < 0$, и что предельное значение $\lambda(\tau,\theta) = -1$ соответствует абсолютному сжатию.

Теперь следует соотнести $\lambda(\tau,\theta)$ с измерением по гомодинированию, которое изображено на рис. 21.7. Падая на фотоэлектрический детектор, свет вызывает фотоэлектрические эмиссии в определенные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$. Если $k(t)$ есть выходной импульс тока, вызванный фотоэмиссией в момент $t = 0$, то тогда полный фотоэлектрический ток $J(t)$ может быть представлен суммой импульсов по всем временам t_j, а именно

$$J(t) = \sum_j k(t - t_j). \tag{21.8.16}$$

Из анализа, подобного тому, который был проведен в разд. 14.6, находим среднее значение и автокорреляционную функцию тока $J(t)$:

$$\langle J(t)\rangle = \eta|\mathscr{E}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} k(t-t')\,dt' \equiv \eta|\mathscr{E}|^2, \tag{21.8.17}$$

$$\langle \Delta J(t)\Delta J(t+\tau)\rangle = \eta|\mathscr{E}|^2 \int_0^\infty dt' k(t')k(t'+\tau) + \eta|\mathscr{E}|^4 \iint_0^\infty dt'\,dt'' k(t')k(t'')\lambda(\tau+t'-t'',\theta) \equiv \eta|\mathscr{E}|^2, \tag{21.8.18}$$

где η — характеристика фотодетектора и q — полный электрический заряд, доставленный импульсом тока, вызванного одним фотоэлектроном. Поскольку $|\mathscr{E}|^2$, подобно $\hat{E}^{(-)}\hat{E}^{(+)}$, измеряется в фотонах в секунду, то единицей измерения $J(t)$ является заряд в секунду, и η является, очевидно, вероятностью того, что один фотон вызывает один фотоэлектрический импульс.

Обсудим более подробно выражение (21.8.18). Для падающего поля, которое полностью когерентно, $\lambda(\tau,\theta) = 0$ и второй член в правой части обращается в нуль. Первый член справа тогда отвечает за флуктуации тока, которые иногда упоминаются как *дробовой шум*. Но если падающее поле на входе 1 на рис. 21.7 заблокировано полностью, так что лишь «вакуумное поле» проникает во входное отверстие 1, то

[1] Корреляционные функции, определенные выражениями (21.8.12), отличаются от введенных ранее корреляционных функций $\Gamma^{(1,1)}$ и $\Gamma^{(2,2)}$ тем, что поля $\hat{E}^{(-)}$ и $\hat{E}^{(+)}$ теперь заменены на $\Delta\hat{E}^{(-)}$ и $\Delta\hat{E}^{(+)}$.

тогда второй член снова становится равным нулю и остается только первый член. Поэтому вполне уместно обратиться к интерпретации флуктуаций тока, как следствия флуктуаций вакуумного поля, проникающего во входное отверстие 1. Ясно, что эти две интерпретации эквивалентны. В общем случае, когда некогерентное поле проходит через отверстие 1, флуктуации тока увеличиваются по сравнению с вакуумным уровнем или уровнем дробового шума. Но если входящее поле находится в сжатом состоянии, тогда для некоторой фазы локального осциллятора флуктуации тока уменьшаются ниже вакуумного уровня. Это является признаком сжатия в полном смысле. Покажем теперь, выражая $\lambda(\tau,\theta)$ через полевые квадратуры, что эта интерпретация согласуется с обычным определением сжатия.

21.8.2. Квадратурные корреляции

Сначала запишем $\hat{E}^{(+)}(t)$ и $\hat{E}^{(-)}(t)$ через квадратурные амплитуды $\hat{E}_1(t)$, $\hat{E}_2(t)$, заданные выражениями (21.8.4). Удобно ввести следующие нормально упорядоченные, хронологически упорядоченные корреляционные функции флуктуаций $\Delta\hat{E}_j(t)\quad(j=1,2)$

$$\langle \mathscr{T} : \Delta\hat{E}_i(t)\Delta\hat{E}_j(t+\tau) : \rangle \equiv \Gamma_{ij}(\tau), \quad (i,j=1,2). \tag{21.8.19}$$

Символ хронологического упорядочения $\mathscr{T}$ упорядочивает между собой по времени операторы $\hat{E}^{(+)}(t)$ и $\hat{E}^{(-)}(t)$, так что

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}\hat{E}^{(-)}(t_2)\hat{E}^{(-)}(t_1) &\equiv \hat{E}^{(-)}(t_1)\hat{E}^{(-)}(t_2), \quad \text{если } t_1 < t_2,\\
\mathscr{T}\hat{E}^{(+)}(t_2)\hat{E}^{(+)}(t_1) &\equiv \hat{E}^{(+)}(t_2)\hat{E}^{(+)}(t_1), \quad \text{если } t_1 < t_2.
\end{aligned}$$

Тогда мы легко находим из определений (21.8.4), что

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\,\Gamma^{(1,1)}(\tau) &= \tfrac{1}{4}[\Gamma_{11}(\tau)+\Gamma_{22}(\tau)], \quad \operatorname{Re}\,[\Gamma^{(2,0)}(\tau)\,\mathrm{e}^{2i\beta}] = \tfrac{1}{4}[\Gamma_{11}(\tau)-\Gamma_{22}(\tau)],\\
\operatorname{Im}\,\Gamma^{(1,1)}(\tau) &= \tfrac{1}{4}[\Gamma_{12}(\tau)-\Gamma_{21}(\tau)], \quad \operatorname{Im}\,[\Gamma^{(2,0)}(\tau)\,\mathrm{e}^{2i\beta}] = \tfrac{1}{4}[\Gamma_{12}(\tau)+\Gamma_{21}(\tau)].
\end{aligned} \tag{21.8.20}$$

Эти соотношения немедленно позволяют нам выразить $\lambda(\tau,\theta)$, заданное выражением (21.8.15), через $\Gamma_{ij}(\tau)$, и мы получаем

$$\lambda(\tau,\theta) = \frac{1}{2|\mathscr{E}|^2}\{\Gamma_{11}(\tau)[1+\cos 2(\theta-\beta)] + \Gamma_{22}(\tau)[1-\cos 2(\theta-\beta)] + [\Gamma_{12}(\tau)+\Gamma_{21}(\tau)]\}. \tag{21.8.21}$$

В частности, когда $\theta=\beta$,

$$\lambda(\tau,\beta) = \Gamma_{11}(\tau)/|\mathscr{E}|^2, \tag{21.8.22}$$

и, когда $\theta=\beta\pm\pi/2$,

$$\lambda(\tau,\beta\pm\pi/2) = \Gamma_{22}(\tau)/|\mathscr{E}|^2. \tag{21.8.23}$$

Для состояния, которое является сжатым в полном смысле, имеем $\langle : (\Delta\hat{E}_1)^2 : \rangle < 0$ для некоторого β [ср. (21.2.3)], и поэтому $\langle : (\Delta\hat{E}_1)^2 : \rangle = \Gamma_{11}(0) < 0$ для некоторого β. Следовательно, для такого состояния

$$\lambda(0,\beta) = \frac{\langle : (\Delta\hat{E}_1)^2 : \rangle}{|\mathscr{E}|^2} < 0. \tag{21.8.24}$$

Чтобы оценить по достоинству значение этого результата, сосредоточимся на ситуации, в которой отклик детектора достаточно быстр, чтобы следовать за флуктуациями поля. Тогда импульсы $k(t)$ имеют протяженность во времени меньшую, чем время когерентности $\Gamma_{11}(\tau)$, и импульс $k(t)$ может быть аппроксимирован дельта-функцией под двойным интегралом в выражении (21.8.18). Следовательно, полагая $\tau=0$ и используя (21.8.24), мы получаем формулу

$$\langle(\Delta J)^2\rangle = \eta|\mathscr{E}|^2\int_0^\infty k^2(t')\,dt' + \eta^2|\mathscr{E}|^2q^2\langle : (\Delta\hat{E}_1)^2 : \rangle. \tag{21.8.25}$$

Из этого выражения совершенно очевидно, что второй член в правой части обращается в нуль для вакуумного поля, т.е., когда поле во входном отверстии 1 на рис. 21.7 заблокировано. Следовательно, первый член отвечает за величину вакуумных флуктуаций, и $\langle(\Delta J)^2\rangle$ падает ниже вакуумного уровня всякий раз, когда входящее поле сжато в полном смысле.

Возможно, однако, что поле не сжато в полном смысле, хотя отдельные фурье-компоненты являются сжатыми. Очевидно, что это не может быть установлено путем измерений флуктуаций полного тока $\langle(\Delta J)^2\rangle$. Поэтому ток необходимо пропустить через спектральный анализатор.

21.8.3. Спектральные корреляции

Теперь обсудим ситуацию, изображенную на рис. 21.7, где фототок подается на спектральный анализатор, который измеряет величину спектральной плотности $\chi(\omega)$ флуктуаций фототока на различных частотах ω. Таким образом, по определению,

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \Delta J(t)\Delta J(t+\tau)\rangle \, \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\tau. \tag{21.8.26}$$

Пусть $K(\omega)$ является фурье-образом импульса тока $k(t)$, т. е.

$$K(\omega) \equiv \int_{0}^{\infty} k(\tau)\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\tau, \tag{21.8.27}$$

что может быть интерпретировано как частотный отклик фотодетектора, и пусть $\psi(\omega,\theta)$ есть фурье-образ $\lambda(\tau,\theta)$, т. е.

$$\psi(\omega,\theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau,\theta)\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\tau. \tag{21.8.28}$$

Тогда $\psi(\omega,\theta)$ есть нормированная спектральная плотность флуктуаций интенсивности на фотодетекторе. После преобразования Фурье относительно τ каждого из слагаемых в (21.8.18) и применения теоремы о свертке получаем

$$\chi(\omega) = \eta|\mathscr{E}|^2|K(\omega)|^2[1+\eta|\mathscr{E}|^2\psi(\omega,\theta)]. \tag{21.8.29}$$

Вновь первый член справа соответствует вакуумному шуму, или дробовому шуму, который присутствует, когда свет во входном отверстии 1 заблокирован, и $\psi(\omega,\theta)$ равняется нулю. Мы будем говорить, что свет является сжатым, в данном случае на частоте $\omega_1+\omega$, всякий раз, когда открывание входного отверстия 1 приводит к тому, что измеренные флуктуации, представляемые функцией $\chi(\omega)$, падают ниже вакуумного уровня, т. е., когда $\psi(\omega,\theta) < 0$ для некоторого фазового угла θ.

Этот результат может быть выражен другим способом, если воспользоваться определением (21.8.28) для $\psi(\omega,\theta)$ и выражением (21.8.21) для $\lambda(\tau,\theta)$. Удобно ввести фурье-образы $\Gamma^{N,M}(\tau)$ и $\Gamma_{ij}(\tau)$ относительно τ, которые являются, конечно, функциями частоты ω

$$\begin{aligned} \Phi^{(N,M)}(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^{(N,M)}(\tau)\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\tau \quad (N,M=0,1,2), \\ \Phi_{ij}(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{ij}(\tau)\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\tau \quad (i,j=1,2). \end{aligned} \tag{21.8.30}$$

Затем, после преобразования Фурье каждого члена, мы получим из (21.8.21) следующий результат

$$\begin{aligned} &\psi(\omega,\theta) = \\ &\quad = \frac{1}{2|\mathscr{E}|^2}\{\Phi_{11}(\omega)[1+\cos 2(\theta-\beta)] + \Phi_{22}(\omega)[1-\cos 2(\theta-\beta)] + [\Phi_{12}(\omega)+\Phi_{21}(\omega)]\sin 2(\theta-\beta)\}. \end{aligned} \tag{21.8.31}$$

Подставляя это выражение для $\psi(\omega,\theta)$ в (21.8.29), мы видим, что в двух специальных случаях

(а) $\theta = \beta$: $$\chi(\omega) = \eta|\mathscr{E}|^2|K(\omega)|^2[1+\eta\Phi_{11}(\omega)], \tag{21.8.32}$$

(б) $\theta = \beta + \pi/2$:
$$\chi(\omega) = \eta|\mathscr{E}|^2|K(\omega)|^2[1 + \eta\Phi_{22}(\omega)]. \tag{21.8.33}$$

Отсюда следует, что если измеренная спектральная плотность $\chi(\omega)$ падает ниже вакуумного уровня (представленного первым членом) для некоторого θ, скажем для $\theta = \beta$, то тогда

$$\Phi_{11}(\omega) < 0. \tag{21.8.34}$$

Это является условием для сжатия спектральной компоненты света на частоте $\omega_1 + \omega$. Спектральная функция $\Phi_{11}(\omega)$ иногда называется *спектром сжатия*.

21.8.4. Спектрально-компонентное сжатие и степень сжатия

Полезно иметь различные определения для различных ситуаций. Если поле не сжато в полном смысле с $\langle : (\Delta\hat{E}_1)^2 : \rangle < 0$, но $\Phi_{11}(\omega) < 0$ для некоторой частоты ω, то мы будем говорить об этом, как о *спектрально-компонентном сжатии*. Независимо от того, существует ли сжатие в полном смысле или нет, если $\Phi_{11}(\omega) < 0$ для отдельных частот, а $\Phi_{11}(\omega) > 0$ для других, так что поле сжато лишь на некоторых частотах, мы будем называть такое сжатие как на *неоднородным*. С другой стороны, если $\Phi_{11}(\omega) < 0$ для всех частот, то сжатие является *однородным*, и в этом случае поле сжато также в полном смысле, потому что мы имеем, с помощью обратного преобразования Фурье второго выражения из (21.8.30),

$$\langle : (\Delta\hat{E}_1)^2 : \rangle = \Gamma_{11}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11}(\omega)\, d\omega. \tag{21.8.35}$$

Удобно иметь меру степени, с которой поле сжато на частоте $\omega_1 + \omega$, которую мы называем *степенью сжатия* $Q(\omega)$ и определяем по аналогии с $\mathscr{Q}$-параметром, введенным в разд. 21.6. Сжатие ассоциируется с $Q(\omega) < 0$, и оно является абсолютным $[Q(\omega) = -1]$, если спектральная плотность $\chi(\omega) = 0$ в выражении (21.8.32) для идеального детектора, квантовая эффективность которого $\alpha = 1$. Если фотодетектор собирает весь свет, падающий на него, то $Q(\omega)$ определяется выражением

$$Q(\omega) \equiv \frac{\eta\Phi_{11}(\omega)}{\alpha}. \tag{21.8.36}$$

В частном случае, когда $\hat{E}^2$ и $|\mathscr{E}|^2$ выражаются в единицах фотонов в секунду, а $\Phi_{11}(\omega)$ является безразмерной величиной, можно считать $\eta = \alpha$. В любом случае $Q(\omega)$ не зависит от эффективности фотодетектора, и $Q(\omega) < 0$ всякий раз, когда компонента поля на частоте $\omega_1 + \omega$ сжата. Наибольшее отрицательное значение $[Q(\omega) = -1]$ соответствует абсолютному сжатию.

21.8.5. Примеры степени сжатия $Q(\omega)$

Параметр $Q(\omega)$ уже был установлен для ряда различных ситуаций, в которых встречается сжатие. Для двухуровневых атомов, испытывающих резонансную флуоресценцию в когерентном поле в условиях резонанса, можно показать, что сжатие однородно всякий раз, когда $\Omega/\beta < 1$, где Ω — атомная частота Раби и β — половина коэффициента Эйнштейна A (Walls and Zoller, 1981; Collett, Walls and Zoller, 1984; Ou, Hong and Mandel, 1987). На рис. 21.8 приведены зависимости $Q(\omega)$ для нескольких значений Ω/β. Ясно, что сжатие неоднородно для значений $\Omega/\beta > 1$. Можно показать, что поле является сжатым в полном смысле всякий раз, когда $\Omega/\beta < \sqrt{2}$. Когда же $\Omega/\beta > \sqrt{2}$, еще может существовать спектрально-компонентное сжатие для частот, удовлетворяющих условию

$$\omega > 2(\Omega^2 - \beta^2)^{1/2}.$$

В случае параметрической вниз-конверсии в резонаторе сжатие всегда однородное, и $Q(\omega)$ может приближаться к -1 на резонансной частоте $\omega = 0$. На рис. 21.9 приведены зависимости $Q(\omega)$ для нескольких различных значений параметра $\gamma/2\varepsilon$, где γ — скорость затухания в резонаторе $[\gamma \equiv (1 - \mathscr{R})c/l]$ длиной l и коэффициентом зеркального отражения $\mathscr{R}$, а величина ε связана с безразмерной константой связи мод g соотношением $\varepsilon = (g - g^{-1})c/4l$. Когда $\gamma = 2\varepsilon$, $Q(\omega)$ приближается к предельному значению -1 при $\omega \to 0$.

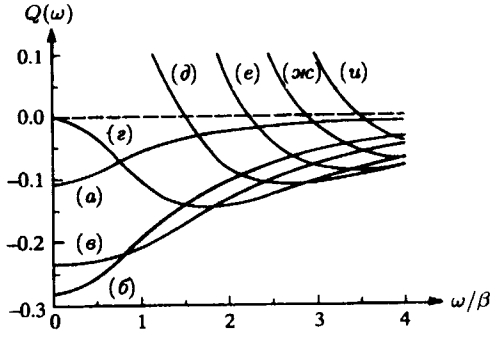


Рис. 21.8. Теоретические зависимости параметра сжатия $Q(\omega)$ от частоты ω в резонансной флуоресценции двухуровневого атома для нескольких различных значений Ω/β: *а* — $\Omega/\beta = 0.25$; *б* — $\Omega/\beta = (3-\sqrt{7})^{1/2} \approx 0.595$; *в* — $\Omega/\beta = 0.75$; *г* — $\Omega/\beta = 1$; (д) $\Omega/\beta = 1.25$; *е* — $\Omega/\beta = 1.5$; *жс* — $\Omega/\beta = 1.75$; *и* — $\Omega/\beta = 2$. (Из работы Ou, Hong and Mandel, 1987)

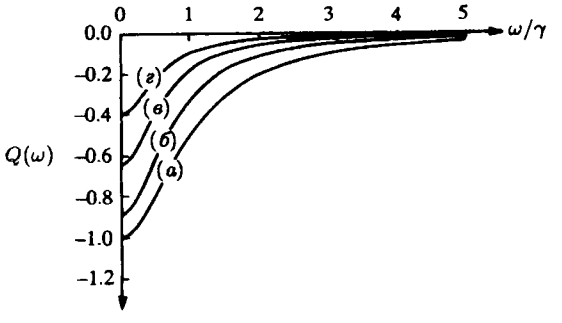


Рис. 21.9. Теоретические зависимости параметра сжатия $Q(\omega)$ от частоты ω в параметрической вниз-конверсии для нескольких различных значений γ/ε: *а* — $\gamma/\varepsilon = 1$; *б* — $\gamma/\varepsilon = 2$; (*в* — $\gamma/\varepsilon = 4$; *г* — $\gamma/\varepsilon = 8$. (Из работы Ou, Hong and Mandel, 1987)

И, наконец, для случая четырехволнового смешения в нелинейной среде (Yariv and Pepper, 1977; Yuen and Shapiro, 1979; Reid and Walls, 1985; Ou, Hong and Mandel, 1987), в котором свет, выходящий из противоположных концов среды, смешивается светоделителем, имеющим коэффициент отражения $\mathscr{R}$, и который явился основой первой успешной демонстрации сжатия (Slusher, Hollberg, Yurke, Mertz and Valley, 1985), опять можно найти, что сжатие является неоднородным. Однако, $Q(\omega)$ может приближаться к своему предельному значению -1 при $\omega \to 0$ для коэффициента отражения $\mathscr{R} = 1/2$. С другой стороны, когда $\mathscr{R} \neq 1/2$, то самое большое (но не абсолютное) сжатие осуществляется при неравной нулю ω.

21.9. Сжатие высшего порядка

Наше определение и трактовка сжатия, приведенные выше, связаны со вторым моментом сжатого поля. Явление, которое мы уже обсудили, могло бы соответственно называться сжатием второго порядка. Однако концепция сжатия может легко быть обобщена так, чтобы иметь отношение к высшим моментам поля. Сейчас мы кратко рассмотрим это обобщение и обсудим определение сжатия высшего порядка, изложенное в работах (Hong and Mandel, 1985a, b). Затем мы обсудим один простой пример. Для простоты снова ограничимся одномодовым полем.

Мы уже видели, что сжатое состояние, основанное на определении (21.1.7) полевых квадратурных компонент $\hat{Q}$ и $\hat{P}$, как правило, характеризуется тем, что для некоторого фазового угла β величина $\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle$ меньше, чем в вакуумном состоянии. Пусть $\hat{E}_1$, $\hat{E}_2$ — две квадратуры, задаваемые выражениями (21.8.4), которые необязательно являются безразмерными и которые пропорциональны $\hat{Q}$, $\hat{P}$. Тогда подобное утверждение может быть сделано и относительно $\langle(\Delta\hat{E}_1)^2\rangle$. Оно имеет естественное обобщение на любую четную степень N. Мы будем говорить, что поле проявляет сжатие N-го порядка для четного N, если $\langle(\Delta\hat{E}_1)^N\rangle$ меньше соответствующего N-го момента в вакуумном состоянии для некоторого фазового угла β. Однако, альтернативное определение (21.2.3), состоящее в том, что $\langle: (\Delta\hat{E}_1)^2 :\rangle < 0$ в сжатом состоянии, приходится обобщать с осторожностью, потому что условие $\langle: (\Delta\hat{E}_1)^2 :\rangle < 0$ не эквивалентно предшествующему определению сжатия N-го порядка, когда $N > 2$.

Как и прежде, можно связать $\langle(\Delta\hat{E}_1)^N\rangle$ с нормально упорядоченными моментами поля, хотя эта связь является более сложной. С помощью тождества Кемпбелла — Бейкера — Хаусдорфа [см. (10.11.26)] можно легко показать, что для любого x

$$\langle\exp(x\Delta\hat{E}_1)\rangle = \langle: \exp(x\Delta\hat{E}_1) :\rangle\, e^{x^2C/2}, \tag{21.9.1}$$

где : : есть обычный символ нормального упорядочения и C обозначает коммутатор $[\hat{E}^{(+)}, \hat{E}^{(-)}]$. Разлагая обе стороны в ряд по x и приравнивая коэффициенты при $x^N/N!$, мы приходим для любого четного числа N к следующему соотношению:

$$\langle(\Delta\hat{E}_1)^N\rangle = \langle:(\Delta\hat{E}_1)^N:\rangle + \frac{N^{(2)}}{1!}\left(\frac{1}{2}C\right)\langle:(\Delta\hat{E}_1)^{N-2}:\rangle + \\ + \frac{N^{(4)}}{2!}\left(\frac{1}{2}C\right)^2\langle:(\Delta\hat{E}_1)^{N-4}:\rangle + \ldots + (N-1)!!\,C^{N/2} \quad (N \text{ четно}), \tag{21.9.2}$$

где $N^{(r)} = N(N-1)\ldots(N-r+1)$. Теперь все нормально упорядоченные моменты $\langle:(\Delta\hat{E}_1)^r:\rangle$ обращаются в нуль в вакуумном состоянии, потому что операторы уничтожения, действующие слева на вакуумное состояние, дают нуль. Отсюда следует, что последний член $(N-1)!!\,C^{N/2}$ в правой части выражения является N-ым моментом величины $\Delta\hat{E}_1$ в вакуумном состоянии. Следовательно, чтобы существовало сжатие N-ого порядка (N четное), один или более нормально упорядоченных моментов должны быть отрицательными.

Стоит отметить, однако, что не все нормально упорядоченные моменты должны быть обязательно отрицательными. Действительно, может быть достаточно того, чтобы лишь один член в ряду моментов из (21.9.2) был отрицательным, если этот отрицательный член доминирует над другими моментами. Это приводит нас к определению *внутреннего сжатия N-го порядка*. Будем говорить, что поле является сжатым внутренне в N-ом порядке (N четное), если для некоторого β

$$\langle:(\Delta\hat{E}_1)^N:\rangle < 0. \tag{21.9.3}$$

При $N = 2$ определения для сжатия N-го порядка и внутреннего сжатия N-го порядка совпадают, но это не так, когда $N = 4, 6, 8, \ldots$. Поле может быть внутренне сжатым только во втором порядке и, кроме того, проявлять сжатие более высокого порядка.

Можно показать, что это действительно так в случае резонансной флуоресценции двухуровневого атома. Поле, созданное генерацией N-ой гармоники является внутренне сжатым в N-ом порядке, когда N четное, и в $N-1$-ом порядке, когда N нечетное (Kozierowski, 1986). В многофотонном поглощении N-го порядка сжатие является внутренним, за исключением случая $N = 6$ (García-Fernández, Sainz de los Terreros, Bermejo and Santoro, 1986). В качестве примера сжатия высшего порядка мы сейчас рассмотрим двухфотонное когерентное состояние.

21.9.1. Сжатие N-ого порядка двухфотонного когерентного состояния

Вычислим $\langle(\Delta\hat{E}_1)^N\rangle$ для двухфотонного когерентного состояния $|[z,v]\rangle$. Сначала выразим $\hat{E}_1$ в виде

$$\hat{E}_1 = g\hat{a} + g^*\hat{a}^\dagger, \tag{21.9.4}$$

где g есть некоторый комплексный коэффициент, который включает фазовый множитель $\mathrm{e}^{-i\beta}$, так чтобы

$$C = |g|^2. \tag{21.9.5}$$

Тогда с помощью (21.3.7) можно выразить $\hat{E}_1$ через $\hat{A}(z)$, $\hat{A}^\dagger(z)$ операторы в виде

$$\hat{E}_1 = f\hat{A} + f^*\hat{A}^\dagger, \tag{21.9.6}$$

где

$$f \equiv g\,\mathrm{ch}\,r - g^*\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{sh}\,r \quad (z = t\,\mathrm{e}^{i\theta}). \tag{21.9.7}$$

Воспользуемся операторным тождеством

$$\exp(x\Delta\hat{E}_1) =: \exp(x\Delta\hat{E}_1) :: \mathrm{e}^{x^2|f|^2/2}, \tag{21.9.8}$$

которое подобно (21.9.1), где $:: \hat{O} ::$ обозначает нормальное упорядочение $\hat{O}$ по отношению к $\hat{A}$, $\hat{A}^\dagger$ вместо $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$. Тогда, разлагая в ряд по x, мы имеем вместо (21.9.2) соотношение

$$\langle(\widehat{E}_1)^N\rangle = \langle :: (\widehat{E}_1)^N ::\rangle + \frac{N^{(2)}}{1!}(|f|^2/2)\langle :: (\widehat{E}_1)^{N-2} ::\rangle + \\ + \frac{N^{(4)}}{2!}(|f|^2/2)^2\langle :: (\widehat{E}_1)^{N-4} ::\rangle + \ldots + (N-1)!!\,|f|^N \quad (N \text{ четно}). \tag{21.9.9}$$

Поскольку состояние $|[z,v]\rangle$ есть собственное состояние $\hat{A}$ с собственным значением v [ср. (21.3.9)],

$$\langle :: (\widehat{E}_1)^r ::\rangle = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{21.9.10}$$

так что в этом состоянии

$$\langle(\widehat{E}_1)^N\rangle = (N-1)!!\,|f|^N = (N-1)!!\,|g|^N[\operatorname{ch} 2r - \operatorname{sh} 2r \cos(\theta + 2\arg g)]^{N/2} \quad (N \text{ четно}). \tag{21.9.11}$$

Теперь учтем, что множитель $(N-1)!!\,|g|^N$, остающийся в (21.9.11) при $r = 0$, является значением $\langle(\Delta\hat{E}_1)^N\rangle$ в вакуумном состоянии. Выбирая $\arg(g)$ так, чтобы $\cos[\theta + 2\arg(g)] = 1$, можно сделать последний множитель равным e^{-Nr}, что делает $\langle(\Delta\hat{E}_1)^N\rangle$ меньше, чем в вакуумном состоянии для любого четного N, когда $z \neq 0$. Следовательно, поле сжато не только во втором порядке, но и во всех четных порядках в состоянии $|[z,v]\rangle$, и то же самое справедливо для состояния $|[v,z]\rangle$.

Остается открытым вопрос о том, является ли сжатие N-го порядка внутренним в смысле соотношения (21.9.3) или нет. Используя соотношение упорядочения (21.9.1) в обратном порядке, можно показать, что величина

$$\langle :(\widehat{E}_1)^N: \rangle = (-1)^{N/2}(N-1)!!\,|g|^N(1 - \mathrm{e}^{-2r})^{N/2} \quad (N \text{ четно}) \tag{21.9.12}$$

отрицательна для $N = 2, 6, 10, \ldots$. Следовательно, в двухфотонном когерентном состоянии сжатие N-го порядка является внутренним всякий раз, когда $N/2$ есть нечетное число.

Сжатие высшего порядка может быть обнаружено также и в фотоэлектрическом эксперименте по гомодинированию типа того, который обсуждался в разд. 21.6, но это требует измерений моментов высшего порядка (Mandel and Hong, 1986). Такие измерения являются, вероятно, более трудными по сравнению с соответствующими измерениями моментов второго порядка. Однако, в принципе, можно достигнуть даже большего сжатия, или снижения шума, по отношению к более высоким моментам поля, чем по отношению ко вторым моментам.

21.9.2. Амплитудно-квадратичное сжатие

Совсем иное определение сжатия высшего порядка было введено Хиллери (Hillery, 1987a, b), который назвал его *амплитудно-квадратичным сжатием*. Мы рассмотрели сжатие одномодового поля в терминах квадратурных операторов

$$\widehat{E}_1 = \hat{a}^\dagger \mathrm{e}^{-i(\omega t - \beta)} + \hat{a}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - \beta)}, \quad \widehat{E}_2 = i[\hat{a}^\dagger \mathrm{e}^{-i(\omega t - \beta)} - \hat{a}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - \beta)}],$$

тогда как Хиллери ввел две безразмерные переменные, определенные через $\hat{a}^2$, $\hat{a}^{\dagger 2}$, по формулам

$$\widehat{Y}_1 = \frac{1}{2}[\hat{a}^{\dagger 2}\,\mathrm{e}^{-2i\omega t} + \hat{a}^2\,\mathrm{e}^{2i\omega t}], \quad \widehat{Y}_2 = \frac{i}{2}[\hat{a}^{\dagger 2}\,\mathrm{e}^{-2i\omega t} - \hat{a}^2\,\mathrm{e}^{2i\omega t}], \tag{21.9.13}$$

которые подчиняются правилу коммутации

$$[\widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2] = 2i\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right), \tag{21.9.14}$$

и, следовательно, удовлетворяют соотношению неопределенности

$$[\langle(\Delta\widehat{Y}_1)^2\rangle\langle(\Delta\widehat{Y}_2)^2\rangle]^{1/2} \geqslant \left\langle \hat{n} + \frac{1}{2} \right\rangle. \tag{21.9.15}$$

В когерентном состоянии каждая дисперсия $\langle(\Delta\hat{Y}_1)^2\rangle$ или $\langle(\Delta\hat{Y}_2)^2\rangle$ по отдельности равна $\langle\hat{n}\rangle + \frac{1}{2}$. Тогда состояние определяется как амплитудно-квадратично сжатое по переменной $\hat{Y}_1$, если

$$\langle(\Delta\hat{Y}_1)^2\rangle < \left\langle \hat{n} + \frac{1}{2} \right\rangle. \tag{21.9.16}$$

Можно показать, что эта форма сжатия, как и для квадратурного сжатия, существует только в неклассическом состоянии и что она возникает при генерации второй гармоники, вырожденной параметрической вниз-конверсии и двухфотонном поглощении. Однако флуктуации $\hat{Y}_1$ в амплитудно-квадратично сжатом состоянии не меньше, чем в вакуумном состоянии, что делает эту форму сжатия принципиально отличной.

Задачи

21.1 Одномодовое квантовое поле находится в суперпозиционном состоянии $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, причем $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Определите значения α, β, при которых это состояние проявляет квадратурное сжатие.

21.2 Одномодовое поле находится в квантовом состоянии $|\psi\rangle = (1/\sqrt{2})(|n\rangle + |n+2\rangle)$, которое является суперпозицией фоковских состояний. Для каких значений n это состояние является (а) квадратурно сжатым; (б) состоянием с субпуассоновской статистикой? Легче ли достигнуть квадратурного сжатия, если рассмотреть более общее состояние $|\psi\rangle = (1/\sqrt{2})(|n\rangle + |n+r\rangle)$, $(r = 1, 2, 3, \ldots)$?

21.3 Рассмотрите нелинейное взаимодействие в картине взаимодействия между двумя одномодовыми полями, обозначенными через 1 и 2, следующего вида:

$$\hat{H}_I(t) = \hbar g[\hat{a}_1^2(t)\hat{a}_2^\dagger(t) + \text{э.с.}] \quad (g \text{ действительное}).$$

Когда частота моды 2 в два раза больше частоты моды 1, это взаимодействие, как иногда считают, представляет собой процесс генерации второй гармоники. Предположим, что изначально мода 2 находится в вакуумном состоянии, в то время как мода 1 находится в когерентном состоянии $|v_1\rangle$. Покажите, с точностью до членов порядка $(gt)^2$, что после короткого времени взаимодействия t мода 1 проявляет квадратичное сжатие.

21.4 Используя условия предыдущей задачи, покажите, что, с точностью до членов порядка $(gt)^2$, не существует внутреннего сжатия N-го порядка фундаментальной моды кроме $N = 2$, несмотря на то, что отклонение N-го (четного) порядка одной из полевых квадратур может быть меньше, чем в вакуумном состоянии.

Глава 22

НЕКОТОРЫЕ КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ

22.1. Введение

Мы уже встречались с ситуацией, когда свет одной частоты, падая на атомную систему, порождает свет на других частотах (ср. разд. 15.6). В этом случае можно рассматривать атом как (шумовой) нелинейный преобразователь падающего поля. Еще более сильные эффекты возникают, если мы имеем дело с большим числом атомов или нелинейной средой. В этих условиях иногда допустимо игнорировать атомную структуру и считать среду непрерывной, как в максвелловской электромагнитной теории. Наука о взаимодействии падающего света с нелинейной средой известна как нелинейная оптика.

Нелинейная оптика получила свое начало в эксперименте, в котором интенсивный луч красного света (длина волны 6943 Å) от рубинового лазера падал на кристалл кварца, в результате чего создавался слабый луч голубого света на длине волны 3472 Å, соответствующей первой гармонике красного света (Franken, Hill, Peters and Weinreich, 1961). Развитие предмета нелинейной оптики в современную зрелую область науки обусловлено, в основном, работой Бломбергена и его коллег. Далее мы рассмотрим всего несколько показательных примеров явлений нелинейной оптики. Более многочисленную проблематику и много мелких подробностей можно найти в книгах Бломбергена и других авторов (Bloembergen, 1965; Yariv, 1967, гл. 21; Shen, 1984; Schubert and Wilhelmi, 1986; Butcher and Cotter, 1990; Boyd, 1992)[1].

22.2. Энергия поля в диэлектрике

В классической электродинамике энергия электромагнитного поля внутри немагнитной среды в единицах СИ задается выражением

$$H = \int \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2(\mathbf{r},t)\,d^3r + \int d^3r \int_0^{\mathbf{D}(\mathbf{r},t)} \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{D}(\mathbf{r},t). \tag{22.2.1}$$

Здесь $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ есть вектор электрического смещения, и, строго говоря, интегрирование по $\mathbf{D}$ не может быть выполнено, потому что не существует простого соотношения между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$. Конечно, в пустом пространстве или в изотропном пространстве $\mathbf{D}$-интеграл сводится к $\frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$, что является обычным выражением для плотности электрической энергии. Однако в нелинейной среде сопоставимое упрощение невозможно, хотя и можно выразить $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ (в единицах СИ) в виде

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}(\mathbf{r},t) \tag{22.2.2}$$

и иногда возможно разложить поляризацию $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$, индуцированную в среде, в степенной ряд по $\mathbf{E}$ в виде

$$P_i = \chi^{(1)}_{ij}E_j + \chi^{(2)}_{ijk}E_jE_k + \chi^{(3)}_{ijkl}E_jE_kE_l + \ldots. \tag{22.2.3}$$

[1] см. также книги (*Ахманов, Хохлов, 1964); (*Летохов, Чеботаев, 1975); (*Ахманов, Никитин, 1998) — *ред. пер.*

Здесь $\chi^{(n)}$ есть тензор восприимчивости ранга $n+1$, и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Это уравнение предназначено для среды без дисперсии или для такого случая, когда эффективные частоты поля находятся не так близко к резонансным частотам среды. Когда восприимчивость сильно зависит от частоты, более естественно совершить фурье-разложение как P_i, так и E_i, и связать фурье-компоненты $P_i(\omega)$ и $E_i(\omega)$ через степенные ряды. Так как $\chi^{(n)}$ в общем случае включает n различных частот, мы записываем вместо (22.2.3)

$$P_I(\omega_1) = \chi^{(1)}_{ij}(\omega_1;\omega_1)E_j(\omega_1) + \chi^{(2)}_{ijk}(\omega_1;\omega_1-\omega_2,\omega_2)E_j(\omega_1-\omega_2)E_k(\omega_2)+ \\ + \chi^{(3)}_{ijkl}(\omega_1;\omega_1-\omega_2-\omega_3,\omega_2,\omega_3)E_j(\omega_1-\omega_2-\omega_3)E_k(\omega_2)E_l(\omega_3)+\ldots. \quad (22.2.4)$$

Теперь мы можем воспользоваться соотношениями (22.2.2)—(22.2.4) в выражении (22.2.1) для энергии, которое приводит к следующей формуле:

$$H = \int \left[\frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2(\mathbf{r},t) + \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2(\mathbf{r},t) + X_1(\mathbf{r}) + X_2(\mathbf{r}) + \ldots\right] d^3r, \quad (22.2.5)$$

где

$$X_1(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{2}\iint d\omega\, d\omega' \chi^{(1)}_{ij}(\omega,\omega')E_i(\mathbf{r},\omega')E_j(\mathbf{r},\omega),$$

$$X_2(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{3}\iiint d\omega\, d\omega'\, d\omega'' \chi^{(2)}_{ijk}(\omega'';\omega-\omega',\omega')E_i(\mathbf{r},\omega'')E_j(\mathbf{r},\omega-\omega')E_k(\mathbf{r},\omega').$$

Член с $\chi^{(2)}_{ijk}$ представляет собой нелинейный вклад низшего порядка в энергию.

Каноническое квантование макроскопического поля в нелинейной среде является нетривиальной задачей [см., например, работы (Shen, 1967, 1984), (Hillery and Mlodinov, 1984), (Shubert and Wilhelmi, 1986), (Drummond, 1990), (Peřina, 1991)], рассмотрение которой здесь не предполагается. Приближения, которые обычно используются, справедливы при различных условиях. До тех пор, пока нелинейности малы, естественно попытаться заменить векторы $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$, упомянутые выше, соответствующими операторами свободного поля в гильбертовом пространстве при условии, что результирующий гамильтониан эрмитов. Если рассматривается определенный нелинейный процесс, то иногда выбирают те члены разложения, которые характеризуют это взаимодействие, и опускают остальные. Эту процедуру мы продемонстрируем в одном или двух простых случаях.

22.3. Генерация оптических гармоник

Генерация оптических гармоник является самым давним и наиболее известным примером нелинейного оптического процесса (Franken, Hill, Peters and Weinreich, 1961; Armstrong, Bloembergen, Ducuing and Pershan, 1962). Монохроматический световой пучок частоты ω_1, падающий на нелинейную среду, порождает поле на частоте гармоники $\omega_2 = 2\omega_1$. Для описания процесса необходимы комбинации из трех операторов рождения и уничтожения, и, следовательно, члены, содержащие $\chi^{(2)}$, в операторной форме выражения (22.2.5). Явление генерации оптических гармоник рассматривалось многими авторами. Мы будем в основном применять подход Киелиха и его коллег (Kozierowski and Tanas, 1977; Kielich, Kozierowski and Tanas, 1978), в котором гильбертово пространство ограничено только двумя модами на частотах ω_1 и ω_2, и используется разложение в ряд Тейлора для описания эволюции динамических переменных во времени.

Выразим энергию двухмодового поля в сокращенной форме

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{2}\hbar\omega_i\left(\hat{n}_i + \frac{1}{2}\right) + \hbar g[\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1^2 + \hat{a}_1^{\dagger 2}\hat{a}_2], \quad (22.3.1)$$

где индексы 1, 2 относятся к основной и гармонической модам, соответственно. Действительная константа связи мод g содержит нелинейную восприимчивость $\chi^{(2)}$. Гамильтониан $\hat{H}$, наряду с процессом, в котором

два фотона с частотой ω_1 поглощаются и порождают новый фотон на частоте гармоники $\omega_2 = 2\omega_1$, описывает и обратный процесс. Из (22.3.1) с помощью коммутационных соотношений между операторами $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ и $\hat{n}$ легко находим, что

$$[\hat{n}_1 + 2\hat{n}_2, \hat{H}] = 0, \tag{22.3.2}$$

так что сумма $\hat{n}_1(t)+2\hat{n}_2(t)$ является интегралом движения. Следовательно, на каждый испущенный фотон гармоники поглощаются два фотона основной моды.

Иногда удобнее заменить $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ медленно изменяющимися операторами $\hat{\mathscr{A}}_1$, $\hat{\mathscr{A}}_2$

$$\hat{\mathscr{A}}_1 = \hat{a}_1 \mathrm{e}^{i\omega_1 t}, \quad \hat{\mathscr{A}}_2 = \hat{a}_2 \mathrm{e}^{i\omega_2 t}, \tag{22.3.3}$$

которые подчиняются тем же правилам коммутации, что и $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, но не осциллируют на оптических частотах. Тогда уравнения движения Гейзенберга для $\hat{\mathscr{A}}_1$ и $\hat{\mathscr{A}}_2$ примут вид

$$\dot{\hat{\mathscr{A}}}_1 = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\mathscr{A}}_1, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{\mathscr{A}}_1}{\partial t} = -2ig\hat{\mathscr{A}}_1^\dagger \hat{\mathscr{A}}_2, \tag{22.3.4}$$

$$\dot{\hat{\mathscr{A}}}_2 = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\mathscr{A}}_2, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{\mathscr{A}}_2}{\partial t} = -ig\hat{\mathscr{A}}_1^2. \tag{22.3.5}$$

Подобно этому, мы можем вычислить вторые производные и в результате получим

$$\ddot{\hat{\mathscr{A}}}_1 = -2ig(\dot{\hat{\mathscr{A}}}_1^\dagger \hat{\mathscr{A}}_2 + \hat{\mathscr{A}}_1^\dagger \dot{\hat{\mathscr{A}}}_2) = 4g^2(\hat{n}_2 - \hat{n}_1/2)\hat{\mathscr{A}}_1, \tag{22.3.6}$$

$$\ddot{\hat{\mathscr{A}}}_2 = -ig(\dot{\hat{\mathscr{A}}}_1 \hat{\mathscr{A}}_1 + \hat{\mathscr{A}}_1 \dot{\hat{\mathscr{A}}}_1) = -4g^2(\hat{n}_1 + \tfrac{1}{2})\hat{\mathscr{A}}_2. \tag{22.3.7}$$

Если плоская волна определенной частоты распространяется через среду в определенном направлении, то расстояние и время пропорциональны друг другу и являются, в некоторой степени, взаимозаменяемыми величинами. Так как время взаимодействия фактически равно времени распространения через среду, то, если оно достаточно короткое, можно аппроксимировать $\hat{\mathscr{A}}_1(t)$ и $\hat{\mathscr{A}}_2(t)$ рядом Тейлора в окрестности $t = 0$. С точностью до членов порядка $(gt)^2$, это приводит к следующим формулам:

$$\hat{\mathscr{A}}_1(t) = \hat{\mathscr{A}}_1(0) + t\dot{\hat{\mathscr{A}}}_1(0) + \frac{t^2}{2!}\ddot{\hat{\mathscr{A}}}_1(0) + \ldots =$$

$$= \hat{\mathscr{A}}_1(0) - 2igt\hat{\mathscr{A}}_1^\dagger(0)\hat{\mathscr{A}}_2(0) 2g^2t^2[\hat{n}_2(0) - \frac{1}{2}\hat{n}_1(0)]\hat{\mathscr{A}}_1(0) + \ldots, \tag{22.3.8}$$

$$\hat{\mathscr{A}}_2(t) = \hat{\mathscr{A}}_2(0) + t\dot{\hat{\mathscr{A}}}_2(0) + \frac{t^2}{2!}\ddot{\hat{\mathscr{A}}}_1(0) + \ldots = \hat{\mathscr{A}}_2(0) - 2igt\hat{\mathscr{A}}_1^2(0) - 2g^2t^2[\hat{n}_1(0) + \frac{1}{2}]\hat{\mathscr{A}}_2(0) + \ldots. \tag{22.3.9}$$

Разложения в ряд справедливы до тех пор, пока $\langle \hat{n}_1(0)\rangle (gt)^2 \ll 1$.

Эти выражения можно использовать для построения других операторов, таких как операторы числа фотонов $\hat{n}_1(t)$ и $\hat{n}_2(t)$, и вычисления их моментов. Предположим, что состояние $|\psi\rangle$ поля в начальный момент времени $(t = 0)$ является когерентным состоянием с комплексной амплитудой v для моды 1 и вакуумным для моды 2. Тогда

$$\hat{\mathscr{A}}_1(0)|\psi\rangle = v|\psi\rangle, \quad \hat{\mathscr{A}}_2(0)|\psi\rangle = 0, \tag{22.3.10}$$

и мы легко находим из (22.3.8) и (22.3.9) после перемножения, выражения всех операторов в нормально упорядоченном виде и вычисления средних значений, что

$$\langle \hat{n}_1(t)\rangle = \langle\psi|\hat{\mathscr{A}}_1^\dagger(t)\hat{\mathscr{A}}_1(t)|\psi\rangle = |v|^2 - 2(gt)^2|v|^4 + \ldots, \tag{22.3.11}$$

$$\langle \hat{n}_2(t)\rangle = \langle\psi|\hat{\mathscr{A}}_2^\dagger(t)\hat{\mathscr{A}}_2(t)|\psi\rangle = (gt)^2|v|^4 + \ldots. \tag{22.3.12}$$

Интенсивность гармонической компоненты, следовательно, растет пропорционально квадрату времени распространения и квадрату интенсивности основной моды.

Флуктуации чисел фотонов могут быть вычислены аналогичным образом. С помощью (22.3.8) и (22.3.9) для разности между дисперсией и средним значением (Kozierowski and Tanas, 1977; Kielich, Kozierowski and Tanas, 1978) можно получить выражения

$$\langle(\Delta\hat{n}_1(t))^2\rangle - \langle\hat{n}_1(t)\rangle = -2(gt)^2|v|^4 + \ldots, \tag{22.3.13}$$

$$\langle(\Delta\hat{n}_2(t))^2\rangle - \langle\hat{n}_2(t)\rangle = O(gt)^6, \tag{22.3.14}$$

где $O(x)$ обозначает порядок величины. Статистика фотонов гармоники, следовательно, близка к пуассоновской. С другой стороны для основной моды имеет место сужение распределения фотонов, или субпуассоновская статистика, хотя эффект мал для малых $\langle\hat{n}_2(t)\rangle$.

22.3.1. Сжатие при генерации гармоник[1]

Нетрудно показать, что основная мода, к тому же, становится сжатой (ср. гл. 21) при распространении света через нелинейную среду (Mandel, 1982). Для этой цели мы образуем два эрмитовых оператора

$$\hat{Q}_1(t) = \hat{\mathscr{A}}_1(t)\,\mathrm{e}^{-i\phi} + \hat{\mathscr{A}}_1^\dagger(t)\,\mathrm{e}^{i\phi}, \quad \hat{P}_1(t) = \hat{\mathscr{A}}_1(t)\,\mathrm{e}^{-i\phi+\pi/2} + \hat{\mathscr{A}}_1^\dagger(t)\,\mathrm{e}^{i\phi+\pi/2}, \tag{22.3.15}$$

которые являются канонически сопряженными и соответствуют амплитудам двух квадратурных компонент основной моды. Фазовый угол ϕ может быть выбран произвольно, и очевидно, что $\hat{P}_1(t)$ отличается от $\hat{Q}_1(t)$ только тем, что имеет угол ϕ, увеличенный на $\pi/2$. Мы имеем сжатое состояние, если для некоторого ϕ дисперсия как $\hat{Q}_1(t)$, так и $\hat{P}_1(t)$ меньше единицы, т.е. меньше значения дисперсии в вакуумном состоянии. Теперь из (22.3.8) мы легко находим, что

$$\langle\hat{Q}_1(t)\rangle = (v\,\mathrm{e}^{-i\phi} + v^*\,\mathrm{e}^{i\phi})(1 - g^2t^2|v|^2) + O(gt)^3, \tag{22.3.16}$$

$$\langle\hat{Q}_1^2(t)\rangle = [v^2\,\mathrm{e}^{-2i\phi}(1 - 2g^2t^2|v|^2) + \text{к.с.}] + 2|v|^2(1 - 2g^2t^2|v|^2) + 1 - [g^2t^2v^2\,\mathrm{e}^{-2i\phi} + \text{к.с.}] + O(gt)^3, \tag{22.3.17}$$

так что

$$\langle[\Delta\hat{Q}_1(t)]^2\rangle = 1 - 2g^2t^2|v|^2\cos 2(\theta - \phi) + O(gt)^3 \quad (v = |v|\,\mathrm{e}^{i\theta}). \tag{22.3.18}$$

Если выбрать $\phi = \theta$, то дисперсия величины $\hat{Q}_1(t)$ будет меньше единицы, так что основная мода становится сжатой, по крайней мере, отчасти. Величина сжатия, измеренная по отклонению $\langle(\Delta\hat{Q}_1(t))^2\rangle$ от единицы, задается отношением $2\langle\hat{n}_2(t)\rangle/\langle\hat{n}_1(0)\rangle$. Мы видим, следовательно, что процесс генерации второй гармоники не описывается полностью классически, потому что он сопровождается появлением субпуассоновской статистики и сжатием, представляющими собой чисто квантово-механические явления.

На практике ситуация всегда сложнее, так как нельзя ограничиться только двумя хорошо определенными модами. Более того, для процессов, имеющих заметную вероятность, следует ожидать, что импульс также хорошо, как и энергия, сохраняется при взаимодействии. На самом деле, в определенных кристаллах можно одновременно удовлетворить условиям сохранения энергии и импульса подходящим выбором направлений распространения и поляризации световых лучей относительно кристаллических осей. Эта техника известна как фазовое согласование (Armstrong, Bloembergen, Ducuing and Pershan, 1962, Giordmaine, 1962; Maker, Terhune, Nisenoff and Savage, 1962; Yariv, 1967, гл. 21; Shen, 1984; Boyd, 1992).

22.4. Параметрическая вниз-конверсия[2]

В качестве второго примера нелинейного взаимодействия рассмотрим процесс параметрической вниз-конверсии (down-conversion), который является, в некотором смысле, обратным процессу генерации гармоник. В то время как в последнем случае два падающих фотона порождают один фотон на удвоенной

[1] Эта проблема подробно обсуждалась в работе (*Ахманов, Белинский, Чиркин, 1990) — *ред. пер.*

[2] Детальное изложение см. в книге (*Клышко, 1980) — *ред. пер.*

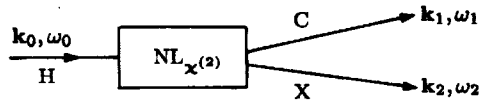


Рис. 22.1. Процесс параметрической вниз-конверсии в нелинейном кристалле NL с восприимчивостью $\chi^{(2)}$. H — волна накачки, C — сигнальная волна, X — холостая волна

первоначальной частоте, в параметрической вниз-конверсии один фотон, падающий на диэлектрик, имеющий $\chi^{(2)}$-нелинейность, распадается на два новых фотона более низких частот (см. рис. 22.1). Исторически они получили названия *сигнальный фотон* и *холостой (idler) фотон*. Если два новых фотона неразличимы, то можно описать процесс тем же самым гамильтонианом (22.3.1), как и раньше. Однако мы будем рассматривать несколько более общую ситуацию, в которой падающие фотоны частоты ω_0 распадаются на два фотона более низких частот, которые отличаются друг от друга либо направлениями, либо величиной их волновых векторов $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, либо и тем и другим. В стационарном случае мы всегда имеем

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \tag{22.4.1}$$

где ω_0 известна как *частота накачки* параметрического процесса, ω_1 и ω_2 известны как *сигнальная и холостая частоты*. Процесс спонтанной параметрической вниз-конверсии в нелинейном кристалле был впервые исследован теоретически Клышко (Klyshko, 1968) и экспериментально Бернхемом и Вейнбергом (Burnham and Weinberg, 1970), которые показали, что сигнальный и холостой фотоны появляются «одновременно» в пределах времени разрешения детекторов и действующей совместно электроники. Имеется значительное количество литературы, возвращающей нас к 1960-ым годам, по теории параметрического усиления и вверх- и вниз-конверсии. (Что касается ранних работ по параметрическому усилению и вниз-конверсии, см. Louisell, 1960; Yariv, 1967; Mollow, 1967, 1973; Mollow and Glauber, 1967a, b; Kleinman, 1968; Zel'dovich and Klyshko, 1969). Если выполняется условие фазового синхронизма, то волновые векторы $\mathbf{k}_0$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ фотона накачки, сигнального и холостого фотонов связаны соотношением

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \tag{22.4.2}$$

которое отражает закон сохранения импульса.

Гамильтониан для трехмодового параметрического процесса может быть записан в следующем виде, который является очевидным обобщением выражения (22.3.1),

$$\hat{H} = \sum_{i=0}^{2} \hbar\omega_i \left(\hat{n}_i + \frac{1}{2}\right) + \hbar g[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0 + \text{э.с.}]. \tag{22.4.3}$$

Можно легко доказать, что

$$[\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_0, \hat{H}] = 0,$$

и поэтому $\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_0$ является интегралом движения, что соответствует процессу деления одного фотона накачки на один сигнальный и один холостой фотон. Разлагая в ряд Тейлора $\hat{a}_j(t)$ $(j = 1, 2, 3)$ и используя уравнение движения Гейзенберга, чтобы построить производную по времени, можно, как и ранее, получить решения на коротких временах для $\hat{a}_j(t)$. При этом за счет упрощения гамильтониана $\hat{H}$ проблема сводится к задаче, имеющей простое аналитическое решение (Graham, 1984).

22.4.1. Решение уравнений движения

Предположим, что падающее поле накачки является интенсивным и что мода накачки $\hat{a}_0$ может быть рассмотрена классически как поле комплексной амплитуды $a_0 = v_0 \mathrm{e}^{-i\omega_0 t}$. Тогда гамильтониан (22.4.3) имеет только две квантованные моды поля, соответствующие сигнальной 1 и холостой 2 модам; вклад от классической накачки больше не появляется. Однако поскольку амплитуда накачки v_0 теперь считается постоянной, мы должны иметь в виду, что решение перестает быть верным, как только произойдет заметный распад и, следовательно, заметное истощение поля накачки. Поэтому ограничим наши вычисления случаем $\langle \hat{n}_1(t) \rangle, \langle \hat{n}_2(t) \rangle \ll |v_0|^2$. Из гамильтониана

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{2} \hbar\omega_i \left(\hat{n}_i + \frac{1}{2}\right) + \hbar g[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}^{\dagger 2} v_0 \, \mathrm{e}^{-i\omega_0 t} + \text{э.с.}] \tag{22.4.4}$$

мы имеем $[\hat{n}_1 - \hat{n}_2, H] = 0$, поэтому $\hat{n}_1(t) - \hat{n}_2(t)$ является интегралом движения и

$$\hat{n}_1(t) - \hat{n}_2(t) = \hat{n}_1(0) - \hat{n}_2(0). \tag{22.4.5}$$

Это соотношение отражает тот факт, что сигнальный и холостой фотоны всегда рождаются вместе.

Уравнение движения Гейзенберга для $\hat{a}_1(t)$ принимает вид

$$\dot{\hat{a}}_1(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}_1, \hat{H}] = -i\omega_1 \hat{a}_1(t) - ig\hat{a}_2^\dagger(t) v_0 \, \mathrm{e}^{-i\omega_0 t}.$$

Как и прежде удобно ввести медленно изменяющиеся комплексные амплитуды мод

$$\hat{\mathscr{a}}_1(t) = \hat{a}_1(t)\, \mathrm{e}^{i\omega_1 t}, \quad \hat{\mathscr{a}}_2(t) = \hat{a}_2(t)\, \mathrm{e}^{i\omega_2 t}.$$

Тогда $\hat{\mathscr{a}}_1(t)$ подчиняется простому уравнению движения

$$\frac{d\hat{\mathscr{a}}_1(t)}{dt} = -igv_0 \hat{\mathscr{a}}_2(t)\, \mathrm{e}^{i(\omega_1+\omega_2-\omega_0)t}.$$

Если $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$, то имеем

$$\frac{d\hat{\mathscr{a}}_1(t)}{dt} = -igv_0 \hat{\mathscr{a}}_2(t), \quad \frac{d\hat{\mathscr{a}}_2(t)}{dt} = -igv_0 \hat{\mathscr{a}}_1(t). \tag{22.4.6}$$

Дифференцируя второй раз и подставляя выражение для $d\hat{\mathscr{a}}_1(t)/dt$ из второго уравнения в первое, мы получаем несвязанные уравнения при действительном g

$$\frac{d^2\hat{\mathscr{a}}_1(t)}{d^2t} = g^2|v_0|^2 \hat{\mathscr{a}}_1(t), \quad \frac{d^2\hat{\mathscr{a}}_2(t)}{d^2t} = g^2|v_0|^2 \hat{\mathscr{a}}_2(t).$$

Общие решения этих уравнений легко могут быть получены, и при подходящих граничных условиях они принимают вид

$$\hat{\mathscr{a}}_1(t) = \hat{\mathscr{a}}_1(0) \operatorname{ch}(g|v_0|t) - i\, \mathrm{e}^{i\theta} \hat{\mathscr{a}}_2(0) \operatorname{sh}(g|v_0|t), \tag{22.4.7}$$

$$\hat{\mathscr{a}}_2(t) = \hat{\mathscr{a}}_2(0) \operatorname{ch}(g|v_0|t) - i\, \mathrm{e}^{i\theta} \hat{\mathscr{a}}_1(0) \operatorname{sh}(g|v_0|t), \tag{22.4.8}$$

где $v_0 = |v_0|\, \mathrm{e}^{i\theta}$. Легко убедиться, что эти решения удовлетворяют уравнению (22.4.5).

22.4.2. Статистика фотонов

Для того, чтобы вычислить средние значения величин, будем считать, что начальное состояние и сигнальной, и холостой мод является вакуумным состоянием $|\mathrm{vac}\rangle_{1,2}$. Поскольку $\hat{\mathscr{a}}_j(0)|\mathrm{vac}\rangle_{1,2} = 0$ $(j = 1, 2)$, можно легко найти как моменты, так и производящую функцию моментов чисел фотонов $\hat{n}_1(t)$ и $\hat{n}_2(t)$. Из (22.4.7) для r-го момента $\hat{n}_1(t)$ при нормальном упорядочении, который является также r-ым факториальным моментом, получаем выражение

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n}_1^{(r)}(t) \rangle = \langle : \hat{n}_1^{(r)}(t) : \rangle &=_{1,2} \langle \mathrm{vac}|\hat{\mathscr{a}}_1^{\dagger r}(t)\hat{\mathscr{a}}_1^{r}(t)|\mathrm{vac}\rangle_{1,2} = \\
&=_{1,2} \langle \mathrm{vac}|[\hat{\mathscr{a}}_1^{\dagger}(0) \operatorname{ch}(g|v_0|t) + i\, \mathrm{e}^{i\theta} \hat{\mathscr{a}}_2(0) \operatorname{sh}(g|v_0|t)]^r [\hat{\mathscr{a}}_1(0) \operatorname{ch}(g|v_0|t) - i\, \mathrm{e}^{i\theta} \hat{\mathscr{a}}_2^{\dagger}(0) \operatorname{sh}(g|v_0|t)]^r |\mathrm{vac}\rangle_{1,2} = \\
&= |(-i\, \mathrm{e}^{i\theta})^r \operatorname{sh}^r(g|v_0|t) \hat{\mathscr{a}}_2^{\dagger r}(0)|\mathrm{vac}\rangle_{1,2}|^2 = \operatorname{sh}^{2r}(g|v_0|t)_{1,2} \langle \mathrm{vac}|\hat{\mathscr{a}}_2 r(0) \hat{\mathscr{a}}_2^{\dagger r}(0)|\mathrm{vac}\rangle_{1,2} = \\
&= \operatorname{sh}^{2r}(g|v_0|t)_{1,2} \langle \mathrm{vac}|(\hat{n}_2(0)+1)(\hat{n}_2(0)+2)\ldots(\hat{n}_2(0)+r)|\mathrm{vac}\rangle_{1,2} = r! \operatorname{sh}^{2r}(g|v_0|t),
\end{aligned} \tag{22.4.9}$$

и тот же самый результат для $\langle : \hat{n}_2(t) : \rangle$ следует из (22.4.8). При вычислении (22.4.9) мы использовали теорему антинормального упорядочения [ср. (12.10.23а)]

$$"\hat{n}_2^r" = (\hat{n}_2 + 1)(\hat{n}_2 + 2)\ldots(\hat{n}_2 + r).$$

Эти моменты типичны для фотонов, подчиняющихся распределению вероятности Бозе — Эйнштейна, которое применимо к фотонам, испускаемым источником в тепловом равновесии.

В частности, когда $r = 1$, получаем

$$\langle \hat{n}_1(t)\rangle = \mathrm{sh}^2(g|v_0|t) = \langle \hat{n}_2(t)\rangle, \tag{22.4.10}$$

и, когда $r = 2$,

$$\langle : \hat{n}_1(t) : \rangle = 2\,\mathrm{sh}^4(g|v_0|t) = \langle : \hat{n}_2(t) : \rangle, \tag{22.4.11}$$

поэтому

$$\langle (\Delta\hat{n}_1(t))^2\rangle = \langle : \hat{n}_1^2(t) : \rangle - \langle \hat{n}_1(t)\rangle^2 + \langle \hat{n}_1(t)\rangle = \langle \hat{n}_1(t)\rangle[1 + \langle \hat{n}_1(t)\rangle] = \langle (\Delta\hat{n}_1(t))^2\rangle. \tag{22.4.12}$$

Из (22.4.10) видно, что среднее число вниз-конвертированных фотонов растет квадратично со временем за счет спонтанной эмиссии до тех пор, пока $g|v_0|t \ll 1$. Но как только $g|v_0|t$ превышает единицу, вынужденная эмиссия доминирует и $\langle \hat{n}_j(t)\rangle$ затем растет экспоненциально со временем. Однако следует отметить еще раз, что предположение о постоянстве амплитуды накачки v_0 не может быть оправданным, как только $\langle \hat{n}_j(t)\rangle$ становится достаточно большим. На практике, время взаимодействия t можно выбрать равным времени распространения через нелинейную среду, которое обычно очень короткое, так что в условиях стационарной накачки, как правило, $g|v_0|t \ll 1$.

Для того, чтобы вычислить взаимную корреляцию $\langle : \hat{n}_1(t)\hat{n}_2(t) : \rangle$, воспользуемся формулами (22.4.7) и (22.4.8). Находим, что

$$\begin{aligned}
\langle : \hat{n}_1(t)\hat{n}_2(t) : \rangle &=_{1,2} \langle \mathrm{vac}|\hat{\mathscr{A}}_1^\dagger(t)\hat{\mathscr{A}}_2^\dagger(t)\hat{\mathscr{A}}_2(t)\hat{\mathscr{A}}_1(t)|\mathrm{vac}\rangle_{1,2} = \\
&= |[\hat{\mathscr{A}}_2(0)\,\mathrm{ch}(g|v_0|t) - i\,\mathrm{e}^{i\theta}\hat{\mathscr{A}}_1^\dagger(0)\,\mathrm{sh}(g|v_0|t)][\hat{\mathscr{A}}_1(0)\,\mathrm{ch}(g|v_0|t) - i\,\mathrm{e}^{i\theta}\hat{\mathscr{A}}_2^\dagger(0)\,\mathrm{sh}(g|v_0|t)]|\mathrm{vac}\rangle_{1,2}|^2 = \\
&= |[-i\,\mathrm{e}^{i\theta}(\hat{\mathscr{A}}_2^\dagger(0) + 1)\,\mathrm{ch}(g|v_0|t)\,\mathrm{sh}(g|v_0|t) - i\,\mathrm{e}^{i\theta}\hat{\mathscr{A}}_1^\dagger(0)\hat{\mathscr{A}}_2^\dagger(0)\,\mathrm{sh}^2(g|v_0|t)]|\mathrm{vac}\rangle_{1,2}|^2 = \\
&= \mathrm{ch}^2(g|v_0|t) + \mathrm{sh}^2(g|v_0|t) + \mathrm{sh}^4(g|v_0|t) = \mathrm{sh}^2(g|v_0|t)[1 + 2\,\mathrm{sh}^2(g|v_0|t)] = \\
&= \langle \hat{n}_j(t)\rangle + 2\langle \hat{n}_j(t)\rangle^2 = \langle \hat{n}_j(t)\rangle + \langle : \hat{n}_j^2(t) : \rangle \quad (j = 1, 2).
\end{aligned} \tag{22.4.13}$$

Взаимная корреляция флуктуаций чисел фотонов, вследствие этого, задается соотношением

$$\langle : \Delta\hat{n}_1(t)\Delta\hat{n}_2(t) : \rangle = \langle : \hat{n}_1(t)\hat{n}_2(t) : \rangle - \langle \hat{n}_1(t)\rangle\langle \hat{n}_2(t)\rangle = \langle \hat{n}_j(t)\rangle(1 + \langle \hat{n}_j(t)\rangle). \tag{22.4.14}$$

Из этого результата и выражения (22.4.12) мы получаем для нормированного коэффициента взаимной корреляции между числами сигнальных и холостых фотонов формулу

$$\sigma_{12} \equiv \frac{\langle : \Delta\hat{n}_1(t)\Delta\hat{n}_2(t) : \rangle}{[\langle (\Delta\hat{n}_1(t))^2\rangle\langle (\Delta\hat{n}_2(t))^2\rangle]^{1/2}} = 1. \tag{22.4.15}$$

Следовательно, сигнальный и холостой фотоны являются полностью коррелированными, и при каждом увеличении числа сигнальных фотонов число холостых фотонов увеличивается на такую же величину. Другой подход к интерпретации того же самого результата возникает, если заметить из (22.4.13), что когда $\langle \hat{n}_j(t)\rangle \ll 1$,

$$\langle : \hat{n}_1(t)\hat{n}_2(t) : \rangle \approx \langle \hat{n}_j(t)\rangle \quad (j = 1, 2). \tag{22.4.16}$$

При $\langle \hat{n}_j(t)\rangle \ll 1$ обе стороны этого выражения можно рассматривать как вероятности. Величина $\langle \hat{n}_j(t)\rangle$ является мерой вероятности того, что сигнальный или холостой фотон детектируется идеальным детектором, а $\langle : \hat{n}_1(t)\hat{n}_2(t) : \rangle$ — мерой совместной вероятности детектирования обоих фотонов (ср. разд. 12.2). Выражение (22.4.16) отражает, следовательно, тот факт, что два вниз-конвертированных фотона всегда создаются вместе, так как совместная двухфотонная вероятность равна однофотонной вероятности. Нет необходимости говорить, что эта интерпретация неправомерна, когда $\langle \hat{n}_j(t)\rangle \gtrsim 1$.

Следует еще раз подчеркнуть, что на практике ситуация всегда сложнее, так как возбуждается более двух мод поля, и поэтому необходимо более общее многомодовое рассмотрение (Mollow, 1973; Hong and Mandel, 1985; Ou, Wang and Mandel, 1989). Далее можно также задаться вопросом об интервалах времени между сигнальными и холостыми фотонами. Такое рассмотрение будет проведено ниже в разд. 22.4.4.

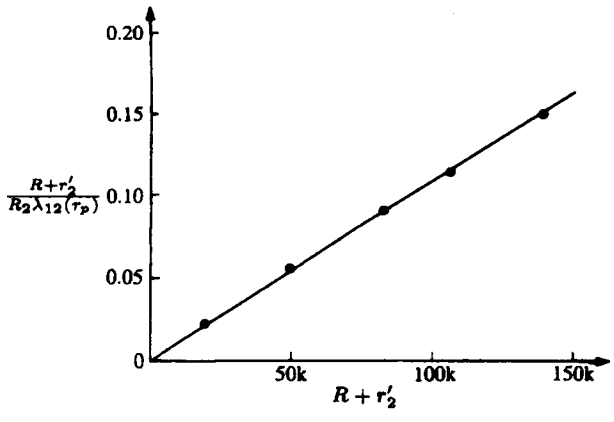


Рис. 22.2. Результаты измерений, иллюстрирующие обратную зависимость между λ_{12} и средним значением интенсивности света в параметрической вниз-конверсии. Величина $R_2 + r_2'$ пропорциональна интенсивности света и ордината пропорциональна $1/\lambda_{12}$. Непрерывная кривая является прямой линией, проходящей через начало координат.(Воспроизведено из Friberg, Hong and Mandel, 1985a)

Стоит отметить, что если ввести нормированную корреляционную функцию интенсивности, а именно,

$$\lambda_{12} = \frac{\langle : \Delta\hat{n}_1(t)\Delta\hat{n}_2(t) : \rangle}{\langle \hat{n}_1(t)\hat{n}_2(t) \rangle},$$

то тогда, с учетом (22.4.14),

$$\lambda_{12} = 1 + \frac{1}{\langle \hat{n}_j(t) \rangle} \approx \frac{1}{\langle \hat{n}_j(t) \rangle} \gg 1 \quad (j = 1, 2).$$

Таким образом, λ_{12} должна быть обратно пропорциональна интенсивности света, полученного в результате распада. Это заключение было подтверждено экспериментально. На рис. 22.2 показана линейная зависимость между $1/\lambda_{12}$ и $\langle \hat{n}_1(t) \rangle$, полученная из эксперимента.

22.4.3. Доказательство неклассического поведения

Неклассическую природу вниз-конвертированного поля можно продемонстрировать, используя соотношение (22.4.13) в следующем виде (Graham, 1984):

$$\langle : \hat{n}_1(t)\hat{n}_2(t) : \rangle = \langle : \hat{n}_j^2(t) : \rangle + \langle \hat{n}_j(t) \rangle, \quad (j = 1, 2).$$



Рис. 22.3. Измеренная вероятность $p(n)$ детектирования n холостых фотонов при условии обнаружения сигнального фотона (Hong and Mandel, 1989)

Это соотношение может быть представлено с помощью теоремы оптической эквивалентности для нормально упорядоченных операторов (см. разд. 11.9) в виде неравенства

$$\langle |v_1|^2 |v_2|^2 \rangle_\phi > \langle |v_j|^4 \rangle_\phi = [\langle |v_1|^4 \rangle_\phi \langle |v_2|^4 \rangle_\phi]^{1/2}, \tag{22.4.17}$$

где $\phi(v)$ есть диагональное представление матрицы плотности по когерентным состояниям. Очевидно, что данное соотношение нарушает неравенство Шварца

$$\langle |v_1|^2 |v_2|^2 \rangle \leqslant [\langle |v_1|^4 \rangle \langle |v_2|^4 \rangle]^{1/2}$$

для классических полей, откуда следует, что вниз-кон=-вертированный свет не имеет классического описания. Действительно, на практике $\langle |v_1|^2 |v_2|^2 \rangle_\phi \gg [\langle |v_1|^4 \rangle_\phi$, когда $\langle \hat{n}_1(t) \rangle \ll 1$, поэтому это нарушение очень сильное. Более поздний эксперимент (Zou, Wang and Mandel, 1991a), в котором сравнивались скорости совпадений R_{12} между сигнальным и холостым, R_{11} между двумя сигнальными и R_{22} между двумя холостыми фотонами, привел, после исключения второстепенных шумов, к заключению, что R_{12} превышает $(R_{11} + R_{22})$

примерно на 600 среднеквадратичных отклонений. Излишне говорить, что не существует классических полей с таким свойством, что совместная вероятность фотодетектирования в двух различных точках пространства, где средние величины интенсивностей равны, намного больше, чем совместная вероятность двух детектирований в одной и той же точке.

Явление спонтанной параметрической вниз-конверсии дает нам состояние, очень приближенное к идеальному однофотонному состоянию, которое можно использовать как зонд или как источник других процессов, поскольку обнаружение сигнального фотона всегда означает наличие родственного холостого фотона. На рис. 22.3 показаны результаты измерений вероятности $p(n)$ появления n холостых фотонов в определенном месте и времени при условии обнаружения сигнального фотона в соответствующем сопряженном месте в пределах определенного интервала времени. Очевидно, что на каждый детектированный сигнальный фотон приходится один холостой фотон.

22.4.4. Многомодовая теория возмущений процесса параметрического распада

Хотя гамильтониан с двухмодового квантованного поля (22.4.3) описывает некоторые характерные черты процесса вниз-конверсии, этого недостаточно в других случаях, потому что вниз-конвертированный свет может быть широкополосным и далеко не монохроматическим. Даже если сумма по сигнальным и холостым частотам имеет вполне определенное значение, каждый сигнальный фотон и каждый холостой фотон могут иметь широкую полосу частот, так что фотон ведет себя скорее как короткий волновой пакет, чем как монохроматическая волна.

Мы можем учесть эту возможность, разлагая по модам плоских волн каждый полевой вектор и выражая гамильтониан взаимодействия $\hat{H}_I$ в виде (Ou, Wang and Mandel, 1989)

$$\hat{H}_I(t) = \\ = \frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k}',s'}\sum_{\mathbf{k}'',s''} V_i\chi^{(2)}_{lij}(\omega_0,\omega',\omega'')(\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}'s'})_i(\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}''s''})_j\int_{\mathscr{V}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{r}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega'+\omega''-\omega_0)t}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'s'}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}''s''}\,d^3r + \text{э.с.}, \quad (22.4.18)$$

где $\mathbf{k}_0$ и ω_0 являются, сооответственно, волновым вектором и частотой монохроматической волны накачки, которая имеет векторную амплитуду $\mathbf{V}$ и вновь рассматривается классически. Объемный интеграл должен быть взят по активной области нелинейной среды. Для того, чтобы избежать усложнений, связанных с преломлением на границе раздела диэлектрик — воздух, можно выбрать нелинейную среду, внедренную в пассивный линейный диэлектрик с тем же самым коэффициентом преломления.

Если $|\Psi(0)\rangle$ есть состояние поля в момент времени $t = 0$, то состояние $|\Psi(t)\rangle$ в более позднее время t определяется выражением

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left[\frac{1}{i\hbar}\int_0^t \hat{H}_I(t')\right]|\Psi(0)\rangle\,dt'. \quad (22.4.19)$$

В частном случае, когда начальное состояние вниз-конвертированного света является вакуумным состоянием сигнального и холостого фотонов $|\Psi(0)\rangle = |\text{vac}\rangle_s\,|\text{vac}\rangle_i$, то на временах t, коротких по сравнению со средним интервалом времени между последовательными параметрическими распадами, мы имеем, разлагая в ряд экспоненту,

$$|\Psi(t)\rangle = |\text{vac}\rangle_s|\text{vac}\rangle_i + L^{-3}\frac{1}{i\hbar}\sum_{[\mathbf{k}'s']_s}\sum_{[\mathbf{k}''s'']_i} V_i\chi^{(2)}_{lij}(\omega_0,\omega',\omega'')(\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}'s'})_i(\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}''s''})_j\times \\ \times\prod_{m=1}^{3}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')_m l_m}{\frac{1}{2}(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')_m}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega'+\omega''-\omega_0)t/2}\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega''-\omega_0)t}{\frac{1}{2}(\omega'+\omega''-\omega_0)}|\mathbf{k}',s'\rangle_s|\mathbf{k}'',s''\rangle_i + \ldots. \quad (22.4.20)$$

Мы считаем нелинейный диэлектрик параллелепипедом со сторонами l_1, l_2, l_3, центр которого находится в начале координат. Набор сигнальных и холостых мод обозначаем как $[\mathbf{k}', s']$ и $[\mathbf{k}'', s'']$, соответственно, и предполагаем, что они не перекрываются.

Так как выражение для $|\Psi(t)\rangle$ является довольно сложным, упростим его в нескольких отношениях. Предположим, что сигнальные и холостые волны имеют одинаковую поляризацию, и что их направления

хорошо определены диафрагмами и т. п. Мы можем далее считать s', s'' и направления $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}''$ фиксированными и суммировать только по сигнальным и холостым частотам. Вместо (22.4.20) тогда имеем более простое соотношение

$$|\Psi(t)\rangle = \\ = M|\mathrm{vac}\rangle_s|\mathrm{vac}\rangle_i + \frac{\eta V \delta\omega}{2\pi}\sum_{\omega'}\sum_{\omega''}\phi(\omega',\omega'')\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega''-\omega_0)t}{\frac{1}{2}(\omega'+\omega''-\omega_0)}\,\mathrm{e}^{i(\omega'+\omega''-\omega_0)t/2}|\omega'\rangle_s|\omega''\rangle_i + \ldots. \quad (22.4.21)$$

Спектральная функция $\phi(\omega',\omega'')$, которую мы выбираем симметричной по отношению к ω', ω'', включает в себя частотную зависимость различных множителей под знаком суммы в (22.4.20). Она имеет пик при $\omega' = \omega_0/2 = \omega''$. Интервал между модами может быть выбран стремящимся к нулю в конце вычисления, когда суммы заменяются интегралами. Для удобства выбираем $\phi(\omega',\omega'')$ нормированной, так что

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)\delta\omega\sum_{\omega}|\phi(\omega,\omega_0-\omega)|^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2\pi}\right)\delta\omega\int_0^\infty|\phi(\omega,\omega_0-\omega)|^2\,d\omega = 1, \quad (22.4.22)$$

и описываем величину вклада от возмущения параметром η. Если интенсивность накачки $|V|^2$ выражается в единицах фотонов в секунду, то η является безразмерной величиной. Константа M в (22.4.21) очень близка к единице, так как фотонные пары испускаются очень редко, хотя она не может быть единицей.

Из условия нормировки состояния $|\Psi(t)\rangle$, заданного выражением (22.4.21), следует, что при $\delta\omega \to 0$

$$|M|^2 + \frac{|\eta V|^2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\!\!\int d\omega'\,d\omega''|\phi(\omega,\omega')|^2\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega''-\omega_0)t}{\frac{1}{2}(\omega'+\omega''-\omega_0)}\right]^2 + \ldots \to 1,$$

так что модуль $|M|$ должен быть немного меньше единицы. Сделаем подстановку $\omega''+\omega'-\omega_0 = \Omega''$ и рассмотрим предельный случай стационарного состояния при больших t. Тогда

$$1 = |M|^2\frac{|\eta V|^2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty d\omega'\int_{\omega'-\omega_0}^\infty d\Omega''|\phi(\omega',\omega_0-\omega'+\Omega'')|^2\left[\frac{\sin\frac{1}{2}\Omega''t}{\frac{1}{2}\Omega''}\right]^2. \quad (22.4.23)$$

Теперь основные вклады в Ω''-интеграл происходят от малых значений Ω'', таких что $\Omega''t \lesssim 1$. Если $|\phi(\omega',\omega'')|^2$ является достаточно медленно изменяющейся функцией от ω'', то мы можем сделать приближение, заменяя $|\phi(\omega',\omega_0-\omega'+\Omega'')|^2$ на $|\phi(\omega',\omega_0-\omega')|^2$ под интегралом. Интегрирования по ω' и Ω'' в этом случае разделяются, и можно записать

$$\int_{\omega'-\omega_0}^\infty\left[\frac{\sin\frac{1}{2}\Omega''t}{\frac{1}{2}\Omega''}\right]^2 d\Omega'' \approx \int_{-\infty}^\infty\left[\frac{\sin\frac{1}{2}\Omega''t}{\frac{1}{2}\Omega''}\right]^2 d\Omega'' = 2\pi t. \quad (22.4.24)$$

С помощью (22.4.22) мы затем получаем из (24.4.23) соотношение $1 = |M|^2 + |\eta V|^2 t$. Справедливость приближения (22.4.20), использованного нами, тогда зависит от условия

$$|\eta V|^2 t \ll 1. \quad (22.4.25)$$

На первый взгляд кажется, что оно противоречит предположению о больших временах, которое мы использовали при выводе (24.4.24). Однако условие (24.4.25) требует лишь, чтобы t было коротким по сравнению со средним интервалом времени между параметрическими распадами, а это время может быть на несколько порядков больше любого времени корреляции, которое, в свою очередь, должно быть меньше t.

22.4.5. Перепутанное квантовое состояние[1]

Квантовое состояние (24.4.21), описывающее вниз-конвертированную фотонную пару, обнаруживает некоторые интересные и контринтуитивные черты. В противоположность вкладу вакуумного состояния

[1] Эти состояния, а также парадокс Эйнштейна — Подольского — Розена и проблемы телепортации обсуждаются и в книге (Scully, Zubairy, 1997) — *ред. пер.*

$|\mathrm{vac}\rangle_s|\mathrm{vac}\rangle_i$, который позволяет вниз-конвертированным фотонам нести информацию о фазе накачки, суммирование по частотам не позволяет представить состояние (21.4.21) в виде произведения сигнального и холостого состояний. Говорят, что сигнальный и холостой фотоны являются *перепутанными (entangled)* друг с другом в частотной области.

Отсутствие факторизации имеет некоторые необычные последствия. Предположим, что вблизи нелинейного кристалла мы помещаем фильтр на пути сигнальных фотонов, который пропускает только частоту ω_F. Это, очевидно, является упрощением по отношению к реальным фильтрам, но этого достаточно, чтобы проиллюстрировать главное, что мы хотим подчеркнуть. Пусть $\hat{P} \equiv |\omega_F\rangle_{ss}\langle\omega_F|$ есть проекционный оператор, который описывает действие фильтра. Тогда состояние возникающего вниз-конвертированного поля может быть представлено матрицей плотности

$$\hat{\rho} = K\hat{P}|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|,$$

где $|\Psi(t)\rangle$ задается выражением (22.4.21) и K есть нормировочный множитель. Состояние одиночного холостого фотона, учитывая наличие фильтра, получается вычислением следа от $\hat{\rho}$ по подпространству состояний сигнального фотона, или

$$\hat{\rho}_i = K\mathrm{Tr}_S\,\hat{P}|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|.$$

В пределе больших времен находим с помощью такого же приближения, как и в разд. 22.4.4, что

$$\hat{\rho}_i \to K|\eta V|^2|\phi(\omega_F, \omega_0 - \omega_F)|^2|\omega_0 - \omega_F\rangle_{ii}\langle\omega_0 - \omega_F|. \tag{22.4.26}$$

Другими словами, следствием выбора частоты ω_F сигнального фотона перепутанной пары является то, что холостой фотон также имеет определенную частоту, такую что две частоты составляют в сумме ω_0. Если бы мы выбрали фильтр, который пропускает частоты в определенной полосе прозрачности, и который был бы представлен суммой по операторам проектирования $\hat{P}$, возможно, с некоторыми весовыми функциями, то тогда состояние соответствующего холостого поля задавалось бы суммой по ω_F выражений, подобных тем, что присутствуют в правой части (22.4.26). Следовательно, состояние холостого фотона определяется наблюдениями, сделанными на сигнальном фотоне, хотя два фотона в момент измерения могут быть так далеко друг от друга, что не могут взаимодействовать. Это пример курьезной *нелокальности*, являющейся характерной чертой перепутанного квантового состояния. На первый взгляд кажется, что нарушается причинная связь и принцип относительности, хотя более тщательное рассмотрение показывает, что это не так. Подобные аргументы привели Эйнштейна, Подольского и Розена (Einshtein, Podolsky and Rosen, 1935) к выводу, что квантовая механика, вероятно, неполна (см. разд. 12.14).

Нелокальное поведение наблюдалось много раз и было обсуждено более детально в разд. 12.14. Эффекты, описываемые (22.4.26), также уже наблюдались, возможно наиболее тщательно в экспериментах (Rarity and Tapster, 1990) и (Kwiat, Steinberg and Chiao, 1992).

22.4.6. Скорость вниз-конверсии

Теперь воспользуемся формализмом теории возмущений, чтобы вычислить скорость вниз-конверсии. Пусть фотодетектор расположен на пути сигнального пучка на расстоянии cr_s от нелинейной среды. Тогда сигнальное поле на фотодетекторе во время t может быть представлено разложением по модам

$$\hat{E}_s^{(+)}(t) = \left(\frac{\delta\omega}{2\pi}\right)^{1/2}\sum_{\omega}\hat{a}_s(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau_s)}, \tag{22.4.27}$$

которое уже нормировано, так что $\hat{E}_s^{(-)}\hat{E}_s^{(+)}$ измеряется в единицах фотонов в секунду. Член $\hat{a}_s(\omega)$ есть оператор уничтожения фотона для сигнальной моды частоты ω.

Средняя скорость R_s, с которой детектор регистрирует сигнальные фотоны, определяется выражением

$$R_s = \alpha_s\langle\Psi(t)|\hat{E}_s^{(-)}(t)\hat{E}_s^{(+)}(t)|\Psi(t)\rangle,$$

где α_s — квантовая эффективность детектора. С помощью (22.4.21), (22.4.27) эта формула принимает вид

$$R_s = \alpha_s \left(\frac{\delta\omega}{2\pi}\right)^3 |\eta V|^2 \sum_{\omega'} \sum_{\omega''} \mathrm{e}^{i(\omega'-\omega'')(t-\tau_s)} \sum_{\omega_1} \sum_{\omega_2} \sum_{\omega_3} \sum_{\omega_4} \phi^*(\omega_1,\omega_2)\phi(\omega_3,\omega_4) \times$$
$$\times \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2-\omega_0)t}{\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2-\omega_0)} \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3+\omega_4-\omega_0)t}{\frac{1}{2}(\omega_3+\omega_4-\omega_0)} \mathrm{e}^{i(\omega_3+\omega_4-\omega_1-\omega_2)} {}_i\langle\omega_2|_s\langle\omega_1|\hat{a}_s^\dagger(\omega')\hat{a}_s(\omega'')|\omega_3\rangle_s|\omega_4\rangle_i.$$

Ненулевые вклады в сумму имеют место при $\omega_1=\omega'$, $\omega_2=\omega_4$, $\omega_3=\omega''$. В пределе $\delta\omega\to 0$ получаем

$$R_s = \alpha_s|\eta V|^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |F(\omega;t)|^2\,d\omega, \tag{22.4.28}$$

где

$$F(\omega;t) = \int_0^\infty \phi(\omega',\omega)\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega-\omega_0)t}{\frac{1}{2}(\omega'+\omega-\omega_0)}\mathrm{e}^{-i\omega'(t/2-\tau_s)}\,d\omega'. \tag{22.4.29}$$

Рассмотрим вновь предел больших времен и положим $\omega'+\omega-\omega_0=\Omega'$, так что

$$F(\omega;t) = \int_{\omega-\omega_0}^\infty \phi(\omega_0-\omega+\Omega',\omega)\frac{\sin\frac{1}{2}\Omega' t}{\frac{1}{2}\Omega'}\mathrm{e}^{-i\Omega'(t/2-\tau_s)}\mathrm{e}^{-i\omega'(t/2-\tau_s)}\,d\Omega'.$$

Когда t достаточно большое, основной вклад в Ω'-интеграл происходит от малых Ω'. Если $\phi(\omega_0-\omega+\Omega',\omega)$ изменяется достаточно медленно с Ω', то $\phi(\omega_0-\omega+\Omega',\omega)$ можно в хорошем приближении заменить выражением $\phi(\omega_0-\omega,\omega)$. Более того, поскольку $\omega_0-\omega$ является оптической частотой, можно заменить нижний предел $\omega-\omega_0$ интеграла на $-\infty$. Ω'-интеграл тогда приводит к хорошо известному разрывному интегралу Дирихле [см. (12.11.10)],

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\frac{1}{2}\Omega' t}{\frac{1}{2}\Omega'}\mathrm{e}^{-i\Omega'(t/2-\tau_s)}\,d\Omega' = \begin{cases} 1, & \text{если } |t/2-\tau_s|<t/2 \\ 0, & \text{иначе.}\end{cases} \tag{22.4.30}$$

Следовательно, при условии, что $0<\tau_s<t$, получаем для больших t

$$R_s = \alpha_s|\eta V|^2\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |\phi(\omega_0-\omega,\omega)|^2\,d\omega = \alpha_s|\eta v|^2. \tag{22.4.31}$$

Последняя строка следует из (22.4.22). Так как $|V|^2$ определяет скорость, с которой фотоны накачки падают на нелинейную среду, очевидно, что $|\eta|^2$ определяет долю падающих фотонов накачки, которые преобразовались в пары «сигнальный фотон — холостой фотон».

22.4.7. Временно́й интервал между сигнальным и холостым фотонами

Мы уже видели, что в процессе параметрической вниз-конверсии сигнальный и холостой фотоны появляются вместе. Интересен вопрос о масштабе времени T_c, внутри которого сигнальный и холостой фотоны можно считать «одновременными». В работе (Burnham and Weinberg, 1970) было экспериментально обнаружено, что эти два фотона разделены не более чем несколькими наносекундами. Однако авторы признали, что это полученное время корреляции T_c, вероятно, определялось временем разрешения их фотодетектора, а не является присущим процессу вниз-конверсии. Хотя более поздние измерения с более быстрыми детекторами и привели к более низким значениям T_c (Friberg, Hong and Mandel, 1985b), было обнаружено, что собственное время корреляции, обратно пропорциональное ширине полосы $\Delta\omega$ вниз-конвертированного света, находится в пикосекундной или субпикосекундной области. Это время настолько меньше времени разрешения детектора или сопутствующей электроники, что могло оказаться ненаблюдаемым. Однако, используя интерференционную технику, а не прямое детектирование, в работе (Hong, Ou and Mandel, 1987) удалось измерить T_c фотонов, полученных в результате распада.

Для того, чтобы понять принцип этого эксперимента, предположим, что светоделитель BS (рис. 22.4) имеет два входа 1 и 2 и два выхода 3 и 4. Предположим, что сигнальный фотон входит в отверстие 1, пройдя расстояние $c\tau_1$ от параметрического преобразователя, и что сопряженный холостой фотон входит в отверстие 2, пройдя расстояние $c\tau_2$. Вычислим совместную вероятность детектирования пары фотонов при совпадении в выходных отверстиях 3 и 4. Поле в выходных отверстиях может быть выражено в виде

$$\begin{aligned}\hat{E}_3^{(+)}(t) &= \left(\frac{\delta\omega}{2\pi}\right)^{1/2}\sum_\omega \mathscr{T}\hat{a}_s(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\tau_1)} + \mathscr{R}\hat{a}_i(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\tau_2)},\\ \hat{E}_4^{(+)}(t) &= \left(\frac{\delta\omega}{2\pi}\right)^{1/2}\sum_\omega \mathscr{R}\hat{a}_s(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\tau_1)} + \mathscr{T}\hat{a}_i(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\tau_2)},\end{aligned} \tag{22.4.32}$$

где $\mathscr{R}$, $\mathscr{T}$ есть комплексные амплитудные коэффициенты отражения и прохождения светоделителя. Плотность совместной вероятности того, что фотон детектируется в отверстии 3 в момент t и другой фотон в отверстии 4 в момент $t+\tau$, пропорциональна

$$P_{34}(t,t+\tau) = \alpha_3\alpha_4\langle\Psi(t)|\hat{E}_3^{(-)}(t)\hat{E}_4^{(-)}(t+\tau)\hat{E}_4^{(+)}(t+\tau)\hat{E}_3^{(+)}(t)|\Psi(t)\rangle, \tag{22.4.33}$$

где $|\Psi(t)\rangle$ определяется выражением (22.4.21). Здесь α_3, α_4 есть квантовые эффективности детекторов в отверстиях 3 и 4, соответственно.

Теперь подставим выражения для $\hat{E}_3^{(+)}\hat{E}_4^{(+)}$ и $|\Psi(t)\rangle$ и вычислим среднее при больших t, так же как это делалось при выводе (22.4.31). После некоторого длинного, но простого расчета получаем в результате, что

$$\begin{aligned}P_{34}(t,t+\tau) = \alpha_3\alpha_4|\eta V|^2|G(0)|^2[|\mathscr{T}|^4|g(\tau_2-\tau_1+\tau)|^2 + |\mathscr{R}|^4|g(\tau_2-\tau_1-\tau)|^2 -\\ - \mathscr{R}^2\mathscr{T}^{*2}g^*(\tau_2-\tau_1-\tau)g(\tau_2-\tau_1+\tau) - \mathscr{R}^{*2}\mathscr{T}^2g^*(\tau_2-\tau_1+\tau)g(\tau_2-\tau_1-\tau)].\end{aligned} \tag{22.4.34}$$

Здесь

$$G(\tau) \equiv \int_0^\infty \phi(\tfrac{1}{2}\omega_0+\omega, \tfrac{1}{2}\omega_0-\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,d\omega \tag{22.4.35}$$

есть фурье-образ спектральной функции ϕ, которая является автокорреляционной функцией вниз-конвертированного света, и

$$g(\tau) \equiv G(\tau)/G(0) \tag{22.4.36}$$

есть нормированная автокорреляция. Область значений τ, в которой эта функция существенно отлична от нуля имеет порядок $1/\Delta\omega$, так что она очень мала, когда $\tau \gg 1/\Delta\omega$.

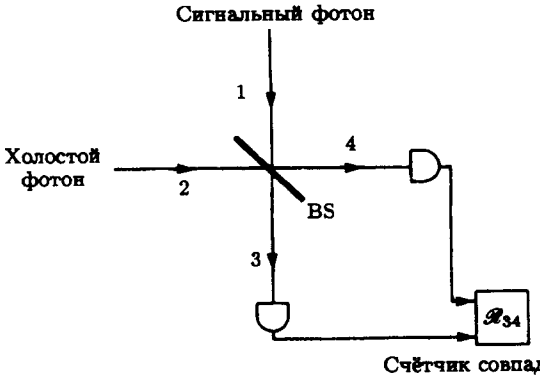


Рис. 22.4. Иллюстрирующий принцип определения временно́го интервала между двумя фотонами с помощью интерференции в светоделителе BS

На практике обычно измеряют скорость совпадений отсчетов R_{34}, которая является скоростью, с которой отсчеты регистрируются в отверстиях 3 и 4 в течение времени разрешения T_R детектора и электроники. Таким образом,

$$R_{34} = \int_{-T_R/2}^{T_R/2} P_{34}(t,t+\tau)\,d\tau. \tag{22.4.37}$$

Подставляя $P_{34}(t,t+\tau)$ в интеграл, интегрируя и учитывая, что T_R, обычно, намного больше времени когерентности $1/\Delta\omega$, так что пределы в (22.4.37) можно заменить на $\pm\infty$, приходим к формуле (Hong, Ou and Mandel, 1987)

$$R_{34} = \alpha_3\alpha_4|\eta V|^2|G(0)|^2\left\{|\mathscr{T}|^4 + |\mathscr{R}|^4 - \left[\mathscr{R}^{*2}\mathscr{T}^2\int_{-\infty}^{\infty} g^*(\tau_2-\tau_1+\tau)g(\tau_2-\tau_1-\tau)\,d\tau + \text{к.с.}\right]\right\}. \tag{22.4.38}$$

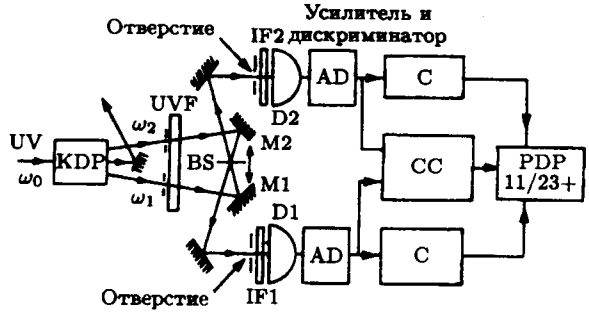


Рис. 22.5. Схема эксперимента по измерению временно́го интервала между двумя фотонами с помощью интерференции в светоделителе (BS). KDP — нелинейный кристалл дигидрофосфата калия, действующий как вниз-конвертор, и PDP 11/23 — компьютер. (Из работы Hong, Ou and Mandel, 1987)

Обсудим вид R_{34} как функции от $\tau_2 - \tau_1$ в частном случае, когда $|\mathscr{R}|^2 = |\mathscr{T}|^2 = \frac{1}{2}$, а спектральная функция ϕ гауссовская, так что

$$g(\tau) = \mathrm{e}^{-(\tau\Delta\omega)^2/2}. \tag{22.4.39}$$

Тогда легко находим из (22.4.38), что

$$R_{34} = \alpha_3\alpha_4|\eta V|^2|G(0)|^2[1 - \mathrm{e}^{-\Delta\omega^2(\tau_2-\tau_1)^2}]. \tag{22.4.40}$$

Эта скорость равна нулю, когда $\tau_2 - \tau_1 = 0$ и возрастает с увеличением $|\tau_2 - \tau_1|$ до значения $\alpha_3\alpha_4|\eta V|^2$, когда $|\tau_2 - \tau_1| \gg 1/\Delta\omega$. Другими словами, изменяя время задержки $\tau_2 - \tau_1$ между сигнальным и холостым фотонами, и измеряя скорость двухфотонных совпадений на выходе светоделителя в зависимости от $\tau_2 - \tau_1$, можно определить время корреляции между двумя фотонами. Более того, так как измерение является интерференционным, возможно измерение корреляционных времен $1/\Delta\omega$ в субпикосекундной временно́й области, которые намного короче, чем времена разрешения детекторов и считывающей электроники.

На рис. 22.5 показана схема эксперимента для измерения распределения интервалов времени между сигнальным и холостым фотонами, созданными в процессе параметрического распада. Два фотона падают на светоделитель BS с противоположных сторон; в результате получаются два выходных луча с вкладами от сигнального и холостого фотонов. Смешанные сигнальные и холостые фотоны регистрируются детекторами D1 и D2 как раздельно, так и в схеме совпадений. Интерференционные фильтры IF1 и IF2, помещенные перед детекторами, имеют полосу пропускания около 10^{13} Гц, что означает, что фото-

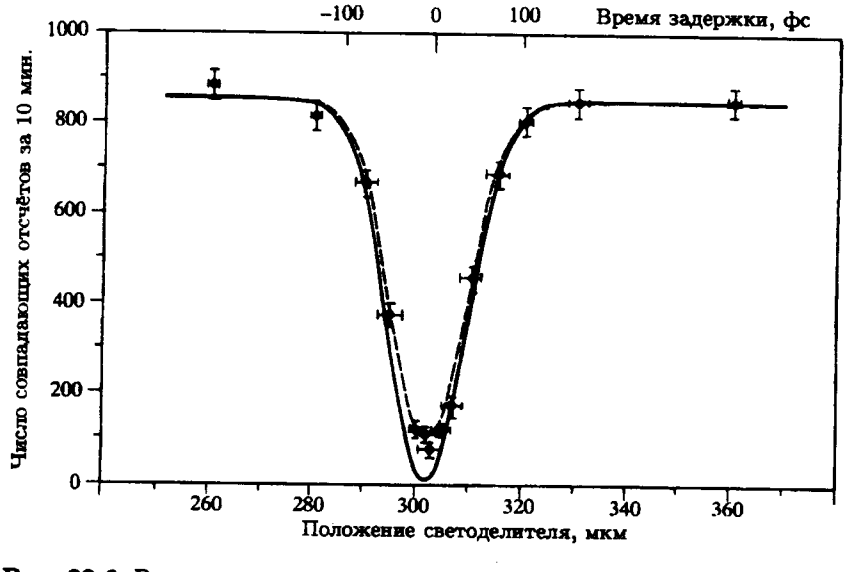


Рис. 22.6. Результаты измерений двухфотонных совпадений в зависимости от дифференциального времени задержки между двумя фотонами, наложенные на теоретическую (сплошную) кривую. (Воспроизведено из Hong, Ou and Mandel, 1987)

ны, падающие на детекторы, должны рассматриваться, как волновые пакеты с длительностью ~ 100 фс. Для того чтобы ввести дифференциальное время задержки между сигнальным и холостым фотонами, светоделитель BS слегка перемещается. Это укорачивает путь для одного фотона относительно другого.

На Рис 22.6 показаны результаты измерений, наложенные на теоретическую кривую, полученную из (22.4.38) или (22.4.40). Из распределения совпадающих отсчетов следует, что два фотона имеют корреляционное время ~ 100 фс, что и следовало ожидать, учитывая полосы пропускания IF1 и IF2. Заметим, что время разрешения, достигнутое в этом эксперименте, почти в миллион раз короче, чем времена разрешения детекторов и электроники.

И, наконец, заманчиво узнать, существует ли интуитивно простой путь для понимания этого эксперимента. Было уже показано (см. разд. 12.12), что когда один фотон входит в 50% : 50%-светоделитель в отверстие 1 и подобный фотон входит в отверстие 2, деструктивная интерференция делает невозможным выход одного фотона в отверстие 3 и другого в отверстие 4 (ср. рис. 22.4). Вместо этого оба фотона появляются вместе или в отверстии 3 или отверстии 4. Скорость совпадений, следовательно, равна нулю для тождественных, одновременных фотонов. Однако если один фотон задерживается относительно другого, так что два волновых пакета больше не перекрываются полностью, деструктивная интерференция действует не в полной мере. Скорость совпадений тогда растет с задержкой до тех пор, пока она, для больших задержек, не станет постоянной и независимой от времени задержки. Это соответствует зависимости, показанной на рис. 22.6.

22.4.8. Интерференционные эксперименты с двумя вниз-конверторами

Некоторые интересные квантовые эффекты выявляются в интерференционных экспериментах с применением двух вниз-конверторов типа тех, которые мы уже рассматривали. Например, обсудим эксперимент, проиллюстрированный на рис. 22.7, в котором два одинаковых нелинейных кристалла NL1 и NL2, действующие как вниз-конверторы, накачиваются светом частоты ω_0, полученным из одного и того же лазерного луча. Как следствие, вниз-конверсия может происходить в NL1 с одновременной эмиссией пары сигнального s_1 и холостого i_1 фотонов или в NL2 с эмиссией пары s_2 и i_2 фотонов (вероятность одновременной эмиссии из NL1 и NL2 можно считать пренебрежимо малой). Предположим теперь, что схема эксперимента такова, что сигнальные фотоны s_1 и s_2 одновременно попадают в 50% : 50%-светоделитель BS_A и смешиваются в нем. Комбинированное поле падает на детектор D_A. Таким же образом холостые фотоны i_1 и i_2 одновременно попадают в BS_B, и комбинированное поле холостых фотонов падает на детектор D_B. Нас интересует, будут ли два поля сигнальных фотонов s_1, s_2 и два поля холостых фотонов i_1, i_2 интерферировать в этих условиях.

Ответ на этот вопрос получен в экспериментальной работе (Ou, Wang, Zou and Mandel, 1990), а теория процесса достаточно подробно рассматривалась в работе (Ou, Wang, and Mandel, 1989). На рис. 22.8*а* показаны экспериментальные зависимости скоростей фотоотсчетов R_A и R_B детекторов D_A и D_B от разности длин оптического пробега, или дифференциального фазового сдвига, между лучами накачки, достигающими NL1 и NL2. Видно, что обе интенсивности суперпозиционного света, являются постоянными и не зависят от разности оптических путей. Следовательно, ни s_1 и s_2, ни i_1 и i_2 не интерферируют. На рис. 22.8*б* представлена зависимость скорости R_{AB} двухфотонных совпадений в детекторах D_A и D_B от разности длин оптического пробега. На сей раз, мы видим ясную интерференционную картину ожидаемой периодичности, хотя s_1 и s_2 являются взаимно некогерентными, так же, как i_1 и i_2.

Попытаемся теперь объяснить эти результаты в рамках очень упрощенной модели, в которой все вниз-конвертированные поля рассматриваются как монохроматические. Если $|\psi_1\rangle_1$ и $|\psi_2\rangle_2$ есть квантовые состояния этих полей в картине взаимодействия, созданных кристаллами NL1 и NL2, то тогда согласно (22.4.20), в случае, когда сумма по модам может быть опущена, можно записать

$$|\psi_1\rangle_1 = M_1|\text{vac}\rangle_{s_1,i_1} + \eta_1 V_1 F_1 |\omega\rangle_{s_1}|\omega'\rangle_{i_1}, \tag{22.4.41}$$

$$|\psi_2\rangle_2 = M_2|\text{vac}\rangle_{s_2,i_2} + \eta_2 V_2 F_2 |\omega\rangle_{s_2}|\omega'\rangle_{i_2}. \tag{22.4.42}$$

Здесь ω, ω' — сигнальная и холостая частоты, соответственно, V_1, V_2 — комплексные амплитуды классической накачки в NL1 и NL2, η_1, η_2 — безразмерные множители, такие что $|\eta_1|^2$, $|\eta_2|^2$ определяют эффективности параметрического преобразования, F_1, F_2 — константы, характеризующие параметрические преобразователи, и M_1, M_2 являются комплексными коэффициентами, которые практически очень близки к единице. Если $\hat{E}_A^{(+)}$, $\hat{E}_B^{(+)}$ есть положительно-частотные части полных электрических полей на детекто-

Рис.22.7

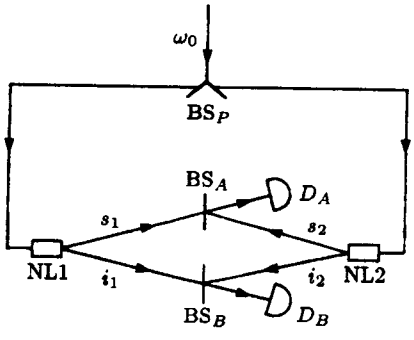


Рис.22.7. Схема интерференционного эксперимента со светом от двух вниз-конверторов. NL1 и NL2 — нелинейные кристаллы, D_A и D_B — фотодетекторы, BS_A, BS_B и BS_P — светоделители (Из работы Ou, Wong and Mandel, 1989)

Рис.22.8

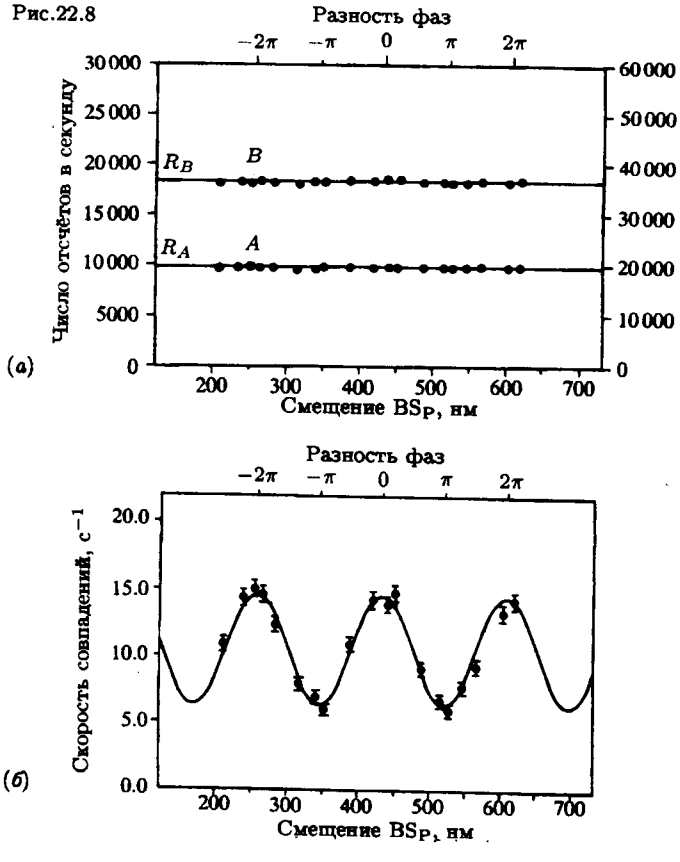


Рис.22.8. Результаты интерференционных экспериментов с двумя вниз- конверторами: *а* — однофотонные скорости R_A (левая шкала), R_B (правая шкала); *б* — двухфотонная скорость совпадений R_{AB}. (Из работы Ou, Wang, Zou and Mandel, 1990)

рах D_A, D_B, то тогда

$$\hat{E}_A^{(+)} = K(\hat{a}_{s_1} + i\hat{a}_{s_2})\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{22.4.43}$$

$$\hat{E}_B^{(+)} = K(\hat{a}_{s_1} + i\hat{a}_{s_2})\,\mathrm{e}^{-i\omega' t}. \tag{22.4.44}$$

Следовательно, скорость фотонных отсчетов детектора D_A пропорциональна выражению

$$R_A = {}_1\langle\psi_1|_2\langle\psi_2|\hat{E}_A^{(-)}\hat{E}_A^{(+)}|\psi_2\rangle_2|\psi_1\rangle_1 = |K|^2[|\eta_1 V_1 F_1|^2 + |\eta_2 V_2 F_2|^2]. \tag{22.4.45}$$

Аналогичное выражение можно записать и для детектора D_B. Очевидно, что полученные скорости не демонстрируют интерференции.

Теперь вычислим скорость двухфотонных совпадений R_{AB},

$$R_{AB} = {}_1\langle\psi_1|_2\langle\psi_2|\hat{E}_A^{(-)}\hat{E}_B^{(-)}\hat{E}_B^{(+)}\hat{E}_A^{(+)}|\psi_2\rangle_2|\psi_1\rangle_1. \tag{22.4.46}$$

С помощью (22.4.41)—(22.4.44) мы немедленно получаем результат:

$$R_{AB} = |\eta_1 V_1 F_1 M_2 - \eta_2 V_2 F_2 M_1|^2 \approx$$

$$\approx |\eta_1 V_1 F_1|^2 + |\eta_2 V_2 F_2|^2 - 2|\eta_1 V_1 F_1||\eta_2 V_2 F_2|\cos[(\arg V_1 - \arg V_2) + \text{ const. }]. \tag{22.4.47}$$

Это выражение явно отражает наличие интерференции при изменении разности фаз $(\arg V_1 - \arg V_2)$, что и наблюдалось, хотя полученная видность была ниже, чем предсказанная выражением (22.4.47). Нетрудно показать, что более реалистичная многомодовая трактовка задачи приводит, по существу, к тому же самому результату (Ou, Wang and Mandel, 1989).

Теперь обратимся к вопросу о том, почему скорость совпадений R_{AB} демонстрирует интерференцию, а однофотонные скорости R_A и R_B нет. Один из подходов к решению задачи состоит в том, чтобы обратить внимание на связь между взаимной когерентностью и подлинной неразличимостью фотонных путей (Mandel, 1991). Если без нарушения интерференции невозможно определить, где возникают фотоны: в NL1 или NL2, то тогда соответствующие амплитуды вероятности для двух путей следует сложить, для того чтобы прийти к детектируемой вероятности, и затем к интерференционным результатам. С другой стороны, если существует возможность, даже в принципе, определения источника фотонов, то тогда вся интерференция исчезает.

В данный момент в схеме измерения двухфотонных совпадений на самом деле не существует способа определения источника каждой фотонной пары без внесения возмущений. Но предположим, что нас интересуют только сигнальные фотоны и то, будут ли они интерферировать. Так как холостые фотоны нам не интересны, мы можем убрать светоделитель BS_B без нарушения интерференции сигнальных фотонов. Но как только BS_B убран, фотоотсчеты детектора D_A, которые сопутствуют фотоотсчетам D_B, осуществляются только тогда, когда оба фотона возникают в NL1. В противоположность этому, если D_B является детектором со 100 %-ой эффективностью, то фотоотсчеты D_A, которые не сопутствуют фотоотсчетам D_B, должны быть приписаны s_2 фотонам, испущенных NL2. Логически вытекает, что источник каждого зарегистрированного сигнального фотона может быть идентифицирован таким способом, и по этой причине вся неразличимость источников теряется, как и вся интерференция тоже. Необязательно, однако, чтобы вспомогательное измерение было выполнено на самом деле. Возможности того, что оно может быть выполнено, достаточно, чтобы подавить интерференцию. Подобная аргументация показывает, что холостые фотоны тоже не интерферируют.

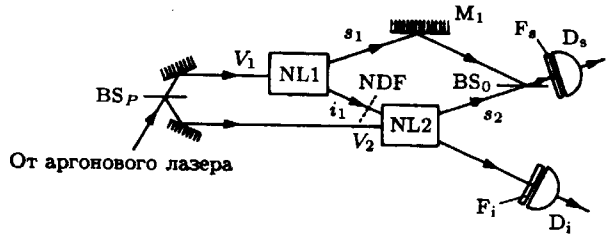


Рис. 22.9. Схема другого интерференционного эксперимента с двумя вниз-конверторами. Обозначения см. в тексте. (Из работы Zou, Wang and Mandel, 1991b)

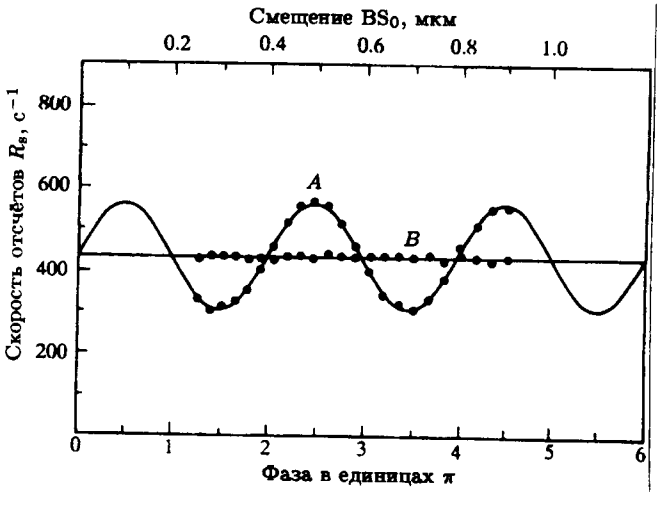


Рис. 22.10. Результаты интерференционного эксперимента, дающего скорость фотонных отсчетов в зависимости от смещения BS_0: *а* — с холостыми фотонами i_1 и i_2, одинаково направленными; *б* — с холостым фотоном i_1 блокированным. (Из работы Zou, Wang and Mandel, 1991b)

Чтобы не думать, что для наблюдения интерференции с двумя вниз-конверторами всегда необходимо измерять двухфотонные совпадения, рассмотрим экспериментальную схему, показанную на рис. 22.9. Мы вновь имеем нелинейные кристаллы NL1 и NL2, выполняющие функции вниз-конверторов, которые оптически накачиваются взаимно когерентными лучами накачки, полученными от одного и того же лазера. Но на этот раз два кристалла расположены таким образом, что холостой фотон i_1 от NL1 проходит через NL2 и имеет одно направление с холостым фотоном i_2. Как и прежде, мы даем возможность двум сигнальным фотонам s_1 и s_2 прибыть одновременно, быть смешанными внешним светоделителем BS_0 и попасть на сигнальный детектор D_s. Снова интересуемся вопросом, проявят ли два сигнала интерференцию в случае, когда выход детектора D_s будет подвергнут синусоидальному колебанию, при котором BS_0 перемещается в направлении, перпендикулярном его лицевой стороне.

Такой эксперимент был выполнен (Zou,Wang and Mandel, 1991b; Wang, Zou and Mandel, 1991), и его результаты показаны на рис. 22.10. До тех пор, пока два холостых фотона коллинеарны, скорость отсчетов детектора D_s соответствует кривой A и ясно демонстрирует наличие интерференции. Но если i_1 и i_2 не направлены вдоль одной оси, или если i_1 блокируют введением лучевого затвора и не дают дойти до NL2, то экспериментальные точки ложатся на линию B и вся интерференция исчезает. Стоит обратить внимание и на то, что средняя скорость фотонной эмиссии не изменяется, ухудшается лишь взаимная когерентность

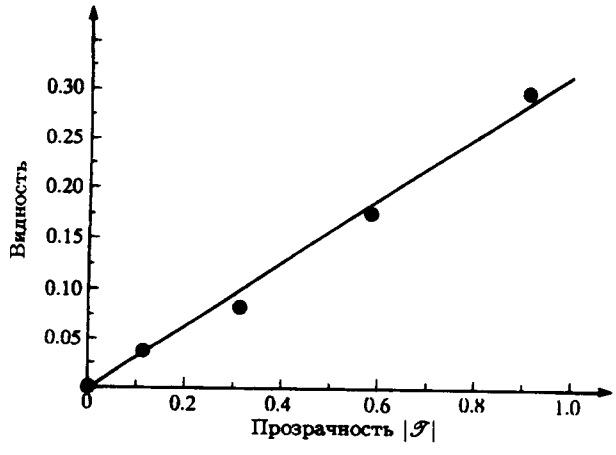


Рис. 22.11. Результаты интерференционного эксперимента с фильтром, имеющим амплитудный коэффициент прохождения $\mathscr{T}$, установленным между NL1 и NL2. Видность показана в зависимости от прозрачности $|\mathscr{T}|$. (Из работы Zou, Wang and Mandel, 1991b.)

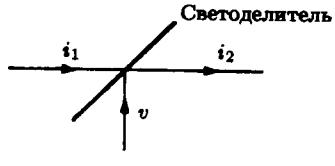


Рис. 22.12. Изображение мод, имеющих отношение к светоделителю

между s_1 и s_2. Если, вместо полного блокирования i_1, поместить между NL1 и NL2 фильтр с меняющимся амплитудным коэффициентом прозрачности $\mathscr{T}$, то обнаружится, что видность интерференции прямо пропорциональна $|\mathscr{T}|$, как это показано на рис. 22.11. Если можно сказать, что i_1 индуцирует когерентность между s_1 и s_2 в этом эксперименте, то в таком случае мы имеем дело с новой и необычной формой индуцированной когерентности, которая не сопровождается индуцированной эмиссией. Очевидно, что управление величиной $|\mathscr{T}|$ дает нам новый метод для изменения взаимной когерентности двух световых лучей, который оставляет интенсивности света неизменными.

Попытаемся вновь объяснить эти наблюдения с помощью очень упрощенной, но еще полезной модели, в которой все поля являются монохроматическими, так что

$$\hat{E}_s^{(+)} = K(\hat{a}_{s_1}\,\mathrm{e}^{i\theta_1} + \hat{a}_{s_2}\,\mathrm{e}^{i\theta_2})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \qquad (22.4.48)$$

для полного поля на сигнальном детекторе, причем θ_1 и θ_2 являются фазовыми сдвигами, связанными с распространением двух сигнальных лучей. Фильтр с переменным амплитудным коэффициентом прохождения $\mathscr{T}$ моделируем, как показано на рис. 22.12, светоделителем с вакуумной модой входящего поля $\hat{a}_v$, так что

$$\hat{a}_{i_2} = \mathscr{T}\hat{a}_{i_1} + \mathscr{R}\hat{a}_v, \qquad (22.4.49)$$

где $\mathscr{R}$ — амплитудный коэффициент отражения. В картине взаимодействия квантовое состояние $|\psi\rangle$ поля, созданного обоими вниз-конверторами, будет задаваться выражением [ср. (22.4.41) и (22.4.42) выше]

$$|\psi\rangle = |\mathrm{vac}\rangle_{s_1,s_2,i_1,v} + \eta_1 V_1(t)F_1|\omega\rangle_{s_1}|\omega'\rangle_{i_1}|\mathrm{vac}\rangle_{s_2,v} + \\ + \eta_1 V_1(t+\tau_0)F_2\,\mathrm{e}^{-i\omega'\tau_0}[\mathscr{T}^*|\omega\rangle_{s_2}|\omega'\rangle_{i_1}|\mathrm{vac}\rangle_{s_1,v} + \mathscr{R}^*|\omega\rangle_{s_2}|\omega'\rangle_v|\mathrm{vac}\rangle_{s_1,i_1}]. \qquad (22.4.50)$$

Здесь τ_0 — время распространения холостого фотона i_1 между кристаллами NL1 и NL2.

Скорость фотоотсчетов детектора D_s тогда выражается как $R_s = \langle\psi|\hat{E}_s^{(-)}\hat{E}_s^{(+)}|\psi\rangle$, и с помощью (22.4.48) и (22.4.50) это выражение принимает вид

$$R_s = |K|^2[|\eta_1|^2|F_1|^2\langle I_1\rangle + |\eta_2|^2|F_2|^2\langle I_2\rangle + 2|\eta_1\eta_2||F_1||F_2|(\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle)^{1/2}]\times \\ \times|\gamma_{12}||\mathscr{T}|\cos(\omega'\tau_0 + \theta_2 - \theta_1 - \arg\mathscr{T} + \text{const.})]. \qquad (22.4.51)$$

Здесь $\gamma_{12} \equiv \langle V_1^*(t)V_2(t+\tau_0)\rangle/(\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle)^{\frac{1}{2}}$ — комплексная степень когерентности. Поэтому детектор D_s должен регистрировать интерференцию с видностью, пропорциональной прозрачности фильтра $|\mathscr{T}|$, что и наблюдалось на самом деле. Снова можно показать, что более полное многомодовое рассмотрение приводит, по существу, к такому же результату.

Проверим, как эти результаты могут быть интерпретированы с точки зрения неразличимости фотонных путей. Если блокировать путь холостого фотона i_1, то с помощью простого дополнительного измерения, которое никаким способом не искажает интерференционный эксперимент, становится возможным определить, где создавался каждый фотон, детектированный D_s. Для этой цели предположим, что почти идеальный фотодетектор D_i расположен на пути луча i_2 на том же самом расстоянии от NL2, что и D_i, как изображено на рис. 22.9. Зададимся вопросом: сопровождается ли детектирование фотона на D_i одновременным обнаружением фотона на D_s или нет. Если да, то оба детектированных фотона, очевидно,

возникли в NL2. Если нет, то фотон, обнаруженный детектором D_s, должен порождаться в NL1. Отсюда следует, что источник каждого детектированного сигнального фотона идентифицируется с помощью D_i, и это разрушает всю неразличимость и всю интерференцию. Еще раз подчеркнем, что дополнительное измерение с D_i не обязательно проводить на самом деле. Уже возможность того, что оно может быть выполнено, разрушает интерференцию. Когда $\mathscr{V} = 0$, состояние сигнального фотона, как можно показать, является диагональным в представлении чисел заполнения, а диагональный оператор плотности отражает не столько то, что известно, сколько то, что в принципе можно узнать.

И, наконец, подчеркнем, что блокирование пучка i_1 разрушает интерференцию s_1, s_2 не потому, что мы создаем большое неконтролируемое возмущение системы, и также не по причинам, связанным с принципом неопределенности. Возмущение на самом деле довольно деликатного вида: это возможность получения информации «какой путь», которая разрушает интерференцию.

22.5. Вырожденное четырехволновое смешение

Вырожденное четырехволновое смешение представляет собой нелинейный процесс, включающий совместное взаимодействие четырех волн одинаковой частоты в нелинейной среде (Hellwarth, 1997; Yariv and Pepper, 1977; Bloom and Bjorklund, 1977; Jensen and Hellwarth, 1978). Для простоты сосредоточимся на экспериментальной ситуации, показанной на рис. 22.13, когда две интенсивные волны накачки 1 и 2 и холостые волны 3 и 4 являются противоположно направленными и перпендикулярными (Yuen and Shapiro, 1979). Интересующее нас фундаментальное взаимодействие заключается в том, что два фотона поглощаются из лучей накачки и два фотона рождаются в сигнальном и холостом пучках. Сравнение с (22.4.3) подсказывает, что следует начать с гамильтониана взаимодействия общего вида $\boldsymbol{\chi}^{(3)}(\hat{a}_4^\dagger \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_1 + \text{э.с.})$, но, как и раньше, мы упростим задачу, рассматривая моды накачки классически. Процесс четырехволнового смешения отличается от параметрического процесса, рассмотренного выше, тем, что мы имеем дело с четырьмя различными направлениями распространения, и это должно быть отражено в структуре гамильтониана.

Для начала представим взаимодействие $\hat{H}_I$ в виде интеграла по объему $\mathscr{V}$ нелинейной среды

$$\hat{H}_I = \int_{\mathscr{V}} \chi^{(3)}_{ijlm} \mathbf{E}^{(1)}_i(\mathbf{r},t) \mathbf{E}^{(2)}_j(\mathbf{r},t) \hat{\mathbf{E}}^{(s)}_l(\mathbf{r},t) \hat{\mathbf{E}}^{(i)}_m(\mathbf{r},t)\, d^3r, \tag{22.5.1}$$

где $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{E}^{(2)}$ — две классические волны накачки, а $\mathbf{E}^{(s)}$, $\mathbf{E}^{(i)}$ — сигнальная и холостая волны, соответственно. Если V — фазовая скорость волн в среде, то мы представляем эти четыре квазимонохроматические, поляризованные плоские волны в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r},t) &= v_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 \, e^{i\omega(x/V - t)} + \text{к.с.},\\
\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r},t) &= v_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 \, e^{i\omega(-x/V - t)} + \text{к.с.},\\
\hat{\mathbf{E}}^{(s)}(\mathbf{r},t) &= \hat{\mathscr{A}}_3(z/V - t) \boldsymbol{\varepsilon}_3 \, e^{i\omega(-z/V - t)} + \text{э.с.},\\
\hat{\mathbf{E}}^{(i)}(\mathbf{r},t) &= \hat{\mathscr{A}}_4(z/V - t) \boldsymbol{\varepsilon}_4 \, e^{i\omega(-z/V - t)} + \text{э.с.},
\end{aligned} \tag{22.5.2}$$

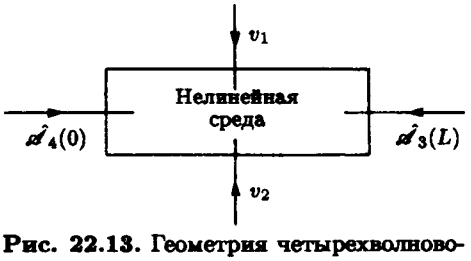


Рис. 22.13. Геометрия четырехволнового взаимодействия

где $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ $(j = 1,2,3,4)$ — единичные векторы поляризации. Заметим, что комплексные амплитуды v_1, v_2 волн накачки рассматриваются как константы, тогда как амплитуды сигнальной и холостой волны являются медленно изменяющимися операторными функциями от $(z/V - t)$ и $(z/V + t)$, соответственно. Подставляем эти выражения в (22.5.1). Если линейные размеры объема $\mathscr{V}$ велики по сравнению с длиной волны $2\pi V/\omega$, то основные вклады в интеграл по объему дают члены, в которых осциллирующие множители полностью погасились. Это приводит к следующему упрощенному виду выражения для энергии взаимодействия:

$$\hat{H}_I = \mathscr{V} \chi^{(3)}_{ijlm} v_1 v_2 (\varepsilon_1)_i (\varepsilon_2)_j (\varepsilon_3^*)_l (\varepsilon_4^*)_m \hat{\mathscr{A}}_3^\dagger \hat{\mathscr{A}}_4^\dagger + \text{э.с.} = \hbar g (v_1 v_2 \hat{\mathscr{A}}_3^\dagger \hat{\mathscr{A}}_4^\dagger + \text{э.с.}). \tag{22.5.3}$$

Считаем, что v_1, v_2, $\hat{\mathscr{A}}_3$, $\hat{\mathscr{A}}_4$ безразмерны, так что g есть действительная частота.

22.5.1. Уравнения движения

Из выражения (22.5.3) для $\hat{H}_I$ мы получаем уравнения движения Гейзенберга для операторов $\hat{\mathscr{A}}_3$, $\hat{\mathscr{A}}_4$ в виде

$$\frac{\partial \hat{\mathscr{A}}_3}{\partial t} = -igv_1v_2\hat{\mathscr{A}}_4^\dagger, \quad \frac{\partial \hat{\mathscr{A}}_4}{\partial t} = -igv_1v_2\hat{\mathscr{A}}_3^\dagger. \tag{22.5.4}$$

Эти уравнения очень похожи на уравнения (22.4.6), с которыми мы сталкивались при анализе процесса вниз-конверсии, и они могут быть решены аналогичным методом.

Однако в настоящей задаче более удобно рассматривать $\hat{\mathscr{A}}_3$, $\hat{\mathscr{A}}_4$ как функции пространственной координаты z, и соответственно этому решать уравнения. Вспоминая, что $\hat{\mathscr{A}}_3$ является в действительности функцией от $(z/V - t)$, и $\hat{\mathscr{A}}_4$ на самом деле есть функция от $(z/V + t)$, мы видим, что

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \hat{\mathscr{A}}_3}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{\mathscr{A}}_3}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial \hat{\mathscr{A}}_4}{\partial t} = \frac{\partial \hat{\mathscr{A}}_4}{\partial z} \tag{22.5.5a}$$

так что уравнения (22.5.4) также могут быть записаны как

$$\frac{\partial \hat{\mathscr{A}}_3}{\partial z} = \frac{ig}{V}v_1v_2\hat{\mathscr{A}}_4^\dagger, \quad \frac{\partial \hat{\mathscr{A}}_4}{\partial z} = -\frac{ig}{V}v_1v_2\hat{\mathscr{A}}_3^\dagger. \tag{22.5.5b}$$

После однократного дифференцирования по z, уравнения становятся несвязанными и принимают форму уравнений гармонического осциллятора

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathscr{A}}_3}{\partial z} = -(g/V)^2|v_1v_2|\hat{\mathscr{A}}_3^\dagger, \quad \frac{\partial^2 \hat{\mathscr{A}}_4}{\partial z} = -(g/V)^2|v_1v_2|\hat{\mathscr{A}}_4^\dagger,$$

решения которых выражаются в виде функции от z:

$$\begin{aligned}\hat{\mathscr{A}}_3(z) &= \hat{\mathscr{A}}_3(0)\cos Kz + i\hat{\mathscr{A}}_4^\dagger(0)\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}\sin Kz,\\ \hat{\mathscr{A}}_4(z) &= \hat{\mathscr{A}}_4(0)\cos Kz - i\hat{\mathscr{A}}_3^\dagger(0)\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}\sin Kz.\end{aligned} \tag{22.5.6}$$

Здесь мы положили $K \equiv |v_1v_2|/V$ и $v_j \equiv |v_j|e^{i\theta_j}$ $(j = 1, 2)$. Пусть L — длина нелинейной среды с началом в точке $z = 0$. Тогда, поскольку волна 3 падает справа и волна 4 слева, определим входные и выходные амплитуды соотношениями

$$\hat{\mathscr{A}}_{4\text{вх}} = \hat{\mathscr{A}}_4(0), \quad \hat{\mathscr{A}}_{4\text{вых}} = \hat{\mathscr{A}}_4(L), \quad \hat{\mathscr{A}}_{3\text{вх}} = \hat{\mathscr{A}}_3(L), \quad \hat{\mathscr{A}}_{3\text{вых}} = \hat{\mathscr{A}}_3(0). \tag{22.5.7}$$

Отсюда, полагая $z = L$, получаем из (22.5.6) следующие вход/выход соотношения:

$$\begin{aligned}\hat{\mathscr{A}}_{3\text{вых}} &= \hat{\mathscr{A}}_{3\text{вх}}\sec(KL) - i\hat{\mathscr{A}}_{4\text{вх}}^\dagger\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}\operatorname{tg}(KL),\\ \hat{\mathscr{A}}_{4\text{вых}} &= \hat{\mathscr{A}}_{4\text{вх}}\sec(KL) - i\hat{\mathscr{A}}_{3\text{вх}}^\dagger\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}\operatorname{tg}(KL).\end{aligned} \tag{22.5.8}$$

Сразу становится очевидным, что приближение, рассматривающее волну накачки как константу, без затухания, перестает быть удовлетворительным, когда KL приближается к $\pi/2$.

22.5.2. Применение к когерентному состоянию

Предположим, что состояние на двух входах в нелинейную среду является произведением когерентных состояний $|v_3\rangle|v_4\rangle$ с $v_j = |v_j|e^{i\theta_j}$ $(j = 3, 4)$. Тогда средние значения $\hat{\mathscr{A}}_{3\text{вых}}$, $\hat{\mathscr{A}}_{4\text{вых}}$, заданных выражениями (22.5.8), легко вычисляются и равны

$$\begin{aligned}\langle\hat{\mathscr{A}}_{3\text{вых}}\rangle &= v_3\sec(KL) - iv_4^*\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}\operatorname{tg}(KL),\\ \langle\hat{\mathscr{A}}_{4\text{вых}}\rangle &= v_4\sec(KL) - iv_3^*\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}\operatorname{tg}(KL).\end{aligned} \tag{22.5.9}$$

В частности, если мода 3 или мода 4 эволюционирует из вакуумного состояния, то амплитуда этой моды растет с L из-за спонтанной эмиссии. Мы еще вернемся к этой задаче ниже в связи с темой фазового согласования.

С помощью выражений (22.5.8) можно также вычислить среднее значение интенсивности или числа фотонов в выходе из среды

$$\langle \hat{n}_{3\text{вых}} \rangle = \langle \hat{n}_{3\text{вх}} \rangle \sec^2(KL) + (\langle \hat{n}_{4\text{вх}} \rangle + 1) \operatorname{tg}^2(KL) + [i\, e^{-i(\theta_1-\theta_2)} \langle \hat{a}_{4\text{вх}} \hat{a}_{3\text{вх}} \rangle + \text{к.с.}] \sec(KL) \operatorname{tg}(KL) =$$
$$= |v_3|^2 \sec^2(KL) + (|v_4|^2 + 1) \operatorname{tg}^2(KL) + [i v_3 v_4\, e^{-i(\theta_1+\theta_2)} + \text{к.с.}] \sec(KL) \operatorname{tg}(KL). \quad (22.5.10)$$

Аналогичное выражение имеет место для $\langle \hat{n}_{4\text{вых}} \rangle$. Отметим, что из-за члена с $\operatorname{tg}^2(KL)$ величина $\langle \hat{n}_{3\text{вых}} \rangle$ возрастает от нуля с увеличением длины L, благодаря спонтанной эмиссии, даже когда и v_3, и v_4 равны нулю первоначально.

22.5.3. Сжатие в четырехволновом смешении

Так как нелинейные среды, как известно, являются источником сжатых состояний, естественно поинтересоваться, проявляет ли мода 3 или мода 4 квадратурное сжатие на выходе кристалла. По этой причине введем действительную переменную

$$\hat{Q}_3 \equiv \hat{a}_{3\text{вых}}\, e^{-i\phi} + \hat{a}^\dagger_{3\text{вых}}\, e^{i\phi}, \quad (22.5.11)$$

где ϕ есть некоторая подгоночная фаза, и выясним, существует ли какое-нибудь значение фазы ϕ, для которого $\langle (\Delta \hat{Q}_3)^2 \rangle \leqslant 1$, когда состояние на входе является произведением состояний $|v_3\rangle |v_4\rangle$. Из выражений (22.5.9) получаем

$$\langle \hat{Q}_3 \rangle = [v_3 \sec(KL) - i v_4^*]\, e^{i(\theta_1+\theta_2)} \operatorname{tg}(KL)]\, e^{-i\phi} + \text{к.с.}, \quad (22.5.12)$$

тогда как из (22.5.8)

$$\langle \hat{Q}_3^2 \rangle = [v_3 \sec(KL) - i v_4^*]\, e^{i(\theta_1+\theta_2)} \operatorname{tg}(KL)]^2\, e^{-2i\phi} + \text{к.с.} +$$
$$+ 2[|v_3|^2 \sec^2(KL) + (|v_4|^2 + 1) \operatorname{tg}(KL)] - i v_3^* v_4^*\, e^{i(\theta_1+\theta_2)} \sec(KL) \operatorname{tg}(KL) + \text{к.с.}] + 1.$$

Отсюда

$$\langle (\Delta \hat{Q}_3)^2 \rangle = \langle \hat{Q}_3^2 \rangle - \langle \hat{Q}_3 \rangle^2 = 1 + 2 \operatorname{tg}^2(KL). \quad (22.5.13)$$

Аналогичное выражение имеет место для $\langle (\Delta \hat{Q}_4)^2$. Поскольку эти дисперсии никогда не падают ниже единицы, то ни мода 3, ни мода 4 не являются сжатыми на внешних концах нелинейной среды. Тем не менее сжатие достижимо, как мы сейчас продемонстрируем, когда свет, выходящий из среды в модах 3 и 4 смешивается в светоделителе (Yuen and Shapiro, 1979).

Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 22.14, когда выходящие световые сигналы с амплитудами $\hat{a}_{3\text{вых}} e^{i\chi_3}$ и $\hat{a}_{4\text{вых}} e^{i\chi_4}$ смешиваются в светоделителе, обладающем комплексным амплитудным коэффициентом прохождения $\mathscr{T}$ и отражения $\mathscr{R}$. Пусть $\hat{a}_5$ и $\hat{a}_6$ — амплитуды мод на выходе светоделителя . Тогда, согласно рис. 22.14,

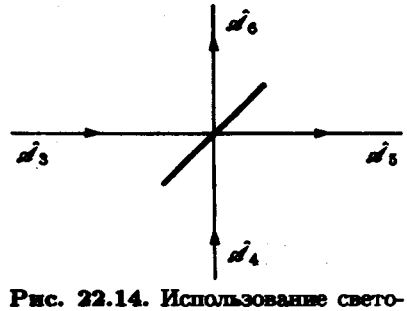


Рис. 22.14. Использование светоделителя для смешения двух полей $\hat{a}_3$, $\hat{a}_4$ с целью создания двух новых полей $\hat{a}_5$, $\hat{a}_6$

$$\hat{a}_5 = \mathscr{T} \hat{a}_{3\text{вых}}\, e^{i\chi_3} + \mathscr{R} \hat{a}_{4\text{вых}}\, e^{i\chi_4}, \quad \hat{a}_6 = \mathscr{T} \hat{a}_{3\text{вых}}\, e^{i\chi_3} + \mathscr{T} \hat{a}_{4\text{вых}}\, e^{i\chi_4}. \quad (22.5.14)$$

Из этих соотношений следует, что $\hat{a}_5$ и $\hat{a}_6$ подчиняются обычным каноническим правилам коммутации для одномодовых амплитуд, при условии, что им подчиняются $\hat{a}_3$ и $\hat{a}_4$. Теперь образуем обычным способом полевую квадратуру

$$\hat{Q}_5 \equiv \hat{a}_5\, e^{-i\phi} + \hat{a}^\dagger_5\, e^{i\phi} \quad (22.5.15)$$

и вычислим ее дисперсию. С помощью (22.5.8) и (22.5.14) получаем

$$\hat{Q}_5 = [(\mathscr{T}\,\mathrm{e}^{i\chi_3}\hat{\mathscr{A}}_{3in} + \mathscr{R}\,\mathrm{e}^{i\chi_4}\hat{\mathscr{A}}_{4in})\sec(KL) - \\ - i(\mathscr{T}\,\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2+\chi_3)}\hat{\mathscr{A}}^{\dagger}_{4in} + \mathscr{R}\,\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2\chi_4)}\hat{\mathscr{A}}^{\dagger}_{3in})\,\mathrm{tg}(KL)]\,\mathrm{e}^{-i\phi} + \text{э.с.}. \quad (22.5.16)$$

Из этого выражения после небольших алгебраических преобразований находим

$$\langle(\Delta\hat{Q}_5)^2\rangle = \sec^2(KL) + \mathrm{tg}^2(KL) + 4\sec(KL)\,\mathrm{tg}(KL)|\mathscr{R}\mathscr{T}|\sin(\theta_1 + \theta_2 + \chi_3 + \chi_4 + \beta - 2\phi), \quad (22.5.17)$$

где $\beta = \arg(\mathscr{R}\mathscr{T})$. В частности, если $|\mathscr{R}|^2 = \frac{1}{2} = |\mathscr{T}|^2$ и $\theta_1 + \theta_2 + \chi_3 + \chi_4 + \beta - 2\phi = -\pi/2$, то

$$\langle(\Delta\hat{Q}_5)^2\rangle = [\sec(KL) - \mathrm{tg}(KL)]^2,$$

что меньше единицы почти для всех L и приближается к нулю при $KL \to \pi/2$. Поэтому можно всегда найти фазовый угол ϕ, такой, что $\langle(\Delta\hat{Q}_5)^2\rangle < 1$, что является условием сжатия. Подобное заключение справедливо и для $\hat{Q}_6$. Результатом смешивания двух выходов из нелинейной среды является, следовательно, генерация сжатых полей из несжатых.

Эффекты сжатия, осуществляющиеся в режиме четырехволнового смешения в пучке натрия, впервые экспериментально наблюдались в работе (Slusher, Hollberg, Yurke and Valley, 1985) в AT&T Bell Laboratories. Авторы измерили флуктуации поля с помощью гетеродинирования на фоне локального осциллятора и обнаружили, что флуктуации ниже дробового шума, или пуассоновского предела, достигаются при некоторой расстройке от резонанса. На рис. 21.5*б* показаны некоторые из измеренных флуктуаций, выраженные в виде зависимости среднеквадратичного шума от фазы локального осциллятора. Для определенных фазовых углов флуктуации опускаются примерно на 10 % ниже предела дробового шума, что ожидаемо для полностью когерентного поля. Это является признаком сжатого состояния.

22.5.4. Фазовое сопряжение[1]

Обсудим ситуацию, когда на нелинейную среду справа падает сигнальная волна в когерентном состоянии $|v_3\rangle$ (рис. 22.13), а слева — холостая волна, находящаяся в вакуумном состоянии. Тогда, как видно из (22.5.9), существует покидающая среду обратная волна со средним значением амплитуды $\langle\hat{\mathscr{A}}_{4\text{вых}}\rangle$, которая похожа на отраженную сигнальную волну. Полагая $v_4 = 0$ в (22.5.9), мы сразу видим, что средняя амплитуда волны, выходящей направо, задается выражением

$$\langle\hat{\mathscr{A}}_{4\text{вых}}\rangle = -iv_3^*\,\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)}\,\mathrm{tg}(KL) = -i\,\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)}\,\mathrm{tg}(KL)\langle\hat{\mathscr{A}}^{\dagger}_{3\text{вх}}\rangle, \quad (22.5.18)$$

и что она пропорциональна v_3^*, а не v_3, как должно быть для отраженной от обычного зеркала. Говорят, что это необычное зеркало является фазово-сопряженным, и это явление известно как *фазовое сопряжение*. На рис. 22.15 показана схема эксперимента (Boyd, Habashy, Jacobs, Mandel, Nieto-Vesperinas, Tompkin and Wolf, 1987), демонстрирующего основное различие между фазово-сопряженным зеркалом, подобным тому, что создается четырехволновым смешением в нелинейной среде, и обычным металлическим зеркалом. Нелинейная среда накачивается распространяющимися навстречу друг другу волнами $E^{(I)}$ и $E^{(II)}$ и зондируется падающей волной $E^{(i)}$. Все три волны, как показано на рисунке, получают делением света аргонового ионного лазера, осциллирующего на длине волны 488 нм. Волна $E^{(r)}$, отраженная от фазово-сопряженного зеркала, интерферирует с падающей волной в интерферометре типа Майкельсона. Интерференционная картина зондируется фотодетектором, по мере того, как переменные фазовые сдвиги θ вносятся контролируемой давлением стеклянной ячейкой, помещенной на одну из пяти различных позиций A, B, C, D, E. Некоторые результаты измерений показаны на рис. 22.16.

При наличии ячейки в положение A, фаза падающей волны увеличивается с ростом θ, а фаза отраженной волны уменьшается при увеличении θ, как и следует из (22.5.18), так что разность фаз растет линейно с θ. В противоположность этому, разность фаз является постоянной, когда фазово-сопряженное

[1] Существует большое количество литературы, рассматривающей вопрос фазового сопряжения. См., например, обзорную статью (Pepper, 1982) и книги (Fisher, 1983; Zeldovich, Pilipetsky and Shkunov, 1985).

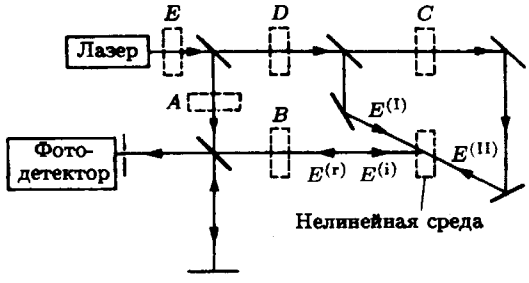


Рис. 22.15. Схема эксперимента, иллюстрирующего фазовое сопряжение. Прерывистые линии показывают положения подвижной воздушной ячейки. (Воспроизведено из Boyd, Habashy, Jacobs, Mandel, Nieto-Vesperinas, Tompkin and Wolf, 1987)

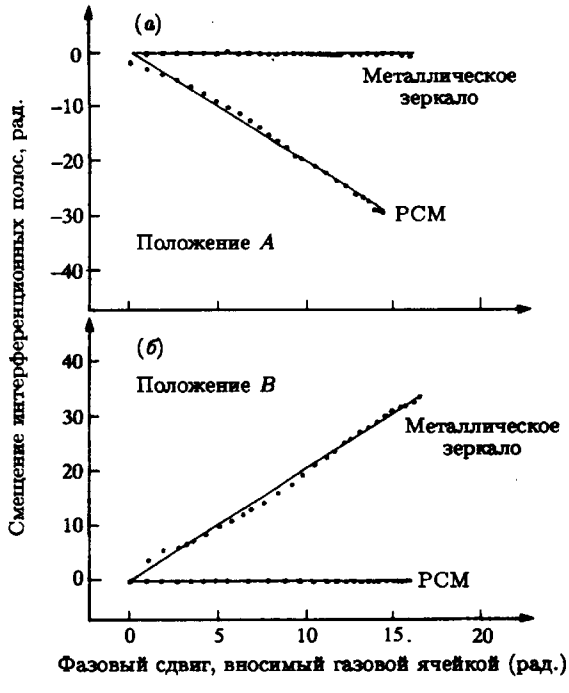


Рис. 22.16. Зависимость измеренного смещения интерференционных полос от фазового сдвига, вводимого воздушной кюветой на рис. 22.15: *а* — в положении *A*; *б* — в положении *B*. (Воспроизведено из Boyd, Habashy, Jacobs, Mandel, Nieto-Vesperinas, Tompkin and Wolf, 1987)

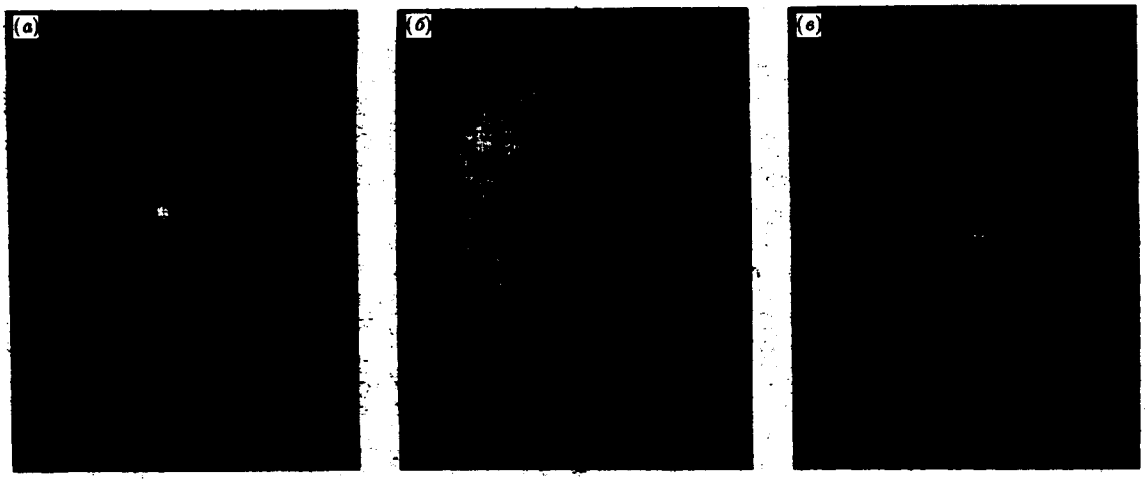


Рис. 22.17. Иллюстрация возможности фазово-сопряженного зеркала исправлять аберрацию: *а* — фотография падающего лазерного луча; *б* — искаженное изображение, происходящее в результате прохождения луча через травленую стеклянную пластину; *в* — восстановленное изображение того же самого луча после фазово-сопряженного отражения и второго прохода пластины. (Воспроизведено из Giuliano, 1981; см. также Jain and Lind, 1983)

зеркало (ФСМ) заменяется обычным зеркалом. Если ячейка помещена в позицию B, то отраженная волна тоже проходит через B, а фазовый сдвиг, вносимый фазово-сопряженным зеркалом точно компенсируется для любого фазового сдвига, вводимого в падающую волну. Результатом является сокращение фазовых сдвигов, и интерференционная картина не зависит от θ. В противоположном случае, с обычным металлическим зеркалом, фазовые сдвиги, претерпеваемые падающей и отраженной волнами, складываются и интерференционная картина показывает обычную линейную зависимость от θ.

Способность фазово-сопряженного зеркала компенсировать фазовые сдвиги, испытываемые падающей волной, открывает интересные возможности для компенсирования искажения волнового фронта при рас-

сеянии или для компенсирования искажения фазовых аберраций систем, формирующих изображение (см., например, Giulliano, 1981; Agarwal, Friberg and Wolf, 1982, 1983). В качестве примера такого применения на рис. 22.17 показано изображение, формируемое светом, вышедшим из деформированной стеклянной пластины, отраженным фазово-сопряженным зеркалом и вновь прошедшим через пластину в обратном направлении. Видно, что фазовое искажение было нейтрализовано двойным прохождением в следствие обращения фазы при отражении.

22.6. Квантовые неразрушающие измерения

Большинство измерений квантовой системы возмущают ее, вводя неконтролируемых квантовых флуктуаций. Как следствие, повторное измерение одной и той же переменной системы спустя короткое время после предыдущего может привести к совершенно другому исходу. Одним из очевидных примеров этой ситуации является фотоэлектрическое измерение оптического поля, которое, как правило, заканчивается поглощением одного или более фотонов. Более позднее фотоэлектрическое измерение того же самого оптического поля может, следовательно, привести к другому результату.

В принципе, существуют динамические переменные квантовой системы, которые остаются невозмущенными измерением, хотя это же измерение может внести возмущение в сопряженные переменные системы. Такая динамическая переменная известна как *квантовая неразрушаемая* (QND) переменная (Caves, Thorne, Drever, Sandberg and Zimmermann, 1980; Milburn, Lane and Walls, 1983; Milburn and Walls, 1983a,b; Imoto, Haus and Yamamoto, 1985; Braginsky and Khalil, 1992, гл. 4). В картине Гейзенберга $A(t)$ есть QND-переменная, если она удовлетворяет условию

$$[\hat{A}(t'), \hat{A}(t)] = 0 \tag{22.6.1}$$

для всех t, t'. В этом случае повторное измерение величины $\hat{A}(t)$ будет приводить к одному и тому же результату. Очевидно, что это будет так, если $\hat{A}$ коммутирует с полным гамильтонианом $\hat{H}$, т.е., если

$$[\hat{A}, \hat{H}] = 0. \tag{22.6.2}$$

В картине Шредингера система, удовлетворяющая условию (22.6.2), которая начинает эволюцию из собственного состояния оператора $\hat{A}$, остается в собственном состоянии $\hat{A}$, так что $\hat{A}$ является QND-переменной. Иногда делается разграничение между QND-переменной, которая просто удовлетворяет (22.6.1) и *избегающей обратного действия* переменной $\hat{A}$, обладающей свойством, что гамильтониан взаимодействия для измерения $\hat{H}_I$ зависит только от наблюдаемой переменной $\hat{A}$. Тогда взаимодействие с измеряющей аппаратурой не влияет на $\hat{A}$.

22.6.1. Эффект Керра — пример QND-переменной

В качестве примера QND и избегающего обратного действия измерения рассмотрим параметрическую связь между двумя модами оптического поля в керровской среде, имеющей $\chi^{(3)}$-нелинейную восприимчивость (Imoto, Haus and Yamamoto, 1985; Kitagawa and Yamamoto, 1986; Sanders and Milburn, 1989). Одномодовое поле в керровской среде характеризуется гамильтонианом

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{n} + \hbar\chi\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 = \hbar(\omega_0 - \chi)\hat{n} = \hbar\chi\hat{n}^2, \tag{22.6.3}$$

если вспомнить, что $\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 = \hat{n}(\hat{n}-1)$. Параметр ангармоничности χ является действительным и пропорциональным $\chi^{(3)}$. Коэффициент преломления среды зависит от интенсивности с коэффициентом, который пропорционален χ. Из (22.6.3) следует, что

$$[\hat{n}, \hat{H}] = 0, \tag{22.6.4}$$

так что переменная $\hat{n}$ есть интеграл движения, и она предсатвляет собой QND-переменную, которая является также избегающей обратного действия. Мы можем измерять $\hat{n}$ и моменты $\hat{n}$ без влияния на последующие измерения. Поскольку все моменты $\hat{n}$ остаются неизменными во времени, то и фотонная статистика

тоже. Однако другие переменные изменяются во времени. Например, из (22.6.3) имеем для уравнения движения Гейзенберга оператора уничтожения $\hat{a}$

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -i(\omega_0 - \chi)\hat{a} - i\chi(\hat{a}\hat{n} + \hat{n}\hat{a}) = -i[\omega_0 + \chi 2\hat{n}]\hat{a}(t). \tag{22.6.5}$$

Так как $\hat{n}$ есть интеграл движения, это уравнение может быть проинтегрировано сразу, что дает

$$\hat{a}(t) = e^{-i[\omega_0 + \chi 2\hat{n}]t}\hat{a}(0). \tag{22.6.6}$$

Если поле начинает эволюцию в когерентном состоянии $|v\rangle$, с $|v|^2 \gg 1$, так что $\hat{n}$ имеет значение, близкое к $|v|^2$, тогда

$$\langle\hat{a}(t)\rangle \approx v\, e^{-i(\omega_0 + \chi 2|v|^2)t}. \tag{22.6.7}$$

Очевидно, что распространение через керровскую среду оказывает влияние на фазу поля, но не на его модуль.

Двухмодовое поле в керровской среде можно описать гамильтонианом

$$\hat{H} = \hbar\omega_s\hat{a}_s + \hbar\omega_p\hat{a}_p + \frac{1}{2}\hbar\chi_p\hat{n}_p^2 + 2\hbar\chi\hat{n}_s\hat{n}_p, \tag{22.6.8}$$

где мы рассматриваем одну моду как сигнальную (s), а другую как зондирующую (p). Параметры χ_s, χ_p, χ являются элементами тензора восприимчивости $\chi^{(3)}$. В некоторых средах, таких, как оптические волокна, все три параметра являются равными, тогда как χ_s, χ_p могут обращаться в нуль в других средах. Из (22.6.8) ясно, что обе величины $\hat{n}_s$ и $\hat{n}_p$ есть QND-переменные типа избегающих обратного действия, которые к тому же являются интегралами движения. Вследствие этого имеем, как и при выводе (22.6.6), что

$$\hat{a}_s(t) = \exp[-i(\omega_s + \tfrac{1}{2}\chi_s + \chi_s\hat{n}_s + 2\chi\hat{n}_p)t]\hat{a}_s(0), \tag{22.6.9}$$

$$\hat{a}_p(t) = \exp[-i(\omega_p + \tfrac{1}{2}\chi_p + \chi_p\hat{n}_p + 2\chi\hat{n}_s)t]\hat{a}_p(0). \tag{22.6.10}$$

Отсюда следует, что взаимодействие между двумя модами влияет на фазы поля, но не на числа фотонов. Более того, не только сигнальное поле воздействует на фазу пробного поля, но пробное поле само вызывает у себя зависящий от интенсивности фазовый сдвиг, и наоборот. Однако, когда $\hat{n}_p$ имеет определенное значение n_p, часто можно выбрать время взаимодействия так, чтобы

$$\chi_p\hat{n}_p t \approx 2\pi N \quad (N = 1, 2, \ldots), \tag{22.6.11}$$

и тогда в показателе экспоненты в (22.6.10) $\chi_p\hat{n}_p t$ можно опустить. Впредь будем предполагать, что это упрощение уже сделано.

Так как эффект Керра позволяет измерять интенсивность, или число фотонов, сигнального поля без возмущения этого числа, может показаться, что включение керровского зонда в одно плечо интерферометра позволило бы нам сказать «каким путем прошел фотон» через интерферометр без нарушения интерференционной картины. Это подразумевало бы, конечно, нарушение принципа неопределенности, потому что интерференционная картина является всегда проявлением подлинной неразличимости разных путей. Анализ такого интерференционного эксперимента представляет значительный педагогический интерес.

22.6.2. Анализ интерференционного эксперимента

Мы будем следовать работе (Sanders and Milburn, 1989) [см. также (Kärtner and Haus, 1993)] и рассмотрим схему интерферометра Маха — Цендера, показанную на рис. 22.18. Интерферометр образован двумя 50%:50%-светоделителями BS_A, BS_B и зеркалами M_A, M_B. Выходное поле $\hat{b}(t)$ измеряется фотодетектором PD. Одно плечо интерферометра содержит керровскую среду KM, которая также зондируется

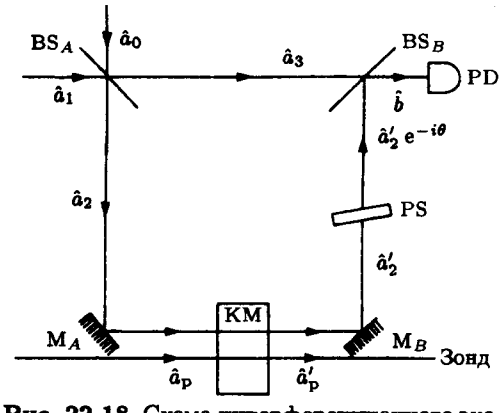


Рис. 22.18. Схема интерференционного эксперимента, в котором путь, принимаемый фотоном, может быть определен посредством зондирования керровской среды КМ другим световым лучом. (Адаптировано из Sanders and Milburn, 1989)

пробной волной $\hat{a}_p$, фаза которой в итоге измеряется некоторым гомодинным устройством. Другое плечо интерферометра содержит фазовращатель PS, который вводит меняющийся фазовый сдвиг в это плечо интерферометра. Интерференционная картина исследуется по измерениям зависящей от θ интенсивности, регистрируемой фотодетектором PD.

Введем теперь один фотон в отверстие 1 входного светоделителя и попытаемся определить с помощью КМ, каким путем фотон следует через интерферометр. Это измерение оставляет число фотонов невозмущенным. Но из (22.6.10) ясно, что измерение вносит фазовый сдвиг в пробную волну, который имеет разные значения в зависимости от того, содержит ли сигнальная волна фотон или нет.

Обозначим через $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ амплитуды мод на входе (рис. 22.18) и через $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$ — амплитуды внутри интерферометра. Тогда для 50%:50%-светоделителя имеем,

$$\hat{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 + i\hat{a}_0), \tag{22.6.12}$$

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\hat{a}_1 + \hat{a}_0). \tag{22.6.13}$$

Как следует из (22.6.9), амплитуда $\hat{a}_2'$ поля на выходе из керровской среды связана с амплитудой $\hat{a}_2$ на входе формулой

$$\hat{a}_2' = \exp[-i(\omega_2 + \tfrac{1}{2}\chi_2 + \chi_2\hat{n}_2 + 2\chi\hat{n}_p)T]\hat{a}_2, \tag{22.6.14}$$

где T есть время распространения внутри КМ. И, наконец, поле $\hat{b}$, появляющееся из выходного светоделителя, задается выражением

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_3 + i\hat{a}_2' e^{-i\theta}), \quad . \tag{22.6.15}$$

где θ описывает действие фазовращателя PS и добавочного времени пробега вдоль более длинной траектории в интерферометре.

Из (22.6.12)—(22.6.15) мы легко получаем соотношение

$$\hat{b} = \tfrac{1}{2}(\hat{a}_1 + i\hat{a}_0) + \tfrac{1}{2}i e^{-i\theta}\exp[-i(\omega_2 + \tfrac{1}{2}\chi_2 + \chi_2\hat{n}_2 + 2\chi\hat{n}_p)T](i\hat{a}_1 + \hat{a}_0), \tag{22.6.16}$$

из которого следует, что

$$\hat{b}^\dagger\hat{b} = \tfrac{1}{2}[\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0 + \tfrac{1}{2}i e^{-i\theta}(\hat{a}_1^\dagger - i\hat{a}_0^\dagger)\times$$
$$\times \exp\{-i[\omega_2 + \tfrac{1}{2}\chi_2 + 2\chi\hat{n}_p\tfrac{1}{2}\chi_2(-i\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_0^\dagger)(i\hat{a}_1 + \hat{a}_0)]T\}(i\hat{a}_1 + \hat{a}_0) + \text{э.с.}]. \tag{22.6.17}$$

22.6.3. Вычисление видности интерференционных полос

Теперь положим, что начальное квантовое состояние $|\psi\rangle$ является произведением состояний, в котором мода 1 находится в однофотонном состоянии, мода 0 — в вакуумном состоянии, а мода накачки P — в когерентном состоянии $|v\rangle_P$. Тогда

$$|\psi\rangle = |\text{vac}\rangle_0|1\rangle_1|v\rangle_P. \tag{22.6.18}$$

Вычислим среднее от (22.6.17) в состоянии $|\psi\rangle$ и получим

$$\langle\hat{b}^\dagger\hat{b}\rangle = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{2}_P\left\{v\left|\exp[-i(\omega_2 + \frac{1}{2}\chi_2 + 2\chi\hat{n}_p)T]\right|v\right\}_P e^{-i\theta} + \text{к.с.}\right\}. \tag{22.6.19}$$

Вспоминая, что для когерентного состояния (ср. разд. 11.5) $\mathrm{e}^{-i2\chi\hat{n}_p T}|v\rangle_P = |v\,\mathrm{e}^{-i2\chi T}\rangle_P$, и используя скалярное произведение двух когерентных состояний [ср. (11.6.1)], окончательно получаем из (22.6.19)

$$\langle \hat{b}^\dagger \hat{b}\rangle = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{e}^{-2|v|^2 \sin^2 \chi T}\cos\left(\omega_2 T + \frac{1}{2}\chi_2 T + |v|^2 \sin 2\chi T + \theta\right)\right]. \tag{22.6.20}$$

Следовательно, видность $\mathscr{V}$ интерференционных полос задается выражением

$$\mathscr{V} = \exp[-2|v|^2 \sin^2(\chi T)] \tag{22.6.21}$$

и зависит от интенсивности зондирующей волны, керровской константы связи χ и времени пробега T.

22.6.4. Фазовый сдвиг зондирующей волны

Мы уже видели из уравнения (22.6.10), что зондирующая волна испытывает фазовый сдвиг в результате взаимодействия с сигнальной волной $\hat{a}_2$, который зависит от числа фотонов в сигнальной волне. Пусть $\hat{a}_p$ является амплитудой зондирующей волны, выходящей из керровской среды КМ после взаимодействия. Тогда

$$\hat{a}'_p = \exp[-i(\omega_1 + \tfrac{1}{2}\chi_p + 2\chi\hat{n}_2)T]\hat{a}_p, \tag{22.6.22}$$

где мы, для простоты, взяли $\chi_p \bar{n}_p T \approx 2N\pi$. Следовательно, существует дополнительный, по сравнению с вакуумным полем, фазовый сдвиг $2\chi T$, созданный в присутствии однофотонного поля моды 2. Этот фазовый сдвиг может быть измерен с помощью гомодинной техники. Пусть $\hat{Y}$ есть действительная переменная, определяемая выражением

$$\hat{Y} \equiv \frac{1}{2}(\hat{a}'_p\,\mathrm{e}^{-i\phi} + \text{э.с.}), \tag{22.6.23}$$

где ϕ — фазовый угол. Тогда среднее значение величины $\hat{Y}$ в случае, когда зондирующее поле находится первоначально в когерентном состоянии $|v\rangle_P$, имеет различные значения в зависимости от того, проходит фотон через плечо 2 или плечо 3 интерферометра. В первом случае $\langle\hat{Y}\rangle_{\text{arm2}}$ описывается выражениями (22.6.22) и (22.6.23) с $\hat{n}_2 \to 1$. В результате имеем

$$\langle\hat{Y}\rangle_{\text{arm2}} = \frac{1}{2}\left\{v\exp\left[-i\left(\omega_p + \frac{1}{2}\chi_p + 2\chi\right)T\right]\mathrm{e}^{-i\phi} + \text{к.с.}\right\} = \\ = |v|\cos(\omega_p T + \frac{1}{2}\chi_p T + 2\chi T + \phi - \arg v), \tag{22.6.24}$$

тогда как во втором случае мы делаем подстановку $\hat{n}_2 \to 0$ и получаем

$$\langle\hat{Y}\rangle_{\text{arm3}} = \frac{1}{2}\left\{v\exp\left[-i\left(\omega_p + \frac{1}{2}\chi_p\right)T\right]\mathrm{e}^{-i\phi} + \text{к.с.}\right\} = |v|\cos(\omega_p T + \frac{1}{2}\chi_p T + \phi - \arg v). \tag{22.6.25}$$

Разность этих двух значений, обусловленная присутствием фотона в плече 2, есть

$$\Delta\hat{Y} \equiv \langle\hat{Y}\rangle_{\text{arm3}} - \langle\hat{Y}\rangle_{\text{arm2}}, \tag{22.6.26}$$

$$\Delta\hat{Y} = 2|v|\sin\chi T\sin\left(\omega_p T + \frac{1}{2}\chi_p T + \chi T + \phi - \arg v\right), \tag{22.6.27}$$

и она имеет наибольшее возможное значение $2|v|\sin\chi T$, когда ϕ выбрано соответствующим образом.

Сравним это изменение $\langle\hat{Y}\rangle$ из-за присутствия фотона в плече 2 с естественными квантовыми флуктуациями $\hat{Y}$. Когда фотон находится в плече 3, мы имеем

$$\langle\hat{Y}^2\rangle_{\text{arm3}} = \frac{1}{4}[\langle\hat{a}'^2_p\rangle\,\mathrm{e}^{-2i\phi} + \text{к.с.} + 2\langle\hat{n}'_p\rangle + 1] = \frac{1}{4}[v^2\,\mathrm{e}^{-i(2\omega_p T + \chi_p T + 2\phi)} + \text{к.с.} + 2|v|^2 + 1] = \\ = |v|^2\cos^2\left(2\omega_p T + \frac{1}{2}\chi_p T + \phi - \arg v\right) + \frac{1}{4}, \tag{22.6.28}$$

и учитывая (22.6.25), получим формулу

$$\langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle_{\text{arm3}} = \langle\hat{Y}^2\rangle_{\text{arm3}} - \langle\hat{Y}\rangle^2_{\text{arm3}} = \frac{1}{4}. \tag{22.6.29}$$

Это позволяет нам связать фазовое измерение с отношением сигнал/шум R_{SN}, которое определяется выражением

$$R_{SN} \equiv \frac{\Delta Y_{\max}}{\sqrt{\langle(\Delta\hat{Y})^2\rangle_{\text{arm3}}}} = 4|v|\sin\chi T. \tag{22.6.30}$$

Когда R_{SN} велико, фазовое измерение является точным, и мы можем ясно провести различие между путями 2 и 3 для фотонов. С другой стороны, когда R_{SN} порядка 1 или меньше, фазовое измерение имеет невысокую точность, и трудно сказать, каким путем следует фотон через интерферометр.

22.6.5. Дополнительность

Объединяя (22.6.21) с выражением (22.6.30) для точности измерения фазы, для видности $\mathscr{V}$ получаем формулу

$$\mathscr{V} = \exp(-R_{SN}^2/8). \tag{22.6.31}$$

Отсюда ясно, что видность интерференционных полос может быть равна единице только тогда, когда отношение сигнал/шум равно нулю, что означает полное отсутствие информации относительно пути, по которому фотон следует через интерферометр. В противоположном случае, когда $R_{SN} \gg 1$, и путь, по которому следует фотон через интерферометр, хорошо устанавливается, то $\mathscr{V} \ll 1$, и интерференция очень слабая. Видность интерференционных полос и отношение сигнал/шум подчиняются, поэтому, соотношению типа соотношения неопределенности, в том смысле, что они не могут быть оба большими одновременно. Этот вывод укрепляет наше представление о том, что интерференция всегда есть проявление подлинной неразличимости пути фотона.

Задачи

22.1 Сигнальный и холостой фотоны, созданные вниз-конверсией оптически накаченного нелинейного кристалла, находятся в следующем перепутанном состоянии:

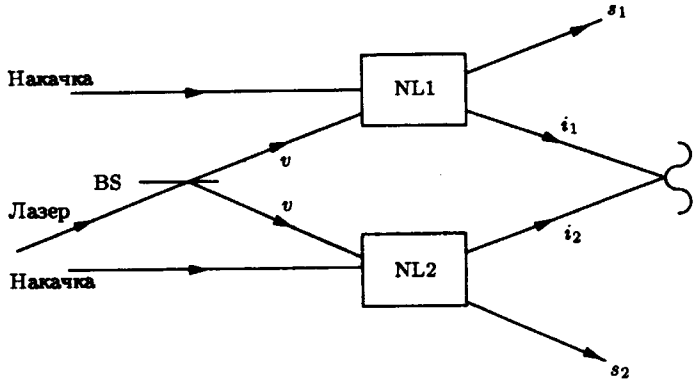
$$|\psi\rangle = |\text{vac}\rangle_{s,i} + g\sum_{\omega'}\phi(\omega')|\omega'\rangle_s|\omega_0 - \omega'\rangle_i.$$

Здесь индексы s, i относятся к сигнальному и холостому фотонам, $\phi(\omega)$ есть некоторая действительная функция частоты и ω_0 является частотой оптической накачки. Частотные фильтры с амплитудными коэффициентами прохождения $F_s(\omega)$ и $f_i(\omega)$, за которыми следуют фотодетекторы, размещены на пути сигнального и холостого фотонов, соответственно. Фильтр $f_i(\omega)$, который можно перестраивать по частоте, имеет очень узкую полосу пропускания. Скорость двухфотонных совпадений измеряется по мере того, как сканируется частота фильтра $f_i(\omega)$, для того чтобы определить ширину полосы частот холостого фотона. Покажите, что полоса пропускания $F_s(\omega)$ определяет ширину полосы холостого фотона.

22.2 Исходя из многомодового квантового состояния $|\psi\rangle$ (22.4.21) для сигнального и холостого фотонов, покажите, что эксперимент, проиллюстрированный на рис. 22.7, приводит к интерференции, когда сигнальный и холостой фотоны детектируются в схеме совпадений, но не когда они детектируются отдельно.

22.3 Два одинаковых нелинейных кристалла, действующих как параметрические вниз-конверторы, накачиваются общим источником и располагаются так, что холостой фотон от кристалла 1 проходит через кристалл 2 и является коллинеарным с холостым фотоном от кристалла 2. Сигнальный фотон от каждого кристалла падает на фотодетектор, и измеряется скорость $\mathscr{R}_{ss}$ двухфотонных совпадений. Вычислите $\mathscr{R}_{ss}$ и покажите, что кристалл 2 ведет себя как фотонный усилитель для холостого фотона, испущенного кристаллом 1.

22.4 Рассмотрите два нелинейных кристалла NL1 и NL2, действующих как параметрические вниз-конверторы по схеме, показанной на рисунке. Два взаимно когерентных световых луча комплексной



амплитуды v, выходящих от лазера, делаются коллинеарными с сигнальным 1 и сигнальным 2 лучами, созданными кристаллами, в то время как холостой 1 и холостой 2 лучи совмещаются и интерферируют. Покажите, посредством двухмодового рассмотрения каждого вниз-преобразователя, что видность интерференции равна $|v|^2/(|v|^2+1)$.

22.5 Используйте многомодовую трактовку предыдущей задачи, чтобы определить видность интерференционных полос.

ЛИТЕРАТУРА

Глава 1

Bochner, S. (1959), *Lectures on Fourier Integrals* (Princeton University Press, Princeton, NJ).
Goldberg, R. R. (1961), *Fourier Transforms* (Cambridge University Press, Cambridge).
Lukacs, E. (1970), *Characteristic Functions*, 2nd edn. (Charles Griffin, London).
Kendall, M. G. (1952), *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. I, 5th edn. (Charles Griffin, London).
Mehta, C. L. (1965), in *Lectures in Theoretical Physics*, Vol. VIIC, ed. W. E. Brittin (University of Colorado Press, Boulder, CO), p. 345.
Yaglom, A. M. (1987), *IEEE ASSP Magazine* **4**, 7.
*Вентцель, Е. С. (1962), *Теория вероятностей* (ГИФМЛ, Москва).
*Королюк, В. С., Портенко, Н. И., Скороход, А. В. и Турбин, А. Ф. (1985), *Справочник по теории вероятностей и математической статистике* (Наука, Москва).

Глава 2

Beran, M. J. (1968), *Statistical Continuum Theories* (Wiley, New York).
Bremerman, H. (1965), *Distributions, Complex Variables, and Fourier Transforms* (Addison-Wesley, Reading, MA).
Carter, W. H. and Wolf, E. (1975), *J. Opt. Soc. Am.* **65**, 1067.
Chapman, S. (1916), *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)* A **216**, 279.
Davenport, W. B., Jr. and Root, W. L. (1958), *Random Signals and Noise* (McGraw-Hill, New York).
Davis, R. C. (1953), *Proc. Am. Math. Soc.* **4**, 564.
Einstein, A. (1906), *Ann. d. Physik* **19**, 371.
Einstein, A. (1914), *Archives de Sciences Physiques et Naturelles* **37**, 254.
Einstein, A. (1915), *Ann. d. Physik* **47**, 879.
Einstein, A. (1987), *IEEE ASSP Magazine* **4**, 6.
Einstein, A. and Hopf, L. (1910), *Ann. d. Physik* **33**, 1096.
Goldman, S. (1953), *Information Theory* (Prentice-Hall, New York).
Jones, D. S. (1982), *The Theory of Generalized Functions*, 2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge).
Kac, M. and Siegert, A. J. F. (1947), *Ann. Math. Statist.* **18**, 438.
Karhunen, K. (1946), *Ann. Acad. Sci. Fenn., Series A* **34**, 3.
Kestelman, H. (1960), *Modem Theories of Integration*, 2nd edn. (Dover, New York).
Khintchine, A. (1934), *Math. Ann.* **109**, 604.
Kolmogoroff, A. (1931), *Math. Ann.* **104**, 415.
Kramers, H. A. (1940), *Physica* **7**, 284.
Lax, M. (1966), in *Statistical Physics, Phase Transitions and Superfluidity*, eds. M. Chrétien, E. P. Gross and S. Deser (Gordon and Breach, New York), p. 269.
Lukacs, E. (1970), *Characteristic Functions*, 2nd edn. (Charles Griffin, London).
Mandel, L. and Wolf, E. (1976), *J. Opt. Soc. Am.* **66**, 529.

Mandel, L. and Wolf, E. (1981), *Opt. Commun.* **36**, 247.
Middleton, D. (1960), *An Introduction to Statistical Communication Theory* (McGraw-Hill, New York).
Morse, P. M. and Feshbach, H. (1953), *Methods of Theoretical Physics*, Part I (McGraw-Hill, New York).
Moyal, J. E. (1949), *J. Roy. Statist. Soc. B* **11**, 150.
Nussenzveig, H. M. (1972), *Causality and Dispersion Relations* (Academic Press, New York).
Oppenheim, I., Shuler, K. E. and Weiss, G. H. (1977), *Stochastic Processes in Chemical Physics: The Master Equation* (MIT Press, Cambridge, MA).
Pauli, W. (1928) in *Probleme der Modernen Physik, Arnold Sommerfeld zum 60. Geburtstage gewidmet von seinen Schülern*, ed. P. Debye (Hirzel Verlag, Leipzig). Reprinted in *Collected Scientific Papers by Wolfgang Pauli*, Vol. 1 (1964), eds. R. Kronig and V. F. Weisskopf (Interscience, New York).
Pogorzelski, W. (1966), *Integral Equations and Their Applications*, Vol. 1 (Pergamon Press, Oxford).
Rice, S.O. (1944), *Bell Syst. Tech. J.* **23**, 282; reprinted in *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, ed. N. Wax (Dover. New York, 1954).
Riesz, F. and Sz.-Nagy, B. (1955), *Functional Analysis* (Ungar, New York).
Risken, H. (1984), *The Fokker-Planck Equation* (Springer, Berlin).
Root, W. L. and Pitcher, T. S. (1955), *Ann. Math. Statist.* **26**, 313.
Smithies, F. (1970), *Integral Equations* (Cambridge University Press, Cambridge).
Smoluchowski, M. V. (1906), *Ann. d. Physik* **21**, 756.
Srinivas, M. D. and Wolf, E. (1977), in *Statistical Mechanics and Statistical Methods in Theory and Applications*, ed. Uzi Landman (New York, Plenum), p. 219.
Titchmarsh, E. C. (1939), *The Theory of Functions*, 2nd edn. (Oxford University Press, London).
von Laue, M. (1915a), *Ann. d. Physik* **47**, 853.
von Laue, M. (1915b), *Ann. d. Physik* **48**, 668.
Wiener, N. (1923), *J. Math. and Phys. (Massachusetts Institute of Technology)*, **2**, 131.
Wiener, N. (1930), *Acta. Math.* **55**, 117.
Wolf, E. (1981), *Opt. Commun.* **38**, 3.
Wolf, E. (1982), *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 343.
Wolf, E. (1986), *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 76.
Wolf, E. and Carter, W. H. (1975), *Opt. Commun.* **13**, 205.
Wolf, E. and Carter, W. H. (1976), *Opt. Commun.* **16**, 297.
Yaglom, A. M. (1962), *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ)
Yaglom, A. M. (1987), *IEEE ASSP Magazine* **4**, 7.
*Ахманов, С. А., Дьяков, Ю. Е. и Чиркин, А. С. (1981), *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (Наука, Москва).
*Вентцель, Е. С. и Овчаров, Л. А. (1991) *Теория случайных процессов и её инженерные приложения* (Наука, Москва).
*Гарднер, К. В. (1986), *Стохастические методы в естественных науках* (Мир, Москва).
*Дынкин, Е. Б. (1963), *Марковские процессы* (Физматгиз, Москва).
*Кляцкин, В. И. (1980), *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах* (Наука, Москва).
*Левин, Б. Р. (1989), *Теоретические основы статистической радиотехники* (Радио и связь, Москва).
*Лэкс, М. (1974), *Флуктуации и когерентные явления* (Мир, Москва).
*Рыжов, С. М., Кравцов, Ю. А. и Татарский, В. И. (1978), *Введение в статистическую радиофизику* (Наука, Москва).

Глава 3

Agarwal, G. S. and Wolf, E. (1972), *J. Math. Phys.* **13**, 1759.
Baker, T. T. and Copson, E. T. (1950), *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Clarendon Press, Oxford).
Baños, A. (1966), *Dipole Radiation in the Presence of a Conducting Half-space* (Pergamon Press, Oxford).
Born, M. and Wolf, E. (1980), *Principles of Optics*, 6th edn. (Pergamon Press, Oxford) [Борн, М., Вольф, Э. (1973), *Основы оптики* (Наука, Москва)].
Braun, G. (1956), *Acta Phys. Austriaca* **10**, 8.

Chako, N. (1965), *J. Inst. Maths. Applics.* **1**, 372.
Copson, E. T. (1935), *An introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable* (Oxford University Press, Oxford).
Copson, E. T. (1967), *Asymptotic Expansions* (Cambridge University Press, Cambridge).
Courant, R. and Hilbert, D. (1962), *Methods of Mathematical Physics* (Interscience, New York).
Davenport, W. B. and Root, W. L. (1958), *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise* (McGraw-Hill, New York).
Dennery, P. and Krzywicki, A. (1967), *Mathematics for Physicists* (Harper and Row, New York).
Dugundji, J. (1958), *I. R. E. Trans. on Information Theory* IT4, 53.
Eisenhart, L. P. (1947), *An Introduction to Differential Geometry* (Princeton University Press, Princeton, NJ).
Erdelyi, A. (1954), ed., *Tables of Integral Transforms*, Vol. II (McGraw-Hill, New York).
Erdelyi, A. (1955), *J. Soc. Ind. Appl. Math.* **3**, 17.
Erdelyi, A. (1956), *Asymptotic Expansions* (Dover, New York).
Focke, J. (1954), *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. (Leipzig)* **101**, Heft 3.
Gabor, D. (1946), *J. Inst. of Elect. Eng.* **93**, Pt. III, 429.
Gabor, D. (1961), in *Progress in Optics*, Vol. 1, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam), p. 109, Sec. 3.
Goodman, J. W. (1968), *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, New York) [Гудмен, Дж. (1970), *Введение в фурье-оптику* (Мир, Москва)].
Градштейн, И. С., Рыжик, И. М. (1971), *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Наука, Москва).
Heitler, W. (1954), *The Quantum Theory of Radiation*, 3rd edn. (Oxford University Press, Oxford) [Гайтлер, В. (1956), *Квантовая теория излучения* (Иностранная Литература, Москва)].
Jones, D. S. and Kline, M. (1958), J. Math. Phys. **37**, 1.
Lalor, É. (1968), *J. Opt. Soc. Am.* **58**, 1235.
Luneburg, R. K. (1964), *Mathematical Theory of Optics* (University of California Press, Berkeley and Los Angeles).
Mandel, L. (1967), *J. Opt. Soc. Am.* **57**, 613.
Miyamoto, K. and Wolf, E. (1962), *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 615, Appendix.
Morse, P. M. and Feshbach, H. (1953), *Methods of Theoretical Physics*, Part I (McGraw-Hill, New York).
Nussenzveig, H. M. (1972), *Causality and Dispersion Relations* (Academic Press, New York).
Oswald, J. R. V. (1956), *I. R. E. Trans.* CT **3**, 244.
Paley, A. R. E. A. C. and Wiener, N. (1934), *Fourier Transforms in the Complex Domain* (American Mathematical Society, New York).
Rayleigh, Lord (1897), *Phil. Mag.* **43**, 259.
Rice, S. O. (1944), *Bell Syst. Tech. J.* **23**, 282.
Sherman, G. C. (1969), *J. Opt. Soc. Am.* **59**, 697.
Sherman, G. C., Stamnes, J. J. and Lalor, É. (1976), *J. Math. Phys.* **17**, 760.
Stamnes, J. J. (1986), *Waves in Focal Regions* (Adam Hilger, Bristol and Boston).
Thompson, W. (1887), *Phil. Mag.*, **23**, 252; Reprinted in *Mathematical and Physical Papers by Sir William Thompson, Baron Kelvin*, Vol. IV (Cambridge University Press, 1910), p. 303.
Titchmarsh, E. C. (1948), *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, 2nd edn. (Oxford University Press, London and New York).
van der Corput, J. G. (1934-1935), *Compositio Mathematica*, **1**, 15.
van der Corput, J. G. (1936), *Compositio Mathematica* **3**, 328.
van Kampen, N. G. (1958), *Physica* **24**, 437.
Ville, J. (1948), *Cables et Trans.* **2**, 61.
Ville, J. (1950), *Cables et Trans.* **4**, 9.
Watson, G. N. (1944), *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge) [Ватсон, Г. Н. (1949) *Теория бесселевых функций* (Иностранная Литература, Москва)].
Weyl, H. (1919), *Ann. d. Physik* **60**, 481.
Whittaker, E. T. and Watson, G. N. (1940), *A Course of Modern Analysis*, 4th edn, reprinted (Cambridge University Press, Cambridge).
*Ахманов, С. А. и Никитин, С. Ю. (1998), *Физическая оптика* (изд. МГУ, Москва).
*Вейль, Г. (1986), *Теория групп и квантовая механика* (Наука, Москва).
*Лэкс, М. (1974), *Флуктуации и когерентные явления* (Мир, Москва).

*Денисюк, Ю. Н. (1963) *Оптика и спектроскопия* **15**, 522.
*Микаэлян, А. Л. (1990), *Оптические методы в информатике* (Наука, Москва).
*Стретт (Рэлей), Дж. В. (1940), *Волновая теория света* (ГИТТЛ, Москва-Ленинград).
*Цыпкин, Я. З. (1963), *Теория линейных импульсных систем* (ГИФМЛ, Москва).

Глава 4

Agarwal, G. S. and Wolf, E. (1993), *J. Mod. Opt.* **40**, 1489.
Bastiaans, M. J. (1977), *Opt. Acta* **24**, 261.
Blanc-Lapierre, A. and Dumontet, P. (1955), *Rev. Opt.* **34**, 1.
Born, M. and Wolf, E. (1980), *Principles of Optics*, 6th edn. (Pergamon Press, Oxford) [Борн, М., Вольф, Э. (1973), *Основы оптики* (Наука, Москва)].
Bothe, W. (1927), *Z. Phys.* **41**, 345.
Brown, Hanbury R. and Twiss, R. Q. (1957), *Proc. Roy. Soc. (London) A* **242**, 300.
Einstein, A. (1912), in *La Théorie du Rayonnement et les Quanta* (Instituts Solvay, Brussels, 1911), ed. P. Langevin and L. de Broglie (Paris, Gauthier-Villars, 1912), pp. 407–435, discussion pp. 436–450.
Friberg, A. T. and Wolf, E. (1995), *Opt. Lett.* **20**, 623.
Fürth, R. (1928), *Z. Phys.* **50**, 310.
Goldberg, R. R. (1965), *Fourier Transforms* (Cambridge University Press, Cambridge).
Heiniger, F., Herden, A. and Tschudi, T. (1983), *Opt. Commun.* **48**, 237.
Heitler, W. (1954), *The Quantum Theory of Radiation*, 3rd edn. (Oxford University Press, Oxford) [Гайтлер, В. (1956), *Квантовая теория излучения* (Иностранная Литература, Москва)].
Hopkins, H. H. (1951), *Proc. Roy. Soc. (London) A* **208**, 263.
Hopkins, H. H. (1953), *Proc. Roy. Soc. (London) A* **217**, 408.
Hopkins, H. H. (1957), *J. Opt. Soc. Am.* **47**, 508.
James, D. F. V., Kandpal, H. C. and Wolf, E. (1995), *Astrophys. J.* **445**, 406.
Kandpal, H. C., Saxena, K., Mehta, D. S., Vaishya, J. S. and Joshi, K. C. (1993), *Opt. Commun.* **99**,157.
Kay, I. and Silverman, R. (1957), *Information and Control*, **1**, 64.
Харкевич, А. А. (1956), *Спектры и анализ* (Наука, Москва).
Mandel, L. (1959), *Proc. Phys. Soc. (London)* **74**, 233.
Mandel, L. (1961a), *J. Opt. Soc. Am.* **51**, 797.
Mandel, L. (1961b), *J. Opt. Soc. Am.* **51**, 1342.
Mandel, L. and Wolf, E. (1962), *Proc. Phys. Soc. (London)* **80**, 894.
Mandel, L. and Wolf, E. (1965), *Rev. Mod. Phys.* **37**, 231.
Mandel, L. and Wolf, E. (1976), *J. Opt. Soc. Am.* **66**, 529.
Mandel, L. and Wolf, E. (1981), *Opt. Commun.* **36**, 247.
Mehta, C. L. (1963), *Nuovo Cimento* **28**, 401.
Mehta, C. L., Wolf, E. and Balachandran, A. P. (1966), *J. Math. Phys.* **7**, 133.
Michelson, A. A. (1890), *Phil. Mag.* **30**, 1.
Michelson, A. A. (1891a), *Nature* **45**, 160.
Michelson, A. A. (1891b), *Phil. Mag.* **31**, 256.
Michelson, A. A. (1891c), *Phil. Mag.* **31**, 338.
Michelson, A. A. (1892), *Phil. Mag.* **34**, 280.
Michelson, A. A. (1920), *Astroph. J.* **51**, 257.
Pancharatnam, S. (1956), *Proc. Indian Acad. Sci. Sec. A* **44**, 398.
Pancharatnam, S. (1957), *Proc. Indian Acad. Sci. Sec. A* **46**, 1.
Pancharatnam, S. (1963a), *Proc. Indian Acad. Sci. Sec. A* **57**, 218.
Pancharatnam, S. (1963b), *Proc. Indian Acad. Sci. Sec. A* **57**, 231.
Pancharatnam, S. (1975), *Collected Works of S. Pancharatnam* (Oxford University Press, London).
Papas, C. H. (1965), *Theory of Electromagnetic Wave Propagation* (McGraw-Hill, New York).
Parrent, G. B. (1959), *J. Opt. Soc. Am.* **49**, 787.
Stokes, G. G. (1852), *Trans. Camb. Phil. Soc.* **9**, 399. Reprinted in his *Mathematical and Physical Papers*, Vol. III (Cambridge University Press, Cambridge, 1922), p. 233 and in W. Swindell (1975), p. 124.
Sudarshan, E. C. G. (1969), *J. Math. and Phys. Sci. (Madras)* **3**, 121.
Swindell, W. (1975), *Polarized Light* (Dowden, Hutchinson and Ross, Stroudsburg, PA).

Tricomi, F. G. (1957), *Integral Equations* (Interscience, New York; reprinted by Dover, New York, 1985) [Трикоми, Ф. Дж. (1960), *Интегральные уравнения* (Иностранная Литература, Москва)].
van Cittert, P. H. (1934), *Physica* **1**, 201.
Verdet, E. (1865), *Ann. Scientif. l'École Normale Supérieure* **2**, 291.
Verdet, E. (1869), *Leçons d'Optique Physique* Vol. 1, p. 106. (L'Imprimerie Impériale, Paris).
von Laue, M. (1907a), *Ann. d. Physik* **23**, 1.
von Laue, M. (1907b), *Ann. d. Physik* **23**, 795.
Weyl, H. (1950), *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, translated from German (Dover, New York) [Вейль, Г. (1986), *Теория групп и квантовая механика* (Наука, Москва)].
Wiener, N. (1927–1928), *J. Math. Phys. (M.I.T.)* **7**, 109.
Wiener, N. (1929), *J. Frankl. Inst.* **207**, 525.
Wiener, N. (1930), *Acta. Math. (Uppsala)*, **55**, 117.
Wolf, E. (1954a), *Proc. Roy. Soc. (London), A* **225**,96.
Wolf, E. (1954b), *Nuovo Cimento* **12**, 884.
Wolf, E. (1955), *Proc. Roy. Soc. (London)* **230**, 246.
Wolf, E. (1958), *Proc. Phys. Soc. (London)* **71**, 257.
Wolf, E. (1959), *Nuovo Cimento* **13**, 1165.
Wolf, E. (1981a), *Optics in Four Dimensions* (ICO Ensenada, 1980), eds. M. A. Machado and L. M. Narducci (Conference Proceedings #65, American Institute of Physics, New York), p. 42.
Wolf, E. (1981b) *Opt. Commun.* **38**, 3.
Wolf, E. (1982), *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 343.
Wolf, E. (1983), *Opt. Lett.* **8**, 250.
Wolf, E. (1986), *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 76.
Wolf, E. and Carter, W. H. (1975), *Opt. Commun.* **13**, 205.
Wolf, E. and Carter, W. H. (1976), *Opt. Commun.* **16**, 297.
Wolf, E. and Devaney, A. J. (1981), *Opt. Lett.* **6**, 168.
Wolf, E., Devaney, A. J. and Foley, J. T. (1981), *Optics in Four Dimensions* (ICO Ensenada, 1980), eds. M. A. Machado and L. M. Narducci (Conference Proceedings #65, American Institute of Physics, New York).
Wolf, E., Devaney, A. J. and Gori, F. (1983), *Opt. Commun.* **46**, 4. Zernike, F. (1938), *Physica* **5**, 785.
*Александров, Е. Б., Хвостенко, Г. И. и Чайка, М. П. (1991), *Интерференция атомных состояний* (Наука, Москва).
*Bykov, V. P. (1995), *Laser Physics* **5**, 203.
*Кессель, А. Р. и Моисеев, С. А. (1994), *Письма ЖЭТФ* **58**, 77.
*Лоудон, Р. (1976), *Квантовая теория света* (Мир, Москва).

Глава 5

Agarwal, G. S., Foley, J. T. and Wolf, E. (1987), *Opt. Commun.* **62**, 67.
Antes, G., Baltes, H. P. and Steinie, B. (1976), *Helv. Phys. Acta.* **49**, 759.
Baltes, H. P. (1977), *Appl. Phys.* **12**, 221.
Baltes, H. P. and Steinie, B. (1977), *Nuovo Cimento* **41B**, 428.
Baltes, H. P., Steinie, B. and Antes, G. (1976), *Opt. Commun.* **18**, 242.
Baltes, H. P., Steinie, B. and Antes, G. (1978), in *Coherence and Quantum Optics IV*, eds. L. Mandel and E. Wolf (Plenum Press, New York), p. 431.
Bocko, M., Douglass, D. H. and Knox, R. S. (1987), *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2649.
Born, M. and Wolf, E. (1980), *Principles of Optics*, 6th edn. (Pergamon Press, Oxford) [Борн, М., Вольф, Э. (1973), *Основы оптики* (Наука, Москва)].
Carter, W. H. (1978), *Opt. Commun.* **26**, 1.
Carter, W. H. (1984), *J. Opt. Soc. Am. A* **1**, 716.
Carter, W. H. and Bertolotti, M. (1978), *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 329.
Carter, W. H. and Wolf, E. (1975), *J. Opt. Soc. Am.* **65**, 1067.
Carter, W. H. and Wolf, E. (1977), *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 785.
Carter, W. H. and Wolf, E. (1981a). *Opt. Acta* **28**, 227.

Carter, W. H. and Wolf, E. (1981b). *Opt. Acta* **28**, 245.
Chandrasekhar, S. (1960), *Radiative Transfer* (Dover, New York).
Collett, E. and Wolf, E. (1978), *Opt. Lett.* **2**, 27.
Collett, E. and Wolf, E. (1979), *J. Opt. Soc. Am.* **69**, 942.
Courjon, D. and Bulabois, J. (1979), in *Applications of Optical Coherence*, ed. W. H. Carter, *Proc. Soc. Photo-Opt. Instr. Eng.* **194**, 129.
Courjon, D., Bulabois, J. and Carter, W. H. (1981), *J. Opt. Soc. Am.* **71**, 469.
Dechamps, J., Courjon, D. and Bulabois, J. (1983), *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 256.
De Santis, P., Gori, F. and Palma, C. (1979), *Opt. Commun.* **28**, 151.
De Santis, P., Gori, F., Guattari, G. and Palma, C. (1979), *Opt. Commun.* **29**, 256.
Faklis, D. and Morris, G. M. (1992), *J. Mod. Opt.* **39**, 941.
Farina, J. D., Narducci, L. M. and Collett, E. (1980), *Opt. Commun.* **32**, 203.
Foley, J. T. (1990), *Opt. Commun.* **75**, 347.
Foley, J. T. (1991), *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 1099.
Foley, J. T. and Wolf, E. (1985), *Opt. Commun.* **55**, 236.
Foley, J. T. and Wolf, E. (1991), *J. Mod. Opt.* **38**, 2053.
Foley, J. T. and Wolf, E. (1995), *J. Mod. Opt.* **42**, 787.
Foley, J. T. and Zubairy, M. S. (1978), *Opt. Commun.* **26**, 297.
Friberg, A. T. (1979), *J. Opt. Soc. Am.* **69**, 192.
Friberg, A. T. (1981), *Opt. Acta* **28**, 261.
Friberg, A. T. (ed.) (1993), *Selected Papers on Coherence and Radiometry* (SPIE Optical Engineering Press, Milestone Series, MS69, Bellingham, WA).
Friberg, A. T. and Sudol, R. J. (1982), *Opt. Commun.* **41**, 383.
Friberg, A. T. and Sudol, R. J. (1983), *Opt. Acta.* **30**, 1075.
Friberg, A. T. and Wolf, E. (1983), *Opt. Acta* **30**, 1417.
Friberg, L. T., Agarwal, G. S. Foley, J. T. and Wolf, E. (1992), *J. Opt. Soc. Am. B* **9**, 1386.
Gamliel, A. (1988), *Statistical Optics*, ed. G. M. Morris, *Proc. SPIE* **976**, 137.
Gamliel, A. and Wolf, E. (1988), *Opt. Commun.* **65**, 91.
Goodman, J. W. (1965), *Proc. IEEE* **53**, 1688.
Goodman, J. W. (1979) in *Applications of Optical Coherence*, ed. W. H. Carter, *Proc Soc. Photo-Opt. Instr. Eng.* **194**, 86.
Gori, F. (1980a), *Opt. Acta* **27**, 1025.
Gori, F. (1980b), *Opt. Commun.* **34**, 301.
Gori, F. (1981), *Opt. Commun.* **39**, 293.
Gori, F. (1983), *Opt. Commun.* **46**, 149.
Gori, F. (1994) in *International Trends in Optics*, Vol. II, ed. J. C. Dainty, (Academic Press, New York).
Gori, F. and Palma, C. (1978), *Opt. Commun.* **27**, 185.
Gori, F., Guattari, G., Palma, C. and Padovani, C. (1988), *Opt. Commun.* **67**, 1.
Градштейн, И. С., Рыжик, И. М. (1971), *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Наука, Москва).
Hopf, E. (1934), *Mathematical Problems of Radiative Equilibrium* (Cambridge University Press, Cambridge).
Imai, Y. and Ohtsuka, Y. (1980), *Appl. Opt.* **19**, 542.
Imre, K., Özizmir, E,, Rosenbaum, M. and Zweifel, P. F. (1967), *J. Math. Phys.* **8**, 1097.
Indebetouw, G. (1989), *J. Mod. Opt.* **36**, 251.
James, D. F. V. and Wolf, E. (1990), *Phys. Lett. A* **146**, 167.
James, D. F. V. and Wolf, E. (1991a), *Opt. Commun.* **81**, 150.
James, D. F. V. and Wolf, E. (1991b), *Phys. Lett. A* **157**, 6.
James, D. F. V. and Wolf, E. (1991c), *Radio Science* **26**, 1239.
James, D. F. V. and Wolf, E. (1994), *Phys. Lett. A* **188**, 239.
James, D. F. V., Savedoff, M. P. and Wolf, E. (1990), *Ap. J.* **359**, 67.
Kandpal, H. C. and Wolf, E. (1994), *Opt. Commun.* **110**, 255.
Kandpal, H. C., Vaishya, J. S. and Joshi, K. C. (1989), *Opt. Commun.* **73**, 169.
Kandpal, H. T., Vaishya, J. S., Chander, M., Saxena, K., Mehta, D. S. and Joshi, K. C. (1992), *Phys. Lett. A* **167**, 114.
Kirn, K. and Wolf, E. (1987), *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 1233.
Kinziy, R. E. (1972), *J. Opt. Soc. Am.* **62**, 386.

Kogelnik, H. and Li, T. (1966), *Proc. IEEE* **54**, 1312.
Leader, J. C. (1978), *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 1332.
Li, Y. and Wolf, E. (1982), *Opt. Lett.* **7** 256.
Lorentz, H. A. (1909), *The Theory of Electrons* (Teubner, Leipzig and Columbia University Press, New York; reprinted by Dover, New York).
Marchand, E. W. and Wolf, E. (1972), *J. Opt. Soc. Am.* **62**, 379.
Marchand, E. W. and Wolf, E. (1974a), *J. Opt. Soc. Am.* **64**, 1219.
Marchand, E. W. and Wolf, E. (1974b),]. *Opt. Soc. Am.* **64**, 1273.
Margenau, H. and Hill, R. N. (1961), in *Progr. Theoretical Phys. (Japan)* **26**, 722.
Martienssen, W. and Spiller, E. (1964), *Amer. J. Phys.* **32**, 919.
McGuire, D. (1979), *Opt. Commun.* **29**, 17.
Menzel, D. H. ed., (1966), *Selected Papers on the Transfer of Radiation* (Dover, New York).
Morris, G. M. and Faklis, D. (1987), *Opt. Commun.* **62**, 5.
Nyyssonen, D. (1977), *Appl. Opt.* **16**, 2223.
Nyyssonen, D. (1979), in *Applications of Optical Coherence*, ed. W. H. Carter, *Proc. Soc. Photo-Opt. Instr. Eng.* **194**, 34.
Ohtsuka, Y. and Imai, Y. (1979), *J. Opt. Soc. Am.* **69**, 684.
Oldham, W. G., Subramanian, S. and Neureuther, A. R. (1981), *Solid State Electr.* **24**, 975.
Planck, M. (1959), *The Theory of Heat Radiation* (Dover, New York).
Reynolds, G. O. and Smith, A. E. (1973), *Appl. Opt.* **12**, 1259.
Saleh, T. E. A. (1979), *Opt. Commun.* **30**, 135.
Saleh, T. E. A. and Irshid, M. I. (1982), *Opt. Lett.* **7**, 342.
Santarsiero, M. and Gori, F. (1992), *Phys. Lett. A* **167**, 123.
Schell, A. C. (1961), *The Multiple Plate Antenna* (Doctoral Dissertation. Massachusetts Institute of Technology), Sec. 7.5.
Schell, A. C. (1967), *IEEE Trans. Antennas and Propag.* AP-**15**, 187.
Scudieri, F., Bertolotti, M. and Bartolino, R. (1974), *Appl. Opt.* **13**, 181.
Siegman, A. E. (1971), *An Introduction to Lasers and Masers* (McGraw-Hill, New York) [Сигмен, А. (1966), *Мазеры* (Мир, Москва)].
Starikov, A. and Wolf, E. (1982), *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 923.
Steinie, T. and Baltes, H. P. (1977), *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 241.
Tervonen, E., Friberg, A. T. and Turunen, J. (1992), *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 796.
Trotter, A. P. (1919), *The Illuminating Engineer (London)* **12**, 243.
Turunen, J., Tervonen, E. and Friberg, A. T. (1990), *J. Appl. Phys.* **67**, 49.
Walther, A. (1968), *J. Opt. Soc. Am.* **58**, 1256.
Walther, A. (1973), *J. Opt. Soc. Am.* **63**, 1622.
Walther, A. (1974), *J. Opt. Soc. Am.* **64**, 1275.
Walther, A. (1978a), *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 1606.
Walther, A. (1978b). *Opt. Lett.* **3**, 127.
Watson, G. N. (1966), *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge) [Ватсон, Г. Н. (1949), *Теория бесселевых функций* (Иностранная Литература, Москва)].
Wentzel, G. (1949), *Quantum Theory of Fields* (Interscience Publishers, New York).
Wigner, E. (1932), *Phys. Rev.* **40**, 749.
Wigner, E. (1971) in *Perspective in Quantum Theory*, ed. by W. Yourgrau and A. van der Merwe (M. I. T. Press, Cambridge, MA).
Wolf, E. (1978), *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 6.
Wolf, E. (1986), *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1370.
Wolf, E. (1987a), *Nature* **326**, 363.
Wolf, E. (1987b). *Opt. Commun.* **62**, 12.
Wolf, E. (1987c), *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2646.
Wolf, E. (1989), *Phys. Rev. Lett.* **63**, 220.
Wolf, E. (1992), *J. Mod. Opt.* **22**, 9.
Wolf, E. (1994), *Opt. Lett.* **19**, 2024.
Wolf, E. and Carter, W. H. (1978a), in *Coherence and Quantum Optics IV*, eds. L. Mandel and E. Wolf, (Plenum Press, New York), p. 415.
Wolf, E. and Carter, W. H. (1978b), *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 953.

Wolf, E. and Collett, E. (1978), *Opt. Commun.* **25**, 293.
Wolf, E. and Fineup, J. R. (1991), *Opt. Commun.* **82**, 209.
Wolf, E., Foley, J. T. and Gori, F. (1989), *J. Opt. Soc. Am. A* **6**, 1142, Appendix A.
*Клаудер, Дж. и Сударшан, Э. (1970), *Основы квантовой оптики* (Мир, Москва).
*Лоудон, Р. (1976), *Квантовая теория света* (Мир, Москва).

Глава 6

Aitken, A. C. (1944), *Determinants and Matrices* (Oliver and Boyd, Edinburgh).
Barakat, R. (1981), *Opt. Commun.* **38**, 159.
Beran, M. and Parrent, G. (1962), *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 98.
Born, M. and Wolf, E. (1980), *Principles of Optics*, 6th edn. (Pergamon Press, Oxford) [Борн, М., Вольф, Э. (1973), *Основы оптики* (Наука, Москва)].
Bourret, R. C. (1960), *Nuovo Cimenfo* **18**, 347.
Hurwitz, H. and Jones, R. C. (1941), *J. Opt. Soc. Am.* **31**, 493.
Jeffreys, H. (1931), *Cartesian Tensors* (Cambridge University Press, Cambridge).
Jones, R. C. (1941a), *J. Opt. Soc. Am.* **31**, 488.
Jones, R. C. (1941b), *J. Opt. Soc. Am.* **31**, 500.
Jones, R. C. (1942), *J. Opt. Soc. Am.* **32**, 486.
Jones, R. C. (1947a), *J. Opt. Soc. Am.* **37**, 107.
Jones, R. C. (1947b), *J. Opt. Soc. Am.* **37**, 110.
Jones, R. C. (1948), *J. Opt. Soc. Am.* **38**, 671.
Jones, R. C. (1956), *J. Opt. Soc. Am.* **46**, 126.
Kim, K., Mandel, L. and Wolf, E. (1987), *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 433.
Mehta, C. L. and Wolf, E. (1964a), *Phys. Rev. A* **134**, 1143.
Mehta, C. L. and Wolf, E. (1964b), *Phys. Rev. A* **134**, 1149.
Mehta, C. L. and Wolf, E. (1967a), *Phys. Rev.* **157**, 1183.
Mehta, C. L. and Wolf, E. (1967b), *Phys. Rev.* **157**, 1188.
Mehta, C. L. and Wolf, E. (1967c), *Phys. Rev.* **161**, 1328.
Mueller, H. (1948), *J. Opt. Soc. Am.* **38**, 661.
Parke, N. G., III (1949), *J. Math. Phys. (MIT)* **28**, 131.
Parrent, G. B. and Roman, P. (1960), *Nuovo Cimento* **15**, 370.
Perrin, F. (1942), *J. Chem. Phys.* **10**, 415.
Roman, P. (1961a), *Nuovo Cimento* **20**, 759.
Roman, P. (1961b), *Nuovo Cimento* **22**, 1005.
Roman, P. and Wolf, E. (1960a), *Nuovo Cimento* **17**, 462.
Roman, P. and Wolf, E. (1960b), *Nuovo Cimento* **17**, 477.
Shurcliff, W. A. (1962), *Polarized Light* (Harvard University Press, Cambridge, MA).
Simon, R. (1982), *Opt. Commun.* **42**, 293.
Soleillet, P. (1929), *Ann. de Physique* **12**, 23.
Stokes, G. G. (1852), *Trans. Cambr. Phil. Soc.* **9**, 399. Reprinted in his *Mathematical and Physical Papers*, Vol. III (Cambridge University Press, Cambridge, 1922), p. 233 and in W. Swindell (1975).
Swindell, W. (1975) *Polarized Light* (Dowden, Hutchinson and Ross, Stroudsburg, PA, 1975).
Wolf, E. (1954), *Nuovo Cimento* **12**, 884.
Wolf, E. (1956), in *Proc. Symposium on Astronomical Optics*, ed. Z. Kopal (North-Holland, Amsterdam).
Wolf, E. (1959), *Nuovo Cimento* **13**, 1165.
* Spreeuw, R. I. C. (1998), *Found. of Phys.* **28**, 361.

Глава 7

Allen, L., Gatehouse, S. and Jones, D. G. C. (1971), *Opt. Commun.* **4**, 169.
Beard, T. D. (1969), *Appl. Phys. Lett.* **15**, 227.

Benedek, G. B. (1968), in *Statistical Physics, Phase Transitions and Superfluidity* (Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, 1966), eds. M. Chretien, E. P.
Gross and S. Desser (Gordon and Breach, New York), Vol. 2, pp. 1–98.
Berne, B. J. and Pecora, R. (1976), *Dynamic Light Scattering* (Wiley, New York).
Bertolotti, M. Daino, B., Gori, F. and Sette, D, (1965), *Nuovo Cimento* **38**, 1505.
Born, M. and Wolf, E. (1980), *Principles of Optics*, 6th edn. (Pergamon Press, Oxford) [Борн, М., Вольф, Э. (1973), *Основы оптики* (Наука, Москва)].
Boyd, G. D. and Gordon, J. P. (1961), *Bell Tech. J.* **40**, 489.
Breckinridge, J. B. (1990) ed., *Amplitude and Intensity Spatial Interferometry* (SPIE Proceeding, Bellingham, WA), Vol. **1237**.
Brillouin, L. (1914), *Compt. Rend.* **158**, 1331.
Brillouin, L. (1922), *Ann. Phys. (Paris)* **17**, 88.
Burge, R. E., Fiddy, M. A., Greenaway, A. H. and Ross, G. (1976), *Proc. Roy. Soc. (London) A* **350**,191.
Chu, B. (1974), *Laser Light Scattering* (Academic Press, New York).
Connes, J. (1961a), *Rev. d'Opt.* **40**, 45.
Connes, J. (1961b), *Rev. d'Opt.* **40**, 116.
Connes, J. (1961c). *Rev. d'Opt.* **40**, 171.
Connes, J. (1961d), *Rev. d'Opt.* **40**, 231.
Crosignani, B., Di Porto, P. and Bertolotti, M. (1975), *Statistical Properties of Scattered Light* (Academic Press, New York).
Cummins, H. Z. (1969), in *Quantum Optics* (Proc. Internal. School of Physics, 'Enrico Fermi', Course XLII, Varenna, 1967), ed. R. J. Glauber (Academic Press, New York), p. 247.
Cummins, H. Z. and Swinney, H. L. (1970), *Progress in Optics*, Vol. 8, ed. E. Wolf, (North-Holland, Amsterdam), p. 133.
Dainty, J. C. (1984), *Laser Speckle*, 2nd edn., ed. J. C. Dainty (Springer, Berlin), Chapt. 7.
Davis, J. and Tango, W. J. (1985), *Proc. Astr. Soc. Austr.* **6**, 34.
Davis, J. and Tango, W. J. (1986), *Nature* **323**, 234.
Debye, P. (1912), *Ann. d. Physik* **39**, 789.
Dialetis, D. (1967), *J. Math. Phys.* **8**, 1641.
Dialetis, D. and Wolf, E. (1967), *Nuovo Cimento* **47**, 113.
Einstein, A. (1910), *Ann. d. Physik* **33**, 1275; [An English translation of this paper was published in *Colloid Chemistry*, ed. J. Alexander (The Chemical Catalog Company, New York), Vol. 1, 1926), p. 323.]
Fabelinskii, I. L. (1968), *Molecular Scattering of Light* (Plenum Press, New York).
Fellgett, P. (1958a), *J. Phys. Pad.* **19**, 187.
Fellgett, P. (1958b), *J. Phys. Pad.* **19**, 237.
Ferwerda, H. A. (1978), in *Inverse Source Problems In Optics*, ed. H. P. Baltes, (Springer, New York), Chapt. 2.
Fleury, P. A. and Boon, J. P. (1969), *Phys. Rev.* **186**, 244.
Foley, J. T. and Wolf, E. (1989), *Phys. Rev. A* **40**, 588.
Forster, D. (1975), *Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symmetry and Correlation Functions* (Benjamin, Reading, MA).
Fox, A. G. and Li, T. (1961), *Bell Tech. J.* **40**, 453.
Friberg, A. T. and Turunen, J. (1994), *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 227.
Friberg, A. T. and Wolf, E. (1983), *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 26.
Gamo, H. (1963) in *Electromagnetic Theory and Antennas*, Part 2, ed. E. C. Jordan, (Macrnillan, New York).
Gamo, H. (1963), *J. Appl. Phys.* **34**, 875.
Glauber, R. J. (1962) in *Lectures on Theoretical Physics IV* (Univ. of Colorado Summer Institute for Theoretical Physics), eds. W. E. Britten, B. W. Downs and J. Downs, (Interscience, New York), p. 571.
Gori, F. (1980), *Atti Fond. Giorgio Ronchi* **35**, 434.
Gross, E. (1930a), *Nature* **126**, 201.
Gross, E. (1930b). *Nature* **126**, 400.
Gross, E. (1930c), *Nature* **126**, 603.
Gross, E. (1932), *Nature* **129**, 722.
Jacquinot, P. (1958), *J. Phys. Rad.* **19**, 223.
Jacquinot, P. (1960), *Rep. Progr. Phys. (London)* **23**, 267.

James, D. F. V. and Wolf, E. (1990), *Phys. Lett. A* **146**, 167.
James, D. F. V. and Wolf, E. (1994), *Phys. Lett. A* **188**, 239.
James, D. F. V., Savedoff, M. P. and Wolf, E. (1990), *Ap. J.* **359**, 67.
Kohler, D. and Mandel, L. (1973), *J. Opt. Soc. Am.* **63**, 126.
Комаров, Л. И., Фишер, И. З. (1962), *ЖЭТФ* **43**, 1927.
Labeyrie, A. (1970), *Astron. & Astrophys.* **6**, 85.
Labeyrie, A. (1976) in *Progress in Optics*, Vol. 14, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam), p. 47.
Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. (1959), *Электродинамика сплошных сред* (Физматгиз, Москва).
Landau, L. and Placzek, G. (1934), *Physik Z. Sovietunion* **5**, 172.
Mandel, L. (1969), *Phys. Rev.* **181**, 75.
Mandel, L. and Wolf, E. (1973), *Opt. Commun.* **8**, 95.
Marathay, A. S. and Roman, P. (1964), *Nuovo Cimento* **34**, 1821.
Mehta, T. L. (1965), *Nuovo Cimento* **36**, 202.
Mehta, T. L. (1968), *J. Opt. Soc. Am.* **58**, 1233.
Michelson, A. A. (1890), *Phil. Mag.* **30**, 1.
Michelson, A. A. (1891), *Phil. Mag.* **31**, 338.
Michelson, A. A. (1892), *Phil. Mag.* **34**, 280.
Michelson, A. A. (1920), *Astrophys. J.* **51**, 257.
Michelson, A. A. (1927), *Studies in Optics* (University of Chicago Press, Chicago, IL).
Michelson, A. A. and Pease, F. G. (1921), *Astrophys. J.* **53**, 249.
Millane, R. P. (1990), *J. Opt. Soc. Am.* **7**, 394.
Morse, P. M. and Feshbach, H. (1953), *Methods of Theoretical Physics*, Part I (McGraw-Hill, New York) [Морс, Ф. М., Фешбах, Г. (1959), *Методы теоретической физики*, том 1 (Иностранная Литература, Москва)].
Mountain, R. D. (1966), *Rev. Mod. Phys.* **38**, 205.
Nussenzveig, H. M. (1967), *J. Math. Phys.* **8**, 561.
Page, T. H. (1955), *Physical Mathematics* (Van Nostrand, New York).
Paley, R. E. A. C. and Wiener, N. (1934), *Fourier Transforms in the Complex Domain* (American Mathematical Society, New York).
Papas, C. H. (1965), *Theory of Electromagnetic Wave Propagation* (McGraw-Hill, New York).
Pease, F. G. (1925), *Amour Eng.* **16**, 125.
Pease, F. G. (1930), *Sci. Amer.* **143**, 290.
Pease, F. G. (1931), *Ergeb. exact. Naturwiss.* **10**, 84.
Pecora, R. (1964), *J. Chem. Phys.* **40**, 1604.
Rayleigh, Lord (1892), *Phil. Mag.* **34**, 407.
Rohlfs, K. (1986), *Tools of Radio Astronomy* (Springer, Berlin).
Roman, P. and Marathay, A. S. (1963), *Nuovo Cimento* **30**, 1452.
Smithies, E. (1970), *Integral Equations* (Cambridge University Press, Cambridge).
Smoluchowski, M. (1908), *Ann. d. Physik*, **25**, 205.
Streifer, W. (1966), *J. Opt. Soc. Am.* **56**, 1481.
Strong, J. and Vanasse, G. A. (1959), *J. Opt. Soc. Am.* **49**, 844.
Thompson, A. R., Moran, J. M. and Swenson, G. W. (1986), *Inteferometry and Synthesis in Radio Astronomy* (Wiley, New York).
Toll, J. S. (1956), *Phys. Rev.* **104**, 1760.
Van Hove, L. (1954), *Phys. Rev.* **95**, 249.
Van Kampen, N. G. (1969) in *Quantum Optics* (Proc. Internal. School of Physics, 'Enrico Fermi', Course XLII, Varenna, 1967), ed. R. J. Glauber (Academic Press, New York), p. 235.
Vanasse, G. A. and Sakai, H. (1967), *Progress in Optics*, Vol. 6, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam), p. 259.
Weaver, R. L. and Pao, Y. (1981), *J. Math. Phys.* **22**, 1909.
Wolf, E. (1962), *Proc. Phys. Soc. (London)* **80**, 1269.
Wolf, E. (1963), *Phys. Lett.* **3**, 166.
Wolf, E. (1989), *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2220.
Wolf, E. and Agarwal, G. S. (1984), *J. Opt. Soc. Am. A* **1**, 541.
Wolf, E. and Foley, J. T. (1989), *Phys. Rev. A* **40**, 579.
Wolf, E., Foley, J. T. and Gori, F. (1989), *J. Opt. Soc. Am. A* **6**, 1142; errata *ibid. A* **7**, 173 (1990).

*Александров, Е. Б., Хвостенко, Г. Н. и Чайка, М. П. (1991) *Интерференция атомных состояний* (Наука, Москва).
*Желудев, Н. И. (1990), в кн. *Новые физические принципы оптической обработки информации* под ред. Ахманова, С. А. и Воронцова, М. А. (Наука, Москва), 195.
*Ораевский, А. Н. (1994), *УФН* **164**, 415.
*Ораевский, А. Н. (1994), *Квантовая электроника* **29**, 137.
*Розанов, Н. Н. (1997), *Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных линейных системах* (Наука, Москва).
*Scully, M. O. and Zubairy, M. S. (1997), *Quantum Optics* (Cambrige University) Press, UK).

Глава 8

Agarwal, G. S. and Wolf, E. (1993), *J. Mod. Opt.* **40**, 1489.
Mandel, L. (1964), in *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, eds. N. Blombergen and P. Grivet (Dunod, Paris and Columbia University Press, New York), p. 101.
Mehta, C. L. and Mandel, L. (1967), in *Electromagnetic Wave Theory*, Proceeding of a Symposium held at Delft, Vol. 2, ed. T. Brown (Pergamon Press, Oxford), p. 1069.
Wolf, E. (1963), in *Proceeding of the Symposium on Optical Masers* (Brooklyn Polytechnic Press and Wiley, New York), ed. J. Fox, p. 29.
Wolf, E. (1964), in *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, eds. N. Blombergen and P. Grivet (Dunod, Paris and Columbia University Press, New York), p. 29.

Глава 9

Arecchi, F. T., Gatti, E. and Sona, A. (1966), *Phys. Lett.* **20**, 27.
Brown, R. Hanbury (1974), *The Intensity Interferometer* (Taylor and Francis, London).
Brown, R. Hanbury and Twiss, R. Q. (1956a), *Nature* **177**, 27.
Brown, R. Hanbury and Twiss, R. Q. (1956b), *Nature* **178**, 1046.
Brown, R. Hanbury and Twiss, R. Q. (1957a), *Proc. Roy. Soc. (London) A* **242**, 300.
Brown, R, Hanbury and Twiss, R. Q. (1957b), *Proc. Roy. Soc. (London) A* **243**, 291.
Brown, R. Hanbury and Twiss, R, Q. (1958a), *Proc. Roy. Soc. (London) A* **248**, 199.
Brown, R. Hanbury and Twiss, R. Q. (1958b), *Proc. Roy. Soc. (London) A* **248**, 222.
Brown, R. Hanbury, Davis, J. and Allen, L. R. (1967a), *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **137**, 375.
Brown, R. Hanbury, Davis, J. and Allen, L. R. (1967b), *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **137**, 393.
Brown, R. Hanbury, Davis, J. and Allen, L. R. (1974), *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **167**, 121.
Cohen-Tannoudji, T., Diu, T. and Laloë, F. (1977), *Quantum Mechanics*, Vols I and 2 (John Wiley, New York).
Cummins, H. Z., Knable, N. and Yeh, Y. (1964), *Phys. Rev. Lett.* **12**, 150.
Cummins, H. Z. and Swinney, H. L. (1970), in *Progress in Optics*, Vol. 8, ed. E. Wolf. (North-Holland, Amsterdam), p. 133.
Dicke, R. H. and Wittke, J. P. (1960), *Introduction to Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, MA).
Einstein, A. (1905), *Ann. d. Physik* **17**, 132. [English translation in *Collected Papers of Albert Einstein*, Vol. 2 (1900-1909), Princeton University Press (Princeton, NJ), p. 186(1989)].
Ford, N. C. and Benedek, G. B. (1965), *Phys. Rev. Lett.* **15**, 649.
Lamb, W. E., Jr. and Scully, M. O. (1969), in *Polarization: Matiere et Rayonnement.* (Presses Universitaires de France, Paris).
Lastovka, J. B. and Benedek, G. B. (1966), *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1039.
Loudon, R. (1983), *The Quantum Theory of Light*, 2nd edn. (Clarendon Press, Oxford) [Лоудон, Р. (1976), *Квантовая теория света* (Мир, Москва)].
Mandel, L. (1958), *Proc. Phys. Soc. (London)* **72**, 1037.
Mandel, L. (1959), *Proc. Phys. Soc. (London)* **74**, 233.
Mandel, L. (1963) in *Progress in Optics*, Vol. 2, ed. E. Wolf. (North-Holland, Amsterdam), p. 181.
Mandel, L., Sudarshan, E. C. G. and Wolf, E. (1964), *Proc. Phys. Soc. (London)* **84**, 435.

Messiah, A. (1961), *Quantum Mechanics*, Vol. I (North-Holland, Amsterdam). [Мессиа, А. (1978), *Квантовая механика*, т. 1 (Мир, Москва).]
Messiah, A. (1962), *Quantum Mechanics*, Vol. 2 (North-Holland, Amsterdam). [Мессиа, А. (1978), *Квантовая механика*, т. 2 (Мир, Москва).]
Morgan, B. L. and Mandel, L. (1966), *Phys. Rev. Lett.* **16**, 1012.
Rebka, G. A. and Pound, R. V. (1957), *Nature* **180**, 1035.
Rice, S.O. (1944), *Bell Syst. Tech. J.* **23**, 282.
Scarl, D. B. (1966), *Phys. Rev. Lett.* **17**, 663.
Schiff, L. I. (1968), *Quantum Mechanics*, 3rd edn. (McGraw-Hill, New York) [Шифф, Л. (1959), *Квантовая механика* (Иностранная Литература, Москва)].
Twiss, R, Q., Little, A. G. and Hanbury Brown, R. (1957), *Nature* **180**, 324.
*Килин, С. Я. (1990), *Квантовая оптика: поля и их детектирование* (Наука и техника, Минск).
*Киттель, У. (1997) *Статистическая термодинамика* (Наука, Москва).
*Клаудер, Дж. и Сударшан, Э. (1970), *Основы квантовой оптики* (Мир, Москва).
*Клышко, Д. Н. (1980), *Фотоны и нелинейная оптика* (Наука, Москва).
*Левшин, Л. В. и Салецкий, А. М. (1994), *Оптические методы исследования молекулярных систем* (изд. МГУ, Москва).

Глава 10

Ackerhalt, J. R., Knight, P. L. and Eberly, J. H. (1973), *Phys. Rev. Lett.* **30**, 456.
Arnrein, W. 0. (1969), *Helv. Phys. Acta* **42**, 149.
Baker, H. F. (1902), *Proc. London Math. Soc.* **34**, 347.
Baker, H. F. (1903), *Proc. London Math. Soc.* **35**, 333.
Bandilla, A., Paul, H. and Ritze, H.-H. (1991), *Quantum Opt.* **3**, 267.
Barnett, S. M. and Pegg, D. T. (1986), *J. Phys. A* **19**, 3849.
Barnett, S. M. and Pegg, D. T. (1989), *J. Mod. Opt.* **36**, 7.
Beth, R. A. (1936), *Phys. Rev.* **50**, 115.
Bethe, H. A. (1947), *Phys. Rev.* **72**, 339.
Campbell, J. E. (1898), *Proc. London Math. Soc.* **29**, 14.
Carruthers, P. and Nieto, M. M. (1965), *Phys. Rev. Lett.* **14**, 387.
Carruthers, P. and Nieto, M. M. (1968), *Rev. Mod. Phys.* **40**, 411.
Casimir, H. B. G. (1949), *J. de Chim. Physique* **46**, 407.
Casimir, H. B. G. and Polder, D. (1948), *Phys. Rev.* **73**, 360.
Dalibard, J., Dupont-Roc, J. and Cohen-Tannoudji, C. (1982), *J. de Phys.* **43**, 1617.
Derjaguin, B. V., Abrikosova, 1. 1. and Lifshitz, E. M. (1956), *Quart. Rev. Chem. Soc.* **10**, 295.
Dirac, P. A. M. (1927), *Proc. Roy. Soc. (London) A* **114**, 243.
Dirac, P. A. M. (1958) *Principles of Quantum Mechanics*, 4th edn. (Oxford University Press, London) [Дирак, П. (1979), *Принципы квантовой механики* (Наука, Москва)].
Gottfried, K. (1966) *Quantum Mechanics*, Vol. 1. (Benjamin, New York).
Hausdorff, F. (1906), *Math. Naturwiss.* **58**, 19.
Healy, W. P. (1982) *Non-Relativistic Quantum Electrodynamics*. (Academic Press, London).
Heitler, W. (1954) *The Quantum Theory of Radiation*, 3rd edn. (Oxford University Press, London) [Гайтлер, В. (1956), *Квантовая теория излучения* (Иностранная Литература, Москва)].
Jackson, J. D. (1975) *Classical Electrodynamics*, 2nd edn. (John Wiley, New York).
Kitchener, J. A. and Prosser, A. P. (1957), *Proc. Roy. Soc. (London) A* **242**, 403.
Lamb, W. E., Jr. and Retherford, R. C. (1947), *Phys. Rev.* **72**, 241.
Ledermann, W., (1944), *Proc. Roy. Soc. (London) A* **182**, 362.
Lenstra, D. and Mandel, L. (1982), *Phys. Rev. A* **26**, 3428.
Lemer, E. C. (1968), *Nuovo Cimento B* **56**, 183.
Louisell, W. H. (1963), Phys. Lett. **7**, 60.
Louisell, W. H. (1973), *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Wiley, New York).
Lynch, R. (1986), *J. Opt. Soc. Am. B* **3**, 1006.
Lynch, R. (1987), *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 1723.

Messiah, A. (1961), *Quantum Mechanics*, Vol. 1. (North-Holland, Amsterdam). [Мессиа, А. (1978), *Квантовая механика*, т. 1 (Мир, Москва).]
Milonni, P. W. (1988), *Physica Scripta* **T21**, 102.
Milonni, P. W., Ackerhalt, J. R. and Smith, W. A. (1973), *Phys. Rev. Lett.* **31**, 958.
Newton, T. D. and Wigner, E. P. (1949), *Rev. Mod. Phys.* **21**, 400.
Noh, J. W., Fougères, A. and Mandel, L. (1991), *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1426.
Noh, J. W., Fougères, A. and Mandel, L. (1992a), *Phys. Rev. A* **45**, 424.
Noh, J. W., Fougères, A. and Mandel, L. (1992b), *Phys. Rev. A* **46**, 2840.
Noh, J. W., Fougères, A. and Mandel, L. (1993), *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2579.
Paul, H. (1974), *Forts, d. Physik* **22**, 657.
Pegg, D. T. and Barnett, S. M. (1988), *Europhys. Lett.* **6**, 483.
Pegg, D. T. and Barnett, S. M. (1989), *Phys. Rev. A* **39**, 1665.
Peierls, R. E. (1954), *Proc. Nat. Inst. of Science of India* **20**, 121.
Power, E. A. (1964), *Introductory Quantum Electrodynamics* (Longmans, Green and Co, London).
Sanders, B. C., Barnett, S. M. and Knight, P. L. (1986), *Opt. Commun.* **58**, 290.
Schleich, W., Horowicz, R. J. and Varro, S. (1989), *Phys. Rev. A* **40**, 7405.
Schubert, M. and Vogel, W. (1978), *Phys. Lett.* **68A**, 321.
Schweber, S. S. (1961), *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory* (Harper & Row, New York).
Senitzky, I. R. (1973), *Phys. Rev. Lett.* **31**, 955.
Series, G. W. (1957), *Spectrum of Atomic Hydrogen* (Oxford University Press, London).
Shapiro, J. H., Shepard, S. R. and Wong, N. C. (1989), *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2377.
Simmons, J. W. and Guttmann, M. J. (1970), *States, Waves and Photons*, (Addison-Wesley, Reading, MA).
Stokes, G. G. (1849), *Cambridge & Dublin Math. J.* **4**, 1; Reprinted in *Mathematical and Physical Papers of G. G. Stokes*, Vol. II (Cambridge University Press, Cambridge 1883), pp. 89–103.
Susskind, L. and Glogower, J. (1964), *Physics* **1**, 49.
Turski, L. A. (1972), *Physica* **57**, 432.
Vogel, W. and Schleich, W. (1991), *Phys. Rev. A* **44**, 7642.
Vogel, W. and Welsch, D.-G. (1994), *Lectures on Quantum Optics* (Akademie Verlag, Berlin).
Welton, T. A. (1948), *Phys. Rev.* **74**, 1157.
Zak, J. (1969), *Phys. Rev.* **187**, 1803.

Глава 11

Agarwal, G. S. and Wolf, E. (1968), *Phys. Rev. Lett.* **21**, 180.
Agarwal, G. S. and Wolf, E. (1970a), *Phys. Rev. D* **2**, 2161.
Agarwal, G. S. and Wolf, E. (1970b), *Phys. Rev. D* **2**, 2187.
Agarwal, G. S. and Wolf, E. (1970c), *Phys. Rev. D* **2**, 2206.
Bargmann, V. (1961), *Comm. Pure and Appl. Math.* **14**, 187.
Bargmann, V. (1962), *Proc. Nat. Acad. Science (U.S.)* **48**, 199.
Bremerman, H, (1965), *Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms*, (Addison-Wesley, Reading, MA)
Cahill, K. E. (1965), *Phys. Rev.* **138**, B1566.
Cahill, K. E. and Glauber, R. J. (1969a), *Phys. Rev.* **177**, 1857.
Cahill, K. E. and Glauber, R. J. (1969b), *Phys. Rev.* **177**, 1882.
Glauber, R. J. (1963a), *Phys. Rev.* **130**, 2529.
Glauber, R. J. (1963b), *Phys. Rev.* **131**, 2766.
Glauber, R. J. (1963c), *Phys. Rev. Lett.* **10**, 84.
Glauber, R. J. (1965), in *Quantum Optics and Electronics*, (Les Houches Summer School of Theoretical Physics, University of Grenoble) eds. C. DeWitt, A. Blandin and C. Cohen-Tannoudji (Gordon and Breach, New York), p. 53. [Глаубер, Р. (1966), в кн.: *Квантовая оптика и квантовая радиофизика* (Мир, Москва), с. 91].
Glauber, R. J. (1970), in *Quantum Optics*, eds. S. M. Kay and A. Maitland (Academic Press, New York), p. 70.
Jordan, T. F. (1964), *Phys. Lett.* **11**, 289.

Kibble, T. W. B. (1968), in *Cargèse Lectures in Physics*, Vol. 2, ed. M. Lèvy (Gordon and Breach, New York), p. 299.
Klauder, J. R. (1960), *Ann. of Phys.* **11**, 123.
Klauder, J. R. (1966), *Phys. Rev. Lett.* **16**, 534.
Klauder, J. R., McKenna, J. and Currie, D. G. (1965), *J. Math. Phys.* **6**, 734.
Klauder, J. R. and Sudarshan, E. C. G. (1968), *Fundamentals of Quantum Optics* (Benjamin, New York) [Клаудер, Дж., Сударшан, Э. (1970), *Основы квантовой оптики* (Мир, Москва)].
Lax, M. (1968), *Phys. Rev.* **172**, 350.
Mandel, L. (1965), *Phys. Rev.* **138**, B753.
Mehta, C. L. (1967), *Phys. Rev. Lett.* **18**, 752.
Mehta, C. L. and Sudarshan, E. C. G. (1965), *Phys. Rev.* **138**, B274.
Miller, M. M. and Mishkin, E. A. (1967), *Phys. Rev.* **164**, 1610.
Moyal, J. E. (1949), *Proc. Camb. Phil. Soc.* **45**, 99.
Nussenzveig, H. M. (1972), *Causality and Dispersion Relations* (Academic Press, New York).
Peřina, J. (1985), *Coherence of Light* (Second edition, Reidel, Dordrecht) [Перина, Я. (1974), *Когерентность света* (Мир, Москва)].
Peřina, J. (1991), *Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena*, 2nd edn. (Kluwer, Dordrecht) [Перина, Я. (1987), *Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений* (Мир, Москва)].
Rocca, F, (1966), *Compt. Rend.* **262**, A547.
Schrödinger, E. (1926), *Naturwissenschaften* **14**, 664.
Stoler, D. (1970), *Phys. Rev. D* **1**, 3217.
Stoler, D. (1971), *Phys. Rev. D* **4**, 1925.
Sudarshan, E. C. G. (1963), *Phys. Rev. Lett.* **10**, 277.
Wigner, E. (1932), *Phys. Rev.* **40**, 749.
Wolf, E. (1963), in *Proceedings of Symposium of Optical Masers* (Brooklyn Polytechnic Press, New York, and Wiley, New York), p. 29.
Yuen, H. P. (1976), *Phys. Rev. A* **13**, 2226.
*Килин, С. Я. (1990), *Квантовая оптика: поля и их детектирование* (Наука и техника, Минск).
*Клышко, Д. Н. (1980), *Фотоны и нелинейная оптика* (Наука, Москва).

Глава 12

Acharya, R. and Sudarshan, E. C. G. (1960), *J. Math. Phys.* **1**, 532.
Agarwal, G. S. and Wolf, E. (1970a), *Phys. Rev. D* **2**, 2161.
Agarwal, G. S. and Wolf, E. (1970b), *Phys. Rev. D* **2**, 2187.
Agarwal, G. S. and Wolf, E. (1970c), *Phys. Rev. D* **2**, 2206.
Amrein, W. O. (1969), *Helv. Phys. Acta.* **42**, 149.
Aspect, A., Dalibard, J. and Roger, G. (1982), *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804.
Aspect, A., Grangier, P. and Roger, G. (1981), *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460.
Aspect, A., Grangier, P. and Roger, G. (1982), *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91.
Basov, N. G., Krokhin, O. N. and Popov, Yu. M. (1960), *Usp. Fiz. Nauk.* **72**, 161, [English Translation in *Soviet Phys. Usp.* **3**, 702 (1961)].
Bell, J. S. (1964), *Physics* **1**, 195.
Bell, J. S. (1966), *Rev. Mod. Phys.* **38**, 447.
Bloembergen, N. (1959), *Phys. Rev. Lett.* **2**, 84.
Bloembergen, N. (1965), *Nonlinear Optics* (Benjamin, New York) [Бломберген, Н. (1966), *Нелинейная оптика* (Мир, Москва)].
Bohr, N. (1935), *Phys. Rev.* **48**, 696.
Bohm, D. (1952a), *Phys. Rev.* **85**, 166.
Bohm, D. (1952b), *Phys. Rev.* **85**, 180.
Bohm, D. and Aharanov, Y. (1957), *Phys. Rev.* **108**, 1070.
Born, M. and Wolf, E. (1980), *Principles of Optics*, 6th edn (Pergamon Press, Oxford) [Борн, М., Вольф, Э. (1973), *Основы оптики* (Наука, Москва)].
Boyd, R. W. (1992) *Nonlinear Optics* (Academic Press, Boston).

Bracewell, R. N. (1978), *The Fourier Transform and its Applications*, 2nd edn (McGraw Hill, New York).
Cahill, K. E. and Glauber, R. J. (1969a), *Phys. Rev.* **177**, 1857.
Cahill, K. E. and Glauber, R. J. (1969b), *Phys. Rev.* **177**, 1882.
Campos, R. A., Saleh, B. E. A. and Teich, M. C. (1989), *Phys. Rev. A* **40**, 1371.
Clauser, J. F. (1976), *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1223.
Clauser, J. F. and Home, M. A. (1974), *Phys. Rev. D* **10**, 526.
Clauser, J. F. and Shimony, A. (1978), *Rep. Progr. Phys. (London)* **41**, 1881.
Clauser, J. F., Home, M. A., Shimony, A. and Holt, R. A. (1969), *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880.
Cook, R. J. (1982), *Phys. Rev. A* **25**, 2164.
Cook, R. J. (1984), in *Coherence and Quantum Optics V*, eds. L. Mandel and E. Wolf (Plenum Press, New York) p. 539.
d'Espagnat, B. (1979), *Scientific American* (Nov.) **241**, 158.
Dialetis, D. and Mehta, C. L. (1968), *Nuovo Cimento* **56B**, 89.
Drummond, P. D. and Friberg, A. T. (1983), *J. Appl. Phys.* **54**, 5618.
Eberly, J. H. and Kujawski, A. (1967), *Phys. Lett.* **24A**, 426.
Einstein, A. (1909), *Physik Z.* **10**, 185; English translation in The Collected Papers of Albert Einstein, Vol. 2 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989), p. 357.
Einstein, A., Podolsky, B. and Rosen, N. (1935), *Phys. Rev.* **47**, 777.
Feam, H. and London, R. (1987), *Opt. Commun.* **64**, 485.
Freedman, S. J. and Clauser, J. R. (1972), *Phys. Rev. Lett.* **28**, 938.
Friberg, A. T. and Drummond, P. D. (1983), *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 1216.
Fry, E. S. and Thompson, R. C. (1976), *Phys. Rev. Lett.* **37**, 465.
Ghielmetti, F. (1964), *Phys. Lett.* **12**, 210.
Glauber, R. J. (1963a), *Phys. Rev.* **130**, 2529.
Glauber, R. J. (1963b), *Phys. Rev.* **131**, 2766.
Hegerfeldt, G. C. (1974), *Phys. Rev. D* **10**, 3320.
Hegerfeldt, G. C. and Ruijsenaar, S, N. M. (1980), *Phys. Rev. D* **22**, 377.
Hillery, M. (1985), *Phys. Rev. A* **31**, 338.
Hong, C. K., Ou, Z. Y. and Mandel, L. (1987), *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044.
Jauch, J. M. and Piron, C. (1967), *Helv. Phys. Acta* **40**, 559.
Kano, Y. (1964), *Ann. of Phys.* **30**, 127.
Kano, Y. (1965), *J. Math. Phys.* **6**, 1913.
Kiess, T. E., Shih, Y. H., Sergienko, A. V. and Alley, C. O. (1993), *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3893.
Klauder, R. J. and Sudarshan, E. C. G. (1968), *Fundamentals of Quantum Optics* (Benjamin, New York) [Клаудер, Дж., Сударшан, Э. (1970), *Основы квантовой оптики* (Мир, Москва)].
Lenstra, D. and Mandel, L. (1982), *Phys. Rev. A* **26**, 3428.
Ley, M. and Loudon, R. (1985), *Opt. Commun.* **54**, 317.
Louisell, W. H. (1969), in *Quantum Optics*, Proc. Internal. School of Physics, 'Enrico Fermi', Course XLII, Varenna, ed. R. J. Glauber (Academic Press, New York), p. 680.
Mandel, L. (1966a), *Phys. Rev.* **144**, 1071.
Mandel, L. (1966b), *Phys. Rev.* **152**, 438.
Mandel, L. (1979), *Opt. Lett.* **4**, 205.
Mandel, L. and Mehta, C. L. (1969), *Nuovo Cimento* **61B**, 149.
Mandel, L. and Meltzer, D. (1969), *Phys. Rev.* **188**, 198.
Mandel, L., Sudarshan, E. C. G. and Wolf, E. (1964), *Proc. Phys. Soc. (London)* **84**, 435.
Mehta, C. L. (1966), *Nuovo Cimento* **45**, 280.
Mehta, C. L. (1967), *J. Math. Phys.* **8**, 1798.
Mehta, C. L. and Mandel, L. (1967), in *Electromagnetic Wave Theory*, Part 2, ed. J. Brown (Pergamon Press, Oxford), p. 1069.
Mehta, C. L. and Sudarshan, E. C. G. (1965), *Phys. Rev.* **138**, B274.
Mermin, N. D. (1981), *Am. J. Phys.* **49**, 940.
Mermin, N. D. (1985), *Physics Today* (April) **38**, 38.
Newton, T. D. and Wigner, E. P. (1949), *Rev. Mod. Phys.* **21**, 400.
Nieto-Vesperinas, M. and Wolf, E. (1986), *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 2038.
Ou, Z. Y. and Mandel, L. (1988), *Phys. Rev. Lett.* **61**, 50.
Ou, Z. Y. and Mandel, L. (1989), *Am. J. Phys.* **57**, 66.

Ou, Z. Y., Hong, C. K. and Mandel, L. (1987), Opt. Commun. **63**, 118.
Pike, E. R. and Sarkar, S. (1986), in *Frontiers in Quantum Optics*, eds. E. R. Pike and S. Sarkar (Adam Hilger, Bristol), p. 282.
Reid, M. D. and Walls, D. F. (1986), *Phys. Rev. A* **34**, 1260.
Shen, Y. R. (1984), *The Principles of Nonlinear Optics* (Wiley, New York).
Shih, Y. H. and Alley, C. O. (1988), *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2921.
Short, R. and Mandel, L. (1983), *Phys. Rev. Lett.* **51**, 384.
Simmons, J. W. and Guttmann, M. J. (1970), *States, Waves and Photons* (Addison-Wesley, Reading, MA).
Stokes, G. G. (1849), *Cambridge & Dublin Math. J.* **4**, 1; Reprinted in *Mathematical and Physical Papers of G. G. Stokes*, Vol. II (Cambridge University Press, Cambridge, 1883), pp. 89–103.
Su, C. and Wódkiewicz, K. (1991), *Phys. Rev. A* **44**, 6097.
Sudarshan, E. C. G. (1969), *J. Math. and Phys. Science (Madras, India)* **3**, 121.
Titulaer, U. M. and Glauber, R. J. (1965), *Phys. Rev.* **140**, B676.
Titulaer, U. M. and Glauber, R. J. (1966), *Phys. Rev.* **145**, 1041.
Vašíček, A. (1960), *Optics of Thin Films* (North-Holland, Amsterdam).
Wigner, E. P. (1970), *Am. J. Phys.* **38**, 1005.
Yuen, H. P. and Shapiro, J. H. (1980), *IEEE Trans. Inf. Theory* **IT-26**, 78.
*Ахманов, С. А., Дьяков, Ю. Е. и Чиркин, А. С. (1981), *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (Наука, Москва).
*Белинский, А. В. и Клышко, Д. Н. (1993) *УФН* **163**, 1.

Глава 13

Bourret, R. C. (1960), *Nuovo Cimento* **18**, 347.
Halliday, D. and Resnick, R. (1970), *Fundamentals of Physics.* (Wiley, New York).
Hurwitz, H. (1945), *J. Opt. Soc. Am.* **35**, 525.
Kano, Y. and Wolf, E. (1962), *Proc. Phys. Soc. (London)* **80**, 1273.
Mandel, L. (1959), *Proc. Phys. Soc. (London)* **74**, 233.
Mandel, L. (1963), *Proc. Phys. Soc. (London)* **81**, 1104.
Mandel, L. (1979), *J. Opt. Soc. Am.* **69**, 1038.
Mehta, C. L. and Wolf, E. (1964a), *Phys. Rev.* **134**, A1143.
Mehta, C. L. and Wolf, E. (1964b), *Phys. Rev.* **134**, A1149.
Planck, M. (1901a), *Ann. d. Physik* **4**, 553.
Planck, M. (1901b), *Ann. d. Physik* **4**, 564.
Sarfatt, J. (1963), *Nuovo Cimento* **27**, 1119.
*Клышко, Д. Н. (1980), *Фотоны и нелинейная оптика* (Наука, Москва).

Глава 14

Abate, J. A., Kimble, H. J. and Mandel, L. (1976), *Phys. Rev. A* **14**, 788.
Ackerhalt, J. R. and Milonni, P. W. (1984). *J. Opt. Soc. Am. B* **1**, 116.
Ádám, A., Jánossy, L. and Varga, P. (1955a), *Acta Phys. Acad. Sci. Hungarica* **4**, 301.
Ádám, A., Jánossy, L. and Varga, P. (1955b), *Ann. d. Physik* **16**, 408.
Arecchi, F. T. (1965), *Phys. Rev. Lett.* **15**, 912.
Arecchi, F. T. (1969), in *Quantum Optics*, Proc. Internat. School of Physics 'Enrico Fermi', Course XLII, Varenna, ed. R. J. Glauber (Academic Press, New York), p. 57.
Arecchi, F. T., Gatti, E. and Sona, A. (1966), *Phys. Lett.* **20**, 27.
Bédard, G., Chang, J. C. and Mandel, L. (1967), *Phys. Rev.* **160**, 1496.
Brannen, E. and Ferguson, H. I. S. (1956), *Nature* **178**, 481.
Brannen, E., Ferguson, H. I. S. and Wehlau, W. (1958), *Can J. Phys.* **36**, 871.
Brown, R. Hanbury and Twiss, R. Q. (1956), *Nature*, **177**, 27.
Brown, R. Hanbury and Twiss, R. Q. (1957), *Proc. Roy, Soc. (London) A* **243**, 291.
Bures, J., Delisle, C. and Zardecki, A. (1971), *Can J. Phys.* **49**, 3064.

Bures, J., Delisle, C. and Zardecki, A. (1972), *Can J. Phys.* **50**, 1307.
Carmichael, H. J. and Walls, D. F. (1976a), *J. Phys. B* **9**, L43.
Carmichael, H. J. and Walls, D. F. (1976b), *J. Phys. B* **9**, 1199.
Carter, S. L. and Kelley, H. P. (1979), *Phys. Rev. Lett.* **42**, 966.
Chopra, S. and Mandel, L. (1972), *Rev. Sci. Instrum.* **43**, 1489.
Chopra, S. and Mandel, L. (1973a), in *Coherence and Quantum Optics*, eds. L. Mandel and E. Wolf (Plenum Press, New York), p. 805.
Chopra, S. and Mandel, L. (1973b), *Phys. Rev. Lett.* **30**, 60.
Chu, T. (1974), *Laser Light Scattering* (Academic Press, New York).
Cook, R. J. (1981), *Phys. Rev. A* **23**, 1243.
Corti, M. and Degiorgio, V. (1976), *Phys. Rev. A* **14**, 1475.
Corti, M., Degiorgio, V. and Arecchi, F. T. (1973), *Opt. Commun.* **8**, 329.
Cresser, J. D., Häger, J., Leuchs, G., Rateike, M. and Walther, H. (1982), in *Dissipative Systems in Quantum Optics*, ed. R. Bonifacio (Springer, Berlin), p. 21.
Crosignani, B., DiPorto, P. and Bertolotti, M. (1975), *Statistical Properties of Scattered Light* (Academic Press, New York).
Cummins, H. Z. and Pike, E. R. (1977), *Photon Correlation Spectroscopy and Velocimetry* (Plenum Press, New York).
Cummins, H. Z. and Swinney, H. L. (1970), in *Progress in Optics*, Vol. 8, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam), p. 133.
Dagenais, M. and Mandel, L. (1978), *Phys. Rev. A* **18**, 2217.
Davidson, F. (1969), *Phys. Rev.* **185**, 446.
Davidson, F. and Mandel, L. (1967), *Phys. Rev.* **25A**, 700.
Davidson, F. and Mandel, L. (1968), *J. Appl. Phys.* **39**, 62.
Einstein, A. (1909), *Zeits. f. Physik*, **10**, 185 [English translation in *The Collected Papers of Albert Einstein*, Vol. 2 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989), p. 379].
Fried, Z. (1973), *Phys. Rev. A* **8**, 2835.
Fürth, R. (1928a), *Zeits. f. Physik* **48**, 323.
Fürth, R. (1928b), *Zeits. f. Physik* **50**, 310.
Gamo, H. (1963a), *J. Appl. Phys.* **34**, 875.
Gamo, H. (1963b), in *Electromagnetic Theory and Antennas*, Part 2, ed. E. C. Jordan (Pergamon Press, Oxford), p. 801.
Glauber, R. J. (1963), *Phys. Rev.* **130**, 2529.
Glauber, R. J. (1965), *Quantum Optics and Electronics*, (Les Houches Summer School of Theoretical Physics, University of Grenoble), eds. C. DeWitt, A. Blandin and C. Cohen-Tannoudji (Gordon and Breach, New York), p. 53 [Глаубер, Р. (1966), в кн.: *Квантовая оптика и квантовая радиофизика* (Мир, Москва), с. 91].
Glauber, R. J. (1967), in *Modern Optics*, ed. J. Fox (Brooklyn Polytechnic Press and Interscience, New York), p. 1.
Grangier, P., Roger, G. and Aspect, A. (1986), *Europhys. Lett.* **1**, 173.
Grangier, P., Roger, G., Aspect, A., Heidmann, A. and Reynaud, S. (1986), *Phys. Rev. Lett.* **57**,687.
Haller, K. (1982), *Phys. Rev. A* **26**, 1796.
Healy, W. P. (1980), *Phys. Rev. A* **22**, 2891.
Healy, W. P. (1982), *Phys. Rev. A* **26**, 1798.
Hong, C. K. and Mandel, L. (1986), *Phys. Rev. Lett.* **56**, 58.
Jakeman, E. (1970), *J. Phys. A* **3**, 201.
Jakeman, E. and Pike, E. R. (1969), *J. Phys. A* **2**, 411.
Kelley, P. L. and Kleiner, W. H. (1964), *Phys. Rev.* **136**, A316.
Kimble, H. J. and Mandel, L. (1976), *Phys. Rev. A* **13**, 2123.
Kimble, H. J. and Mandel, L. (1984), *Phys. Rev. A* **30**, 844.
Kimble, H. J., Dagenais, M. and Mandel, L. (1977), *Phys. Rev. Lett.* **39**, 691.
Kobe, D. H. (1978), *Phys. Rev. Lett.* **40**, 538.
Kobe, D. H. (1979), *Phys. Rev. A* **19**, 205.
Lamb, W. E., Jr. (1952), *Phys. Rev.* **85**, 259.
Lenstra, D. (1982), *Phys. Rev. A* **26**, 3369.
Machida, S. and Yamamoto, Y. (1986), *Opt. Commun.* **57**, 290.

Mandel, L. (1958), *Proc. Phys. Soc. (London)*, **72**, 1037.
Mandel, L. (1959), *Proc. Phys. Soc. (London)*, **74**, 233.
Mandel, L. (1963a), in *Progress in Optics*, Vol. 2, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam), p. 181.
Mandel, L. (1963b), *Proc. Phys. Soc. (London)*, **81**, 1104.
Mandel, L. (1967), in *Modern Optics*, ed. J. Fox (Brooklyn Polytechnic Press and Interscience, New York), p. 143.
Mandel, L. (1979), *Phys. Rev. A* **20**, 1590.
Mandel, L. (1981), *Opt. Acta* **28**, 1447.
Mandel, L. and Meltzer, D. (1969), *Phys. Rev.* **188**, 198.
Mandel, L., Sudarshan, E. C. G. and Wolf, E. (1964), *Proc. Phys. Soc. (London)*, **84**, 435.
Mandel, L. and Wolf, E. (1965), *Rev. Mod. Phys.* **37**, 231.
Mehta, C. L. (1970), in *Progress in Optics*, Vol. 8, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam), p. 373.
Meltzer, D. and Mandel, L. (1970), *IEEE J. Quant. Electron.* **QE-6**, 661.
Milonni, P. W., Cook, R. J. and Ackerhalt, J. R. (1989), *Phys. Rev. A* **40**, 3764.
Mollow, T. R. (1968), *Phys. Rev.* **168**, 1896.
Morgan, T. L. and Mandel, L. (1966), *Phys. Rev. Lett.* **16**, 1012.
Peřina, J. (1970), in *Quantum Optics*, eds. S. M. Kay and A. Maitland (Academic Press, New York), p. 513.
Phillips, D. T., Kleiman, H. and Davis, S. P. (1967), *Phys. Rev.* **153**, 113.
Pike, E. R. (1986) in *Coherence, Cooperation and Fluctuations*, eds. F. Haake, L. M. Narducci and D. F. Walls (Cambridge University Press, Cambridge), p. 293.
Power, E. A. and Thirunamachandran, T. (1980), *Phys. Rev. A* **22**, 2894.
Power, E. A. and Thirunamachandran, T. (1982), *Phys. Rev. A* **26**, 1800.
Power, E. A. and Zienau, S. (1959), *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **251**, 427.
Purcell, E. M. (1956), *Nature*, **178**, 1449.
Rarity, J. G., Tapster, P. R. and Jakeman, E. (1987), *Opt. Commun.* **62**, 201.
Rebka, G. A. and Pound, R. V. (1957), *Nature* **180**, 1035.
Saleh, T. (1978), *Photoelectron Statistics*, (Springer, Berlin).
Saleh, B. E. A. and Teich, M. C. (1985), *Opt. Commun.* **52**, 429.
Scarl, D. B. (1966), *Phys. Rev. Lett.* **17**, 663.
Singh, S. (1983), *Opt. Commun.* **44**, 254.
Short, R. and Mandel, L. (1983), *Phys. Rev. Lett.* **51**, 384.
Short, R. and Mandel, L. (1984), in *Coherence and Quantum Optics V*, eds. L. Mandel, and E. Wolf (Plenum Press, New York), p. 671.
Srinivas, M. D. and Davis, E. B. (1981), *Opt. Acta* **28**, 981.
Swinney, H. L. (1983), *Physica D* **7**, 3.
Teich, M. C. and Saleh, B. E. A. (1985), *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 275.
Teich, M. C. and Saleh, B. E. A. (1988), in *Progress in Optics*, Vol. 26, ed. E. Wolf, (North-Holland, Amsterdam), p. 1.
Teich, M. C., Saleh, B. E. A. and Peřina, J. (1984), *J. Opt. Soc. Am. B* **1**, 366.
Twiss, R. Q., Little, A. G. and Brown, R. Hanbury (1957), *Nature* **180**, 324.
Walker, J. G. and Jakeman, E. (1985), *Opt. Acta* **32**, 1303.
Wolf, E. and Mehta, C. L. (1964), *Phys. Rev. Lett.* **13**, 705.
Woolley, R. G. (1971), *Mol. Phys.* **22**, 1013.
Yurke, B. (1985), *Phys. Rev. A* **32**, 311.
Zardecki, A. and Delisle, C. (1973), *Can J. Phys.* **51**, 1017.
*Килин, С. Я. (1990), *Квантовая оптика: поля и их детектирование* (Наука и техника, Минск).

Глава 15

Abate, J. A. (1974), *Opt. Commun.* **10**, 269.
Ackerhalt, J. R., Knight, P. L. and Eberly, J. H. (1973), *Phys. Rev. Lett.* **30**, 456.
Agarwal, G. S. (1976), *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1383.
Agarwal, G. S. (1977), *Phys. Rev. A* **15**, 814.
Agarwal, G. S. and Saxena, R. (1978), *Opt. Commun.* **26**, 202.

Allen, L. and Eberly, J. H. (1975), *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (Wiley, New York) [Аллен, Л., Эберли, Дж. (1978), *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (Мир, Москва)].
Arimondo, E., Lew, H. and Oka, T. (1979), *Phys. Rev. Lett.* **43**, 753.
Arimondo, E., Phillips, W. D. and Strumia, F. (1992) eds. *Laser Manipulation of Atoms and Ions*; Proc. Internal. School of Physics 'Enrico Fermi', Course CXVIII, Varenna (North-Holland, Amsterdam).
Ashkin, A. (1978), *Phys. Rev. Lett.* **40**, 729.
Ashkin, A. and Gordon, J. P. (1979), *Opt. Lett.* **4**, 161.
Aspect, A., Dalibard, J., Heidmann, A., Salomon, C. and Cohen-Tannoudji, C. (1986), *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1688.
Baklanov, E. V. and Dubetskii, B. Ya. (1976), *Opt. Spectrosk.* **41**, 3 [English Translation in *Opt. and Spectroscopy* **41**, 1 (1976)].
Balykin, V. 1., Letokhov, V. S. and Mushin, V. 1. (1979), *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **29**, 614 [English translation in *JETP Lett.* **29**, 560 (1979)].
Bethe, H. A. (1947), *Phys. Rev.* **72**, 339.
Bigelow, N. P. and Prentiss, M. G. (1990). *Phys. Rev. Lett.* **65**, 29.
Bjorkholm, J. E., Freemen, R. R., Ashkin, A. and Pearson, D. B. (1978), *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1361.
Bjorkholm, J. E., Freemen, R. R., Ashkin, A. and Pearson, D. B. (1980), *Opt. Lett.* **5**, 111.
Bloch, F. (1946), *Phys. Rev.* **70**, 460.
Born, M. and Wolf, E. (1980), *Principles of Optics*, 6th edn. (Pergamon Press, London) [Борн, М., Вольф, Э. (1973), *Основы оптики* (Наука, Москва)].
Boyer, T. H. (1969a), *Phys. Rev.* **180**, 19.
Boyer, T. H. (1969b), *Phys. Rev.* **182**, 1374.
Boyer, T. H. (1970a), *Phys. Rev. D* **1**, 1526.
Boyer, T. H. (1970b), *Phys. Rev. D* **1**, 2257.
Boyer, T. H. (1973), *Phys. Rev. A* **7**, 1832.
Boyer, T. H. (1974), *Phys. Rev. A* **9**, 2078.
Carmichael, H. J. and Walls, D. F. (1976a), *J. Phys. B* **9**, L43.
Carmichael, H. J. and Walls, D. F. (1976b), *J. Phys. B* **9**, 1199.
Chu, S., Bjorkholm, J. E., Ashkin, A. and Cable, A. (1986), *Phys. Rev. Lett.* **57**, 314.
Chu, S., Hollberg, L., Bjorkholm, J., Cable, A. and Ashkin, A. (1985), *Phys. Rev. Lett.* **55**, 48.
Chu, S., Prentiss, M. G., Cable, A. E. and Bjorkholm, J. E. (1987), in *Laser Spectroscopy*, Vol. 8, eds. W. Persson and S. Svanberg (Springer, Berlin).
Cohen-Tannoudji, C. (1992), in *Fundamental Systems in Quantum Optics*, eds. J.-M. Dalibard, J.-M. Raimond, and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam), Course 1.
Cohen-Tannoudji, C. and Phillips, W. D. (October, 1990), *Physics Today* **43**, October, 33.
Cook, R. J. (1978), *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1788.
Cook, R. J. (1979), *Phys. Rev. A* **20**, 224.
Cook, R. J. (1980a), *Phys. Rev. Lett.* **44**, 976.
Cook, R. J. (1980b), *Phys. Rev. Lett.* **22**, 1078.
Cook, R. J. and Bernhardt, A. F. (1978), *Phys. Rev. A* **18**, 2533.
Crisp, M. D. and Jaynes, E. T. (1969), *Phys. Rev.* **179**, 1253.
Dagenais, M. and Mandel, L. (1978), *Phys. Rev. A* **18**, 2217.
Dalibard, J. and Cohen-Tannoudji, C. (1985), *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1707.
Dalibard, J. and Cohen-Tannoudji, C. (1989), *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2023.
Dalibard, J., Raimond, J. M, and Zinn-Justin, J. (1992), eds. *Fundamental Systems in Quantum Optics* (North-Holland, Amsterdam).
Dicke, R. H. (1954), *Phys. Rev.* **93**, 99.
Eberly, J. H. (1976), *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1387.
Feynman, R. P., Vernon, F. L., Jr., and Hellwarth, R. W. (1957), *J. Appl. Phys.* **28**, 49.
Freedman, S. J. and Clauser, J. F. (1972), *Phys. Rev. Lett.* **28**, 938.
Frisch, R. (1933), *Zeits. f. Physik* **86**, 42.
Gibbs, H. M. (1972), *Phys. Rev. Lett.* **29**, 459.
Gibbs, H. M. (1973), *Phys. Rev. A* **8**, 456.
Gibbs, H. M. and Venkatesan, T. N. C. (1976), *Opt. Commun.* **17**, 87.
Gordon, J. P. and Ashkin, A. (1980), *Phys. Rev. A* **21**, 1606.
Grischkowsky, D. (1970), *Phys. Rev. Lett.* **24**, 866.

Grischkowsky, D., Courtens, E. and Armstrong, J. A. (1973), *Phys. Rev. Lett.* **31**, 422.
Hartig, W., Rasmussen, W., Schieder, R. and Walther, H. (1976), *Zeits. f. Physik A* **278**, 205.
Hänsch, T. W. and Schawlow, A. L. (1975), *Opt. Commun.* **13**, 68.
Jaynes, E. T. (1973) in *Coherence and Quantum Optics*, eds. L. Mandel and E. Wolf. (Plenum Press, New York), p. 35.
Jaynes, E. T. and Cummings, F. W. (1963), *Proc. IEEE* **51**, 89.
Kazantsev, A. P. (1976), *Opt. Commun.* **17**, 166.
Kazantsev, A. P. (1978), *Usp. Fiz. Nauk* **124**, 113 [English Translation in *Sov. Phys. Usp.* **21**, 58 (1978)].
Kazantsev, A. P., Ryabenko, G. A., Surdutovich, G. I. and Yakovlev, V. P. (1985), *Phys. Rep.* **129**, 76.
Kimble, H. J. and Mandel, L. (1976), *Phys. Rev. A* **13**, 2123.
Kimble, H. J. and Mandel, L. (1977), *Phys. Rev. A* **15**, 689.
Kimble, H. J., Dagenais, M. and Mandel, L. (1977), *Phys. Rev. Lett.* **39**, 691.
Kimble, H. J., Dagenais, M. and Mandel, L. (1978), *Phys. Rev. A* **18**, 201.
Lam, J. F. and Berman, P. R. (1976), *Phys. Rev. A* **14**, 1683.
Lamb, W. E., Jr., and Retherford, R. C. (1947), *Phys. Rev.* **72**, 241.
Letokhov, V. S. (1968), *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **7**, 348 [English Translation in *JETP Letters* **7**, 272 (1968)].
Letokhov, V. S. and Minogin, V. G. (1979), *J. Opt. Soc. Am.* **69**, 413.
Letokhov, V. S. and Pavlik, B. D. (1976), *Appl. Phys.* **9**, 229.
Letokhov, V. S., Minogin, V. G. and Pavlik, B. D. (1976), *Opt. Commun.* **19**, 72.
Letokhov, V. S., Minogin, V. G. and Pavlik, B. D. (1977), *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **72**, 1328 [English Translation in *Sov. Phys. JETP* **45**, 698 (1977)].
Lett, P. D., Phillips, W. D., Rolston, S. L., Tanner, C. E., Watts, R. N. and Westbrook, C. I. (1989), *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2084.
Lett, P. D., Watts, R. N., Westbrook, C. I., Phillips, W. D., Gould, P. L. and Metcalf, H.J. (1988), *Phys. Rev. Lett.* **61**, 169.
Loy, M. M. T. (1974), *Phys. Rev. Lett.* **32**, 814.
Mandel, L. (1979a). *Opt. Lett.* **4**, 205.
Mandel, L. (1979b), *J. Optics (Paris)* **10**, 51.
Marshall, T. W. (1963), *Proc. Roy. Soc. (London) A* **276**, 475.
Marshall, T. W. (1965), *Nuovo Cimento* **38**, 206.
Martin, P. J., Gould, P. L., Oldaker, B. G., Mikiich, A. H. and Pritchard, D. E. (1987), *Phys. Rev. A* **36**, 2495.
McCall, S. L. and Hahn, E. L. (1967), *Phys. Rev. Lett.* **18**, 908.
McCall, S. L. and Hahn, E. L. (1969), *Phys. Rev.* **183**, 457.
Milonni, P. W. (1974), *Theoretical Aspects of Spontaneous Emission from Atoms*, Ph.D. Thesis (University of Rochester, Rochester, NY).
Mollow, B. R. (1969), *Phys. Rev.* **188**, 1969.
Mollow, B. R. (1975), *J. Phys. A* **8**, L130.
Phillips, W. D. and Metcalf, H. (1982), *Phys. Rev. Lett.* **48**, 596.
Phillips, W. D., Gould, P. L. and Lett, P. D. (1988), *Science* **239**, 877.
Phillips, W. D., Prodan, J. V. and Metoalf, H. J. (1985), *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1751.
Picqué, J.-L. and Vialle, J.-L. (1972), *Opt. Commun.* **5**, 402.
Prentiss, M. and Cable, A. (1989), *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1354.
Prodan, J. V., Phillips, W. D. and Metcalf, H. (1982), *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1149.
Raab, E. L., Prentiss, M., Cable, A., Chu, S. and Pritchard, D. E. (1987), *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2631.
Rabi, I. I. (1937), *Phys. Rev.* **51**, 652.
Renaud, T., Whitley, R. M. and Stroud, C. R., Jr., (1976), *J. Phys. B* **9**, L19.
Salomon, C., Dalibard, J., Aspect, A., Metcalf, H. and Cohen-Tannoudji, C. (1987), *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1659.
Schieder, R., Walther, H. and Wöste, L. (1972), *Opt. Commun.* **5**, 337.
Schuda, F., Hercher, M. and Stroud, C. R., Jr. (1973), *Appl. Phys. Lett.* **22**, 360.
Schuda, F., Stroud, C. R., Jr., and Hercher, M. (1974), *J. Phys. B* **7**, L198.
Short, R. and Mandel, L. (1983a), *Phys. Rev. Lett.* **51**, 384.
Short, R. and Mandel, L. (1983b), in *Coherence and Quantum Optics V*, eds. L. Mandel and E. Wolf. (Plenum Press, New York), p. 671.

Stenholm, S. (1978), *Appl. Phys.* **15**, 287.
Stroud, C. R., Jr. and Jaynes, E. T. (1970), *Phys. Rev. A* **1**, 106.
Tarn, A. C. and Happer, W. (1977), *Phys. Rev. Lett.* **38**, 278.
Teich, M. C. and Saleh, B. E. A. (1988), in *Progress in Optics*, Vol. 26, ed. E. Wolf. (North-Holland, Amsterdam), p. 1.
Teich, M. C. and Saleh, B. E. A. (June, 1990), *Physics Today* **43**, 26.
Torrey, H. C. (1949), *Phys. Rev.* **76**, 1059.
Treacy, E. B. and DeMaria, A. J, (1969), *Phys. Lett.* **29A**, 369.
Ungar, P. J., Weiss, D. S., Riis, E. and Chu, S. (1989), *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2058.
Walther, H. (1977), *Phys. Bl.* **33**, 653.
Weiss, D. S., Riis, E., Shevy, Y., Ungar, P. J. and Chu, S. (1989), *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2072.
Wessner, J. M., Anderson, D. K. and Robiscoe, R. T. (1972), *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1126.
Westbrook, T. I., Watts, R. N., Tanner, C. E., Rolston, S. L., Phillips, W. D., Lett, P. D. and Gould P. L. (1990), *Phys. Rev. Lett.* **65**, 33.
Wineland, D. and Dehmelt, H. (1975), *Bull. Am. Phys. Soc.* **20**, 637.
Wódkiewicz, K. and Eberly, J. H. (1976), *Ann. Phys.* **101**, 574.
Wu, F. Y., Grove, R. E. and Ezekiel, S. (1975), *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1426.
*Альперин, М. М., Клубис, Я. Д. и Хижняк, А. И. (1987), *Введение в физику двухуровевых систем* (Наукова Думка, Киев).
*Андрианов, С. Н. и Самарцев, В. В., (1998) *Оптическое сверхизлучение и лазерное охлаждение в твердых телах* (изд. Казанского госуниверситета, Казань).
*Epstein, R. I., Buchwald, M. I., Edwards, B. C., Gosnell, T. R. and Mungan, C. E. (1995), *Nature* **377**, 500.
*Макомбер, Дж. (1979), *Динамика спектроскопических переходов* (Мир, Москва).
*Набойкин, Ю. В., Самарцев, В. В., Зиновьев, П. В. и Силаева, Н. Б. (1986) *Когерентная спектроскопия молекулярных кристаллов* (Наукова Думка, Киев).
*Файн, В. М. и Ханин, Я. И. (1965), *Квантовая радиофизика* (Сов. радио, Москва).

Глава 16

Abella, I. D., Kurnit, N. A. and Hartmann, S. R. (1966), *Phys. Rev.* **141**, 391.
Agarwal, G. S. (1971), *Phys. Rev. A* **4**, 1791.
Agarwal, G. S., Brown, A. C., Narducci, L. M. and Vetri, G. (1977), *Phys. Rev. A* **15**, 1613.
Arecchi, F. T. and Courtens, E. (1970), *Phys. Rev. A* **2**, 1730.
Arecchi, F. T., Courtens, E., Gilmore, R. and Thomas, H. (1972), *Phys. Rev. A* **6**, 2211.
Asher, I. M. and Scully, M. O. (1971), *Opt. Commun.* **3**, 395.
Bonifacio, R. and Lugiato, L. A. (1975a), *Phys. Rev. A* **11**, 1507.
Bonifacio, R. and Lugiato, L. A. (1975b), *Phys. Rev. A* **12**, 587.
Bonifacio, R. and Lugiato, L. A. (1978a), *Phys. Rev. Lett.* **40**, 1023.
Bonifacio, R. and Lugiato, L. A. (1978b), *Lett. Nuovo Cimento* **21**, 505.
Bonifacio, R. and Lugiato, L. A. (1978c), *Lett. Nuovo Cimento* **21**, 510.
Bonifacio, R., Gronchi, M. and Lugiato, L. A. (1978), *Phys. Rev. A* **18**, 2266.
Bonifacio, R., Schwendimann, P. and Haake, F. (1971a), *Phys. Rev. A* **4**, 302.
Bonifacio, R., Schwendimann, P. and Haake, F. (1971b), *Phys. Rev. A* **4**, 854.
Born, M. and Wolf, E. (1980), *Principles of Optics*, 6th edn. (Pergamon Press, Oxford) [Борн, М., Вольф, Э. (1973), *Основы оптики* (Наука, Москва)].
Bowden, C. M. and Sung, C. C. (1979), *Phys. Rev. A* **19**, 2392.
Brewer, R. G. and Shoemaker, R. L. (1972), *Phys. Rev. A* **6**, 2001.
Dicke, R. H. (1954), *Phys. Rev.* **93**, 99.
Drexhage, K. H. (1970), *J. Luminescence* **1**, 693.
Eberly, J. H. (1971), *Lett. Nuovo Cimento* **1**, 182.
Flusberg, A., Mossberg, T. and Hartmann, S. R. (1976), *Phys. Lett.* **58A**, 373.
Friedberg, R. and Hartmann, S. R. (1974), *Phys. Rev. A* **10**, 1728.
Gibbs, H. M., McCall, S. L. and Venkatesan, T. N. C. (1976), *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1135.
Gibbs, H. M., McCall, S. L. and Venkatesan, T. N. C. (1978), in *Coherence Spectroscopy and Modern Physics*, ed. F. T. Arecchi, R. Bonifacio, and M. O. Scully (Plenum Press, New York), p. 111.

Gibbs, H. M., Vrehen, Q. H. F. and Hikspoors, H. M. J. (1977), *Phys. Rev. Lett.* **39**, 547.
Gibbs, H. M., Hopf, F. A., Kaplan, D. L. and Shoemaker, R. L. (1981), *Phys. Rev. Lett.* **46**, 474.
Gross, M., Fabre, C., Pillet, P. and Haroche, S. (1976), *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1035.
Haake, F., Haus, J., King, H., Schröder, G. and Glauber, R. J. (1980), *Phys. Rev. Lett.* **45**, 558.
Haake, F., King, H., Schröder, G., Haus, J. and Glauber, R. J. (1979), *Phys. Rev. A* **20**, 2047.
Hahn, E. L. (1950a), *Phys. Rev.* **77**, 297.
Hahn, E. L. (1950b), *Phys. Rev.* **80**, 580.
Heitler, W. (1954), *The Quantum Theory of Radiation*, 3rd edn. (Oxford University Press, London) [Гайтлер, В. (1956), *Квантовая теория излучения* (Иностранная Литература, Москва)].
Ikeda, K. (1979), *Opt. Commun.* **30**, 257.
Ikeda, K., Daido, H. and Akimoto, O. (1980), *Phys. Rev. Lett.* **45**, 709.
Jodoin, R. and Mandel, L. (1974a) *Phys. Rev. A* **9**, 873.
Jodoin, R. and Mandel, L. (1974b) *Phys. Rev. A* **10**, 1898.
Kurnit, N. A., Abella, I. D. and Hartmann, S. R. (1964), *Phys. Rev. Lett.* **13**, 567.
Lama, W. L., Jodoin, R. and Mandel, L. (1972), *Am. J. Phys.* **40**, 32.
Lamb, W. E., Jr. (1964), *Phys. Rev.* **134**, A1429.
McCall, S. L. (1974), *Phys. Rev. A* **9**, 1515.
McCall, S. L. and Hahn, E. L. (1967), *Phys. Rev. Lett.* **18**, 908.
McCall, S. L. and Hahn, E. L. (1969), *Phys. Rev.* **183**, 457.
Nakatsuka, H., Asaka, S., Itoh, H., Ikeda, K. and Matsuoka, M. (1983), *Phys. Rev. Lett.* **50**, 109.
Narducci, L. M., Gilmore, R., Da Hsuan Feng and Agarwal, G. S. (1978), *Opt. Lett.* **2**, 88.
Orozco, L. A., Kimble, H. J. and Rosenberger, A. T. (1987), *Opt. Commun.* **62**, 54.
Polder, D., Schuurmans, M. F. H. and Vrehen, Q. H. F. (1979), *Phys. Rev. A* **19**, 1192.
Radcliffe, J. M. (1971), *J. Phys. A* **4**, 313.
Raimond, J. M., Goy, P., Gross, M., Fabre, C. and Haroche, S. (1982), *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1924.
Rehler, N. E. and Eberly, J. H. (1971), *Phys. Rev. A* **3**, 1735.
Ressayre, E. and Tallet, A. (1973), *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1239.
Skribanowitz, N., Herman, I. P., MacGillivray, J. C. and Feld, M. S. (1973), *Phys. Rev. Lett.* **30**, 309.
Slusher, R. E. (1974), in *Progress in Optics*, Vol. 12, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam), p. 53.
Slusher, R. E. and Gibbs, H. M. (1972), *Phys. Rev. A* **5**, 1634.
Stroud, Jr., C. R., Eberly, J. H., Lama, W. L. and Mandel, L. (1972), *Phys. Rev. A* **5**, 1094.
Szöke, A., Daneu, V., Goldhar, J. and Kurnit, N. A. (1969), *Appl. Phys. Lett.* **15**, 376.
Walls, D. F., Dnimmond, P. D., Hassan, S. S. and Carmichael, H. J. (1978), *Progr. Theor. Phys. (Japan) Suppl.* **64**, 307.
*Андреев, А. В., Емельянов, В. И. и Ильинский, Ю. А. (1988), *Кооперативные явления в оптике* (Наука, Москва).
*Андреев, А. В., Емельянов, В. И. и Ильинский, Ю. А. (1980), *УФН* **134**, 653.
*Ахмедиев, Н. Н. и Самарцев, В. В. (1990), в кн. *Новые физические принципы оптической обработки информации* под ред. Ахманова, С. А. и Воронцова, М. А. (Наука, Москва), 326.
*Benedict, M. G., Ermolaev, A. M., Malyshev, V. A., Sokolov, I. V. and Trifonov, E. D. (1996), *Super-radiance: multiatomic coherent emission* (Institute of Physics Publishing, London, UK).
*Гиббс, Х. (1988), *Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света* (Мир, Москва).
*Голенищев-Кутузов, В. А., Самарцев, В. В. и Хабибуллин, Б. М. (1988), *Импульсная оптическая и акустическая когерентная спектроскопия* (Наука, Москва).
*Евсеев, И. В., Ермаченко, В. М. и Самарцев, В. В. (1992), *Деполяризационные столкоковения в нелинейной электродинамике* (Наука, Москва).
*Калачев, А. А. и Самарцев, В. В. (1998), *Фотонное эхо и его применение* (изд. Казанского госуниверситета, Казань).
*Копвиллем, У. Х. и Нагибаров, В. Р. (1963), *Физика металлов и металловедение* **15**, 313.
*Маныкин, Э. А. и Самарцев, В. В. (1984), *Оптическая эхоспектроскопия* (Наука, Москва).
*Моисеев, С. А. (1987), *Оптика и спектроскопия* **62**, 302.
*Полуэктов, И. А., Попов, Ю. М. и Ройтбег, В. С. (1974), *Квантовая электроника* **1**, 757.
*Розанов, Н. Н. (1997), *Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах* (Наука, Москва).
*Chen, Y. C., Chiang, K. P. and Hartmann, S. R. (1979), *Optics Communications* **29**, 181.
*Шустер, Г. (1988), *Детерминированный хаос* (Мир, Москва).

Глава 17

Agarwal, G. S. (1973), in *Progress in Optics*, Vol. II, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam), p. 3.

Agarwal, G. S. (1974), *Quantum Statistical Theories of Spontaneous Emission and their Relation to other Approaches. Springer Tracts in Modern Physics*, Vol. 70 (Springer, Berlin).

Agarwal, G. S., Brown, A. C., Narducci, L. M. and Vetri, G. (1977), *Phys. Rev. A* **15**, 1613.

Agarwal, G. S., Feng, D. H., Narducci, L. M., Gilmore, R. and Tuft, R. A. (1979), *Phys. Rev. A* **20**, 2040.

Bonifacio, R., Schwendimann, P. and Haake, F. (1971), *Phys. Rev. A* **4**, 302.

Callen, H. B. and Welton, T. A. (1951), *Phys. Rev.* **83**, 34.

Carmichael, H. J. and Walls, D. F. (1977), *J. Phys. B* **10**, L685.

Einstein, A. (1905), *Ann. Phys. (Leipz)*, **17**, 549 [English Translation in *The Collected Papers of Albert Einstein*, Vol. 2 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989) p. 123].

Haken, H. (1970), *Laser Theory* in *Handbuch der Physik*, ed. S. Flügge; Vol. XXV/2c (Springer, Berlin).

Kimble, H. J. and Mandel, L. (1976), *Phys. Rev. A* **13**, 2123.

Klauder, J. R. (1966), *Phys. Rev. Lett.* **16**, 534.

Klauder, J. R. and Sudarshan, E. C. G. (1968), *Fundamentals of Quantum Optics* (Benjamin, New York) [Клаудер, Дж., Сударшан, Э. (1970), *Основы квантовой оптики* (Мир, Москва)].

Kubo, R. (1966), *Rep. Progr. in Phys.* **29**, (pt. 1), 255.

Lax, M. (1963), *Phys. Rev.* **129**, 2342.

Lax, M. (1966), *Phys. Rev.* **145**, 110.

Lax, M. (1967), *Phys. Rev.* **157**, 213.

Louisell, W. H. (1969), in *Quantum Optics*, Proc. Internat. School of Physics 'Enrico Fermi', course XLII, Varenna, ed. R. J. Glauber (Academic Press, New York), p. 680.

Louisell, W. H. (1973), *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Wiley, New York).

Montroll, E. W. (1961), in *Lectures in Theoretical Physics*, Vol. 3, eds. W. E. Brittin, D.W. Downs and J. Downs (Interscience, New York) p. 221.

Narducci, L. M., Gilmore, R., Feng, D. H. and Agarwal, G. S. (1978), *Opt. Lett.* **2**, 88.

Nyquist, H. (1928), *Phys. Rev.* **32**, 110.

Oppenheim, I., Shuler, K. E. and Weiss, G. H. (1977), *Stochastic Processes in Chemical Physics: The Master Equation* (MIT Press, Cambridge, MA).

Pauli, W. (1928), in *Probleme der Modernen Physik, Arnold Sommerfeld zum 60. Geburtstage gewidmet van seinen Schülern* ed. P. Debye, (Hirzel Verlag, Leipzig) Vol. 1. Reprinted in *Collected Scientific Papers by Wolfgang Pauli* (1964), eds. R. Kronig and V. F. Weisskopf, (Interscience, New York) p. 549.

Prigogine, I. (1962), *Non-Equilibrium Statistical Mechanics*, (Interscience, New York).

Senitzky, I. R. (1960), *Phys. Rev.* **119**, 670.

Senitzky, I. R. (1961), *Phys. Rev.* **124**, 642.

Srinivas, M. D. and Wolf, E. (1977) in *Statistical Mechanics and Statistical Methods in Theory and Application*, ed. U. Landman, (Plenum Press, New York), p. 219.

Sudarshan, E. C. G. (1963), *Phys. Rev. Lett.* **10**, 277.

Van Hove, L. (1955), *Physica* **21**, 517.

Van Hove, L. (1957), *Physica* **23**, 441.

Van Hove, L. (1962), in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, ed. E. G. D.Cohen (North-Holland, Amsterdam) p. 157.

Walls, D. F. and Milburn, G. J. (1985), *Phys. Rev. A* **31**, 2403.

Weidlich, W. and Haake, F. (1965a), *Zeits. f. Physik* **185**, 30.

Weidlich, W. and Haake, F. (1965b), *Zeits. f. Physik* **186**, 203.

Zwanzig, R. (1961), in *Lectures in Theoretical Physics*, Vol. 3, eds. W. E. Brittin, B. W. Downs and J. Downs (Interscience, New York) p. 106.

Глава 18

Ackerhalt, J. R., Milonni, P. W. and Shih, M. L. (1985), *Physics Reports*, **128**, 205.

Agarwal, G. S., Ravi, S. and Cooper, J. (1990), *Phys. Rev. A* **41**, 4721.

Albano, A. M., Abounadi, J., Chyba, T. H., Searle, C. E., Yong, S., Gioggia, R. S. and Abraham, N. B. (1985), *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 47.

Arecchi, F. T. and Degiorgio, V. (1971), *Phys. Rev. A* **3**, 1108.
Arecchi, F. T., Berné, A. and Burlamacchi, P. (1966), *Phys. Rev. Lett.* **16**, 32.
Arecchi, F. T., Degiorgio, V. and Querzola, B. (1967), *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1168.
Arecchi, F. T., Rodari, G. S. and Sona, A. (1967), *Phys. Lett.* **25A**, 59.
Basov, N. G., and Prokhorov, A. M. (1954), *Zh. Exsp. Teor. Fiz. USSR* **27**, 431.
Basov, N. G., and Prokhorov, A. M. (1955), *Zh. Exsp. Teor. Fiz. USSR* **28**, 249. [English translation in *Sov. Phys. JETP* **1**, 184 (1955)].
Ben-Mizrachi, A., Procaccia, I. and Grassberger, P. (1984), *Phys. Rev. A* **29**, 975.
Bentley, J. and Abraham, N. B. (1982), *Opt. Commun*, **41**, 52.
Boyd, G. D. and Gordon, J. P., (1961), *Bell Syst. Tech. J.* **40**, 489.
Buley, E. R. and Cummings, F. W. (1964), *Phys. Rev.* **134A**, 1454.
Cantrell, C. D. and Smith, W. A. (1971), *Phys. Lett.* **37A**, 167.
Cantrell, C. D., Lax, M. and Smith, W. A. (1973a), in *Coherence and Quantum Optics*, eds. L. Mandel and E. Wolf (Plenum Press, New York), p. 785.
Cantrell, T. D., Lax, M. and Smith, W. A. (1973b), *Phys. Rev. A* **7**, 175.
Casperson, L. W. (1978), *IEEE J. Quant. Electron.* **QE-14**, 756.
Casperson, L. W. (1983), in *Laser Physics*, eds. D. J. Harvey and D. F. Walls (Springer-Verlag, Berlin) p. 88.
Chang, R. F., Korenman, V., Alley, C. O. and Detenbeck, R. W. (1969), *Phys. Rev.* **178**, 612.
Chopra, S. and Mandel, L. (1972), *IEEE J. Quant. Electron.* **QE-8**, 324.
Chopra, S. and Mandel, L. (1973a) in *Coherence and Quantum Optics*, eds. L. Mandel and E. Wolf (Plenum Press, New York), p. 805.
Chopra, S. and Mandel, L. (1973b), *Phys. Rev. Lett.* **30**, 60.
Chyba, T. H. (1990), *Stochastic and Chaotic Effects in the Ring Laser*, Ph.D. Thesis, (University of Rochester, Rochester, NY), p. 69.
Chyba, T. H., Christian, W. R., Gage, E., Lett, P. and Mandel, L. (1986), in *Optical Instabilities*, eds. R. W. Boyd, M. G. Raymer and L. M. Narducci, (Cambridge University Press, Cambridge) p. 253.
Corti, M. and Degiorgio, V, (1974), *Opt. Commun.* **11**, 1.
Corti, M. and Degiorgio, V. (1976a), *Phys. Rev. A* **14**, 1475.
Corti, M. and Degiorgio, V. (1976b), *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1173.
Corti, M., Degiorgio, V. and Arecchi, F. T. (1973), *Opt. Commun.* **8**, 329.
Davidson, F. (1969), *Phys. Rev.* **185**, 446.
Davidson, F. and Mandel, L. (1967), *Phys. Lett.* **25A**, 700.
Davidson, F. and Mandel, L. (1968), *Phys. Lett.* **27A**, 579.
Degiorgio V. and Scully, M. O. (1970), *Phys. Rev. A* **2**, 1170.
Feigenbaum, M. J. (1978), *J. Stat. Phys.* **19**, 25.
Feigenbaum, M. J. (1979), *J. Stat. Phys.* **21**, 669.
Fox, A. G. and Li, T. (1961), *Bell Syst. Tech. J.* **40**, 453.
Freed, T. and Haus, H. A. (1966a), *Phys. Rev.* **141**, 287.
Freed, T. and Haus, H. A. (1966b), *IEEE J. Quant. Electron* **QE-2**, 190.
Gerhardt, H., Welling, H. and Güttner, A. (1972), *Zeits. f. Physik* **253**, 113.
Gioggia, R. S. and Abraham, N. B. (1983), *Opt. Commun*, **47**, 278.
Gordon, J. P., Zeiger, H. J. and Townes, C. H. (1954), *Phys. Rev.* **95**, 282.
Gordon, J. P., Zeiger, H. J. and Townes, C. H. (1955), *Phys. Rev.* **99**, 1264.
Graham, R. (1975), in *Fluctuations, Instabilities, and Phase Transitions*, ed. T. Riste (Plenum Press, New York), p. 215.
Graham, R. and Haken, H. (1970), *Zeits. f. Physik* **237**, 31.
Grassberger, P. and Procaccia, I. (1983), *Physica* **9D**, 189.
Güttner, A., Welling, H., Gericke, K. H. and Seifert, W. (1978), *Phys. Rev. A* **18**, 1157.
Haken, H. (1964), *Zeits. f. Physik* **181**, 96.
Haken, H. (1970), *Laser Theory* in *Handbuch der Physik*, Vol. XXV/2c, ed. S. Flügge (Springer, Berlin).
Haken, H. (1975a). *Rev. Mod. Phys.* **47**, 67.
Haken, H. (1975b), *Phys. Lett.* **53A**, 77.
Haken, H. (1977), *Synergetics* (Springer, Berlin) [Хакен, Г. (1980), *Синергетика* (Мир, Москва)].
Haken, H. (1985), *Light*, Vol. 2. (North-Holland, Amsterdam).
Haken, H. and Ohno, H. (1976a), *Opt. Commun*, **16**, 205.
Haken, H. and Ohno, H. (1976b), *Phys. Lett.* **59A**, 261.

Haken, H. and Sauermann, H. (1963a). *Zeits. f. Physik* **173**, 261.
Haken, H. and Sauermann, H. (1963b). *Zeits. f. Physik* **176**, 47.
Harris, S. E. (1989), *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1033.
Hempstead, R. D. and Lax, M. (1967), *Phys. Rev.* **161**, 350.
Imamoglu, A. (1989), *Phys. Rev. A* **40**, 2835.
Imamoglu, A. and Harris, S. E. (1989), *Opt. Lett.* **14**, 1344.
Javan, A., Bennett, W. R. and Herriott, D. R. (1961), *Phys. Rev. Lett.* **6**, 106.
Кочаровская, О. А., Ханин, Я. И. (1988), *Письма ЖЭТФ* **48**, 581.
Kogelnik, H. and Li, T. (1966), *Proc. IEEE* **54**, 1312.
Kogelnik, H. and Rigrod, W. W. (1962), *Proc. IRE* **50**, 220.
Korn, G. A. and Korn, T. M. *Mathematical Handbook for Engineers* (1961), (McGraw Hill, New York) [Корн, Г., Корн, Т. (1968), *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (Наука, Москва)].
Коробкин, В. В., Успенский, А. В. (1963), *ЖЭТФ* **45**, 1003.
Lamb, W. E. Jr. (1964), *Phys. Rev.* **134**, A1429.
Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. (1951), *Статистическая физика* (Гостехиздат, Москва–Ленинград).
Lax, M. and Louisell, W. H. (1967), *IEEE J. Quant. Electr.* **QE-3**, 47.
Lax, M. and Louisell, W. H. (1969), *Phys. Rev.* **185**, 568.
Lorenz, E. N. (1963), *J. Atmosph. Sci.* **20**, 130.
Louisell, W. H. (1969) in *Quantum Optics*, Proc. Internal. School of Physics 'Enrico Fermi', Course XLII, Varenna, ed. R. J. Glauber (Academic Press, New York) p. 680.
Maeda, M. and Abraham, N. B. (1982), *Phys. Rev. A* **26**, 3395.
Maiman, T. H. (1960), *Nature (London)* **187**, 493.
Mandel, L. (1961), *J. Opt. Soc. Am.* **51**, 797.
Manes, K. R. and Siegman, A. E. (1971), *Phys. Rev. A* **4**, 373.
Mayr, M., Risken, H. and Vollmer, H. D. (1981), *Opt. Commun.* **36**, 480.
Meltzer, D. and Mandel, L. (1970), *Phys. Rev. Lett.* **25**, 1151.
Meltzer, D. and Mandel, L. (1971), *Phys. Rev. A* **3**, 1763.
Meltzer, D., Davis, W. and Mandel, L. (1970), *Appl. Phys. Lett.* **17**, 242.
Milonni, P. W. and Eberly, J. H. (1988), *Lasers* (Wiley, New York).
Narducci, L. M., Doss, H. M., Ru, P., Scully, M. O., Zhu, S. Y. and Keitel, C. (1991), *Opt. Commun.* **81**, 379.
Risken, H. (1965), *Zeits. f. Physik* **186**, 85.
Risken, H. (1966), *Zeits. f. Physik* **191**, 302.
Risken, H. (1970), in *Progress in Optics*, Vol. 8, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam) p. 239.
Risken, H. and Nummedal, K. (1968a), *J. Appl. Phys.* **39**, 4662.
Risken, H. and Nummedal, K. (1968b), *Phys. Lett.* **26A**, 275.
Risken, H. and Vollmer, H. D. (1967a), *Zeits. f. Physik* **201**, 323.
Risken, H. and Vollmer, H. D. (1967b), *Zeits. f. Physik* **204**, 240.
Ross, S. L. (1984) *Differential Equations* (Wiley, New York).
Sargent, M., III, Scully, M. O. and Lamb, W. E., Jr. (1974), *Laser Physics* (Addison-Wesley, Reading, MA).
Schawlow, A. L., and Townes, C. H. (1958), *Phys. Rev.* **112**, 1940.
Scully, M. O. (1969), in *Quantum Optics*, Proc. Internat. School of Physics, 'Enrico Fermi', Course XLn, Varenna, ed. R. J. Glauber (Academic Press, New York) p. 586.
Scully, M. O. (1973), in *Coherence and Quantum Optics*, eds. L. Mandel and E. Wolf (Plenum Press, New York) p. 691.
Scully, M. O. and Lamb, W. E., Jr. (1967), *Phys. Rev.* **159**, 208.
Scully, M. O. and Lamb, W. E., Jr. (1969), *Phys. Rev.* **166**, 246.
Scully, M. O. and Lamb, W. E., Jr. (1970), *Phys. Rev.* **179**, 368.
Scully, M. O., Zhu, S. Y. and Gavrielides, A. (1989), *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2813.
Siegman, A. E. (1971), *An Introduction to Lasers and Masers* (McGraw-Hill, New York) [Сигмен, А. (1966), *Мазеры* (Мир, Москва)].
Siegman, A. E. (1986), *Lasers* (University Science Books, Mill Valley, CA).
Siegman, A. E. and Arrathoon, R. (1968), *Phys. Rev. Lett.* **20**, 901.
Siegman, A. E., Daino, B. and Manes, K. R. (1967), *IEEE J. Quant. Electron.* **QE-3**, 180.
Singh, S., Friberg, S. and Mandel, L. (1983), *Phys. Rev. A* **27**, 381.
Smith, A. W. and Armstrong, J. A. (1966), *Phys. Rev. Lett.* **16**, 1169.

Uspenskii, A. V. (1963), *Radio Eng. Electron. Phys. (USSR)* **8**, 1145.
van der Pol, B. (1922), *Phil. Mag.* **43**, 700.
Wang, Y. K. and Lamb, W. E., Jr. (1973), *Phys. Rev. A* **8**, 866.
Weiss, T. O. and King, H. (1982), *Opt. Commun.* **44**, 59.
Weiss, T. O., Godone, A. and Olafsson, A. (1983), *Phys. Rev. A* **28**, 892.
Weiss, T. O., Klische, W., Ering, P. S. and Cooper, M. (1985), *Opt. Commun.* **52**, 405.
*Ахманов, С. А., Дьяконов, Ю. Е. и Чиркин, А. С. (1981), *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (Наука, Москва).
*Быков, В. П. и Шепелев, Г. В. (1986), *Квантовая электроника* **9**, 1844.
*Scully, M. O. and Zubairy, M. S. (1997), *Quantum Optics* (ed. By Cambridge University Press, UK).

Глава 19

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1965), *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York).
Agarwal, G. S. and Dattagupta, S. (1982), *Phys. Rev. A* **26**, 880.
Aronowitz, F. (1965), *Phys. Rev.* **139**, A635.
Aronowitz, F. (1971) in *Laser Applications*, Vol. I, ed. M. Ross (Academic Press, New York), p. 133.
Градштейн, И. С., Рыжик, И. М. (1971), *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Наука, Москва).
Graham, R. (1975), in *Fluctuations, Instabilities, and Phase Transitions*, ed. T. Riste (Plenum, New York), p. 215.
Graham, R. and Haken, H. (1968), *Zeits. f. Physik* **213**, 420.
Grossmann, S. and Richter, P. H. (1971), *Zeits. f. Physik* **249**, 43.
Haken, H. (1975), *Rev. Mod. Phys.* **47**, 67.
Haken, H. (1977), *Synergetics*, (Springer, Berlin) [Хакен, Г. (1980), *Синергетика* (Мир, Москва)].
Hambenne, J. B. and Sargent, M., III (1975), *IEEE J. Quant. Electron.* **QE-11**, 90.
Hioe, F. T. and Singh, S. (1981), *Phys. Rev. A* **24**, 2050.
Hioe, F. T., Singh, S. and Mandel, L. (1979), *Phys. Rev. A* **19**, 2036.
Lamb, W. E., Jr. (1964), *Phys. Rev.* **134**, A1429.
Lenstra, D. and Singh, S. (1983), *Phys. Rev. A* **28**, 2318.
Lett, P., Christian, W., Singh, S. and Mandel, L. (1981), *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1892.
M-Tehrani, M. and Mandel, L. (1976), *Opt. Commun.* **16**, 16.
M-Tehrani, M. and Mandel, L. (1977), *Opt. Lett.* **1**, 196.
M-Tehrani, M. and Mandel, L. (1978a), *Phys. Rev. A* **17**, 677.
M-Tehrani, M. and Mandel, L. (1978b), *Phys. Rev. A* **17**, 694.
Mandel, L. (1982), *Opt. Commun.* **42**, 356.
Mandel, L., Roy, R. and Singh, S. (1981), in *Optical Bistability*, eds. C. M. Bowden, M. Ciftan and H. Robi (Plenum Press, New York), p. 127.
Mayr, M., Risken, H., and Vollmer, H. D. (1981), *Opt. Commun.* **36**, 480.
Menegozzi, L. N. and Lamb, W. E., Jr. (1973), *Phys. Rev. A* **8**, 2103.
Patashinskiĭ, A. Z. and Pokrovskiĭ, V. L. (1979), *Fluctuation Theory of Phase Transitions*, (Pergamon Press, Oxford).
Rigrod, W. W. and Bridges, T. J. (1965), *IEEE J. Quant. Electron.* **QE-1**, 298.
Risken, H. and Nummedal, H. (1968), *J. Appl. Phys.* **39**, 4662.
Roy, R. and Mandel, L. (1980), *Opt. Commun.* **34**, 133.
Roy, R., Short, R., Durnin, J. and Mandel, L. (1980), *Phys. Rev. Lett.* **45**, 1486.
Sargent M., III, Scully, M. O. and Lamb, W. E., Jr. (1974), *Laser Physics* (Addison-Wesley, Reading, MA).
Singh, S. (1980), *Opt. Commun.* **32**, 339.
Singh, S. (1981), *Phys. Rev. A* **23**, 837.
Singh, S. (1984), *Phys. Rep.* **108**, 217.
Smgh, S. and Mandel, L. (1979), *Phys. Rev. A* **20**, 2459.
Singh, S. and Mandel, L. (1981), *Opt. Commun.* **40**, 139.
Shenoy, S. R. and Agarwal, G. S. (1984), *Phys. Rev. A* **29**, 1315.
Смирнов, В. С., Желнов, В. Л. (1969), *ЖЭТФ* **57**, 2043.
Stratonovich, R. L. (1963), *Topics in the Theory of Random Noise*, Vol. 1, (Gordon and Breach, New York).

Weiss, G. H. (1977), in *Stochastic Processes in Chemical Physics*, eds. I. Oppenheim, K. E. Shuler and G. H. Weiss, (MIT Press, Cambridge, MA), p. 361.

Глава 20

Abraham, N. B. and Smith, S. R. (1977), *Phys. Rev. A* **15**, 421.
Agarwal, G. S. and Tara, K. (1992), *Phys. Rev. A* **46**, 485.
Carusotto, S. (1975), *Phys. Rev. A* **11**, 1629.
Caves, C. M. (1982), *Phys. Rev. D* **26**, 1817.
Friberg, S. and Mandel, L. (1983), *Opt. Commun.* **46**, 141.
Friberg, S. and Mandel, L. (1984), in *Coherence and Quantum Optics V*, eds. L. Mandel and E. Wolf. (Plenum Press, New York), p. 465.
Glauber, R. J. (1986), in *Frontiers in Quantum Optics*, eds. E. R. Pike and S. Sarkar (Adam Hilger, Bristol), p. 534.
Hong, C. K., Friberg, S. and Mandel, L. (1985), *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 494.
Mandel, L. (1983), *Nature* **304**, 188.
Rockower, E. B., Abraham, N. B. and Smith, S. R. (1978), *Phys. Rev. A* **17**, 1100.
Wooters, W. K. and Zurek, W. H. (1982), *Nature* **299**, 802.

Глава 21

Abramowitz, M. and Stegun, 1. A. (1965), *Handbook of Mathematical Functions*. (Dover, New York).
Caves, C. M. (1981), *Phys. Rev. D* **23**, 1693.
Caves, C. M. (1982), *Phys. Rev. D* **26**, 1817.
Caves, C. M. and Schumaker, B. L. (1985), *Phys. Rev. A* **31**, 3068.
Collett, M. J. and Gardiner, C. W. (1984), *Phys. Rev. A* **30**, 1386.
Collett, M. J. and Walls, D. F. (1985), *Phys. Rev. A* **32**, 2887.
Collett, M. J., Walls, D. F. and Zoller, P. (1984), *Opt. Commun.* **52**, 145.
Fan, H. Y. (1990), *Phys. Rev. A* **41**, 1526.
Fan, H. Y., Zaidi, H. R. and Klauder, J. R. (1987), *Phys. Rev. D* **35**, 1831.
Fisher, R. A., Nieto, M. M. and Sandberg, V. D. (1984), *Phys. Rev. D* **29**, 1107.
Friberg, S. and Mandel, L. (1984), *Opt. Commun.* **48**, 439.
Garcia-Fernandez, P., Sainz de los Terreros, L., Bermejo, F. J. and Santoro, J. (1986), *Phys. Lett. A* **118**, 400.
Gardiner, C. W. and Collett, M. J. (1985), *Phys. Rev. A* **31**, 3761.
Gardiner, C. W. and Savage, C. M. (1984), *Opt. Commun.* **50**, 173.
Glauber, R. J. (1963), *Phys. Rev.* **131**, 2766.
Heidmann, A., Reynaud, S. and Cohen-Tannoudji, C. (1984), *Opt. Commun.* **52**, 235.
Hillery, M. (1987a). *Opt. Commun.* **62**, 135.
Hillery, M. (1987b), *Phys. Rev. A* **36**, 3796.
Hollenhorst, J. N. (1979), *Phys. Rev. D* **19**, 1669.
Hong, C. K. and Mandel, L. (1985a), *Phys. Rev. Lett.* **54**, 323.
Hong, C. K. and Mandel, L. (1985b), *Phys. Rev. A* **32**, 974.
Kimble, H. J. (1992), in *Fundamental Systems in Quantum Optics*, eds. J. Dalibard, J. M.
Raimond and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam), Chapter 10.
Kozierowski, M. (1986), *Phys. Rev. A* **34**, 3474.
Loudon, R. (1984), *Opt. Commun.* **49**, 24.
Loudon, R. and Knight, P. L. (1987), *J. Mod. Opt.* **34**, 709.
Lugiato, L. A. and Strini, G. (1982a), *Opt. Commun.* **41**, 67.
Lugiato, L. A. and Strini, G. (1982b). *Opt. Commun.* **41**, 374.
Lugiato, L. A. and Strini, G. (1982c), *Opt. Commun.* **41**, 447.
Mandel, L. (1982a), *Phys. Rev. Lett.* **49**, 136.
Mandel, L. (1982b). *Opt. Commun.* **42**, 437.

Mandel, L. and Hong, C. K. (1986), in *Coherence, Cooperation and Fluctuations*, eds. F. Haake, L. M. Narducci and D. F. Walls. (Cambridge University Press, Cambridge), p. 254.
Milbum, G. J. (1984), *J. Phys. A* **17**, 737.
Milburn, G. and Walls, D. F. (1981), *Opt. Commun.* **39**, 401.
Mollow, T. R. (1973), *Phys. Rev. A* **8**, 2684.
Ou, Z. Y., Hong, C. K. and Mandel, L. (1987), *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 1574.
Rainville, E. D. (1960), *Special Functions* (Macrnillan, New York).
Reid, M. D. and Walls, D. F. (1985), *Phys. Rev. A* **31**, 1622.
Richter, T. (1984), *Opt. Acta* **31**, 1045.
Schumaker, T. L. (1984), *Opt. Lett.* **9**, 189.
Schumaker, T. L. (1986), *Phys. Rep.* **135**, 317.
Schumaker, T. L. and Caves, C. M. (1985), *Phys. Rev. A* **31**, 3093.
Shapiro, J. H. (1985), *IEEE J. Quant. Electron.* **QE-21**, 237.
Shapiro, J. H., Yuen, H. P. and Machado Mata, J. A. (1979), *IEEE Trans. Inf. Theory* **IT-25**,179.
Slusher, R. E., Hollberg, L. W., Yurke, B., Mertz, J. C. and Valley, J. F. (1985), *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2409.
Stoler, D. (1970), *Phys. Rev. D* **1**, 3217.
Stoler, D. (1971), *Phys. Rev. D* **4**, 1925.
Teich, M. C. and Saleh, B. E. A. (1989), *Quant. Opt.* **1**, 153.
Teich, M. C. and Saleh, B. E. A. (1990), *Physics Today* (June) **43**, 26.
Walls, D. F. (1983), *Nature* **306**, 141.
Walls, D. F. and Zoller, P. (1981), *Phys. Rev. Lett.* **47**, 709.
Wu, L. A., Kimble, H. J., Hall, J. and Wu, H. (1986), *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2520.
Yariv, A. (1967), *Quantum Electronics* (Wiley, New York) [Ярив, А. (1980), *Квантовая электроника* (Сов. радио, Москва)].
Yariv, A. and Pepper, D. M. (1977), *Opt. Lett.* **1**, 16.
Yuen, H. P. (1976), *Phys. Rev. A* **13**, 2226.
Yuen, H. P. and Chan, V. W. S. (1983), *Opt. Lett.* **8**, 177.
Yuen, H. P. and Shapiro, J. H. (1979), *Opt. Lett.* **4**, 334.
Yuen, H. P. and Shapiro, J. H. (1980), *IEEE Trans. Inf. Theory* **IT-26**, 78.
Yurke, B. (1985a), *Phys. Rev. A* **32**, 300.
Yurke, B. (1985b), *Phys. Rev. A* **32**, 311.
*Ахманов, С. А., Дьяконов, Ю. Е. и Чиркин, А. С. (1981), *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (Наука, Москва).
*Клышко, Д. Н. (1980), *Фотоны и нелинейная оптика* (Наука, Москва).
*Scully, M. O. and Zubairy, M. S. (1997), *Quantum Optics* (ed. By Cambridge University Press, UK).

Глава 22

Agarwal, G. S., Friberg, A. T. and Wolf, E. (1982), *Opt. Commun.* **43**, 466.
Agarwal, G. S., Friberg, A. T. and Wolf, E. (1983), *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 529.
Armstrong, J. A., Bloembergen, N., Ducuing, J. and Pershan, P. S. (1962) *Phys. Rev.* **127**, 1918.
Bloembergen, N. (1965), *Nonlinear Optics* (Benjamin, New York) [Бломберген, Н. (1966), *Нелинейная оптика* (Мир, Москва)].
Bloom, D. M. and Bjorklund, G. C. (1977), *Appl. Phys. Lett.* **31**, 592.
Boyd, R. W. (1992), *Nonlinear Optics* (Academic Press, Boston).
Boyd, R. W., Habashy, T. M., Jacobs, A. A., Mandel, L., Nieto-Vesperinas, M.,
Tompkin, W. R. and Wolf, E. (1987), *Opt. Lett.* **12**, 42.
Braginsky, V. T. and Khalil, F. Y. (1992) *Quantum Measurements*, ed. K. S. Thorne (Cambridge University Press, Cambridge). [Брагинский, В. Б. и Халил, Ф. Я. (1990) *Квантовые измерения* (Наука, Москва).]
Burnham, D. C. and Weinberg, D. L. (1970), *Phys. Rev. Lett.* **25**, 84.
Butcher, P. N. and Cotter, D. (1990), *The Elements of Nonlinear Optics* (Cambridge University Press, Cambridge).
Caves, C. M., Thorne, K. S., Drever, R. W. P., Sandberg, V. D. and Zimmermann, M. (1980), *Rev. Mod. Phys.* **52**, 341.

Drummond, P. D. (1990), *Phys. Rev. A* **42**, 6845.
Einstein, A., Podolsky, B. and Rosen, N. (1935), *Phys. Rev.* **47**, 777.
Fisher, R. A. ed. (1983), *Optical Phase Conjugation* (Academic Press, New York).
Franken, P. A., Hill, A. E., Peters, C. W. and Weinreich, G. (1961), *Phys. Rev. Lett.* **7**, 118.
Friberg, S., Hong, C. K. and Mandel, L. (1985a), *Opt. Commun.* **54**, 311.
Friberg, S., Hong, C. K. and Mandel, L. (1985b), *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2011.
Giordmaine, J. A. (1962), *Phys. Rev. Lett.* **8**, 19.
Giuliano, C. R. (1981), *Physics Today* (April) **34**, 27.
Graham, R. (1984), *Phys. Rev. Lett.* **52**, 117.
Hellwarth, R. W. (1977), *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 1.
Hillery, M. and Miodinow, L. D. (1984), *Phys. Rev. A* **30**, 1860.
Hong, C. K. and Mandel, L. (1985), *Phys. Rev. A* **31**, 2409.
Hong, C. K. and Mandel, L. (1986), *Phys. Rev. Lett.* **56**, 58.
Hong, C. K., Ou, Z. Y. and Mandel, L. (1987), *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044.
Imoto, N., Haus, H. A. and Yamamoto, Y. (1985), *Phys. Rev. A* **32**, 2287.
Jain, R. K. and Lind, R. C. (1983), *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 647.
Jensen, S. M. and Hellwarth, R. W. (1978), *Appl. Phys. Lett.* **32**, 166.
Kärtner, F. X. and Haus, H. A. (1993), *Phys. Rev. A.* **47**, 4585.
Kielich, S., Kozierowski, M. and Tanás, R. (1978), in *Coherence and Quantum Optics IV*, eds. L. Mandel and E. Wolf. (Plenum Press, New York), p. 511.
Kitagawa, M. and Yamamoto, Y. (1986), *Phys. Rev. A* **34**, 3974.
Kleinman, D. A. (1968), *Phys. Rev.* **174**, 1027.
Клышко, Д. Н. (1968), *ЖЭТФ* **55**, 1006.
Kozierowski, M. and Tanas, R. (1977), *Opt. Commun.* **21**, 229.
Kwiat, P. G., Steinberg, A. M. and Chiao, R. Y. (1992), in *Foundations of Quantum Mechanics*, eds. T. D. Black, M. M. Nieto, H. S. Pilloff, M. 0. Scully and R. M. Sinclair (World Scientific, Singapore), p. 193.
Louisell, W. H. (1960), *Coupled Mode and Parametric Electronics* (Wiley, New York).
Maker, P. D., Terhune, R. W., Nisenoff, M. and Savage, C. M. (1962), *Phys. Rev. Lett.* **8**, 21.
Mandel, L. (1982), *Opt. Commun.* **42**, 437.
Mandel, L. (1991), *Opt. Lett.* **16**, 1882.
Milburn, G. J. and Walls, D. F. (1983a), *Phys. Rev. A* **28**, 2065.
Milburn, G. J. and Walls, D. F. (1983b), *Phys. Rev. A* **28**, 2646.
Milburn, G. J., Lane, A. S. and Walls, D. F. (1983), *Phys. Rev. A* **27**, 2804.
Mollow, T. R. (1967), *Phys. Rev.* **162**, 1256.
Mollow, T. R. (1973), *Phys. Rev. A* **8**, 2684.
Mollow, T. R. and Glauber, R. J. (1967a), *Phys. Rev.* **160**, 1076.
Mollow, T. R. and Glauber, R. J. (1967b), *Phys. Rev.* **160**, 1097.
Ou, Z. Y., Wang, L. J. and Mandel, L. (1989), *Phys. Rev. A* **40**, 1428.
Ou, Z. Y., Wang, L. J., Zou, X. Y. and Mandel, L. (1990), *Phys. Rev. A* **41**, 566.
Pepper, D. M. (1982), *Opt. Eng.* **21**, 156.
Peřina, J. (1991), *Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena*, 2nd edn. (Kluwer, Dordrecht) [Перина, Я. (1987), *Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений* (Мир, Москва)].
Rarity, J. G. and Tapster, P. R. (1990), *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2495.
Sanders, T. T. and Milburn, G. J. (1989), *Phys. Rev. A* **39**, 694.
Schubert, M. and Wilhelmi, B. (1986), *Nonlinear Optics and Quantum Electronics* (Wiley, New York).
Shen, Y. R. (1967), *Phys. Rev.* **155**, 921.
Shen, Y. R. (1984), *The Principles of Nonlinear Optics* (Wiley, New York) [Шен, И. Р. (1989), *Принципы нелинейной оптики* (Наука, Москва)].
Slusher, R. E., Hollberg, L. W., Yurke, B., Mertz, J. C. and Valley, J. F. (1985), *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2409.
Tucker, J. and Walls, D. F. (1969), *Phys. Rev.* **178**, 2036.
Wang, L. J., Zou, X. Y. and Mandel, L. (1991), *Phys. Rev. A* **44**, 4614.
Yariv, A. (1967), *Quantum Electronics* (Wiley, New York) [Ярив, А. (1980), *Квантовая электроника* (Сов. радио, Москва)].
Yariv, A. and Pepper, D. M. (1977), *Opt. Lett.* **1**, 16.

Yuen, H. P. and Shapiro, J. H. (1979), *Opt. Lett.* **4**, 334.
Зельдович, Б. Я., Клышко, Д. Н. (1969), *Письма ЖЭТФ* **9**, 60.
Зельдович, Б. Я., Пилипецкий, Н. Ф., Шкунов, В. В. (1985), *Обращение волнового фронта* (Наука, Москва).
Zou, X. Y., Wang, L. J. and Mandel, L. (1991a), *Opt. Commun.* **84**, 351.
Zou, X. Y., Wang, L. J. and Mandel, L. (1991b), *Phys. Rev. Lett.* **67**, 318.
*Ахманов, С. А. и Хохлов, Р. В. (1964) *Проблемы нелинейной оптики* (изд. МГУ, Москва.)
*Ахманов, С. А. и Никитин, С. Ю. (1998) *Физическая оптика* (изд. МГУ, Москва).
*Ахманов, С. А., Белинский, А. В. и Чиркин, А. С. (1990) в кн. *Новые физические принципы оптической обработки информации* (Наука, Москва), 83.
*Клышко, Д. Н. (1980), *Фотоны и нелинейная оптика* (Наука, Москва).
*Scully, M. O. and Zubairy, M. S. (1997), *Quantum Optics* (ed. By Cambridge University Press, UK).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебра операторов, 398
Анализ
  обобщенный гармонический, 49
Анализатор спектра, 246
Анод, 532
Ансамбль, 11, 37, 171, 215
  канонический, 508
Антигруппировка, 549, 554–555
Антикоммутатор, 572
Апертура, 188, 251
Атмосфера замороженная, 320
Атом
  гамильтониан, 573
  двухуровневый, 571, 641
  доплеровский предел охлаждения, 617
  естественное время жизни, 588
  естественная форма линии, 596
  инверсия населенностей, 573, 690, 698
Аттенюатор, 494

Бином
  отрицательный, 524
Бистабильность, 632, 636
  абсорбционная, 633
  дисперсионная, 638
Бозон, 372

Вектор
  базисный, 415
  Герца
    магнитный, 313
    электрический, 313
  магнитного поля, 264
  магнитной индукции, 312
  намагниченности, 312
  Пойтинга, 265, 283, 289
  полевой, 438
  поляризации, 312
  поляризации (индуцированной), 308, 451, 813
  пространственно-частотный, 182, 194
  результирующего потока, 235
  смещения, 67, 703, 813
  состояния, 368
  электрического поля, 264
  электрического смещения, 312, 531
Вероятность, 7
  апостериорная, 11
  взаимоисключающая, 415
  вынужденного испускания, 588
  закон сложения, 9
  закон сохранения, 69
  перехода, 343
    амплитуда, 444
  поглощения, 588
  принцип унитарности, 557
  совместная, 9
  спонтанного испускания, 588
  ток, 703
  условная, 10
  фотодетектирования, 345, 445, 536, 543
    интегральная, 558
  фотоэмиссии, 475
  функционал, 39
    характеристический, 40
  чисел заполнения, 482
Вероятность фотодетектирования
  квазимонохроматическое когерентное состояние, 561
  лазер со случайной фазой, 561
  одномодовое фоковское состояние, 561
  свет теплового источника, 562, 563
Взаимодействие атомное, 619
Видность, 132, 292
  спектральная, 137, 156
Вниз-конверсия, 802
Водород атомный, 573
Волна
  быстро-затухающая, 93
  плоская однородная, 91
  прошедшая, 396
  сферическая, 98

цуг, 123
Волновой пакет, 462
Время
жизни естественное, 619
жизни неоднородное, 619
жизни фотона в резонаторе, 692
когерентности, 88, 120, 139, 565
корреляции, 53
отклика фотодетектора, 355
первого прохождения, 771
разрешения
фотодетектора, 128
цепи, 549
Время-амплитудный преобразователь, 551
Выборка достоверная, 504
Вырожденное четырехволновое смешение, 831
Выходной зрачок, 147

Газоразрядная трубка, 690
Гамильтониан
атома, 586
взаимодействия, 342, 526, 530, 577, 586
электродипольная форма, 532
квантованного поля излучения, 368
Гамильтониан многополюсный, 531
Генератор
поворота, 473
пространственного сдвига, 471
сдвига во времени, 466
Гипотеза случайных фаз, 674, 685
Гистерезис, 636
Гомодинирование, 799
Группировка, 349, 548, 549

Движение броуновское, 71, 671
Деполяризация, 277
Детектирование фотоэлектрическое, 443
совпадений, 549
Детектор фотоэлектрический, 341, 356, 449, 534
время отклика, 355
квантовый выход, 345, 449
совпадений, 549
Дефазировка, 621
Дисперсия, 15
Диэлектрик нелинейный, 451, 817
Диэлектрическая восприимчивость, 308
Длина
когерентности, 120
поглощения, 629
Добротность резонатора, 692
Дополнительность, 840

Дублет Бриллюэна, 312, 322, 325

Жидкость простая, 322

Задача
Дирихле, 102
Неймана, 103
Закон
больших чисел, 26
Бэра, 236
Вейсса, 699
Ламберта, 194
Ома обобщенный, 671
равномерного распределения, 666
радиометрический, 228
распространения Цернике, 148
скейлинга, 256
смещения Вина, 512
сохранения
импульса, 817
энергии поля, 225, 226
спектральной интерференции, 137, 242
Стефана — Больцмана, 513
Стокса, 671
Затухание свободной индукции, 621
Звезда Бетельгейзе, 123
Значение
граничное
взаимной спектральной плотности, 188, 214
поля, 94, 237
собственное, 169, 304
Зрачок
входной, 96
выходной, 96

Излучение
вторичного плоского источника, 188
вынужденное (индуцированное), 474, 588
диаграмма направленности, 92
квазиоднородного источника
предел коротких длин волн, 238
перенос энергии, 235
спонтанное, 588, 594, 662
тепловое, 519
трехмерного первичного источника, 180
хаотическое, 519
черного тела, 56, 126, 232, 508
изотропность, 517

корреляции высокого порядка, 516
плотность полной энергии, 512
средняя плотность фотонов, 513
статистика фотонов, 509
Измерения
корреляционные двухвременны́е, 550
одновременные, 389
Изотропность (статистическая), 179, 472
Импульс
в форме гиперболического секанса, 584, 630
передача, 608
сверхизлучения, 649
свободной индукции, 621
фотонного эха, 624
фотоэлектрического тока, 352
электрона, 532
Инвариантность спектральная, 257
Индекс критический, 700
Индуктивность, 665
Интеграл
Дирихле, 489
Френеля, 107
Фурье — Стилтьесса, 49
эллиптический полный первого рода, 429
Интегрируемость
абсолютная, 168
квадратичная, 168
Интенсивность, 182
взаимная, 134, 181
мгновенная, 89, 129
оптическая, 249
Интерференция
двухлучевая, 121, 136, 301, 450
полосы, 120, 121, 139
Интерферометр
интенсивностей, 358
Майкельсона, 120, 296, 497
Майкельсона звездный, 293
Маха — Цендера, 777
Фабри — Перо, 633, 691
Интерферометрия
звездная, 292, 358
интенсивностей звездная, 348
Исключение адиабатическое, 714
Испускание
вынужденное (индуцированное), 474, 588
спонтанное, 473, 588
Источник
акустический, 245
восстановление, 193, 255
вторичный, 188
плоскость, 189
квазиоднородный
плоский вторичный, 190
трехмерный первичный, 184
квазиоднородный гауссовский, 186
коррелированный по Бесселю, 196
ламбертовский, 194
модели Шелла
гауссовский, 198
плоский вторичный, 190
трехмерный первичный, 184
первичный, 151, 180
пространственно некогерентный, 149
синтезированный, 253
тепловой, 121, 224
частично когерентный, 212
частично коррелированный, 242
эффективный линейный размер, 187

Калибровка кулоновская, 362, 529
Картина
взаимодействия, 527
Гейзенберга, 410, 526
Шредингера, 409
Катод, 532
Квазимода, 694
Ковариация, 16
Когерентность
в глобальном смысле, 205
временна́я, 120
время, 88, 120, 139, 565
длина, 120
квантовая, 456
матрица, 266
магнитная, 282
смешанная, 282
электрическая, 282
мод лазерного резонатора, 302–307
объем, 124
площадь, 121
полная, 132, 157–162
поперечная, 121, 183
продольная, 120, 183
пространственная, 121
пространственная в локальном смысле, 184
степень, 130, 134, 136
глобальная, 205
комплексная, 130
спектральная, 136, 183
тензор, 282
угол, 222
частичная, 132
Компенсатор, 266, 277
Конус световой, 389
Корреляция
высшего порядка, 328
поля, 123, 127
распространение, 142, 151
Коэффициент

асимметрии, 15
вязкости, 671
дифференциального рассеяния, 236
диффузии, 65
дрейфа, 65
затухания, 236
корреляции, 16
наклона, 147
отдачи источника, 233
поглощения, 629
усиления, 779
Эйнштейна A, 588
Критическая опалесценция, 322
Кумулянты, 20

Лазер
гелий-неоновый, 125
двухмодовый, 745
аналогия с фазовым переходом, 755
константа связи, 747
корреляционные функции, 767
модель, 76
моменты интенсивности света, 751
параметр асимметрии, 752
переключение мод, 770
квантовая теория, 711
кольцевой, 745
одномодовый, 690
аналогия с фазовым переходом, 706
константа взаимодействия, 712
корреляционные функции, 731
коэффициент потерь, 698
коэффициент усиления, 698
моменты интенсивности света, 707
плотность спетральная, 734
порог генерации, 698
представление по когерентным состояниям, 720
чувствительность, 700
полуклассическая теория, 692
резонатор, 303
рубиновый, 474
Линия
антистоксовая, 325
Рэлея, 322, 325
Стокса, 325
Луч
гауссовский, 209, 210
модели Шелла, 216
расхождение угловое, 212
коэффициент расширения, 218, 220
перетяжка, 211
радиус, 220
расхождение угловое, 220
спектральная ширина когерентности, 222

Мазер, 690
Матрица
взаимной спектральной плотности
магнитная, 287
смешанная, 287
электрическая, 287
ковариационная, 54
когерентности, 282
Мюллера, 281
передачи, 276
поворота, 472
поляризационная, 267
рассеяния, 494
унитарная, 277
Матрицы Паули, 271
Метастабильный уровень, 473
Метод
наибыстрейшего спуска, 106
разделения переменных, 723
стационарной фазы, 105, 108
Микрофон, 245
Множитель Блашке, 300
Мода, 91, 170, 388
аксиальная, 694
гауссовская, 694
колебаний нормальная, 174
плоской волны, 91, 362
резонатора, 691–693
Фокса — Ли, 306
Момент, 15
дипольный, 573
перехода, 65
факториальный, 15
центральный, 15
Мощность рассеяния, 668

Наблюдаемая, 368
Наблюдаемая дихотомическая, 503
Нелокальность, 823
Необратимость, 689
Неравенство
взаимности, 141
Белла, 503
форма Клаузера — Хорна, 504
Беньяме — Чебышева, 18
Чебышева, 18
Шварца, 46, 67, 452, 459

Объем
гиперсферы, 743
когерентности, 124
Огибающая комлексная, 84
Однородность (статистическая), 179, 470
Оператор
$\sqrt{-\nabla^2}$, 164
алгебра, 398
двухмодового сжатия, 803
дипольного момента, 573
коллективный, 640
импульса поля, 376
интенсивности, 445
косинуса, 384
Лиувилля, 674
момента количества движения поля, 377
орбитального, 381
собственного, 380
Паули спиновый, 572
плотности, 373, 527, 528, 533
приведенный, 659
факторизация, 533, 595, 660
повышающий, 571
поглощения, 443
поля
отрицательно-частотная часть, 438
положительно-частотная часть, 438
понижающий, 571
преобразования подобия, 400
проектирования, 343, 368, 675
псевдорождения, 789
псевдоуничтожения, 789
рождения, 372
конфигурационного пространства, 379, 438
с конечным следом, 417
сжатия, 789
синуса, 384
смещения, 399, 407, 653
спиновый коллективный, 639
трансляции, 399
уничтожения, 372
конфигурационного пространства, 379, 438
фазы, 382, 386
Пегга — Барнетта, 385
фотонной плотности, 448
числа квазифотонов, 796
числа частиц, 371, 372
эволюции, 409, 659
экспоненциальный, 406
эрмитовый, 342
Определение операционное, 386
Оптическая
меласса, 616
накачка, 690
нутация, 581
Оптический транзистор, 632
Опыт
с двумя узкими диафрагмами, 124
Юнга, 121
Ортонормированность, 56, 169, 343
взаимная, 170
Осциллятор
ван дер Поля, 698
гармонический, 367, 369, 681
Осцилляции Раби, 581, 598
Отклонение, 15
среднеквадратичное, 15
Отклонение атомов светом, 608
Охлаждение (атомов), 615

Парадокс
нелокальности, 502
Эйнштейна — Подольского — Розена, 500
Параметр
Q, 485
ангармоничности, 836
вырождения, 127
кооперативности, 637
накачки, 698
порядка, 700
сжатия, 790
Параметры
скрытые, 501, 502
Стокса, 270
Переменная
избегающая обратного действия, 836
каноническая, 382
квантовая неразрушаемая, 836
случайная, 11
гамма-, 29
гауссовская, 26
дискретная, 11
непрерывная, 11
нормальная форма, 16
Переполненность, 414, 657
Переход фазовый, 699, 706
второго рода, 707, 758
первого рода, 707, 758
теплота скрытая, 762
Период оптический, 128
Пластины проводящие, 394
Плоскость
изображения, 96
объекта, 96
отверстий, 247
Плоско-параллельный слой, 90
Плотность
атомная, 697
вероятности, 12
вероятности перехода, 62

взаимная спектральная, 54, 135, 183, 332, 454
излучения пространственная, 235
квазивероятности, 231, 419
мод, 388
потока излучения, 235
потока энергии, 225
совместной вероятности, 38
спектральная, 49, 51, 135
лоренцева, 51
рассеянного света, 317, 321, 324
сингулярности, 51
тока вероятности, 69
условной вероятности, 60
энергии, 225
энергии электрического поля, 265, 283, 289
энергии магнитного поля, 265, 283, 289
Плотность состояний, 345
Площадь
импульса, 583
когерентности, 121
Поглотитель, 278
Показатель
Ляпунова, 742
преломления, 308
Поле
векторное, 264
квадратура, 787
квазистационарное, 599, 805
квантование, 367
линейно поляризованное, 318, 319
локально усредненное, 392
монохроматическое, 206, 309
одномодовое, 339
орбитальный момент количества движения, 380
полихроматическое, 491
рассеянное, 313, 315
с гауссовской статистикой, 339
свободное, 162
собственный момент количества движения, 380
стоячей волны, 612
эффективное, 632
Полином
Эрмита, 204
Якоби, 765
Полихроматическая щель, 251
Полнота, 343
Полупространство, 92
Поляризатор, 266, 279, 499
Поляризация
вектор базисный, 363
круговая, 365
линейная, 363
индуцированная, 308
эллипс, 365
эллиптическая, 364
Поляризуемость, 308
Поперечность, 363
Потенциал, 703, 750
Потенциал векторный, 362, 590
Правило Ферми золотое, 668
Представитель, 416
Представление
Блоха, 574
Вейля, 98, 100
координатное (q-представление), 374, 408
по когерентным модам, 168, 170, 204, 336
по когерентным состояниям, 417
по когерентным состояниям диагональное (P-представление), 418
по модам, 91
случайного процесса ортогональное, 56
Стокса, 270
углового спектра, 90
фоковское, 373, 405, 437
Преобразование
Ганкеля, 99
Гильберта, 79
Лапласа, 597
матрицы когерентности, 277
случайных переменных, 13
Френеля, 208
Якобиан, 14
Приближение
асимптотическое, 104
Борна, 678
Борна (первого порядка), 313
вращающейся волны, 579
дальней зоны, 103, 180, 188
дипольное, 530
квазимонохроматическое, 537
малых углов, 212
марковское, 593, 678
медленно меняющихся амплитуд, 695
Призма Волластона, 504
Принцип
Гюйгенса — Френеля, 147
детального равновесия, 673
соответствия, 369
эквивалентности интерференционный, 248
Причинность, 80, 877
Произведение
векторное, 284
неопределенностей, 411
скалярное, 343
Производная крупнозернистая, 714
Пропагатор, 148, 303
Пространство
гильбертово, 342, 367, 526
конфигурационное, 487
фазовое, 125
ячейка, 125

Фока, 371, 397
Прохождение адиабатическое, 580
Процесс
Винера (диффузии), 73
случайный, 37, 61
векторный, 66
гауссовский, 39, 88
марковский, 61
сепарабельный, 61
стационарный, 40
стационарный в широком смысле, 41
эргодический, 42
Пучок света теплового источника, 520

Равновесие тепловое, 668
Разложение
асимптотическое, 104
Карунена — Луева, 58
по плоским волнам, 362, 366, 375
Стирлинга для Γ-функции, 717
Размер пятна, 211
минимальный, 209
Размерность
вложения, 742
информационная (второго рода), 743
Разность хода, 131
Распределение
Бернулли, 22
Бозе — Эйнштейна, 25, 351
Больцмана, 508
Вигнера, 419
временно́го интервала фотоэлектрических импульсов, 555
гамма-, 29
гауссовское (нормальное), 26
многомерное, 31
Коши, 15, 19
Планка, 512
Пуассона, 24
Рэлея, 89
умеренное, 425
экспоненциальное, 89
Распространение
тензоров взаимной спектральной плотности, 289
тензоров когерентности, 283
Рассеяние
детерминированной средой, 312
света двухуровневым атомом, 596
неупругое, 603
упругое, 603
сечение, 600
случайной средой, 316
статическое, 321
Резервуар, 508, 659, 681
Резонатор, 303, 690, 693, 694
плохой, 739
Ротатор, 278
Ряд
биортогональный, 304
степенной, 429
Тейлора, 399

Сверхизлучение, 644
Свет
взаимно спектрально чистый, 155
естественный, 272
квадратурно сжатый, 786
квазимонохроматический, 128
некогерентный, 132
неполяризованный, 272
полностью поляризованный, 273
сжатый, 783
теплового источника, 355, 519
фильтрованный, 138
частично поляризованный, 275
Светимость, 232
Светоделитель, 246, 396, 494
Свойство воспроизводимости, 30
Сдвиг
доплеровский, 615
лэмбовский, 395, 594
Сжатие
амплитудно-квадратичное, 811
в полном смысле, 804
внутреннее N-го порядка, 810
высшего порядка, 809
квадратурное, 787
неоднородное, 808
однородное, 808
спектрально-компонентное, 808
Сигнал
аналитический, 78, 264
квази-монохроматический, 81
монохроматический, 81
случайный телеграфный, 44
Сила
Ван дер Ваальса, 394
дипольная (градиентная), 609
Казимира, 394
Символ
Кронекера, 44, 286
упорядочивания
нормального, 401, 447
хронологического, 447
Система
атомная, 526
двухатомная, 641

двухлинзовая афокальная, 252
двухуровневая, 571
диссипативная линейная, 665
каскадная, 279
квантовомеханическая полная, 527
координат вращающаяся, 580
многоуровневая, 473
оптическая, 96, 147
осцилляторов гармонических, 367
трехатомная, 642
Скорость
атома среднеквадратичная, 615
излучения, 228
перехода, 63
счета, 476
Случайное блуждание, 71
Смещение
красное, 243
синее, 243
Событие
дополнение, 8
несовместимое, 8
объединение, 8
пересечение, 8
статистическая независимость, 10
Соотношение
де Бройля, 126
Лорентц — Лоренца, 308
неопределенностей, 125, 786
Смолуховского — Чапмена — Колмогорова, 62
Соотношения
взаимности, 186, 191, 222
Стокса, 396, 494
дисперсионные, 80
коммутационные, 368, 369, 388, 439, 488, 683
основополагающие, 312
Сопротивление
активное обобщенное, 667
полное обобщенное, 667
реактивное обобщенное, 667
Состояние
антисверхизлучательное, 646
атома двухуровневого, 574
Блоха, 655
вакуумное, 372, 392, 406
вакуумное сжатое, 793
Дике, 640
вырождение, 644
идеальное сжатое, 791
когерентное, 408
атомное, 653
двухфотонное, 789, 794, 795
поля, 404
метастабильное, 759
основное, 369
перепутанное, 500, 823
с минимальным произведением неопределенностей, 411
с определенной фазой, 385
света
классическое, 419
неклассическое, 419, 484
связанное, 532
сжатое, 412, 787, 800
сжатое по числам фотонов, 794
факторизованное, 640
фоковское, 371, 375
энергетическое свободного электрона, 533
Спектр, 51, 135, 254
амплитуда, 94
изменение, 242
мощности, 49, 51, 135, 245
Планка, 247
поля энергетический, 370
сжатия, 808
угловой, 92
флуоресценции, 601
Спектроскопия
интерференционная, 296
флуктуаций, 360
Фурье, 302
Спин, 381
Спиральность, 381
Среда
активная, 690
пространственно недиспергирующая, 308
Среднее, 14, 368
по ансамблю, 38
по времени, 42
по времени локальное, 75
Статистика
субпуассоновская, 485, 496, 568, 607
суперпуассоновская, 496, 568
фотонов, 481
фотоотсчетов, 349, 557
Стационарность, 465
Степень
сжатия, 808
угловой корреляции, 214
Структура энергетических уровней, 473
Сумма биноминальная, 540
Суперфлуоресценция, 647
Счетчик квантовый, 473

Телескоп, 292
Температура Кюри, 699
Тензор
взаимной спектральной плотности
магнитный, 287

смешанный, 287
электрический, 287
восприимчивости, 451, 814
диффузии, 67
когерентности, 282
Леви-Чивита, 284
Теорема
Байеса, 11
Бошнера, 20
Ван Циттерта — Цернике, 149, 293
Винера — Хинчина, 51
обобщенная, 54, 332
Гаусса, 225
Грина, 111
Дугунди, 84
Кемпбелла, 352
Кемпбелла — Бейкера — Хаусдорфа, 402
Мерсера, 58, 169, 306
о гауссовском моменте, 33
о производной оператора, 400
об операторном разложении, 399
Парсеваля, 141
Планшереля, 78
площадей (Мак-Колла и Хана), 628
полиномиальная, 464
произведения для гауссовских функций, 260
регрессии, 659
Стирлинга, 72
флуктуационно-диссипационная, 664, 666, 670
центральная предельная, 28
эквивалентности для интенсивности излучения, 197, 201
эквивалентности оптическая, 430, 432, 436
Теория
полуклассическая, 342
теплоемкости Дебая, 322
Ток
вероятности, 703
классический, 657
Точка
критическая, 105, 109
стационарная, 105
Траектория геометрическая, 224

Угол
когерентности, 222
наклона, 583
телесный, 232
Упорядочение, 433
антинормальное, 401, 421
вейлевское, 419
нормальное, 369, 379, 401, 416, 447
симметричное, 369, 419
хронологическое, 447

Уравнение
волновое
неоднородное, 152, 626
однородное, 143
Вольтерра интегральное, 343, 528
Гейзенберга, 375, 589
Гельмгольца, 90, 143, 290
Колмогорова, 772
Крамерса — Мояла, 65
Ланжевена, 68, 683, 701
основное кинетическое, 63, 673, 715
Паули, 64, 673
Цванцига, 676
параксиальное, 208
переноса энергии излучения, 236
стохастическое, 68
Фоккера — Планка, 67, 702, 749
обращенное, 772
Фредгольма интегральное, 57, 169, 304
Шредингера, 342
Штурма — Лиувилля, 724, 764
Уравнения
Блоха, 578–580
геометрическая интерпретация, 578
движения
векторов поля, 390
канонические, 367
Лоренца, 739
Максвелла, 284, 312, 362
Максвелла — Блоха, 627, 634
Сударшана, 165
Усилитель, 777
коэфициент усиления, 779
Условие
взаимной спектральной чистоты, 155
идемпотентности, 279
Палея — Винера, 299
потенциальности, 703, 749
Устойчивость, 739
Устройство оптическое не формирующее изображение, 276
Уширение
неоднородное, 619
однородное, 619

Фаза
аномальность вблизи фокуса, 211
Блашке, 300
минимальная, 299
согласование, 816
сопряжение, 834
Фактор структурный динамический, 319
Фермион, 572
Ферромагнетик, 699

восприимчивость, 700
Фильтр, 138, 519
экспоненциальный, 300
Флуктуации
вакуумные, 390
порядок величины, 393
интенсивности, 334, 348
фотоэлектрического тока, 352
Флуоресценция резонансная, 596, 662
Форма квадратичная, 109
Формула
Коши интегральная, 79
редукционная для взаимно спектрально чистого света, 156
Рэлея
дифракционная второго рода, 103
дифракционная первого рода, 103
Фраунгофера дифракционная, 96
Фотон, 341, 372
локализация, 372, 487
неразличимость, 125
сигнальный, 817
холостой, 817
Фотоумножитель, 341
Функционал
весовой, 436, 479
характеристический, 436
Функция
Ω-упорядоченная дельта-функция, 433
автокогерентная, 134
автокорреляционная, 38, 48
Бесселя, 99, 151, 232
весовая (P-представление), 231, 418
интегральное представление, 422
когерентное состояние, 423, 425
лазер со случайной фазой, 423
поле теплового источника, 424
фоковское состояние, 425
взаимной когерентности, 130
взаимной корреляции, 53, 329
волновая
положения фотона, 492
энергии фотона, 493
гауссовская ошибок, 708
Грина, 98, 103, 165, 208, 315
Дирака дельта-функция, 80, 424
отрицательно-частотная часть, 176
положительно-частотная часть, 176
источника, 236
корреляционная
Ван Хова двухчастичная, 318
взаимная спектральная, 331
диэлектрической восприимчивости, 316
поля с гауссовской статистикой, 333
равновременна́я, 134
угловая, 213
четного порядка, 330
корреляционная (квантовая)
антинормально упорядоченная, 473
нормально упорядоченная, 439
Лоренца, 324
модовая векторная, 366
неотрицательно определенная, 20, 46
отклика приемника, 393
положительно определенная, 58
поперечная дельта-функция, 390
производящая, 18
кумулянтов, 20
моментов, 18
факториальных моментов, 18
пропускания, 96, 138, 148
Римана дзета-функция, 513
сингулярная D-функция, 389
случайная, 37
собственная, 169
спектрального распределения, 512
структурная обобщенная , 319
усредняющая (разброса), 392
фазовая, 115
характеристическая, 19, 431
Хевисайда, 535
целая аналитическая, 416
Шредингера волновая, 374, 408
эрмитово-гауссовская, 205

Хаос, 638, 739

Частица
в вязкой жидкости, 671
со спином 1/2, 571
Частота
критическая, 341
пространственная, 94, 95
Раби, 579
Число
заполнения, 371
кооперационное, 641

Ширина полосы, 53, 140
Шум
белый (δ-коррелированный), 701
дробовой, 354, 805, 806
тепловой, 665

Э.Д.С., 665
Энергия
  атома, 573
  нулевых колебаний, 369
  поля, 366, 813
Энтропия
  Колмогорова (второго порядка), 744
  термодинамическая, 707
Эрмитовость, 41
Эффект
  Брауна — Твисса, 356, 357, 496, 545
  Керра, 836
  кооперативный, 619
  самоиндуцированной прозрачности, 629
  фотоэлектрический, 341
  Штарка динамический, 603
Эхо
  спиновое, 622
  фотонное, 622

Ядро Гильберта — Шмидта, 57, 169
Яркость, 229
  обобщенная, 230
Ячейка Поккельса, 729

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 5

1 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ 7
1.1. Определения . . . 7
1.2. Свойства вероятностей . . . 8
1.2.1. Совместные вероятности . . . 9
1.2.2. Условные вероятности . . . 10
1.2.3. Теорема Байеса для апостериорных вероятностей . . . 11
1.3. Случайные переменные и распределение вероятностей . . . 11
1.3.1. Преобразования случайных переменных . . . 13
1.3.2. Математические ожидания и моменты . . . 14
1.3.3. Неравенство Чебышева . . . 17
1.4. Производящие функции . . . 18
1.4.1. Производящая функция моментов . . . 18
1.4.2. Характеристическая функция . . . 19
1.4.3. Кумулянты . . . 20
1.5. Некоторые примеры распределений вероятности . . . 22
1.5.1. Распределение Бернулли или биноминальное распределение . . . 22
1.5.2. Пуассоновское распределение . . . 23
1.5.3. Распределение Бозе — Эйнштейна . . . 25
1.5.4. Закон больших чисел . . . 25
1.5.5. Нормальное, или гауссовское распределение . . . 26
1.5.6. Центральная предельная теорема . . . 28
1.5.7. Гамма-распределение . . . 29
1.6. Многомерное гауссовское распределение . . . 31
1.6.1. Теорема о гауссовском моменте . . . 33
1.6.2. Производящая функция моментов и характеристическая функция . . . 33
1.6.3. Многократные комплексные гауссовские случайные переменные . . . 34
Задачи . . . 35

2 СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ 37
2.1. Введение в статистические ансамбли . . . 37
2.1.1. Среднее по ансамблю . . . 37
2.1.2. Совместные вероятности и корреляции . . . 38
2.1.3. Функционал вероятности . . . 39
2.2. Стационарность и эргодичность . . . 40
2.2.1. Среднее по времени стационарного процесса . . . 41
2.2.2. Эргодичность . . . 42
2.2.3. Примеры случайных процессов . . . 43
2.3. Свойства автокорреляционной функции . . . 45
2.4. Спектральные свойства стационарного случайного процесса . . . 48

2.4.1. Спектральная плотность и теорема Винера — Хинчина . . . 48
2.4.2. Сингулярности спектральной плотности . . . 51
2.4.3. Нормированные корреляции и нормированные спектральные плотности . . . 52
2.4.4. Взаимные корреляции и взаимные спектральные плотности . . . 53
2.5. Ортогональное представление случайного процесса . . . 56
2.5.1. Разложение Карунена — Луева . . . 56
2.5.2. Предел $T \to \infty$. Другой подход к теореме Винера — Хинчина . . . 58
2.6. Временна́я эволюция и классификация случайных процессов . . . 60
2.6.1. Плотности условной вероятности . . . 60
2.6.2. Абсолютно случайные или сепарабельные процессы . . . 61
2.6.3. Марковский процесс первого порядка . . . 61
2.6.4. Марковский процесс высшего порядка . . . 62
2.7. Основные уравнения в интегро-дифференциальной форме . . . 63
2.8. Основные уравнения в дифференциальной форме . . . 64
2.8.1. Дифференциальное уравнение Крамерса — Мояля . . . 64
2.8.2. Векторный случайный процесс . . . 66
2.8.3. Порядок дифференциального уравнения Крамерса — Мояля . . . 67
2.9. Уравнение Ланжевена и уравнение Фоккера — Планка . . . 67
2.9.1. Моменты перехода для процесса Ланжевена . . . 68
2.9.2. Стационарное решение уравнения Фоккера — Планка . . . 69
2.9.3. Зависящее от времени решение уравнения Фоккера — Планка . . . 70
2.10. Процесс Винера (или одномерное случайное блуждание) . . . 71
2.10.1. Одномерное случайное блуждание . . . 71
2.10.2. Совместные вероятности и автокорреляция . . . 73
2.10.3. Уравнения движения для процесса Винера . . . 73
Задачи . . . 75

3 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 77
3.1. Комплексный аналитический сигнал . . . 77
3.1.1. Определение и основные свойства аналитических сигналов . . . 77
3.1.2. Квази-монохроматические сигналы и их огибающие . . . 81
3.1.3. Соотношения между корреляционными функциями действительного и связанного с ним комплексного аналитических случайных процессов . . . 85
3.1.4. Статистические свойства аналитического сигнала, связанного с действительным гауссовским случайным процессом . . . 88
3.2. Представление углового спектра волновых полей . . . 90
3.2.1. Угловой спектр волнового поля в плоско-параллельном слое . . . 90
3.2.2. Угловой спектр волнового поля в полупространстве . . . 92
3.2.3. Пример: дифракция на полупрозрачном объекте . . . 96
3.2.4. Представление Вейля для сферической волны . . . 98
3.2.5. Дифракционные формулы Рэлея . . . 102
3.3. Метод стационарной фазы . . . 104
3.3.1. Определение асимптотического разложения . . . 104
3.3.2. Метод стационарной фазы для однократных интегралов . . . 105
3.3.3. Метод стационарной фазы для двойных интегралов . . . 108
3.3.4. Пример: поведение представления углового спектра для волновых полей в дальней зоне . . . 114
Задачи . . . 117

4 ТЕОРИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА СКАЛЯРНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ 119
4.1. Введение . . . 119
4.2. Некоторые элементарные представления и определения . . . 120
4.2.1. Временна́я когерентность и время когерентности . . . 120
4.2.2. Пространственная когерентность и площадь когерентности . . . 121
4.2.3. Объем когерентности и параметр вырождения . . . 124

4.3. Интерференция двух стационарных световых пучков как проявление корреляции второго порядка . . . 127
4.3.1. Законы интерференции. Функция взаимной когерентности и комплексная степень когерентности . . . 128
4.3.2. Корреляции второго порядка в пространственно-частотной области. Взаимная спектральная плотность и спектральная степень когерентности . . . 135
4.3.3. Время когерентности и ширина спектра . . . 139
4.4. Распространение корреляций . . . 142
4.4.1. Дифференциальные уравнения распространения взаимной когерентности и взаимной спектральной плотности в свободном пространстве . . . 143
4.4.2. Распространение корреляций от плоскости . . . 145
4.4.3. Распространение корреляций от ограниченных поверхностей . . . 147
4.4.4. Теорема Ван Циттерта — Цернике . . . 148
4.4.5. Распространение корреляций от первичных источников . . . 151
4.5. Специальные типы полей . . . 154
4.5.1. Взаимно спектрально чистый свет . . . 154
4.5.2. Когерентный свет в пространственно-временно́й области . . . 157
4.5.3. Когерентный свет в пространственно-частотной области . . . 160
4.6. Свободные поля с произвольной степенью когерентности . . . 162
4.6.1. Уравнения Сударшана для распространения корреляционных функций второго порядка свободных полей . . . 163
4.6.2. Временна́я эволюция корреляционных функций второго порядка свободных полей 166
4.6.3. Взаимосвязь между свойствами временно́й и пространственной когерентности свободных полей . . . 166
4.6.4. Взаимосвязь спектральных свойств и свойств пространственной когерентности свободных полей . . . 167
4.7. Представление по когерентным модам и представление по ансамблю для источников и полей в пространственно-частотной области . . . 168
4.7.1. Представление по когерентным модам частично когерентных полей в свободном пространстве . . . 168
4.7.2. Строгое представление взаимной спектральной плотности в виде корреляционной функции . . . 171
4.7.3. Нормальные моды колебаний частично когерентных первичных источников и представление их взаимной спектральной плотности в виде корреляционной функции . . . 173
Приложение 4.1 . . . 175
Приложение 4.2 . . . 176
Задачи . . . 177

5 ИЗЛУЧЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ ЛЮБОЙ СТЕПЕНИ КОГЕРЕНТНОСТИ 180
5.1. Введение . . . 180
5.2. Излучение трехмерных первичных источников . . . 180
5.2.1. Основные формулы . . . 180
5.2.2. Излучение от некоторых модельных источников . . . 184
5.3. Излучение плоских вторичных источников . . . 188
5.3.1. Общие формулы . . . 188
5.3.2. Излучение плоских, вторичных, квазиоднородных источников . . . 190
5.3.3. Обратная задача для плоских, вторичных, квазиоднородных источников . . . 193
5.4. Теоремы эквивалентности для плоских источников, генерирующих одинаковую интенсивность излучения . . . 196
5.4.1. Теорема эквивалентности для плоских источников . . . 197
5.4.2. Пример: эквивалентные гауссовские источники модели Шелла . . . 198
5.4.3. Экспериментальная проверка теоремы эквивалентности . . . 201
5.5. Представление по когерентным модам для гауссовских источников модели Шелла . . . 203
5.6. Оптические лучи . . . 205
5.6.1. Монохроматические лучи . . . 206

5.6.2. Пример: монохроматические гауссовские лучи . . . 209
5.6.3. Частично когерентные лучи . . . 212
5.6.4. Гауссовские лучи модели Шелла . . . 215
5.7. Основы радиометрии . . . 224
5.7.1. Плотность энергии, поток энергии и закон сохранения энергии в скалярных волновых полях . . . 224
5.7.2. Основные понятия радиометрии . . . 228
5.7.3. Функция энергетической яркости от плоских, вторичных, квазиоднородных источников . . . 232
5.7.4. Модель переноса энергии излучения . . . 235
5.7.5. Радиометрия как коротковолновый предел статистической волновой теории с квазиоднородными источниками . . . 237
5.8. Влияние пространственной когерентности источника на спектр излучаемых полей . . . 241
5.8.1. Спектр поля, создаваемого двумя частично коррелированными источниками . . . 242
5.8.2. Спектр дальнего поля, образуемого плоскими вторичными квазиоднородными источниками . . . 248
5.8.3. Условие для спектральной инвариантности: закон скейлинга для плоских, вторичных, квазиоднородных источников . . . 254
Приложение 5.1 . . . 258
Приложение 5.2 . . . 260
Задачи . . . 261

6 ТЕОРИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВЕКТОРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ 264
6.1. Введение . . . 264
6.2. Равновременна́я 2 × 2-матрица когерентности хорошо коллимированного, однородного, квазимонохроматического светового луча . . . 265
6.3. Полностью неполяризованный и полностью поляризованный свет. Степень поляризации . . . 271
6.3.1. Неполяризованный свет (естественный свет) . . . 272
6.3.2. Полностью поляризованный свет . . . 272
6.3.3. Степень поляризации . . . 273
6.4. Прохождение квазимонохроматического луча через линейные, не формирующие изображения устройства . . . 276
6.4.1. Компенсатор . . . 277
6.4.2. Поглотитель . . . 278
6.4.3. Ротатор . . . 278
6.4.4. Поляризатор . . . 279
6.4.5. Каскадная система . . . 279
6.5. Обобщенные матрицы когерентности второго порядка и тензоры когерентности стационарного электромагнитного поля . . . 281
6.5.1. Электрические, магнитные и смешанные матрицы когерентности (тензоры) . . . 281
6.5.2. Дифференциальные уравнения первого порядка для распространения тензоров когерентности . . . 283
6.5.3. Волновые уравнения для распространения тензоров когерентности . . . 285
6.6. Тензоры взаимной спектральной плотности второго порядка стационарного электромагнитного поля . . . 286
6.6.1. Электрический, магнитный и смешанный тензоры взаимной спектральной плотности . . . 286
6.6.2. Дифференциальные уравнения первого порядка для распространения тензоров взаимной спектральной плотности . . . 289
6.6.3. Уравнения Гельмгольца для распространения тензоров взаимной спектральной плотности . . . 289
Задачи . . . 290

7 ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ КОГЕРЕНТНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА 292
7.1. Введение . . . 292
7.2. Звездная интерферометрия . . . 292
7.3. Интерференционная спектроскопия . . . 296
7.3.1. Общие принципы . . . 296
7.3.2. Проблема фазы . . . 298
7.4. Когерентность поперечных мод лазерного резонатора . . . 302
7.4.1. Условия устойчивости для взаимной спектральной плотности света на зеркале резонатора . . . 302
7.4.2. Природа решений интегрального уравнения (7.4.7) . . . 304
7.5. Диэлектрический отклик и спектр индуцированной поляризации во флуктуирующей среде 308
7.5.1. Среда, макроскопические свойства которой не изменяются со временем . . . 308
7.5.2. Среда, макроскопические свойства которой зависят от времени детерминированным образом . . . 309
7.5.3. Среда, макроскопические свойства которой случайным образом меняются во времени . . . 310
7.6. Рассеяние от случайных сред . . . 312
7.6.1. Основные уравнения для детерминированного рассеяния . . . 312
7.6.2. Рассеяние на детерминированной среде в приближении Борна первого порядка . . . 313
7.6.3. Рассеяние случайной средой в приближении Борна первого порядка . . . 316
7.6.4. Некоторые частные случаи . . . 318
7.6.5. Рассеяние от простой жидкости . . . 322
Приложение 7.1 . . . 325
Задачи . . . 326

8 КОРРЕЛЯЦИИ ОПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА 328
8.1. Введение . . . 328
8.2. Пространственно-временны́е корреляционные функции произвольного порядка . . . 328
8.3. Пространственно-частотные корреляционные функции произвольного порядка . . . 330
8.4. Корреляционные функции полей, подчиняющихся гауссовской статистике . . . 333
8.4.1. Пространственно-временна́я область . . . 333
8.4.2. Пространственно-частотная область . . . 336
8.5. Представление по когерентным модам взаимных спектральных плотностей произвольного порядка . . . 336
8.5.1. Общие выражения . . . 336
8.5.2. Одномодовое поле . . . 339
8.5.3. Поля, подчиняющиеся гауссовской статистике . . . 339
Задачи . . . 339

9 ПОЛУКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФОТОДЕТЕКТИРОВАНИЯ 341
9.1. Введение . . . 341
9.2. Обзор элементарной квантовой механики . . . 342
9.3. Дифференциальная вероятность фотодетектирования . . . 343
9.4. Совместные вероятности многократного фотодетектирования . . . 346
9.5. Интегральные вероятности детектирования . . . 347
9.6. Фотоэлектрическое детектирование во флуктуирующих полях . . . 347
9.6.1. Фотоэлектрическая группировка . . . 349
9.7. Статистика фотоэлектрических отсчетов флуктуирующего поля . . . 349
9.8. Флуктуации фотоэлектрического тока . . . 352
9.8.1. Частные случаи . . . 355
9.8.2. Свет от теплового источника . . . 355
9.8.3. Спектральная плотность фототока . . . 356
9.9. Эффект Хэнбери Брауна — Твисса (полуклассическое рассмотрение) . . . 356
9.10. Звездная интерферометрия интенсивностей . . . 358
9.11. Спектроскопия флуктуаций . . . 359
Задачи . . . 360

10 КВАНТОВАНИЕ СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ 361
10.1. Введение . . . 361
10.2. Гамильтониан классического поля и канонические уравнения движения . . . 362
10.2.1. Разложение по плоским волнам . . . 362
10.2.2. Единичные векторы поляризации . . . 363
10.2.3. Энергия электромагнитного поля . . . 366
10.3. Каноническое квантование поперечного поля . . . 367
10.4. Энергетический спектр; фотоны . . . 370
10.4.1. Фоковские состояния . . . 371
10.4.2. Псевдолокализованные фотоны . . . 372
10.4.3. Базис фоковских состояний . . . 373
10.4.4. q-представление фоковских состояний . . . 374
10.4.5. Зависимость операторов поля от времени . . . 375
10.5. Импульс квантованного поля . . . 376
10.6. Момент количества движения квантованного поля . . . 377
10.6.1. Момент количества движения как интеграл движения . . . 377
10.6.2. Разложение полного момента количества движения . . . 379
10.6.3. Собственный (спиновый) момент количества движения . . . 380
10.6.4. Орбитальный момент количества движения . . . 381
10.7. Операторы фазы квантованного поля . . . 382
10.7.1. Первые попытки построения оператора фазы . . . 382
10.7.2. Операторы косинуса и синуса . . . 384
10.7.3. Оператор фазы на основе проекционного оператора на фазовые состояния . . . 385
10.7.4. Операционно определенные фазовые операторы . . . 386
10.8. Пространственно-временные коммутационные соотношения . . . 388
10.8.1. Уравнения движения для $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{B}}$ . . . 390
10.9. Вакуумные флуктуации . . . 390
10.9.1. Флуктуации локально усредненных полей . . . 392
10.9.2. Порядок величины вакуумных флуктуаций . . . 393
10.9.3. Сила Казимира между проводниками . . . 394
10.9.4. Лэмбовский сдвиг . . . 395
10.9.5. Вакуумные эффекты в делителе пучка . . . 396
10.10. Непрерывное фоковское пространство . . . 397
10.11. Некоторые теоремы операторной алгебры . . . 398
10.11.1. Теорема об операторном разложении . . . 399
10.11.2. Теоремы о преобразовании подобия . . . 400
10.11.3. Теоремы о производных . . . 400
10.11.4. Нормальный и антинормальный порядок . . . 401
10.11.5. Теорема Кемпбелла — Бейкера — Хаусдорфа . . . 401
Задачи . . . 402

11 КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ 404
11.1. Введение . . . 404
11.2. Фоковское представление когерентных состояний . . . 404
11.3. Когерентное состояние как смещенное вакуумное состояние. Оператор смещения . . . 406
11.3.1. Свойства оператора смещения . . . 407
11.4. q-представление когерентных состояний . . . 408
11.5. Эволюция во времени и соотношения неопределенностей . . . 409
11.5.1. Произведение канонических неопределенностей . . . 410
11.5.2. Более общие состояния с минимальной неопределенностью . . . 411
11.6. Когерентные состояния как базис. Неортогональность и переполненность . . . 412
11.6.1. Линейная зависимость когерентных состояний . . . 413
11.6.2. Переполненность . . . 414
11.6.3. Представление операторов по когерентным состояниям . . . 415
11.6.4. Вычисление матричных элементов нормально упорядоченных операторов . . . 416
11.7. Представление состояний и операторов целыми функциями . . . 416

11.8. Диагональное представление оператора плотности по когерентным состояниям (P-представление Глаубера — Сударшана) . . . 418
11.8.1. Плотности квазивероятности. Распределение Вигнера . . . 419
11.8.2. Два достоинства диагонального представления . . . 420
11.8.3. Диагональное представление $\hat{\rho}$ с помощью последовательности функций . . . 420
11.8.4. Диагональное представление антинормально упорядоченного оператора плотности 421
11.8.5. Интегральное представление функции $\phi(v)$ . . . 422
11.8.6. Примеры $\phi(v)$ . . . 422
11.9. Оптическая теорема эквивалентности для нормально упорядоченных операторов . . . 429
11.9.1. Квантовые характеристические функции . . . 431
11.10. Более общие представления в фазовом пространстве . . . 432
11.10.1. Введение . . . 432
11.10.2. Упорядочение операторов . . . 433
11.10.3. Приложение к квантовым средним и диагональному представлению по когерентным состояниям . . . 434
11.11. Многомодовые поля . . . 435
11.11.1. Когерентные состояния в непрерывном представлении . . . 437
11.12. Положительно- и отрицательно-частотные операторы поля . . . 437
11.12.1. Коммутационные соотношения . . . 438
11.12.2. Нормально упорядоченные корреляционные функции . . . 439
11.13. Поле, создаваемое классическим током . . . 440
Задачи . . . 441

12 КВАНТОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ И ФОТОННАЯ СТАТИСТИКА 443
12.1. Введение . . . 443
12.2. Фотоэлектрическое измерение оптического поля; нормальное упорядочение . . . 443
12.2.1. Детектирование нескольких фотонов; корреляционные функции высшего порядка 446
12.2.2. Символы и операторы упорядочения . . . 447
12.3. Оператор фотонной плотности . . . 448
12.4. Интерференционные эксперименты; корреляционные функции второго порядка . . . 449
12.5. Корреляционные функции и взаимные спектральные плотности произвольного порядка . . . 451
12.5.1. Свойства корреляционных функций . . . 452
12.5.2. Взаимные спектральные плотности произвольного порядка . . . 454
12.5.3. Независящие от фазы весовые функции . . . 455
12.6. Степень и порядок когерентности . . . 456
12.7. Значение когерентности второго порядка . . . 458
12.7.1. Факторизация корреляционных функций . . . 459
12.7.2. Корреляции произвольного порядка . . . 460
12.7.3. Оператор плотности для поля . . . 461
12.7.4. Волновые пакеты в качестве мод . . . 462
12.8. Стационарность, однородность, изотропность . . . 465
12.8.1. Стационарность . . . 465
12.8.2. Условие для оператора плотности . . . 467
12.8.3. Свойства взаимных спектральных плотностей в случае стационарных полей . . . 468
12.8.4. Однородность . . . 470
12.8.5. Изотропность . . . 472
12.9. Антинормально упорядоченные корреляционные функции . . . 473
12.9.1. Квантовый счетчик . . . 473
12.9.2. Замена дифференциальными операторами . . . 477
12.9.3. Весовой функционал для антинормально упорядоченных корреляционных функций . . . 478
12.10. Фотонная статистика . . . 481
12.10.1. Вероятности . . . 482
12.10.2. Условия для неклассических состояний . . . 484
12.10.3. Моменты $\hat{n}$ . . . 484

12.10.4. Производящие функции для числа фотонов при нормальном и антинормальном порядке . . . 485
12.11. Проблема локализации фотонов . . . 486
12.11.1. Оператор числа фотонов, определяемый в конфигурационном пространстве . . . 487
12.11.2. Коммутационные соотношения . . . 488
12.11.3. Собственные состояния $\hat{n}(\mathscr{V},t)$ . . . 490
12.11.4. Статистика фотона в конечном объеме . . . 491
12.11.5. Полихроматические фотоны и нелокальность . . . 491
12.12. Влияние аттенюатора или делителя пучка на квантовое поле . . . 494
12.12.1. Операторные соотношения . . . 495
12.12.2. Корреляции фотонов . . . 495
12.12.3. Интерферометр Майкельсона . . . 497
12.12.4. Связь между входными и выходными состояниями для делителя пучка . . . 497
12.13. Влияние поляризатора на поле . . . 499
12.14. Локальность Эйнштейна и корреляции фотонов . . . 500
12.14.1. Парадокс Эйнштейна — Подольского — Розена для перепутанного двухфотонного состояния . . . 501
12.14.2. Неравенства Белла . . . 503
12.14.3. Форма Клаузера — Хорна неравенства Белла . . . 504
12.14.4. Экспериментальное подтверждение . . . 505
12.14.5. Неклассические состояния и неравенства Белла . . . 506
Задачи . . . 507

13 ИЗЛУЧЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ, НАХОДЯЩИХСЯ В СОСТОЯНИИ ТЕПЛОВОГО РАВНОВЕСИЯ 508
13.1. Излучение черного тела . . . 508
13.1.1. Оператор плотности . . . 508
13.1.2. Статистика фотонов . . . 509
13.1.3. Поляризация . . . 511
13.1.4. Спектральные распределения . . . 512
13.1.5. Диагональное представление $\hat{\rho}$ по когерентным состояниям . . . 513
13.1.6. Корреляционные функции излучения черного тела . . . 514
13.1.7. Функции корреляции высокого порядка . . . 516
13.1.8. Изотропность излучения черного тела . . . 517
13.1.9. Флуктуации интенсивности излучения черного тела . . . 517
13.2. Свет от теплового источника . . . 519
13.3. Пучки стационарного света от теплового источника . . . 520
13.3.1. Флуктуации интенсивности пучка света от теплового источника . . . 521
13.3.2. Статистика фотонов при одинаковых средних числах заполнения . . . 523
Задачи . . . 525

14 КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ФОТОДЕТЕКТИРОВАНИЯ 526
14.1. Взаимодействия квантованного электромагнитного поля . . . 526
14.1.1. Решение по теории возмущений в картине взаимодействия . . . 527
14.1.2. Электромагнитное взаимодействие между полями и зарядами . . . 529
14.1.3. Многополюсный гамильтониан . . . 531
14.2. Вероятность одноэлектронного фотодетектирования . . . 532
14.2.1. Применение к чистому когерентному состоянию . . . 536
14.2.2. Вычисление вероятности в квазимонохроматическом приближении . . . 537
14.2.3. Вычисление электронного матричного элемента . . . 538
14.2.4. Вычисление вероятности детектирования для аксиально симметричного детектора 539
14.3. N-электронный фотодетектор . . . 540
14.4. Вероятность многократного фотоэлектрического детектирования . . . 541
14.5. Вероятность многократного детектирования при произвольном начальном состоянии поля 542
14.6. Фотоэлектрические корреляции . . . 544
14.6.1. Эффект Хэнбери Брауна — Твисса (квантовая трактовка) . . . 545

14.6.2. Корреляции фототоков . . . 546
14.7. Группировка и антигруппировка . . . 548
14.7.1. Детектирование совпадений . . . 549
14.7.2. Двухвременные импульсные корреляционные измерения . . . 550
14.7.3. Антигруппировка . . . 554
14.7.4. Распределение временно́го интервала фотоэлектрических импульсов . . . 555
14.8. Статистика фотоэлектрического счета . . . 557
14.8.1. Интегральная вероятность детектирования . . . 558
14.8.2. Примеры вероятности детектирования . . . 561
14.8.3. Естественная мера времени когерентности . . . 565
14.9. Свойства вероятности детектирования $p(n,t,t+T)$ . . . 565
14.9.1. Производящие функции и проблема обратного преобразования . . . 565
14.9.2. Второй момент и субпуассоновская статистика счета . . . 567
14.9.3. Получение корреляционных функций из статистики счета . . . 568
Задачи . . . 569

15 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА И ДВУХУРОВНЕГО АТОМА 571
15.1. Динамические переменные для двухуровневого атома . . . 571
15.1.1. Атомная энергия и атомный дипольный момент . . . 573
15.2. Блоховское представление . . . 574
15.2.1. Средние значения спиновых операторов . . . 576
15.3. Взаимодействие атома с классическим полем . . . 577
15.3.1. Уравнения Блоха . . . 578
15.3.2. Уравнения Блоха во вращающейся системе координат . . . 580
15.3.3. Задача Раби . . . 581
15.3.4. Отклик атома на воздействие лазерного импульса . . . 582
15.3.5. 2π-импульс в форме гиперболического секанса . . . 583
15.4. Взаимодействие атома с квантовым полем: подход теории возмущений . . . 585
15.4.1. Поглощение и излучение фотонов . . . 586
15.5. Взаимодействие атома с квантовым полем: общее рассмотрение . . . 589
15.5.1. Гейзенберговские уравнения движения . . . 589
15.5.2. Приближенное решение — коэффициент Эйнштейна A и лэмбовский сдвиг . . . 592
15.5.3. Интегральные уравнения движения . . . 594
15.5.4. Спонтанное излучение . . . 594
15.6. Резонансная флуоресценция . . . 596
15.6.1. Зависимость интенсивности света от времени . . . 596
15.6.2. Сечение рассеяния атомов . . . 600
15.6.3. Спектр флуоресценции . . . 601
15.6.4. Корреляция интенсивности флуоресценции . . . 604
15.6.5. Измерения антигруппировки фотонов . . . 605
15.6.6. Субпуассоновская статистика фотонов . . . 607
15.7. Отклонение атомов светом . . . 608
15.7.1. Передача импульса после n спонтанных испусканий . . . 609
15.7.2. Передача импульса при вынужденном излучении или градиентные силы в сильном поле . . . 612
15.8. Охлаждение и пленение атомов . . . 615
15.8.1. Оптическая меласса . . . 616
15.8.2. Оценка наименьшей достижимой температуры, основанная на балансе энергии . . . 616
Задачи . . . 618

16 КОЛЛЕКТИВНЫЕ АТОМНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ 619
16.1. Затухание оптической свободной индукции . . . 619
16.1.1. Эксперименты . . . 621
16.2. Фотонное эхо . . . 622
16.2.1. Эхо-эксперименты . . . 625
16.3. Самоиндуцированная прозрачность . . . 625

16.3.1. Уравнение движения для огибающей импульса . . . 626
16.3.2. Теорема площадей Мак-Колла и Хана . . . 627
16.3.3. Форма импульса . . . 630
16.3.4. Скорость импульса . . . 631
16.4. Оптическая бистабильность . . . 632
16.4.1. Абсорбционная бистабильность в кольцевом резонаторе . . . 633
16.4.2. Дисперсионная бистабильность . . . 638
16.4.3. Хаос в оптической бистабильности . . . 638
16.5. Коллективные атомные состояния и коллективные динамические переменные . . . 639
16.5.1. Состояния Дике . . . 640
16.5.2. Вырождение состояний Дике . . . 644
16.6. Кооперативное атомное излучение . . . 644
16.6.1. Сверхизлучение Дике . . . 644
16.6.2. Кооперативное излучение атомов, находящихся в факторизованном состоянии . . . 646
16.6.3. Временна́я эволюция сверхизлучения . . . 647
16.6.4. Некоторые дополнительные усложнения . . . 650
16.6.5. Более общее кооперативное излучение . . . 650
16.6.6. Сверхизлучательные классические осцилляции . . . 652
16.7. Атомные когерентные состояния . . . 653
16.7.1. Блоховское представление атомного когерентного состояния . . . 655
16.7.2. Неортогональность и переполненность . . . 656
16.7.3. Атомные состояния, создаваемые классическим полем . . . 657
Задачи . . . 658

17 ОБЩИЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СИСТЕМ 659
17.1. Квантовая теорема регрессии . . . 659
17.1.1. Одновременны́е средние значения . . . 660
17.1.2. Многовременны́е средние значения . . . 661
17.1.3. Спонтанное излучение ато́ма . . . 662
17.1.4. Резонансная флуоресценция двухуровневого атома . . . 662
17.1.5. Квантовая теорема регрессии для нормально упорядоченных операторов поля . . . 663
17.2. Флуктуационно-диссипационная теорема . . . 664
17.2.1. Простая классическая линейная диссипативная система . . . 665
17.2.2. Квантово-механическая линейная диссипативная система . . . 667
17.2.3. Мощность рассеяния . . . 668
17.2.4. Флуктуации тока в состоянии теплового равновесия . . . 669
17.2.5. Спектральная плотность флуктуаций . . . 670
17.2.6. Броуновское движение частицы . . . 671
17.2.7. Флуктуации поля в излучении черного тела . . . 671
17.3. Основные кинетические уравнения . . . 672
17.3.1. Основное кинетическое уравнение Паули . . . 673
17.3.2. Обобщенное основное кинетическое уравнение Цванцига . . . 674
17.3.3. Применение к кинетическому уравнению Паули . . . 676
17.3.4. Применение к задаче Дике . . . 677
17.3.5. Линейное затухание недиагональных матричных элементов . . . 680
17.4. Источники квантового шума и квантовые уравнения Ланжевена . . . 680
17.4.1. Введение . . . 680
17.4.2. Уравнения движения квантовой системы . . . 681
17.4.3. Коммутационные соотношения . . . 683
17.4.4. Двухвременны́е корреляционные функции . . . 685
17.4.5. Уравнение Ланжевена для возбужденной системы осцилляторов . . . 687
17.4.6. Необратимость и стрела времени . . . 688
Задачи . . . 689

18 ОДНОМОДОВЫЙ ЛАЗЕР 690
18.1. Введение . . . 690
18.1.1. Условие лазерной генерации . . . 691
18.2. Полуклассическая теория лазера . . . 692
18.2.1. Нормальные моды резонатора . . . 693
18.2.2. Уравнение движения для лазерного поля . . . 695
18.2.3. Аналогия с фазовым переходом . . . 699
18.3. Полуклассическая теория лазера с учетом шума спонтанного излучения . . . 701
18.3.1. Уравнение Фоккера — Планка . . . 702
18.3.2. Стационарное решение . . . 703
18.3.3. Аналогия с фазовым переходом для флуктуирующего лазерного поля . . . 706
18.3.4. Моменты интенсивности света . . . 707
18.4. Квантовая теория лазера . . . 711
18.4.1. Основное кинетическое уравнение для лазерного поля . . . 712
18.4.2. Статистика фотонов . . . 716
18.4.3. Стационарная вероятность . . . 717
18.5. Взаимосвязь между квантовой и полуклассической теориями лазера . . . 720
18.5.1. Представление лазерного поля по когерентным состояниям . . . 720
18.5.2. Стационарное решение основного кинетического уравнения . . . 722
18.6. Решение зависящего от времени уравнения движения . . . 723
18.6.1. Развитие лазерного поля из вакуумного состояния . . . 726
18.6.2. Экспериментальные исследования . . . 728
18.7. Корреляционные функции . . . 731
18.7.1. Функции Грина . . . 731
18.7.2. Корреляция интенсивности . . . 731
18.7.3. Функция корреляции амплитуды поля и спектральная плотность . . . 733
18.7.4. Корреляции высшего порядка . . . 735
18.8. Нестабильности лазера и хаос . . . 736
18.8.1. Связь с моделью Лоренца . . . 739
18.8.2. Линейный анализ устойчивости . . . 739
18.8.3. Примеры нестабильностей лазера . . . 741
18.8.4. Тест на детерминированный хаос . . . 742
Задачи . . . 744

19 ДВУХМОДОВЫЙ КОЛЬЦЕВОЙ ЛАЗЕР 745
19.1. Уравнения движения . . . 746
19.1.1. Учет флуктуаций спонтанного излучения . . . 748
19.2. Стационарное решение . . . 749
19.2.1. Моменты интенсивности света . . . 751
19.2.2. Сравнение с экспериментом . . . 753
19.3. Аналогия с фазовым переходом . . . 755
19.3.1. Минимумы потенциалов . . . 756
19.3.2. Случай константы связи $\xi < 1$: фазовый переход второго рода . . . 757
19.3.3. Случай константы связи $\xi > 1$: фазовый переход первого рода . . . 758
19.3.4. Скрытая теплота фазового перехода . . . 762
19.4. Зависящее от времени решение в случае константы связи $\xi = 1$ . . . 763
19.4.1. Решение методом разделения переменных для случая $\xi = 1$, $a_1 = a_2$ . . . 763
19.4.2. Функция Грина . . . 767
19.4.3. Корреляционные функции . . . 767
19.5. Зависящее от времени решение в более общем случае взаимодействия между модами $\xi \neq 1$ 770
19.5.1. Переключение мод и времена первого прохождения . . . 770
19.5.2. Распределения времен первого прохождения . . . 774
Задачи . . . 775

20 ЛИНЕЙНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ СВЕТА **777**
20.1. Введение . . . 777
20.2. Основное кинетическое уравнения для поля усилителя . . . 778
20.3. Решение основного кинетического уравнения . . . 778
20.3.1. Корреляции входа — выхода . . . 780
20.4. Статистика фотонов . . . 780
20.4.1. Распределения вероятностей . . . 781
20.4.2. Полностью инвертированный усилитель света . . . 783
20.5. Сжатый свет . . . 783
20.6. Условие, при котором поле на выходе усилителя является классическим . . . 784
Задачи . . . 785

21 СЖАТЫЕ СОСТОЯНИЯ СВЕТА **786**
21.1. Определение квадратурного сжатия . . . 786
21.2. Квантовая природа сжатого состояния . . . 788
21.3. Унитарный оператор сжатия . . . 789
21.3.1. Сжатие двухфотонного когерентного состояния . . . 790
21.3.2. Действие оператора сжатия на произвольное состояние . . . 790
21.4. Идеальное сжатое состояние . . . 791
21.4.1. Фотонная статистика . . . 793
21.5. Двухфотонное когерентное состояние . . . 794
21.5.1. Преобразованные фоковские состояния . . . 795
21.5.2. Представление по когерентным состояниям двухфотонного когерентного состояния 797
21.5.3. Фотонная статистика двухфотонного когерентного состояния . . . 797
21.6. Детектирование сжатия гомодинированием с когерентным светом . . . 799
21.7. Сжатие, реализованное на практике: вырожденная параметрическая вниз-конверсия . . . 800
21.7.1. Создание сжатого состояния при вырожденной параметрической вниз-конверсии . 802
21.8. Широкополосный сжатый свет . . . 803
21.8.1. Гомодинирование и корреляционные функции . . . 804
21.8.2. Квадратурные корреляции . . . 806
21.8.3. Спектральные корреляции . . . 807
21.8.4. Спектрально-компонентное сжатие и степень сжатия . . . 808
21.8.5. Примеры степени сжатия $Q(\omega)$ . . . 808
21.9. Сжатие высшего порядка . . . 809
21.9.1. Сжатие N-го порядка двухфотонного когерентного состояния . . . 810
21.9.2. Амплитудно-квадратичное сжатие . . . 811
Задачи . . . 812

22 НЕКОТОРЫЕ КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ **813**
22.1. Введение . . . 813
22.2. Энергия поля в диэлектрике . . . 813
22.3. Генерация оптических гармоник . . . 814
22.3.1. Сжатие при генерации гармоник . . . 816
22.4. Параметрическая вниз-конверсия . . . 816
22.4.1. Решение уравнений движения . . . 817
22.4.2. Статистика фотонов . . . 818
22.4.3. Доказательство неклассического поведения . . . 820
22.4.4. Многомодовая теория возмущений процесса параметрического распада . . . 821
22.4.5. Перепутанное квантовое состояние . . . 822
22.4.6. Скорость вниз-конверсии . . . 823
22.4.7. Временной интервал между сигнальным и холостым фотонами . . . 824
22.4.8. Интерференционные эксперименты с двумя вниз-конверторами . . . 827
22.5. Вырожденное четырехволновое смешение . . . 831
22.5.1. Уравнения движения . . . 832
22.5.2. Применение к когерентному состоянию . . . 832
22.5.3. Сжатие в четырехволновом смешении . . . 833

22.5.4. Фазовое сопряжение 834
22.6. Квантовые неразрушающие измерения 836
22.6.1. Эффект Керра — пример QND-переменной 836
22.6.2. Анализ интерференционного эксперимента 837
22.6.3. Вычисление видности интерференционных полос 838
22.6.4. Фазовый сдвиг зондирующей волны 839
22.6.5. Дополнительность 840
Задачи 840

ЛИТЕРАТУРА **842**

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ **872**

Научное издание

МАНДЕЛЬ Леонард, ВОЛЬФ Эмиль

ОПТИЧЕСКАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

Редактор *В.С. Ярунин*
Руководитель группы компьютерной верстки *А.А. Калачёв*



ЛР №071930 от 06.07.1999
Подписано в печать 2.08.2000. Формат 84×108 $^1/_{16}$
Бумага офсетная №1. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 112. Уч.-изд. л. 100,8. Тираж 1000 экз.

Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, Профсоюзная ул., 90

Отпечатано с оригинал-макета
в ППП «Типография «Наука» РАН
121099 Москва, Шубинский пер., 6
Заказ тип. № 398