

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА

МЕХАНИКА

Т. Циглер

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ
ПРИНЦИПЫ
ТЕРМОДИНАМИКИ
НЕОБРАТИМЫХ
ПРОЦЕССОВ
И МЕХАНИКА
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО

«М И Р»

PROGRESS IN SOLID MECHANICS

Volume IV

Edited by

I. N. SNEDDON AND R. HILL

Chapter II

SOME EXTREMUM PRINCIPLES

IN IRREVERSIBLE THERMODYNAMICS

WITH APPLICATION TO CONTINUUM MECHANICS

by

HANS ZIEGLER

Federal Institute of Technology, Zürich

1963

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY

Amsterdam

Г. ЦИГЛЕР

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ
ТЕРМОДИНАМИКИ
НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ
И МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ
СРЕДЫ

*Перевод с английского
Г. И. Баренблатта*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1966

В работе излагаются новейшие результаты по термодинамике деформирования сплошных сред. Подход автора является развитием классической статистики Гиббса, дается интерпретация неравновесности в фазовом пространстве и формулируются новые экстремальные принципы, которые применяются для вывода определяющих уравнений.

Книга представляет интерес для научных работников и инженеров, занимающихся механикой сплошных сред и термодинамикой

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Для современного этапа развития механики характерен значительный интерес к общим проблемам механики сплошной среды. По-видимому, этот интерес вызван различными причинами и не в последнюю очередь внутренними потребностями самой механики, разные разделы которой длительное время развивались в направлении решения отдельных задач без достаточной связи друг с другом. Настала пора оценить общее содержание знаний, накопленных на этом этапе конкретных исследований. Кроме того повышение интереса к общим проблемам механики сплошных сред следует связывать с массовым внедрением в технику новых материалов, не описывающихся в приемлемом приближении простейшими классическими моделями сплошных сред.

Обилие этих материалов и их разнообразие, широкий диапазон условий их использования настоятельно диктуют необходимость выработки общего подхода, пригодного для описания механического поведения достаточно широких классов материалов. Здесь намечаются два пути. Первый из них — это феноменологический подход, связанный с систематическим описанием определенных классов материалов на основе более или менее широких классов определяющих уравнений, законов сохранения, принципов инвариантности и термодинамических соображений. Другой подход связан с детальным анализом микроструктуры материала, введением и анализом макрохарактеристик этой микроструктуры. По-видимому, наиболее целесообразным направлением является синтез этих двух подходов.

Предлагаемая советскому читателю монография известного швейцарского ученого Г. Циглера представляет

собой по существу весьма интересную попытку дать определенную законченную формулировку феноменологического подхода. Особенно интересно в ней оригинальное изложение принципов термодинамики необратимых процессов, попытки их обоснования и систематическая демонстрация важности привлечения этих принципов при описании сред с диссипацией. Однако нельзя не заметить, что не все содержание монографии бесспорно: некоторые места, допускающие сомнения или возможность иных подходов, отмечены в примечаниях.

Повышение интереса к общим проблемам механики сплошной среды уже оказало радикальное воздействие на преподавание; это воздействие, несомненно, в будущем еще более возрастет. Так, например, в Московском университете уже несколько лет читается курс механики сплошных сред, на базе которого затем излагаются теория упругости, гидродинамика, газовая динамика и прочие дисциплины этого цикла. Советскому читателю известны монографии Л. И. Седова, В. Прагера, П. Жермена, отражающие накопленный советский и зарубежный опыт исследования и преподавания механики сплошных сред; можно не сомневаться, что предлагаемая монография Циглера также будет ценным подспорьем как для изучающих механику, так и для преподающих ее.

Г. Баренблатт

§ 1. Введение

В настоящее время механика сплошной среды быстро вырастает в физику сплошной среды. Одной из причин такого хода ее развития является все возрастающая роль термодинамических и электромагнитных эффектов в некоторых приложениях (газовая динамика, магнитная гидродинамика и др.). Другой причиной является взаимодействие на первый взгляд различных физических явлений, которое не позволяет, в частности, рассматривать некоторые механические явления без учета процессов другой природы. В действительности часто оказывается возможным пренебречь электромагнитными явлениями, что и сделано в этой статье. Однако некоторые механические явления (например, трение) настолько тесно связаны с термодинамикой, что существенная часть механики сплошной среды в современном смысле слова не может быть отделена от термодинамики.

Большинство основных уравнений механики сплошной среды отражает основные законы физики (совместность, сохранение массы, баланс количества движения, момента количества движения и энергии и т. д.). Эти соотношения применимы к любому виду материала, но может оказаться удобным использовать эти соотношения в различных (быть может, и эквивалентных) формах при применении их, например, для жидкостей и твердых тел. Различие между типами сплошных сред математически выражается главным образом в так называемых *определяющих уравнениях*. Эти уравнения описывают специфические свойства (идеализированных) материалов с помощью некоторого соотношения между кинематическими переменными (деформация, скорость деформации и т. д.) и переменными

статической природы (напряжение, скорость изменения напряжений и др.). Такое соотношение представляет собой характеристику рассматриваемого материала.

Связующим звеном между механикой сплошной среды и термодинамикой является теорема энергии. Если нельзя пренебречь тепловыми эффектами, то механическую теорему энергии следует заменить первым основным законом термодинамики; кроме того, в число основных соотношений следует включить уравнение теплопроводности.

Другим связующим звеном является определяющее уравнение. В противоположность материалам классической механики сплошной среды (идеальная жидкость, идеально упругое тело) наиболее важные модели сплошной среды, представляющие интерес в настоящее время (вязкая жидкость, вязко-упругие материалы, вязко-пластические и пластические твердые тела и т. д.), обладают внутренним трением. Если элемент такого материала подвергается деформации, внутри этого элемента сейчас же возникает некоторое количество энтропии. Именно это обстоятельство и приводит нас к термодинамике, или, точнее, к термодинамике необратимых процессов.

Из этих рассуждений вытекает, что, помимо различных других требований [39], определяющие уравнения должны быть согласованы с фундаментальными теоремами термодинамики. Можно ожидать, что это требование сужает класс допустимых определяющих уравнений в многочисленных разделах механики сплошной среды. Желательность такого рода ограничений хорошо известна из теории пластичности, одной из наиболее интенсивно исследуемых в настоящее время ветвей механики сплошной среды. Серьезные ограничения на возможные типы определяющих уравнений налагает так называемая теория пластического потенциала, предложенная Мизесом [21] и обобщенная Прагером [24, 25], Койтером [18] и Друкером [8, 9]; последняя версия этой теории носит название постулата Друкера. По-видимому, не существует каких-либо прямых механических причин для такого ограничения, однако из него вытекают существенные математические упрощения, касающиеся теорем единственности и вариационных принципов. Для пластических материалов это было показано Койтером [19] и др.; аналогичное до-

казательство, применимое к более широкому классу моделей сплошных сред было дано Хиллом [14]. Таким образом, существуют причины полагать, что постулат Друкера в теории пластичности и некоторые ограничения аналогичной природы в других разделах механики сплошной среды имеют физический смысл. Если их нельзя обосновать на чисто механической основе, то можно надеяться, что желаемое обоснование удастся получить из основных законов термодинамики.

Первый основной закон термодинамики не накладывает каких-либо ограничений на определяющие уравнения. Это же относится и к третьему закону. Второй основной закон термодинамики исключает процессы с отрицательным притоком энтропии. Это условие сужает класс допустимых уравнений состояния, однако не до желаемой степени. Более обещающим здесь является принцип Онзагера [22], поскольку он относится к необратимым процессам и доставляет определенную информацию о направлении таких процессов, более точную, нежели второй основной закон. В самом деле, как было показано Био [1], принципа Онзагера достаточно для исследования некоторых проблем линейной вязкоупругости и установления так называемой вязкоупругой аналогии. К сожалению, однако, применение принципа Онзагера ограничивается только линейными задачами и поэтому не может дать результатов в более интересных случаях нелинейных моделей сплошных сред (неньютоновы жидкости, нелинейные вязкоупругие тела, вязкопластичные и пластичные тела и др.).

Было предпринято несколько попыток [22, 1] интерпретировать соотношения Онзагера с помощью вариационных принципов. Циглер [46] показал, что теория Онзагера эквивалентна *принципу наименьших необратимых сил*, который можно также сформулировать как *принцип наибольшей скорости порождения энтропии*. Одно из преимуществ этих принципов состоит в их физической наглядности. Кроме того, их можно с одинаковой легкостью применять к нелинейным и к линейным задачам. Эти принципы, следовательно, обобщают теорию Онзагера, делая ее применимой к произвольным определяющим уравнениям. Наконец можно ожидать, что каждый из этих

принципов в определенных условиях окажется применимым и вне сферы механики сплошной среды, если соответствующие понятия вообще будут иметь смысл.

Для того чтобы упростить исследование, сосредоточим свое внимание на принципе наименьших необратимых сил, установив раз и навсегда и имея постоянно в виду, что этот принцип можно заменить принципом наибольшей скорости порождения энтропии или некоторыми другими обращенными формами, которые мы еще обсудим в § 4. Строгое доказательство этого принципа не представляется возможным. Однако этот принцип можно обосновать с помощью статистических рассуждений [49], в основном, таким же способом, как и фундаментальные законы термодинамики. Естественной точкой отправления здесь служит великолепная работа Гиббса [11] по статистической механике. По сравнению с другими статистическими методами такой подход имеет то преимущество, что он не зависит от какой-либо частной молекулярной модели и потому применим к любому виду сплошной среды. И на самом деле имеется отчетливая аналогия между рассмотренным здесь принципом и принципами, установленными в гл. II работы Гиббса.

На первый взгляд статистическая механика Гиббса не представляется особенно подходящей для наших целей, поскольку феноменологическая интерпретация результатов Гиббса дает только основные законы для *обратимых* процессов. Не следует забывать, однако, что необратимые процессы только недавно приобрели их сегодняшнюю значимость и что Гиббс, очевидно, не имел в виду *необратимых* процессов ни при формулировке основных представлений своей статистической механики, ни при истолковании ее результатов. На самом же деле достаточно лишь немногих незначительных усовершенствований, обобщающих рассуждения Гиббса, чтобы его результаты стали применимыми к произвольным процессам. Коль скоро это обобщение сделано, остается еще небольшой дополнительный шаг для получения желаемого обобщения принципа Онзагера.

Одной из целей настоящей статьи является изложение некоторого статистического подхода к установлению принципа наименьших необратимых сил. Другая цель состоит

в приложении этого принципа к механике сплошной среды и выяснении его связей с определяющими уравнениями. Некоторые из этих связей уже рассматривались ранее [43, 32]. Они, конечно, обоснованы не более, чем сам принцип. Однако их обоснование столь же убедительно, как и обоснование принципа Мизеса, а из современной теории пластичности немногого уцелело бы без этого принципа. Кроме того, именно эти связи позволяют подвергнуть принцип экспериментальной проверке.

Как уже упоминалось выше, для наших целей достаточно лишь небольших усовершенствований теории Гиббса. Однако тщательный анализ идей Гиббса, необходимый для установления этих изменений, приводит к одному побочному результату несколько неожиданной природы, который вызывает существенное изменение идейной основы теории и оказывается справедливым как для обратимых, так и для необратимых процессов. Основная идея Гиббса состоит в том, что данная термодинамическая система (*макросистема*) сравнивается с некоторым ансамблем чисто механических систем (*микросистемы*) и что движение этого ансамбля интерпретируется как течение в фазовом пространстве. Обычно предполагается, что это течение подчиняется уравнению неразрывности. Однако основания для такого предположения вызывают некоторые сомнения, поскольку это течение не представляет собой течения действительной среды. С другой стороны, легко видеть, что, для того чтобы объяснять произвольные термодинамические процессы, следует отказаться от этой гипотезы и заменить уравнение неразрывности уравнением переноса. Эта операция вопреки тому, что кажется на первый взгляд, согласуется с теоремой Лиувилля. Она опирается только на представление о том, что движение в фазовом пространстве не является чистой конвекцией или течением (как в случае действительной жидкости), но представляет собой наложение на это явление процесса переноса, или «потока» (того типа, который встречается в теплопередаче). Различие между этими двумя типами движения тесно связано с различием между изэнтропическими и более общими процессами. В самом деле, легко видеть, что в отсутствие потока теорема Лиувилля исключает все неизэнтропические процессы. Новый

подход выявляет теорию Гиббса в новом свете и приводит к некоторым следствиям в интерпретации статистической трактовки.

Очевидно, что статистический подход должен быть строго ограничен квазистатическими процессами, т. е. достаточно медленными изменениями состояний, когда система переходит, так сказать, от одной равновесной конфигурации к соседней. Однако следует предостеречь от неправильного мнения о том, что это ограничение исключает необратимые процессы. Хотя во многих книгах написано, что достаточно медленные изменения состояния всегда обратимы, это ошибка, которую можно, по-видимому, объяснить тем, что, обычно мысля о термодинамике, считают рабочее тело газом. Например, пластическое течение твердого тела всегда представляет собой необратимое изменение состояния, как бы медленно оно ни происходило ¹⁾.

При последующей дискуссии обратимых и необратимых процессов мы ограничимся квазистатическим случаем. Понятие термодинамической системы принимается в том же общем смысле, что и в работе Гиббса. Наиболее про-

¹⁾ Это рассуждение вызывает некоторые сомнения. На самом деле, достаточно медленный процесс изменения внешних параметров, при котором тело проходит через цепь равновесных состояний, всегда обратим. Весь вопрос в том, что такое «достаточно медленный» процесс. Для твердого тела характерное время такого процесса должно быть велико по сравнению со временем релаксации. Деформированное состояние твердого тела (за исключением всестороннего сжатия) не является состоянием полного термодинамического равновесия и, строго говоря, пока действуют приложенные напряжения, вообще не может быть равновесным. Эта неравновесность и связанное с ней медленное изменение состояния не проявляются вовсе при кратком приложении нагрузки, причем продолжительность действия нагрузки, совместимая с предположением о несущественности неравновесности, возрастает при уменьшении нагрузки. Именно в этом смысле можно говорить, что при малых нагрузках тело ведет себя упруго. При большей продолжительности действия нагрузки (или, если задаться продолжительностью действия, то при больших нагрузках) неравновесность успевает проявиться в виде пластического течения, а при еще больших нагрузках — в виде ползучести твердого тела. Подробнее см. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, стр. 55—58. — *Прим. пер.*

стым примером является элемент сплошной среды, который будет служить основным приложением. От него уже легко перейти к конечным объемам сплошной среды.

§ 2. Статистические основы

2.1. Макросистема. Рассмотрим термодинамическую систему, которая с феноменологической точки зрения находится в состоянии покоя, т. е. не обладает кинетической энергией. Пусть, далее, состояние этой системы описывается с точки зрения феноменологической механики механическими координатами x_k ($k = 1, 2, \dots, n$), которые предполагаются независимыми и меняющимися достаточно медленно. Если работа, совершаемая над этой системой при произвольном бесконечно малом изменении состояния, описываемом приращениями dx_k механических координат, дается выражением ¹⁾

$$dW = X_k dx_k, \quad (2.1)$$

то X_k можно назвать макроскопическими силами, действующими на систему.

[Если, например, деформация некоторой сплошной среды бесконечно мала, то механические координаты элемента представляют собой компоненты деформации ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), а соответствующие силы суть компоненты напряжений σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Элементарная работа (2.1) на единицу объема равна $dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$.]

С микроскопической точки зрения система состоит из большого числа молекул, x_k представляют собой внешние связи этой системы, а X_k — соответствующие внешние силы. Естественно предполагать, что с этой точки зрения система имеет чисто механические свойства и поэтому удовлетворяет энергетическому принципу механики. Таким образом, сумма работы (2.1) внешних сил и работы внутренних сил равна приращению полной кинетической энергии всех молекул. Если далее предположить,

¹⁾ Здесь и в дальнейшем предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

что внутренние силы консервативны и что кинетическая энергия молекул равна нулю (или пренебрежимо мала), то работа внешних сил, или, что то же самое, макроскопических сил, дается соотношением

$$dW = dU, \quad (2.2)$$

где U — потенциальная энергия внутренних сил. Из формул (2.1) и (2.2) следует, что макросистема консервативна и что $-U(x_k)$ представляет собой потенциальную энергию макроскопических сил X_k .

На макроскопическом уровне наиболее заметным свойством термодинамической системы является ее неконсервативное поведение. Поэтому по крайней мере от одного из перечисленных выше свойств микросистемы следует отказаться. Очевидное решение, ведущее к статистической механике, состоит в том, чтобы отказаться от последнего предположения. Предположим, таким образом, что молекулы движутся и поэтому обладают определенной кинетической энергией. В то же время сохраним предположение о том, что микросистема является механической и консервативной. Это приводит к таким следствиям.

Прежде всего величина U в выражении принципа энергии (2.2) обозначает теперь сумму потенциальной энергии внутренних сил и кинетической энергии молекул. Кроме того, U зависит уже не от одних только x_k , но и от конфигурации и состояния движения молекул. Другими словами, становится возможным изменять энергию U , оставляя значения переменных x_k неизменными. Следовательно, энергетический принцип (2.2) должен быть переписан в виде

$$dW + dQ = dU. \quad (2.3)$$

Здесь dQ обозначает приток энергии при фиксированных x_k или с макроскопической точки зрения приток энергии немеханического происхождения. Наконец, очевидно, что все члены в (2.3) представляют собой функции конфигурации микросистемы, ее состояния движения и изменения этого состояния, поэтому зависят от флуктуаций микросистемы. Поскольку эти флуктуации не воспринимаются на макроскопическом уровне, необходимо выразить величины, входящие в (2.3), через статистические

средние. В этом смысле внешние силы становятся макроскопическими силами X_k , в то время как U становится *внутренней энергией* макросистемы, а dQ представляет собой величину, называемую *притоком тепла*. Поскольку U , даже если ее интерпретировать как некоторую среднюю величину, не может зависеть от одних только x_k , необходимо ввести по крайней мере одну дополнительную макроскопическую координату в форме *температуры* θ , дающей макроскопическому наблюдателю суммарную информацию о состоянии микросистемы. Имеются случаи, когда описание состояния микросистемы с помощью одной-единственной дополнительной координаты θ является недостаточным. Эти случаи мы здесь исключим, и тогда внутренняя энергия оказывается функцией $U(x_k, \theta)$ от механических координат и температуры.

[В конечном объеме сплошной среды температура может быть функцией положения. Этот случай будет рассмотрен в п. 5.4.]

Наконец, любое состояние с независимыми от времени значениями θ и x_k будет называться *равновесным состоянием* в макроскопическом смысле. Процесс называется *изотермическим*, если θ остается постоянным, а для процесса без теплообмена между системой и окружающей средой справедливо соотношение (2.2); такие процессы называются *адиабатическими*.

2.2. Микросистема. В соответствии с изложенным в предыдущем разделе микросистему можно предполагать чисто механической и *консервативной*. Сделаем дополнительно предположения о том, что система *голономна* и *склерономна*. Первое из этих предположений достаточно правдоподобно; второе предположение при подходящем способе рассмотрения не уменьшает его общности ([41], п. 2.3). В этих предположениях движение микросистемы описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (2.4)$$

где q_k и $\dot{q}_k$ обозначают соответственно обобщенные координаты и скорости, $T(q_k, \dot{q}_k)$ — кинетическая энергия, а Q_k — обобщенные силы, которые можно получить как

коэффициенты при δq_x в выражении

$$\delta W = Q_x \delta q_x \quad (2.5)$$

для виртуальной работы на наиболее общем возможном перемещении.

Для консервативной системы работа, совершаемая всеми силами на действительном перемещении, зависит только от начальной и конечной конфигураций. Поэтому действительная работа равна

$$dW = - \frac{\partial V}{\partial q_x} dq_x, \quad (2.6)$$

где $V(q_x)$ обозначает потенциальную энергию системы. Предположим теперь, что по аналогии с (2.5) действительную работу можно записать в виде

$$dW = Q_x dq_x. \quad (2.7)$$

Если это предположение верно, то из сравнения (2.6) и (2.7) вытекает, что

$$Q_x = - \frac{\partial V}{\partial q_x}. \quad (2.8)$$

Поэтому уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_x} = 0; \quad (2.9)$$

где величина

$$L = T - V \quad (2.10)$$

представляет собой так называемый кинетический потенциал.

Вообще говоря, консервативная система не содержит сил, явно зависящих от времени. Коль скоро силы зависят только от конфигурации системы, переход от (2.5) к (2.7), очевидно, обоснован. Он необоснован, однако, если в системе имеются силы, зависящие от состояния ее движения. Единственными консервативными силами, зависящими от состояния движения системы, являются гироскопические силы, которые определяются из условия, что сила всегда ортогональна истинной скорости в точке ее приложения.

[Примерами гироскопических сил являются сила Кориолиса и обусловленная магнитным полем компонента лоренцовой силы, действующей на электрический заряд.]

В противоположность виртуальной работе действительная работа гироскопической силы всегда равна нулю. Отсюда следует, что гироскопические силы, хотя они и вносят вклад в величины Q_x , входящие в (2.5), и, таким образом, появляются в дифференциальных уравнениях (2.4), не вносят вклад в выражение потенциальной энергии и, таким образом, исчезают, если пользоваться уравнениями Лагранжа в форме (2.9) с кинетическим потенциалом (2.10). В этой форме уравнения Лагранжа, в противоположность тому, что обычно предполагается, применимы только для консервативных систем, которые, к тому же, также не гироскопичны, т. е. свободны от гироскопических сил.

Можно показать [41], что для некоторых типов гироскопических систем уравнения Лагранжа остаются справедливыми в форме (2.9), если определить L способом, отличным от определения (2.10). Предположим, что обобщенные силы состоят из двух слагаемых Q_x и G_x , отвечающих соответственно негироскопическим и гироскопическим силам, что G_x — функции только конфигурации и состояния движения системы и что их можно представить выражениями

$$G_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V'}{\partial \dot{q}_x} \right) - \frac{\partial V'}{\partial q_x}, \quad (2.11)$$

где функцию $V'(q_x, \dot{q}_x)$ можно назвать гироскопическим потенциалом. Выполняя дифференцирование по времени в первом члене (2.11), получаем

$$G_x = \frac{\partial^2 V'}{\partial \dot{q}_x \partial q_x} \dot{q}_x + \frac{\partial^2 V'}{\partial \dot{q}_x \partial \dot{q}_x} \ddot{q}_x - \frac{\partial V'}{\partial q_x}. \quad (2.12)$$

Поскольку предполагается, что G_x зависят только от q_x и $\dot{q}_x$ второй член правой части должен быть равен нулю. Поэтому V' линейно зависит от $\dot{q}_x$, или, точнее, представляет собой однородную линейную функцию обобщенных скоростей

$$V' = f_x(q_x) \dot{q}_x, \quad (2.13)$$

поскольку любой добавочный член, не зависящий от $\dot{q}_\lambda$, представлял бы негироскопические силы. Подставляя (2.13) в (2.11), получаем

$$G_\kappa = \dot{f}_\kappa - \frac{\partial f_\lambda}{\partial q_\kappa} \dot{q}_\lambda, \quad (2.14)$$

или

$$G_\kappa = \left(\frac{\partial f_\kappa}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial f_\lambda}{\partial q_\kappa} \right) \dot{q}_\lambda. \quad (2.15)$$

Обратно, (2.14) вытекает из (2.15) и (2.13).

Структура выражений (2.11) такова, что уравнения Лагранжа остаются справедливыми в форме (2.9) для гироскопических систем рассмотренного только что типа, т. е. если обобщенные гироскопические силы можно представить выражениями (2.11) или (2.15). Все, что остается здесь сделать, это заменить определение кинетического потенциала (2.10) выражением

$$L = T - V - V', \quad (2.16)$$

где V' обозначает гироскопический потенциал, а V — потенциальная энергия, фигурирующая в законе сохранения энергии

$$T + V = \text{const.} \quad (2.17)$$

В самом деле, в силу (2.7) и (2.15), действительная работа гироскопических сил равна

$$dW = G_\kappa dq_\kappa = \left(\frac{\partial f_\kappa}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial f_\lambda}{\partial q_\kappa} \right) \dot{q}_\kappa \dot{q}_\lambda dt = 0, \quad (2.18)$$

так что V' из (2.17) исчезает.

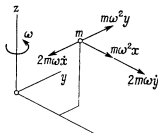
[Если q_λ — декартовы координаты в обычном пространстве, соотношение (2.15) означает, что гироскопическая сила представляет собой векторное произведение

$$\mathbf{G} = \text{rot } \mathbf{f} \times \dot{\mathbf{q}} \quad (2.19)$$

ротора некоторой вектор-функции и скорости. Поэтому гироскопический потенциал (2.13) представляет собой скалярное произведение

$$V' = \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.20)$$

В любом из упомянутых выше двух примеров условие (2.19) удовлетворено. Гироскопическая часть лоренцовой силы равна $(e/c)\mathbf{v} \times \mathbf{H}$, где e обозначает электрический заряд, $\mathbf{v}$ — скорость, c — скорость света, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, которую можно найти из соотношения $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, связывающего ее с векторным потенциалом $\mathbf{A}$. Кориолисова сила определяется соотношением $2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$, где m — масса частицы, $\mathbf{v}$ — ее скорость, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость подвижного тела, которую с точностью до множителя $1/2$ можно считать равной ротору поля скорости движущегося тела.



Р и с. 2.1. Частица в равномерно вращающейся системе координат.

На рис. 2.1 изображены компоненты центробежной и кориолисовой сил, действующих на частицу массы m и отнесенных к координатному реперу, вращающемуся с постоянной угловой скоростью вокруг оси z . Свободное движение частицы определяется функциями

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad V = -\frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2),$$

$$V' = -m\omega^2(xy - yx). \quad (2.21)$$

Используя (2.9) вместе с (2.16), получаем правильные уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - 2m\omega\dot{y} - m\omega^2x &= 0, \\ m\ddot{y} + 2m\omega\dot{x} - m\omega^2y &= 0, \\ m\ddot{z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

которые можно также вывести из закона Ньютона. Если (2.16) заменить на (2.10), то кориолисова сила исчезает из уравнений.]

Подводя итог повторяем, что микросистема предполагается голономной, склерономной и консервативной. Гироскопические силы допускаются только, если их можно представить в форме (2.11), где V' — гироскопический потенциал (2.13), линейный (и однородный) по обобщенным скоростям. Эти предположения несколько менее ограничительны, нежели предположения Гиббса, который молчаливо исключил гироскопические силы ([11], стр. 4). Это замечание имеет определенное значение в связи с принципом, который будет установлен в § 4. В соответствии с доказательством Онзагера [122], стр. 2279) гироскопические силы должны играть исключительную роль при наличии магнитного поля или вращающейся системы отсчета, так как соотношения взаимности Онзагера принимают тогда особый вид. Если бы это было верно, то отсюда следовало бы, что определяющие уравнения некоторых сплошных сред зависят от их состояния движения. Это не согласуется с принципом индифферентности материала Трусделла — Тупина ([39], стр. 702). Очевидно, что этот вопрос заслуживает дальнейшего внимания. Мы еще вернемся к нему в п. 4.5.

2.3. Ограничения, налагаемые на систему. Вряд ли необходимо отмечать, что любая микросистема, соответствующая данной макросистеме, предполагается состоящей всегда из одних и тех же молекул.

На микроскопическом уровне окружение влияет на систему путем взаимодействия между молекулами, принадлежащими окружающей среде, и молекулами системы. Единственный способ строгого учета этого взаимного влияния состоит в том, чтобы обобщить уравнения Лагранжа (2.9) так, чтобы они учитывали действие окружающей среды, а не ограничивались только молекулами самой системы. Однако не существует предела для такого расширения; ограничить его или включить неограниченное окружение в равной мере представляется невозможным. Таким образом, какое-либо упрощение представляется немыслимым. При таком положении мы будем следовать Гиббсу, отказываясь от всяких попыток учесть микроско-

пическое влияние окружения и пытаюсь вместо этого представить это влияние приближенно с помощью некоторого множества внешних параметров x_k ($k = 1, 2, \dots, n$), т. е. механическими координатами макросистемы. Это упрощение требует некоторых комментариев.

(а) Теория Гиббса основана на предположении, что потенциальная энергия представляет собой некоторую функцию $V(q_x, x_k)$ микроскопических координат q_x и параметров x_k , тогда как кинетическая энергия $T(q_x, \dot{q}_x)$ предполагается не зависящей от x_k явно ([11], стр. 5). Вместо этого мы предположим здесь, что все функции $T(q_x, \dot{q}_x, x_k)$, $V(q_x, x_k)$, $V'(q_x, \dot{q}_x, x_k)$, которые, в силу (2.9) и (2.16), определяют движение микросистемы, зависят от параметров x_k , но не от их производных по времени $\dot{x}_k$. Одной из причин для такого усовершенствования является условие [см. п. (2.2)], чтобы не были исключены гироскопические микросистемы; другая причина состоит в том, что, вообще говоря, кинетическая энергия зависит также от x_k .

[Рассмотрим элемент сплошной среды в форме кубика. Здесь, как показано в п. 2.2, параметры x_k представляют собой компоненты деформации. Не входя в дальнейшие подробности, мы видим, что они определяют границу микросистемы, или, что эквивалентно, каркас этой системы. Если бы этот каркас не был включен в систему, система была бы реономной вопреки предположениям, сделанным в п. 2.2. Однако каркас можно рассматривать как часть системы с пренебрежимо малой массой. В этом случае x_k , как и q_x , представляют собой обобщенные координаты системы.]

(б) Только что рассмотренный пример ясно показывает, что всегда существует возможность рассматривать x_k либо как реономные связи, либо как дополнительные координаты микросистемы. Дальнейшее развитие зависит только от этого выбора; только ради простоты мы принимаем последнюю точку зрения, т. е. что микросистема остается склерономной, даже если изменяются x_k . При этом гироскопический потенциал V' и кинетическая энергия T представляют собой функции всего множества координат и обобщенных скоростей, причем V' линейная и

пическое влияние окружения и пытаюсь вместо этого представить это влияние приближенно с помощью некоторого множества внешних параметров x_k ($k = 1, 2, \dots, n$), т. е. механическими координатами макросистемы. Это упрощение требует некоторых комментариев.

(а) Теория Гиббса основана на предположении, что потенциальная энергия представляет собой некоторую функцию $V(q_x, x_k)$ микроскопических координат q_x и параметров x_k , тогда как кинетическая энергия $T(q_x, \dot{q}_x)$ предполагается не зависящей от x_k явно ([11], стр. 5). Вместо этого мы предположим здесь, что все функции $T(q_x, \dot{q}_x, x_k)$, $V(q_x, x_k)$, $V'(q_x, \dot{q}_x, x_k)$, которые, в силу (2.9) и (2.16), определяют движение микросистемы, зависят от параметров x_k , но не от их производных по времени $\dot{x}_k$. Одной из причин для такого усовершенствования является условие [см. п. (2.2)], чтобы не были исключены гироскопические микросистемы; другая причина состоит в том, что, вообще говоря, кинетическая энергия зависит также от x_k .

[Рассмотрим элемент сплошной среды в форме кубика. Здесь, как показано в п. 2.2, параметры x_k представляют собой компоненты деформации. Не входя в дальнейшие подробности, мы видим, что они определяют границу микросистемы, или, что эквивалентно, каркас этой системы. Если бы этот каркас не был включен в систему, система была бы реономной вопреки предположениям, сделанным в п. 2.2. Однако каркас можно рассматривать как часть системы с пренебрежимо малой массой. В этом случае x_k , как и q_x , представляют собой обобщенные координаты системы.]

(б) Только что рассмотренный пример ясно показывает, что всегда существует возможность рассматривать x_k либо как реономные связи, либо как дополнительные координаты микросистемы. Дальнейшее развитие зависит только от этого выбора; только ради простоты мы принимаем последнюю точку зрения, т. е. что микросистема остается склерономной, даже если изменяются x_k . При этом гироскопический потенциал V' и кинетическая энергия T представляют собой функции всего множества координат и обобщенных скоростей, причем V' линейная и

тепла через поверхность элемента, создаваемый в микроскопическом масштабе нерегулярным взаимодействием между молекулами системы и молекулами ее окружения, и который может привести к потере или приросту энергии за макроскопический интервал времени, хотя x_k и поддерживаются постоянными. Упрощения, введенные Гиббсом, очевидно, не согласуются с интерпретацией теплообмена с микроскопической точки зрения. Поэтому, чтобы компенсировать этот недостаток, необходимо довести до конца статистическое представление (п. 2.5).

2.4. Гамильтонов подход. Для микросистем типа, определенного в п. 2.2, уравнения Лагранжа записываются в форме (2.9), и, как показано в п. (2.3), кинетический потенциал (2.16) представляет собой функцию типа $L(q_k, \dot{q}_k, x_k)$, если ограничиться раз и навсегда квазистатическими процессами.

Для того чтобы выписать дифференциальные уравнения движения в форме Гамильтона, вводятся (см., например, [32]) обобщенные импульсы:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \quad (2.23)$$

Уравнения Лагранжа (2.9) с учетом (2.23) принимают вид

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}. \quad (2.24)$$

Далее, функция Гамильтона определяется следующим образом:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = p_k \dot{q}_k - L. \quad (2.25)$$

Если только уравнения (2.23) можно разрешить относительно $\dot{q}_k$, то можно рассматривать H как функцию $H(p_k, q_k, x_k)$ от импульсов и координат. В соответствии с (2.25) ее приращение равно

$$dH = p_k d\dot{q}_k + \dot{q}_k dp_k - dL, \quad (2.26)$$

или, в силу (2.23) и (2.24),

$$dH = \dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k - \frac{\partial L}{\partial x_k} dx_k. \quad (2.27)$$

Из (2.27) вытекают дифференциальные уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad (2.28)$$

а также дополнительное тождество

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} = -\frac{\partial L}{\partial x_k}, \quad (2.29)$$

наличие которого объясняется тем, что x_k следует рассматривать (п. 2.3) как дополнительные координаты, производные по времени которых в L не входят. Заметим попутно, что, пользуясь (2.29), следует помнить, что независимые переменные у функций L и H не одни и те же.

Из (2.23) и представления (2.16) для кинетического потенциала легко следует, что появление при определенных обстоятельствах гироскопических сил связано со структурой импульсов. Функция Гамильтона сама по себе не содержит гироскопических членов, если только гироскопические силы получаются в соответствии с (2.11) из потенциала V' . Это вытекает немедленно из того факта, что функция V' , будучи линейной и однородной по $\dot{q}_k$, удовлетворяет соотношению Эйлера

$$\frac{\partial V'}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = V' \quad (2.30)$$

и поэтому не вносит вклада в (2.25). В самом деле, функция T , квадратичная и однородная по $\dot{q}_k$, удовлетворяет другому соотношению Эйлера

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T. \quad (2.31)$$

Поэтому из (2.16) и (2.25) следует, что

$$H' = T + V, \quad (2.32)$$

т. е. что функция Гамильтона представляет полную энергию микросистемы, не зависящую от гироскопических сил.

[Для частицы, представленной на рис. 2.1 и свободно движущейся в системе координат, равномерно вращающейся относительно оси z , выражение для кинетического по-

тенциала, согласно (2.21), получается в виде

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) + m \omega (xy - yx). \quad (2.33)$$

Импульсы (2.23) выражаются при этом в виде

$$p_x = m (\dot{x} - \omega y), \quad p_y = m (\dot{y} + \omega x), \quad p_z = m \dot{z}, \quad (2.34)$$

причем члены, содержащие ω , происходят от кориолисовой силы. Функция Гамильтона (2.25) принимает вид

$$H = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (2.35)$$

или

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \omega (xp_y - yp_x). \quad (2.36)$$

В соответствии с (2.21) она представляет собой полную энергию.]

Дифференциал функции Гамильтона $H(p_x, q_x, x_k)$ равен

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial p_x} \dot{p}_x + \frac{\partial H}{\partial q_x} \dot{q}_x \right) dt + \frac{\partial H}{\partial x_k} dx_k. \quad (2.37)$$

В силу (2.28), выражение (2.37) приводится к виду

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x_k} dx_k. \quad (2.38)$$

Этот результат подкрепляет наблюдение, уже сделанное в п. 2.3, о том, что полная энергия микросистемы зависит только от параметров x_k и, таким образом, остается постоянной, если эти параметры не меняются.

2.5. Статистический метод. Движение микросистемы определяется силами, действующими между ее молекулами, начальными условиями $p_x(t_0) = p_{x0}$, $q_x(t_0) = q_{x0}$ и граничными условиями, представляющими влияние окружающей среды, начиная с момента t_0 .

Для макроскопического наблюдателя оказывается возможным составить более или менее подходящее представление о структуре молекул и молекулярном взаимодействии. Он может формулировать то или иное подходящее

выражение для функции Гамильтона $H(p_x, q_x, x_k)$, в любой момент доступное для улучшения, если такое улучшение окажется необходимым. С другой стороны, этот наблюдатель ничего не знает о начальных условиях; кроме того, здесь имеется еще и другая трудность, связанная с тем (п. 2.3), что информация, доставляемая ему параметрами x_k относительно влияния окружающей среды, совершенно неадекватна. Это и есть причины, по которым чисто механическое представление должно быть оставлено в пользу статистического подхода. В соответствии с идеями Гиббса ([11], стр. 5) этот подход может быть осуществлен следующим образом. Вместо того чтобы следить за движением одной-единственной микросистемы, будем ассоциировать с данной макросистемой целый ансамбль, т. е. большое количество эквивалентных микросистем. Прделав это, выведем закономерности развития макросистемы из среднего поведения этого ансамбля. Используемый здесь термин «эквивалентный» можно определить несколькими способами. Один из способов, принятый здесь и приводящий к каноническому распределению Гиббса, заключается в том, что постулируется независимость изменения параметров x_k от индивидуальной микросистемы. Принимается, таким образом, что эти параметры меняются одинаково для всех систем, входящих в ансамбль, которые могут отличаться между собой начальными фазами p_{x0}, q_{x0} и, следовательно, фазами p_x, q_x в произвольный момент времени.

Может быть полезно отметить здесь, что недостаток информации о начальных условиях оправдывает статистический подход. К счастью, этот подход оказывается пригодным и для преодоления трудностей, возникающих вследствие недостатка информации, касающейся границ.

Фазовое состояние (т. е. конфигурацию и состояние движения) каждой из N микросистем, связанных с данной макросистемой, можно представить точкой с декартовыми координатами p_x, q_x в евклидовом пространстве 2ν измерений, где ν — число степеней свободы единичной микросистемы.

N фазовых точек ансамбля образуют разрывное распределение, движущееся в фазовом пространстве. Поскольку число N можно выбрать сколь угодно большим,

распределение фазовых точек можно приближенно считать непрерывным ([11], стр. 5, сноска) и, следовательно, число систем с фазовыми состояниями в момент t , лежащими в пределах $p_x, p_x + dp_x$, и $q_x, q_x + dq_x$, можно выразить соотношением

$$\rho(p_x, q_x, t) dv, \quad (2.39)$$

где ρ — фазовая плотность, т. е. число фазовых точек на единицу объема, а величина

$$dv = dp_1 \dots dp_v dq_1 \dots dq_v \quad (2.40)$$

представляет собой элемент объема в фазовом пространстве. Фазовая плотность связана с мерой вероятности $w(p_x, q_x, t)$ нахождения фазовой точки данной микросистемы в момент t в единице объема с центром p_x, q_x . В самом деле, в силу (2.40) и (2.23), dv имеет размерность $[Flt]^v$, поэтому размерность ρ имеет вид $[Flt]^{-v}$, и вероятность w определяется соотношением

$$w(p_x, q_x, t) = \frac{h^v}{N} \rho, \quad (2.41)$$

где h обозначает единицу действия, использованную при вычислении dv . Отсюда следует, что вероятность обнаружить фазовую точку рассматриваемой микросистемы в момент t в данном элементе объема dv равна

$$h^{-v} w dv = \frac{\rho}{N} dv. \quad (2.42)$$

Как и следовало ожидать, интегрирование (2.42) по всему фазовому пространству дает

$$h^{-v} \int w dv = \frac{1}{N} \int \rho dv = 1. \quad (2.43)$$

Возвращаясь снова ко всему ансамблю микросистем и движению соответствующих фазовых точек, заметим, что это движение можно интерпретировать как течение в фазовом пространстве некоторой фиктивной среды, которую в дальнейшем мы будем называть фазовой жидкостью. Скорость этого течения, так называемая фазовая скорость, представляет собой вектор в фазовом пространстве с $2v$

компонентами $\dot{p}_k, \dot{q}_k$. В силу уравнений Гамильтона (2.28), на функцию H можно смотреть в некотором смысле как на потенциал скорости. В любой момент распределение плотности в жидкости представляет собой вероятность нахождения фазовой точки некоторой данной микросистемы в той или иной области фазового пространства.

Цель статистического подхода заключается в том, чтобы связать развитие ансамбля так, как оно представляется в фазовом пространстве, с поведением соответствующей макросистемы. Нетрудно видеть, что имеющаяся информация недостаточна для того, чтобы выполнить это прямым способом, предложенным Гиббсом и с тех пор общепринятым, несмотря на весьма серьезную критику [10].

В ансамбле рассматриваемого здесь типа значения полной энергии H в данный момент времени не одинаковы для индивидуальных систем. В соответствии с (2.38), однако, изменение энергии любой единичной системы зависит только от параметров x_k и равно нулю, когда параметры x_k постоянны. Если для данного ансамбля x_k являются заданными функциями времени, дифференциальные уравнения (2.28) и начальные фазы полностью определяют движение каждой микросистемы. Статистическое представление избавляет от влияния начальных условий, при таком подходе не заботятся о недостатке информации о взаимодействии молекул с границей. В самом деле, поскольку поведение ансамбля в среднем зависит только от x_k , т. е. только от механических координат макросистемы, связь макросистемы и ансамбля не учитывает потока тепла через границу и, таким образом, ограничена по крайней мере только адиабатическими процессами.

Этот вывод легко истолковывается в фазовом пространстве. Здесь, когда x_k постоянны, полная энергия H представляет собой функцию только координат p_k, q_k и поэтому ее можно рассматривать как потенциал скорости, не зависящий от времени. Из (2.28) следует, что и поле фазовой скорости (с компонентами $\dot{p}_k, \dot{q}_k$) стационарно, хотя фазовая плотность ρ может зависеть от времени. В любом случае движение каждой единичной точки фазового пространства зависит только от ее начального положения. Поэтому распределение плотности в момент t_0

полностью определяет течение в фазовом пространстве для всех последующих времен, и уже невозможно учесть любое изменение состояния макросистемы, созданное последующим нагреванием или охлаждением.

Рассмотренная сейчас некоторая слабость статистического подхода уже отмечалась в конце п. 2.3. Корень ее лежит в невозможности учета молекулярного взаимодействия на границе. Поэтому получающееся при таком подходе течение в фазовом пространстве является определенным упрощением того, что реально происходит в ансамбле микросистем. Для того чтобы ликвидировать брешь между действительными и упрощенными течениями, необходимо освободиться от постулата о сохранении фазовых точек ([11], стр. 6) и предусмотреть вместо этого постулата возможность возникновения и исчезновения фазовых точек в некоторых областях фазового пространства и в некоторые моменты времени. Это усовершенствование традиционной точки зрения, необходимое до сих пор для статистического истолкования неадиабатических процессов, можно рассматривать как решающий шаг в направлении отказа от чисто механических рассуждений со всеми их свойствами, вытекающими из обратимости. С другой точки зрения это усовершенствование представляет собой всего лишь простое средство преобразования течения в фазовом пространстве, получающегося при приближенном подходе, в истинное течение, и тем самым средство улучшения результата, недостаток которого объяснялся подходом, основанным на неполной информации. В любом случае существенным фактором является необходимость отказа от чисто механического подхода даже в его условной статистической форме, так как этот подход не обеспечивает проникновения в детали процесса.

Постулат сохранения фазовых точек равносильен уравнению неразрывности фазовой жидкости

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial \dot{p}_x}{\partial p_x} + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial q_x} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \dot{p}_x)}{\partial p_x} + \frac{\partial (\rho \dot{q}_x)}{\partial q_x} = 0. \quad (2.44)$$

Здесь $d\rho/dt$ представляет собой материальную скорость изменения плотности, такую, как она представляется наблюдателю, движущемуся вместе с жидкостью; $\partial \rho / \partial t$

локальная скорость изменения, отмечаемая покоящимся наблюдателем; член в первых скобках представляет собой дивергенцию фазовой скорости, последние два члена представляют дивергенцию произведения плотности на фазовую скорость.

[Для сравнения заметим, что в настоящей жидкости плотности ρ уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.45)$$

где $\mathbf{v}$ означает скорость.

Отказываясь от постулата сохранения индивидуальных фазовых точек, можно, разумеется, сохранить предположение, что полное число фазовых точек все время остается равным N . Однако уравнение неразрывности (2.44) следует тогда заменить *уравнением переноса*

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial \dot{p}_x}{\partial p_x} + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial q_x} \right) + \frac{\partial \alpha_x}{\partial p_x} + \frac{\partial \beta_x}{\partial q_x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \dot{p}_x)}{\partial p_x} + \frac{\partial (\rho \dot{q}_x)}{\partial q_x} + \\ + \frac{\partial \alpha_x}{\partial p_x} + \frac{\partial \beta_x}{\partial q_x} = 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Вектор с компонентами α_x , β_x представляет изменение плотности, обусловленное обменом, т. е. созданием или уничтожением фазовых точек, и называется потоком плотности. Члены с α_x , β_x в уравнении (2.46) представляют дивергенцию этого потока. В соответствии с (2.46) имеются два типа переноса в фазовом пространстве: *течение* (или конвекция) со скоростью p_x , q_x и *поток* α_x , β_x (или кондукция). В своей первой форме уравнение переноса устанавливает, что материальное изменение плотности¹⁾ обу-

¹⁾ Обычное определение элемента ограничивается сплошными средами, удовлетворяющими уравнению неразрывности. В рассматриваемой здесь более общей ситуации элемент определяется как малая область в фазовом пространстве, движущаяся таким образом, что ее последовательные конфигурации определяются одним только течением. Таким образом, элемент всегда состоит из одних и тех же фазовых точек, за исключением тех, которые добавляются или уносятся потоком. Изменение скалярной величины для наблюдателя, движущегося вместе с элементом, будет называться материальным, хотя это название и потеряло свое непосредственное оправдание.

словливается сжатием и потоком. Во второй форме оно утверждает, что локальное изменение плотности обусловливается течением фазовой жидкости и потоком.

[В реальной сплошной среде материальная скорость возрастания внутренней энергии на единицу объема благодаря одному притоку тепла q дается выражением

$$\frac{dU}{dt} + \operatorname{div} q = 0. \quad (2.47)$$

Уравнение переноса (2.46) объединяет два типа переноса, которым отвечают соответственно уравнения (2.45) и (2.47).]

Уравнение переноса (2.46) можно упростить. Из уравнений Гамильтона вытекает, что

$$\frac{\partial \dot{p}_x}{\partial p_x} + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial q_x} = 0, \quad (2.48)$$

т. е. дивергенция фазовой скорости равна нулю. Этот результат, известный под названием теоремы Лиувилля, означает, что фазовую жидкость можно считать несжимаемой. В жидкости, удовлетворяющей уравнению неразрывности, это утверждение было бы равносильно утверждению о том, что фазовые элементы сохраняют свою плотность в ходе движения. В свете наших усовершенствованных представлений это утверждение не обязано быть верным. Вместо него получается, что любое изменение фазовой плотности представляет собой следствие одного только потока плотности. В самом деле, благодаря уравнению (2.48) уравнение (2.46) приводится к виду

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial p_x} + \frac{\partial \beta_x}{\partial q_x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial p_x} \dot{p}_x + \frac{\partial \rho}{\partial q_x} \dot{q}_x + \frac{\partial \alpha_x}{\partial p_x} + \frac{\partial \beta_x}{\partial q_x} = 0. \quad (2.49)$$

Из (2.41) становится ясным, что все предыдущие утверждения относительно фазовой плотности $\rho(p_x, q_x, t)$ остаются верными и для вероятности $w(p_x, q_x, t)$. Таким образом, уравнение переноса для w принимает вид

$$\frac{dw}{dt} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial p_x} + \frac{\partial \delta_x}{\partial q_x} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial p_x} \dot{p}_x + \frac{\partial w}{\partial q_x} \dot{q}_x + \frac{\partial \gamma_x}{\partial p_x} + \frac{\partial \delta_x}{\partial q_x} = 0, \quad (2.50)$$

где вектор с компонентами γ_x, δ_x представляет поток вероятности в фазовом пространстве. В своей последней форме это уравнение устанавливает, что локальная скорость изменения функции w является результатом течения и потока.

[Таким образом, установлена тесная связь между поведением данной макросистемы и эволюцией распределения w в фазовом пространстве. Тому, кто видел ускоренную проекцию киносъемки процесса образования кучевых облаков, захочется изобразить это распределение в виде облака, движущегося в воздушном потоке и в то же время изменяющегося по форме и плотности в результате некоторого потока, проявляющегося в виде непрерывного процесса конденсации и испарения. Течение облака иллюстрирует развитие макросистемы, объяснимое микро-механической картиной, тогда как поток представляет развитие макросистемы, остающееся вне микроскопической картины вследствие недостаточности этого подхода.]

§ 3. Классическая термодинамика

3.1. Состояния равновесия. В соответствии с п. 2.1 механическая система находится в равновесии, пока ее механические координаты и ее внутренняя энергия постоянны.

На микроскопическом уровне первое условие означает, что параметры ансамбля x_k фиксированы. Из (2.38) следует, что функция H постоянна для каждой микросистемы, но, возможно, меняется от системы к системе. Далее, поле функции H в фазовом пространстве стационарно, т. е. не зависит от t . Поэтому из (2.28) следует, что и фазовая скорость также стационарна.

В качестве эквивалента второму условию постулируем, что в фазовом пространстве нет потока ¹⁾, и добавим условие статистического равновесия Гиббса ([11], стр. 8),

¹⁾ На самом деле достаточно постулировать, что обращается в нуль дивергенция потока. Поток с нулевой дивергенцией не влияет на распределение вероятности, и мы будем в дальнейшем пренебрегать такими потоками.

согласно которому распределение вероятности стационарно. Тогда

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial p_k} + \frac{\partial \delta_k}{\partial q_k} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad (3.1)$$

так что из (2.50) следует, что

$$\frac{\partial w}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial w}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0, \quad \frac{dw}{dt} = 0. \quad (3.2)$$

В стационарном потоке линии тока совпадают с фазовыми траекториями. Вдоль каждой из этих линий функция H , а, в силу (3.2), также и функция w постоянны. Фазовые точки с данным значением H образуют гиперповерхность, которую мы будем в дальнейшем называть поверхностью энергии. Подобным же образом другое семейство гиперповерхностей, а именно поверхностей вероятности, определяется тем, что лежащие на них фазовые точки обладают равными значениями w . Каждая фазовая траектория лежит на одной H -поверхности и на одной w -поверхности. В соответствии с постулатом Гиббса ([11], стр. 32) поверхности $H = \text{const}$ и $w = \text{const}$ в состоянии статистического равновесия совпадают, т. е. все фазовые состояния микросистемы, характеризующиеся одним и тем же значением H , равновероятны. Таким образом, вероятность w представляет собой некоторую функцию энергии микросистемы

$$w = w(H). \quad (3.3)$$

Обобщая этот постулат, Гиббс показал, что простейшая подходящая функция (3.3) определяется соотношением ¹⁾

$$w = \exp \frac{\Psi - H}{\theta}. \quad (3.4)$$

¹⁾ Один из принятых способов вывода выражения (3.4) состоит в следующем. Предположим, что после приведения к состоянию статистического равновесия мы делаем каждую из систем ансамбля замкнутой. Это означает, что каждая из них сохраняет то значение энергии, которое было ей сообщено при изготовлении. Предположим, что системы с равной энергией равновероятны, сгруппируем их попарно и будем рассматривать пары как представителей нового ансамбля. Вероятность того, что пзображающая точка для этого нового ансамбля попадает в элемент объема $d\Gamma^*$ нового фазового

где Ψ и Φ — параметры, постоянные в состоянии статистического равновесия. Уравнение (3.4) описывает так называемое каноническое распределение с модулем Φ .

В литературе по статистической механике ([11,33] и т. д.) можно найти пространные обоснования уравнений (3.3) и (3.4). Можно найти также принадлежащее Гиббсу доказательство того факта, что каноническое распределение (3.4) лишь слабо отличается от микроканонического распределения, определяемого ансамблем, все системы которого имеют одинаковую энергию H . Другими словами, фазовые точки ансамбля, распределенного согласно (3.4), остаются практически сконцентрированными внутри непосредственной окрестности одной поверхности энергии. На первый взгляд это утверждение представляется несогласующимся с тем фактом, что, в силу (3.4), вероятность монотонно возрастает при пересечении поверхности энергии в направлении убывающих значений H . На самом деле между этими двумя утверждениями нет противоречия. Рассмотрим семейство эквидистантных поверхностей энергии, разделяющих фазовое пространство на слои. Перемещаясь от слоя к слою, мы находим, что фазовая плотность меняется монотонно. Поскольку объем последовательных слоев изменяется в противоположном

пространства, равна $w^*(H)d\Gamma^*$; звезда у w означает, что это, вообще говоря, другая функция энергии, так как представителем ансамбля является другая система. Очевидно, $d\Gamma^* = d\Gamma_1 d\Gamma_2$, где $d\Gamma_1$ и $d\Gamma_2$ — элементы объема в исходном фазовом пространстве, в которое попали изображающие точки каждой из первоначальных систем, вошедших в рассматриваемую пару. Попаданию в эти объемы соответствуют энергии H_1 и H_2 , и так как входящие в пару системы не взаимодействуют, то $H = H_1 + H_2$. Вследствие полной статистической независимости этих систем имеем, с другой стороны, что та же вероятность равна $w(H_1)d\Gamma_1 w(H_2)d\Gamma_2$. Сравнивая, находим

$$w^*(H_1 + H_2) = w(H_1) w(H_2).$$

Полагая здесь $H_2 = 0$, получаем

$$w^*(H_1) = w(0) w(H_1) = C w(H_1),$$

где C — постоянная. Таким образом, получаем функциональное уравнение

$$w(H_1 + H_2) = C^{-1} w(H_1) w(H_2),$$

решая которое, приходим к формуле (3.4). — Прим. перев.

направлении, нет оснований отрицать возможности того, что произведение двух величин, т. е. число фазовых точек, приходящихся на слой, не может иметь максимума на некоторой поверхности энергии $H=U$. Нет оснований отрицать и то, что этот максимум в пространстве многих измерений может оказаться очень заметным.

[Для иллюстрации этого момента рассмотрим гиперсферу в пространстве μ измерений. Если R означает радиус сферы, ее объем пропорционален R^μ . При удвоении объема сферы радиус ее возрастает только в отношении $2^{1/\mu}$, которое стремится к единице при $\mu \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что при больших значениях μ объем тонкой сферической оболочки может быть много больше объема, ограниченного внутренней границей слоя.]

Из (3.4) видно, что величины Ψ и θ представляют собой энергии. В силу соотношения (2.43), они не являются независимыми, а, наоборот, связаны соотношением

$$\exp(-\Psi/\theta) = h^{-\nu} \int \exp(-H/\theta) dv. \quad (3.5)$$

Это уравнение показывает также, что любая аддитивная константа в H появляется также и в Ψ , так что разность $\Psi - H$ не зависит от начала отсчета энергии. В соответствии с соотношением (3.4) это справедливо также и для модуля θ . Из этого соотношения следует далее, что

$$\theta \geq 0, \quad (3.6)$$

иначе состояния с $H \rightarrow \infty$ имели бы большую вероятность; при этом интеграл в (3.5) не сходил бы и Ψ стало бы бесконечным.

Распределение функции H в фазовом пространстве зависит от параметров x_k . В соответствии с (3.5) Ψ зависит от x_k и от θ . Поэтому каноническое распределение (3.4) зависит от переменных x_k и θ . Для того чтобы перейти от микроскопического подхода к макроскопическому, необходимо брать средние по всему ансамблю. Таким образом, появляется помимо механических координат другая макроскопическая переменная θ , которую, очевидно, следует интерпретировать как температуру.

3.2. Внутренняя энергия и энтропия. В соответствии с последним утверждением величины x_k и θ можно рассматривать как независимые переменные, характеризую-

щие состояние макросистемы. Определяя *внутреннюю энергию* U макросистемы как среднюю энергию микросистем, с учетом (3.4) получаем

$$U = \bar{H} = h^{-v} \int H w dv = h^{-v} \int H \exp \frac{\Psi - H}{\vartheta} dv. \quad (3.7)$$

Внутренняя энергия представляет собой первую функцию $U(x_k, \vartheta)$ состояния макросистемы. Аналогичным образом можно получить и другие средние.

Полезно ввести так называемый индекс вероятности

$$\eta = \ln w \quad (3.8)$$

([11], стр. 16). В ансамбле с каноническим распределением (3.4) η представляет собой линейную функцию от H :

$$\eta = \frac{\Psi - H}{\vartheta}. \quad (3.9)$$

Средний индекс вероятности для ансамбля дается выражением

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= h^{-v} \int \eta w dv = h^{-v} \int w \ln w dv = \\ &= h^{-v} \int \frac{\Psi - H}{\vartheta} \exp \frac{\Psi - H}{\vartheta} dv. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вместо $\bar{\eta}$ обычно используют так называемую *энтропию*

$$S = -\bar{\eta}, \quad (3.11)$$

которая представляет собой вторую функцию состояния макросистемы $S(x_k, \vartheta)$. В силу (3.11), (3.9) и первого уравнения (3.7), имеем

$$S = \frac{U - \Psi}{\vartheta}. \quad (3.12)$$

Поэтому функция $\Psi(x_k, \vartheta)$ представляет собой еще одну функцию состояния макросистемы, которую называют *свободной энергией*.

Важность энтропии следует из того обстоятельства, что имеющаяся информация о состоянии единичной микросистемы возрастает с концентрацией значений функции w внутри некоторой малой области фазового пространства.

Если заданное распределение вероятности изменяется, сохраняя справедливым условие (2.43), то

$$\int \delta w dv = 0. \quad (3.13)$$

В силу (3.10) и (3.13), соответствующее изменение $\bar{\eta}$ равно

$$\begin{aligned} \delta \bar{\eta} &= h^{-v} \int \delta (w \ln w) dv = h^{-v} \int (1 + \ln w) \delta w dv = \\ &= h^{-v} \int \ln w \delta w dv. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Изменение w можно осуществлять шаг за шагом таким образом, что на каждом шагу рассматривается только одна пара элементов dv_1 и dv_2 с противоположными знаками δw . Предположим, что $\delta w_1 < 0$ и $\delta w_2 > 0$, где индекс относится к элементу. Выбирая размеры элементов так, что

$$\delta w_1 dv_1 + \delta w_2 dv_2 = 0, \quad (3.15)$$

можно удовлетворить соотношению (3.13). В силу (3.15), вклад каждого шага в (3.14) дается соотношением

$$h^{-v} (\ln w_1 \delta w_1 dv_1 + \ln w_2 \delta w_2 dv_2) = h^{-v} \ln \frac{w_2}{w_1} \delta w_2 dv_2, \quad (3.16)$$

так что он положителен или отрицателен в зависимости от того, будет ли $w_2 \geq w_1$, т. е. от того, увеличивает или уменьшает данный шаг информацию о состоянии микросистемы. Средний индекс вероятности $\bar{\eta}$ является, таким образом, некоторой мерой имеющейся информации о состоянии индивидуальной микросистемы. Наоборот, энтропия S служит мерой недостаточности такой информации¹⁾.

[Предположим, что w постоянно в некоторой области Δv фазового пространства, и что вне этой области w равно нулю. Для того чтобы удовлетворить условию (2.43), величина w внутри Δv должна быть равной

$$w = \frac{h^v}{\Delta v}. \quad (3.17)$$

¹⁾ В этом смысле понятие энтропии употребляется также вне термодинамики, например в теории информации.

Средний индекс вероятности (3.10) равен

$$\bar{\eta} = \ln \frac{h^{\gamma_1}}{\Delta v}, \quad (3.18)$$

поэтому энтропия равна

$$S = \ln \frac{\Delta v}{h^{\gamma}}. \quad (3.19)$$

Из (3.18) и (3.19) следует, что

$$\bar{\eta} \rightarrow -\infty, \quad S \rightarrow \infty \quad (\Delta v \rightarrow 0) \quad (3.20)$$

и

$$\bar{\eta} \rightarrow -\infty, \quad S \rightarrow \infty \quad (\Delta v \rightarrow \infty). \quad (3.21)$$

Эти соотношения ясно иллюстрируют убывание энтропии с ростом определенности фазового состояния микросистемы и, с другой стороны, возрастание энтропии с уменьшением информации.]

3.3. Квантово-механический подход. Одним из больших преимуществ идей Гиббса является то, что они с равной легкостью применимы как к квантово-механическому, так и к классическому подходу. Для того чтобы перейти от классической точки зрения к квантово-механической, нужно допустить принципиальную невозможность точного знания того, где в фазовом пространстве находится в некоторый момент времени фазовая точка, представляющая заданную микросистему. Вместо этого фазовое пространство подразделяется на малые, но конечные ячейки объема h^{γ} , где h — квант действия Планка ([33], стр. 24), который в то же самое время можно использовать как единицу действия в смысле предшествующих разделов. При этом предполагается, что наибольшая возможная информация о данной микросистеме — это знание того, какая ячейка содержит соответствующую фазовую точку.

При такой модификации ω становится дискретной функцией в фазовом пространстве. Распределение вероятности считается заданным, если для каждой ячейки известна вероятность попадания в нее фазовой точки. Очевидно, хотя это и не имеет значения ввиду малости ячеек, что все фазовые интегралы превращаются в суммы, пространственные по ячейкам. Существенно более важным является тот факт, что интервал $0, \dots, \infty$, в котором

в соответствии с классической точкой зрения могут лежать значения функции w , сокращается до интервала $0, \dots, 1$. В соответствии с определением w (п. 2.5) значение $w > 1$ равносильно уверенности обнаружить фазовую точку в элементе, объем которого равен $h^*/w < h^*$, т. е. меньше, чем единица объема. С точки зрения квантовой механики, однако, оптимальная информация, которую можно рассчитывать получить, — это знание ячейки, в которой содержится фазовая точка.

Итак,

$$w \leq 1. \quad (3.22)$$

Комбинируя (3.22) с (3.6), можно заключить из (3.4), что

$$\Psi \leq H, \quad (3.23)$$

так что каноническое распределение не содержит микросистем с энергией, меньшей Ψ . Далее из (3.23) и (3.7) следует

$$\Psi \leq U, \quad (3.24)$$

так что свободная энергия всегда меньше внутренней энергии¹⁾. Из (3.22), (3.8), (3.10) и (3.11) получаем, наконец,

$$\bar{\eta} \leq 0, \quad S \geq 0, \quad (3.25)$$

так что энтропия никогда не бывает отрицательной.

Возвратимся к примеру, изложенному в конце п. 3.2. Ясно, что случай оптимальной информации с точки зрения квантовой механики соответствует некоторой функции w , обращающейся в нуль везде, кроме одной-единственной ячейки $\Delta v = h^v$, где в соответствии с (3.17) она принимает значение $w=1$. В силу (3.19), $S=0$. Наоборот, если $S=0$, то из (3.19) и (3.17) следует, что $w=1$. Таким образом, нулевая энтропия всегда соответствует случаю оптимальной информации в квантово-механическом смысле.

3.4. Квазистатические процессы. Произвольный квазистатический процесс для макросистемы характеризуется медленными изменениями механических координат x_k и температуры ϑ .

¹⁾ Любопытно, что этот факт, который обычно считается очевидным, не следует из классической термодинамики.

На микроскопическом уровне изменение x_k означает, что полная энергия H единичной микросистемы подвергается некоторому изменению. Кроме того, поле функции H в фазовом пространстве перестает быть стационарным, и то же самое, согласно (2.28), справедливо для поля фазовой скорости. Как уже было отмечено в п. 2.5, имеются также изменения состояния, для которых x_k постоянны, и для их истолкования на микроскопическом уровне необходимо предположить существование некоторого потока в фазовом пространстве. Отсюда следует, что соотношения (3.1), (3.2) уже больше не справедливы и их снова следует заменить уравнением переноса (2.50).

Поскольку течение в фазовом пространстве нестационарно, фазовые траектории и линии тока не совпадают. Функции H и w меняются как локально, так и для наблюдателя, участвующего в движении. Разумеется, все еще возможно определить H - и w -поверхности, но эти поверхности не остаются неподвижными в фазовом пространстве.

Следует ожидать, что для процессов, которые достаточно медленны с макроскопической точки зрения, распределение ансамбля остается приближенно каноническим, хотя механические координаты x_k , температура ϑ и, следовательно, свободная энергия Ψ не постоянны. Обращая это утверждение, мы дополним данное в п. 2.3 предварительное определение *квазистатического процесса* дополнительным постулатом о том, что распределение в фазовом пространстве остается существенно каноническим в ходе всего процесса. Тогда из (3.4) следует, что в любой момент поверхности $H = \text{const}$ и $w = \text{const}$ совпадают, т. е. что в любой момент функция вероятности w постоянна вдоль любой поверхности энергии. С другой стороны, однако, соотношение (3.3) больше не выполняется: на любой поверхности $H = \text{const}$ функция w , вообще говоря, в ходе процесса меняется, то же самое справедливо для функции H на любой поверхности $w = \text{const}$.

Функция H зависит от одних только величин x_k . Поэтому фазовые точки, представляющие единичные микросистемы с одним и тем же значением H , в любой данный момент времени t_0 также лежат на одной H -поверхности и, следовательно, на одной w -поверхности в любой другой момент времени t . Однако поверхность, определяемая эти-

ми точками, соответствует постоянному значению H , только если она стационарна. В соответствии с (2.50) она соответствует постоянному значению w , только если не существует потока между поверхностями энергии.

Любой процесс рассмотренного здесь типа можно интерпретировать в терминах изменений, происходящих с H - и w -поверхностями в фазовом пространстве. Поступая таким образом, мы можем не обращать внимания на компоненты фазовой скорости и потока, касательные к поверхностям энергии, поскольку для канонического распределения w на этих поверхностях постоянно.

В случае процесса, характеризующегося постоянными значениями параметров x_k , энергия каждой микросистемы остается неизменной, поэтому течение в направлении, перпендикулярном поверхностям энергии, отсутствует. Вообще говоря, справедливо также обратное положение: изменение величин x_k обычно приводит к возникновению течения в направлении, перпендикулярном поверхностям энергии. Если, с другой стороны, исключить любой лоток, нормальный к поверхностям энергии, то из (2.50) вытекает, что $dw=0$. Тогда из (3.8) и (3.10) следует, что η остается постоянной; таким образом, процесс характеризуется постоянным значением энтропии S . Обратное утверждение несправедливо.

Для произвольного процесса из (3.5) и замечания, что H является функцией одних только x_k , следует, что

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{\Psi}{\vartheta}\right)\left(-\frac{1}{\vartheta}d\Psi + \frac{\Psi}{\vartheta^2}d\vartheta\right) = \\ & = h^{-v} \left[\frac{1}{\vartheta^2}d\vartheta \int H \exp\left(-\frac{H}{\vartheta}\right)dv - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\vartheta}dx_k \int \frac{\partial H}{\partial x_k} \exp\left(-\frac{H}{\vartheta}\right)dv \right], \end{aligned} \quad (3.26)$$

или

$$\begin{aligned} d\Psi - \frac{\Psi}{\vartheta}d\vartheta &= -\frac{1}{\vartheta}d\vartheta \left(h^{-v} \int H \exp \frac{\Psi-H}{\vartheta} dv \right) + \\ &+ dx_k \left(h^{-v} \int \frac{\partial H}{\partial x_k} \exp \frac{\Psi-H}{\vartheta} dv \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

В силу (3.4), скобки в (3.27) представляют собой средние от H и $\partial H/\partial x_k$. Используя (3.7) и вводя обозначение

$$X_k^{(r)} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_k} \right)^r, \quad (3.28)$$

мы получаем из (3.27)

$$d\Psi - \frac{\Psi'}{\vartheta} d\vartheta = - \frac{U}{\vartheta} d\vartheta + X_k^{(r)} dx_k, \quad (3.29)$$

или, в силу (3.12),

$$d\Psi' = -S d\vartheta + X_k^{(r)} dx_k. \quad (3.30)$$

Из (3.12) следует также, что

$$dU' - d\Psi' = S d\vartheta + \vartheta dS, \quad (3.31)$$

так что после исключения $d\Psi$ из (3.30) и (3.31) мы получаем окончательно

$$dU = \vartheta dS + X_k^{(r)} dx_k. \quad (3.32)$$

Все эти соотношения принадлежат Гиббсу ([11], стр. 44). В частности, соотношение (3.32) представляет собой не что иное, как основное дифференциальное уравнение, играющее ключевую роль в большей части работы Гиббса. Однако если мы хотим применить результаты к процессам, отличным от обратимых, то становится необходимым дать им истолкование, несколько отличающееся от истолкования, принятого Гиббсом.

Так как H представляет собой полную энергию единичной микросистемы, то коэффициенты $\partial H/\partial x_k$ в (2.38) представляют собой внешние силы, действующие на эту микросистему. Весьма соблазнительно, следуя Гиббсу, попытаться интерпретировать средние значения (3.28) как макроскопические силы в смысле п. 2.1. Однако мы снова заметим, что влияние окружающей среды на микросистему описывается параметрами x_k не вполне адекватным образом. Отсюда следует, что не существует настоящего оправдания для только что отмеченной интерпретации, которая ограничивает пригодность соотношения (3.32) только к обратимым процессам. Сохраним поэтому верхний индекс r в (3.28) и будем называть эти средние *обра-*

тимыми силами макросистемы. Объяснение этого названия будет дано в п. 3.6.

3.5. Первая фундаментальная теорема. В предыдущих разделах механические координаты и температура ϑ использовались в качестве независимых переменных, характеризующих состояние макросистемы, а остальные переменные состояния, такие, как, например, внутренняя энергия или энтропия, рассматривались как функции $U(x_k, \vartheta)$, $S(x_k, \vartheta)$ от x_k и от ϑ . Далее было получено важное уравнение (3.32) и было сделано наблюдение в п. 3.4, что простейшие процессы в фазовом пространстве соответствуют постоянным значениям x_k и S . Поэтому удобно, по крайней мере временно, использовать в качестве независимой переменной энтропию наряду с x_k и представить внутреннюю энергию и температуру в формах $U(x_k, S)$, $\vartheta(x_k, S)$.

Введем теперь макроскопические силы X_k в смысле п. 2.1 и будем рассматривать разности $X_k^{(i)} = X_k - X_k^{(r)}$ между этими силами и обратимыми силами. Называя эти разности *необратимыми силами* и отсылая к п. 3.6 за объяснением этого термина, заметим, что каждая макроскопическая сила появляется теперь в виде суммы

$$X_k = X_k^{(r)} + X_k^{(i)} \quad (3.33)$$

обратимой и необратимой частей. В силу (3.33), уравнение (3.32) принимает вид

$$dU = X_k dx_k - X_k^{(i)} dx_k + \vartheta dS. \quad (3.34)$$

Первая фундаментальная теорема термодинамики устанавливает, что принцип сохранения энергии справедлив не только для микросистемы, но пригоден также и для макросистемы в смысле уравнения (2.3). В соответствии с этим уравнением приращение внутренней энергии дается элементарной работой макроскопических сил плюс некоторое немеханическое слагаемое dQ , которое называется притоком тепла.

С микроскопической точки зрения dQ , очевидно, представляет собой приращение энергии, обусловленное молекулярным взаимодействием вдоль границы и не учитываемое параметрами x_k . При таком истолковании первая фундаментальная теорема представляет собой не что иное,

как энергетический принцип механики. На микроскопическом уровне, однако, механическое влияние окружающей среды полностью определяется параметрами x_k . С этой точки зрения dQ представляет собой немеханическое увеличение энергии, и первая фундаментальная теорема должна интерпретироваться как аксиома или как определение притока тепла dQ . Макроскопическая работа (2.1) появляется как первая сумма в (3.34). Первая фундаментальная теорема поэтому эквивалентна утверждению, что приток тепла равен

$$dQ = \vartheta dU - X_k^{(i)} dx_k. \quad (3.35)$$

3.6. Вторая фундаментальная теорема. Разрешая (3.35) относительно приращения энтропии, получаем

$$d\bar{S} = \frac{dQ}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta} X_k^{(i)} dx_k, \quad (3.36)$$

или

$$dS = d^{(r)}S + d^{(i)}S; \quad (3.37)$$

где

$$d^{(r)}S = \frac{1}{\vartheta} dQ, \quad d^{(i)}S = \frac{1}{\vartheta} X_k^{(i)} dx_k. \quad (3.38)$$

В соответствии с п. 2.1 адиабатический процесс определяется тем, что в нем отсутствует какой бы то ни было теплообмен с окружающей средой, т. е. соотношением $dQ=0$. Таким образом, $d^{(i)}S$ представляет возрастание энтропии, не зависящее от теплообмена и полностью обусловленное изменениями величин x_k . С другой стороны, $d^{(r)}S$ определяется теплообменом и не зависит от x_k . В соответствии с (3.37) приращение энтропии состоит из двух частей: $d^{(r)}S$, обусловленного теплообменом с окружающей средой и называемого *притоком энтропии* (или соответственно *оттоком*, если знак этой величины отрицателен), тогда как $d^{(i)}S$ не зависит от теплообмена и называется *порождением энтропии* внутри системы¹⁾. Процесс, для которого $dS=0$, называется *изэнтропическим*.

Будем называть процесс *обратимым* или *необратимым* в зависимости от того, будет ли порождение энтропии на его бесконечно малых шагах равно нулю или отлично

¹⁾ Или *внутренним возрастанием энтропии*. — Прим. ред.

от нуля. Значение этих двух терминов станет сейчас ясным. В силу (3.38), данное сейчас определение означает, что любой процесс, идущий при постоянных x_k , обратим точно так же, как любой процесс с $X_k^{(i)}$, обращающимися тождественно в нуль, т. е. с $X_k = X_k^{(r)}$. Именно по этой причине величины $X_k^{(r)}$ и $X_k^{(i)}$ называются, соответственно, обратимыми и необратимыми силами. Это же объясняет и верхние индексы r и i в (3.38) ¹⁾.

[Утверждение о том, что изменения состояния при фиксированных значениях x_k обратимы, на первый взгляд, расходится с хорошо известным фактом, что теплообмен внутри замкнутой системы представляет собой необратимый процесс. Однако это несоответствие — только кажущееся. Дело в том, что мы ограничились в п. 2.1 системами, характеризующимися единственным значением температуры. В сплошной среде это условие удовлетворяется, если ограничиться бесконечно малым элементом. Случай системы конечного объема, характеризующийся температурным полем, будет рассмотрен в п. 5.4.]

Вторая фундаментальная теорема термодинамики устанавливает, что порождение энтропии никогда не бывает отрицательным, или, точнее, что

$$d^{(i)}S \geq 0; \quad (3.39)$$

где знак равенства справедлив для обратимых процессов, а знак неравенства — для необратимых.

Неравенство (3.39) оправдывает название «необратимые» для процессов с порождением энтропии.

В связи с (3.38) было отмечено, что порождение энтропии $d^{(i)}S$ всегда получается вследствие изменения x_k , тогда как приток (или отток) энтропии $d^{(r)}S$ обуславливается теплообменом. С другой стороны, мы уже заметили в п. 3.4, что в фазовом пространстве не возникает течения в направлении, перпендикулярном поверхности энергии, когда параметры x_k фиксированы. Поэтому теплообмен с окружающей средой соответствует чистому потоку в фазовом пространстве, так что приращение энтропии $d^{(r)}S$ представляет собой соответствующее изменение имеющейся информации, относящейся к состоянию единичной

¹⁾ По-английски reversible и irreversible processes. — Прим. ред.

микросистемы. Эта часть процесса обратима, знак $d^{(r)}S$ может быть произвольным; возрастание энтропии $d^{(r)}S$ определяется температурой θ и притоком тепла dQ . Из рассуждений п. 3.4 следует, далее, что изменение x_k обычно приводит к появлению течения, перпендикулярного к поверхностям энергии. Это течение, однако, оставляет энтропию неизменной и, таким образом, представляет другую обратимую часть процесса. Отсюда следует, что порождение энтропии, $d^{(i)}S$, которое также возможно, следует приписать потоку, имеющему место в то же время и так же происходящему от изменения x_k . В соответствии с (3.39) это необратимая часть процесса; связанное с ней порождение энтропии остается неизвестным, пока не известно, каким образом силы X_k разбиваются на части $X_k^{(r)}$ и $X_k^{(i)}$.

Теперь уже очевидно, что для процессов рассмотренного здесь типа вторая фундаментальная теорема равносильна утверждению о том, что в фазовом пространстве поток, нормальный к поверхности энергии, поскольку он обусловлен изменением x_k , уменьшает информацию о единичной микросистеме и, таким образом, увеличивает энтропию. Согласно этому утверждению, процессы с чистым убыванием энтропии безусловно не возможны. Благодаря теплообмену с окружающей средой, который вызывает другой поток, нормальный к поверхностям энергии, энтропия может изменяться в любую сторону и независимо от x_k .

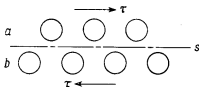
Можно отметить, что в общем случае поток в фазовом пространстве соответствует изменению энтропии. В отличие от порождения энтропии внутри системы приток или отток энтропии находится под непосредственным контролем макроскопического наблюдателя. Итак, вторая фундаментальная теорема эквивалентна также следующему утверждению, которое носит несколько более общий характер, чем формулировка, данная в одном из последних параграфов. В термодинамическом процессе любой поток в фазовом пространстве, не контролируемый макроскопическим наблюдателем, уменьшает информацию о состоянии микросистемы и поэтому увеличивает энтропию. Мы будем называть эту формулировку *фазовой версией* второй фундаментальной теоремы.

Различие между течением и потоком в фазовом пространстве, очевидно, оказывает существенную помощь при интерпретации квазистатических процессов и, в частности, второй фундаментальной теоремы. Оно помогает также в уточнении обычных формулировок утверждений, касающихся изменения вероятности и информации в необратимых процессах. Однако здесь остается один важный вопрос, который необходимо обсудить.

Идея потока в фазовом пространстве была выдвинута в п. 2.5, поскольку макроскопический процесс с теплообменом нельзя интерпретировать с помощью только одного течения в фазовом пространстве. Мы уже видели в п. 3.4, что если исключить возможность появления потока, то приходится ограничиться только изэнтропическими процессами. Это означает, что при любом изменении энтропии возникает поток в фазовом пространстве. В п. 3.4 было отмечено, что введение потока можно интерпретировать либо как решительный шаг, выводящий нас за пределы чисто механических рассуждений, либо же как простой способ для преодоления недостатков статического подхода. Так, когда дело касается границы системы, и поэтому притока (или оттока) энтропии, положение вполне ясно и уже обсуждалось выше. Здесь параметры не учитывают молекулярного взаимодействия, и этот недостаток компенсируется введением потока. Однако порождение энтропии внутри системы эквивалентно другому потоку, так что становится необходимым проанализировать второй недостаток статистического подхода. По-видимому, этот недостаток обуславливается отклонениями от канонического распределения, обязательно имеющимися в необратимых процессах. Объясним это на некотором простом примере.

[Обычно пластическое течение твердого тела объясняется скольжением по плоскостям скольжения под действием внешних сил, облегченное наличием в теле дислокаций. На рис. 3.1 изображена упрощенная картина такого скольжения, причем a и b — два ряда атомов в невозмущенной решетке, s — линия скольжения при чистом сдвиге. Если сдвига нет, то атомы колеблются вокруг конфигурации, представленной на рис. 3.1, которая отвечает минимуму потенциальной энергии. Соответствующий

ансамбль в фазовом пространстве является канонически распределенным вдоль некоторой поверхности энергии. Если постепенно прикладывается касательное напряжение τ , то ряд атомов a несколько сдвигается направо относительно ряда b . Работа, совершаемая напряжением τ , увеличивает потенциальную и кинетическую энергии, и поверхность энергии, вдоль которой распределен ансамбль, претерпевает непрерывную деформацию в фазовом пространстве. Когда атомы рядов a и b располагаются напротив один другого, потенциальная энергия достигает максимума и конфигурация становится неустойчивой. Поэтому



Р и с. 3.1. Пластическое течение при чистом сдвиге.

ряд или некоторая часть его начинает двигаться быстро и притом без помощи поля напряжений τ и приходит в окрестность соседней устойчивой равновесной конфигурации, относительно которой атомы снова начинают колебаться, но на этот раз энергия колебаний создается за счет работы напряжений τ .

Ясно, что переход от неустойчивой равновесной конфигурации к устойчивой происходит со скоростью, сравнимой со скоростями атомов. Поэтому эта стадия процесса ни в коем случае не является квазистатической, что находится в противоречии с одним из наших главных предположений. Это означает, что значительная часть накопленной в системе потенциальной энергии почти мгновенно превращается в кинетическую энергию. В фазовом пространстве это превращение очевидным образом должно включать переход от канонически распределенного ансамбля из непосредственной окрестности некоторой поверхности энергии к окрестности второй поверхности, не обязательно близкой к первой, и последующее перераспределение по второй поверхности в соот-

ветствии с каноническими законами. Этот разрывный процесс не только содержит переходные отклонения от канонического распределения, он также полностью отличается от того процесса, который можно было бы ожидать в фазовом пространстве в отсутствие неустойчивостей. Именно это отступление в развитии ансамбля, создаваемое влиянием неустойчивостей, и следует объяснить потоком в фазовом пространстве.

Наконец, рассмотренный только что пример представляет собой полезную иллюстрацию понятия необратимости. С механической точки зрения не существует причин, по которым единичная микросистема не может проделать движения, соответствующего обращению рассмотренного процесса. Прежде всего, однако, это означало бы, что напряжение сдвига τ равно нулю, пока не достигается неустойчивая равновесная конфигурация, после чего τ снова стремится к нулю. Во-вторых, мала вероятность того, что единичная фазовая точка в надлежащий момент окажется в положении, откуда возможно возвращение к тому, что называлось окрестностью первой поверхности энергии.]

Следует ожидать, что в других случаях, когда имеется порождение энтропии, положение обстоит аналогичным образом.

[До сих пор мы исключали проблемы, аналогичные теплообмену между несколькими телами с различной в начальный момент температурой. Тем не менее можно отметить, что распределение в фазовом пространстве, представляющее все рассматриваемые тела, не является каноническим в момент контакта, но становится каноническим благодаря потоку через поверхность энергии.]

3.7. Некоторые следствия. В соответствии со второй фундаментальной теоремой (3.39) элементарное порождение энтропии, определяемое вторым уравнением (3.38), равно нулю для обратимого процесса и положительно для необратимого процесса. Очевидно, что это же справедливо и для так называемой элементарной *работы диссипации*

$$dW^{(i)} = X_h^{(i)} dx_h = \theta d^{(i)}S \geq 0. \quad (3.40)$$

Если процесс обращен, каждая необратимая сила $X_h^{(i)}$, если она отлична от нуля, должна изменить свой знак

вместе с изменением знака у соответствующего dx_k . Это не так для обратимых сил $X_k^{(r)}$. Их элементарная работа равна

$$dW^{(r)} = X_k^{(r)} dx_k. \quad (3.41)$$

В силу (3.33), две величины (3.40) и (3.41), складываясь, дают полную элементарную работу (2.1).

Если сохранить энтропию S как независимую переменную в дополнение к x_k , то дифференциал внутренней энергии будет определяться выражением

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial U}{\partial S} dS \quad (3.42)$$

Сравнивая (3.42) и (3.32), получаем

$$X_k^{(r)} = \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad \vartheta = \frac{\partial U}{\partial S}. \quad (3.43)$$

Таким образом, при только что описанном выборе независимых переменных взятие частных производных внутренней энергии по механическим координатам и энтропии дает обратимые силы и температуру.

Если, с другой стороны, мы предпочтем использовать температуру ϑ как независимую переменную в дополнение к x_k , то удобнее исходить от свободной энергии, определяемой, в силу (3.12), соотношением

$$\Psi = U - \vartheta S. \quad (3.44)$$

Дифференциал свободной энергии представляется в виде

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} d\vartheta, \quad (3.45)$$

так что сравнение между (3.45) и (3.30) дает

$$X_k^{(r)} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}, \quad S = - \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}. \quad (3.46)$$

Следовательно, при новом выборе независимых переменных частные производные свободной энергии по механическим координатам и температуре дают обратимые силы и энтропию с обратным знаком.

Понятие обратимости до сих пор использовалось в связи с квазистатическими процессами. Иногда удобно применять это понятие к самой системе. Таким образом, систему, в которой необратимые силы $X_k^{(i)}$ и, следовательно, работа диссипации (3.40) равны нулю независимо от величин dx_k , можно назвать (идеально) *обратимой системой*. С другой стороны, можно называть *идеально необратимой системой* такую систему, для которой обратимые силы $X_k^{(r)}$ и, следовательно, их работа (3.41) всегда равны нулю, и, таким образом, $dW = dW^i$. Вообще говоря, как $X_k^{(r)}$, так и $X_k^{(i)}$ не равны нулю. Естественно говорить в этих случаях о (неидеально) *необратимых системах*; поведение таких систем лежит где-то между поведением предельных систем, которые только что были определены.

[В соответствии с этими определениями элементарные объемы несжимаемой вязкой жидкости или идеально пластического твердого тела представляют собой примеры идеально необратимых систем. Элементарные объемы идеального газа или упругого тела суть идеально обратимые системы. Элементарные объемы сжимаемой вязкой жидкости или вязко-упругого тела суть (не идеально) необратимые системы. Следует отметить, однако, что теплообмен в конечных объемах любого из названных тел представляет собой необратимый процесс.¹

Если внутренняя энергия задана как функция $U(x_k, S)$, то обратимые силы $X_k^{(r)}$ и температура θ получаются по формулам (3.43). Опять-таки, если свободная энергия задана в форме $\Psi(x_k, \theta)$, то уравнения (3.46) определяют обратимые силы $X_k^{(r)}$ и энтропию S . Необратимые силы $X_k^{(i)}$, однако, остаются совершенно неопределенными, если не считать того, что они должны удовлетворять неравенству (3.40).

3.8. Третья фундаментальная теорема. В п. 2.1 было отмечено, что консервативная система молекул, не охваченных заметным движением, удовлетворяет принципу энергии в форме (2.2). Было показано также, что истинное термодинамическое поведение соответствующей макросистемы следует объяснять движением молекул.

Вообразим себе теперь, что посредством охлаждения от системы отведено настолько много энергии, что ее кинетическая энергия становится пренебрежимо малой. В ходе этого процесса макросистема приближается к состоянию, в котором принцип энергии применим в форме (2.2) и сравнение с (2.1) показывает, что в пределе внутренней энергия становится функцией $U(x_k)$ от одних только механических координат. Из второго уравнения (3.43) следует, что одновременно температура ϑ стремится к нулю. Поэтому нуль абсолютной температуры ϑ соответствует состоянию, в котором молекулы не обладают кинетической энергией.

В соответствии с первым уравнением (3.43) обратимые силы $X_k^{(r)}$ также становятся при этом функциями одних только x_k , когда температура ϑ стремится к нулю. Поэтому из первого уравнения (3.46) следует, что $\partial^2 \Psi / \partial x_k \partial \vartheta \rightarrow 0$ при $\vartheta \rightarrow 0$. В силу второго уравнения (3.46), это означает, что $\partial S / \partial x_k \rightarrow 0$ при $\vartheta \rightarrow 0$. Это и составляет содержание *третьей фундаментальной теоремы* термодинамики, утверждающей, что при приближении абсолютной температуры к нулю энтропия стремится к пределу, не зависящему от механических координат x_k .

§ 4. Термодинамика необратимых процессов

4.1. Некоторые экстремальные принципы. В соответствии с п. 3.7 обратимые силы $X_k^{(r)}$ и температуру ϑ можно получить, вычислив частные производные внутренней энергии $U(x_k, S)$ по механическим координатам x_k и энтропии S . Аналогично, дифференцируя свободную энергию $\Psi(x_k, \vartheta)$ по x_k и ϑ , получаем $X_k^{(r)}$ и $-S$. Таким образом, обратимая часть характеристик поведения системы определяется одной функцией состояния, U или Ψ .

Для необратимых характеристик поведения системы не существует подобных правил. Правда, вторая фундаментальная теорема дает некоторое условие, связывающее независимые переменные состояния с необратимыми силами $X_k^{(i)}$, однако эта связь достаточно слаба. Здесь существует брешь, которую мы постараемся закрыть

с помощью некоторого простого дополнительного предложения.

В п. 3.6 было показано, что любой квазистатистический процесс, включающий изменение переменных x_k и не вполне обратимый, приводит к появлению потока в фазовом пространстве, эквивалентного некоторому порождению энтропии $d^{(i)}S > 0$. Это порождение энтропии может зависеть от состояния системы и ее истории; иначе говоря, оно полностью определяется приращениями dx_k и может быть выражено, согласно (3.40), через температуру и элементарную работу диссипации. На определенном этапе процесса $d^{(i)}S$ и $dW^{(i)}$ зависят, таким образом, от приращений dx_k .

Введем теперь *скорость порождения энтропии* $d^{(i)}S/dt$ и *скорость работы диссипации* $P^{(i)} = dW^{(i)}/dt$. Уравнение (3.40) принимает при этом вид

$$P^{(i)} = X_k^{(i)} \dot{x}_k = \vartheta \frac{d^{(i)}S}{dt} \geq 0, \quad (4.1)$$

и из того, что было только что сказано, следует, что на данном этапе процесса скорость работы диссипации представляет собой некоторую функцию

$$P^{(i)} = D(\dot{x}_k) \geq 0 \quad (4.2)$$

от скоростей $\dot{x}_k$. Следуя Рэлею [28, 29], мы будем называть $D(\dot{x}_k)$ *диссипативной функцией системы*. Она столь же важна для характеристики необратимой части процесса, как внутренняя и свободная энергия для его обратимой части. Следует помнить хотя представление $D(\dot{x}_k)$ не подчеркивает этого момента, что, вообще говоря, диссипативная функция зависит не от одних только $\dot{x}_k$, но и от состояния системы и ее истории. Следует также отметить, что диссипативная функция непосредственно получается, если рассматривать развитие системы в фазовом пространстве, и определяется соотношением

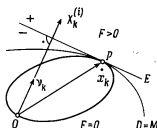
$$D(\dot{x}_k) = \vartheta \frac{d^{(i)}S}{dt} \geq 0 \quad (4.3)$$

без помощи необратимых сил $X_k^{(i)}$, которые появляются только на макроскопическом уровне и связаны с $D(\dot{x}_k)$,

согласно (4.1) и (4.2), соотношением

$$X_k^{(i)} \dot{x}_k = D(\dot{x}_k) \geq 0. \quad (4.4)$$

[Для того чтобы подчеркнуть основополагающую важность диссипативной функции, рассмотрим снова элемент сплошной среды. Здесь x_k представляют собой компоненты деформации, определяющие каркас микросистемы. Если теперь скорости деформации $\dot{x}_k$ и начальные условия заданы, то движение микросистемы вполне определено.



Р и с. 4.1.] Представление в пространстве скоростей.

На данном этапе процесса деформации порождение энтропии внутри макросистемы зависит только от $\dot{x}_k$. Это же справедливо и для функции $D(\dot{x}_k)$, которая, таким образом, определяется без обращения к необратимым силам $X_k^{(i)}$.

Будем интерпретировать величины $\dot{x}_k$ как прямоугольные декартовы компоненты вектора скорости (рис. 4.1) в евклидовом n -мерном пространстве скоростей и представим величины $X_k^{(i)}$ как прямоугольные декартовы компоненты вектора силы

$$X_k^{(i)} = m v_k \quad (m \geq 0) \quad (4.5)$$

в евклидовом силовом пространстве, определяемого модулем m и единичным вектором v_k . На произвольном этапе процесса D зависит только от $\dot{x}_k$, по крайней мере является положительно полуопределенной и будет в дальнейшем предполагаться известной. Отсюда следует, что

в пространстве скоростей гиперповерхности

$$D(\dot{x}_k) = M \quad (4.6)$$

(где M — неотрицательная постоянная) известны.

Для того чтобы задать связь между векторами $\dot{x}_k$ и $X_k^{(i)}$, т. е. установить соответствие между скоростями и необратимыми силами, выдвинем условие, что все необратимые процессы рассматриваемого здесь типа удовлетворяют *принципу минимальных необратимых сил*: если величина $M > 0$ диссипативной функции и направление v_k необратимой силы заданы, то истинная квазистатическая скорость $\dot{x}_k$ дает минимум величины m необратимой силы $X_k^{(i)}$, удовлетворяющей дополнительному условию (4.4).

Из этого принципа вытекает ряд следствий. При обсуждении ограничимся случаями, в которых диссипативная функция непрерывна. Это ограничение физически оправдано, поскольку следует ожидать, что всегда можно аппроксимировать с достаточной точностью данную функцию $D(\dot{x}_k)$ непрерывной функцией.

На рис. 4.1 v_k представляет заданное направление силового вектора $X_k^{(i)}$. Концы рассматриваемых векторов скорости располагаются на поверхности¹⁾ (4.6), где $M > 0$. Принцип устанавливает, что действительная скорость $\dot{x}_k$ минимизирует величину вектора силы $X_k^{(i)}$, удовлетворяющего вспомогательному условию (4.4), и, следовательно, максимизирует произведение $v_k \dot{x}_k$ на поверхности (4.6). Таким образом, принцип устанавливает определенное соответствие между векторами $\dot{x}_k$ и $X_k^{(i)}$, т. е. между точками в пространстве скоростей и в силовом пространстве. Это соответствие, однако, не обязательно однозначно. Может быть и более одного решения. Пусть P обозначает соответствующие точки в пространстве скоростей, и пусть m — общий минимум величин $X_k^{(i)}$. Каждая из точек лежит на поверхности (4.6), а также на ги-

¹⁾ Для простоты мы будем вообще пользоваться терминами «поверхность» и «плоскость» вместо терминов «гиперповерхность» и «гиперплоскость».

плоскости E , ортогональной $X_k^{(i)}$ с уравнением

$$X_k^{(i)} \dot{x}_k = M, \quad (4.7)$$

в котором $X_k^{(i)}$ определяется (4.5).

Мы теперь свяжем с каждой стороной E определенный знак, так чтобы скалярное произведение $v_k \dot{x}_k$ возрастало при переходе через плоскость с отрицательной стороны на положительную. Поскольку действительные $\dot{x}_k$ максимизируют произведение $v_k \dot{x}_k$ на (4.6), все точки этой поверхности, кроме точки P , лежат с отрицательной стороны плоскости E .

Рассмотрим теперь все возможные направления v_k и предположим, что на поверхности (4.6) существует точка, через которую нельзя провести ни одной плоскости, обладающей только что описанными свойствами. Тогда для данного значения D существует вектор скорости, который, в силу принципа наименьших необратимых сил, не соответствует никакому вектору необратимой силы. Такая возможность отпадает по физическим причинам. Отсюда следует, что каждая точка поверхности (4.6) лежит по крайней мере на одной плоскости E с описанными выше свойствами, а это означает, что поверхность (4.6) является выпуклой.

Пусть внешняя сторона поверхности (4.6) с $M > 0$ определяется тем, что ей принадлежат точки, лежащие с положительной стороны по крайней мере одной из плоскостей E , и пусть точки, лежащие по отрицательную сторону всех этих плоскостей, определяют внутренность поверхности (4.6). Тогда произвольный шаг от P в направлении $X_k^{(i)}$ ведет во внешность поверхности (4.6). Там, в силу принципа наименьших необратимых сил, $D \neq M$. Отсюда следует, что D изменяется монотонно при пересечении D -поверхностей в направлении изнутри во вне. Проследивая это изменение от начала координат O (где $D=0$), мы видим, что оно представляет собой *возрастание*.

Диссипативная функция D может обращаться в нуль не только в начале координат O . Имеются случаи, когда D равно нулю в целой области V , охватывающей точку O . Образом такой области является начало координат O'

в силовом пространстве. Наоборот, точка O в пространстве скоростей может соответствовать целой области B' силового пространства, содержащей точку O' .

[Определяющие уравнения некоторых неньютонических жидкостей (п. 6.9) и пластических тел (п. 6.7) дают примеры такого поведения.]

Ясно теперь, что поверхность $D = M$ охватывает все поверхности с $D < M$ и что вне некоторой области B существует не более одной D -поверхности для данного значения M . Кроме того, из этого следует, что область B выпуклая.

В силу (4.7) и (4.5), произвольный шаг от P в направлении радиуса вектора x_k увеличивает произведение $v_k \dot{x}_k$ и, таким образом, ведет в некоторую точку, лежащую на положительной стороне E и, следовательно, вне поверхности (4.6). Здесь $D > M$ и, следовательно, функция D *возрастает* вне произвольно выбранной области B при переходе от точки O вовне вдоль некоторого произвольного радиуса.

Принцип наименьшей необратимой силы можно использовать и далее, если возрастание D вдоль радиуса достаточно сильно. Введем расстояние

$$R = (\dot{x}_k \dot{x}_k)^{1/2} \quad (4.8)$$

точки x_k от начала O в пространстве скоростей и предположим, что функция D дифференцируема вдоль любого радиуса, выходящего из точки O . Если производная dD/dR удовлетворяет неравенству

$$\frac{dD}{dR} > \frac{D}{R} \quad (D > 0) \quad (4.9)$$

всюду вне области B , рассматриваемую систему будем называть *устойчивой*. Для того чтобы оправдать это определение, рассмотрим некоторый пример.

[Если точка P лежит на положительной оси $\dot{x}_1$, то $R = \dot{x}_1 > 0$, и из (4.4) следует, что

$$D(\dot{x}_1) = X_1^{(i)} \dot{x}_1, \quad (4.10)$$

где $X_1^{(i)}$ представляет собой первую компоненту необратимой силы, соответствующую скорости $\dot{x}_1$. Подставляя (4.10)

в (4.9), получаем условие

$$\frac{\partial X_1^{(i)}}{\partial \dot{x}_1} > 0 \quad (X_1^{(i)} > 0), \quad (4.11)$$

согласно которому необратимая сила $X_1^{(i)}$ возрастает с возрастанием скорости $\dot{x}_1$.]

Хорошо известно (см., например, [34]), что, если сила убывает с увеличением скорости то могут развиваться автоколебания. Это означает, что некоторые скорости $\dot{x}_k$ неустойчивы. Использование понятия устойчивости в связи с (4.9), таким образом, оправдано. Кроме того, рассмотренный пример показывает, что большинство практически интересных систем устойчиво.

[Элемент идеально пластического твердого тела (п. 6.7) следует рассматривать как пример неустойчивой системы, так как $\partial X_1^{(i)} / \partial \dot{x}_1 = 0$ для пластического течения.]

Возвращаясь к принципу наименьшей необратимой силы, вспомним, что $D=M$ в точках Р и что $D > M$ в любой другой точке на плоскости Е. Исходя из произвольной точки на Е, перемещаясь вонне по радиусу, выходящему из точки О, можно найти путем интегрирования (4.9), что приращение ΔD диссипативной функции на шаге ΔR удовлетворяет неравенству

$$\Delta D > \frac{D}{R} \Delta R, \quad (4.12)$$

в котором значения D и R берутся для точки, лежащей на Е. Следовательно, в устойчивой системе D растет быстрее, чем скалярное произведение $X_k^{(i)} \dot{x}_k$, вычисленное при фиксированном значении $X_k^{(i)}$. Отсюда следует, что в устойчивой системе функция

$$F(\dot{x}_k) = D(\dot{x}_k) - X_k^{(i)} \dot{x}_k \quad (4.13)$$

определенная при фиксированном векторе $X_k^{(i)}$, соответствующем некоторому решению принципа наименьшей необратимой силы, положительна на положительной стороне Е и во всех точках Е, кроме точки Р, где $F=0$.

Уравнение

$$F(\dot{x}_k) = 0 \quad (4.14)$$

представляет некоторую поверхность в пространстве скоростей. Как было только что показано, эта поверхность лежит целиком на отрицательной стороне E , за исключением точек P , лежащих на E . Отсюда следует, что на поверхности (4.14) произведение $X_k^{(i)}\dot{x}_k$ и, следовательно, функция $D(\dot{x}_k)$ достигают своего общего максимума в точках P . Для устойчивых систем принцип наименьшей необратимой силы поэтому дает *принцип максимальной скорости работы диссипации*. Если задана необратимая сила $X_k^{(i)} \neq 0$, то истинная квазистатическая скорость $\dot{x}_k$, удовлетворяющая вспомогательному условию (4.4), дает максимум скорости работы диссипации.

Для того чтобы доказать, что верно и обратное предположение, будем исходить от вектора $X_k^{(i)} \neq 0$ на рис. 4.1. Векторы скорости, допускаемые последним принципом, имеют свои конечные точки на поверхности (4.14), где функция $F(\dot{x}_k)$ определяется соотношением (4.13) и, в силу этого, непрерывна. Принцип устанавливает, что истинные скорости $\dot{x}_k$ максимизируют функцию $D(\dot{x}_k)$, а следовательно, и произведение $X_k^{(i)}\dot{x}_k$ на поверхности (4.14). При этом не может быть более одного решения. Обозначим соответствующие точки в пространстве скоростей через P , и пусть $M \geq 0$ обозначает общий максимум функций $D(\dot{x}_k)$ и $X_k^{(i)}\dot{x}_k$, достигаемый во всех точках P . Каждая из этих точек лежит на поверхности (4.6) и в то же время на плоскости (4.7). В силу принципа максимума скорости работы диссипации, поверхность (4.14) не имеет точек на положительной стороне E , и ее единственные точки, лежащие на E , суть точки P . Если система устойчива, любой шаг от точек P в радиальном направлении приводит к положительным значениям функции F . Поэтому функция $F(\dot{x}_k)$ положительна на положительной стороне E . Если бы поверхность $D=M$ имела точку на положительной стороне E , то из (4.13) следовало бы, что в этой точке $F < 0$. Поскольку такая возможность, как только что было показано, не имеет места, поверхность $D=M$, за исключением точек P , лежит на отрицательной стороне E . Отсюда следует также, что на поверхности $D=M$ произведение $X_k^{(i)}\dot{x}_k$ достигает максимума в точках P .

Последнее утверждение справедливо также и для произведения $v_k x_k$. Если теперь рассматривать $D=M>0$ и v_k как заданные, то можно распорядиться m таким образом, чтобы было удовлетворено соотношение (4.4). Но тогда из (4.4) и (4.5) вытекает, что на поверхности $D=M>0$ истинные x_k минимизируют величину необратимой силы, удовлетворяющую добавочному условию (4.4). Это и составляет содержание принципа наименьшей необратимой силы. Таким образом, для устойчивых систем эти два принципа эквивалентны.

В силу (4.3), выражение «скорость работы диссипации» можно в формулировке последнего принципа заменить на «скорость порождения энтропии». Поэтому этот принцип можно сформулировать так же, как *принцип максимальной скорости порождения энтропии*.

Эти принципы были сформулированы Циглером [46, 49]¹⁾. Принцип максимальной скорости порождения энтропии можно рассматривать как более точную версию второго фундаментального закона термодинамики; такая формулировка представляется наиболее предпочтительной. В самом деле, если некоторая замкнутая система стремится к состоянию, соответствующему максимальной энтропии, то представляется достаточно обоснованным постулировать, что в устойчивой системе, подверженной действию заданных необратимых сил, скорость возрастания энтропии максимальна, т. е. что система стремится к своему конечному состоянию кратчайшим возможным способом. Несколько обобщая это утверждение, можно сказать, что принцип максимальной скорости порождения энтропии устанавливает, что любой поток в фазовом пространстве не контролируемый непосредственно извне, максимизирует скорость порождения энтропии. Это утверждение можно назвать *фазовой версией принципа*.

¹⁾ В этих публикациях важность устойчивости для обеих версий последнего принципа еще не была осознана.

В то время как первая из этих двух статей была в печати, автор узнал от профессора Калифорнийского университета (Лос-Анжелос) Д. Розенталя, что он сформулировал утверждение, по существу совпадающее с принципом максимальной скорости порождения энтропии.

4.2. Некоторые следствия. Из рис. 4.1 можно сделать заключение, что доказательства п. 4.1 ограничиваются случаями, когда D -поверхности гладкие. Следует отметить, однако, что до сих пор никаких предположений такого рода введено не было. Кроме того, выпуклость этих поверхностей не означает, что вне B эти принципы выделяют одно-единственное решение. Нет оснований отрицать, что в некоторых случаях заданная необратимая сила $X_k^{(i)} \neq 0$ может соответствовать более чем одной скорости $\dot{x}_k$. Нет никаких оснований также отрицать возможность того, что более чем одна необратимая сила $X_k^{(i)}$ может соответствовать одной и той же скорости $\dot{x}_k \neq 0$.

В принципе наименьшей необратимой силы направление v_k вектора $X_k^{(i)}$ и величина $M > 0$ диссипативной функции заданы. При этих условиях истинные скорости $\dot{x}_k$ минимизируют величину составляющих $X_k^{(i)}$, удовлетворяющих (4.4), и, следовательно, максимизируют произведение $v_k \dot{x}_k$. Более того, внутренность поверхности $D=M$ лежит на отрицательной стороне плоскости E . Таким образом, принцип можно также выразить неравенством

$$v_k (\dot{x}_k - \dot{x}_k^*) \geq 0, \quad (4.15)$$

где $\dot{x}_k$ обозначает истинную скорость, а $\dot{x}_k^*$ — любую другую скорость, дающую значение диссипативной функции $D \leq M$. Знак равенства возможен только, если $\dot{x}_k^*$ представляет собой другую скорость, также удовлетворяющую принципу.

Случай $M=0$ был исключен при формулировке принципа. Не составляет труда обобщить принцип так, чтобы включить и этот случай. Однако при $M=0$ тот факт, что величина $X_k^{(i)}$ достигает минимума, означает только, что произведение $v_k \dot{x}_k$ достигает максимума. Поэтому соотношение (4.15) не выполняется внутри области B (где $D=0$). В силу (4.5), однако, можно записать вместо (4.15)

$$X_k^{(i)} (\dot{x}_k - \dot{x}_k^*) \geq 0. \quad (4.16)$$

Это условие остается справедливым при $X_k^{(i)}=0$ и, следовательно, при $D=0$. Поэтому принцип наименьшей необратимой силы эквивалентен неравенству (4.16), в ко-

тором $X_k^{(i)}$ обозначает истинную необратимую силу, а $\dot{x}_k$ — истинную скорость, M — соответствующую величину диссипативной функции $D(\dot{x}_k)$, а $\dot{x}_k^*$ — любую другую скорость, отвечающую $D(\dot{x}_k^*) \leq M$. Знак равенства возможен только, если $\dot{x}_k^*$ представляет собой другое решение.

Если $D(\dot{x}_k)$ представляет собой непрерывную функцию с непрерывными частными производными $\partial D / \partial \dot{x}_k$, то D -поверхности будут гладкими. Поэтому в каждой точке этих поверхностей существует единственная внешняя нормаль. В силу (4.16), $X_k^{(i)}$ имеет направление этой нормали в соответствующей точке P (рис. 4.1)

$$X_k^{(i)} = \lambda \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \quad (\lambda \geq 0). \quad (4.17)$$

В силу (4.4),

$$X_k^{(i)} \dot{x}_k = \lambda \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = D. \quad (4.18)$$

Отсюда следует, что

$$\lambda = \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j \right)^{-1} D. \quad (4.19)$$

Эта величина остается неотрицательной, в силу того факта, что D , во-первых, по крайней мере положительно полуопределенная и, во-вторых, D не убывает вдоль радиуса, выходящего из точки O . Подставляя (4.19) в (4.17), мы получаем, наконец, соотношение

$$X_k^{(i)} = \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j \right)^{-1} D \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k}. \quad (4.20)$$

Это уравнение связывает необратимые силы со скоростями и соответствует в некотором смысле соотношениям (3.43) или (3.46) для обратимых сил. Диссипативная функция играет ту же роль, что и внутренняя энергия в соотношении (3.43) или свободная энергия в соотношении (3.46).

На произвольном радиусе, исходящем из точки O ,

$$\frac{dD}{dR} = \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j \frac{1}{R}. \quad (4.21)$$

Условие устойчивости (4.9) поэтому принимает вид

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j > D \quad (D > 0). \quad (4.22)$$

Из (4.20) и (4.22) вытекает, что

$$X_k^{(i)} < \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k}. \quad (4.23)$$

Таким образом, в устойчивой системе необратимая сила всегда меньше, чем градиент диссипативной функции.

Уравнение (4.20) было впервые получено в работе Циглера [43] при помощи некоторого полустатистического подхода, совершенно отличного от принятого здесь. В более поздней статье [46] были, по существу, сформулированы два принципа п. 4.1 и было показано, что уравнение (4.20) следует из одного из этих принципов (см. также [49]). Доказательство в этой последней работе несколько отлично от описанного выше.

В случае принципа наименьшей необратимой силы v_k задано и ищутся скорости $\dot{x}_k$, которые при дополнительном условии $D(\dot{x}_k) = M$ делают максимальным произведение $v_k \dot{x}_k$. Этот максимум получается как решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} [v_j \dot{x}_j - \mu D(\dot{x}_j)] = 0; \quad (4.24)$$

где μ — множитель Лагранжа. Из (4.24) следует, что

$$v_k = \mu \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k}. \quad (4.25)$$

Это уравнение эквивалентно (4.17) и, таким образом, приводит к (4.20).

В случае принципа максимальной скорости работы диссипации $X_k^{(i)}$ заданы и ищутся скорости $\dot{x}_k$, которые при дополнительном условии $F(\dot{x}_k) = 0$ делают максимальным произведение $X_k^{(i)} \dot{x}_k$. Здесь решение получается из соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} [X_j^{(i)} \dot{x}_k - \mu F(\dot{x}_j)] = 0. \quad (4.26)$$

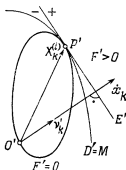
В силу (4.13), это приводит к уравнению

$$X_k^{(i)} = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k}, \quad (4.27)$$

которое снова эквивалентно (4.17).

Намеченный здесь подход подтверждает уравнение (4.20). Он не дает, однако, результатов, полученных в п. 4.1, касающихся конфигурации D -поверхностей; он не показывает и важности устойчивости системы для принципа максимальной скорости работы диссипации.

4.3. Обращение результатов. Большинство рассуждений последних разделов основывалось на геометрических



Р и с. 4.2. Представление в силовом пространстве.

соображениях для пространства скоростей $\dot{x}_k$. Поскольку D рассматривается как функция величин $\dot{x}_k$, такой подход является прямым. Однако если установлена связь между $\dot{x}_k$ и $X_k^{(i)}$ или предполагается, что такая связь будет установлена, то становится возможным сформулировать следствие в силовом пространстве (рис. 4.2) для каждого из результатов, полученных в пространстве скоростей.

Будем исходить из рис. 4.1, где $\dot{x}_k \neq 0$ представляет собой вектор скорости с концом на поверхности $D=M>0$ и где $X_k^{(i)}$ — некоторая необратимая сила, связанная с $\dot{x}_k$. Пусть $\dot{x}_k$ представляет собой другой вектор скорости с концом, лежащим на поверхности $D=M$, и $X_k^{(i)*}$ —

соответствующую необратимую силу. В соответствии с (4.4) имеем

$$X_k^{(i)*} \dot{x}_k^* = X_k^{(i)} \dot{x}_k \quad (4.28)$$

Неравенство (4.16) можно записать в виде

$$X_k^{(i)*} (\dot{x}_k^* - \dot{x}_k) \geq 0, \quad (4.29)$$

так как $\dot{x}_k^*$ соответствует $X_k^{(i)*}$, тогда как $\dot{x}_k$ представляет собой другую точку на соответствующей поверхности $D=M$. Знак равенства выполняется всякий раз, когда $\dot{x}_k$ представляет собой другой вектор скорости, связанный с $X_k^{(i)*}$. Из (4.28) и (4.29) следует, что

$$(X_k^{(i)} - X_k^{(i)*}) \dot{x}_k \geq 0 \quad (4.30)$$

или

$$(X_k^{(i)} - X_k^{(i)*}) v_k' \geq 0, \quad (4.31)$$

где $\dot{x}_k \neq 0$ представляет собой вектор истинной скорости с направлением v_k' , $X_k^{(i)}$ — истинную необратимую силу и $X_k^{(i)*}$ — любую другую точку на поверхности $D'=M$, где

$$D'(X_k^{(i)}) = D(\dot{x}_k). \quad (4.32)$$

Знак равенства выполняется всякий раз, когда $X_k^{(i)*}$ представляет собой другое решение.

Очевидно, что (4.30) и (4.31) представляют собой обращение основных результатов, полученных в п. 4.2. Это обращение, однако, является неполным, так как необратимые силы $X_k^{(i)*}$ при $D' < M$ все еще исключены.

Перенос значения диссипативной функции с точек в пространстве скоростей на их образы в пространстве сил (рис. 4.2), мы получаем поле (4.32), и из (4.4) и (4.32) вытекает, что

$$X_k^{(i)} \dot{x}_k = X_k^{(i)} m' v_k' = D'(X_k^{(i)}) \geq 0, \quad (4.33)$$

где m' обозначает модуль $\dot{x}_k$. Если теперь задать направление v_k' вектора $\dot{x}_k$ и ограничиться векторами $X_k^{(i)}$ с концами, лежащими на поверхности $D'(X_k^{(i)}) = M > 0$, то (4.31) устанавливает, что истинные решения с концевыми точками P' максимизируют произведение $X_k^{(i)} v_k'$ и, следова-

тельно, максимизируют модуль m' вектора $\dot{x}_k$. Итак, принцип наименьшей необратимой силы имеет следствие, основанное на предположении, что функция $D'(X_k^{(i)})$ известна — *принцип наименьшей скорости*: Если величина $M > 0$ функции $D'(X_k^{(i)})$ и направление v_k квазистатической скорости заданы, то истинная необратимая сила $X_k^{(i)}$ минимизирует модуль скорости $\dot{x}_k$, удовлетворяющий дополнительному условию (4.33).

Исходя из этого принципа, легко установить следствие принципа максимальной скорости работы диссипации или принципа максимальной скорости порождения энтропии в силовом пространстве. Для этого достаточно повторить рассуждения п. 4.1 в силовом пространстве, поменяв местами $\dot{x}_k$ с $X_k^{(i)}$ и заменив диссипативную функцию $D(\dot{x}_k)$ на $D'(X_k^{(i)})$, а также используя вместо $F(\dot{x}_k)$ некоторую функцию $F'(X_k^{(i)})$, определенную соотношением

$$F'(X_k^{(i)}) = D'(X_k^{(i)}) - X_k^{(i)} \dot{x}_k. \quad (4.34)$$

Уравнение (4.7) теперь представляет некоторую плоскость E' в силовом пространстве, положительная и отрицательная стороны которой определяются, естественно, как внешность и внутренность поверхностей $D' = M$.

Анализируя проведенное доказательство шаг за шагом, можно заметить, что область B' (при $D' = 0$) и D' -поверхности в силовом пространстве выпуклые, что каждая из них охватывает все такие поверхности с меньшими значениями D' и что D' возрастает при перемещении от B' (или если поверхности B' не существует, то от начала O') вдоль произвольного радиуса. Наконец, из проведенного доказательства следует, что неравенства (4.30) и (4.31) справедливы для истинной скорости $\dot{x}_k \neq 0$, имеющей направление v_k истинной необратимой силы $X_k^{(i)}$ и любой другой точки $X_k^{(i)*}$, лежащей на поверхности $D' = M$, проходящей через $\dot{x}_k$ или внутри нее. Первое из этих неравенств остается справедливым и при $\dot{x}_k = 0$ и, следовательно, $D' = 0$. Знак равенства возможен, когда $X_k^{(i)*}$ представляет собой другое решение.

Теперь уже двойственность между результатами, полученными в пространстве скоростей и в пространстве сил, становится вполне завершенной. Эта двойственность, являющаяся следствием либо принципа наименьшей необратимой силы, либо принципа наименьшей скорости, представляет собой некоторое обобщение преобразования Лежандра (см., например, [7]), которое будет рассмотрено в п. 4.4. Как некоторое следствие этой двойственности рассмотрим соотношение

$$\dot{x}_k = \left(\frac{\partial D'}{\partial X_j^{(i)}} X_j^{(i)} \right)^{-1} D' \frac{\partial D'}{\partial X_k^{(i)}}, \quad (4.35)$$

соответствующее (4.20) и справедливое всегда, когда D' -поверхности в силовом пространстве гладкие.

Что получится, если D' -поверхности негладкие, можно увидеть следующим образом. Мы всегда допускали возможность существования более чем одной точки P (рис. 4.1), лежащей на поверхности (4.6) и в то же самое время на плоскости E . В таком случае из выпуклости (4.6) следует, что поверхность $D=M$ и плоскость E имеют бесконечное число общих точек, причем эти точки принадлежат к некоторому линейному подпространству пространства скоростей, тождественному E или содержащемуся в E . Соответствующие скорости $\dot{x}_k$ имеют различные направления, так как при $M > 0$ E не содержит O . Отсюда следует, что на рис. 4.2 через точку P' можно провести бесконечное число плоскостей E' . Таким образом, поверхность $D'=M$ имеет особенность типа, называемого в трехмерном пространстве краем, углом или вершиной.

В силу рассмотренной выше двойственности, обратное предложение также справедливо. Если E' содержит более чем одну точку P' , она содержит бесконечное число таких точек, и P располагается на особенности поверхности $D=M$.

4.4. Квазиоднородные диссипативные функции. Единственным ограничением, налагаемым, вообще говоря, на диссипативную функцию, были условия ее непрерывности и по крайней мере положительной полуопределенности. Для того чтобы облегчить остальное обсуждение, предположим, начиная с этого момента, что все функции, ко-

которые встретятся в нашем исследовании, непрерывны и имеют непрерывные производные нужного порядка. Таким образом, в частности, D -поверхности и D' -поверхности — гладкие. Несмотря на то что в § 6 мы встретим некоторые случаи, когда функции не удовлетворяют этому дополнительному требованию, их всегда можно с достаточной точностью аппроксимировать функциями рассматриваемого здесь типа.

Ограничимся теперь функциями $D(\dot{x}_k)$, удовлетворяющими функциональному уравнению

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = f(D), \quad (4.36)$$

где f — произвольная функция. Такие функции, которые с физической точки зрения особенно просты, мы будем называть *квазиоднородными*, поскольку соотношение (4.36) является обобщением условия однородности, которое будет обсуждаться в следующем пункте. Для квазиоднородных диссипативных функций условие устойчивости (4.22) принимает вид

$$[f(D) > D \quad (D > 0)]. \quad (4.37)$$

В пространстве скоростей соотношение (4.36) означает, что скалярное произведение градиента D на радиус-вектор зависит только от D и, тем самым, одинаково для всех точек некоторой D -поверхности. Пусть

$$d\dot{x}_k = \dot{x}_k d\varepsilon. \quad (4.38)$$

Из (4.36) и (4.38) получаем

$$dD = \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} d\dot{x}_k = \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k d\varepsilon = f(D) d\varepsilon. \quad (4.39)$$

Это означает, что, исходя из произвольной D -поверхности и совершая бесконечно малые шаги в радиальном направлении, пропорциональные расстоянию от точки O , мы придем на другую D -поверхность. D -поверхности поэтому подобны и подобно расположены по отношению к началу координат O .

Из рис. 4.1 следует, что направления векторов $\dot{x}_k$ и $X_k^{(i)}$ определяют одно другое независимо от величины этих векторов.

Интерпретируя этот последний результат в силовом пространстве (рис. 4.2), нетрудно видеть, что D' -поверхности также подобны и подобно расположены относительно точки O' . Приращение D' при радиальном перемещении

$$dX_k^{(i)} = X_k^{(i)} d\varepsilon' \quad (4.40)$$

от некоторой данной D' -поверхности равно

$$dD' = \frac{\partial D'}{\partial X_k^{(i)}} dX_k^{(i)} = \frac{\partial D'}{\partial X_k^{(i)}} X_k^{(i)} d\varepsilon', \quad (4.41)$$

и, таким образом, для некоторого данного значения $d\varepsilon'$ все такие шаги должны заканчиваться на одной и той же D' -поверхности, и коэффициент при $d\varepsilon'$ в соотношении (4.41) должен быть одним и тем же для всех точек начальной D' -поверхности. Таким образом,

$$\frac{\partial D'}{\partial X_k^{(i)}} X_k^{(i)} = g(D'), \quad (4.42)$$

так что функция $D'(X_k^{(i)})$ также квазиоднородна.

Нетрудно обратить предыдущие рассуждения и вывести (4.36) из (4.42). В самом деле, двойственность между пространством скоростей и силовым пространством, отмеченная в п. 4.3, подтверждается здесь во всех отношениях.

В силу (4.36), связь между $\dot{x}_k$ и $X_k^{(i)}$ сводится к соотношению

$$X_k^{(i)} = \frac{D}{f(D)} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k}. \quad (4.43)$$

Пусть функция φ определяется соотношением

$$\varphi = \int \frac{D}{f(D)} dD, \quad (4.44)$$

и пусть аддитивная постоянная в (4.44) определяется из условия

$$\varphi(D=0) = 0. \quad (4.45)$$

Тогда соотношение (4.43) можно записать в виде

$$X_k^{(i)} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_k}. \quad (4.46)$$

Таким образом, необратимая сила выражается в виде градиента некоторого потенциала $\phi(\dot{x}_k)$ в пространстве скоростей, и отсюда следует, что

$$\frac{\partial X_k^{(i)}}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial X_j^{(i)}}{\partial \dot{x}_k}. \quad (4.47)$$

Следует отметить, что функция ϕ в отличие от $f(D)$ уже не произвольна. Поскольку ϕ была определена как функция от D , она должна быть постоянна на D -поверхностях. Таким образом, ϕ , рассматриваемая как функция x_k , должна удовлетворять некоторому условию, аналогичному (4.36). И, на самом деле, из (4.4) и (4.46) следует, что

$$\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = X_k^{(i)} \dot{x}_k^* = D(\dot{x}_k), \quad (4.48)$$

где функция $D(\dot{x}_k)$ обладает всеми свойствами, рассмотренными в предыдущих разделах.

Из (4.35) и (4.42) мы опять получаем

$$\dot{x}_k = \frac{D'}{g(D')} \frac{\partial D'}{\partial X_k^{(i)}}. \quad (4.49)$$

Определим теперь функцию ψ соотношением

$$\psi = \int \frac{D' dD'}{g(D')}, \quad (4.50)$$

а также условием

$$\psi(D' = 0) = 0. \quad (4.51)$$

Тогда соотношение (4.49) переписывается в виде

$$\dot{x}_k = \frac{\partial \psi}{\partial X_k^{(i)}}, \quad (4.52)$$

так что скорость представляется в виде градиента некоторого потенциала $\psi(X_k^{(i)})$ в пространстве сил, и отсюда следует, что

$$\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial X_j^{(i)}} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial X_k^{(i)}}. \quad (4.53)$$

В силу (4.33) и (4.52), функция $\psi(X_k^{(i)})$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \psi}{\partial X_k^{(i)}} X_k^{(i)} = X_k^{(i)} \dot{x}_k = D'(X_k^{(i)}). \quad (4.54)$$

Вместе с соотношением (4.46) функция $\psi(\dot{x}_k)$ определяет преобразование некоторой области b в пространстве скоростей в область b' в силовом пространстве. Функция $\psi(X_k^{(i)})$ вместе с соотношением (4.52) определяет обращение этого преобразования. Если преобразование и его обращение однозначны, то областей B или B' (где $D=0$ или $D'=0$) не существует. Начало O' представляет собой образ точки O , и наоборот, так что, в частности, O принадлежит к области b , а O' — к области b' . В силу (4.45) и (4.51),

$$\varphi(\dot{x}_k=0)=0, \quad \psi(X_k^{(i)}=0)=0. \quad (4.55)$$

Пусть теперь C_1 представляет произвольную кривую в области b , соединяющую начало O с некоторой точкой P с координатами $\dot{x}_k$, и пусть точка P' с координатами $X_k^{(i)}$ представляет собой образ P в b' . Тогда образ C' кривой C соединяет O' с P' , и мы получаем

$$\int_C \dot{X}_j^{(i)} d\dot{x}_j + \int_{C'} \dot{x}_j dX_j^{(i)} = \int d(X_j^{(i)} \dot{x}_j) = X_j^{(i)} \dot{x}_k. \quad (4.56)$$

В силу (4.46), (4.52) и (4.55), это соотношение приводится к виду

$$\varphi(\dot{x}_k) + \psi(X_k^{(i)}) = X_k^{(i)} \dot{x}_k. \quad (4.57)$$

Это соотношение вместе с (4.46) и (4.52) определяет некоторое преобразование Лежандра [7].

4.5. Однородная диссипативная функция. Если функциональное уравнение (4.36) принадлежит к частному типу

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = rD, \quad (4.58)$$

то функция $D(\dot{x}_k)$ — однородная функция степени r . В этом случае

$$f(D) = rD \quad (4.59)$$

и условие устойчивости (4.37) принимает вид

$$r' > 1. \quad (4.60)$$

Уравнение (4.44) дает при этом

$$\varphi = \frac{1}{r} D. \quad (4.61)$$

Из (4.46) следует далее, что

$$X_k^{(i)} = \frac{1}{r} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k}. \quad (4.62)$$

Уравнение (4.57) определяет функцию $\psi(X_k^{(i)})$, которая, в силу (4.61) и (4.32), задается соотношением

$$\psi = \frac{r-1}{r} D'. \quad (4.63)$$

Из соотношений (4.50) и (4.63) получается другая функция:

$$g(D') = \frac{r}{r-1} D', \quad (4.64)$$

так что уравнение (4.49) дает окончательно

$$\dot{x}_k = \frac{r-1}{r} \frac{\partial D'}{\partial X_k^{(i)}}. \quad (4.65)$$

Таким образом,

$$\frac{\partial D'}{\partial X_k^{(i)}} X_k^{(i)} = \frac{r}{r-1} D', \quad (4.66)$$

и предположение о том, что функция D — однородная степени r , приводит к тому, что D' также является однородной функцией степени $r/(r-1)$.

[Если $r=2$, то обе функции $D(\dot{x}_k)$ и $D'(X_k^{(i)})$ — однородные функции второй степени.]

Частный класс функций, удовлетворяющих соотношению (4.58), составляют однородные полиномы степени r

$$D = a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \dot{x}_1^{\alpha_1} \dot{x}_2^{\alpha_2} \dots \dot{x}_m^{\alpha_m} \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = r), \quad (4.67)$$

исследованные в работе Циглера [42]. Здесь коэффициенты a_{α_k} могут зависеть как от мгновенного состояния системы, так и от ее истории. Поскольку D по крайней мере положительно определенная функция, эти коэффициенты

удовлетворяют определенным условиям, и при всех обстоятельствах r должно быть четным.

[В случае двух механических координат x_1, x_2 диссипативная функция при $r=4$ выражается следующим образом:

$$D = a_{40}\dot{x}_1^4 + a_{31}\dot{x}_1^3\dot{x}_2 + a_{22}\dot{x}_1^2\dot{x}_2^2 + a_{13}\dot{x}_1\dot{x}_2^3 + a_{04}\dot{x}_2^4. \quad (4.68)$$

Выражения для необратимых сил имеют вид

$$\begin{aligned} X_1^{(i)} &= \frac{1}{4} (4a_{40}\dot{x}_1^3 + 3a_{31}\dot{x}_1^2\dot{x}_2 + 2a_{22}\dot{x}_1\dot{x}_2^2 + a_{13}\dot{x}_2^3), \\ X_2^{(i)} &= \frac{1}{4} (a_{31}\dot{x}_1^3 + 2a_{22}\dot{x}_1^2\dot{x}_2 + 3a_{13}\dot{x}_1\dot{x}_2^2 + 4a_{04}\dot{x}_2^3). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Простейшим частным случаем (4.67) является квадратичная форма

$$D = a_{jk}\dot{x}_j\dot{x}_k \quad (4.70)$$

с матрицей (a_{jk}) , которая по крайней мере положительно полуопределенная. В общем случае матрица (a_{jk}) не обязана быть симметричной, так что не обязательно

$$a_{kj} = a_{jk}. \quad (4.71)$$

D -поверхности представляют собой эллипсоиды. Подставляя (4.70) и (4.71) в (4.62) при $r=2$, получаем линейные соотношения

$$X_h^{(i)} = a_{hj}\dot{x}_j \quad (4.72)$$

между скоростями и необратимыми силами. Они удовлетворяют условиям симметрии (4.71).

Наоборот, если исходить из предположения о том, что связь между скоростями и необратимыми силами линейна, т. е. представляется в форме (4.72), где матрица (a_{jk}) пока не обязана быть симметричной, то из (4.4) получается выражение (4.70) для диссипативной функции. Подставляя его в (4.20), находим

$$X_h^{(i)} = \frac{1}{2} (a_{hj} + a_{jh}) \dot{x}_j \quad (4.73)$$

и из сравнения с (4.72) получается, что матрица (a_{jk}) симметрична.

Обращение системы (4.72) также линейно. Оно дается соотношениями

$$\dot{x}_k = b_{kj} X_j^{(i)}, \quad b_{kj} = \frac{A_{jk}}{a}, \quad (4.74)$$

где $a = |a_{jk}|$, а A_{jk} — адьюнкт, соответствующий a_{jk} . Функция $D'(X_k^{(i)})$ представляется в виде

$$D' = b_{jk} X_j^{(i)} X_k^{(i)}, \quad (4.75)$$

так что D' -поверхности представляют собой эллипсоиды. Из симметрии (a_{jk}) вытекает, что $A_{kj} = A_{jk}$ и, следовательно,

$$b_{jk} = b_{kj}. \quad (4.76)$$

Очевидно, что соотношения (4.72) представляют собой простейшие возможные соотношения между скоростями и необратимыми силами. Законы этого типа впервые рассматривались Онзагером [22]. Исходя из двух постулатов, касающихся микроскопического поведения системы в окрестности некоторого равновесного состояния (см. также [4]), он установил условия симметрии (4.71), известные теперь под названием *соотношений взаимности Онзагера*. Изложенный здесь подход несколько иной. Основным постулатом здесь является принцип наименьшей необратимой силы или один из эквивалентов этого принципа, рассмотренных в предыдущих пунктах. Исследование не ограничивается линейными соотношениями между скоростями и необратимыми силами, однако в линейном случае соотношения Онзагера были нами подтверждены.

Следует отметить, что ни один из только что отмеченных подходов не свободен от тех или иных предположений. Принцип наименьшей необратимой силы также представляет собой не более чем некоторую гипотезу. Однако сделанное выше наблюдение о том, что эта гипотеза подтверждает теорию Онзагера в линейном случае, представляется обнадеживающим и вселяющим уверенность. Такую же уверенность вселяет и факт, что более общие уравнения (4.20) были ранее получены [42] с помощью некоторого подхода, совершенно отличного от любого из намеченных выше. Отмечалось также, что принцип наибольшей скорости порождения энтропии с физической точки зрения представляется очень естественным.

В литературе по термодинамике необратимых процессов (см., например, [13]) отмечалось, что в некоторых случаях соотношения Онзагера нужно писать в виде

$$a_{kj}(b_i) = a_{jk}(-b_i), \quad (4.77)$$

или

$$a_{kj} = -a_{jk}. \quad (4.78)$$

Форма (4.77) соотношений взаимности была предложена Онзагером [22] для систем, находящихся в магнитном поле напряженности b_i или вращающихся с угловой скоростью b_i . В п. 2.2 показано, что такие системы являются гироскопическими и что гироскопические силы появляются только в выражениях для обобщенных импульсов. Статистический подход § 2 основан на явном понимании допустимости гироскопических сил определенного типа, так что представляется невероятным, чтобы гироскопические системы играли какую-либо исключительную роль в системе наших предположений. Во всяком случае, этого не следует ожидать, когда гироскопические силы можно представить в форме (2.11), а это так для большинства практически важных проблем и, в частности, для примеров, рассмотренных Онзагером. Можно ожидать поэтому, что для процессов рассмотренного здесь типа

$$^{\dagger}a_{jk}(-b_i) = a_{jk}(b_i) \quad (4.79)$$

и, следовательно, справедливы соотношения симметрии (4.71).

Нельзя, разумеется, отрицать, что могут существовать физические явления, для которых основные соотношения линейны, но соотношения (4.79) не выполняются. Однако подобные случаи лежат вне поля нашего исследования, границы которого были очерчены в предыдущих пунктах. Типичным примером является электропроводность твердых тел, рассмотренная Казимиром [4]. Здесь наличие упорядоченного движения электронов не согласуется с нашим основным предположением о том, что система в целом находится в состоянии покоя. Можно ожидать, что упорядоченное движение зарядов вызывается лоренцевой силой, тогда как осредненный эффект этого типа отсутствует в случае чисто стохастического движения. Имеется, очевидно, существенное различие между потоком

тепла и любым типом упорядоченного течения материала; существенно для справедливости наших результатов, что при наличии гироскопических сил все виды упорядоченного течения материала исключаются. В частности, можно ожидать, что за счет кориолисовых сил экстремальные принципы п. 4.1 и 4.3, и, следовательно, принцип материальной индифферентности Трусделла и Тупина [39] окажутся несправедливыми для сплошной среды, движущейся по отношению к вращающейся системе координат.

Форма (4.78) соотношений взаимности принадлежит Казимиру и Теллигену (см. де Гроот [13], стр. 212). Она относится к случаям, когда некоторые из скоростей $\dot{x}_k$ переставлены местами с соответствующими необратимыми силами $X_k^{(i)}$. Имея в виду двойственность, описанную в п. 4.3, можно считать, что такая перестановка до некоторой степени возможна. Однако представляется неестественным заменять только некоторую часть переменных. При всех обстоятельствах рассуждения предыдущих пунктов, так же как и теория Гиббса, были основаны на выражении (2.1) для элементарной работы, которое не оставляет сомнений в том, какие переменные являются механическими координатами системы, а какие — соответствующими силами. В тех пределах, которыми мы себя ограничили, не представляется сколько-нибудь необходимым осуществлять частичный обмен переменных. Таким образом, соотношения (4.78) можно отбросить ¹⁾.

4.6. Другие экстремальные принципы. Экстремальные принципы п. 4.1 и 4.3, которые были сформулированы в связи с необратимыми процессами, не являются единственными.

Уже Онзагер [22] заметил, что его соотношения взаимности (4.71), полученные для линейных процессов в окрестности состояния равновесия, эквивалентны некоторому экстремальному принципу, который он назвал *принципом наименьшей диссипации энергии*. В используемых здесь терминах Онзагер утверждал, что если заданы величины $X_k^{(i)}$ необратимых сил, то истинные скорости $\dot{x}_k$

¹⁾ Примечание при корректуре. Действительно, Колмэн и Трусделл [6] показали, что применение теоремы Онзагера необосновано, если допускается частичный обмен скоростей и сил.

максимизируют выражение

$$X_k^{(i)} \dot{x}_k - \frac{1}{2} D(\dot{x}_k). \quad (4.80)$$

В силу (4.4), это выражение равно половине работы диссипации. Таким образом, экстремальный принцип Онзагера эквивалентен принципу максимальной скорости работы диссипации, установленному в п. 4.1. Этот принцип можно было бы обобщить на произвольные устойчивые системы с непрерывной диссипативной функцией. Однако версия, данная Онзагером, несколько более сложна, нежели принцип п. 4.1, и при всех обстоятельствах следует отметить, что название, избранное им для этого принципа, не соответствует его реальному содержанию.

Другой экстремальный принцип для линейных процессов был сформулирован Био [1]. Био назвал этот принцип *принципом минимума скорости порождения энтропии*. В соответствии с этим принципом истинные скорости $\dot{x}_k$ минимизируют диссипативную функцию D в предположении, что заданы необратимые силы $X_k^{(i)}$ и скорость их работы (их мощность). Био отметил также, что в этом принципе величины $\dot{x}_k$ и $X_k^{(i)}$ можно поменять местами. Если заданы $X_k^{(i)}$ и (4.7), то плоскость E на рис. 4.1 неподвижна. Поскольку все точки поверхности (4.6), за исключением P , лежат по отрицательную сторону от E и поскольку это же верно без исключения для точек с

$$D(\dot{x}_k) < M, \quad (4.81)$$

величина D достигает своего минимума на E в точках P . Поэтому принципы Био эквивалентны принципам п. 4.1 и 4.3. Их можно обобщить на произвольные системы с непрерывной диссипативной функцией. Однако применяя эти принципы, варьируют $D(\dot{x}_k)$ и $D'(X_k^{(i)})$, тогда как величина $X_k^{(i)} \dot{x}_k$ остается фиксированной. Это означает, что обе стороны (4.4) представляют собой два различных выражения для одной и той же физической величины. Поэтому содержание принципов Био имеет скорее формальную, чем физическую природу.

Наконец, следует отметить *принцип минимального порождения энтропии*, сформулированный Пригожиным

для линейных процессов и обобщенный де Гроотом ([13], стр. 196). Здесь предполагается, что необратимые силы $X_k^{(i)}$ заданы ($k=1, 2, \dots, j < n$). Принцип устанавливает, что диссипативная функция минимизируется значениями $\dot{x}_k=0$ ($k=j+1, \dots, n$) скоростей, соответствующих остальным необратимым силам. Этот принцип, который опять-таки можно было бы выразить в виде некоторой двойственной] формулировки с переменными местами $\dot{x}_k$ и $X_k^{(i)}$, не эквивалентен принципам п. 4.1. Однако для линейных процессов, и вообще когда D' -поверхности гладкие, этот принцип представляет собой их следствие. Фиксируя $X_k^{(i)}$ ($k=1, 2, \dots, j < n$), мы ограничиваемся некоторым линейным подпространством силового пространства. Здесь минимум функции $D'(X_k^{(i)})$ достигается на некотором множестве значений $X_k^{(i)}$ ($k=j+1, \dots, n$), удовлетворяющем системе уравнений

$$\frac{\partial D'}{\partial X_k^{(i)}} = 0 \quad (k=j+1, \dots, n). \quad (4.82)$$

Из (4.35) сразу же следует, что $\dot{x}_k=0$ ($k=j+1, \dots, n$). Если же D' -поверхности не гладкие, то принцип Пригожина не следует из принципов п. 4.1.

§ 5. Применение к сплошным средам

5.1. Составные системы. До сих пор мы в наших рассуждениях ограничивались системами, макроскопическое состояние которых можно полностью описать некоторым множеством механических координат x_k и температурой θ , как это было предложено в п. 2.1. В последующих рассуждениях системы такого типа мы будем называть *основными системами*. С другой стороны, мы будем говорить о *составной системе*, если некоторое произвольное число основных систем скомбинировано таким образом, что между ними возможен обмен энергией. Макроскопическое состояние составной системы описывается механическими координатами и температурами всех основных систем, которые эта составная система содержит.

(В механике сплошных сред, например, состояние твердого тела конечных размеров описывается компонентами деформации ε_{jk} и температурой θ каждого элемента.)

Каждой из основных систем соответствует некоторый ансамбль микросистем и, следовательно, некоторое распределение фазовых точек, движущихся в соответствующем фазовом пространстве. Микросистемы, соответствующие составной системе, получаются комбинацией основных микросистем; их можно представить распределением фазовых точек в расширенном фазовом пространстве. Используя верхний индекс (j) для величин, соответствующих j -й основной системе, и записывая величины, соответствующие составной системе без индексов, получаем элемент объема

$$dv = dv^{(1)} dv^{(2)} \dots \quad (5.1)$$

в расширенном фазовом пространстве. Аналогично, степень свободы составной микросистемы выражается следующим образом:

$$v = v^{(1)} + v^{(2)} + \dots, \quad (5.2)$$

и ее распределение вероятностей имеет вид

$$w = w^{(1)} w^{(2)} \dots. \quad (5.3)$$

В силу (2.43), имеем

$$h^{-v^{(j)}} \int w^{(j)} dv^{(j)} = 1. \quad (5.4)$$

Умножая почленно равенства (5.4), сформулированные для всех основных систем, и используя (5.1), (5.2) и (5.3), получаем

$$h^{-v} \int w dv = 1. \quad (5.5)$$

Энергия составной микросистемы равна

$$H = H^{(1)} + H^{(2)} + \dots \quad (5.6)$$

В силу (3.7), внутренняя энергия j -й основной макросистемы равна

$$U^{(j)} = h^{-v^{(j)}} \int H^{(j)} w^{(j)} dv^{(j)}, \quad (5.7)$$

и, в силу (5.1), (5.2), (5.3) и (5.6), внутренняя энергия составной макросистемы дается выражением

$$U = h^{-v} \int H w dv = h^{-v^{(1)} - v^{(2)} - \dots} \int (H^{(1)} + H^{(2)} + \dots) \times \\ \times w^{(1)} w^{(2)} \dots dv^{(1)} dv^{(2)} \dots \quad (5.8)$$

В силу (5.4), из (5.7) и (5.8) следует, что

$$U = U^{(1)} + U^{(2)} + \dots, \quad (5.9)$$

т. е. что внутренняя энергия составной системы равна сумме внутренних энергий ее основных систем.

В соответствии с (3.8) и (5.3) индекс вероятности составной системы равен

$$\eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \dots \quad (5.10)$$

В силу (3.11) и (3.10), ее энтропия определяется выражением

$$S = -h^{-v} \int \eta w dv = -h^{-v^{(1)} - v^{(2)} - \dots} \int (\eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \dots) \times \\ \times w^{(1)} w^{(2)} \dots dv^{(1)} dv^{(2)} \dots, \quad (5.11)$$

тогда как

$$S^{(j)} = -h^{-v^{(j)}} \int \eta^{(j)} w^{(j)} dv^{(j)} \quad (5.12)$$

представляет собой энтропию j -й основной системы. Из (5.4), (5.11) и (5.12) следует, что

$$S = S^{(1)} + S^{(2)} + \dots, \quad (5.13)$$

т. е. что энтропия составной системы равна сумме энтропий основных систем.

Предположим, что вначале каждая из основных систем ведет себя квазистатически. Тогда поток и перенос фазовых точек в соответствующих фазовых пространствах в соответствии с п. 3.4 таковы, что их распределения всегда канонические, так что фазовые точки остаются сосредоточенными в непосредственных окрестностях некоторых $H^{(j)}$ -поверхностей и распределенными равномерно вдоль этих поверхностей, которые сами по себе могут находиться в состоянии медленного движения. Аналогичную картину можно представить для распределения фазовых точек в расширенном фазовом пространстве, представляющем

всю совокупность основных систем, за исключением того, что распределение не обязано быть каноническим, коль скоро основные системы остаются изолированными одна от другой. Действительно, фазовые точки концентрируются вдоль некоторой H -поверхности, но, в силу связей, поддерживающих изоляцию системы, их распределение вдоль этой поверхности не обязано быть однородным. Включение основных систем в некоторую составную систему эквивалентно выключению упомянутых связей. В силу этого выключения, механические координаты $x_k^{(j)}$ и температуры $\vartheta^{(j)}$ основных систем становятся свободными и, таким образом, определяются взаимодействием между основными системами.

Что касается величин $x_k^{(j)}$, то их изменение, в силу (2.38), эквивалентно обмену энергиями между основными микросистемами, причем их индивидуальные энергии $H^{(j)}$ и, следовательно, внутренние энергии $U^{(j)}$ меняются, но ни полная энергия H , ни внутренняя энергия U составной системы не меняются. В расширенном фазовом пространстве фазовые точки остаются на своих энергетических поверхностях, хотя их движение вдоль этих поверхностей может измениться под действием связей. Эта часть процесса не приводит к потокам в фазовом пространстве, и, следовательно, в ходе нее сохраняются постоянными как энтропии $S^{(j)}$ основных систем, так и энтропия S составной системы.

В соответствии с изложенным в п. 3.6 вторым следствием изменения величины $x_k^{(j)}$ может быть порождение энтропии внутри каждой из основных систем, соответствующее некоторому потоку, ортогональному к поверхностям энергии в основных фазовых пространствах. В силу (5.13), этот процесс эквивалентен некоторому приращению энтропии для составной системы. Поскольку это приращение не изменяет ее внутренней энергии, его можно интерпретировать в расширенном фазовом пространстве как некоторый поток вдоль поверхностей энергии.

Наконец, снятие связей превращает температуру $\vartheta^{(j)}$ в свободный параметр и открывает возможность для теплообмена между основными системами. Для некоторой данной основной системы любой приток или отток тепла

представляет собой обратимый процесс, соответствующий некоторому потоку в фазовом пространстве, регулируемому извне. Однако для составной системы всякий процесс внутреннего теплообмена необратим, и его следует интерпретировать как порождение энтропии на границах между основными системами. Действительно, следует ожидать, что в расширенном фазовом пространстве начальное неканоническое распределение стремится стать каноническим. Поэтому, как только внутренние связи снимаются, устанавливается некоторый поток вдоль поверхностей энергии. Такой поток, очевидно, уменьшает имеющуюся информацию о состоянии составной микросистемы и, таким образом, представляет собой другой тип порождения энтропии.

5.2. Деформация и напряжение. Для любой сплошной среды любую конечную массу m или объем V можно рассматривать как составную систему в смысле п. 5.1, причем соответствующие основные системы представляют собой элементы объема или массы. Состояние элемента описывается его температурой и некоторым подходящим тензором деформаций; соответствующий тензор напряжений определяет действующие силы. С точностью до смещения как абсолютно твердого тела, которое не представляет для нас интереса, конфигурация некоторой конечной массы описывается полем тензора деформаций в V ; состояние этой массы определяется вполне, если известно поле температур в ней. Следует отметить, хотя это здесь и не очень важно, что поле тензора деформаций нельзя выбирать произвольно. Кинематически допустимое поле деформаций должно удовлетворять некоторым соотношениям совместности. Аналогично, динамически допустимое поле напряжений должно удовлетворять некоторой системе условий равновесия, трактуемых в смысле Даламбера, если сплошная среда находится в состоянии движения.

С точки зрения, связываемой теперь обычно с именем Эйлера, движение сплошной среды можно описать полем скорости $v_j(y_k, t)$, заданным в виде некоторой функции положения точки в пространстве y_k и времени t . Принимая индексное обозначение для частных производных ($\partial v_j / \partial y_k = v_{j,k}$ и $\partial v_j / \partial t = v_{j,0}$), можно записать симметрич-

ную часть градиента скорости в виде

$$V_{jk} = \frac{1}{2} (v_{j,k} + v_{k,j}) \quad (5.14)$$

【Следуя Прагеру ([27], стр. 64), будем называть V_{jk} скоростью деформации. Напряженное состояние в сплошной среде можно описать эйлеровым полем напряжений $\sigma_{jk}(y_l, t)$, так что, если $\rho(y_l, t)$ описывает распределение плотности, то скорость изменения работы, производимой полем напряжений на единицу массы среды (см., например, Прагер [27], стр. 87), равна

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{jk} V_{jk} \quad (5.15)$$

С точки зрения, связываемой обычно с именем Лагранжа, то же самое движение можно описать с помощью мгновенных координат $y_j(\bar{y}_k, t)$ индивидуальных частиц, заданных в виде функций их начальных координат $\bar{y}_k$ и времени t . Здесь независимые переменные отличны от тех, которые были использованы выше. Для того чтобы подчеркнуть это различие, условимся обозначать частные производные по новой системе независимых переменных черточками ($\partial y_j / \partial \bar{y}_k = y_{j,\bar{k}}$ и $\partial y_j / \partial t = y_{j,\bar{0}}$); пусть $\bar{\rho}$ описывает начальное распределение плотности. С точки зрения Лагранжа, деформацию сплошной среды удобно описывать тензором деформации

$$e_{jk} = \frac{1}{2} (y_{l,\bar{j}} y_{l,\bar{k}} - \delta_{jk}) \quad (5.16)$$

введенным Гринем [12]. Его материальная скорость изменения (т. е. скорость его изменения для данной частицы сплошной среды) получается частным дифференцированием по t и, следовательно, дается соотношением

$$e_{jk,\bar{0}} = \frac{1}{2} (y_{l,\bar{j}} y_{l,\bar{k},\bar{0}} + y_{l,\bar{0}} y_{l,\bar{k}}). \quad (5.17)$$

Поскольку

$$y_{l,\bar{0}} = v_l \quad \text{и} \quad v_{l,\bar{k}} = v_{l,m} y_{m,\bar{k}}, \quad (5.18)$$

соотношение (5.17) принимает вид

$$e_{jh,\bar{0}} = \frac{1}{2} (y_{l,j} y_{m,\bar{k}} + y_{l,\bar{k}} y_{m,j}) v_{lm}. \quad (5.19)$$

Член в скобках симметричен по l и m , поэтому $v_{l,m}$ можно заменить ее симметричной частью V_{lm} . Меняя местами l и m в последней сумме, получаем окончательно

$$e_{jh,\bar{0}} = y_{l,j} y_{m,\bar{k}} V_{lm} \quad (5.20)$$

(Прагер [27], стр. 196). Тензору деформаций (5.16) удобно поставить в соответствие тензор напряжений

$$\tau_{jk} = \frac{\bar{\rho}}{\rho} \bar{y}_{j,p} \bar{y}_{k,q} \sigma_{pq}, \quad (5.21)$$

введенный Кирхгофом [17]. Произведение выражений (5.20) и (5.21) представляется в виде

$$\begin{aligned} \tau_{jk} e_{jh,\bar{0}} &= \frac{\bar{\rho}}{\rho} y_{l,j} y_{j,p} y_{m,\bar{k}} \bar{y}_{h,q} \sigma_{pq} V_{lm} = \frac{\bar{\rho}}{\rho} \delta_{pl} \delta_{qm} \sigma_{pq} V_{lm} = \\ &= \frac{\bar{\rho}}{\rho} \sigma_{kl} V_{kl} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Таким образом, скорость изменения работы (5.15), производимой полем напряжений на единицу массы, также дается соотношением

$$P = \frac{1}{\rho} \tau_{jk} e_{jh,\bar{0}}. \quad (5.23)$$

Вспомним теперь, что $e_{jh,\bar{0}}$ представляет собой материальную скорость изменения e_{jh} . Если состояние элемента описывается гриновыми компонентами деформации e_{jh} и температурой, то e_{jh} представляют собой механические координаты элемента в смысле п. 2.1 и величины $e_{jh,\bar{0}}$ представляют собой соответствующие скорости, согласно определению, данному в п. 4.1. Из (5.23) следует, что силы, соответствующие e_{jh} в смысле п. 2.1, суть кирхгофовы компоненты напряжения τ_{jk} , деленные на начальную плотность. Здесь основной системой является единичная масса.

Другой подход определяется соотношением (5.15). Согласно этому соотношению, компоненты V_{jk} скорости

деформации можно рассматривать как скорости; соответствующие этим скоростям силы суть компоненты эйлерова тензора напряжений σ_{jk} , деленные на мгновенную плотность ρ . Очевидно, что основной системой снова является единица массы. Следует заметить, что для конечных перемещений величины V_{jk} в отличие от $\varepsilon_{jk,0}$ нельзя интерпретировать как скорости изменения некоторой системы компонент деформации, которые можно было бы рассматривать как механические координаты, связанные с силами σ_{jk} . Это, однако, не мешает применению принципа наименьшей необратимой силы к V_{jk} и необратимым частям σ_{jk}/ρ . Этот принцип, сформулированный через скорости и необратимые силы, представляет собой некоторое утверждение, формулируемое для одного данного момента времени t или, если заменить скорости на бесконечно малые смещения, для бесконечно малого элемента времени. Нет оснований считать, что по каким-либо соображениям компоненты деформации (5.16) нельзя измерить по конфигурации в начале этого элемента времени. В этот момент

$$y_{j,\bar{k}} = \bar{y}_{j,k} = \delta_{jk}. \quad (5.24)$$

Следовательно, гринова скорость деформации (5.19) приводится к скорости деформации (5.14), тогда как киргофов тензор напряжений (5.21) совпадает с эйлеровым тензором напряжений σ_{jk} . Отсюда следует, что величины V_{jk} можно рассматривать как скорости изменения компонент бесконечно малой деформации в смысле Грина, а это уже достаточное основание для применения принципов п. 4.1 к V_{jk} к необратимым частям σ_{jk}/ρ .

Вводя перемещения

$$u_i(\bar{y}_k, t) = y_i - \bar{y}_i, \quad (5.25)$$

получаем

$$y_{i,\bar{j}} = u_{i,\bar{j}} + \delta_{ij}. \quad (5.26)$$

Следовательно, соотношение (5.16) можно записать в виде

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} (u_{i,\bar{j}} u_{i,\bar{k}} + u_{j,\bar{k}} + u_{k,\bar{j}}) \quad (5.27)$$

Если $\bar{\gamma}$ градиент перемещения $u_{i,\bar{j}}$, мал, то соотношение (5.27) можно линеаризовать. Тензор деформаций в этом

случае принимает вид

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} (u_{j,\bar{k}} + u_{k,\bar{j}}), \quad (5.28)$$

хорошо известный в линейной теории. В силу (5.26), соответствующие скорости деформации равны

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jk,\bar{0}} &= \frac{1}{2} (u_{j,\bar{0}\bar{k}} + u_{k,\bar{0}\bar{j}}) = \frac{1}{2} (v_{j,\bar{k}} + v_{k,\bar{j}}) = \\ &= \frac{1}{2} (v_{j,l} y_{l,\bar{k}} + v_{k,l} y_{l,\bar{j}}) = \\ &= \frac{1}{2} [v_{j,l} (u_{l,\bar{k}} + \delta_{lk}) + v_{k,l} (u_{l,\bar{j}} + \delta_{lj})], \end{aligned} \quad (5.29)$$

или после линеаризации и упрощения с помощью (4.14)

$$\varepsilon_{jk,\bar{0}} = \frac{1}{2} (v_{j,k} + v_{k,j}) = V_{jk}. \quad (5.30)$$

Таким образом, гринова скорость деформации приводится к обычной скорости деформации. Если $d\varepsilon_{jk}$ обозначает материальное приращение деформации, то (5.30) дает

$$d\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{jk,\bar{0}} dt = V_{jk} dt. \quad (5.31)$$

Из соотношений (5.15), (5.23) и (5.30) следует далее, что

$$P = \frac{1}{\rho} \sigma_{jk} V_{jk} = \frac{1}{\rho} \tau_{jk} V_{jk}. \quad (5.32)$$

В рассматриваемом здесь приближении ρ можно заменить на $\bar{\rho}$. В силу симметрии входящих в него тензоров, соотношение (5.32) дает

$$\tau_{jk} = \sigma_{jk}, \quad (5.33)$$

так что (эйлеров и кирхгофов) тензоры напряжений снова совпадают. Из (5.32) и (5.31) получается окончательно выражение для элементарной работы

$$dW = P dt = \frac{1}{\bar{\rho}} \tau_{jk} d\varepsilon_{jk} \quad (5.34)$$

на единицу массы.

5.3. Определяющие уравнения. В соответствии с п. 3.5 кирхгофов тензор напряжений можно расщепить на обратимую и необратимую части:

$$\tau_{jk} = \tau_{jk}^{(r)} + \tau_{jk}^{(i)}. \quad (5.35)$$

Рассматривая единичную массу как основную систему, можно получить в соответствии с п. 3.7, что тензор обратимых напряжений определяется соотношением

$$\tau_{jk}^{(r)} = \bar{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{jk}}, \quad \text{или} \quad \tau_{jk}^{(r)} = \bar{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{jk}}, \quad (5.36)$$

где ε_{jk} — гринов тензор деформации, а $U(\varepsilon_{jk}, S)$, $\Psi(\varepsilon_{jk}, \vartheta)$ представляют собой соответственно внутреннюю и свободную энергии, приходящиеся на единицу массы. Элементарная работа тензора обратимых напряжений равна

$$dW^{(r)} = \frac{1}{\bar{\rho}} \tau_{jk}^{(r)} d\varepsilon_{jk}. \quad (5.37)$$

С другой стороны, элементарная работа диссипации определяется соотношением

$$dW^{(i)} = \frac{1}{\bar{\rho}} \tau_{jk}^{(i)} d\varepsilon_{jk} = \vartheta dS^{(i)} \geq 0, \quad (5.38)$$

где $dS^{(i)}$ — элементарное порождение энтропии, приходящееся на единицу массы. Скорость изменения работы диссипации равна

$$P^{(i)} = \frac{1}{\bar{\rho}} \tau_{jk}^{(i)} \varepsilon_{jk,\bar{\vartheta}}. \quad (5.39)$$

Аналогичным образом можно расщепить на обратимую и необратимую части и эйлеров тензор напряжений

$$\sigma_{jk} = \sigma_{jk}^{(r)} + \sigma_{jk}^{(i)}. \quad (5.40)$$

Только что проведенные рассуждения без труда распространяются на σ_{jk} ; в самом деле, они остаются пригодными во всех отношениях, если τ_{jk} заменяется на σ_{jk} , $\bar{\rho}$ на ρ и если ε_{jk} интерпретируется как тензор бесконечно малых деформаций. В частности, скорость изменения работы диссипации принимает вид

$$P^{(i)} = \frac{1}{\rho} \sigma_{jk}^{(i)} V_{jk}. \quad (5.41)$$

Далее, сравнение с (5.34) показывает, что для малых градиентов смещения тензоры в (5.37) можно истолковывать как эйлеров тензор напряжений и материальное приращение упрощенного тензора деформаций (5.28).

Принцип наименьшей необратимой силы можно применять в любой из его форм, рассмотренных в § 4, либо к скоростям $\epsilon_{jk,0}$ и соответствующим силам τ_{jk}/ρ , либо же к скоростям V_{jk} и силам σ_{jk}/ρ . Для того чтобы избежать излишних повторений, ограничимся в последующем рассуждении только вторым случаем, имея, однако, в виду, что все эти рассуждения остаются в силе также и для другого случая. Пусть

$$D(V_{jk}) = P_{\mathbf{a}}^{(i)} \quad (5.42)$$

представляет собой диссипативную функцию на единицу массы, зависящую прежде всего от скорости деформации, но также, возможно, от мгновенного состояния элемента и его истории. Из п. 4.2 следует, что

$$\sigma_{jk}^{(i)}(V_{jk} - V_{jk}^*) \geq 0, \quad (5.43)$$

где $\sigma_{jk}^{(i)}$ — произвольный тензор необратимых деформаций, V_{jk} — истинная скорость деформации, связанная с этим тензором, и V_{jk}^* — произвольная скорость деформации, для которой $D(V_{jk}^*) \leq D(V_{jk})$. Знак равенства выполняется, если V_{jk}^* представляет собой другую скорость деформации, совместимую с $\sigma_{jk}^{(i)}$. Если D -поверхности — гладкие, то можно применить уравнение (4.20), т. е. связь между скоростью деформации и тензором необратимых напряжений дается соотношением

$$\sigma_{jk}^{(i)} = \rho \left(\frac{\partial D}{\partial V_{lm}} V_{lm} \right)^{-1} D \frac{\partial D}{\partial V_{jk}}. \quad (5.44)$$

В силу (4.36), диссипативные функции квазиоднородного типа удовлетворяют функциональному уравнению

$$\frac{\partial D}{\partial V_{jk}} V_{jk} = f(D). \quad (5.45)$$

Из (4.43) следует, что в этом случае (5.44) приводится к соотношению

$$\sigma_{jk}^{(i)} = \rho \frac{D}{f(D)} \frac{\partial D}{\partial V_{jk}}. \quad (5.46)$$

Далее, согласно (4.44) и (4.46), можно определить функцию φ соотношением

$$\varphi' = \int \frac{D}{f(D)} dD, \quad (5.47)$$

так что

$$\sigma_{jk}^{(i)} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial V_{jk}}; \quad (5.48)$$

Если диссипативная функция — однородная степени r , то из (4.62) следует, что

$$\sigma_{jk}^{(i)} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial D}{\partial V_{jk}}. \quad (5.49)$$

В частности, соотношение (5.49) справедливо для однородных полиномов. При $r=2$ связь между V_{jk} и $\sigma_{jk}^{(i)}$ становится линейной, т. е. становится связью типа

$$\sigma_{jk}^{(i)} = a_{jklm} V_{lm}, \quad (5.50)$$

где a_{jklm} не зависят от скоростей деформации, а соотношения (5.49) в этом случае равносильны соотношениям взаимности Онзагера

$$a_{lmjk} = a_{jklm}. \quad (5.51)$$

Уравнения (5.44), (5.46), (5.48), (5.49) и (5.50) связывают скорости деформации в сплошных средах различных типов с необратимой частью тензора напряжений. Всякое соотношение этого типа называется *определяющим уравнением* для рассматриваемой сплошной среды. Его следует дополнить некоторым утверждением, касающимся обратимой части тензора напряжений, т. е., вообще говоря, некоторым соотношением типа (5.36), связывающим деформации с обратимыми напряжениями. В силу рассуждений п. 4.3, ясно, что тензоры V_{jk} и $\sigma_{jk}^{(i)}$ можно поменять местами. Исходя из некоторой диссипативной функции

$$D'(\sigma_{jk}^{(i)}) = P^{(i)}, \quad (5.52)$$

записанной через необратимые напряжения, и заменяя ею (5.42), мы получим следствие для любого из рассмотренных выше определяющих уравнений.

5.4. Поток тепла. В п. 5.2 было отмечено, что конечный объем сплошной среды можно рассматривать как составную систему, рассматривая элементы массы как соответствующие основные системы. В предыдущем разделе мы рассматривали порождение энтропии внутри элементов массы за счет работы необратимых сил. Суммируя вклады отдельных элементов массы, получаем порождение энтропии внутри конечного объема сплошной среды, поскольку оно обуславливается работой необратимых сил. Однако в п. 5.1 было показано, что границы между основными системами представляют собой другой источник порождения энтропии, поскольку любой тепловой поток между элементами увеличивает энтропию составной системы. Таким образом, имеются два различных типа порождения энтропии в конечном объеме сплошной среды. Первый из них был разобран в п. 5.3, сосредоточимся теперь на втором.

Пусть V означает объем некоторой конечной порции сплошной среды, ограниченной регулярной поверхностью A с единичным вектором нормали v_k . Если q_k — поток тепла, то скорость возрастания энтропии под действием потока тепла получается из первого уравнения (3.38) в виде

$$-\int \frac{1}{\vartheta} q_{k,k} dV, \quad (5.53)$$

поскольку дивергенция потока тепла, взятая с обратным знаком, $-q_{k,k}$ представляет собой приток тепла в единицу объема за единицу времени. В силу теоремы Гаусса (см., например, Прагер [27], стр. 29), это выражение эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} -\int \left(\frac{q_k}{\vartheta} \right)_{,k} dV &= -\int \frac{1}{\vartheta^2} \vartheta_{,k} q_k dV = -\int \frac{1}{\vartheta^2} \vartheta_{,k} q_k dV - \\ &= -\int \frac{1}{\vartheta} q_k v_k dA. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Очевидно, что второй член правой части представляет собой приращение энтропии, обусловленное потоком тепла через поверхность A . Следовательно, первый член представляет порождение энтропии, обусловленное тепло-

обменом внутри поверхности A . Отсюда следует, что скорость порождения энтропии единичной массы определяется соотношением

$$\frac{d^{(i)}S}{dt} = -\frac{1}{\rho\vartheta^2} \vartheta_{,k} q_k. \quad (5.55)$$

Ситуация, с которой мы здесь встречаемся, аналогична ситуации п. 4.1. Там мы доказали, что скорость порождения энтропии на некотором данном этапе процесса определяется одними только величинами x_k через диссипативную функцию (4.3), причем необратимые силы $X_k^{(i)}$ представляют собой величины второстепенного значения. Подобно этому очевидно, что для данного состояния сплошной среды скорость порождения энтропии и изменение распределения температуры должны определяться тепловым потоком q_k . Это наблюдение подсказывает, что q_k следует рассматривать как «скорости» в задаче теплового потока, что следует ввести диссипативную функцию

$$D(q_k)_{,k} = \vartheta \frac{d^{(i)}S}{dt^2} = -\frac{1}{\rho\vartheta} \vartheta_{,k} q_k \geq 0 \quad (5.56)$$

и что величины $-\vartheta_{,k}/(\rho\vartheta)$ следует истолковывать как силы, соответствующие q_k в единице массы.

Ясно, что указанные выше величины не представляют собой скоростей или сил в смысле п. 2.1 или 4.1. Поэтому принцип максимальной скорости порождения энтропии можно применять только в форме, приспособленной для фазового пространства. Уравнение (4.20) дает при этом

$$\vartheta_{,k} = -\rho\vartheta \left(\frac{\partial D}{\partial q_j} q_j \right)^{-1} D \frac{\partial D}{\partial q_k}, \quad (5.57)$$

когда D удовлетворяют условию устойчивости (4.9) при

$$R = (q_k q_k)^{1/2}_{,k} \quad (5.58)$$

и D -поверхности гладкие. В этих предположениях уравнение (5.57) представляет собой наиболее общую форму закона теплопроводности.

В соответствии с (4.70) и (4.71) линейная версия (5.57) получается, если принять

$$D = \frac{1}{\rho\vartheta} a_{jk} q_j q_k, \quad a_{kj} = a_{jk}. \quad (5.59)$$

Подставляя (5.59) в (5.57), получаем

$$\vartheta_{,k} = -a_{kj}q_j, \quad (5.60)$$

т. е. закон Фурье [3] для анизотропной среды. В изотропном случае (5.60) приводится к

$$q_k = -b\vartheta_{,k} \quad (5.61)$$

где b — коэффициент теплопроводности среды.

§ 6. Определяющие уравнения

6.1. Упругие твердые тела. С точки зрения термодинамики *упругую* сплошную среду можно определить вполне общим образом, исходя из условия, что ее элементы свободны от необратимых компонент напряжений ¹⁾.

В этом случае порождение энтропии (3.38) внутри элемента равно нулю и из (3.36) следует, что энтропия единицы массы S не зависит от гриновых компонент деформации e_{jk} и, следовательно, зависит от одной только температуры ϑ . Порождение энтропии в некотором конечном объеме обуславливается полностью теплообменом. В согласии с (5.36) кирхгофов тензор напряжений задается выражениями

$$\tau_{jk} = \bar{\rho} \frac{\partial U}{\partial e_{jk}} \quad \text{или} \quad \tau_{jk} = \bar{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial e_{jk}}, \quad (6.1)$$

где $U(e_{jk}, S)$ — внутренняя энергия, а $\Psi(e_{jk}, \vartheta)$ — свободная энергия единицы массы.

Поскольку S зависит только от ϑ , из (3.44) следует, что разность $U - \Psi$ не зависит от e_{jk} . Поэтому эти две функции обладают одинаковыми свойствами, если рассматривать их зависимость от e_{jk} . Устойчивость элемента требует, чтобы функции $U(e_{jk}, S)$ и $\Psi(e_{jk}, \vartheta)$ были бы по крайней мере положительно полуопределенными по

¹⁾ В последнее время математические соображения привели некоторых авторов к необходимости различать *гипоупругие*, *упругие* и *гиперупругие* материалы [38]. В согласии с их терминологией материал, определенный выше, будет гиперупругим. Использованное здесь определение является чисто физическим и отвечает классическому понятию упругости [15].

ε_{jk} для всех значений S или ϑ . Определим теперь упругое *твердое тело* условием, что эти две функции положительно определенные, и будем предполагать это условие выполненным во всей оставшейся части этого раздела.

[Если бы функции, рассмотренные только что, были бы неопределенными по ε_{jk} , то произвольно малого возмущения было бы достаточно для начала самопроизвольных деформаций из ненапряженного равновесного состояния. Если U и Ψ только полуопределенны, некоторые дефор-



Р и с. 6.1. Модуль упругого тела.

мации возможны без совершения внешней работы. Это последнее поведение типично для невязких жидкостей и газов.)

Реологическая модель упругого твердого тела представляет собой пружину (рис. 6.1). В теории упругости обычно ограничиваются изучением изотермических или адиабатических процессов, предполагая, что либо температуры единичных элементов не зависят от времени, либо же поток тепла между элементами отсутствует. Поскольку в упругой сплошной среде порождение энтропии полностью обуславливается теплообменом, адиабатические процессы оставляют энтропию неизменной и, таким образом, являются также и изэнтропическими. Из (6.1) вытекает, что для любого из рассмотренных здесь двух классов

$$\tau_{jk} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{jk}}, \quad (6.2)$$

где упругий потенциал $\psi(\varepsilon_{jk})$ представляет собой внутреннюю или свободную энергию, смотря по тому, будет ли процесс адиабатическим или изотермическим. В случаях, когда распределение температуры в начале процесса неравномерно, функция $\psi(\varepsilon_{jk})$ зависит также и от элемента.

Уравнение (6.2) представляет собой исходный пункт теории больших упругих деформаций, которая до сих пор развивалась, по существу, только для изотропных материалов¹⁾. В этом случае функцию ψ можно представить как функцию основных инвариантов тензора напряжений

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(1)} &= \varepsilon_{jj}, \\ \varepsilon_{(2)} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{jk} \varepsilon_{kj} - \varepsilon_{jj} \varepsilon_{kk}) = \frac{1}{2} (\varepsilon_{jk} \varepsilon_{kj} - \varepsilon_{(1)}^2), \\ \varepsilon_{(3)} &= \frac{1}{6} (2 \varepsilon_{jk} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{lj} - 3 \varepsilon_{jk} \varepsilon_{kj} \varepsilon_{ll} + \varepsilon_{jj} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{ll}) = \\ &= \frac{1}{3} (\varepsilon_{jk} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{lj} - 3 \varepsilon_{(2)} \varepsilon_{(1)} - \varepsilon_{(1)}^3) \end{aligned} \quad (6.3)$$

(см., например, Прагер [27], стр. 66). Существенный прогресс в этой области был достигнут в работе Ривлина [31], который заметил, что все резиноподобные тела практически несжимаемые. Он развил теорию несжимаемого изотропного упругого тела и показал возможность решения многочисленных задач без задания упругого потенциала.

[При разработке теории оказалось, что возможность ее применения существенно улучшается, если заменить τ_{jk} на σ_{jk} . Далее оказывается полезным заменить ε_{jk} другим тензором деформаций. Однако тензор V_{jk} здесь мало полезен, так как здесь существенны полные деформации.]

Если теперь предположить градиент смещения малым, то получатся определяющие уравнения классической линейной теории упругости. В этом случае тензор деформации ε_{jk} определяется соотношением (5.28), и из (5.33) следует, что τ_{jk} можно истолковывать как эйлеров тензор напряжений.

Обозначая через

$$\chi = \bar{\rho} \psi \quad (6.4)$$

упругий потенциал на единицу объема и заменяя τ_{jk} на σ_{jk} , вместо (6.2) получаем

$$\sigma_{jk} = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{jk}}; \quad (6.5)$$

¹⁾ См. А. Грин и Дж. Адкинс, Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды, «Мир», М., 1965 г. — *Прим. ред.*

где χ , в силу предположения о малости градиента смещения, можно считать квадратичной формой

$$\chi = \frac{1}{2} c_{jklm} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{lm} \quad (6.6)$$

по ε_{jk} , если деформации отсчитываются от ненапряженного состояния.

Для дифференцирования функции симметричного тензора (подобной $\chi(\varepsilon_{jk})$) удобно записать эту функцию в форме симметричной по симметричным компонентам (ε_{jk} и ε_{kj}) и рассматривать эти компоненты как независимые, используя условие симметрии ($\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj}$) только после того, как дифференцирование будет выполнено (см. Прагер [27], стр. 206). В согласии с этим правилом $c_{kjlm} = c_{jklm}$. Далее, коэффициенты в (6.6) всегда можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось условие $c_{lmjk} = c_{jklm}$. В силу (6.5) и (6.6),

$$\sigma_{jk} = c_{jklm} \varepsilon_{lm}, \quad (6.7)$$

и из симметрии σ_{jk} следует, что $c_{kjlm} = c_{jklm}$. Таким образом, связь между компонентами деформации и напряжения линейна и характеризуется 21 коэффициентом, которые удовлетворяют тождествам

$$c_{jklm} = c_{kjl m} = c_{j k m l} = c_{l m j k}. \quad (6.8)$$

Уравнение (6.7) представляет собой обобщение закона Гука на случай анизотропных тел.

Для изотропных материалов число независимых коэффициентов (6.8) можно свести к двум. В этом случае коэффициенты c_{jklm} в (6.6) должны быть такими, чтобы χ стала функцией одних только основных инвариантов тензора деформации. В силу (6.3), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{(1)}}{\partial \varepsilon_{jk}} &= \delta_{jk}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{(2)}}{\partial \varepsilon_{jk}} &= \varepsilon_{jk} - \varepsilon_{(1)} \delta_{jk}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{(3)}}{\partial \varepsilon_{jk}} &= \varepsilon_{jl} \varepsilon_{lk} - \varepsilon_{(1)} \varepsilon_{jk} - \varepsilon_{(2)} \delta_{jk}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\sigma_{jk} = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{jk}} = & \left(\frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{(1)}} - \varepsilon_{(1)} \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{(2)}} - \varepsilon_{(2)} \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{(3)}} \right) \delta_{jk} + \\ & + \left(\frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{(2)}} - \varepsilon_{(1)} \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{(3)}} \right) \varepsilon_{jk} + \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{(3)}} \varepsilon_{ji} \varepsilon_{ik}. \quad (6.10)\end{aligned}$$

Это выражение представляется в форме (6.10) в том и только в том случае, если

$$\frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{(3)}} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{(2)}} = 2\mu, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{(1)}} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{(1)}, \quad (6.11)$$

где величины λ и μ не зависят от компонент деформации. Отвлекаясь от несущественных констант, запишем общее решение системы (6.11) в виде

$$\chi = \left(\frac{1}{2} \lambda + \mu \right) \varepsilon_{(1)}^2 + 2\mu \varepsilon_{(2)}. \quad (6.12)$$

Подставляя (6.12) в (6.10) и имея в виду (6.3), получаем определяющее уравнение

$$\sigma_{jk} = \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{jk} + 2\mu \varepsilon_{jk} \quad (6.13)$$

изотропного гукова тела (см., например, Прагер [27], стр. 161).

В силу условия положительной определенности упругого потенциала, коэффициенты c_{jklm} или λ , μ должны удовлетворять определенным неравенствам. В однородной сплошной среде эти коэффициенты постоянны либо зависят только от температуры. В неоднородной среде они меняются от элемента к элементу, даже если температура тела постоянна.

6.2. Частный случай вязкоупругости. Имеется много типов вязко-упругих материалов. Соответствующие реологические модели строятся различными путями из пружин и катаракт (поршней с вязкой жидкостью) (см. Бленд [21]). Вообще говоря, реакция этих материалов настолько сложна, что ее нельзя объяснить с помощью однородных элементов, состояние которых описывается компонентами

деформации и температурой. Более реалистичский подход мог бы быть основан на предположении, что сплошная среда составлена из элементов различных типов. Такой подход, однако, находится вне рамок этой статьи.

Особенно простым случаем является *тело Кельвина*. Его реологическая модель состоит из пружины и катаракты, соединенных параллельно (рис. 6.2). Этот материал



Р и с. 6.2. Модель тела Кельвина.

можно, следовательно, характеризовать определяющим уравнением

$$\tau_{jk} = \tau_{jk}^{(r)} + \tau_{jk}^{(i)}, \quad (6.14)$$

где тензор обратимых напряжений $\tau_{jk}^{(r)}$ — упругий и, следовательно, удовлетворяет всем условиям, указанным для τ_{jk} в п. 6.1, тогда как необратимая часть $\tau_{jk}^{(i)}$ тензора τ_{jk} удовлетворяет принципу наименьшей необратимой силы. В соответствии с (5.39) и (5.41) скорость работы диссипации на единицу массы равна

$$P_{\cdot\cdot}^{(i)} = \frac{1}{\rho} \tau_{jk}^{(i)} e_{jk,02} \quad \text{или} \quad P^{(i)} = \frac{1}{\rho} \sigma_{jk}^{(i)} V_{jk}. \quad (6.15)$$

Если использовать скорость деформации V_{jk} и эйлеров тензор $\sigma_{jk}^{(i)}$ напряжений, и если $D(V_{jk})$ обозначает диссипативную функцию, приходящуюся на единицу массы, то принцип наименьшей необратимой силы приводит к соотношению (5.44), т. е.

$$\sigma_{jk}^{(i)} = \rho \left(\frac{\partial D}{\partial V_{lm}} V_{lm} \right)^{-1} D \frac{\partial D}{\partial V_{jk}} \quad (6.16)$$

в предположении, что D -поверхности гладкие.

Для частных типов диссипативных функций (6.16) можно заменить на (5.46), (5.48) или (5.49). Из п. 6.1 следует, что для малых градиентов смещения обратимая часть эйлера тензора напряжений дается соотношением

$$\sigma_{jh}^{(r)} = \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{jh}} = c_{jhlm} \varepsilon_{lm}, \quad (6.17)$$

где упругий потенциал χ на единицу объема представляет собой положительно определенную квадратичную форму компонент тензора деформации

$$\chi = \frac{1}{2} c_{jhlm} \varepsilon_{jh} \varepsilon_{lm}. \quad (6.8)$$

Аналогично диссипативная функция единицы массы для малых скоростей деформации ¹⁾ становится квадратичной формой величин V_{jk} :

$$D = \frac{1}{\rho} a_{jhlm} V_{jh} V_{lm}. \quad (6.19)$$

Функция $D(V_{jk})$ представляет собой однородную функцию степени $r=2$, и условие устойчивости (4.60) будет поэтому удовлетворено. Необратимая часть эйлера тензора напряжений дается в согласии с (5.49) или (6.16) соотношением

$$\sigma_{jh}^{(i)} = \frac{\rho}{2} \frac{\partial D}{\partial V_{jh}} = a_{jhlm} V_{lm}, \quad (6.20)$$

где величины V_{lm} для малых градиентов смещения должны быть заменены на $\varepsilon_{lm,0}$. В этом последнем случае полное определяющее уравнение имеет вид

$$\sigma_{jh} = c_{jhlm} \varepsilon_{lm} + a_{jhlm} \varepsilon_{lm,0}, \quad (6.21)$$

и аналогию между обратимой и необратимой частями реакции можно сделать полной, используя вместо D половину диссипативной функции на единицу объема: $\frac{1}{2} \rho D$.

Поскольку D является по крайней мере положительно полуопределенной, коэффициенты a_{jhlm} должны удовлетворять тем же неравенствам, что и коэффициенты c_{jhlm} в п. 6.1. Согласно данному там правилу представления

¹⁾ Точное определение этого понятия см. в п. 6.1.

симметричных функций, $a_{kjlm} = a_{jklm}$. Далее всегда можно выбрать коэффициенты в (6.19) так, чтобы $a_{lmjk} = a_{jklm}$, так что из (6.20) и симметрии $\sigma_{jk}^{(i)}$ следует, что $a_{kjlm} = a_{jklm}$. Таким образом, для малых скоростей деформации связь между скоростями деформации и компонентами необратимого напряжения линейна и характеризуется 21 коэффициентом, которые удовлетворяют соотношениям

$$a_{jklm} = a_{kjl m}, \quad a_{jklm} = a_{lmjk}, \quad (6.22)$$

последнее из которых является следствием принципа наименьшей необратимой силы [40].

В однородной сплошной среде коэффициенты (6.22) постоянны или зависят от состояния материала и его истории. В неоднородной среде, разумеется, они могут даже меняться от элемента к элементу, если их состояния и истории одинаковы.

Если материал изотропен, то диссипативная функция D зависит от скорости деформаций V_{jk} только через посредство основных инвариантов этого тензора:

$$\begin{aligned} V_{(1)} &= V_{jj}, \\ V_{(2)} &= \frac{1}{2} (V_{jk} V_{kj} - V_{jj} V_{kk}) = \frac{1}{2} (V_{jk} V_{kj} - V_{(1)}^2), \\ V_{(3)} &= \frac{1}{6} (2V_{jk} V_{kl} V_{lj} - 3V_{jk} V_{kj} V_{ll} + V_{jj} V_{kk} V_{ll}) = \\ &= \frac{1}{3} (V_{jk} V_{kl} V_{lj} - 3V_{(2)} V_{(1)} - V_{(1)}^3). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Из (6.23) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{(1)}}{\partial V_{jk}} &= \delta_{jk}; \quad \frac{\partial V_{(2)}}{\partial V_{jk}} = V_{jk} - V_{(1)} \delta_{jk}; \\ \frac{\partial V_{(3)}}{\partial V_{jk}} &= V_{jl} V_{lk} - V_{(1)} V_{jk} - V_{(2)} \delta_{jk}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial V_{jk}} &= \frac{\partial D}{\partial V_{(1)}} \delta_{jk} + \frac{\partial D}{\partial V_{(2)}} (V_{jk} - V_{(1)} \delta_{jk}) + \\ &+ \frac{\partial D}{\partial V_{(3)}} (V_{jl} V_{lk} - V_{(1)} V_{jk} - V_{(2)} \delta_{jk}) \end{aligned} \quad (6.25)$$

и

$$\frac{\partial D}{\partial V_{lm}} V_{lm} = \frac{\partial D}{\partial V_{(1)}} V_{(1)} + 2 \frac{\partial D}{\partial V_{(2)}} V_{(2)} + 3 \frac{\partial D}{\partial V_{(3)}} V_{(3)}. \quad (6.26)$$

Подставляя (6.25) и (6.26) в (6.16), получаем необратимую часть общего определяющего уравнения для изотропного кельвинова тела.

Для малых скоростей деформации последний шаг должен привести к выражению типа (6.20). Рассуждения, аналогичные тем, которые вели от (6.10) к (6.12), непосредственно обнаруживают, что это возможно в том и только в том случае, когда

$$\frac{1}{2} \rho D = \left(\frac{1}{2} \kappa + \eta \right) V_{(1)}^2 + 2\eta V_{(2)}^2, \quad (6.27)$$

где величины κ и η не зависят от скоростей деформации. В силу (6.20), соответствующий тензор необратимых деформаций имеет вид

$$\sigma_{jk}^{(i)} = \kappa V_{ii} \delta_{jk} + 2\eta V_{jk}. \quad (6.28)$$

6.3. Вязкие жидкости. Разобьем тензор V_{jk} на изотропный тензор $\frac{1}{3} V_{ii} \delta_{jk}$, основанный на так называемой скорости изменения объема $V_{ii} = V_{(1)}$, и девиатор $V'_{jk} = V_{jk} - \frac{1}{3} V_{ii} \delta_{jk}$, так называемую скорость изменения формы. Имеем

$$V_{jk} = \frac{1}{3} V_{ii} \delta_{jk} + V'_{jk} = \frac{1}{3} V_{(1)} \delta_{jk} + V'_{jk}. \quad (6.29)$$

Аналогичное разбиение для σ_{jk} имеет вид

$$\sigma_{jk} = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \delta_{jk} + \sigma'_{jk} = \frac{1}{3} \sigma_{(1)} \delta_{jk} + \sigma'_{jk}, \quad (6.30)$$

оно основано на среднем нормальном напряжении $\frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} \sigma_{(1)}$ и девиаторе напряжений σ'_{jk} .

Жидкость можно определить очень общим образом, включая в это определение также и газы, как кельвиново тело, для которого тензор обратимых напряжений $\sigma_{jk}^{(r)}$ чисто изотропен, т. е. имеет вид

$$\sigma_{jk}^{(r)} = -p \delta_{jk}, \quad (6.31)$$

где p обозначает гидростатическое давление. Обратимая скорость работы на единицу массы дается соотношением

$$P^{(r)} = \frac{1}{\rho} \sigma_{jk}^{(r)} V_{jk} = - \frac{p}{\rho} V_{ii} \quad (6.32)$$

и, следовательно, не зависит от девиатора V_{jk}' . Отсюда следует, что в том, что касается изменения формы, реологическую модель рис. 6.2 можно заменить простой ката-



Р и с. 6.3. Модель вязкой жидкости при чистом изменении формы.

рактой (рис. 6.3). Обратимая элементарная работа выражается следующим образом:

$$dW^{(r)} = P^{(r)} dt = - p dV = \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (6.33)$$

где V обозначает объем единицы массы. Отсюда следует, что для обратимой части процесса можно использовать в качестве независимых переменных, характеризующих состояние, плотность ρ и температуру ϑ или энтропию S и что p/ρ^2 представляет собой соответствующую силу. Таким образом, (6.1) следует заменить на

$$\dot{p} = \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} = \rho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}, \quad (6.34)$$

где $U(\rho, S)$ — внутренняя энергия, а $\Psi(\rho, \vartheta)$ — свободная энергия единицы массы. Для адиабатического или изотермического процессов (6.34) приводится к соотношению

$$\dot{p} = \rho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}, \quad (6.35)$$

где $\Psi(\rho)$ — упругий потенциал.

Необратимое поведение жидкости определяется диссипативной функцией единицы массы

$$D(V_{jk}) = P^{(1)} = \frac{1}{\rho} \sigma_{jk}^{(1)} V_{jk} \quad (6.36)$$

Ограничимся, начиная с этого момента, *изотропными жидкостями*, тогда можно использовать уравнения (6.25) и (6.26), выражающие тот факт, что D представляется только через инварианты (6.23). Подставляя эти уравнения в (6.16), получаем

$$\sigma_{jk}^{(1)} = A \left[\frac{\partial D}{\partial V_{(1)}} \delta_{jk} + \frac{\partial D}{\partial V_{(2)}} (V_{jk} - V_{(1)} \delta_{jk}) + \right. \\ \left. + \frac{\partial D}{\partial V_{(3)}} (V_{jl} V_{lk} - V_{(1)} V_{jk} - V_{(2)} \delta_{jk}) \right], \quad (6.37)$$

где

$$A = \rho D \left(\frac{\partial D}{\partial V_{(1)}} V_{(1)} + 2 \frac{\partial D}{\partial V_{(2)}} V_{(2)} + 3 \frac{\partial D}{\partial V_{(3)}} V_{(3)} \right)^{-1/2} \quad (6.38)$$

Уравнения (6.31), (6.34), (6.37) и (6.38) представляют собой обратимую (упругую) и необратимую (вязкую) части наиболее общего определяющего уравнения изотропной жидкости, обладающей постулированными здесь термодинамическими свойствами. Прагер [23] и Рейнер [30] установили более общее определяющее уравнение, содержащее две произвольные функции вместо D . Уравнения (6.37) и (6.38) [40] представляют частную форму их результата, полученную в предположении, что он удовлетворяет принципу наименьшей необратимой силы.

Имеется по существу два пути для получения простых частных случаев общих определяющих уравнений (6.37), (6.38). Один подход основан на возможности разложения D в степенной ряд по аргументам этой функции и удержания членов только до некоторой заданной степени.

Пусть T обозначает интервал времени, в течение которого жидкость наблюдается. Из (5.14) следует, что TV_{jk} (в отличие от V_{jk}) представляет собой безразмерный тензор. Если компоненты этого тензора малы по сравнению с единицей, то мы будем говорить о малых скоростях деформации, обосновывая эту семантическую неточность

возможностью выбора T в качестве единицы времени. Предполагая, что V_{jk} в указанном смысле представляет собой малую первого порядка, получим, в силу (6.23), что и $V_{(1)}$ имеет тот же порядок малости, тогда как $V_{(2)}$ будет второго, а $V_{(3)}$ — третьего порядка малости. Наконец, удобнее разлагать в ряд диссипативную функцию на единицу объема ρD вместо D .

Поскольку ρD представляет собой по крайней мере положительно полуопределенную функцию, она не может иметь члена $\alpha^0 + \alpha^{(1)} V_{(1)}$. Поэтому первое приближение дается квадратичной формой

$$\rho D = \alpha^{(11)} V_{(1)}^2 + \alpha^{(2)} V_{(2)}. \quad (6.39)$$

Подставляя (6.39) в (6.37) и (6.38), получаем

$$\sigma_{jk}^{(i)} = (\alpha^{(11)} - \frac{1}{2} \alpha^{(2)}) V_{(1)} \delta_{jk} + \frac{1}{2} \alpha^{(2)} V_{jk}. \quad (6.40)$$

Это соотношение представляет собой простейшую форму (6.37). Имея в виду (6.23) и полагая $\alpha^{(1)} - \frac{1}{2} \alpha^{(2)} = \kappa$, $\frac{1}{4} \alpha^{(2)} = \eta$, приводим это соотношение к (6.28) и, добавляя гидростатическое давление (6.31), получаем из (6.40) определяющее уравнение ньютоновой жидкости:

$$\sigma_{jk} = -p \delta_{jk} + \kappa V_{ii} \delta_{jk} + 2\eta V_{jk}. \quad (6.41)$$

Второе приближение, т. е. простая *неньютонова* *жидкость*, определяется уравнением

$$\rho D = \alpha^{(11)} V_{(1)}^2 + \alpha^{(2)} V_{(2)} + \alpha^{(111)} V_{(1)}^3 + \alpha^{(12)} V_{(1)} V_{(2)} + \alpha^{(3)} V_{(3)}. \quad (6.42)$$

Соответствующее необратимое напряжение (6.37), (6.38) представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}^{(i)} = & \left[\left(\alpha^{(11)} - \frac{1}{2} \alpha^{(2)} \right) V_{(1)} + \frac{1}{2} (3\alpha^{(111)} - \alpha^{(2)}) V_{(1)}^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} (\alpha^{(12)} - \alpha^{(3)}) V_{(2)} - \frac{2\alpha^{(11)} - \alpha^{(2)}}{4(\alpha^{(11)} + \alpha^{(2)} V_{(2)}/V_{(1)}^2)} \times \\ & \left. \times \left(\alpha^{(111)} V_{(1)}^2 + \alpha^{(12)} V_{(2)} + \alpha^{(3)} \frac{V_{(3)}}{V_{(1)}} \right) \right] \delta_{jk} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left[\alpha^{(2)} + (\alpha^{(12)} - \alpha^{(3)}) V_{(1)} - \frac{\alpha^{(2)}}{4(\alpha^{(11)} + \alpha^{(2)} V_{(2)}/V_{(1)}^2)} \times \right. \\
& \quad \times \left(\alpha^{(111)} V_{(1)} + \alpha^{(12)} \frac{V_{(2)}}{V_{(1)}} + \right. \\
& \quad \left. \left. + \alpha^{(3)} \frac{V_{(3)}}{V_{(1)}^2} \right) \right] V_{jk} + \frac{1}{2} \alpha^{(3)} V_{jl} V_{lk}. \quad (6.43)
\end{aligned}$$

Другое упрощение общего определяющего уравнения (6.37), (6.38) может быть основано на рассуждениях п. 4.4. Если диссипативная функция квазиоднородна, то она удовлетворяет функциональному уравнению (5.45), где функция $f(D)$ произвольна. Соответствующие D -поверхности подобны и подобно расположены по отношению к началу координат, и определяющее уравнение обладает тем свойством, что направления векторов $\sigma_{jk}^{(i)}$ и V_{jk} в пространстве напряжений или скоростей деформации определяют одно другое независимо от их величин.

В силу (6.26), функциональное уравнение (5.45), определяющее квазиоднородные диссипативные функции, можно записать в виде

$$\frac{\partial D}{\partial V_{(1)}} V_{(1)} + 2 \frac{\partial D}{\partial V_{(2)}} V_{(2)} + 3 \frac{\partial D}{\partial V_{(3)}} V_{(3)} = f(D) \quad (6.44)$$

Соответствующие характеристические дифференциальные уравнения

$$\frac{dV_{(1)}}{V_{(1)}} = \frac{dV_{(2)}}{2V_{(2)}} = \frac{dV_{(3)}}{3V_{(3)}} = \frac{dD}{f(D)} \quad (6.45)$$

имеют первые интегралы

$$\frac{V_{(1)}^2}{V_{(2)}}, \frac{V_{(3)}^2}{V_{(2)}^3}, \frac{1}{V_{(2)}} \exp \left(2 \int \frac{dD}{f(D)} \right); \quad (6.46)$$

Таким образом, общее решение уравнения (6.44) имеет вид

$$Q \left[\frac{V_{(1)}^2}{V_{(2)}}, \frac{V_{(3)}^2}{V_{(2)}^3}, \frac{1}{V_{(2)}} \exp \left(2 \int \frac{dD}{f(D)} \right) \right] = 0, \quad (6.47)$$

где Q — произвольная функция своих трех аргументов. Уравнение (6.47) эквивалентно уравнению

$$V_{(2)} G\left(\frac{V_{(1)}^2}{V_{(2)}}, \frac{V_{(3)}^2}{V_{(2)}}\right) = \exp\left(2 \int \frac{dD}{f(D)}\right) = K(D). \quad (6.48)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dD}{f(D)} = \frac{1}{2} d \ln K(D) = \frac{1}{2} \frac{K'(D)}{K(D)} dD \quad (6.49)$$

или

$$\frac{K'(D)}{K(D)} = \frac{2}{f(D)}; \quad (6.50)$$

Поскольку функция $f(D)$ — произвольная, произвольна и функция $K(D)$. В соответствии с (6.48) диссипативная функция представляется в виде

$$D = F\left[V_{(2)} G\left(\frac{V_{(1)}^2}{V_{(2)}}, \frac{V_{(3)}^2}{V_{(2)}}\right)\right], \quad (6.51)$$

где G и F — произвольные функции (последняя — обратная к K). Пусть

$$\alpha = \frac{V_{(1)}^2}{V_{(2)}}, \quad B = \frac{V_{(3)}^2}{V_{(2)}}. \quad (6.52)$$

Подставляя (6.51) и (6.52) в (6.37) и (6.38), мы окончательно получаем наиболее общее определяющее уравнение

$$\sigma_{jk}^{(i)} = \frac{\rho D}{G V_{(2)}} \left[\frac{\partial G}{\partial \alpha} V_{(1)} \delta_{jk} + \frac{1}{2} \left(G - \frac{\partial G}{\partial \alpha} \frac{V_{(1)}^2}{V_{(2)}} - 3 \frac{\partial G}{\partial B} \frac{V_{(3)}^2}{V_{(2)}} \right) \times \right. \\ \left. \times (V_{jk} - V_{(1)} \delta_{jk}) + \frac{\partial G}{\partial B} \frac{V_{(3)}}{V_{(2)}} (V_{jl} V_{lk} - V_{(1)} V_{jk} - V_{(2)} \delta_{jk}) \right], \quad (6.53)$$

описывающее необратимую реакцию изотропной жидкости с квазиоднородной диссипативной функцией.

В последних параграфах не раз отмечалось, что, вообще говоря, диссипативная функция зависит не от одних скоростей. Таким образом, коэффициенты $\alpha^{(i,j,\dots)}$ в предыдущем выражении и функции F , G в (6.51) зависят,

вообще говоря, от состояния элемента и его истории. В неоднородной среде они отличаются от одного элемента к другому, даже если состояния и истории элементов одинаковы. В большинстве приложений, однако, предполагается, что коэффициенты постоянны и F , G являются функциями только от аргументов, входящих в (6.51). В случае ньютоновой жидкости, например, обычно предполагают, что коэффициенты κ , η в (6.41) постоянны или зависят только от температуры.

6.4. Несжимаемость и отсутствие объемной вязкости. В литературе по вязкой жидкости важную роль играют два частных случая: *жидкость без объемной вязкости* и *несжимаемая жидкость* [37]. Первая из этих моделей обладает тем свойством, что диссипативная функция и, следовательно, тензор необратимых напряжений $\sigma_{jk}^{(i)}$ зависят только от скорости изменения формы V'_{jk} , так что изменения объема чисто упругие. Вторая модель вообще не допускает изменения объема и характеризуется поэтому соотношением $V_{ii}=0$ или в соответствии с (6.29) $V_{jk}=V'_{jk}$, так что скорость деформации представляет собой девиатор. В первом случае реологическая модель изменений объема представляет собой пружину (рис. 6.1); в обоих случаях реакция на изменение формы характеризуется катарактой (рис. 6.3).

В силу (6.29) и (6.30), диссипативную функцию (6.36) можно записать в виде

$$D = \frac{1}{3\rho} \sigma_{jj}^{(i)} V_{kk} + \frac{1}{\rho} \sigma_{jk}^{(i)'} V'_{jk}. \quad (6.54)$$

В жидкости без объемной вязкости из $V'_{jk}=0$ следует $D=0$, следовательно, $\sigma_{jk}^{(i)}$ представляет собой девиатор. То же самое справедливо для несжимаемой жидкости, так как изотропная часть $\sigma_{jk}^{(i)}$ не вносит вклада в функцию D .

В изотропной жидкости без объемной вязкости диссипативная функция зависит только от основных инвариантов $V'_{(2)}$, $V'_{(3)}$ девиатора V'_{jk} , так как $V'_{(1)}$ равно нулю. Вычисляя эти инварианты с помощью (6.23) и (6.29), полу-

чаем

$$\begin{aligned} V_{(2)}' &= \frac{1}{2} V_{jk}' V_{kj}' = \frac{1}{2} \left(V_{jk} V_{kj} - \frac{1}{3} V_{(1)}^2 \right) = V_{(2)} + \frac{1}{3} V_{(1)}^2 \geq 0, \\ V_{(3)}' &= \frac{1}{3!} V_{jkl}' V_{ljk}' = \frac{1}{3} \left(V_{jkl} V_{ljk} - V_{(1)} V_{jk} V_{kj} + \frac{2}{9} V_{(1)}^3 \right) = \\ &= V_{(3)} + \frac{1}{3} V_{(2)} V_{(1)} + \frac{2}{27} V_{(1)}^3. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Из (6.55), (6.24) и (6.29) получаем, далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{(2)}'}{\partial V_{jk}} &= V_{jk} - \frac{1}{3} V_{(1)} \delta_{jk} = V_{jk}, \\ \frac{\partial V_{(3)}'}{\partial V_{jk}} &= V_{jl} V_{lk} - \frac{2}{3} V_{(1)} V_{jk} - \frac{1}{3} \left(2 V_{(2)} + \frac{1}{3} V_{(1)}^2 \right) \delta_{jk} = \\ &= V_{jl} V_{lk} - \frac{2}{3} V_{(2)} \delta_{jk}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

В силу (6.56),

$$\frac{\partial D}{\partial V_{jk}} = \frac{\partial D}{\partial V_{(2)}} V_{jk}' + \frac{\partial D}{\partial V_{(3)}} \left(V_{jl} V_{lk}' - \frac{2}{3} V_{(2)} \delta_{jk} \right). \quad (6.57)$$

С помощью (6.55) мы заключаем, что

$$\frac{\partial D}{\partial V_{jk}} V_{jk} = 2 \frac{\partial D}{\partial V_{(2)}} V_{(2)}' + 3 \frac{\partial D}{\partial V_{(3)}} V_{(3)}'. \quad (6.58)$$

Из (6.16), (6.57) и (6.58) следует, что для изотропных жидкостей без объемной вязкости определяющие уравнения (6.37), (6.38) принимают частную форму:

$$\sigma_{jk}^{(1)} = A' \left[\frac{\partial D}{\partial V_{(2)}} V_{jk}' + \frac{\partial D}{\partial V_{(3)}} \left(V_{jl} V_{lk}' - \frac{2}{3} V_{(2)} \delta_{jk} \right) \right], \quad (6.59)$$

где

$$A' = \rho D \left(2 \frac{\partial D}{\partial V_{(2)}} V_{(2)}' + 3 \frac{\partial D}{\partial V_{(3)}} V_{(3)}' \right)^{-1}. \quad (6.60)$$

Легко видеть, что любой тензор необратимых напряжений, удовлетворяющий (6.59), представляет собой девиатор.

Если изотропная жидкость несжимаема, то (6.37), (6.38) аналогичным образом сводятся к (6.59), (6.60).

Кроме того, здесь можно опустить штрихи, так как V_{jk} представляет собой девиатор. В самом деле, поскольку $V_{(1)}=0$, первое уравнение (6.24) нужно заменить на $\partial V_{(1)}/\partial V_{jk}=0$. Отсюда следует, что в (6.37) и (6.38) все члены, содержащие $V_{(1)}$ или δ_{jk} , следует отбросить точно так же, как и члены с δ_{jk} в (6.59). Поскольку $V_{jk}=\hat{V}_{jk}$, соотношения (6.37), (6.38) и (6.59), (6.60) приводят к одному и тому же результату. В отличие от того, что можно было ожидать, они не дают девиатора. Однако очевидно, что в определяющем уравнении любой несжимаемой жидкости остается неопределенным некоторый изотропный тензор напряжений. Поскольку этот тензор не вносит вклад в D , его можно включить в (6.31). Таким путем мы снова приходим к соотношениям (6.59), (6.60), в которых V'_{jk} следует заменить на V_{jk} .

Для частных моделей жидкостей, рассмотренных здесь, разложения, изученные в п. 6,3, можно упростить. Первое приближение теперь следует основывать на диссипативной функции

$$\rho D = \beta^{(2)} V_{(2)} \quad (6.61)$$

вместо (6.39). Подставляя (6.61) в (6.59) и (6.60), получаем вместо (6.40)

$$\sigma_{jk}^{(1)} = \frac{1}{2} \beta^{(2)} V'_{jk} \quad (6.62)$$

или, полагая $1/4 \beta^{(2)} = \eta$ и добавляя гидростатическое давление (6.31), получаем определяющее уравнение *стоксовой жидкости*:

$$\sigma_{jk} = -p \delta_{jk} + 2\eta V'_{jk} \quad (6.63)$$

(см. Прагер [27], стр. 92). Во втором приближении

$$\rho D = \beta^{(2)} V_{(2)} + \beta^{(3)} V_{(3)} \quad (6.64)$$

Используя (6.59), (6.60), получаем обобщение соотношения (6.62) в виде

$$\sigma_{jk}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\beta^{(2)} - \frac{\beta^{(3)} V_{(3)}}{2V_{(2)}} \right) V'_{jk} + \frac{\beta^{(3)}}{2} \left(V'_{jl} V'_{lk} - \frac{2}{3} V_{(2)} \delta_{jk} \right). \quad (6.65)$$

Третье приближение основано на выражении для диссипативной функции

$$\rho D = \beta^{(2)} V'_{(2)} + \beta^{(3)} V'_{(3)} + \beta^{(22)} V'^2_{(2)}, \quad (6.66)$$

оно дает

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}^{(i)} = & \frac{1}{2} \left(\beta^{(2)} - \frac{\beta^{(3)}}{2} \frac{V'_{(3)}}{V'_{(2)}} + \beta^{(22)} V'_{(2)} + \frac{3}{4} \frac{\beta^{(3)^2}}{\beta^{(2)}} \frac{V'^2_{(3)}}{V'^2_{(2)}} \right) V'_{jk} + \\ & + \frac{\beta^{(3)}}{2} \left(1 - \frac{\beta^{(3)}}{2\beta^{(2)}} \frac{V'_{(3)}}{V'_{(2)}} \right) \left(V'_{jl} V'_{lk} - \frac{2}{3} V'_{(2)} \delta_{jk} \right). \end{aligned} \quad (6.67)$$

Предположим, наконец, что диссипативная функция жидкости без объемной вязкости или сжимаемости квазиоднородна. В этом случае условие (6.44) с учетом (6.58) следует заменить условием

$$2 \frac{\partial D}{\partial V'_{(2)}} V'_{(2)} + 3 \frac{\partial D}{\partial V'_{(3)}} V'_{(3)} = f(D). \quad (6.68)$$

Повторяя рассуждения, которые привели от формулы (6.44) к (6.54), легко найти, что диссипативная функция принимает вид:

$$D = F \left[V'_{(2)} G \left(\frac{V'^2_{(3)}}{V'^2_{(2)}} \right) \right] \quad (6.69)$$

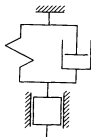
и что соответствующее определяющее уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}^{(i)} = & \frac{\rho D}{G V'_{(2)}} \left[\frac{1}{2} \left(G - 3 G' \frac{V'^2_{(3)}}{V'^2_{(2)}} \right) V'_{jk} + G' \frac{V'_{(3)}}{V'^2_{(2)}} \times \right. \\ & \left. \times \left(V'_{jl} V'_{lk} - \frac{1}{2} V'_{(2)} \delta_{jk} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Полученные здесь упрощения в равной мере применимы как для жидкостей без объемной вязкости, так и для несжимаемых жидкостей. В последнем случае V'_{jk} можно повсюду заменить на V_{jk} . Коэффициенты, входящие в разложения (6.61) — (6.67), и произвольные функции в (6.69) могут зависеть от элемента, его мгновенного состояния и истории. Очевидно, что определяющие уравнения жидкостей, рассмотренных здесь, существенно более просты, нежели определяющие уравнения более общей жидкости, рассмотренной в п. 6.3. В линейном поле очевидным

обобщением стоксовой жидкости является неньютонова жидкость с определяющим уравнением (6.41). Простейшими нелинейными обобщениями являются неньютоновы жидкости с определяющими уравнениями (6.31) и (6.65) — (6.70).

6.5. Частный случай вязкопластичности. В некоторых неньютоновых жидкостях скорость деформации, или изменения формы, заметна, только когда напряжения достаточно велики. В пределе такая сплошная среда представляет собой *вязко-пластическое тело*. Его реологическая модель (рис. 6.4) получается из модели рис. 6.2



Р и с. 6.4. Модель вязко-пластического твердого тела; общий случай.

добавлением элемента сухого трения, причем, очевидно, безразлично, вводится ли этот элемент параллельно или последовательно. Вся модель характеризует реакцию при изменении объема; для части, связанной с изменением формы, следует отбросить пружину.

Переход от вязкой жидкости к вязко-пластическому твердому телу осуществляется путем подходящего выбора диссипативной функции. Для этой цели можно отправляться от изотропной жидкости п. 6.3 или от одного из частных случаев, например от описанного в п. 6.4. Пожертвуем в данном случае общностью и рассмотрим простейшие формы вязко-пластических тел, которые получаются как предельные случаи жидкости без объемной вязкости и несжимаемой жидкости. При этом модель рис. 6.4 для изменений объема сведется к простой пружине или жесткой связи, а для изменений формы — к модели, изображен-

ной на рис. 6.5, где оба элемента могут быть расположены и последовательно.

Рассмотренные в предыдущем разделе разложения не подходят для нашей цели. Предположим поэтому, что диссипативная функция квазиоднородна. Тогда D представляется в форме (6.69), причем F и G — произвольные функции. Это уравнение для различных частных случаев



Р и с. 6.5. Модель вязко-пластического твердого тела; частный случай.

можно подвергнуть дальнейшему упрощению. Если, например, G — постоянная, D становится произвольной функцией одного инварианта $V_{(2)} \geq 0$, и определяющее уравнение приводится к виду

$$\sigma_{jk}^{(i)} = \frac{1}{2} \frac{\rho D}{V_{(2)}} V_{jk}' \quad (6.71)$$

Это уравнение эквивалентно следующему обобщению уравнения (6.62):

$$\sigma_{jk}^{(i)} = 2\eta V_{jk}', \quad \eta = \frac{1}{4} \rho D / V_{(2)}, \quad (6.72)$$

и соответствующая жидкость принадлежит к квазилинейному типу (Прагер [27], стр. 131). Для того чтобы подготовить переход от вязкой жидкости к вязко-пластическому твердому телу, рассмотрим, наконец, диссипативную функцию

$$\rho D = 2 \left[2\mu + \frac{k}{c} \left(\frac{V_{(2)}}{c} \right)^{\frac{1-n}{1+n}} \right] V_{(2)}', \quad (6.73)$$

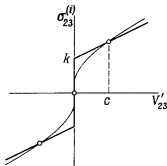
где μ , k и c — положительные постоянные, причем c имеет размерность V_{jk}' , n — целое. При таких ограничениях

диссипативная функция, очевидно, становится независимой от состояния элемента и его истории. В силу (6.71), необратимая часть определяющего уравнения имеет вид

$$\sigma_{jk}^i = \left[2\mu + \frac{k}{c} \left(\frac{V V_{(2)}'}{c} \right)^{\frac{1-n}{1+n}} \right] V_{jk}', \quad (6.74)$$

в то время как обратимая часть остается той же, что и в п. 6.3.

[Для оправдания (6.73) рассмотрим случай, когда $V'_{23} = V'_{32}$ представляет собой единственную не обращающуюся в нуль компоненту тензора V'_{jk} , так что деформация



Р и с. 6.6. Динамическая реакция вязко-пластического твердого тела, рассматриваемого как предельный случай некоторой неньютоновой жидкости.

будет чистым сдвигом, который возможно сопровождается упругим изменением объема. Уравнения (6.23) дают в этом случае $V'_{(2)} = V_{23}'^2$, так что (6.73) принимает вид

$$\rho D = 4\mu V_{23}'^2 + 2kc \left(\frac{|V_{23}'|}{c} \right)^{\frac{3+n}{1+n}}, \quad (6.75)$$

и единственно не обращающейся в нуль компонентой необратимого напряжения будет

$$\sigma_{23}^{(i)} = \sigma_{32}^{(i)} = 2\mu V_{23}' + k \left(\frac{|V_{23}'|}{c} \right)^{\frac{2}{1+n}} \operatorname{sgn} V_{23}'. \quad (6.76)$$

Гладкая кривая на рис. 6.6 иллюстрирует уравнение (6.76) для $n=9$. При $n \rightarrow \infty$ кривая приближается к ломаной линии, составленной из отрезков

$$V'_{23} = 0, \quad -k \leq \sigma_{23}^{(i)} \leq k \quad (6.77)$$

и

$$\sigma_{23}^{(i)} = 2\mu V'_{23} + k \operatorname{sgn} V'_{23}. \quad (6.78)$$

В пределе, таким образом, получается реакция простого вязко-пластического материала с постоянным коэффициентом вязкости μ и пределом текучести при чистом сдвиге k .]

Возвращаясь к общему случаю, описываемому соотношениями (6.73) и (6.74), необходимо различать две возможности. При $V'_{(2)} > 0$ получаем в пределе при $n \rightarrow \infty$

$$\rho D = 2 \left(2\mu + \frac{k}{\sqrt{V'_{(2)}}} \right) V'_{(2)} \quad (V'_{(2)} > 0) \quad (6.79)$$

и

$$\sigma_{jk}^{(i)} = \left(2\mu + \frac{k}{\sqrt{V'_{(2)}}} \right) V'_{jk} \quad (V'_{(2)} > 0). \quad (6.80)$$

При $V'_{(2)} = 0$ уравнение (6.73), как и следовало ожидать, дает

$$\rho D = 0 \quad (V'_{(2)} = 0). \quad (6.81)$$

Тензор напряжений (6.74) остается при этом неопределенным. В силу (6.74), однако, второй основной инвариант девиатора представляется в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{(2)}^{(i)} = \frac{1}{2} \sigma_{jk}^{(i)} \sigma_{kj}^{(i)} &= 4\mu^2 V'_{(2)} + 4\mu k c \left(\frac{\sqrt{V'_{(2)}}}{c} \right)^{\frac{3+n}{1+n}} + \\ &+ k^2 \left(\frac{\sqrt{V'_{(2)}}}{c} \right)^{\frac{4}{1+n}}. \end{aligned} \quad (6.82)$$

При $V'_{(2)} \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$ уравнение (6.82) дает

$$\lim \sigma_{(2)}^{(i)} = k^2 \lim \left(\frac{\sqrt{V'_{(2)}}}{c} \right)^{\frac{4}{1+n}} = \alpha k^2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (6.83)$$

где α может принимать любые значения из интервала $0 \leq \alpha \leq 1$ в соответствии с тем, в какой последовательности

выполнены оба предельных перехода, или со способом, которым они проводятся одновременно. Таким образом, в пределе

$$\sigma_{(2)}^{(i)} \leq k^2 \quad (V_{(2)}' = 0). \quad (6.84)$$

Рассмотренная здесь необратимая реакция сплошной среды полностью описывается уравнениями (6.84) и (6.80). Эти определяющие уравнения были установлены Гогенем-зером и Прагером [16] (см. также Прагер [27], стр. 138). Для их обращения будем исходить из (6.80) и вычислим инвариант

$$\sigma_{(2)}^{(i)} = \frac{1}{2} \sigma_{jh}^{(i)} \sigma_{hj}^{(i)} = \left(2\mu + \frac{k}{\sqrt{V_{(2)}'}} \right)^2 V_{(2)} = (k + 2\mu \sqrt{V_{(2)}'})^2 \quad (V_{(2)}' > 0). \quad (6.85)$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_{(2)}^{(i)} > k^2 \quad (V_{(2)}' > 0). \quad (6.86)$$

Поэтому обращение (6.84) имеет вид

$$V_{(2)}' = 0 \quad (\sigma_{(2)}^{(i)} \leq k^2). \quad (6.87)$$

Из (6.85) получаем, далее,

$$\sqrt{V_{(2)}'} = \frac{1}{2\mu} (\sqrt{\sigma_{(2)}^{(i)}} - k). \quad (6.88)$$

Подставляя (6.88) в (6.80) и учитывая (6.86), находим обращение (6.80) в виде

$$V_{jh}' = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{\sigma_{(2)}^{(i)}}} \right) \sigma_{jh}^{(i)} \quad (\sigma_{(2)}^{(i)} > k^2). \quad (6.89)$$

Учитывая тот факт, что $V_{(2)}'$ положительно определенное, получаем из (6.87) и (6.89) окончательно

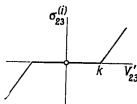
$$2\mu V_{jh}' = \begin{cases} 0 & (\sigma_{(2)}^{(i)} < k^2), \\ \left(1 - \frac{k}{\sqrt{\sigma_{(2)}^{(i)}}} \right) \sigma_{jh}^{(i)} & (\sigma_{(2)}^{(i)} \geq k^2) \end{cases} \quad (6.90)$$

(Прагер [27], стр. 137).

Для малых скоростей изменения формы рассмотренная здесь сплошная среда ведет себя как пластический

материал с пределом текучести при чистом сдвиге, равным k . В самом деле, в силу (6.90), он не течет, пока необратимые напряжения достаточно малы. Для больших скоростей деформация реакция этого материала приближается к поведению ньютоновой жидкости вязкости μ , поскольку член $k/\sqrt{\sigma_{(2)}^{(i)}}$ становится несущественным.

6.6. Другие предельные случаи вязкой жидкости. Благодаря двойственности между скоростями и силами, о которой говорилось в п. 4.3, результаты п. 6.5 можно



Р и с. 6.7. Одно обращение вязко-пластического твердого тела.

сразу же обратить. Так, частный случай квазилинейной вязкой жидкости можно задать определяющими уравнениями:

$$\begin{aligned} V_{(2)} &\leq k^2 \quad (\sigma_{(2)}^{(i)} = 0), \\ V_{jk} &= \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{k}{V_{\sigma_{(2)}^{(i)}}} \right) \sigma_{jk}^{(i)} \quad (\sigma_{(2)}^{(i)} > 0), \end{aligned} \quad (6.91)$$

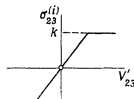
которые получаются из (6.84) и (6.80), если поменять местами тензоры V'_{jk} и $\sigma_{jk}^{(i)}$ и заменить 2μ на $1/2\mu$. Аналогичным образом, обращение (6.91)

$$\frac{1}{2\mu} \sigma_{jk}^{(i)} = \begin{cases} 0 & (V_{(2)} < k^2), \\ \left(1 - \frac{k}{V_{V_{(2)}}} \right) V'_{jk} & (V_{(2)} \geq k^2) \end{cases} \quad (6.92)$$

вытекает из (6.90). Для малых скоростей изменения формы рассматриваемая здесь сплошная среда ведет себя как идеальная жидкость (сжимаемая или несжимаемая). Если $V_{(2)}$ превосходит предел k^2 , начинает проявляться

вязкость и для больших скоростей изменения формы среда приближается по своему поведению к ньютоновой жидкости вязкости μ . На рис. 6.7 изображена реакция такой системы при чистом сдвиге.

Результаты п. 6.5 допускают другой тип обращения. Рассмотренная там среда ведет себя как пластическое тело или как ньютонова жидкость в зависимости от того, очень ли мала или очень велика скорость изменения формы. Существуют другие сплошные среды с противоположной



Р и с. 6.8. Другое обращение.

динамической реакцией, напоминающие ньютоновы жидкости при малых скоростях изменения формы и ведущие себя как пластические твердые тела при больших скоростях изменения формы. Особенно простая система определяющих уравнений, отражающих подобную реакцию, имеет вид

$$\sigma_{jk}^{(i)} = \begin{cases} 2\mu V'_{jk} & \left(V'_{(2)} < \frac{k^2}{4\mu^2} \right), \\ \frac{k}{\sqrt{V'_{(2)}}} V'_{jk} & \left(V'_{(2)} \geq \frac{k^2}{4\mu^2} \right), \end{cases} \quad (6.93)$$

где μ означает вязкость при малых скоростях изменения формы, а k — предел, при котором устанавливается пластическое течение. На рис. 6.8 показан результат (6.93) для случая простого сдвига. Обращение этого уравнения имеет вид

$$V'_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{2\mu} \sigma_{jk}^{(i)} & (\sigma_{(2)}^{(i)} < k^2), \\ \lambda \sigma_{jk}^{(i)}, \quad \lambda \geq \frac{1}{2\mu} & (\sigma_{(2)}^{(i)} = k^2). \end{cases} \quad (6.94)$$

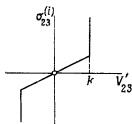
Меняя местами тензоры V'_{jk} и $\sigma_{jk}^{(i)}$ в (6.94) и (6.93), а также записывая $1/2 \mu$ вместо 2μ , получаем окончательно определяющие уравнения:

$$\sigma_{jk}^{(i)} = \begin{cases} 2\mu V'_{jk} & (V'_{(2)} < k^2), \\ \lambda V'_{jk}, & \lambda \geq 2\mu \quad (V'_{(2)} = k^2) \end{cases} \quad (6.95)$$

или

$$V'_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{2\mu} \sigma_{jk}^{(i)} & (\sigma_{(2)}^{(i)} < 4\mu^2 k^2), \\ \frac{k}{V'_{(2)}} \sigma_{jk}^{(i)} & (\sigma_{(2)}^{(i)} \geq 4\mu^2 k^2) \end{cases} \quad (6.96)$$

для материала, который ведет себя как ньютонова жидкость с вязкостью μ , пока скорость изменения формы достаточно мала, и оказывающего сопротивление, с другой



Р и с. 6.9. Динамическая реакция вязкой жидкости с предельной скоростью деформации.

стороны, любому увеличению скорости изменения формы, коль скоро предел k достигнут. На рис. 6.9 представлено такое поведение материала для случая простого сдвига.

6.7. Пластические твердые тела. Возвращаясь к вязкопластическому материалу, рассмотренному в п. 6.5, и полагая вязкость μ в соотношении (6.80) равной нулю, получаем определяющие уравнения:

$$\begin{aligned} \sigma_{(2)}^{(i)} &\leq k^2 & (V'_{(2)} = 0), \\ \sigma_{jk}^{(i)} &= \frac{k}{V'_{(2)}} V'_{jk} & (V'_{(2)} > 0) \end{aligned} \quad (6.97)$$

и их обращения суть

$$V'_{jk} = \begin{cases} 0 & (\sigma_{(2)}^{(i)} < k^2), \\ \lambda \sigma_{jk}^{(i)}, \lambda \geq 0 & (\sigma_{(2)}^{(i)} = k^2), \end{cases} \quad (6.98)$$

где λ — произвольная неотрицательная постоянная. Эти соотношения можно также вывести из (6.93) и (6.94), полагая $\mu \rightarrow \infty$. Они описывают необратимую динамическую реакцию пластического твердого тела. На рис. 6.10



Рис. 6.10. Модель пластического твердого тела.

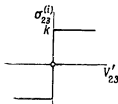


Рис. 6.11. Динамическая реакция пластического твердого тела при чистом сдвиге.

изображена соответствующая реологическая модель, и на рис. 6.11 показана динамическая реакция при чистом сдвиге.

Тензор обратимых напряжений определяется при этом уравнениями (6.31). Поскольку $\sigma_{jk}^{(i)}$ представляет собой девиатор, тензоры $\sigma_{jk}^{(r)}$ и $\sigma_{jk}^{(i)}$ являются соответственно изотропной и девиаторной частями напряжения. Материал обыкновенно предполагается несжимаемым. В этом случае V_{jk} представляет собой девиатор, так что штрихи в соотношениях (6.97) и (6.98) можно опустить.

С более общей точки зрения *пластическое твердое тело* можно определить, исходя из следующих условий. Если происходят изменения объема, то они чисто обратимы, так что тензор необратимых напряжений $\sigma_{jk}^{(i)}$ представляет собой девиатор. Если этот тензор не достиг некоторого предела текучести, зависящего, возможно, от состояния элемента и его истории, скорость изменения формы равна нулю. Если необратимые напряжения находятся на пределе текучести, то скорость изменения формы может быть отличной от нуля. Она зависит только от тензора необра-

тимых напряжений, и скорость ее изменения представляет собой однородную функцию нулевой степени от $\sigma_{jk}^{(i)}$.

Так как $\sigma_{jk}^{(i)}$ представляет собой девиатор, второе выражение (6.15) для скорости работы диссипации принимает вид

$$P^{(i)} = \frac{1}{\rho} \sigma_{jk}^{(i)} V_{jk} = \frac{1}{\rho} \sigma_{jk} V_{jk}^{(i)}. \quad (6.99)$$

Отсюда следует, что общие результаты, которые будут получены в этом пункте, останутся справедливыми, если заменить $\sigma_{jk}^{(i)}$ на σ_{jk} . Оказывается удобным представить тензоры V_{jk} и $\sigma_{jk}^{(i)}$ с помощью векторов в пространстве 9-ти измерений. Предел текучести представляется при этом поверхностью, содержащей по крайней мере в исходном состоянии материала начало координат. Коль скоро конец вектора $\sigma_{jk}^{(i)}$ лежит внутри поверхности текучести, вектор V_{jk} равен нулю. Если эта точка лежит на поверхности текучести, вектор V_{jk} может быть отличным от нуля. Его направление зависит от $\sigma_{jk}^{(i)}$, тогда как его абсолютная величина определяется, по крайней мере до некоторой степени, скоростью изменения $\sigma_{jk}^{(i)}$.

Пока среда *изотропна*, предел текучести, будучи, вообще говоря, функцией мгновенного состояния элемента и его истории, зависит только от основных инвариантов $\sigma_{(2)}^{(i)}$, $\sigma_{(3)}^{(i)}$ тензора необратимых напряжений. Зависимость от истории характерна для *упрочняющихся* материалов. Если, с другой стороны, предел текучести зависит только от необратимых напряжений, материал называется *идеально пластическим*; в этом случае сжимаемостью обычно пренебрегают. Особенно прост случай, когда предел текучести зависит только от $\sigma_{(2)}^{(i)}$. Тогда условие текучести можно записать в виде $\sigma_{(2)}^{(i)} = k^2$, как это и было предложено Мизесом [20]. Это возвращает нас к материалу, описываемому соотношениями (6.97) или (6.98). Другое условие текучести, содержащее также инвариант $\sigma_{(3)}^{(i)}$, было предложено Треска [36].

Возвращаясь к наиболее общему случаю пластического тела, можно заметить, что данное выше определение не полностью описывает его поведение. Если поверхность

текучести для некоторого заданного состояния элемента известна, то тензор V'_{jk} может все же зависеть от $\sigma_{jk}^{(i)}$ и его скорости изменения бесконечно многими способами. Далее, для упрочняющихся материалов должна быть определена деформация поверхности текучести при увеличении пластического течения. Хотя динамическая реакция может в значительной степени зависеть от материала, существуют некоторые правила, теперь уже являющиеся общепризнанными, несмотря на то что они чисто гипотетической природы. Применительно к мгновенной динамической реакции эти правила можно вывести из принципа наименьшей необратимой силы.

Очевидно, что пластическое твердое тело можно рассматривать как предельный случай вязкой жидкости. Диссипативная функция D' в силовом пространстве равна нулю, если конечная точка вектора $\sigma_{jk}^{(i)}$ лежит внутри поверхности текучести. Для точек, лежащих на поверхности текучести, величина V'_{jk} не определяется $\sigma_{jk}^{(i)}$. Таким образом, существует некоторая область B' , где $D'=0$, включающая вначале O' . Все D -поверхности с $D' > 0$ сосредотачиваются на одной-единственной поверхности текучести, ограничивающей B' . В пространстве скоростей начало координат O представляет собой образ всей области B' , любая другая точка соответствует некоторой точке силового пространства, лежащей на поверхности текучести.

Принцип наименьшей необратимой силы удобно применить к рассматриваемой здесь задаче в форме некоторых следствий, установленных в п. 4.3. Их истолкование для рассматриваемого предельного случая непосредственно приводит к следующим результатам. Поверхность текучести всегда является выпуклой и включает начало координат, причем не только в исходном недеформированном состоянии, но и в ходе всего процесса. Если V'_{jk} представляет собой истинную скорость изменения формы, а $\sigma_{jk}^{(i)}$ — соответствующее необратимое напряжение, то

$$(\sigma_{jk}^{(i)} - \sigma_{jk}^{(i)*}) V'_{jk} \geq 0, \quad (6.100)$$

где $\sigma_{jk}^{(i)*}$ обозначает любое другое напряжение, для которого конец соответствующего вектора лежит внутри или

на поверхности текучести. Знак равенства выполняется только, если $\sigma_{jk}^{(i)*}$ представляет собой другое решение.

Если поверхность текучести гладкая, то ее можно на любой стадии процесса представить уравнением

$$\varphi(\sigma_{jk}^{(i)}) = 0, \quad (6.101)$$

где φ — некоторая непрерывная функция, обладающая непрерывными частными производными первого порядка и отрицательная в начале координат. Неравенство (6.100) эквивалентно при этом утверждению о том, что для любой точки $\sigma_{jk}^{(i)}$ в пространстве напряжений, лежащей на поверхности текучести, вектор V_{jk} имеет направление внешней нормали, т. е. что

$$V_{jk} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{jk}^{(i)}}, \quad (6.102)$$

где λ — неотрицательный коэффициент пропорциональности.

[Легко проверить, что, например, для идеально пластического материала (6.98), удовлетворяющего условию текучести Мизеса, функция φ принимает вид $\varphi = 1/2 \sigma_{jk}^{(i)} \sigma_{kj}^{(i)} - \sigma_{(2)}^{(i)}.$]

Первая попытка установления этих результатов с помощью термодинамических соображений была предпринята Циглером [43]. Предположения, принятые в этой работе, были слегка отличными от используемых здесь; в целом они были более ограниченными. Уравнение (6.102) содержит так называемую теорию пластического потенциала Мизеса [21], тогда как уравнение (6.100) выражает собой существо постулата Друкера [9] (см. также Койтер [19]). Уже стало обычным связывать с (6.100) другое неравенство:

$$\sigma_{jk}^{(i)} V_{jk} \geq 0. \quad (6.103)$$

Из (6.103) и (6.100) следует, что в точке, в которой поверхность текучести гладкая, скорость изменения формы равна нулю для любого изменения необратимого напряжения, уводящего внутрь поверхности текучести (разгрузка). Обобщение (6.103) на произвольные поверхности течения эквивалентно правдоподобному предположению о том,

что особенности являются только предельными случаями регулярного поведения.

Следует отметить, что среди общих результатов, получающихся при применении принципа наименьшей необратимой силы к теории пластичности, имеется один результат, не составляющий следствия постулатов Мизеса и Друкера. Тот факт, что поверхность текучести всегда включает начало координат, ограничивает так называемый эффект Баушингера и устанавливает, что правило упрочнения Прагера [25] и его модификация, предложенная Циглером [44] (см. также Клавуо и Циглер [5]), применимы только при достаточно малых изменениях формы.

6.8. Пластическая динамическая реакция в целом. В предыдущих пунктах мы занимались динамической реакцией в малом, т. е. поведением бесконечно малого элемента сплошной среды. В случае пластического твердого тела существование некоторой области V' , где D' равно нулю, делает возможным обобщить некоторые из полученных результатов на конечные объемы сплошной среды без какой бы то ни было модификации.

Пусть тензоры V'_{jk} и $\sigma_{jk}^{(i)}$, представляющие местную скорость изменения формы и местное необратимое напряжение, изображаются векторами V, σ в девятимерном евклидовом пространстве R_9 . В силу симметрии этих двух тензоров и того, что они представляют собой девиаторы, соответствующие векторы на самом деле лежат в некотором линейном подпространстве пространства R_9 . Выражение для скорости работы диссипации на единицу объема вытекает из (6.99) и дается скалярным произведением в пространстве R_9 :

$$\rho P^{(i)} = \sigma_{jk}^{(i)} V'_{jk} = \sigma \cdot V. \quad (6.104)$$

В последующих рассуждениях любое необратимое напряжение σ^* , которое может быть достигнуто из σ без пластического течения, будет называться непластическим. На некоторой данной стадии процесса все такие напряжения σ^* составляют в R_9 непластическую область V' , и любое приращение необратимых напряжений типа $\sigma^* - \sigma$ будет называться непластическим. Предел текучести представляет собой границу V' , определяемую такими непластическими напряженными состояниями, бесконечно малые изменения

которых не всегда непластические. В силу (6.100) и (6.104),

$$(\sigma^* - \sigma) \cdot V \leq 0 \quad (6.105)$$

для любого непластического приращения $\sigma^* - \sigma$, так что из (6.103) следует, что

$$\dot{\sigma} \cdot V \geq 0. \quad (6.106)$$

Скорость деформации и напряженное состояние всего тела определяются функциями $V_{jk}(y_i)$ и $\sigma_{jk}(y_i)$ соответственно, каждая из которых зависит от координат y_i . Пусть поля $V'_{jk}(y_i)$, $\sigma^{(i)}_{jk}(y_i)$ представляются векторами $\tilde{V}$, $\tilde{\sigma}$ в функциональном пространстве F , и пусть скалярное произведение в F определяется объемным интегралом

$$\tilde{\sigma} \cdot \tilde{V} = \int \sigma \cdot V dV, \quad (6.107)$$

который берется по всему телу в целом. Такое определение допустимо (см. Синг [35]), так как оно удовлетворяет закону коммутативности $\tilde{\sigma} \cdot \tilde{V} = \tilde{V} \cdot \tilde{\sigma}$, закону дистрибутивности $\tilde{\sigma} \cdot (\tilde{V}' + \tilde{V}'') = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{V}' + \tilde{\sigma} \cdot \tilde{V}''$, правилу $\sigma \cdot 0 = 0$ для умножения на нуль и закону ассоциативности для умножения на скалярную величину $(a\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{V} = a(\tilde{\sigma} \cdot \tilde{V})$. Кроме того, определение задает в F некоторую положительно определенную метрику. Из (6.104) вытекает, наконец, что произведение (6.107) определяет скорость работы диссипации для всего тела в целом.

Рассмотренное здесь представление не ограничено ни кинематически допустимыми скоростями деформаций, ни статически допустимыми полями напряжений; оно справедливо во всех случаях, когда существует интеграл (6.107). Непластическую область $\tilde{B}'$ в F можно определить таким же способом, как и B' в R_9 . Вообще говоря, некоторые элементы тела достигают своих местных пределов текучести для напряженных состояний $\tilde{\sigma}$, лежащих все же внутри предела текучести для всего тела в целом. Пластическое течение устанавливается, когда достаточно большая область становится пластической. На этом этапе напряженное состояние любого элемента располагается ниже предела текучести или на местном пределе текучести. Поскольку ни один из элементов не подвергается пласти-

ческому течению при непластическом приращении напряжения тела в целом, из (6.105) вытекает, что

$$(\dot{\sigma}^* - \dot{\sigma}) \cdot \dot{V} = \int_V (\dot{\sigma}^* - \dot{\sigma}) \cdot V dV \leq 0 \quad (6.108)$$

для любого непластического приращения $\dot{\sigma}^* - \dot{\sigma}$. Далее, в силу (6.106),

$$\dot{\sigma} \cdot \dot{V} = \int_V \dot{\sigma} \cdot V dV \geq 0. \quad (6.109)$$

Таким образом, неравенства Друкера, если они справедливы для элемента, справедливы для тела в целом. Из (6.108) вытекает, в частности, что непластическая область $\dot{B}'$ — выпуклая.

Предыдущее рассуждение составляет основу для строгого описания поведения конечного объема пластической среды. Часто, однако, приходится упрощать проблему, вводя обобщенные деформации и напряжения. Вместо того чтобы рассматривать истинные деформации тела, ограничиваются приближенной картиной, характеризующейся некоторым конечным числом так называемых обобщенных деформаций x_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Величины $\dot{x}_k$ представляют собой обобщенные скорости, и коэффициенты $X_{(k)}^{(i)}$ в выражении

$$P^{(i)} = X_{(k)}^{(i)} \dot{x}_k = X \cdot \dot{x} \quad (6.110)$$

для скорости работы диссипации представляют собой обобщенные необратимые напряжения.

Рассмотренные здесь ограничения означают, что допустимы только такие скорости изменения формы $\dot{V}$ которые принадлежат к некоторому линейному подпространству F_n пространства F . Они не налагают аналогичных условий на напряженные состояния. Пусть E_k означает скорость изменения формы в функциональном пространстве F , соответствующую обобщенной скорости $\dot{x}_k = 1$, $\dot{x}_j = 0$ ($j \neq k$). Подпространство F_n определяется при этом скоростями изменения формы

$$\dot{V} = \dot{x}_k \bar{E}^k. \quad (6.111)$$

Вообще говоря, векторы $\bar{E}_k$ линейно независимы. В этом случае существует взаимно однозначное соответствие

между векторами] $\tilde{V}$ в F_n и $\dot{x}$ в пространстве R_n обобщенных переменных. В силу (6.107), (6.111) и (6.110), скорость работы диссипации напряжения σ на скорости изменения формы $\tilde{V}$, принадлежащей пространству F_n , равна

$$P^{(i)} = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{V} = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{E}_k \dot{x}_k = X_k^{(i)} \dot{x}_k. \quad (6.112)$$

Поэтому обобщенные необратимые напряжения определяются произведениями

$$X_k^{(i)} = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{E}_k. \quad (6.113)$$

Отсюда непосредственно вытекает, что любое напряженное состояние $\tilde{\sigma}$ в F представляется в R_n единственным вектором $\tilde{X}$, который в свою очередь представляет собой образ бесконечного числа векторов $\tilde{\sigma}$.

Прямая, соединяющая точки пространства F , проходящая через концы векторов $\tilde{\sigma}'$ и $\tilde{\sigma}''$, определяется уравнением

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}' + a(\tilde{\sigma}'' - \tilde{\sigma}') \quad (0 \leq a \leq 1). \quad (6.114)$$

Если X, X', X'' — векторы в R_n , соответствующие $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}', \tilde{\sigma}''$, то мы получаем из (6.113) и (6.114)

$$X = X' + a(X'' - X') \quad (0 \leq a \leq 1). \quad (6.115)$$

Итак, образ прямой (6.114) в пространстве R_n представляет собой прямую линию, соединяющую концы векторов X', X'' .

Поскольку непластическая область $\tilde{B}'$ является выпуклой, любой вектор $\tilde{\sigma}^* - \tilde{\sigma}$, представляющий непластическое приращение напряжений, лежит полностью в $\tilde{B}'$. Его образом в R_n является вектор $X^* - X$, лежащий, по определению, полностью в непластической области C' пространства R_n . Наоборот, любой вектор $X^* - X$ в C' представляет собой образ по крайней мере одного вектора $\tilde{\sigma}^* - \tilde{\sigma}$, соединяющего две точки $\tilde{B}'$. Так как $\tilde{B}'$ — выпуклое, $\tilde{\sigma}^* - \tilde{\sigma}$ лежит полностью в $\tilde{B}'$; поэтому любой вектор в C' можно рассматривать как образ некоторого непластического приращения напряжений.

Из (6.112) и (6.108) получаем

$$(X_k^{(i)*} - X_k^{(i)}) \dot{x}_k = (\tilde{\sigma}^* - \tilde{\sigma}) \cdot \tilde{V} \leq 0, \quad (6.116)$$

где $X_k^{(i)*} - X_k^{(i)}$ — произвольное непластическое приращение напряжения. Аналогично, в силу (6.112) и (6.109),

$$\dot{X}_k^{(i)} \dot{x}_k = \dot{\sigma} \cdot \tilde{V} \geq 0. \quad (6.117)$$

Поэтому неравенства Друкера, если они применимы для элемента, применимы и для всего тела в целом в обобщенных деформациях и напряжениях. Одним из результатов соотношения (6.116) является выпуклость непластической области S' в пространстве R_n .

Намеченное здесь доказательство было дано Циглером [45, 47, 48] для пластических и упруго-пластических твердых тел. Оно, разумеется, ограничивается идеально пластическими материалами.

6.9. Жидкость с ограниченной скоростью изменения формы. В силу двойственности между скоростями и силами, результаты двух последних пунктов можно обратить. При $\mu \rightarrow \infty$ определяющие уравнения (6.91) сводятся к соотношениям

$$V_{(2)} \leq k^2 \quad (\sigma_{(2)}^{(i)} = 0), \quad (6.118)$$

$$V_{jk} = \frac{k}{V_{\sigma_{(2)}^{(i)}}} \sigma_{jk}^{(i)} \quad (\sigma_{(2)}^{(i)} > 0)$$

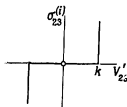
с обращениями

$$\sigma_{jk}^{(i)} = \begin{cases} 0 & (V_{(2)} < k^2), \\ \lambda V_{jk}, \lambda \geq 0 & (V_{(2)} = k^2). \end{cases} \quad (6.119)$$

Эти соотношения вместе с (6.34) описывают динамическую реакцию некоторой жидкости частного типа, ведущей себя как идеальная жидкость для достаточно малых скоростей изменения формы, но сопротивляющейся любой попытке увеличения скорости изменения формы сверх некоторого предела. Рис. 6.12 иллюстрирует динамическую реакцию такой жидкости при чистом сдвиге.

Более общую жидкость с только что описанными свойствами можно определить следующим образом. Предположим, что если происходят изменения объема, то они чисто

обратимы, так что тензор необратимых напряжений $\sigma_{jk}^{(i)}$ представляет собой девиатор. Если скорость деформации V'_{jk} не достигает определенного предела, зависящего, возможно, от состояния элемента и его истории, необратимое напряжение равно нулю. Для скоростей деформации, находящихся на указанном пределе, необратимое напряжение может быть отличным от нуля. Оно зависит только от скорости изменения формы и скорости изменения этой



Р и с. 6.12. Идеальная жидкость с предельной скоростью деформации.

величины и представляет собой однородную функцию нулевой степени от V'_{jk} .

Данное здесь определение представляет собой точное обращение определения пластического твердого тела п. 6.7. Поэтому свойства рассмотренной здесь жидкости также получаются посредством обращения. В пространстве R_9 тензоры V'_{jk} и $\sigma_{jk}^{(i)}$ представляются векторами. Предельная поверхность выпуклая, причем начало координат лежит внутри нее во все время процесса. Если теперь $\sigma_{jk}^{(i)}$ — истинное необратимое напряжение, а V'_{jk} — соответствующая скорость изменения формы, то

$$(V'_{jk} - V_{jk}^*) \sigma_{jk}^{(i)} \geq 0, \quad (6.120)$$

где V_{jk}^* обозначает любую другую скорость изменения формы, лежащую на или внутри предельной поверхности. Знак равенства выполняется, только если V_{jk}^* другое решение.

Если предельная поверхность гладкая, то ее на любом этапе процесса можно представить уравнением

$$\varphi(V_{jk}) = 0, \quad (6.121)$$

где φ — непрерывная функция, отрицательная в начале координат и имеющая непрерывные частные производные первого порядка. Неравенство (6.120) при этом эквивалентно утверждению, что для любой точки V_{jk} на предельной поверхности вектор $\sigma_{jk}^{(i)}$ имеет направление внешней нормали, т. е. что

$$\sigma_{jk}^{(i)} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial V_{jk}}, \quad (6.122)$$

где λ — некоторый неотрицательный коэффициент пропорциональности.

Вместо (6.103) имеем теперь

$$\sigma_{jk}^{(i)} V_{jk} \geq 0. \quad (6.123)$$

Неравенства (6.120) и (6.123) соответствуют постулату Друкера. Ясно, наконец, из аналогичных соображений, что рассуждения п. 6.8 также можно обратить и что таким способом можно получить некоторое представление о поведении в целом рассмотренной здесь жидкости.

§ 7. Заключительные замечания

В § 6 принцип наименьшей необратимой силы был применен ко множеству жидкостей и твердых тел, большинство которых было определено весьма общим образом. С другой стороны, легко видеть, что список рассмотренных нами материалов неполон. Например, мы пропустили большинство вязко-пластических сред и даже такой простой пример, как *тело Максвелла*, реологическая модель которого изображена на рис. 7.1. Другим примером является упруго-пластическое тело, модель которого дана на рис. 7.2.

Реологическая модель (см. рис. 6.1—6.5 и 6.10) каждой из сплошных сред, рассмотренных в § 6, имеет одну-единственную степень свободы. Конфигурация всей модели вполне определяется положением ее нижнего конца.

В отличие от этого модели, изображенные на рис. 7.1 и 7.2, обладают каждая двумя степенями свободы. Для определения их конфигурации необходимо задать смещения каждого из концов пружины. Для некоторого элемента массы в сплошной среде это различие имеет следующий аспект. Во всех сплошных средах, рассмотренных в § 6, механическое состояние элемента полностью описывается тензором деформации ϵ_{jk} , а термодинамическое состояние



Р и с. 7.1. Модель тела Максвелла.



Р и с. 7.2. Модель упруго-пластического твердого тела.

задается ϵ_{jk} и температурой ϑ . С другой стороны, механическое состояние некоторого упруго-пластического элемента или некоторого элемента общей вязко-упругой среды не вполне определяется заданием компонент деформации; здесь термодинамическое состояние может изменяться при фиксированных ϵ_{jk} и ϑ . Таким образом, возникает вопрос, можно ли применять теорию, развитую в предположении (п. 2.1), что термодинамическое состояние системы задается некоторой системой механических координат x_k и температурой ϑ к сплошным средам более сплошной структуры.

В случае упруго-пластической сплошной среды ответ на этот вопрос получается непосредственно. В модели рис. 7.2 смещение x нижнего конца представляет собой сумму удлинения x^r пружины и смещения $x^{(i)}$ ее верхнего края; $x^{(r)}$ и $x^{(i)}$ представляют собой переходную или упругую и стационарную или пластическую компоненты x . Аналогичным образом тензор деформаций ϵ_{jk} упруго-пластического элемента можно разложить на упругую компоненту $\epsilon_{jk}^{(r)}$ и пластическую компоненту $\epsilon_{jk}^{(i)}$. Оба эти

тензора разделяются в процессе разгрузки и, следовательно, хорошо определены. Поскольку термодинамическое состояние элемента вполне определяется величинами $\epsilon_{jk}^{(r)}$, $\epsilon_{jk}^{(i)}$ и θ , постулаты п. 2.1 будут удовлетворены, если как механические координаты будут использованы компоненты тензоров $\epsilon_{jk}^{(r)}$, $\epsilon_{jk}^{(i)}$. Выражения для соответствующих сил получаются из выражения для скорости работы на единицу массы. В соответствии с (5.15)

$$P = \frac{1}{\rho} \sigma_{jk} V_{jk} = \frac{1}{\rho} \sigma_{jk} V_{jk}^{(r)} + \frac{1}{\rho} \sigma_{jk} V_{jk}^{(i)}, \quad (7.1)$$

где $V_{jk}^{(r)}$ и $V_{jk}^{(i)}$ суть скорости деформации, отвечающие соответственно $\epsilon_{jk}^{(r)}$ и $\epsilon_{jk}^{(i)}$. То обстоятельство, что обобщенная сила σ_{jk} появляется в (7.1) дважды, а именно как обратимая и в то же время как необратимая силы, не мешает проводить рассуждения по всем правилам § 6. В силу (7.1), скорость работы диссипации выражается следующим образом:

$$P^{(i)} = \frac{1}{\rho} \sigma_{jk} V_{jk}^{(i)}. \quad (7.2)$$

Исходя из этого соотношения, можно рассматривать пластическую часть динамической реакции подобно тому, как это делалось в п. 6.7 и 6.8. Очевидно поэтому результаты, полученные там, пригодны также для описания пластического поведения упруго-пластической среды [43].

Максвеллово тело можно исследовать аналогичным образом. Правда, экспериментально разделение тензоров $\epsilon_{jk}^{(r)}$ и $\epsilon_{jk}^{(i)}$ представляет больше трудностей, поскольку оно требует мгновенной разгрузки. Однако такое разделение возможно. Если скоро определены механические координаты $\epsilon_{jk}^{(r)}$ и $\epsilon_{jk}^{(i)}$, можно дальше действовать как и в случае упруго-пластического материала. При этом непосредственно получается, что вязкая часть динамической реакции следует всем закономерностям, полученным для вязкой жидкости в п. 6.3 и 6.4.

Описанный только что метод нельзя прилагать к более сложным типам вязко-упругих тел, реологические модели которых представляют собой целые системы, составленные из единичных максвелловых и кельвиновых элементов.

Очевидно, что в таких случаях число механических координат пропорционально числу компонент деформации. Столь же очевидно, что основная трудность состоит в определении этих координат. Вызывает сомнение, можно ли основные предположения п. 2.2 обобщить таким образом, чтобы включить элементы этих более общих материалов. Существует, однако, другой подход, который представляется более обещающим. Вместо того чтобы предполагать, что сплошная среда состоит из элементов одного определенного вида, обладающего всеми свойствами, необходимыми для описания динамической реакции системы в целом, можно также допустить существование некоторого разнообразия основных элементов, каждый тип которых обладает сравнительно простой структурой и, таким образом, вносит вклад только в некоторую часть динамической реакции материала в целом. Такая концепция представляется также и более реалистической, чем рассмотренная выше. Однако нелегко развить эту теорию в общую теорию вязко-упругой сплошной среды.

Автор хочет выразить свою признательность за помощь, которую он получил от своих сотрудников при подготовке этого обзора. Он особенно благодарен профессору Верли за критическое прочтение рукописи и за ряд ценных предложений, особенно в связи с формулировкой экстремальных принципов § 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M. A., *Phys. Rev.*, 97 (1955), 1463.
2. Bland D. R., 1960, *The Theory of Linear Viscoelasticity* (Pergamon Press, London, New York); русский перевод: Бланд Д., Теория линейной вязкоупругости, «Мир», М., 1965¹⁾.
3. Carslaw H. S., Jaeger J. C., 1960. *Conduction of Heat in Solids*. (Clarendon Press, Oxford); русский перевод: Карслоу Г. и Егер Д., Теплопроводность твердых тел, «Наука», М., 1964.
4. Casimir H. B. G., *Rev. Mod. Phys.*, 17 (1945), 343.
5. Clavuot] Ch., Ziegler] H., *Ing.-Arch.*, 28 (1959), 13.
6. Coleman B. D., Truesdell C., *J. Chem. Phys.*, 33 (1960), 28.
7. Courant R., Hilbert D., "Methoden der Mathematischen Physik. (Springer-Verlag, Berlin); русский перевод: Курант Р. и Гильберт, Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
8. Drucker D. C., *Quart. Appl. Math.*, 7 (1949), 411.
9. Drucker D. C., 1951, *Proc. 1-st US Congress Appl. Mech.* (The Am. Soc. Mech. Eng.), p. 487.
10. Ehrenfest P., Ehrenfest T., 1914, *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, B. G. Teubner, Leipzig, IV/4.
11. Gibbs J. W., 1902, *Collected Works* (Yale University Press, New Haven, 1948), v. 2, part 1; русский перевод: Гиббс Дж. В., Термодинамические работы, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
12. Green G., *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 7 (1839—42), 121.
13. de Groot S. R., 1952, *Thermodynamics of Irreversible Processes* (North-Holland Publ. Co., Amsterdam); русский перевод: де Гроот С. Р., Термодинамика необратимых процессов, Гостехиздат, М., 1956.
14. Hill R., *J. Mech. Phys. Solids*, 5 (1956), 66; русский перевод в сб. «Механика», № 4, 1957.

¹⁾ При ссылках на эту работу (и аналогичные издания) в тексте указываются страницы подлинника. — *Прим. ред.*

15. Hill R., *J. Mech. Phys. Solids*, 9 (1961), 210.
16. Hohenemser K., Prager W., *ZAMM*, 12 (1932), 216.
17. Kirchhoff G., *Sitz. Akad. Wiss. Wien*, 9 (1852), 762.
18. Koiter W. T., *Quart. Appl. Math.*, 11 (1953), 350.
19. Koiter W. T., 1960, in I. N. Sneddon and R. Hill ed., *Progress in Solid Mechanics*, vol. 1 (North-Holland, Amsterdam), p. 165; русский перевод: Койтер В. Т., Общие теоремы теории упруго-пластических сред, ИЛ, М., 1961.
20. Mises R., 1913, *Goettinger Nachr. Math. Phys. Klasse*, 582.
21. Mises R., *ZAMM*, 8 (1928), 161.
22. Onsager L., *Phys. Rev.*, 37 (II) (1931), 405; 38 (II), 2265.
23. Prager W., *J. Appl. Phys.*, 16 (1945), 837.
24. Prager W., *J. Appl. Mech.*, 20 (1953), 317.
25. Prager W., *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 169 (1955), 41.
26. Prager W., 1955, *Probleme der Plastizitätstheorie* (Birkhäuser Verlag, Basel); русский перевод: Прагер В., Проблемы теории пластичности, Физматгиз, М., 1958.
27. Prager W., 1961, *Introduction to Mechanics of Continua* (Ginn and Co., Boston); русский перевод: Прагер В., Введение в механику сплошных сред, ИЛ, М., 1963.
28. Rayleigh, *Proc. Math. Soc. London*, 4 (1873), 357.
29. Rayleigh, 1945, *Theory of Sound*, v. 1 (Dover Publications, New York); русский перевод: Стретт Дж. В. (Рэлей), Теория звука, т. 1, Гостехиздат, М.—Л., 1955.
30. Reiner M., *Amer. J. Math.*, 67 (1945), 350.
31. Rivlin R. S., 1954, in Eirich F. R., *Rheology*, v. 1 (Academic Press Inc., New York); русский перевод: Эйрих Ф., ред., Реология и приложения, ИЛ, М., 1962.
32. Routh E. I., 1930, *Dynamics of a System of Rigid Bodies*, vol. 1 (Macmillan and Co., London).
33. Sommerfeld A., 1952, *Thermodynamik und Statistik* (Dieterische Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden); русский перевод: Зоммерфельд А., Термодинамика и статистическая физика, ИЛ, М., 1955.
34. Stoker J. J., 1950, *Nonlinear Vibrations* (Interscience Publ. Inc., New York); русский перевод: Стокер Дж., Нелинейные колебания в электрических и механических системах, ИЛ, М., 1952.
35. Sine J. L., 1957, *The Hypercircle in Mathematical Physics* (University Press, Cambridge).
36. Tresca H., *Mém. Prés. Acad. Sci.*, Paris, 18 (1868), 733.

37. Truesdell C., *J. Rat. Mech. Analysis*, 1 (1952), 227.
38. Truesdell C., *J. Rat. Mech. Analysis*, 4 (1955), 83; поправку см. там же, стр. 1019.
39. Truesdell C., Toupin R. A., 1960, in S. Flügge, ed. *Encyclopaedia of Physics* (Springer-Verlag, Berlin) III/1, p. 700
40. Wehrli Ch., Ziegler H., *Z. Ang. Math. Phys.*, 13 (1962) 372.
41. Ziegler H., *Elem. d. Math.*, 7 (1952), 121.
42. Ziegler H., *Ing.-Arch.*, 25 (1957), 58; русский перевод в сб. «Механика», № 5, 1957.
43. Ziegler H., *Z. Ang. Math. Phys.*, 9b (1958), 748.
44. Ziegler H., *Quart. Appl. Math.*, 17 (1959), 55.
45. Ziegler H., *Z. Ang. Math. Phys.*, 11 (1960), 413.
46. Ziegler H., *Ing.-Arch.*, 30 (1961), 410.
47. Ziegler H., *Z. Ang. Math. Phys.*, 12 (1961), 53.
48. Ziegler H., *Quart. Appl. Math.*, 19 (1961), 39.
49. Ziegler H., *Ing.-Arch.*, 31 (1962), 317.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие переводчика	5
§ 1. Введение	7
§ 2. Статистические основы	13
§ 3. Классическая термодинамика	32
§ 4. Термодинамика необратимых процессов	52
§ 5. Применение к сплошным средам	78
§ 6. Определяющие уравнения	92
§ 7. Заключительные замечания	128
Л и т е р а т у р а	132

Г. Циглер
ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ
ТЕРМОДИНАМИКИ
НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ
И МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ
СРЕДЫ

Редактор Ю. В. Климов
Художник В. П. Зайкин
Художественный редактор В. И. Шапоvalов
Технический редактор А. Г. Резорухови
Корректор И. П. Максимова

Сдано в производство 25/XII 1965 г.
Подписано к печати 14/V 1966 г.
Бумага $84 \times 108^{1/2} = 2,13$ бум. л. 7,14 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 6,11. Изд. № 1/3357.
Цена 44 коп. Заказ № 114
Темплан 1966 г. Изд-ва «Мир» Пор. № 38.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, Ж-54, Валовая, 28

Отпечатано с готового набора типогр. ВИА
им. Куйбышева Зак. № 1450