

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОСРЕДНЕНИЕ И ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В. Н. Николаевский

*Институт физики Земли АН СССР,
Москва*

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема осреднения является одной из центральных в механике сплошных сред и вообще в математической физике. Действительно, весьма часто именно от осреднения зависит априорное решение вопроса об адекватности математической (или более узко — реологической) модели и природного процесса, а в случае таких сложных систем, как турбулизованная жидкость — само построение математической модели. Приемы осреднения содержатся по существу и во многих способах построения приближенных решений, выделения медленного и быстрого времени и т. п., не говоря уже о проблеме числового счета на ЭВМ в крупных пространственных масштабах или же при прохождении через зоны больших градиентов искомых переменных.

В предлагаемой статье дается итоговое (на 1983 г.) изложение работ, посвященных методу осреднения по пространству, соответствующему переходу от уравнений движения малых элементов сплошной среды к описанию тех же движений в макромасштабе. Поскольку получаемые при этом макроуравнения существенно обобщают традиционные построения, в статье также даны некоторые характерные примеры, иллюстрирующие новые возможности теоретических исследований и их соответствие наблюдениям.

В руководствах по механике и математической физике предлагаются в качестве исходных два варианта балансовых уравнений: для малых объемных элементов, соответствующих используемой системе координат (и имеющие вид дифференциальных уравнений), и для больших объемов произвольной конфигурации, формулируемые в силу известных теорем в виде интегральных соотношений. Ключевым пунктом излагаемого в данной работе подхода является выбор указанных больших объемов также в виде ячеек, на которые делит пространство координатная сетка, соответствующая, однако, и большему линейному масштабу. При этом интегральные соотношения превращаются в конечно-разностные балансовые соотношения (подобные используемым при расчетах на ЭВМ), а при условии относительной малости масштаба ячеек по сравнению с внеш-

ним масштабом задачи — в макродифференциальные уравнения.

Подобный переход приводил бы к тривиальному результату, если рассматриваемая среда не обладала бы надструктурой или иначе — характерными движениями промежуточного (мезо) масштаба. Поэтому прием пространственного осреднения эффективен для таких сложных движений, как течения жидкости в пористых средах, взвесенесущих потоков и турбулизованной жидкости, как деформирование композитных материалов и т. д. Мезомасштабом служит диаметр поры или включения в твердой среде, размер вихря или взвешенной частицы. Прием пространственного осреднения приводит к естественному введению дополнительной кинематической степени свободы, например угловой скорости вращения взвешенной частицы или вихря. Поэтому становятся нетривиальными балансы моментов количества движения более высокого ранга, нежели баланс массы (момент нулевого порядка) и импульса (момент первого порядка). Вообще, момент n -го порядка есть диадное произведение момента $(n-1)$ -го порядка ($n \geq 2$) на радиус-вектор от центра тяжести элементарного макрообъема, осредненное по этому объему.

Важнейшим элементом пространственного осреднения является соответствующая возможность различия величин, осредненных по ориентированным площадкам, и среднеобъемных величин. Их ненулевая разница оказывается связанной с введением дополнительных степеней свободы в уравнения баланса импульса и с необходимостью использования всей цепочки моментных уравнений. В то же время условие тождественного совпадения среднеобъемных и среднеповерхностных величин приводит либо к расщеплению цепочки уравнений моментов на независимые, либо к превращению всех балансов для моментов ранга выше 2-го в простые следствия первых двух уравнений.

Метод пространственного осреднения приводит к принятым физическим величинам и системам уравнений, которые вводились ранее чисто феноменологически, а апостериорное сравнение последних с натурными данными еще более укрепляет уверенность в правильности развиваемого подхода.

Выбор областей приложения в ретроспективе соответствует работам автора, в ходе которых поэтапно формулировался метод пространственного осреднения. А именно, перенос меченых частиц жидкости в поровом пространстве, например в насыщенном песке, впервые привел [56] к необходимости явного осреднения по пространству случайных полей скорости. Использование при этом эргодической гипотезы позволило применить методы статистической гидромеханики [46]. Однако при анализе динамики суспензии взвешенных вращающихся частиц [3] принятие гипотезы об эквивалентности различных типов осредне-

ния означало бы физически неправильное исключение моментов сил, действующих со стороны вязкой жидкости на частицу, имеющую угловую скорость, отличную от скорости вращения жидкости. Пульсационный перенос момента количества движения взвешенных частиц в силу броуновских блужданий, усиливаемых турбулизацией взвесенесущей жидкости, означает появление моментных напряжений.

Если представить себе, что взвешенные твердые частицы мгновенно превратились в жидкие («расплавилась»), то картина мезодвижения уподобляется турбулизованной жидкости. Если при этом лишь часть жидких частиц обладает собственным вращением, то это соответствует смеси ламинарных и турбулентных частиц, или иначе — перемежаемости на уровне мезомасштабных движений. «Замораживание» взвесенесущей жидкости в суспензии, наоборот, приводит к микрокартине твердых композитных материалов. Конечно, при всех этих «переходах» меняются как кинематика, так и силовые факторы, однако принципы составления осредненных балансовых уравнений должны быть одинаковы, а это может быть достигнуто только при осреднении по объему.

2. ПРИНЦИП ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОСРЕДНЕНИЯ

Для составления уравнений механики сплошной среды, характеризуемой двумя линейными масштабами движений (или состояний) — внешним L и внутренним l — введем две координатные системы: микромасштаба x_i ($dx_i \sim \lambda$) и макромасштаба X_i ($dX_i \sim \Lambda \gg \lambda$). Эти системы координат подразделяют пространство на элементарные объемы $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ и $\Delta V = \Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3$ соответственно.

Величина l есть масштаб внутреннего движения или состояния (размер «моля» в турбулентности, макромолекулы в полимерном растворе или в жидком кристалле, порового канала или взвешенной частицы). Величина L есть внешний масштаб рассматриваемого движения (задачи), причем $L \gg l$. Выберем масштабы систем координат таким образом: $L \gg \Lambda \gg l$, $l \gg \lambda \gg l_0$, где l_0 — например, молекулярный «почти нулевой» масштаб. Левые части приведенных неравенств означают, что объемы $\Delta V \sim \Lambda^3$ и $dv \sim \lambda^3$ можно считать дифференциальными и пользоваться соответствующими дифференциальными балансовыми уравнениями для движений обоих масштабов (L и l). Правые части неравенств говорят о том, что элементарные частицы соответствующих полей переменных имеют мезомасштаб l и микромасштаб l_0 .

Поставим задачу нахождения уравнений движения среды в макромасштабе X_i по известным уравнениям в масштабе x_i .

Последние формулируются как уравнения баланса масс, импульса и энергии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\mathcal{E} + \frac{u_i u_i}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left(\mathcal{E} + \frac{u_i u_j}{2} \right) u_j = \frac{\partial \sigma_{ij} u_j}{\partial x_j} + \\ + F_i u_i + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + Q, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где ρ — плотность, u_i — локальная скорость, σ_{ij} — тензор микронапряжений, F_i — массовая сила, $\mathcal{E}$ — удельная внутренняя энергия, q_i — поток тепла, Q — источник тепла. Систему (2.1) — (2.3) следует дополнить уравнением баланса моментов количества движения, которое в простейшем случае имеет вид закона парности касательных напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2.4)$$

Будем считать, что тензор микронапряжений удовлетворяет уравнению (2.4), т. е. симметричен. Реологическую замыкающую связь считаем известной, причем рассмотрим наиболее простой случай вязкой жидкости:

$$\sigma_{ij} = - \left(p + \frac{2}{3} \mu e_{kk} \right) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (2.5)$$

$$\mu = \rho \nu_0, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

где p — давление, μ — вязкость жидкости, δ_{ij} — единичный тензор.

Умножение уравнения (2.2) на координату x_k позволяет выразить тензор потока импульса:

$$\sigma_{ik} - \rho u_i u_k = - \frac{\partial \rho u_i x_k}{\partial t} - \frac{\partial \rho u_i u_j x_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij} x_k}{\partial x_j} + F_i x_k. \quad (2.6)$$

Если теперь домножить (2.6) на альтернирующий тензор Леви—Чивиты ε_{lki} , то оно переходит в уравнение баланса момента количества движения

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{lki} \rho u_i x_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon_{lki} \rho u_i x_k u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon_{lki} \sigma_{ij} x_k) + \varepsilon_{lki} F_i x_k \quad (2.7)$$

дифференциального объема dv относительно начала координат x_i . Здесь учтено условие симметричности тензора потока импульса $(\sigma_{ik} - \rho u_i u_k) = 0$.

Проинтегрируем уравнения (2.1)–(2.3) по объему V . При условии непрерывности полей переменных, которому удовлетворяет модель вязкой жидкости, можно применить теорему Остроградского—Гаусса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho u_i dS_i = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i dV + \int_S \rho u_i u_j dS_j = \int_S \sigma_{ij} dS_j + \int_V F_i dV, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left(\mathcal{E} + \frac{u_i u_i}{2} \right) dV + \int_S \rho \left(\mathcal{E} + \frac{u_i u_i}{2} \right) u_i dS_i = \\ = \int_S \sigma_{ij} u_i dS_j + \int_S q_j dS_j + \int_V Q dV + \int_V F_i u_i dV, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где поверхностный интеграл берется по всей поверхности S объема V .

Возьмем в качестве V элементарный макрообъем ΔV . Разделив при этом интегральные балансы [57] на саму величину ΔV , представим последние в виде макродифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle_j}{\partial X_j} = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle_l}{\partial X_j} = \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_l}{\partial X_j} + \langle F_i \rangle, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \rho \left(\mathcal{E} + \frac{u_i u_i}{2} \right) \right\rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \left\langle \rho \left(\mathcal{E} + \frac{u_i u_i}{2} \right) u_i \right\rangle_j = \\ = \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \sigma_{ij} u_i \rangle_j + \langle F_i u_i \rangle + \frac{\partial \langle q_j \rangle_l}{\partial X_j} + \langle Q \rangle, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где появляются как среднеобъемные, так и среднеповерхностные величины, например,

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \rho dV, \quad \langle \rho u_i \rangle_j = \frac{\Delta X_j}{\Delta V} \int_{\Delta S_j} \rho u_i dS_j, \quad (2.14)$$

причем $\Delta S_j = \Delta X_k \Delta X_l$, $j \neq k \neq l$.

Будем считать, что условие $\Lambda \gg l$ обеспечивает представительность объема ΔV в том смысле, что средние $\langle \rho \rangle$, $\langle \rho u_i \rangle_j$ не являются уже случайными величинами, а детерминированными и регулярными функциями макрокоординат X_i . Как обычно, будем вводить среднюю скорость U_i как среднемассовую для ΔV , т. е.

$$\langle \rho \rangle U_i = \langle \rho u_i \rangle = \langle \rho u_i \rangle_i, \quad (2.15)$$

отнесенную к центру тяжести X_i объема ΔV . Сопоставление величин $\langle \rho \rangle U_i$ и $\langle \rho u_i \rangle_i$ приводит к обычной гипотезе об эквивалентности определения скорости по импульсу элемента среды и по потоку массы через сечение в любой макроточке.

Поле скоростей тем самым представляется в виде суммы регулярной и случайной компонент,

$$u_i(x_j, t) = U_i(x_j, t) + w_i(x_j, t; \omega) = U_i(X_j, t) + (\partial U_i / \partial X_j) \xi_j + O(\Delta^2 / L^2) + w_i(X_j + \xi_j, t; \omega), \quad (2.16)$$

где введен радиус-вектор $\xi_j = x_j - X_j$ относительно центра масс объема ΔV . Скорость $U_i(x_j, t)$ в первом равенстве понимается как средняя скорость по макрообъему ΔV , но с центром масс, совпадающим с точкой $x_j (\equiv X_j)$. Величина w_i есть пульсационная скорость, функция еще и «параметра случайности» ω . Определение (2.15) означает, что

$$\langle \rho w_i \rangle_i = 0. \quad (2.17)$$

Рассмотрим осреднение по объему от градиента скорости. Из уравнения (2.16) имеем

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \left\langle \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \langle w_i \rangle_j}{\partial X_j}. \quad (2.18)$$

В силу условия (2.17) отсюда получаем (по i не суммировать)

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + (1 - \delta_{ij}) \frac{\partial}{\partial X_j} \langle w_i \rangle_j, \quad (2.19)$$

причем $\langle w_i \rangle_j \neq 0$. Указанная ненулевая средняя величина проявляет себя при осреднении поля ротора скорости. Рассмотрим циркуляцию Γ_i скорости вдоль контура L_i , лежащего в плоскости $x_i = 0$. Пусть L_i имеет вид квадрата, совпадающего с плоским сечением объема ΔV . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \int_{L_i} u_j dx_j = \iint_{\Delta S_i} \Phi_i dx_k dx_l = \frac{1}{2} \iint_{\Delta S_i} \varepsilon_{ilk} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_k dx_l = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ilk} \frac{\partial U_k}{\partial X_l} \Delta S + \frac{1}{2} \varepsilon_{ilk} \frac{\partial \langle w_k \rangle_l}{\partial X} \Delta S = \Omega_i \Delta S + \sum_{k \neq i} \langle w_k \rangle_l \Delta X_k = \\ &= (\Omega_i + \chi_i) \Delta S, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где введены ротор Ω_i среднего поля скорости U_i и средняя завихренность $\Omega_i + \chi_i$; χ_i — избыточная завихренность (собственная завихренность) поля пульсаций скорости w_k [2].

Поскольку рассматриваемое случайное поле скоростей определено в четырехмерном пространстве (включая время), то осреднение фактически проводится по объему $\Delta V \Delta t$. Традиционное осреднение по интервалу времени Δt в точке x_i (для частицы, заполняющей объем $\Delta V \equiv dv$) связано с наиболее рас-

пространственным методом измерений скоростей (термопарами). Соответственно конструируемые уравнения статистической теории турбулентности составляются для корреляционных моментов скоростей (и других величин), взятых в разных элементах dv пространства и осредненных во времени. При этом принимается, что интервал Δt достаточно велик, чтобы включать в себя весь ансамбль реализаций скоростей в рассматриваемых элементах dv .

Составление балансовых уравнений (импульса и др.) феноменологической теории турбулентности для нестационарных (относительно макропеременных $U_i, \dots$) турбулентных потоков фактически означает осреднение по малому интервалу времени dt , но по объему $\Delta V = dV$ или же поперечному сечению потока, превышающему соответствующие размеры «моля» (вихря). Результаты осреднения приводят к детерминированным величинам, если объем ΔV включает в себя ансамбль реализаций поля скоростей. Наконец, уравнения, составляемые при этом для стационарных в среднем турбулентных полей, фактически используют осреднение по представительным (большим) объемам ΔV и интервалам Δt .

Обычно считается, что величины, осредненные либо по Δt , либо по ΔV , равно как балансовые и моментные уравнения соответствующих порядков, тождественны друг другу. Нас, однако, интересует, может ли предположение об их эквивалентности исключать существенные физические явления.

Сопоставим с величинами $\langle \rho u_i u_j \rangle_j$ и $\langle \sigma_{ij} \rangle_j$, появившимися в уравнении баланса импульса (2.12), аналогичный результат осреднения по объему ΔV , обратившись к уравнению (2.6). Получим

$$\langle \rho u_i u_k - \sigma_{ik} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho u_i x_k \rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \rho u_i u_j x_k \rangle_j - \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \sigma_{ij} x_k \rangle_j - \langle F_i x_k \rangle.$$

Если умножить теперь уравнение (2.12) на

$$\langle \rho u_i u_k - \sigma_{ik} \rangle_k = \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho u_i X_k \rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \rho u_i u_j X_k \rangle_j - \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \sigma_{ij} X_k \rangle_j - F_i X_k$$

и найти разницу двух последних соотношений, то получим

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ik} \rangle_k - \langle \rho u_i u_k \rangle_k &= \langle \sigma_{ik} \rangle - \langle \rho u_i u_k \rangle + \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho u_i \tilde{z}_k \rangle + \\ &+ \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \rho u_i u_j \tilde{z}_k \rangle_j - \langle F_i \tilde{z}_k \rangle - \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \sigma_{ij} \tilde{z}_k \rangle_j. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь было использовано, что координата центра масс X_i может вноситься под знак осреднения как величина, постоян-

ная внутри объема ΔV . Поток импульса $N_{ik} = \langle \sigma_{ik} - \rho u_i u_k \rangle_k$ определяется как величина средняя по сечению. Это относится и к среднему вязкому напряжению $\langle \sigma_{ik} \rangle_k$ и к напряжению Рейнольдса

$$R_{ik} = -(\langle \rho u_i u_k \rangle_k - \langle \rho \rangle U_i U_k) = -\langle \rho \omega_i \omega_k \rangle_k + O(\Lambda^2/L^2). \quad (2.22)$$

Из уравнения (2.21) следует, что величины тензоров напряжений, осредненных по объему, представляют собой всего лишь часть тензора макронапряжений, вводимого в согласии с исходными представлениями Коши, см. [80], как сила, действующая на ориентированной площадке. Среднеобъемный тензор напряжений не может быть введен непосредственно как макронапряжение в уравнение баланса импульса.

Уравнение баланса импульса имеет вид

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle U_i}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle U_i U_j}{\partial X_j} = \frac{\partial R_{ij}}{\partial X_j} + \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_j}{\partial X_j} + F_i, \quad (2.23)$$

тогда как уравнение баланса масс (2.11) преобразуется так:

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle U_j}{\partial X_j} = 0. \quad (2.24)$$

Существенно, что величины N_{ik} , $\langle \sigma_{ik} \rangle_k$, R_{ik} за счет ориентации площадки оказываются несимметричными. Отсюда закон парности касательных напряжений (2.4) на макроуровне нарушается и должен быть заменен на более общие балансовые уравнения для моментов количества движения. В самом деле, поток импульса N_{ik} выражается через производную от момента более высокого порядка $N_{ijk} = \langle (\sigma_{ij} - \rho u_i u_j) \xi_k \rangle_j$. Соответствующие уравнения получаются путем умножения уравнений (2.2) на $x_k x_m \dots$ и последующего осреднения. Вычитание их аналога, получаемого при умножении на величины $X_k X_m \dots$, приводит к цепочке уравнений [40, 60]

$$\begin{aligned} \langle (\sigma_{ik} - \rho u_i u_k) \xi_m \dots \rangle_k &= \langle (\sigma_{ik} - \rho u_i u_k) \xi_m \dots \rangle + \\ &+ \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \rho u_i u_j \xi_k \xi_m \dots \rangle_j - \langle F_i \xi_k \xi_m \dots \rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \sigma_{ij} \xi_k \xi_m \dots \rangle_j \end{aligned} \quad (2.25)$$

моментов возрастающего порядка $N_{ijkm} = \langle (\sigma_{ij} - \rho u_i u_j) \xi_k \xi_m \dots \rangle_j$, осредненных по сечениям с нормалью по второму индексу. При осреднении по времени (или при статистическом традиционном осреднении) аналогом уравнений (2.25) является известная цепочка Фридмана—Келлера [81].

Обрыв цепочки (2.25) на n -м порядке приводит, как и обычно в теории турбулентности, к необходимости введения замыкающих соотношений. В статистической теории турбулентно-

сти они ищутся в виде связей между корреляционными моментами высшего ранга. В рассматриваемом случае объемного осреднения выбор замыкающих связей проводится в соответствии с реологическими правилами континуальной механики (иначе говоря, согласно термодинамике необратимых процессов), поскольку турбулизованная жидкость при этом считается сплошной средой с внутренней структурой.

В частном и важном случае обрыв цепочки осуществляется на уравнении третьего порядка, т. е. на уравнении баланса момента количества движения.

3. МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И ЭВОЛЮЦИЯ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

Умножение уравнения (2.21) на альтернирующий тензор Леви-Чивиты ε_{ijk} приводит к балансу момента количества движения относительно центра масс X_i объема ΔV в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon_{ijk} \rho u_k \xi_j \rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \varepsilon_{ilk} \rho u_k \xi_j u_l \rangle_j + \varepsilon_{ilk} \langle \rho u_k u_l \rangle_l = \\ = \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \varepsilon_{ilk} \sigma_{kj} \xi_l \rangle_j + \varepsilon_{ilk} \langle \sigma_{kl} \rangle_l + \langle \varepsilon_{ilk} \xi_l F_k \rangle. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Считаем, что весь объем ΔV заполнен n вихрями, причем в l -окрестности центра $\bar{\xi}_m$ каждого из них поле флуктуации скорости представимо в виде

$$\bar{w}_k = \bar{\omega}_k + \frac{\partial \bar{\omega}_k}{\partial \bar{\xi}_m} \xi_m, \quad \xi_m = \bar{\xi}_m - \bar{\xi}_m, \quad (3.2)$$

где $\bar{\omega}_k$ — скорость движения центра масс вихря, $0 \leq |\xi_m| \leq l$. Формула (3.2) означает моделирование вихря в виде твердотельного образования («моля» Прандтля).

Левая часть уравнения (3.2) содержит скорость локального изменения среднего кинетического момента M_i жидкости в объеме ΔV . Для поля скорости (2.16), (3.2) средняя величина от M_i последовательно преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle M_i \rangle = \langle \varepsilon_{ilk} \rho u_k \xi_l \rangle = \varepsilon_{ilk} \frac{\partial U_k}{\partial X_m} \langle \rho \xi_m \xi_l \rangle + \langle \varepsilon_{ilk} \rho \bar{\omega}_k \xi_l \rangle = \\ = \varepsilon_{ilk} \frac{\partial U_k}{\partial X_m} I_{ml} + \langle \varepsilon_{ijk} \rho \bar{\omega}_k \xi_l \rangle + \langle \varepsilon_{ilk} \Phi_{km} i_{ml} \rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь введены следующие величины:

$$\begin{aligned} I_{ml} = \langle \rho \xi_m \xi_l \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \rho \xi_m \xi_l \Delta V, \\ \Phi_{km} = \frac{\partial U_k}{\partial X_m} + \frac{\partial \bar{\omega}_k}{\partial \bar{\xi}_m}, \quad i_{ml} = \frac{1}{\Delta V l} \int_{\Delta V l} \rho \xi_m \xi_l dV, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где I_{ml} — приведенный момент инерции жидкости в объеме ΔV , Φ_{km} — полная скорость дисторсии турбулентного моля объема ΔV_l , i_{ml} — его момент инерции, отнесенный к единице объема. Итак, первое слагаемое $\langle M_i \rangle$, согласно правой части равенств (3.3), есть момент количества движения поля средней скорости в объеме ΔV , второе — средний момент количества движения нерегулярного вихря масштаба Λ , т. е. всего ΔV , а третье — момент, соответствующий мелкомасштабной турбулентности. Детерминированный вклад второго слагаемого может быть учтен при анализе стационарных в среднем турбулентных потоков, когда проводится одновременное осреднение по большому интервалу времени. В данном контексте будем, однако, им пренебрегать.

Уравнение эволюции момента инерции находится следующим образом. Умножим уравнение неразрывности (2.1) диадно на $\xi_m \xi_m$. Полученное соотношение

$$\frac{\partial \rho \xi_k \xi_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j \xi_k \xi_m = \rho u_j \xi_m \delta_{kj} + \rho u_j \xi_k \delta_{mj} \quad (3.5)$$

осредним по ΔV . Тогда получим [59]

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho \xi_k \xi_m \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \rho \xi_k \xi_m u_j \rangle = \langle \rho u_k \xi_m \rangle + \langle \rho u_m \xi_k \rangle. \quad (3.6)$$

Для выделения моментов инерции, связанных с рассмотренными выше вихревыми движениями в объеме ΔV , снова представим радиус-вектор ξ_m в виде $\xi_m = \bar{\xi}_m + \xi_m$. Тогда момент инерции объема $\Delta V = n \Delta V_l$, ΔV_l — объем индивидуального моля, преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{km} = \langle \rho \xi_k \xi_m \rangle &= \frac{1}{\Delta V} \sum_{l=1}^n \rho \xi_k \xi_m \Delta V_l + \frac{\Delta V_l}{\Delta V} \sum_{l=1}^n \frac{1}{\Delta V_l} \int_{\Delta V_l} \rho \xi_k \xi_m dV = \\ &= \frac{1}{\Delta V} \sum_{l=1}^n (\rho \bar{\xi}_k \bar{\xi}_m \Delta V_l) + J_{km}, \quad J_{km} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n i_{km}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь J_{km} — среднее (для ΔV) значение момента инерции моля i_{km} , причем $J_{km} \sim l^2 \sim \Lambda^2/n$. Как и следовало ожидать, при $n \rightarrow \infty$ величина $J_{km} \rightarrow 0$ и представление (3.7) превращается в тождество. Однако при учете турбулентной мезоструктуры подобный предельный переход недопустим, а потому будем использовать равенство

$$I_{km} = I_{km}^\omega + J_{km}, \quad (3.8)$$

где I_{km}^ω — приведенный момент инерции для центров масс мел-

комасштабных вихрей в ΔV , причем $I_{km}^\omega \rightarrow I_{km}$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда уравнение (2.10) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} (I_{km}^\omega + J_{km}) + \frac{\partial}{\partial X_j} (I_{km}^\omega + J_{km}) U_j = I_{nm}^\omega \frac{\partial U_k}{\partial X_n} + I_{kn}^\omega \frac{\partial U_m}{\partial X_n} + \\ + \langle \Phi_{kn} i_{mn} + \Phi_{mn} i_{nk} \rangle - \frac{\partial}{\partial X_j} \langle (I_{km} + i_{km}) w_j \rangle_i. \quad (3.9)$$

С другой стороны, для момента инерции I_{km} жидкости в единице объема ΔV можно аналогично (или же методом [55]) получить балансовое соотношение

$$\frac{\partial I_{km}}{\partial t} + \frac{\partial I_{km} U_j}{\partial X_j} = \frac{\partial U_k}{\partial X_n} I_{nm} + \frac{\partial U_m}{\partial X_n} I_{nk}. \quad (3.10)$$

В предположении¹, что $I_{km} \approx I_{km}^\omega$, разность балансов (3.9) и (3.10) дает уравнение эволюции момента инерции турбулентного поля

$$\frac{\partial}{\partial t} J_{km} + \frac{\partial}{\partial X_j} J_{km} U_j = \langle \Phi_{kn} i_{mn} + \Phi_{mn} i_{nk} \rangle - \frac{\partial}{\partial X_j} \langle i_{km} w_j \rangle_i, \quad (3.11)$$

где использовано условие $\langle I_{km} w_i \rangle_i = I_{km} \langle w_i \rangle_i = 0$.

Вводя далее пульсации i_{km}^* момента инерции моля и пульсации Φ_{km}^* тензора градиента скорости

$$i_{km} = i_{km}^* + J_{km}, \quad \Phi_{kn} = \Phi_{kn}^* + (\partial U_k / \partial X_n) + \langle \partial \bar{w}_k / \partial \bar{\xi}_n \rangle,$$

преобразуем далее уравнение эволюции (3.11) следующим образом:

$$\frac{\partial J_{km}}{\partial t} + \frac{\partial J_{km} U_j}{\partial X_j} = J_{kn} \Phi_{mn}^* + J_{mn} \Phi_{kn}^* + Q_{km} + \frac{\partial \Pi_{kmj}}{\partial X_j}. \quad (3.12)$$

Здесь учтены пульсационные источник (сток) и диффузионный перенос момента инерции турбулентного вихря

$$Q_{km} = \langle \Phi_{kn}^* i_{nm}^* \rangle, \quad \Pi_{kmj} = - \langle i_{km}^* w_j \rangle_i. \quad (3.13)$$

Впрочем, далее будет рассмотрен вариант теории, в котором правая часть (3.12) отбрасывается.

Теперь представление (3.3) для среднего момента количества движения записывается в виде

$$\langle M_i \rangle = \varepsilon_{ilk} I_{ml} \frac{\partial U_k}{\partial X_m} + \varepsilon_{ilk} J_{ml} \left(\frac{\partial U_k}{\partial X_m} + \omega_{km} \right), \quad \omega_{km} = \left\langle \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial \bar{\xi}_m} \right\rangle, \quad (3.14)$$

¹ Неточность в определении момента инерции компенсируется соответствующими изменениями угловых скоростей вихря, так что момент M_i сохраняется неизменным.

причем его пульсация M_i^* определяется формулой

$$\begin{aligned} M_i^* &= M_i - \langle M_i \rangle = \varepsilon_{ilk} \Phi_{km} (J_{ml} + i_{ml}^*) - \varepsilon_{ilk} J_{ml} \langle \Phi_{km} \rangle = \\ &= \varepsilon_{ilk} J_{ml} \Phi_{km}^* + \varepsilon_{ilk} i_{ml}^* \langle \Phi_{km} \rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Тем самым уравнение баланса момента количества движения (3.1) принимает вид

$$\frac{\partial \langle M_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle M_i \rangle U_j}{\partial X_j} = \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial X_j} + \frac{\partial m_{ij}}{\partial X_j} + \varepsilon_{ilk} (R_{lk} + \langle \sigma_{kl} \rangle_l) + C_i, \quad (3.16)$$

где μ_{ij} — турбулентные моментные напряжения, обусловленные пульсационным переносом флуктуаций момента количества движения вихрей

$$\mu_{ij} = \langle -M_i^* \omega_j \rangle_j = -\varepsilon_{ilk} J_{ml} \langle \Phi_{km}^* \omega_j \rangle_j - \varepsilon_{ilk} \langle \Phi_{km} \rangle \langle i_{ml}^* \omega_j \rangle_j, \quad (3.17)$$

а $m_{ij} = \langle \varepsilon_{ilk} \sigma_{kj} \xi_l \rangle_j$ — вязкие моментные напряжения, связанные с неравномерностью распределений вязких микронапряжений на поперечном сечении дифференциального объема ΔV .

При дальнейших преобразованиях примем, что кинетический момент преимущественно определяется угловой скоростью поля скорости, т. е. вкладом скорости деформации e_{ij} в соответствующих выкладках будем пренебрегать:

$$\begin{aligned} \Phi_{ik} &= \varepsilon_{kim} \Phi_m + e_{ij} \approx \varepsilon_{kim} \Phi_m, \\ \frac{\partial U_i}{\partial X_k} &= \varepsilon_{kim} \Omega_m + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \approx \varepsilon_{kim} \Omega_m. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Тогда оставшаяся часть $\langle M_i \rangle^\Omega$ кинетического момента (3.14) преобразуется следующим образом:

$$\langle M_i \rangle^\Omega = \varepsilon_{ilk} I_{ml} \frac{\partial U_k}{\partial X_m} \approx \varepsilon_{ilk} \varepsilon_{kmp} I_{ml} \Omega_p. \quad (3.19)$$

Если применить операцию ротора $(1/2) \varepsilon_{pkl} (\partial/\partial X_k)$ к уравнению поля средних скоростей, то получим известное уравнение диффузии среднего вихря

$$\frac{\partial \Omega_p}{\partial t} + \frac{\partial \Omega_p U_j}{\partial X_j} = \Omega_j \frac{\partial U_p}{\partial X_j} + \frac{1}{2\rho} \varepsilon_{pki} \frac{\partial F_i}{\partial X_k} + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial^2}{\partial X_k \partial X_j} \varepsilon_{pki} R_{ij}. \quad (3.20)$$

С другой стороны, умножение уравнения (3.10) эволюции момента инерции I_{km} на величину $\varepsilon_{ikn} \partial U_n / \partial X_m$ приводит [55, 57] к выражению

$$\varepsilon_{ikn} \varepsilon_{mnp} \Omega_p \left(\frac{\partial I_{km}}{\partial t} + \frac{\partial I_{km} U_j}{\partial X_j} \right) = -I \Omega_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j}, \quad (3.21)$$

если ΔV симметричен, а потому $I_{ml} = I_{\delta ml}$. Отсюда умножение (3.20) на величину $I_{\delta ml} \varepsilon_{ilk} \varepsilon_{kmp}$ и последующее суммирование с выражением (3.21) дает

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle M_i \rangle^\Omega + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle M_j \rangle^\Omega U_j = \frac{I}{\rho} \varepsilon_{ikp} \left(\frac{\partial F_p}{\partial X_k} + \frac{\partial^2 R_{ij}}{\partial X_k \partial X_j} \right). \quad (3.22)$$

Разность между (3.5) и (3.22) позволяет найти выражение для кинетического момента $\langle M_i \rangle^\omega$, определяемого только собственным вращением турбулентных молей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle M_i \rangle^\omega + \frac{\partial \langle M_i \rangle^\omega U_j}{\partial X_j} &= \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial X_j} + \frac{\partial m_{ij}}{\partial X_j} + \varepsilon_{ilk} (R_{lk} + \langle \sigma_{kl} \rangle_l) + \\ &+ C_i - \frac{I}{\rho} \varepsilon_{ikp} \frac{\partial F_p}{\partial X_k} - \frac{I}{\rho} \varepsilon_{ikp} \frac{\partial^2 R_{ij}}{\partial X_k \partial X_j}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Если принять (ср. [57])

$$C_i^\omega = C_i - \frac{I}{\rho} \varepsilon_{ikp} \left(\frac{\partial F_p}{\partial X_k} + \frac{\partial^2 R_{ij}}{\partial X_k \partial X_j} \right), \quad (3.24)$$

то уравнение (3.23) совпадает с традиционным балансом внутреннего момента количества движения, традиционного для микрополярной, или, иначе, асимметричной гидродинамики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle M_i \rangle^\omega + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle M_i \rangle^\omega U_j &= \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial X_j} + \frac{\partial m_{ij}}{\partial X_j} + \\ &+ \varepsilon_{ilk} (R_{lk} + \langle \sigma_{kl} \rangle_l) + C_i^\omega, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где C_i^ω — объемный внешний силовой момент.

Для дальнейшего будет полезным в выражении (3.17) для моментных напряжений μ_{ij} использовать упрощающие предположения (3.18). Тогда

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \langle -M_i^* \omega_j \rangle_i = -\varepsilon_{ilk} \varepsilon_{kmp} J_{ml} \langle \Phi_p^* \omega_j \rangle_l - \\ &- \varepsilon_{ilk} \varepsilon_{kmp} (\Omega_p + \omega_p) \langle i_{ml}^* \omega_j \rangle_l. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Отметим также соотношение

$$\varepsilon_{ilk} \varepsilon_{lpk} = \delta_{il} \delta_{ip} - \delta_{ip} \delta_{il}. \quad (3.27)$$

Замыкание системы уравнений динамики турбулизованной жидкости (2.23), (2.24), (3.22), (3.25), включая уравнения эволюции моментов инерции (3.10), (3.11), будем проводить, считая турбулизованную жидкость континуумом с характерной внутренней структурой.

4. ТЕРМОДИНАМИКА ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Начнем с анализа баланса полной энергии, представленного следующей последовательностью уравнений: (2.3) — на микроуровне, (2.10) — для произвольного объема V , (2.13) — для дифференциального объема ΔV в системе макрокоординат X_j .

Кинетическую энергию турбулизованной жидкости вычислим, пользуясь представлениями (2.16) и (3.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho u_i u_i = & \frac{1}{2} \rho U_i U_i + \rho U_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_k} \xi_k + \omega_i \right) + \frac{1}{2} \rho \bar{w}_i \bar{w}_i + \\ & + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_m} \xi_k \xi_m + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \xi_n} \xi_k \xi_n + \rho \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \xi_m} \xi_k \xi_m + \\ & + \rho \bar{w}_i \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \xi_k + \rho \bar{w}_i \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \xi_k} \xi_k. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Осредним выражение (4.1) по объему моля масштаба l , а затем по всем молям, содержащимся в объеме ΔV . Это приводит к выражению

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right\rangle = & \frac{1}{2} \langle \rho \rangle U_i U_i + \frac{1}{2} I_{km} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_m} + \\ & + \frac{1}{2} \langle \rho \bar{w}_i \bar{w}_i \rangle + \frac{1}{2} \langle i_{km} \Phi_{im} \Phi_{ik} \rangle. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Последнее слагаемое правой части (4.2) преобразуется далее так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle i_{km} \Phi_{im} \Phi_{ik} \rangle = & \frac{1}{2} J_{km} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_m} + \omega_{im} \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_k} + \omega_{ik} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \langle i_{km} \Phi_{im}^* \Phi_{ik}^* \rangle + \frac{1}{2} \langle i_{km}^* \Phi_{im}^* \rangle \langle \Phi_{ik} \rangle + \frac{1}{2} \langle i_{km}^* \Phi_{ik}^* \rangle \langle \Phi_{im} \rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Используя этот результат, найдем, что кинетическая энергия турбулентного поля представляется в виде суммы энергий поступательного движения, вращения и внутренней энергии турбулентного хаоса E :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right\rangle = & \frac{1}{2} \langle \rho \rangle U_i U_i + \frac{1}{2} I_{km} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_m} + \frac{1}{2} J_{km} (\Omega_{im} + \omega_{im}) \times \\ & \times (\Omega_{ik} + \omega_{ik}) + \langle \rho E \rangle; \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\langle \rho \rangle E = \langle \rho \rangle E_w + \langle \rho \rangle E_\omega; \quad \langle \rho \rangle E_w = \frac{1}{2} \langle \rho w_i w_i \rangle;$$

$$\langle \rho \rangle E_\omega = \frac{1}{2} \langle i_{km} \Phi_{im} \Phi_{ik} \rangle + \frac{1}{2} \langle i_{km}^* \Phi_{im}^* \rangle \langle \Phi_{ik} \rangle + \frac{1}{2} \langle i_{km}^* \Phi_{ik}^* \rangle \langle \Phi_{im} \rangle.$$

Далее можно определить и пульсацию кинетической энергии

$$\left(\frac{1}{2} \rho u_i u_i \right)^* = \langle \rho \rangle U_i \omega_i + (\Omega_{im} + \omega_{im}) (i_{km} \Phi_{ik}) + (\rho E)^*, \quad (4.5)$$

где $(\rho E)^*$ подбирается таким образом, чтобы выражения (4.4) и (4.5) в сумме давали исходное представление (4.1).

Поток кинетической энергии будем преобразовывать аналогично потокам импульса и кинетического момента. Тогда

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} \rho u_i u_i u_j \right\rangle_j &\approx \left\langle \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right\rangle U_j + \left\langle \left(\frac{1}{2} \rho u_i u_i \right)^* w_j \right\rangle_j = \\ &= \frac{1}{2} \langle \rho \rangle U_i U_i U_j + U_i \left\langle \frac{\rho}{2} w_i w_j \right\rangle_j + U_i \left\langle \frac{\rho}{2} w_i w_i \right\rangle_j + \\ &\quad + \langle \Phi_{im} \rangle \langle i_{km} (\Omega_{ik} + \omega_{ik}) w_j \rangle_j + \langle \rho E^* w_j \rangle_j. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Заметим, что можно также ввести следующие представления:

$$\begin{aligned} U_i \langle \rho w_i w_j \rangle_j &= -U_i R_{ij}; \quad (\Omega_{pm} + \omega_{pm}) \langle i_{km} \Phi_{pk} w_j \rangle_j \approx \\ &\approx (\Omega_i + \omega_i) \langle \varepsilon_{mpi} i_{km} \Phi_{pk} w_j \rangle_j = -(\Omega_i + \omega_i) \mu_{ij}; \\ \langle \rho \mathcal{E} u_j \rangle &= \langle \rho \rangle \langle \mathcal{E} \rangle U_j + \langle (\rho \mathcal{E})^* w_j \rangle_j; \\ \varepsilon_{ikl} \langle \rho u_i u_k \rangle_k &= \varepsilon_{ikl} R_{lk}; \quad \langle \sigma_{ij} u_i \rangle_j = \langle \sigma_{ij} \rangle_j U_i + \langle \sigma_{ij}^* w_j \rangle_j; \\ \langle \varepsilon_{ikl} \dot{\tilde{z}}_l F_k \rangle &= C_i; \quad \langle F_k u_k \rangle \approx \langle F_k \rangle U_k + \langle F_k^* w_k \rangle + \langle F_k^* \Phi_{kn} \dot{\tilde{z}}_n \rangle; \\ \langle F_k^* \Phi_{kn} \dot{\tilde{z}}_n \rangle &= C_i (\Omega_i + \omega_i) + \Pi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Уравнение баланса полной энергии (2.13) теперь принимает вид

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial X_j} \right) (\langle \mathcal{E} \rangle + \frac{1}{2} U_i U_i + \frac{1}{2} I_{km} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_m} + \\ + \frac{1}{2} J_{km} (\Omega_{im} + \omega_{im}) \cdot (\Omega_{ik} + \omega_{ik}) + E) = \frac{\partial}{\partial X_j} (U_i R_{ij} + (\Omega_i + \omega_i) \mu_{ij} + \\ + \langle \sigma_{ij} \rangle_j U_i) + \langle F_i \rangle U_i + C_i (\Omega_i + \omega_i) + \frac{\partial}{\partial X_j} \{ -\langle (\rho \mathcal{E})^* w_j \rangle_j - \\ - \langle (\rho E)^* w_j \rangle_j + \langle \sigma_{ij} w_j \rangle_j + \langle q_j \rangle_j \} + \langle Q \rangle + \Pi. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Умножим баланс момента количества движения (3.22) на Ω_i , баланс (3.23) — на $(\Omega_i + \omega_i)$, а уравнение эволюции моментов инерции (3.10) и (3.12) — на

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{kli} \varepsilon_{mpi} \Omega_l \Omega_p, \quad \frac{1}{2} \varepsilon_{kli} \varepsilon_{mpi} (\Omega_l + \omega_l) (\Omega_p + \omega_p) \quad (4.9)$$

соответственно. Кроме того, умножив (2.23) на скорость U_i , получим так называемое уравнение живых сил. Вычитание суммы указанных произведений из уравнения баланса полной энергии (4.8) дает

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial X_j} \right) (\langle \mathcal{E} \rangle + E) &= (R_{ij}^s + \tau_{ij}^s) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) - \\ &- (R_{ij}^a + \tau_{ij}^a) \varepsilon_{ijk} \omega_k + \mu_{ij} \frac{\partial (\Omega_i + \omega_i)}{\partial X_j} + \frac{\partial}{\partial X_j} (-\langle (\rho \mathcal{E})^* w_j \rangle_j - \\ &- \langle (\rho E)^* w_j \rangle_j + \langle \sigma_{ij} w_j \rangle_j + \langle q_j \rangle_j) + \langle Q \rangle + \Pi, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $R_{ij}^s = (1/2) (R_{ij} + R_{ji})$, $R_{ij}^a = (1/2) (R_{ij} - R_{ji})$ — симметричные и антисимметричные составляющие тензоров напряжений.

С другой стороны, можно осреднить по объему ΔV уравнение баланса энтропии s , которое для микрообъема dv имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho s + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho s u_j = \sigma + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{q_j}{T}, \quad (4.11)$$

$$\sigma = \frac{1}{T} (\sigma_{ij} + p \delta_{ij}) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{q_j}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{Q}{T},$$

где σ — скорость локального роста энтропии, q_j/T — поток энтропии, T — температура. В результате получим

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle s \rangle + U_j \frac{\partial}{\partial X_j} \langle s \rangle \right) &= \langle \sigma \rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\langle q_j \rangle_I}{T} - \langle (\rho s)^* w_j \rangle_I \right), \\ \langle \sigma \rangle &= \frac{1}{\langle T \rangle} (\langle \sigma_{ij} \rangle_I + \langle p \rangle \delta_{ij}) \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\langle Q \rangle}{\langle T \rangle} + \frac{\langle q_j \rangle_I}{\langle T \rangle^2} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial X_j} + \frac{\varphi}{\langle T \rangle}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где появился турбулентно-диффузионный (пульсационный) перенос энтропии в макромасштабе (в микромасштабе ему соответствует конвективный поток энтропии), а также ее источник φ , соответствующий вязкой диссипации механической энергии (переводу ее в тепло) на флуктуациях поля скоростей деформаций:

$$\varphi = \langle (\sigma'_{ij} - \langle \sigma'_{ij} \rangle_I) (\partial w_i / \partial x_j) \rangle. \quad (4.13)$$

где $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p \delta_{ij}$ — девиатор тензора напряжений.

Если осреднить по объему ΔV уравнение баланса внутренней энергии $\mathcal{E}$, т. е. уравнение притока тепла в микрообъеме

$$\frac{\partial \rho \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \mathcal{E} u_j}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + Q, \quad (4.14)$$

то получим

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle \left(\frac{\partial \langle \mathcal{E} \rangle}{\partial t} + U_j \frac{\partial \langle \mathcal{E} \rangle}{\partial X_j} \right) &= \langle \sigma_{ij} \rangle_I \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \langle q_j \rangle_I}{\partial X_j} + \langle Q \rangle + \\ &+ \frac{\partial}{\partial X_j} \langle -(\rho \mathcal{E})^* w_j \rangle_I - \left\langle (\sigma_{ij} - \langle \sigma_{ij} \rangle_I) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Из сравнения (4.12) и (4.15) следует соотношение Гиббса для средних энтропии $\langle s \rangle$ и энергии $\langle \mathcal{E} \rangle$

$$\langle \rho \rangle \frac{d \langle \mathcal{E} \rangle}{dt} = \langle T \rangle \frac{d \langle s \rangle}{dt} - p \frac{d}{dt} \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial X_j} \right), \quad (4.16)$$

если использовать равенство

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \langle -(\rho \mathcal{E})^* w_l \rangle_l + \langle T \rangle \frac{\partial}{\partial X_j} \langle (\rho S)^* w_l \rangle_l + \\ + \langle (p - \langle p \rangle) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial X_i} \right) \rangle. \quad (4.17)$$

Соотношение Гиббса для средних значений истинных внутренних энергии и энтропии, см. [48], как нетрудно видеть, не выделяет параметров, характеризующих внутреннюю структуру турбулентного континуума. Поэтому обратим внимание на внутреннюю энергию E собственно турбулентного хаоса. Уравнение, определяющее ее, получается путем сопоставления разности уравнений (4.10) и (4.15) [59]

$$\langle \rho \rangle \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial X_j} \right) E = R_{ij}^s \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) - R_{ij}^a e_{ijk} \omega_k + \\ + \mu_{ij} \frac{\partial (\Omega_i + \omega_i)}{\partial X_j} + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle -(\rho E)^* w_l \rangle_l - \Psi + \Pi, \quad (4.18)$$

где $\Psi = \Phi - \partial \langle \sigma_{ij}^* w_l \rangle_l / \partial X_j$ — сток турбулентной энергии.

Работа турбулентных напряжений R_{ij} , μ_{ij} над полем средних поступательных и угловых скоростей приводит к диссипации механической энергии среднего поля в энергию хаотического турбулентного движения, имеющего «тепловой» характер в масштабе ΔV (но механический — в масштабе dv). Соответственно можно ввести феноменологически турбулентную энтропию S и температуру Θ турбулизации следующим образом [59, 139]:

$$\Theta \frac{dS}{dt} + \Psi - \frac{\partial}{\partial X_j} \langle -(\rho E)^* w_l \rangle_l = \\ = \left(R_{ij}^s - \frac{1}{3} R_{kt} \delta_{kt} \delta_{ij} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) - \\ - R_{ij}^a e_{ijk} \omega_k + \mu_{ij} \frac{\partial (\Omega_i + \omega_i)}{\partial X_j}, \quad (4.19)$$

или

$$\frac{dS}{dt} + \frac{\Psi}{\Theta} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\langle -(\rho E)^* w_l \rangle_l}{\Theta} \right) = \Sigma, \quad (4.20)$$

где Σ — локальное порождение турбулентной энтропии, Ψ/Θ — сток турбулентной энтропии S . Работа рейнольдсовых и других турбулентных напряжений приводит к росту энтропии (хаоса) турбулентности, а вязкая диссипация уменьшает энтропию (хаос) турбулизации. Интенсивность стока Ψ/Θ энтропии S может быть иначе названа притоком неэнтропии (если восполь-

зоваться терминологией Э. Шредингера, предложенной им для биологических систем [89]).

Для турбулентного хаоса также справедливо соотношение Гиббса

$$\frac{dE}{dt} = \Theta \frac{dS}{dt} + \frac{1}{3} R_{ij} \delta_{ij} \frac{d}{dt} \frac{1}{\langle \rho \rangle}, \quad (4.21)$$

но в нем фигурируют уже турбулентные напряжения. Введение двух энтропий S и s соответствует представлению [59] турбулентного континуума в виде термодинамического комплекса, сложенного из двух подсистем — турбулентного и молекулярного хаоса.

Рассмотрим случай, когда турбулентно-диффузионный перенос энтропии не учитывается. Тогда уравнение (4.20) упрощается и принимает вид

$$\frac{dS}{dt} = \Sigma - \frac{\Psi}{\Theta} = \frac{1}{\Theta} (D - \Psi), \quad (4.22)$$

где введена диссипация D механической энергии среднего движения. Эта формула наглядно показывает, что энтропия S подсистемы турбулентного хаоса растет в том случае, когда диссипация превышает сток Ψ энергии в подсистему молекулярного хаоса, обусловленный вязким гашением турбулентных пульсаций. В противном случае энтропия S может уменьшаться, что является характерной чертой термодинамически открытых систем (или иначе — подсистем).

В локально-стационарном состоянии $dS/dt = 0$, что означает равенство интенсивности диссипации стоку турбулентной энергии на молекулярный уровень [139]

$$D = \Psi = \text{const.} \quad (4.23)$$

Согласно экспериментально подтвержденной гипотезе А. Н. Колмогорова [35], характерным параметром в таких ситуациях является поток энергии по иерархии турбулентных вихрей вплоть до молекулярного уровня, т. е. в термодинамической трактовке сам сток Ψ . В силу условия (4.23) параметром состояния будет также и интенсивность диссипации D , как это предполагалось В. В. Новожиловым [67]. Таким образом, коэффициенты в феноменологических (онзагеровских) связях $W_\beta = L_{\beta\alpha} X_\alpha$ термодинамических сил X_α и потоков W_β , конструируемых по правилам термодинамики необратимых процессов, следует искать в виде функций от просто вычисляемой диссипации D в поле средних турбулентных скоростей.

Соответствующие связи будем искать, исходя из определения Σ согласно уравнению (4.20). Тогда получим замыкающие реологические связи

$$R_{ij}^s - \frac{1}{3} R_k \delta_{ki} \delta_{ij} = v_{ijmn} \left(\frac{\partial U_m}{\partial X_n} + \frac{\partial U_n}{\partial X_m} \right),$$

$$R_{ij}^a = 2\gamma_{ijnm} \epsilon_{nmk} \omega_k, \quad \eta_{ij} = 2\eta_{ijkn} \frac{\partial (\Omega_k + \omega_k)}{\partial X_n},$$

$$\tilde{q}_j = \langle -(\rho E)^* w_j \rangle_j = \gamma_{ji} \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{1}{\Theta} \right), \quad (4.24)$$

характерные для асимметричной гидродинамики (или иначе — для гидродинамики Коссера) [6, 108]. Однако тензорные турбулентные коэффициенты вязкости и теплопроводности не являются материальными константами, а сильно меняющимися функциями полей средних турбулентных параметров. Некоторые более сложные конструкции замыкающих связей обсуждались ранее [49], в том числе в связи с проблемами турбулентности неьютоновских жидкостей (учет упругих составляющих) или же для быстро меняющихся турбулентных структур (нелокальные связи) [59, 106]. Учет анизотропии следует проводить с соблюдением соответствующих правил [25, 43, 73, 150].

Специфика турбулентного реологического замыкания обусловлена тем, что структура турбулентного поля сама зависит от термодинамических потоков W_β . Эта зависимость означает, что выключение одной (или части) сил X_α (потоков W_β) может приводить к изменению не только перекрестных коэффициентов $L_{\alpha\beta}$, но и диагональных элементов этой онзагеровской матрицы. Подобная ситуация типична для самоорганизующихся (синэргических) систем [117]. В силу этого обстоятельства обычное требование положительной определенности каждого из слагаемых в сумме произведений $\Sigma = L_{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$ становится не обязательным — нужно лишь, чтобы величина Σ (т. е. суммарная диссипация D) была строго положительна. Отсюда наложение различных потоков в принципе может приводить к отрицательным значениям отдельных элементов матрицы $L_{\alpha\beta}$. Это, вероятно, объясняет эффект отрицательной вязкости [75]. Однако следует все же иметь в виду, что заключение об отрицательности вязкости в некоторых турбулентных потоках основано на сопоставлении профилей средних величин Ω_i и R_{ij}^s или U_i и R_{ij}^s , см. [75, 86], при их интерпретации в рамках классического подхода, без учета антисимметричной составляющей реинольдсовых напряжений.

Простейшая термодинамически оправданная гипотеза, как это было отмечено выше, состоит в зависимости реологических

коэффициентов от диссипации D . В частности, турбулентная сдвиговая вязкость ν должна зависеть от D . Если эффекты вращения ω_k , Ω_k несущественны, то в предположении об изотропии и несжимаемости имеем

$$\nu = \nu(D), \quad D = \nu \frac{1}{4} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (4.25)$$

и, разрешая оба равенства относительно турбулентной вязкости, получим соотношение [139]

$$\nu = 4l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right)}, \quad (4.26)$$

соответствующее анализу размерности, причем l — параметр, имеющий размерность длины.

В плоскопараллельном потоке ($U_1 = U_1(X_2)$, $U_2 = 0$) из формулы (4.26) непосредственно следует знаменитая формула Л. Прандтля [68, 69]:

$$\nu = l^2 \left| \partial U_1 / \partial X_2 \right|. \quad (4.27)$$

Иначе говоря, проводимый здесь термодинамический анализ объединяет многие известные варианты теории турбулентности.

Более того, уже простейшее определение (4.26) дает правильное обобщение формулы Прандтля на случай несколько более сложных потоков, чем плоскопараллельное течение. Рассмотрим плоскую задачу о свободной границе струи (рис. 1), когда компоненты скорости выражаются [42, 88] через функцию тока типа

$$\psi = U_0 X_1 F(\eta), \quad \eta = X_2 / X_1 \quad (4.28)$$

и удовлетворяют уравнениям Рейнольдса — баланса импульса (2.23) и несжимаемости (2.24), т. е. в данном случае уравнениям

$$U_1 \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial X_2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial R_{12}}{\partial X_2}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} = 0, \quad (4.29)$$

причем

$$U_1 = \partial \psi / \partial X_2, \quad U_2 = -\partial \psi / \partial X_1. \quad (4.30)$$

Здесь U_0 — скорость набегающего потока. Тогда

$$U_1 = U_0 F', \quad U_2 = U_0 (\eta F' - F), \quad F' = dF/d\eta,$$

$$\partial U_1 / \partial X_1 = -\partial U_2 / \partial X_2 = -X_1^{-1} U_0 \eta F'',$$

$$\partial U_1 / \partial X_2 = X_1^{-1} U_0 F'', \quad \partial U_2 / \partial X_1 = -X_1^{-1} U_0 \eta^2 F''.$$

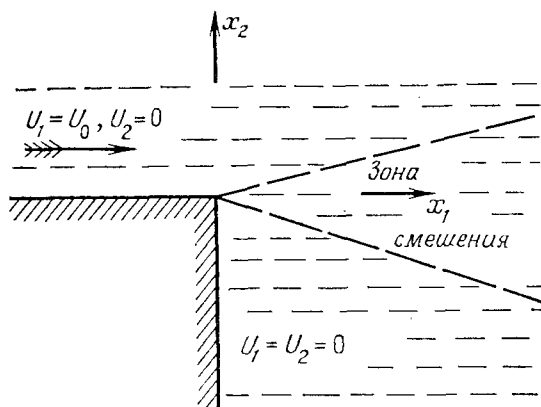


Рис. 1.

Подстановка этих выражений в уравнения (4.29), а также в формулу, следующую из (4.24), для напряжений Рейнольдса

$$R_{12} = 2l^2 \left\{ \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial X_2} \right)^2 \right\}^{1/2} \times \\ \times \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right), \quad (4.31)$$

приводит к уравнению [139]

$$F = \beta^2 \frac{d}{d\eta} \left(\sqrt{1 + 6\eta^2 + \eta^4} (1 - \eta^2) \frac{d^2 F}{d\eta^2} \right), \quad (4.32)$$

если только $l = \beta X_1$, $\beta = \text{const.}$ Известное решение Толмина [88], в котором использовалось вместо (4.31) выражение

$$R_{12} = l^2 |\partial U_1 / \partial X_2| (\partial U_1 / \partial X_2), \quad (4.33)$$

приводит к несколько более простому дифференциальному уравнению

$$F = \beta^2 d^3 F / d\eta^3, \quad (4.34)$$

которое аппроксимирует (4.32) при $|\eta| \ll 1$. Сопоставление [88] решения (4.34) с экспериментом достаточно удовлетворительное в диапазоне $-0.176 \leq \eta \leq 0.083$, где приближение (4.33) более сложной и правильной связи (4.31) оказывается допустимым.

5. ПЛОСКИЕ ТЕЧЕНИЯ. КИНЕТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ

Достаточно общим предположением о геометрии моля Прандтля, по-видимому, будет гипотеза, что он представлен эллиптической частицей. Тогда он будет характеризоваться векто-

ром n_m , направленным вдоль большой оси эллипсоида, и соответственно момент инерции собственно турбулентного вихря имеет вид

$$J_{ml} = J_{\perp} \delta_{ml} + (J_{\parallel} - J_{\perp}) n_m n_l. \quad (5.1)$$

Другие векторные величины, характеризующие макроточку турбулентного потока, это векторы трансляционной скорости U_i и угловых скоростей Ω_i, ω_i (влияние скорости деформации e_{ij} здесь не учитывается). Угловые скорости являются псевдовекторами и характеризуют «вихревую» анизотропию потока. Традиционный статистический анализ, позволяющий изучать корреляции поля пульсаций скоростей (т. е. фактически наиболее вероятную вихревую структуру, имеющую масштаб l турбулентного моля), привел к выводу, что антисимметричные эффекты на указанном «среднем» микроуровне l оказываются ненулевыми лишь при неоднородности хотя бы части статистических средних турбулентных переменных [11].

Наиболее простыми течениями, допускающими учет собственного вращения образований (молей), являются плоские потоки, в которых векторы собственной $\Omega_i + \omega_i$ и средней Ω_i угловых скоростей, а также вектор анизотропии моля n_i имеют одну отличную от нуля компоненту, причем ортогональную плоскости течения:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}(U_1, U_2, 0), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(0, 0, 1), \\ \boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}(0, 0, \omega), \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(0, 0, \Omega). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Это дает для момента инерции моля следующие упрощения:

$$\begin{aligned} J_{ml} &= J_{\perp} \delta_{ml}, \quad m, l = 1, 2; \quad J_{ml} = 0, \quad m \neq l, \\ J_{ml} &= J \delta_{ml}, \quad m = l = 3, \quad J = J_{\parallel}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Тогда уравнение (3.25) баланса момента количества движения молей также принимает простой вид

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\Omega + \omega) + \frac{\partial}{\partial X_j} J(\Omega + \omega) U_j = \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial X_j} + \varepsilon_{ilk} R_{lk}, \quad (5.4)$$

где $j=1, 2$ и отброшены эффекты внешнего объемного момента C_i^{ω} , а также моментные вязкие напряжения m_{ij} .

Будем считать турбулентный поток несжимаемым, т. е. $\langle \rho \rangle = \rho = \text{const}$. Уравнение неразрывности (2.24) соответственно принимает вид

$$\frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} = 0. \quad (5.5)$$

Уравнение (2.23) баланса импульса также упрощается:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \left(U_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + U_2 \frac{\partial}{\partial X_2} \right) U_i = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X_i} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial R_{i1}}{\partial X_1} + \frac{\partial R_{i2}}{\partial X_2} \right). \quad (5.6)$$

Уравнение (3.12) эволюции момента инерции запишем в виде

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J U_j}{\partial X_j} = \frac{\partial \Pi_j}{\partial X_j}, \quad \Pi_j = -\langle i^* \omega_j \rangle_j. \quad (5.7)$$

Здесь Π_j — диффузионный поток момента инерции, обусловленный корреляцией пульсационных скоростей и отклонений i^* момента инерции от среднего значения J . Замыкающие реологические связи (4.24) в рассматриваемом случае дают

$$\begin{aligned} R_{12} + R_{21} &= 2\rho\nu(\partial U_1/\partial X_2 + \partial U_2/\partial X_1), \\ R_{11} &= -R_{22} = -p + 2\rho\nu(\partial U_1/\partial X_1), \\ R_{12} - R_{21} &= 4\rho\gamma\omega. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Если для оценки переноса флуктуирующей величины в поле пульсаций скоростей применять «диффузионный» принцип [143], то из уравнения (3.26) получим соответственно

$$\mu_{3j} = \langle -M_{i^*}^* \omega_j \rangle_j = 2\zeta \frac{\partial M}{\partial X_j} = 2\rho\eta J \frac{\partial(\Omega + \omega)}{\partial X_j} + 2\rho\zeta(\Omega + \omega) \frac{\partial J}{\partial X_j}, \quad (5.9)$$

$$\Pi_j = 2\rho\zeta_* (\partial J/\partial X_j).$$

Этот результат оказывается несколько более общим, чем проведенный выше анализ (связи (4.24) и (5.9) совпадают лишь при $J = \text{const}$). В связи с этим проведем анализ кинетики турбулентного перемешивания импульса и момента количества движения, например, для компонент

$$R_{12} = -\rho \langle \omega_1 \omega_2 \rangle_2, \quad \mu_{31} = -\rho \langle (i\Phi)^* \omega_2 \rangle_2. \quad (5.10)$$

Оценку величин (5.10) будем проводить на основе некоторой идеализированной картины движения «среднего» моля в турбулентном потоке, подсчитывая его средние пульсации. Будем оценивать пульсации ω_1, ω_2 поступательной скорости по разнице средних скоростей $U = U_1$ в соседних слоях течения, отстоящих друг от друга на малом расстоянии l . Такая оценка [17] объясняется возможностью выделения среднего пути смещения l , при прохождении которого жидкий моль сохраняет [42, 49] свой импульс. Совершая переход между указанными слоями, мигрирующий моль порождает пульсации скорости, поскольку его скорость отлична от скорости частиц-аборигенов. Если $U_1 \gg U_2$, то оценки проводятся по компоненте U_1 , причем предполагается изотропия распределения абсолютных величин пульсаций $|\omega_1| \sim |\omega_2|$ поступательной скорости.

В рассматриваемом здесь случае также будем считать, что перенос импульса, обусловленный разностью средних поступательных скоростей $X_2 = \text{const}$, $X_2 + l = \text{const}$, отстоящих друг от друга на длину «свободного пробега», также приводит к рав-

ным оценкам величин пульсаций ω_1 и ω_2 . Так, через границу слоя $X_2 = \text{const}$ происходит обмен микроэлементами жидкости, причем указанная разность ΔU импульсов входящих и уходящих частиц будет составлять

$$\Delta U (\rho \omega_1) = \rho U_1 (X_2 + l) - \rho U_1 (X_2) = \rho l (\partial U_1 / \partial X_2), \quad (5.11)$$

$$|\Delta U \omega_2| \sim |\Delta U \omega_1| \sim l |\partial U_1 / \partial X_2|, \quad \rho = \text{const}. \quad (5.12)$$

«Среднее» микродвижение происходит одновременно в «среднем» поле внутренних угловых скоростей ω . Будем соответственно считать, что частица-мигрант, совершая пробег длины l , проходит через плоскую вихревую пелену интенсивности $l_\omega \omega$. Тогда частицы, пересекающие пелену навстречу друг другу, перенесут дополнительный импульс, пропорциональный интенсивности пелены [58]:

$$\Delta \omega (\rho \omega_1) = \rho l_\omega \omega - (-\rho l_\omega \omega) = 2\rho l_\omega \omega. \quad (5.13)$$

Существенно, что наличие вихревой пелены сказывается лишь на тангенциальных (по отношению к пелене) компонентах скорости, а ее нормальные компоненты не меняются. Поэтому

$$\rho \omega_1 = \rho l (\partial U_1 / \partial X_2) + 2\rho l_\omega \omega, \quad |\omega_2| = l |\partial U_1 / \partial X_2|. \quad (5.14)$$

Если теперь воспользоваться оценками (5.14) и, кроме того, учесть выбор [88] знака для ω_2 (напряжение должно иметь тот же знак, что и переносимая величина), то, согласно (5.10), получим

$$R_{12} = \rho l |\partial U_1 / \partial X_2| (l \partial U_1 / \partial X_2 + 2l_\omega \omega). \quad (5.15)$$

Сопоставление с формулами (5.8) приводит к оценкам турбулентной сдвиговой вязкости ν и вращательной вязкости γ :

$$\nu = l^2 |\partial U_1 / \partial X_2|, \quad \gamma = l_\omega |\partial U / \partial X_2|. \quad (5.16)$$

Если же оценивать компоненту R_{21} , то следует изучать движение частиц через слой $X_1 = \text{const}$, причем вихревая пелена окажется [58] ориентированной по-другому. Поэтому имеем

$$|\omega_1| = l |\partial U_1 / \partial X_2|, \quad \rho \omega_2 = \rho l (\partial U_1 / \partial X_2) - 2\rho l_\omega \omega, \quad (5.17)$$

$$R_{21} = \rho l |\partial U_1 / \partial X_2| (l \partial U_1 / \partial X_2 - 2l_\omega \omega).$$

Подсчитаем пульсацию переносимого момента количества движения:

$$\begin{aligned} \Phi^* &= l \frac{\partial (\Omega + \omega)}{\partial X_2}, \quad i^* = l_J \frac{\partial J}{\partial X_2}, \\ (i\Phi)^* &= J l \frac{\partial (\Omega + \omega)}{\partial X_2} + (\Omega + \omega) l_J \frac{\partial J}{\partial X_2}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Принимая аналогичные соображения о выборе знаков, что и выше, получим выражение для моментного напряжения:

$$\mu_{zi} = J l^2 \left| \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right| \frac{\partial (\Omega + \omega)}{\partial X_i} + \mu_I (\Omega + \omega) \left| \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right| \frac{\partial J}{\partial X_i}. \quad (5.19)$$

Отсюда имеем следующие выражения для градиентно-вихревой вязкости η и коэффициента перемешивания ζ момента инерции:

$$\eta = \frac{1}{2} J l^2 \left| \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right|, \quad \zeta = \frac{1}{2} \mu_I (\Omega + \omega) \left| \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right|. \quad (5.20)$$

Обратим теперь внимание, что удельный момент инерции J , равный отношению полярного момента инерции средней частицы к ее объему (в рассматриваемом случае — к ее площади) допускает оценку $J = (1/2) r^2$, где r — средний радиус моля. Если внутренняя структура турбулентного континуума характеризуется лишь одним линейным масштабом l , то $r \sim l$ [58], и уравнение (3.12) приобретает смысл уравнения эволюции прандтлевского пути смещения l . Видно, что эволюция линейного масштаба (5.7) сводится к уравнению диффузии (с конвективным членом)

$$\frac{\partial l^2}{\partial t} + U_i \frac{\partial l^2}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\zeta \frac{\partial l^2}{\partial X_i} \right) - Q, \quad Q = \langle -\Phi^* i^* \rangle \quad (5.21)$$

относительно квадрата пути смещения. Эта величина может быть оценена (см. также [43]) и как отношение энергии турбулентного хаоса E к диссипации D , т. е.

$$l^2 \sim E/D. \quad (5.22)$$

Тогда уравнение (5.21) может соответствовать некоторой энергетической трактовке, отличающейся, однако, от более ранних предложений. Диффузионный характер уравнения соответствует процессу простого убывания линейного масштаба вихря в процессе турбулентного перемешивания. Вместе с тем, как известно [37], диффузия вихря в вязкой жидкости, описываемая уравнением

$$\Phi = \frac{A}{4\pi\nu_0 t} \exp \left(-\frac{r^2}{4\nu_0 t} \right), \quad A = \text{const}, \quad (5.23)$$

приводит к убыванию его угловой скорости и к столь значительному росту эффективного радиуса вихря, что момент количества движения выражается расходящимся интегралом [74]. Если же поставить условие сохранения суммарного момента количества движения ($M = \rho \Lambda$) при вихревом движении в вязкой жидкости, то решение Дж. Тейлора [78], имеющее вид

$$\Phi = \frac{\Delta}{2\pi\nu_0 l^2} \left(1 - \frac{r^2}{4\nu_0 t} \right) \exp \left(-\frac{r^2}{4\nu_0 t} \right), \quad (5.24)$$

соответствует некоторому конечному росту радиуса вихря: $r = \sqrt{2\nu_0 t}$.

Таким образом, если турбулентное перемешивание должно улавливать эффект уменьшения линейного масштаба вихря (физически — за счет его дискретизации), то вязкое разведение описывает рост масштаба r , а вместе с тем и момента инерции вихря.

В литературе хорошо известна теория переноса вихря Дж. Тейлора [17, 146], предложенная [78] в качестве альтернативы теории переноса импульса Л. Прандтля [68] (т. е. использованию баланса импульса (5.6) и замыкающей связи (5.15) при $l_\omega = 0$), или, иначе, традиционной гипотезе о симметрии тензора рейнольдсовых напряжений ($R_{12} = R_{21}$). Уравнение Тейлора строилось ее автором на основе кинетического анализа процесса смешения в двумерном поле скоростей. В этом случае, однако, само уравнение диффузии вихря, следующее из уравнений Навье—Стокса, имеет дивергентный вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi u_j}{\partial x_j} = \nu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (5.25)$$

Его пространственное осреднение, т. е. по поперечному сечению вихревых трубок с учетом правила (2.20), приводит [2] (при пренебрежении молекулярной вязкостью) к уравнению

$$\frac{\partial (\Omega + \chi)}{\partial t} + U_j \frac{\partial (\Omega + \chi)}{\partial X_j} + \gamma \chi = \frac{\partial}{\partial X_j} \langle -\Phi^* \omega_j \rangle_j. \quad (5.26)$$

Здесь формально введен источник, пропорциональный следующей разности результатов осреднения:

$$\gamma \chi = \frac{\partial (\langle \Phi \rangle_j - \langle \Phi \rangle) U_j}{\partial X_j}.$$

Уравнение переноса вихря в турбулентном потоке следует из (5.26) при введении диффузионного размыва

$$\langle -\Phi^* \omega_j \rangle_j = \eta \frac{\partial (\Omega + \chi)}{\partial X_j}. \quad (5.27)$$

С другой стороны, уравнение баланса момента количества движения (5.4) и уравнение эволюции момента инерции (5.7) приводит к уравнению переноса вихря в форме (5.26), если положить $\eta = -\xi$, $\xi > 0$ и $\chi = \omega$. В этом случае оказывается необходимым полагать, что по мере диффузии вихря его момент инерции (и размеры) растет.

Существенным следствием проводимого анализа оказывается невозможность противопоставления теорий переноса Прандтля и Тейлора. Из-за появления дополнительной степени свободы ω_i оба уравнения оказываются необходимыми для решения тех или иных задач.

6. ТУРБУЛЕНТНЫЙ СЛЕД ЗА ТЕЛОМ

Турбулентные течения в следе за телом можно рассматривать, как это было сделано Линем [128], для уравнения относительно вихря Ω скорости U в плоском следе. При построении решения Линь сделал предположения, характерные для теории пограничного слоя. Помимо известного решения для течения

$$\Omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} U \sim \frac{\varphi}{x} \exp(-\varphi^2), \quad \varphi = \frac{y \sqrt{U_\infty}}{2 \sqrt{\nu x}},$$

где x — координата (макро) вдоль следа за телом, y — поперек следа, U_∞ — скорость внешнего потока, Линь указал также на существование решений типа

$$\Omega \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \{ \exp[-(\varphi - \varphi_0)^2] - \exp[-(\varphi + \varphi_0)^2] \},$$

где $\varphi_0 = d \sqrt{U_\infty/2 \sqrt{\nu x}}$, d — расстояние между точками схода вихрей. Решение (6.2) в точке $x=0$, где находится обтекаемое тело, соответствует заданию диполя (причем введение осциллирующих множителей в работе [128] моделировало дискретное строение вихревой дорожки Кармана). Все же решение (6.2) не смогло объяснить известные экспериментальные отклонения [105, 116] от автомодельного решения (6.1).

Согласно развиваемой здесь точке зрения, будем считать, что сходящие с тела вихри имеют собственную завихренность, отличную от вихря Ω на величину ω .

В линеаризованном приближении погранслоя уравнения баланса импульса (2.23) и момента количества движения (3.25) имеют вид

$$U_\infty \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} (y^n R), \quad R = -\nu \frac{\partial U}{\partial y} + 2\nu\omega, \quad (6.3)$$

$$U_\infty \frac{\partial}{\partial x} (\Omega + \omega) = 2\eta \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} [y^n (\Omega + \omega)] \right\} - \frac{4\nu\rho}{J} \omega. \quad (6.4)$$

Здесь U — дефект скорости, $\rho R = R_{xy} \neq R_{yx}$ — касательное напряжение. Коэффициенты турбулентных вязкостей $\rho\nu$, $\rho\eta$ и момент инерции J предполагаются постоянными. При $n=0$ уравнения соответствуют плоскому течению, а при $n=1$ — следу за телом вращения в цилиндрической системе координат.

Обтекаемое тело будем моделировать источником вихрей, а именно диполем для плоской задачи:

$$\Omega(x=0) = K \left[\delta\left(y + \frac{d}{2}\right) - \delta\left(y - \frac{d}{2}\right) \right], \quad K > 0, \quad (6.5)$$

$$\omega(x=0) = -G \left[\delta\left(y + \frac{d}{2}\right) - \delta\left(y - \frac{d}{2}\right) \right], \quad G > 0,$$

и кольцевым источником для осесимметричной:

$$\begin{aligned}\Omega(x=0) &= -K\delta\left(y - \frac{d}{2}\right), \\ \omega(x=0) &= G\delta\left(y - \frac{d}{2}\right).\end{aligned}\quad (6.6)$$

Идея об использовании кольцевых источников вихрей, как известно, принадлежит Н. Е. Жуковскому [26]. Здесь δ — дельта-функция Дирака.

Граничные условия вдали от тела имеют вид

$$U = \partial U / \partial y = 0, \quad \omega = \partial \omega / \partial y = 0, \quad |y| \rightarrow \infty. \quad (6.7)$$

Перепишем уравнения (6.3), (6.4) в следующем виде:

$$\begin{aligned}U_\infty \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \nu \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} (y^n \Omega) \right] &= -\gamma \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} (y^n \omega) \right], \\ U_\infty \frac{\partial \omega}{\partial x} - (2\eta + \gamma) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} (y^n \omega) \right] + \frac{4\gamma\rho}{f} \omega &= \\ &= (2\eta - \nu) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} (y^n \Omega) \right].\end{aligned}\quad (6.8)$$

Предположим, что разность касательных напряжений R_{xy} и R_{yx} намного меньше самих напряжений, т. е. $|\nu\Omega| \gg |\gamma\omega|$. Дополнительно потребуем $|(2\eta + \gamma)\omega| \gg |(2\eta - \nu)\Omega|$.

Рассмотрим сначала систему однородных уравнений

$$\begin{aligned}U_\infty \frac{\partial \Omega_0}{\partial x} - \nu \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} (y^n \Omega_0) \right] &= 0, \\ U_\infty \frac{\partial \omega_0}{\partial x} - (2\eta + \gamma) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} (y^n \omega_0) \right] + \frac{4\gamma\rho}{f} \omega_0 &= 0.\end{aligned}\quad (6.9)$$

При выполнении указанных неравенств решения однородных уравнений (6.9) дают главные члены Ω и ω . Учитывая это положение, будем искать приближенное решение системы (6.8), решая систему уравнений

$$\begin{aligned}U_\infty \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \nu \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} (y^n \Omega) \right] &= -\gamma \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} (y^n \omega_0) \right], \\ U_\infty \frac{\partial \omega}{\partial x} - (2\eta + \gamma) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} (y^n \omega) \right] + \frac{4\gamma\rho}{f} \omega &= \\ &= (2\eta - \nu) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} (y^n \Omega_0) \right],\end{aligned}\quad (6.10)$$

где Ω_0 , ω_0 — решения однородной системы (6.9). Решения (6.10) при граничных условиях (6.5) — (6.7) можно построить в инте-

гралах [128]. При условии что $4\sqrt{vx/U_\infty} \gg d$, они принимают вид

$$\begin{aligned} \Omega = & -y \left(K + \frac{\gamma}{2\eta + \gamma} G \right) \frac{d^{1+n} U_\infty^{1+n/2}}{2 \cdot 16^n \pi^{(1-n)/2} (vx)^{1+n/2}} \exp \left(-\frac{U_\infty y^2}{4vx} \right) + \\ & + y \frac{\gamma G d^{1+n} U_\infty^{1+n/2}}{8 \cdot 4^n \pi^{(1+n)/2}} \int_0^x \exp \left(-\frac{4\gamma t \rho}{JU_\infty} - \frac{U_\infty y^2}{4vx + 4\beta t} \right) \times \\ & \times (vx + \beta t)^{-\frac{5+n}{2}} \left(3 - n - \frac{U_\infty y^2}{(1+n)(2vx + 2\beta t)} \right) dt, \quad (6.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega = & y \left(G + \frac{2\eta - \nu}{\nu} K \right) \frac{d^{1+n} U_\infty^{1+n/2}}{2 \cdot 16^n \pi^{(1-n)/2} (2\eta + \gamma)^{1+n/2} x^{1+n/2}} \times \\ & \times \exp \left[-\frac{4\gamma \rho x}{JU_\infty} - \frac{y_2 U_\infty}{4(2\eta + \gamma)x} \right] + y \frac{K d^{1+n} U_\infty^{1+n/2} (2\eta - \nu)}{8 \cdot 4^n \pi^{(1-n)/2}} \times \\ & \times \int_0^x \exp \left[-\frac{4\gamma \rho}{JU_\infty} (x - t) - \frac{U_\infty y^2}{4(2\eta + \gamma)x - 4\beta t} \right] \times \\ & \times [(2\eta + \gamma)x - \beta t]^{-\frac{5+n}{2}} \left\{ 3 - n - \frac{U_\infty y^2}{2(n+1)[(2\eta + \gamma)x - \beta t]} \right\} dt. \quad (6.12) \end{aligned}$$

Здесь $\beta = 2\eta + \gamma - \nu$. Заметим, что при $\beta = 0$ формулы (6.11) и (6.12) значительно упрощаются. С другой стороны, при $\omega = 0$ уравнение (6.3) переходит в уравнение переноса импульса Прандтля, а (6.4) — в уравнение переноса завихренности Тейлора. Требование об их совпадении означает (ср. [78]) выполнение равенства $2\eta = \nu$. Кроме того, в согласии с предыдущими замечаниями положим $\beta = 0$. Тогда расчетные формулы принимают более простой вид:

$$\begin{aligned} \Omega = & -y \left(K + \frac{\gamma}{\nu} G \right) \frac{d^{1+n} U_\infty^{1+n/2}}{2 \cdot 16^n \pi^{(1-n)/2} (vx)^{1+n/2}} \exp \left(-\frac{U_\infty y^2}{4vx} \right) + \\ & + y \frac{\gamma G d^{1+n} U_\infty^{1+n/2} (vx)^{-\frac{5+n}{2}}}{8 \cdot 4^n \pi^{(1-n)/2}} \left(3 - n + \frac{U_\infty y^2}{(1+n)2vx} \right) - \\ & - \frac{JU_\infty}{4\gamma \rho} \left[1 - \exp \left(-\frac{4\gamma \rho}{JU_\infty} x \right) \right], \quad (6.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega = & y \left(G - \frac{\gamma}{v} K \right) \frac{d^{1+n} U_{\infty}^{1+n/2}}{2 \cdot 16^n \pi^{(1-n)/2} (vx)^{1+n/2}} \times \\ & \times \exp \left(-\frac{4\gamma_0}{JU_{\infty}} x - \frac{y^2 U_{\infty}}{4vx} \right) - y \frac{\gamma K d^{1+n} U_{\infty}^{1+n/2}}{8 \cdot 4^n \pi^{(1+n)/2} (vx)^{-\frac{5+n}{2}}} \times \\ & \times \left(3 - n - \frac{y^2 U_{\infty}}{2(1+n)vx} \right) + \frac{JU_{\infty}}{4\gamma_0} \left[1 - \exp \left(-\frac{4\gamma_0}{JU_{\infty}} x \right) \right]. \quad (6.14) \end{aligned}$$

Проинтегрировав (6.13) по y , найдем распределение средних скоростей

$$\begin{aligned} U = & \frac{d^{1+n} U_{\infty}^{(1+n)/2}}{16^n \pi^{(1-n)/2} (vx)^{(1+n)/2}} \exp \left(-\frac{U_{\infty} y^2}{4vx} \right) \left\{ \left(K + \frac{\gamma}{v} G \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2^{1-n}} \frac{\gamma}{v} G \frac{JU_{\infty}}{4vx} \left[1 - \exp \left(-\frac{4\gamma_0}{JU_{\infty}} \right) \right] \left[1 - \frac{y^2 U_{\infty}}{2(n+1)vx} \right] \right\}. \quad (6.15) \end{aligned}$$

Сопротивление тела определится формулой

$$W = 2\rho U_{\infty} \int_0^{\infty} U (\pi y)^n dy = \frac{2}{8^n} \rho \pi^n d^{1+n} \left(K + \frac{\gamma}{v} G \right) U_{\infty}^{1+n}. \quad (6.16)$$

Таким образом, избыточная угловая скорость ω вихрей приводит к эффективному увеличению сопротивления потоку. Заметим, что задание источника Q для поля U и диполя для ω как граничных условий [138] не позволяет выделить этот эффект.

Прежде чем перейти к сравнению с экспериментом, обратим внимание на то, что в следе за телом справедлив интеграл нелинеаризованных уравнений погранслоя, связанный с сопротивлением тела:

$$\frac{W}{2\rho U_{\infty}^2 \pi^n} = \int_0^{\infty} \frac{U_*}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{U_*}{U_{\infty}} \right) y^n dy = \Sigma, \quad (6.17)$$

где U_* — решение нелинеаризованных уравнений. Если же вычислять интеграл (6.17) по решению U линеаризованных уравнений, найденных выше, то результат будет несколько иным:

$$\int_0^{\infty} \frac{U}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{U}{U_{\infty}} \right) y^n dy = \Sigma_0. \quad (6.18)$$

Заметим, что при $U_*/U_{\infty} \ll 1$ оказывается, что $\Sigma = \Sigma_0$. Однако вблизи тела это не так. Поэтому введем функцию

$$U_c = U(x; y(\Sigma_0/\Sigma)^{1/(1+n)}). \quad (6.19)$$

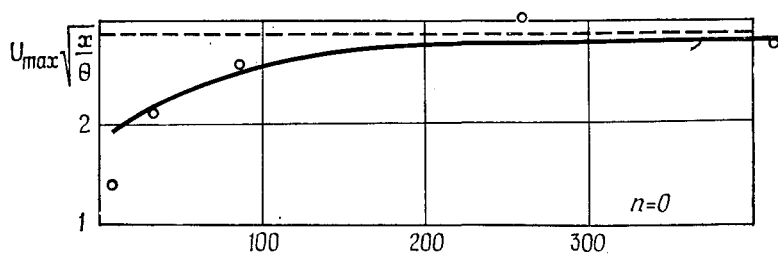


Рис. 2.

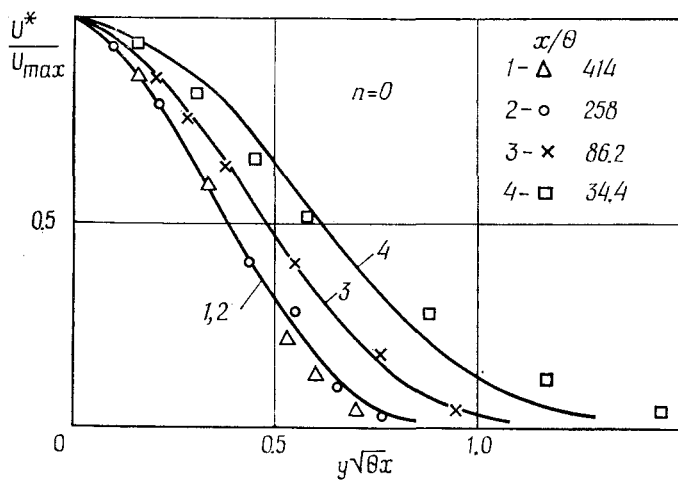


Рис. 3.

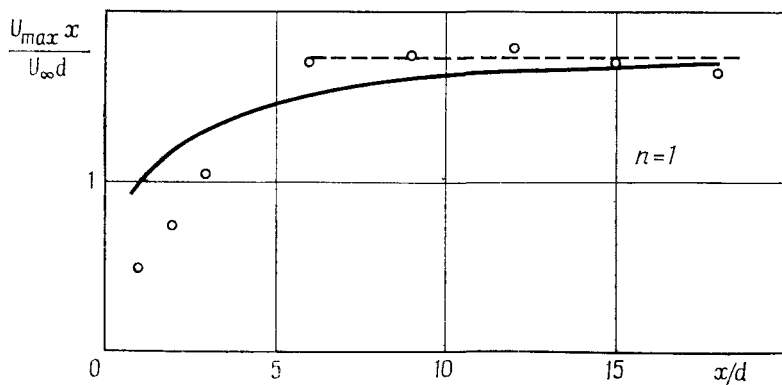


Рис. 4.

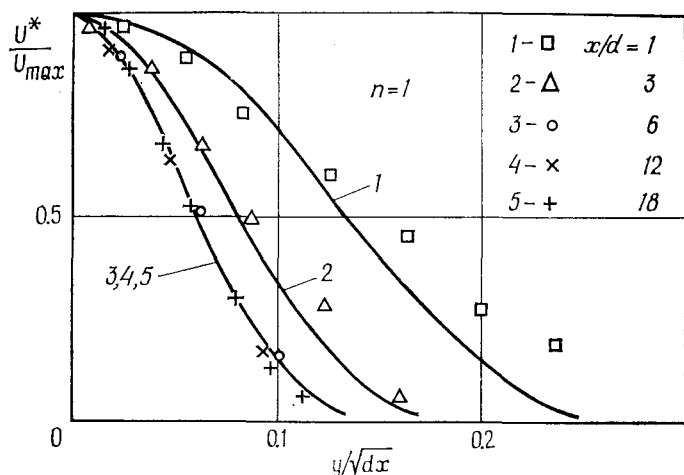


Рис. 5.

Легко проверить, что U_c удовлетворяет равенству (6.17), и это скорректированное решение $U_c(x, y)$ будем теперь сравнивать с экспериментальными данными [104, 105, 116].

Ниже приведены графики распределения скоростей (рис. 2—5). Значками отмечены экспериментальные данные, а сплошными линиями — скорректированное решение (6.19) при следующих значениях параметров, найденных по данным вдоль оси следа. Для плоского случая ($n = 0$) имеем

$$\frac{\nu}{\theta U_\infty} = 0.038, \quad \frac{G y d}{2 \nu U_\infty} = 0.38, \quad \frac{4 \gamma \rho d}{J U_\infty} = 0.027, \quad (6.20)$$

где θ — толщина потери импульса на задней кромке обтекаемой пластинки, d — толщина пластинки, причем

$$\theta = \left(K + \frac{\nu}{v} G \right) \left(\frac{d}{U_\infty} \right). \quad (6.21)$$

Для осесимметричного случая ($n = 1$) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\gamma G}{\nu} \left(K + \frac{\nu}{v} G \right)^{-1} &= 0.6; \quad \frac{d}{16 \nu} \left(K + \frac{\nu}{v} G \right) = 1.8; \\ \frac{U_\infty d}{4 \nu} &= 200; \quad \frac{4 \gamma \rho d}{J U_\infty} = 0.6, \end{aligned} \quad (6.22)$$

где d — диаметр миделевого сечения тела вращения с отношением полуосей 1 : 6.

На рис. 2 дан профиль максимума скорости в плоском следе, умноженной на $\sqrt{x}$. Гипотеза подобия [10, 17] приводит к прямой, обозначенной штрих-пунктиром. Из рис. 2 и 3 видно, что

в следе за пластинкой кривые выходят на автомодельные зависимости при $x/d = 100$. Из рис. 4 и 5 следует, что в следе за телом вращения, начиная с $x/d = 6$, максимальная скорость подчиняется гиперболическому закону, а поперечное распределение скоростей хорошо описывается кривой Гаусса.

7. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТУРБУЛЕНТНОСТИ ОКЕАНА

В настоящее время хорошо установлено, что в Мировом океане присутствуют квазидвумерные синоптические вихри, радиус которых составляет ~ 100 км [13, 45]. Благодаря высокой концентрации кинетической энергии в этих вихрях они могут существенно влиять на глобальную циркуляцию океана. Чтобы выявить этот эффект, необходимы крупномасштабные расчеты на ЭВМ, причем пространственная ячейка должна превосходить линейные масштабы синоптического вихря. Тогда можно применять описываемую здесь модель турбулизированной жидкости, причем синоптические вихри играют роль мезомасштабной структуры, обладающей своей избыточной угловой скоростью ω . Идея подобных расчетов принадлежит В. О. Ивченко [27, 121], и она была развита в серии работ, в том числе при участии автора данной статьи [7, 15, 16, 21, 22, 28, 33, 100].

Уравнения геофизической турбулентности, как известно, строятся для вращающейся β -плоскости. При этом уравнения импульса отличаются от (5.6) учетом сил Кориолиса, а именно

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} + f \varepsilon_{ijk} U_k = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X_i} + \frac{\partial R_{ij}}{\partial X_j}, \quad (7.1)$$

где $f = 2\Omega_3^0$ — параметр Кориолиса. Уравнения баланса (3.16) полного момента количества движения, используемые непосредственно в данном случае, имеют вид

$$J \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + \frac{\partial \omega_3 U_j}{\partial X_j} \right) + (2\kappa^2 \rho + J) \left(\frac{\partial \Omega_3}{\partial t} + \frac{\partial \Omega_3 U_j}{\partial X_j} + \Omega_3^0 \frac{\partial U_3}{\partial X_3} + \frac{\beta}{2} U_2 \right) = \frac{J}{2} \beta U_2 + \frac{\partial \mu_{3j}}{\partial X_j} - \varepsilon_{3lk} R_{lk}, \quad (7.2)$$

где $\beta = 2(\partial \Omega_3^0 / \partial X_2)$ — изменение параметра Кориолиса с широтой (так называемый β -эффект), Ω_3^0 — угловая скорость вращения Земли ($= 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$). Кроме того, для момента инерции I_{mk} жидкости в объеме ΔV при $\Delta X_1 = \Delta X_2 = L$, $\Delta X_3 = H$ используется представление

$$I_{ml} = \langle \rho \xi_m \xi_l \rangle = \langle \rho \rangle \kappa_L^2 \delta_{ml} \quad (m, l = 1, 2), \quad \kappa_L^2 = L^2/12, \\ I_{ml} = \langle \rho \rangle \kappa_H^2 \delta_{ml}, \quad \kappa_H^2 = H^2/12 = \kappa^2, \quad m = l = 3. \quad (7.3)$$

Применение уравнения для средней завихренности Ω_3 преобразует уравнение (7.2) к виду

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + \frac{\partial \omega_3 U_j}{\partial X_j} = -\frac{s}{2} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial R_{2j}}{\partial X_1} - \frac{\partial R_{1j}}{\partial X_2} \right) + \frac{\beta}{2} U_2 +$$

$$+ \frac{\eta^0}{f} \nabla^2 (\Omega_3 + \omega_3) - \frac{1}{f} \varepsilon_{3lk} R_{lk}, \quad (7.4)$$

где $s = 2\rho x^2/J + 1$. Вместо декартовой ниже будет использоваться сферическая система координат, причем обозначим проекции вектора скорости соответственно как λ , θ , z . Уравнения (7.1) и (7.2) осредним по вертикальной координате X_3 , что приведет к включению в них компонент векторов напряжений турбулентного трения τ_i^0 , τ_i^H на поверхности и на дне океана. Кроме того, вводится (уже для средних скоростей U_λ , U_θ) функция тока ψ по правилу

$$U_\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad U_\theta = -\frac{1}{H \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad (7.5)$$

где H — глубина океана. Тогда уравнение импульса (7.1) принимает вид

$$\frac{\partial \Delta_H \psi}{\partial t} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Delta_H \psi}{H \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\Delta_H \psi}{H \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] -$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{f}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{f}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tau_\lambda^H - \tau_\lambda^0}{\rho H} \right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\tau_\theta^H - \tau_\theta^0}{\rho H} \right) - \frac{2\gamma^0}{f} \Delta_H \omega, \quad (7.6)$$

где r — радиус Земли, θ — дополнение широты до 90° , λ — долгота, а ось z направлена вниз:

$$\omega = - \int_0^H \omega_3 dz, \quad \Delta_H \psi = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}. \quad (7.7)$$

Осреднение уравнения (7.4) по вертикали при условиях отсутствия потока ω_3 через свободную поверхность и обращения ω_3 в нуль на дне приводит к еще одному уравнению (знак осреднения по вертикали опущен):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial U_\theta \omega \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\lambda \omega}{\partial \lambda} \right] = \frac{\eta^0}{J r^2 \sin \theta} \times$$

$$\times \nabla^2 \left(\frac{\partial U_\lambda \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\eta^0}{f} + \gamma \right) \nabla^2 \omega + \frac{4\gamma^0}{f} \omega +$$

$$+ \frac{\beta}{2} U_\theta H + \frac{s}{2r \sin \theta} \left[\frac{\partial (\tau_\lambda^H - \tau_\lambda^0)}{\partial \theta} - \frac{\partial (\tau_\theta^H - \tau_\theta^0)}{\partial \lambda} \right]. \quad (7.8)$$

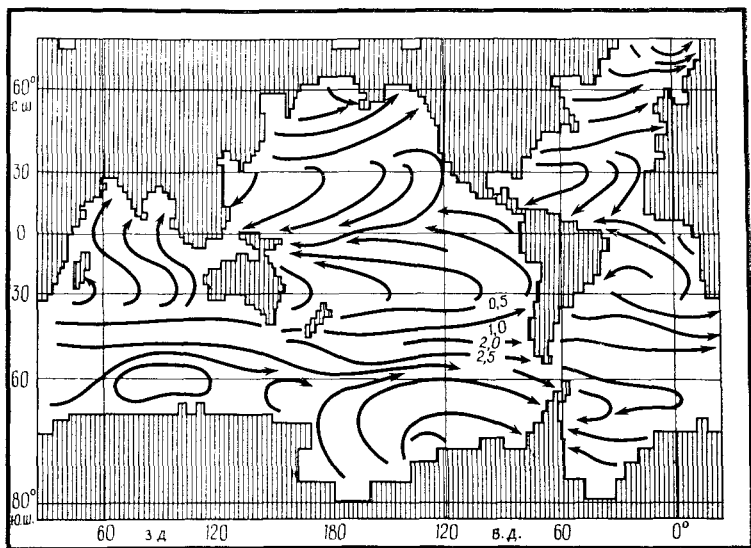


Рис. 6.

Мировой океан аппроксимируется двусвязной областью (рис. 6). Ее северная граница G_1 идет по береговой линии Австралии и Евразии (как целого), Африки и Америки, южная G_2 — по береговой линии Антарктиды ($\sim 70^\circ$ ю. ш.). Были заданы граничные условия

$$\psi = 0, \quad \omega = 0 \quad (\lambda, \theta \in G_1), \quad (7.9)$$

$$\psi = C, \quad \partial\omega/\partial n = 0 \quad (\lambda, \theta \in G_2), \quad (7.10)$$

причем константа C определялась из условия периодичности на контуре

$$\oint \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\tau_\lambda^H - \tau_\lambda^0}{\rho H} + \frac{2\gamma}{H} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right] d\lambda = 0. \quad (7.11)$$

Условие (7.9) означает отсутствие генерации синоптических вихрей на контуре G_1 , условие (7.10) — отсутствие их потока по нормали n к контуру G_2 .

Тангенциальные напряжения ветра τ_λ^0 , τ_θ^0 задавались в соответствии с данными [118] С. Хеллермана (рис. 6), характерными для зимнего сезона, после глубин $H(\lambda, \theta)$ — по данным [141]. Что касается правил расчета сопротивления дна океана τ_λ^H , τ_θ^H , то оно определялось по методике работ [32, 38] в функции от числа Россби $Ro = Q/fz_0$, где Q — скорость потока на

верхней границе придонного погранслоя, z_0 — шероховатость дна ($\sim 10^{-2}$ м).

Численное интегрирование уравнений (7.6), (7.7) проводилось А. И. Даниловым по неявным схемам первого порядка точности по времени и горизонтальным координатам. Второй и третий члены в левой части уравнения для ψ аппроксимировались на верхнем $(k+1)$ -м временном слое так же, как и в работе [32]. Последний член правой части (7.7) брался на верхнем временном слое. Адвективные члены для ω аппроксимировались дивергентной формой

$$\frac{1}{r \sin \theta} [(Y^+(U_\lambda)\omega)_{-\lambda} + (Y^-(U_\lambda)\omega)_{+\lambda} + (Y^+(U_\theta \sin \theta)\omega)_{-\theta} + (Y^-(U_\theta \sin \theta)\omega)_{+\theta}]. \quad (7.12)$$

Здесь нижний индекс $(+\lambda, -\lambda, +\theta, -\theta)$ означает направление разности: $+\lambda$ вперед, $-\lambda$ назад,

$$Y^+(a) = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a \leq 0, \end{cases} \quad Y^-(a) = \begin{cases} 0, & a > 0, \\ a, & a \leq 0. \end{cases} \quad (7.13)$$

Члены в (7.7), содержащие ψ , брались на временном слое $k+1$.

В начальный момент времени океан считался покоящимся. На каждом временном шаге осуществлялась подгонка полей ψ и ω , т. е. по $(p+1)$ -му приближению ψ^{k+1} определялось ω_{p+1}^{k+1} , а по ω_{p+1}^{k+1} рассчитывалось следующее приближение для ψ^{k+1} . Этот процесс прекращался, когда максимальная относительная разность полей ψ_p^{k+1} и ψ_{p+1}^{k+1} не превышала 1 %. Шаг по времени составлял 5 суток, по пространству 5° . Циркуляция считалась установившейся при максимальной относительной разности ψ^{k+1} и ψ^k меньше 1 %.

На рис. 7 приводится распределение функции тока ($\text{м}^2\text{с}^{-1}$) в Мировом океане, рассчитанное при $\omega=0$. Оно достаточно хорошо совпадает с результатами работ [32, 38], в которых была решена аналогичная задача. Некоторые расхождения обусловлены различиями в задаваемых полях τ_λ^0 , τ_θ^0 . На рис. 8 представлена установившаяся средняя циркуляция изоплотного океана ($\rho=\text{const}$) при учете синоптических вихрей ($\omega=0$). При этом были взяты значения $\kappa=10^6 \text{ м}^2$, $J/\rho=4 \cdot 10^{10} \text{ м}^2$, $\eta=10^{18} \text{ м}^4/\text{с}$, $\gamma=5 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}$.

Сопоставление рис. 7 и 8 позволяет увидеть изменения, вносимые синоптическими вихрями. Любопытно, что глобальных изменений циркуляции не происходит. Качественные отличия сводятся к выделению эпицентров некоторых круговоротов (отмечены стрелками), и среди них — круговорот, который можно отнести к Бермудскому треугольнику. Известно, что наблюде-

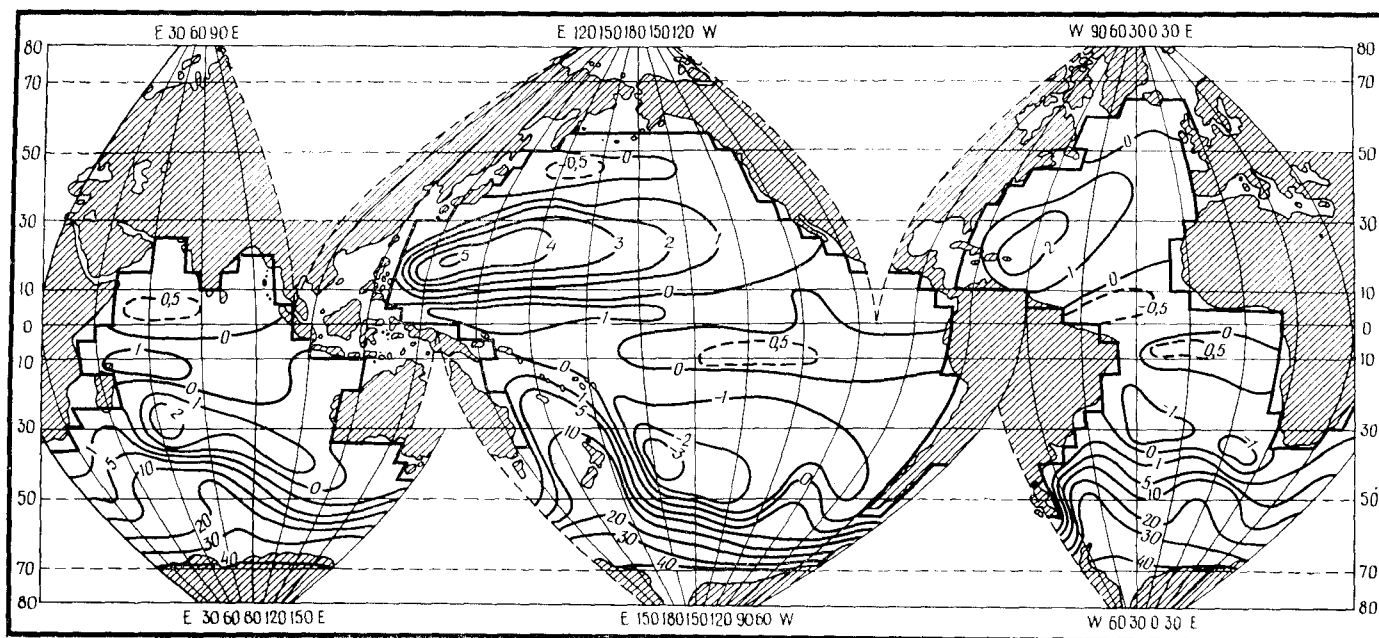


Рис. 7.

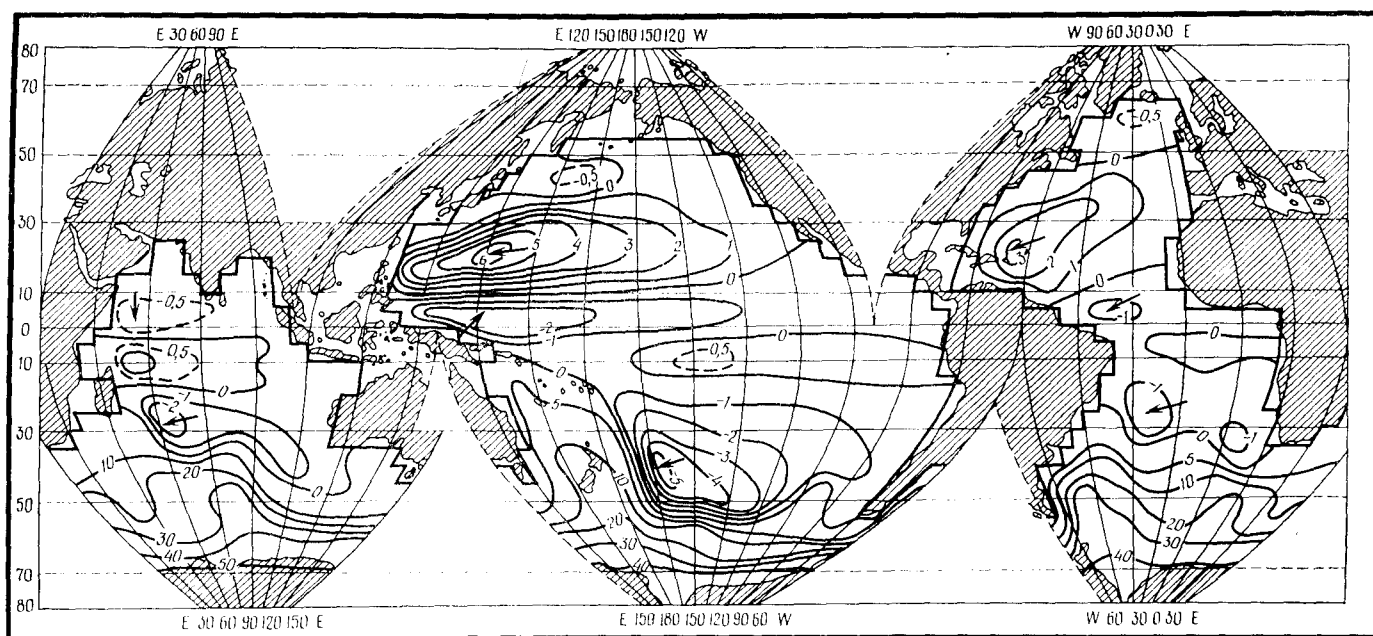


Рис. 8.

ниями из космоса было отмечено снижение уровня океана именно в этом регионе.

Из количественных изменений обращает на себя внимание тенденция к увеличению расходов антициклонических круговоротов Северной Атлантики и северной части Тихого океана. Так, расход Гольфстрима возрос от $18.5 \cdot 10^6 \text{ м}^3/\text{с}$ до $22.1 \cdot 10^6 \text{ м}^3/\text{с}$ (реальный $\sim 80 \cdot 10^6 \text{ м}^3/\text{с}$), а Курисио — от 35 до 40.1 млн. $\text{м}^3/\text{с}$ (реальный ~ 50), тогда как расход антарктического Циркумполярного течения (АЦТ) — $260 \cdot 10^6 \text{ м}^3/\text{с}$ — не изменился. В экваториальной зоне интегральный перенос в циркуляционных ячейках северного полушария несколько возрос, южного — ослаб. Наименьшие изменения произошли в системах течений южного полушария. Всюду произошло перераспределение импульса потоков, главным образом за счет усиления их струйного характера.

В ходе расчетов варьировался выбор турбулентных параметров, а граничное условие на контуре G_2 для ω бралось так же, как и на G_1 , что приводило к сильным изменениям системы течений вблизи Антарктиды. Более подробное сравнительное обсуждение вариантов расчета, в том числе и для схемы двухслойного (по плотности) океана даны в работах [7, 100]. В последнем случае расчетный расход Гольфстрима возрос еще на 30 %, что позволяет надеяться на дальнейший успех учета эффекта синоптических вихрей.

8. АСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Будем исходить из предположения, что на микроуровне движение магнитной жидкости описывается системой уравнений магнитной гидродинамики [14]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} j_l H_k, \quad (8.2)$$

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} = \frac{4\pi}{c} j_i, \quad (8.3)$$

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial x_j} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_i}{\partial t}, \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_i} = 0, \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial x_i} = 4\pi \rho_e, \quad (8.6)$$

законом Ома

$$j_i = \sigma \left(\mathcal{E}_i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} u_j H_k \right) \quad (8.7)$$

и обобщенным законом Ньютона для вязкой жидкости (2.5). Здесь j_i , H_i , $\mathcal{E}_i$ — компоненты электрического тока, магнитного поля и электрического поля соответственно, ρ_e — плотность электрических зарядов, σ — коэффициент проводимости.

Исключая из уравнений (8.3), (8.4), (8.7) электрическое поле и ток, получим уравнение индукции [14]

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon_{krp} u_p H_n) - \nu_m \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{krp} \frac{\partial H_n}{\partial x_p} \right), \quad (8.8)$$

где $\nu_m = 4\pi\sigma/c^2$ — коэффициент магнитной вязкости.

Выполнив процедуру пространственного осреднения, получим [99]:

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle_i}{\partial X_i} = 0, \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle_j}{\partial X_j} = \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_j}{\partial X_j} + \langle F_i \rangle, \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial \langle H_i \rangle_i}{\partial X_i} = 0, \quad (8.11)$$

$$\frac{\partial \langle H_i \rangle}{\partial t} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \varepsilon_{krp} u_p H_n \rangle_j - \nu_m \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial X_j} \left\langle \varepsilon_{krp} \frac{\partial H_n}{\partial x_p} \right\rangle_j, \quad (8.12)$$

где

$$F_k = \frac{1}{c} \varepsilon_{ilk} j_l H_k = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(H_i H_j - \frac{1}{2} H_i H_j \delta_{ij} \right). \quad (8.13)$$

Поля в любой точке турбулентного потока запишем в виде

$$H_i = B_i + \frac{\partial B_i}{\partial X_j} \xi_j + b_i + \frac{\partial b_i}{\partial \xi_j} \zeta_j,$$

$$\mathcal{E}_i = E_i + \frac{\partial E_i}{\partial X_j} \xi_j + E_i^* + \frac{\partial E_i^*}{\partial \xi_j} \zeta_j,$$

$$j_i = \langle j_i \rangle_i + \frac{\partial \langle j_i \rangle_i}{\partial X_j} \xi_j + j_i^* + \frac{\partial j_i^*}{\partial \xi_j} \zeta_j \quad (8.14)$$

по аналогии с представлением (2.16). Здесь $B_i = \langle H_i \rangle$, $E_i = \langle \mathcal{E}_i \rangle$, а b_i , E_i^* , j_i^* — пульсации скорости, магнитного поля, электрического поля и тока соответственно.

Систему уравнений (8.10)–(8.13) с учетом (8.14) и упрощающего¹ предположения, что $\langle u_i \rangle_j = \langle u_i \rangle$, можно записать в виде [99]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i}{\partial X_i} = 0, \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i U_j}{\partial X_j} = & - \frac{\partial p}{\partial X_i} + \frac{\partial R_{ij}^m}{\partial X_j} + \\ & + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} B_k B_k \delta_{ij} \right) + F_i^m, \end{aligned} \quad (8.16)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial X_i} = 0, \quad (8.17)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial X_j} (\varepsilon_{kpn} U_p B_n) + v_m \frac{\partial^2 B_i}{\partial X_j \partial X_j} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial X_j} \varepsilon_{kpn} N_{pn}. \quad (8.18)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} F_i^m = \frac{1}{c} \left\langle m_k \left(\frac{\partial B_k}{\partial X_i} + \frac{\partial b_k}{\partial \xi_i} \right) \right\rangle, \quad m_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kjm} \left(\frac{\partial \langle j \rangle_n}{\partial X_p} + \frac{\partial j_n^*}{\partial \xi_p} \right) i_{jp}, \\ N_{pm} = \langle (H_m - B_m) \omega_p \rangle_j. \end{aligned}$$

В связи с тем что модифицированный тензор напряжений Рейнольдса

$$R_{ij}^m = R_{ij} - \frac{1}{4\pi} \langle b_i b_j - b_k b_k \delta_{ij} \rangle_j,$$

вообще говоря, несимметричен, необходимо ввести уравнение момента импульса. Баланс для собственного момента импульса турбулентных вихрей

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon_{ijk} \xi_j \rho u_k \rangle + \frac{\partial}{\partial X_p} \langle \varepsilon_{ijk} \xi_j \rho u_k u_p \rangle_p = & \frac{\partial}{\partial X_p} \langle \varepsilon_{ijp} \xi_j \sigma_{kp} \rangle_p + \\ & + \langle \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} \rangle_j + \langle \varepsilon_{ijk} \rho u_i u_k \rangle_k + \langle \varepsilon_{ijk} \xi_j F_k \rangle \end{aligned} \quad (8.19)$$

в рассматриваемом случае включает [99] в себя объемный момент C_i , который связан с действием магнитного поля:

$$\begin{aligned} C_i = \langle \varepsilon_{ijk} \xi_j F_k \rangle = \frac{1}{c} \langle \varepsilon_{ijk} m_j (B_k + b_k) \rangle + \\ + \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jpm} G_k \frac{\partial B_n}{\partial X_p} + \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \langle b_j b_k \rangle_k, \\ G_i = \langle \varepsilon_{ijk} \xi_j H_k \rangle = \left\langle \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial B_k}{\partial X_n} + \frac{\partial b_k}{\partial \xi_n} \right) i_{jn} \right\rangle. \end{aligned}$$

¹ Это приводит, в частности, к твердотельному представлению моля, что снижает электромагнитные эффекты по сравнению с истинным дифференциальным вращением внутри вихря.

Принимая во внимание введенные обозначения, уравнения (8.19) можно записать так:

$$\frac{\partial \rho M_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho M_i U_j}{\partial X_j} = \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial X_j} + \varepsilon_{ijk} R_{ik}^m + C_i. \quad (8.20)$$

Между вектором магнитного момента G_i и вектором $\langle m_i \rangle$, характеризующим осредненный момент токов, протекающих через вихрь, имеется связь

$$\langle m_i \rangle = \frac{c}{8\pi} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial G_k}{\partial X_j}. \quad (8.21)$$

Для того чтобы найти закон изменения вектора G_i , составим [99] уравнение момента магнитного поля

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon_{ijk} \xi_l H_k \rangle &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \varepsilon_{pln} \xi_l \varepsilon_{knm} u_n H_m \rangle_j - 2 \langle \varepsilon_{ijk} u_k H_j \rangle_j + \\ &+ v_m \frac{\partial}{\partial X_j} \left\langle \varepsilon_{ilk} \xi_l \frac{\partial H_k}{\partial x_j} \right\rangle_j - v_m \left\langle \varepsilon_{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial X_j} \right\rangle_j. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ilp} \xi_l \varepsilon_{pj k} \varepsilon_{kmn} u_m H_n \rangle_j &= M_i B_j - G_i U_j + p_{ij} - k_{ij} \\ \frac{\partial}{\partial X_j} \left\langle \varepsilon_{ilk} \xi_l \frac{\partial H_k}{\partial x_j} \right\rangle_j &= \frac{\partial^2 G_k}{\partial X_j \partial X_j} - \varepsilon_{ilk} \frac{\partial B_k}{\partial X_j}, \end{aligned}$$

где

$$p_{ij} - k_{ij} = \varepsilon_{iln} \left\langle \left(\frac{\partial U_n}{\partial X_p} + \frac{\partial \omega_n}{\partial \xi_p} \right) i_{lp} b_j - \left(\frac{\partial B_n}{\partial X_p} + \frac{\partial b_n}{\partial \xi_p} \right) i_{lp} \omega_j \right\rangle_j,$$

уравнение (8.22) можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial X_j} (M_i B_j - G_i U_j + p_{ij} - k_{ij}) + v_m \frac{\partial^2 G_i}{\partial X_j \partial X_j} - \\ &- 2 \varepsilon_{ijk} (U_j B_k + N_{jk}) - 2 v_m \varepsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial X_j}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Для замыкания системы уравнений (8.15)–(8.18), (8.20), (8.23) примем следующие гипотезы. Во-первых, предположим, что пульсационными напряжениями Максвелла $\langle b_i b_j \rangle_j$ можно пренебречь по сравнению с силой F_i^m , характеризующей воздействие магнитного поля на магнитный момент вихря. Поэтому, как и ранее, примем

$$R_{ij}^m = R_{ij} = 2\nu\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) + 2\gamma\rho \varepsilon_{ijk} \omega_k, \quad (8.24)$$

$$\mu_{ij} = 2\eta\rho \frac{\partial (\Omega_i + \omega_i)}{\partial X_j}, \quad (8.25)$$

как и в обычной турбулентной жидкости. Во-вторых, предположим, что вращательный момент, возникающий при взаимо-

действии магнитного момента турбулентного вихря с магнитным полем, сводится к выражению

$$C_i = \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \langle m_k \rangle B_j + \frac{1}{4\pi} \varepsilon_{ijk} G_k \varepsilon_{jpm} \frac{\partial B_m}{\partial X_p}. \quad (8.26)$$

Для определения N_{ij} введем гипотезу (ср. [90])

$$\varepsilon_{kij} N_{ij} = \alpha B_k + \beta G_k. \quad (8.27)$$

Если пренебречь членами p_{ij} и k_{ij} по сравнению с $M_i B_j$ и $G_i U_j$, то получим замкнутую систему уравнений.

При безындукционном приближении полученная система уравнений МГД-турбулентности для несжимаемой жидкости при стационарном магнитном поле принимает вид

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0, \quad (8.28)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial X_i} + \frac{\partial R_{ij}}{\partial X_j} + \\ & + \frac{\sigma}{c} \varepsilon_{ijk} B_k \left(E_j + \frac{1}{c} \varepsilon_{jmn} U_m B_n \right), \end{aligned} \quad (8.29)$$

$$\rho \left(\frac{\partial M_i}{\partial t} + \frac{\partial M_i U_j}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial X_j} + \varepsilon_{ijk} R_{jk} + \varepsilon_{ijk} M_j B_k, \quad (8.30)$$

$$E_i = - \frac{\partial \varphi}{\partial X_i}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_i \partial X_i} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial X_i} (\varepsilon_{ijk} U_j B_k). \quad (8.31) - (8.32)$$

В это случае воздействие магнитного поля на поток проводящей жидкости происходит благодаря силе

$$F_i = \frac{\sigma}{c} \varepsilon_{ijk} B_k \left(E_j + \frac{1}{c} \varepsilon_{jmn} U_m B_n \right),$$

которая изменяет распределение поля скоростей и момента $C_i = \varepsilon_{ijk} m_j B_k$, стремящегося совместить ось вращения турбулентного вихря с направлением магнитного поля. Поэтому между турбулентным потоком проводящей жидкости и течением ферромагнитной жидкости во внешнем магнитном поле имеется определенная аналогия, которая была отмечена в работе [97] для объяснения эффекта перестройки трехмерной турбулентности в двумерную. Эта идея соответствует отмеченному [99] варианту теории, где для магнитного момента турбулентного вихря вводилась связь $m_i = (\sigma/2c) \varepsilon_{ijk} M_j B_k$. Качественные расчеты затухания трехмерной турбулентности приведены в [50—53] в рамках модели, которая аналогична (8.28) — (8.32).

Отметим, что в первых изданиях своего известного курса по электричеству [76] И. Е. Тамм подчеркивал, что максвелловский тензор напряжений в макромасштабе может быть несим-

метричен, хотя тензор микронапряжений симметричен. В качестве примера он приводил эффект поляризации упругих диэлектриков. Этот вопрос обсуждался К. Трусделлом [149], С. Калисским (см. [145]), Г. Можемом и А. К. Эрингеном [133, 134] и другими в связи с развитием механики Коссера, а также в ряде монографий по электродинамике (см. [23]).

9. АСИММЕТРИЧНАЯ ДИНАМИКА СУСПЕНЗИЙ

Пространственное осреднение допускает простое обобщение на случай, когда в жидкости взвешены инородные, например твердые, частицы, т. е. когда элементарный макрообъем ΔV содержит две фазы ($\alpha=1, 2$). Система в целом оказывается гетерогенной [137], и феноменологически ее поведение описывается моделью двух взаимопроникающих континуумов [65, 70, 148]. Адекватные динамические уравнения получаются путем осреднения по эйлерову объему ΔV . Они имеют вид

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle_i^\alpha}{\partial X_j} = \kappa^{(\alpha)}, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial \langle \rho u_i \rangle^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle_j^\alpha}{\partial X_j} = \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_j^\alpha}{\partial X_j} + R_i^{(\alpha)}, \quad (9.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \rho \left(\epsilon + \frac{1}{2} u_i u_i \right) \right\rangle^\alpha + \frac{\partial}{\partial X_j} \left\langle \rho \left(\epsilon + \frac{1}{2} u_i u_i \right) u_j \right\rangle_j^\alpha = \\ & = \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \sigma_{ij} u_j \rangle_j^\alpha + \frac{\partial P^{(\alpha)}}{\partial t} + Q^{(\alpha)} + \frac{\partial \langle q_i \rangle_i^\alpha}{\partial X_j} + H^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Здесь $\kappa^{(\alpha)}$ — поток массы в фазу α , $R_i^{(\alpha)}$ — объемная сила воздействия на фазу α со стороны сосуществующих фаз ($\Sigma_\alpha R_i^{(\alpha)} = 0$), $\partial P^{(\alpha)} / \partial t$ — работа над фазой α со стороны других фаз ($\Sigma_\alpha \partial P^{(\alpha)} / \partial t = 0$), $Q^{(\alpha)}$ — внутренний источник тепла, $H^{(\alpha)}$ — приток тепла из других фаз ($\Sigma_\alpha H^{(\alpha)} = 0$).

Существенно, что здесь уже фигурируют интегралы по части $\Delta V^{(\alpha)}$ элементарного объема $\Delta V = \Sigma_\alpha \Delta V^{(\alpha)}$, занятой фазой α , и соответственно по частям $\Delta S_j^{(\alpha)}$ граней ΔS_j , например

$$\langle \rho u_i \rangle^\alpha = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \rho u_i G^{(\alpha)} dV = m_\alpha \rho_\alpha U_i^{(\alpha)}, \quad (9.4)$$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_j^\alpha = \frac{1}{\Delta S_j} \int_{\Delta S_j} \sigma_{ij} G^{(\alpha)} dS_j = n^{(\alpha)} \sigma_{ij}^{(\alpha)},$$

и по внутренней межфазовой границе $S_*^{(\alpha)}$:

$$R_i^{(\alpha)} = \frac{1}{\Delta V} \int_{S_*^{(\alpha)}} \sigma_{ij} dS_j, \quad \frac{\partial P^{(\alpha)}}{\partial t} = \frac{1}{\Delta V} \int_{S_*^{(\alpha)}} \sigma_{ij} u_i dS_j. \quad (9.5)$$

Для простоты в выражении для межфазовой работы принято, что скорость перемещения границы $S_*^{(\alpha)}$ совпадает со скоростью частиц (нет фазовых переходов: $\kappa^{(\alpha)} = 0$). Дискриминантная функция $G^{(\alpha)}(x_i, t) = 1$, если в микроточке находится частица фазы α , и $G^{(\alpha)}(x_i, t) = 0$, если это частица другой фазы. В макроточке X_i, t находятся одновременно все фазы, причем их наличие характеризуется поверхностной $n^{(\alpha)}$ и объемной m_α пористостью:

$$n_j^{(\alpha)} = \frac{1}{\Delta S_j} \int_{\Delta S_j} G^{(\alpha)} dS_j = \frac{\Delta S_j^{(\alpha)}}{\Delta S_j},$$

$$m_\alpha = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} G^{(\alpha)} dS_j = \frac{1}{\Delta X_j} \int_{-\Delta X_j/2}^{\Delta X_j/2} n_j^{(\alpha)} dx_j = \frac{\Delta V_\alpha}{\Delta V}. \quad (9.6)$$

Достоверность равенства $n^{(\alpha)} = n_j^{(\alpha)} = m_\alpha$ обсуждается во многих публикациях [64, 65, 101, 61], но это условие практически всегда используется, хотя и существуют способы независимых измерений обоих величин. В общем случае осреднения физической величины φ (которая либо случайна, либо соответствует некоторому детерминированному распределению) по объему и по поверхности из интеграла типа (9.6) следует

$$\langle \varphi \rangle = \langle \varphi \rangle_I + \frac{\partial \langle \varphi \rangle_I}{\partial X_j} \frac{1}{\Delta V} \int_{-\Delta X_j/2}^{\Delta X_j/2} (x - X) dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle \varphi \rangle_I}{\partial X_j^2} \frac{1}{\Delta V} \int_{-\Delta X_j/2}^{\Delta X_j/2} (x - X)^2 dx + \dots, \quad (9.7)$$

если среднеповерхностное значение φ регулярно:

$$\langle \varphi \rangle_I = \langle \varphi \rangle_I(X_I) + \frac{\partial \langle \varphi \rangle_I}{\partial X_j} (x_i - X_I) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \langle \varphi \rangle_I}{\partial X_j^2} (x_i - X_I)^2 + \dots \quad (9.8)$$

Результат интегрирования (9.7)

$$\langle \varphi \rangle = \langle \varphi \rangle_I + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \langle \varphi \rangle_I}{\partial X_j^2} (\Delta X_j)^2 + \dots \quad (9.9)$$

показывает, что разница среднеобъемных и среднеповерхностных величин, отнесенных к центру масс объема ΔV , имеет порядок квадрата масштаба длины. Предельный переход $\Delta X_j \rightarrow 0$ невозможен, поскольку при этом стремится к нулю и площадь ΔS_j , а потому $\langle \varphi \rangle_j \rightarrow \varphi$, т. е. нарушается условие регулярности (9.8). Нижнюю допустимую границу для ΔX_j определяет условие $\Delta X_j \gg l$, где l — масштаб взвешенной частицы (вихря). Тем

не менее во многих случаях континуальный подход вполне допустим, поскольку одновременный предельный переход от конечных разностей $\Delta \langle \Phi \rangle$, ... к дифференциалам $d \langle \Phi \rangle$, ... оправдан за счет увеличения L — внешнего масштаба задачи.

Если роль величины Φ играют микронапряжения σ_{ij} , то из условия (9.9) следует, что среднеобъемные $\langle \sigma_{ij} \rangle$ напряжения и макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle_j$, конструируемые в соответствии с определением Коши, различаются всего лишь на величину порядка $O(\Delta X)^2$, и, казалось бы, при предельных переходах при $\Delta X \rightarrow 0$ разница между этими средними становится пренебрежимо малой. На этой основе асимметричная гидромеханика суспензий, и в частности работа Г. Бреннера [12], была подвергнута [54] острой, но несправедливой критике (по этому поводу см. [9, 62, 63, 140]).

В самом деле, макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle_j$ могут оказаться несимметричными и при симметрии микротензора σ_{ij} , когда и $\langle \sigma_{ij} \rangle$ симметричен. Умножение при этом равенства (9.9) на альтернирующий тензор ϵ_{kij} приводит к результату

$$\epsilon_{kij} \langle \sigma_{ij} \rangle_j \approx O(\Delta X)^2, \quad (9.10)$$

который согласуется с формулой (2.21). Согласно выражению (9.10), антисимметричная часть макронапряжений имеет порядок, по крайней мере, l^2 [140], т. е. сравнима с удельным моментом инерции J взвешенной частицы (вихря). Так, в суспензии взвешенных частиц M_i пропорционален nl^2 , где n — число частиц в объеме ΔV [3]. Хотя масштаб l и мал, значение M_i отнюдь не пренебрежимо по сравнению с другими членами, поскольку угловая скорость может быть велика (по поводу подобных ситуаций см. классический курс по механике сплошных сред Л. И. Седова [73]).

Соответственно уравнения для внутренних моментов фаз, получаемые путем пространственного осреднения для суспензий вращающихся частиц, имеют вид [3, 61]

$$\begin{aligned} C_i^{(1)} + Z_i + \epsilon_{ijk} \langle \sigma_{ij} \rangle_j^{(1)} &= 0, \\ C_i^{(2)} - Z_i + \frac{\partial \mu_j^{(2)}}{\partial X_j} &= J^{(2)} \left(\frac{\partial \langle \Phi_i \rangle^{(2)}}{\partial t} + U_j^{(2)} \frac{\partial \langle \Phi_i \rangle^{(2)}}{\partial X_j} \right), \end{aligned} \quad (9.11)$$

где $C_i^{(\alpha)}$ — внешние объемно-распределенные моменты (например, из-за магнитного поля), $\langle \Phi_i \rangle^{(2)} = (\Omega_i^{(2)} + \omega_i^{(2)})$, Z_i — межфазовое моментное взаимодействие, оцениваемое из задачи о вращении сферы радиуса l с угловой скоростью ω_i относительно вращающейся жидкости ($\alpha = 1$) вязкости ν (N — число частиц в единице объема):

$$Z_i = \gamma r \omega_{\omega_2}, \quad \gamma = 6\nu(1 - m) = 8\pi r^3 \nu N. \quad (9.12)$$

Отсюда вращательная вязкость γ оказывается линейно пропорциональной объемной концентрации $(1-m)$ твердой фазы. Обратим также внимание, что при $C_i^{(1)} + C_i^{(2)} = C_i$, $U_i^{(1)} = U_i^{(2)}$ система (9.11), (9.12) может быть представлена в виде уравнений момента количества движения микрополярной жидкости

$$\varepsilon_{ijk} \langle \sigma_{ij} \rangle^{(1)} + C_i + \frac{\partial \mu_{ij}^{(2)}}{\partial X_j} = J^{(2)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\Omega_i^{(2)} + \omega_i^{(2)}) + U_j \frac{\partial}{\partial X_j} (\Omega_i^{(2)} + \omega_i^{(2)}) \right] \quad (9.13)$$

с помощью реологического определения антисимметричной части тензора напряжений

$$\varepsilon_{ijk} \langle \sigma_{ij} \rangle_j^{(1)} = \rho \gamma \omega_i. \quad (9.14)$$

Этот факт был использован при попытках приложения модели микрополярной жидкости (и ее вариантов) к теории суспензий [98, 123—125].

Что касается уравнений неразрывности масс и импульса (9.1), (9.2), то после необходимых преобразований и введения замыкающих связей (см. [61, 30]) они принимают вид

$$\frac{\partial m \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial m \rho_1 U_j^{(1)}}{\partial X_j} = 0, \quad (9.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1-m) \rho_2] + \frac{\partial}{\partial X_i} [(1-m) \rho_2 U_i^{(2)}] = 0, \quad (9.16)$$

$$m \rho_1 \frac{d_1 U_i^{(1)}}{dt} = -m \frac{\partial p}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j} m (\sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^a) - m R_i, \quad (9.17)$$

$$(1-m) \rho_2 \frac{d_2 U_i^{(2)}}{dt} = -(1-m) \frac{\partial p}{\partial X_i} + m R_i, \quad (9.18)$$

где

$$\begin{aligned} d_a/dt &= \partial/\partial t + U_j^\alpha \partial/\partial X_j, \quad m \sigma_{ij}^s = -(2/3) \mu_* (\partial U_i^{(1)}/\partial X_j + \\ &\quad + \mu_* (\partial U_i^{(1)}/\partial X_j + \partial U_j^{(1)}/\partial X_i), \\ \mu_* &= \nu_* \rho_1, \quad \nu_* = \nu_0 \left(1 + \frac{5}{2} (1-m)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_i &= a (U_i^{(1)} - U_i^{(2)}) - b \varepsilon_{kij} (U_j^{(1)} - U_j^{(2)}) (\Phi_k^{(2)} - \Omega_k^{(1)}), \\ a(m) &= (9/2) \mu (1-m)/l^2, \quad b = (3/4) \rho_1 (1-m), \end{aligned} \quad (9.19)$$

σ_{ij}^s — симметричный тензор вязких напряжений, σ_{ij}^a — антисимметричная часть тензора, ν_* — эффективный (по А. Эйнштейну [91]) коэффициент вязкости жидкой фазы. Эти уравнения спра-

ведливы для разбавленных суспензий, т. е. при значениях m , близких к единице. Они соответствуют ламинарному движению взвешенных частиц с собственным вращением. Сила межфазового взаимодействия может включать в себя и подъемную силу Саффмена [12], а уравнения (9.11), (9.18) — напряжения для твердой фазы (см., например, [61, 65]). Применения модели широко обсуждались в печати (см., например, [54, 61, 87]) и здесь повторяться не будут.

Р. И. Нигматулин [54] предложил избегать явного введения антисимметричного микротензора напряжений σ_{ij}^a , заменив его дивергенцию на эквивалентный вектор

$$a_i = \partial \sigma_{ij}^a / \partial X_j, \quad (9.20)$$

а затем включить a_i в силу межфазового взаимодействия, $R_i^* = a_i + R_i$, фактически переопределив последнюю. Заметим, однако, что реальная сила R_i является внутренней для системы в ΔV , а потому в уравнении баланса импульса для системы в целом она не будет фигурировать — в отличие от a_i , т. е. от σ_{ij}^a . Если же считать, что именно R_i^* — внутренняя сила, то σ_{ij}^a действительно исчезнет из баланса суммарного импульса, но соответствующие модели динамики суспензии [54] оказываются более частными, чем формулируемая здесь. Они будут соответствовать внутреннему взаимному балансу объемно-распределенных по фазам моментов.

Сам прием введения объемной силы a_i вместо дивергенции напряжений σ_{ij} хорошо известен, см., например, стр. 634 монографии [39]. Отметим попутно [62], что в этой книге был получен неверный вывод об обязательной симметрии тензора упругих напряжений (стр. 636). Ошибка состояла в утверждении, что выражение для силового внешнего воздействия, следующее из уравнений равновесия (ср. с формулой (2.21)),

$$M_{ik} = \oint_S (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) dS_l + \int_V (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) dV, \quad (9.21)$$

сводится к поверхностному интегралу только в случае $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$. На самом деле возможна, например, ситуация, когда

$$\sigma_{ki} - \sigma_{ik} = \partial \mu_{ikl} / \partial X_l, \quad (9.22)$$

т. е. асимметричная составляющая тензора напряжений может выражаться через дивергенцию тензора более высокого ранга (двойного напряжения Миндлина [44]), и тогда требуемое условие будет выполнено даже при $\sigma_{ki} \neq \sigma_{ik}$.

Перейдем теперь к уравнениям динамики турбулизованной гетерогенной жидкости, рассмотренных Д. Ш. Искендеровым

[30]. Отличие состоит в том, что в турбулизированной суспензии присутствуют не только вращающиеся твердые частицы, но и жидкие вихри (вращающиеся моли Прандтля). Поэтому эффект асимметрии тензора напряжений будет несравнимо сильнее, тогда как вязкими напряжениями можно пренебречь.

Согласно процедуре пространственного осреднения, имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle m \rho_1 \rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle m \rho_1 u_j^{(1)} \rangle_i &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle (1-m) \rho_2 \rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle (1-m) \rho_2 u_j^{(2)} \rangle_i &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (9.23)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle m \rho_1 u_i^{(1)} \rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle m \rho_1 u_i^{(1)} u_j^{(1)} \rangle_i &= -m \frac{\partial p}{\partial X_i} - \langle m R_i \rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle (1-m) \rho_2 u_i^{(2)} \rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle (1-m) \rho_2 u_i^{(2)} u_j^{(2)} \rangle_i &= \\ &= - (1-m) \frac{\partial p}{\partial X_i} + \langle m R_i \rangle \end{aligned} \right\}, \quad (9.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon_{ijk} x_k m \rho_1 u_j^{(1)} \rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \varepsilon_{ilk} x_k m \rho_1 u_l^{(1)} u_j^{(1)} \rangle_i &= \\ &= -m \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \varepsilon_{ilk} x_k p \delta_{lj} \rangle_j - \langle \varepsilon_{ijk} x_k m R_j \rangle, \end{aligned} \quad (9.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon_{ijk} x_k (1-m) \rho_2 u_j^{(2)} \rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \varepsilon_{ilk} x_k (1-m) \rho_2 u_l^{(2)} u_j^{(2)} \rangle_i &= \\ &= - (1-m) \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \varepsilon_{ilk} x_k p \delta_{lj} \rangle_j + \langle \varepsilon_{ijk} x_k m R_j \rangle. \end{aligned}$$

Представим теперь мгновенную скорость обеих фаз в виде

$$u_i^{(\alpha)}(\xi_j, t) = U_i^{(\alpha)} + \frac{\partial U_i^{(\alpha)}}{\partial X_j} \xi_j + O\left(\frac{\Delta^2}{L^2}\right) + w_i^{(\alpha)}(\xi_j, t), \quad (9.26)$$

где $U_i^{(\alpha)}$ — массовая скорость фазы α , отнесенная к центру тяжести объема ΔV , $w_i^{(\alpha)}$ — турбулентная пульсация фазы α . Вновь объем ΔV разделяем на множество подобъемов ΔV_l , внутри которых справедливо представление

$$w_j^{(\alpha)}(\xi_m, t) = w_j^{(\alpha)} + (\partial w_j^{(\alpha)} / \partial \xi_m^{(\alpha)}) \xi_m^{(\alpha)},$$

где $\xi_m^{(\alpha)} = \xi_m - \xi_m^{(\alpha)}$ — координаты, $w_j^{(\alpha)} = w_j(\xi_m^{(\alpha)})$ — скорости центра масс объема моля ΔV_l фазы α .

При достаточно высокой степени турбулизации потока (при больших скоростях собственного вращения) имеет следующую

щие выражения для внутренних моментов количества движения:

$$M_i^{(1)} = \langle \varepsilon_{ilk} \rho u_i \xi_k \rangle^{(1)} = m \rho_1 \left\langle \varepsilon_{iln} \left(\frac{\partial U_l^{(1)}}{\partial X_m} + \frac{\partial \omega_l^{(1)}}{\partial \xi_m} \right) i_{mn}^{(1)} \right\rangle,$$

$$M_i^{(2)} = \langle \varepsilon_{ilk} \rho u_i \xi_k \rangle^{(2)} = (1 - m) \rho_2 \left\langle \varepsilon_{iln} \left(\frac{\partial U_l^{(2)}}{\partial X_m} + \frac{\partial \omega_l^{(2)}}{\partial \xi_m} \right) i_{mn}^{(2)} \right\rangle, \quad (9.27)$$

где

$$i_{mn}^{(\alpha)} = \frac{1}{\Delta V_l^{(\alpha)}} \int_{\Delta V_l^{(\alpha)}} \rho \xi_m \xi_n dV \quad (9.28)$$

— момент инерции фазы α . Для потоков кинетического момента имеем соответственно

$$\langle \varepsilon_{ilk} \rho u_i \xi_k u_j \rangle_j^{(1)} = M_i^{(1)} U_j^{(1)} - \mu_{ij}^{(1)} + O\left(\frac{\Delta}{L}\right),$$

$$\langle \varepsilon_{ilk} \rho u_i \xi_k u_j \rangle_j^{(2)} = M_i^{(2)} U_j^{(2)} - \mu_{ij}^{(2)} + O\left(\frac{\Delta}{L}\right). \quad (9.29)$$

Если частицы фаз симметричны, то $i_{mn}^{(\alpha)} = 1/2 i^{(\alpha)} \delta_{mn}$. Пусть $\omega_i^{(\alpha)}$ — избыточные угловые скорости. Тогда

$$M_i^{(1)} = J^{(1)} m \rho_1 (\Omega_i^{(1)} + \omega_i^{(1)}), \quad M_i^{(2)} = J^{(2)} (1 - m) \rho_2 (\Omega_i^{(2)} + \omega_i^{(2)}). \quad (9.30)$$

Здесь $J^{(\alpha)} = \langle i^{(\alpha)} \rangle$ — средний момент инерции молей фазы α . Для простоты можно принять, что удельные моменты инерции молей обоих фаз равны $J^{(1)} = J^{(2)} = J$. Это соответствует одному линейному масштабу взвешенных частиц и турбулентных вихрей. Теперь уравнения динамики турбулизованной суспензии можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (m \rho_1) + \frac{\partial}{\partial X_j} (m \rho_1 U_j^{(1)}) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (1 - m) \rho_2 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial X_j} (1 - m) \rho_2 U_j^{(2)} = 0; \\ m \rho_1 \frac{d_1 U_i^{(1)}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial X_j} m \rho_1 R_{ij}^{(1)} - m \frac{\partial p}{\partial X_i} - a m (U_i^{(1)} - U_i^{(2)}), \\ (1 - m) \rho_2 \frac{d_2 U_i^{(2)}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial X_j} (1 - m) \rho_2 R_{ij}^{(2)} - (1 - m) \frac{\partial p}{\partial X_i} + \\ &+ a m (U_i^{(1)} - U_i^{(2)}); \\ \frac{\partial}{\partial t} M_k^{(1)} + \frac{\partial}{\partial X_l} (M_k^{(1)} U_l^{(1)} - \mu_{kl}^{(1)}) &= \varepsilon_{kij} R_{ij}^{(1)} m + \\ &+ a m [(\Omega_k^{(2)} + \omega_k^{(2)}) - (\Omega_k^{(1)} + \omega_k^{(1)})], \end{aligned} \quad (9.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} M_k^{(2)} + \frac{\partial}{\partial X_l} (M_k^{(2)} U_l^{(2)} - \mu_{kl}^{(2)}) = \varepsilon_{kij} R_{ij}^{(2)} (1 - m) - \\ - am [(\Omega_k^{(2)} + \omega_k^{(2)}) - (\Omega_k^{(1)} + \omega_k^{(1)})].$$

Здесь $R_{ij}^{(\alpha)}$ — фазовые напряжения Рейнольдса, $\Omega_i^{(\alpha)}$ — вихрь поля фазовой скорости; эффект подъемной силы не учитывается ($b = 0$). Замыкающие связи системы (9.31) введем следующим образом:

$$\frac{1}{2} (R_{ij}^{(\alpha)} + R_{ji}^{(\alpha)}) = v^{(\alpha)} \rho_a \left(\frac{\partial U_i^{(\alpha)}}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j^{(\alpha)}}{\partial X_i} \right), \\ \frac{1}{2} (R_{ij}^{(\alpha)} - R_{ji}^{(\alpha)}) = \varepsilon_{ijn} 2\gamma^{(\alpha)} \rho_a \omega_n^{(\alpha)}, \\ \mu_{ii}^{(\alpha)} = 2\eta^{(\alpha)} \rho_a J \frac{\partial}{\partial X_j} (\Omega_i^{(\alpha)} + \omega_i^{(\alpha)}), \quad (9.32)$$

где $v^{(\alpha)}$, $\eta^{(\alpha)}$, $\gamma^{(\alpha)}$ — коэффициенты турбулентных вязкостей.

Рассмотрим турбулентное сечение суспензии в плоском следе за телом. Представим компоненты скоростей и объемную концентрацию жидкости в виде $U_i^{(\alpha)} = U_\infty - U_i^{(\alpha)}$, $m = m_\infty - \bar{m}$ и обозначим $\omega^{(\alpha)} = \omega_3^{(\alpha)}$, $\Omega^{(\alpha)} = \Omega_3^{(\alpha)}$. В приближении Озеена система (9.31), (9.32) запишется в виде

$$U_\infty \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} - v^{(1)} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial y^2} = -2\gamma^{(1)} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial y} + \frac{a(m_\infty)}{\rho_1} (U^{(2)} - U^{(1)}), \\ U_\infty \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial x} - 2\eta^{(1)} \frac{\partial^2 \omega^{(1)}}{\partial y^2} + 4 \frac{\gamma^{(1)} \rho_1}{J} \omega^{(1)} = \\ = (2\eta^{(1)} - v^{(1)}) \frac{\partial^2 \Omega^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{a(m_\infty)}{\rho_1} (\omega^{(2)} - \omega^{(1)}), \\ U_\infty \frac{\partial U^{(2)}}{\partial x} - v^{(2)} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial y^2} = -2\gamma^{(2)} \frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial y} + \frac{a(m_\infty) m_\infty}{\rho_2 (1 - m_\infty)} (U^{(1)} - U^{(2)}), \\ U_\infty \frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial x} - 2\eta^{(2)} \frac{\partial^2 \omega^{(2)}}{\partial y^2} + 4 \frac{\gamma^{(2)} \rho_2}{J} \omega^{(2)} = \\ = (2\eta^{(2)} - v^{(2)}) \frac{\partial^2 \Omega^{(2)}}{\partial y^2} + \frac{a(m_\infty) m_\infty}{\rho_2 (1 - m_\infty)} (\omega^{(1)} - \omega^{(2)}). \quad (9.33)$$

Обтекаемое тело с характерным размером d можно моделировать диполями и формулировать граничные условия следующим образом:

$$\Omega^{(\alpha)} = K^{(\alpha)} [\delta(y + d/2) - \delta(y - d/2)], \\ \omega^{(\alpha)} = -G^{(\alpha)} [\delta(y + d/2) - \delta(y - d/2)], \\ U^{(\alpha)} = \partial U^{(\alpha)} / \partial y = 0, \quad \omega^{(\alpha)} = \partial \omega^{(\alpha)} / \partial y = 0, \quad |y| \rightarrow \infty. \quad (9.34)$$

Вновь при построении решения примем, что асимметричные компоненты напряжений намного меньше симметричных компонент, т. е. что $|\gamma^{(\alpha)}\Omega^{(\alpha)}| \gg |\gamma^{(\alpha)}\omega^{(\alpha)}|$, а также что выполнены неравенство $4\sqrt{\nu^{(\alpha)}x}/U_\infty \gg d$ и равенство $2\eta^{(\alpha)} + \gamma^{(\alpha)} - \nu^{(\alpha)} = 0$. В случае разбавленной суспензии имеет место неравенство $\rho_1 m \gg \rho_2(1-m)$ и в уравнении импульса для жидкости межфазовая сила относительно мала и ею можно пренебречь.

Для системы (9.33) решение строится методом последовательных приближений, причем решение на шаге k используется для аппроксимации правых частей системы (9.33) на шаге $k+1$. При указанных упрощениях уравнения первых приближений имеют вид

$$U_\infty \frac{\partial \Omega_0^{(1)}}{\partial x} - \nu^{(1)} \frac{\partial^2 \Omega_0^{(1)}}{\partial y^2} = 0,$$

$$U_\infty \frac{\partial \omega_0^{(1)}}{\partial x} - 2\eta^{(1)} \frac{\partial^2 \omega_0^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{4\gamma^{(1)}\rho_1}{J} \omega_0^{(1)} = 0, \quad (9.35)$$

$$U_\infty \frac{\partial \Omega_0^{(2)}}{\partial x} - \nu^{(2)} \frac{\partial^2 \Omega_0^{(2)}}{\partial y^2} = \frac{a(m_\infty)m_\infty}{\rho_2(1-m_\infty)} (\Omega_0^{(1)} - \Omega_0^{(2)}),$$

$$U_\infty \frac{\partial \omega_0^{(2)}}{\partial x} - 2\eta^{(2)} \frac{\partial^2 \omega_0^{(2)}}{\partial y^2} + \frac{4\gamma^{(2)}\rho_2}{J} \omega_0^{(2)} = \frac{a(m_\infty)m_\infty}{\rho_2(1-m_\infty)} (\omega_0^{(1)} - \omega_0^{(2)}),$$

$$U_\infty \frac{\partial \Omega_1^{(1)}}{\partial x} - \nu^{(1)} \frac{\partial^2 \Omega_1^{(1)}}{\partial y^2} = -\gamma^{(1)} \frac{\partial^2 \omega_0^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{a(m_\infty)}{\rho_1} (\Omega_0^{(2)} - \Omega_0^{(1)}), \quad (9.36)$$

$$U_\infty \frac{\partial \omega_1^{(1)}}{\partial x} - 2\eta^{(1)} \frac{\partial^2 \omega_1^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{4\gamma^{(1)}\rho_1}{J} \omega_1^{(1)} =$$

$$= (2\eta^{(1)} - \nu^{(1)}) \frac{\partial^2 \Omega_0^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{a(m_\infty)}{\rho_1} (\omega_0^{(2)} - \omega_0^{(1)}).$$

$$U_\infty \frac{\partial \Omega_1^{(2)}}{\partial x} - \nu^{(2)} \frac{\partial^2 \Omega_1^{(2)}}{\partial y^2} = \frac{a(m_\infty)m_\infty}{\rho_2(1-m_\infty)} (\Omega_0^{(1)} - \Omega_0^{(2)}) - \gamma^{(2)} \frac{\partial^2 \omega_0^{(2)}}{\partial y^2},$$

$$U_\infty \frac{\partial \omega_1^{(2)}}{\partial x} - 2\eta^{(2)} \frac{\partial^2 \omega_1^{(2)}}{\partial y^2} + \frac{4\gamma^{(2)}\rho_2}{J} \omega_1^{(2)} =$$

$$= (2\eta^{(2)} - \nu^{(2)}) \frac{\partial^2 \Omega_0^{(2)}}{\partial y^2} + \frac{a(m_\infty)m_\infty}{\rho_2(1-m_\infty)} (\omega_0^{(1)} - \omega_0^{(2)});$$

Естественно, граничные условия (9.34) выполняются на каждом шаге. Относительно интенсивностей диполей сделаем такие предположения [83]. Во-первых, импульс от обтекаемого тела

передается непосредственно жидкой фазе. Во-вторых, твердые частицы обладают большей инерцией, чем жидкие. Поэтому примем $K^{(1)} \ll K^{(2)}$ и $G^{(1)} \ll G^{(2)}$. Тогда из (9.35) получим следующее выражение для скоростей жидкой фазы:

$$\begin{aligned}
 U_1^{(1)} = & \frac{d\sqrt{U_\infty}}{\sqrt{\pi v^{(1)} x}} \exp\left(-\frac{U_\infty y^2}{4v^{(1)} x}\right) \left\{ \left(K^{(1)} + \frac{\gamma^{(1)}}{v^{(1)}} G^{(1)} \right) \right\} - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{\gamma^{(1)}}{v^{(1)}} G^{(1)} \frac{JU_\infty}{4v^{(1)} \rho_1 x} \left[1 - \exp\left(-\frac{4v^{(1)} \rho_1 x}{JU_\infty}\right) \right] \left(1 - \frac{U_\infty y^2}{2v^{(1)} x} \right) + \\
 & + \frac{a(m_\infty)}{\rho_1 U_\infty} \frac{K^{(2)} d \sqrt{U_\infty}}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left\{ -\frac{U_\infty y^2}{4v^{(1)}(x-t) + 4v^{(2)}t} - \right. \\
 & \left. - \frac{a(m_\infty) m_\infty t}{\rho_2 U_\infty (1-m_\infty)} \right\} \frac{dt}{v^{(1)}(x-t) + v^{(2)}t}, \quad (9.37)
 \end{aligned}$$

причем решение для скорости твердой фазы $U_1^{(2)}$ вполне аналогично. Если разложить подынтегральные выражения (9.37) и его аналога по параметру $(v^{(1)} - v^{(2)})(x-t)/(v^{(1)}x)$, то получим оценку

$$U_1^{(2)} = U_1^{(1)} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right] \exp\left\{ -\frac{a(m_\infty) m_\infty x}{\rho_2 U_\infty (1-m_\infty)} \right\}. \quad (9.38)$$

Поэтому вдали от обтекаемого тела скорости фаз выравниваются. Вблизи тела дефект скорости твердой фазы $U_1^{(2)}$ в несколько раз превышает соответствующую величину $U_1^{(1)}$ для жидкой фазы, и это различие, согласно экспериментам [114], сохраняется на сравнительно больших расстояниях. Можно показать, что при больших значениях расстояния x осевая скорость жидкой фазы убывает как $x^{-1/2}$. В ближней зоне отклонения от этого закона связаны с внутренней завихренностью жидкости и должны усиливаться вращением взвешенных частиц. Действительно, согласно экспериментальным данным [114], с увеличением объемного содержания твердых частиц указанные отклонения растут. Формула (9.37) соответствует этому опытному факту. На рис. 9 приведен график осевой скорости жидкой фазы при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned}
 \frac{v^{(1)}}{U_\infty d} = 0.0481; \quad \frac{v^{(2)}}{v^{(1)}} = 0.589; \quad \frac{\rho_2(1-m_\infty)}{\rho_1 m_\infty} = 0.0155; \\
 \frac{K^{(2)}}{U_\infty} = 14.2; \quad \frac{\gamma^{(1)}}{v^{(1)}} \frac{G^{(1)}}{U_\infty} = 0.326; \quad \frac{K^{(1)}}{U_\infty} = 0.029. \quad (9.39)
 \end{aligned}$$

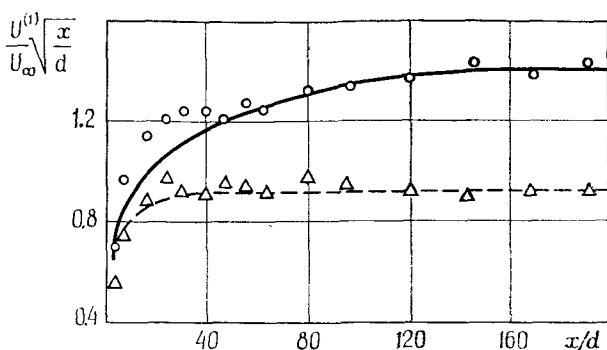


Рис. 9.

Принятые условия соответствуют расчету, данному на рис. 9 сплошной линией. Там же даны экспериментальные данные. Пунктир соответствует расчету при отсутствии твердой фазы ($m = 1$), см. разд. 6.

10. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОТОК С ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬЮ

Если представить себе, что в турбулентном потоке взвешены не твердые частицы, а частицы той же жидкости, но находящиеся в ламинарном состоянии, то выписанные выше уравнения оказываются пригодными для описания эффекта мелкомасштабной (по сравнению с внешним масштабом L) перемежаемости. Эта идея была разработана Д. Ш. Искендеровым, по работе которого и будет дано изложение в данном разделе.

Явление перемежаемости, типичное для турбулентности вообще, состоит в чередовании в потоке турбулентного и квазиламинарного режимов [86, 88], причем «взвешенными» оказываются либо турбулентные пятна, либо ламинарные включения — в зависимости от величины так называемого коэффициента перемежаемости Γ . Последний определяется как отношение времени существования турбулентных пульсаций в микроточке dv к полному времени наблюдения [107]. При этом полностью развитому турбулентному течению соответствует значение $\Gamma = 1$. Однако этот же коэффициент Γ можно понимать [31, 110] и как объемную концентрацию ламинарных частиц в протекающем потоке. Поскольку средняя скорость турбулентного пятна (моля) в общем случае отличается от скорости окружающей безвихревой жидкости [88, 127], то это и оправдывает использование модели взаимопроникающих континуумов. Вообще, явление перемежаемости соответствует случаю, когда генерации вихрей недостаточно для полной турбулизации всего потока.

Итак, для рассматриваемого потока пространственное осреднение дает следующие уравнения баланса масс и количеств движения обеих псевдофаз — турбулентной (1) и ламинарной (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho \rangle^{(1)} + \frac{\partial \langle \rho u_j \rangle_j^{(1)}}{\partial X_j} &= \kappa, \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho \rangle^{(2)} + \frac{\partial \langle \rho u_j \rangle_j^{(2)}}{\partial X_j} = -\kappa, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho u_i \rangle^{(1)} + \frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle_j^{(1)}}{\partial X_j} &= -\Gamma \frac{\partial p}{\partial X_i} + \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle^{(1)}}{\partial X_j} - R_i, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho u_i \rangle^{(2)} + \frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle_j^{(2)}}{\partial X_j} &= -(1 - \Gamma) \frac{\partial p}{\partial X_i} + \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle^{(2)}}{\partial X_j} + R_i. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Здесь вместо интенсивности фазового перехода введена величина κ — скорость роста массы турбулентных пятен в единице объема, связанная с порождением и диссипацией турбулентности. Предположим, что скорости фаз представимы в виде

$$\begin{aligned} u_i^{(1)}(\xi_j, t) &= U_i^{(1)} + O\left(\frac{\Delta}{L}\right) + w_i(\xi_j, t), \\ u_i^{(2)}(\xi_j, t) &= U_i^{(2)} + O\left(\frac{\Delta}{L}\right), \end{aligned} \quad (10.2)$$

т. е. в ламинарном включении пульсационные скорости отсутствуют. Тогда уравнения (10.1) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma U_j^{(1)}}{\partial X_j} &= \frac{\kappa}{\rho}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \frac{\partial (1 - \Gamma) U_j^{(2)}}{\partial X_j} = \frac{\kappa}{\rho}, \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} (\Gamma U_i^{(1)}) + \rho \frac{\partial}{\partial X_j} (\Gamma U_i^{(1)} U_j^{(1)}) &= -\Gamma \frac{\partial p}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j} (\Gamma R_{ij}) - R_i, \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} (1 - \Gamma) U_i^{(2)} + \rho \frac{\partial}{\partial X_j} (1 - \Gamma) U_i^{(2)} U_j^{(2)} &= -(1 - \Gamma) \frac{\partial p}{\partial X_i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial X_j} (1 - \Gamma) \sigma_{ij}^{(2)} + R_i. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Вязкие напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$ в турбулентных пятнах намного меньше турбулентных напряжений $R_{ij} = -\langle \rho w_i w_j \rangle_i$, а потому пренебрежимо малы. Эффектом собственного вращения здесь также пренебрежем, чтобы избежать громоздкого анализа.

Применим в данном случае в соответствии с правилом перехода [65] диффузионную модель, согласно которой система движется с одной среднееобъемной скоростью $U_i = \Gamma U_i^{(1)} + (1 - \Gamma) U_i^{(2)}$, а относительная скорость псевдофаз (или, иначе,

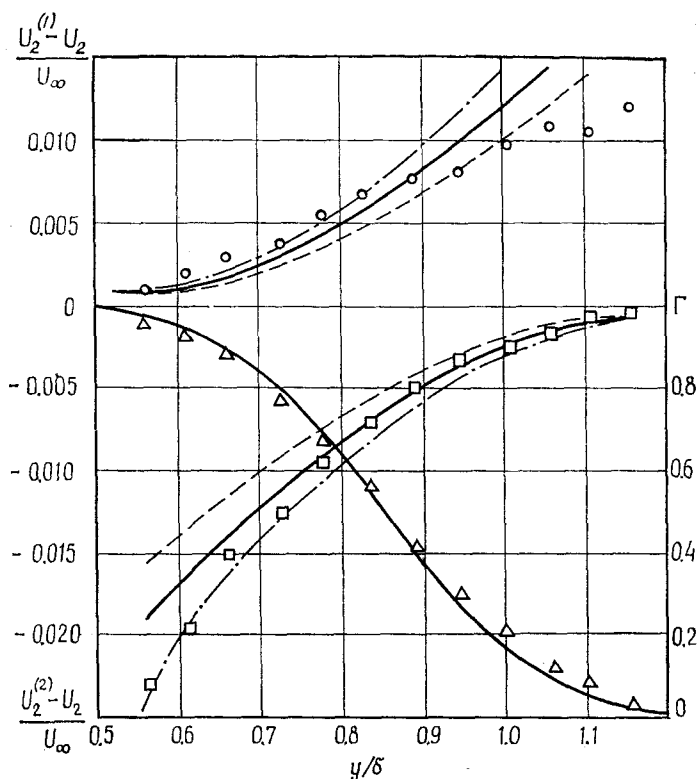


Рис. 10.

их массовые потоки) определяются градиентными формулами [109], т. е.

$$U_j^{(1)} - U_i = -\frac{\nu}{A} \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial X_j}, \quad U_j^{(2)} - U_i = \frac{\nu}{A} \frac{1}{1-\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial X_j}, \quad (10.4)$$

где A — аналог числа Шмидта. На рис. 10 дано сопоставление формул (10.4) с экспериментальными данными [127] для течения во внешней области пограничного слоя обтекаемой пластинки. Кругами отмечены данные для разности $(U_2^{(1)} - U_2)/U_\infty$, квадратами — для $(U_2^{(2)} - U_2)/U_\infty$ и треугольниками — для коэффициента перемежаемости, где U_∞ — скорость внешнего потока. Коэффициент перемежаемости такого течения можно представить [107] в виде

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Y \exp(-\zeta^2) d\zeta \right], \quad Y = \frac{y - y_0}{\sigma \sqrt{2}} \quad (10.5)$$

(см. сплошные кривые на рис. 10 для $y = X_2$, $y_0 = 8.5$ см, $\sigma = 1.5$ см, $\nu = 0.0012AU_\infty\delta$, $\delta = 10$ см, штриховые — для $\nu = 0.0014U_\infty\delta$, и штрихпунктирные для $\nu = 0.0014AU_\infty\delta$). Уравнения диффузионной модели турбулентности с перемежаемостью соответственно оказываются такими:

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Gamma}{\partial X_j} = \frac{\kappa}{\rho} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\nu}{A} \frac{\partial \Gamma}{\partial X_j} \right),$$

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} = - \frac{\partial p}{\partial X_j} + \frac{\partial}{\partial X_j} [\Gamma R_{ij} + (1 - \Gamma) \sigma_{ij}^{(2)}], \quad (10.6)$$

где поток импульса, вызванный отклонениями фазовых скоростей от среднеобъемной скорости, не учитывается.

Естественно, при $\Gamma = 0$ последнее уравнение импульса переходит в уравнение Рейнольдса, а при $\Gamma = 1$ — в уравнение Навье—Стокса. Здесь используются обычные определяющие соотношения

$$R_{ij} = \rho \nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right), \quad \sigma_{ij}^{(2)} = \rho \nu_0 \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right), \quad (10.7)$$

а объемный источник (сток) турбулентной фазы задается в виде

$$\kappa = B \Gamma \rho. \quad (10.8)$$

Тогда уравнение для коэффициента перемежаемости (10.6) принимает вид, аналогичный модельным уравнениям переноса для «плотности турбулентности» и т. п. [143]. При локально-стационарном состоянии $B = 0$, а коэффициент перемежаемости равен своему равновесному значению: $\Gamma = \Gamma_0 = \text{const}$. В общем случае величину B представим в виде

$$B = B_0 \frac{\nu}{l^2} (\Gamma_0 - \Gamma), \quad (10.9)$$

где l — масштаб турбулентного пятна. Уровень Γ_0 , определяющий порождение турбулентности, вообще говоря, зависит от градиента средней скорости, поскольку турбулентность поддерживается подводом энергии из среднего течения при ненулевом градиенте средней скорости. Результирующее уравнение для коэффициента перемежаемости имеет вид

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Gamma}{\partial X_j} = \frac{B_0 \nu}{\rho l^2} (\Gamma_0 - \Gamma) \Gamma + \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\nu}{A} \frac{\partial \Gamma}{\partial X_j} \right). \quad (10.10)$$

Используя (10.7) и (10.10), запишем уравнения (10.6) в приближении погранслоя:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} &= 0, \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial X_1} + U_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial X_2} &= \frac{B_0 v}{\rho l^2} \Gamma (\Gamma_0 - \Gamma) + \frac{\partial}{\partial X_2} \left(\frac{v}{A} \frac{\partial \Gamma}{\partial X_2} \right), \\ \frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial X_2} &= \frac{\partial}{\partial X_2} \left\{ [v\Gamma + v_0(1 - \Gamma)] \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right\}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Экспериментальное исследование [102] перемежаемости в пограничном слое обтекаемой пластинки выявило, что касательное напряжение главным образом определяется слагаемым $\Gamma v (\partial U_i / \partial X_j + \partial U_j / \partial X_i)$, т. е. имеет место неравенство

$$v\Gamma \gg v_0(1 - \Gamma). \quad (10.12)$$

Если учесть, что турбулентная вязкость постоянна даже для рассматриваемых потоков с перемежаемостью [77, 86, 126], то в приближении Озеена уравнения (10.11) для данного следа еще проще:

$$\begin{aligned} U_\infty \frac{\partial \Gamma}{\partial x} &= \frac{B_0 v}{\rho l^2} \Gamma (\Gamma_0 - \Gamma) + \frac{v}{A} \frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^n \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right), \\ U_\infty \frac{\partial U}{\partial x} &= v \frac{1}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^n \Gamma \frac{\partial U}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (10.13)$$

Здесь $U = U_1 - U_\infty$ — дефект скорости, U_∞ — скорость внешнего потока, x — расстояние от тела вниз по потоку, y — поперечная координата. Случай $n = 0$ соответствует плоскому следу, а $n = 1$ — следу за телом вращения.

Эксперимент [77, 86] показывает, что осевой дефект скорости убывает как $x^{-1/2}$ в плоском случае и как x^{-1} — в пространственном. Также выполняется условие подобия поперечного распределения осевой скорости $\varphi = U/U_{\max}$ и коэффициента перемежаемости, что говорит от автомодельности задачи. Введение автомодельной переменной $\eta = y/\sqrt{xd}$, где d — характерный размер, приводит уравнения (10.13) к виду

$$\begin{aligned} -\eta \frac{d\Gamma}{d\eta} &= \frac{B_0 v}{\rho l^2} \Gamma (\Gamma_0 - \Gamma) x + \frac{2v}{AU_\infty d} \frac{1}{\eta^n} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^n \frac{d\Gamma}{d\eta} \right), \\ -\eta \frac{d\varphi}{d\eta} &= \varphi + \frac{2v}{U_\infty d} \frac{1}{\eta^n} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^n \Gamma \frac{d\varphi}{d\eta} \right), \end{aligned} \quad (10.14)$$

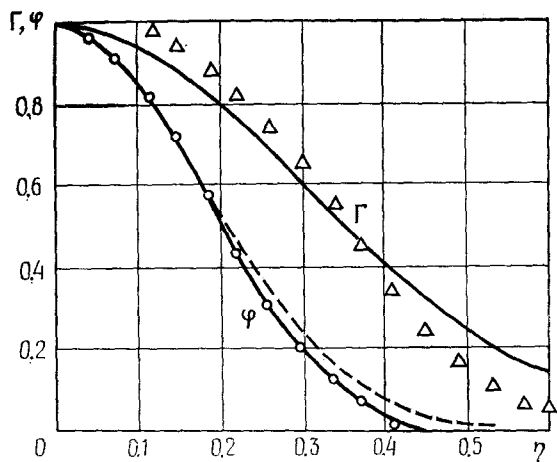


Рис. 11.

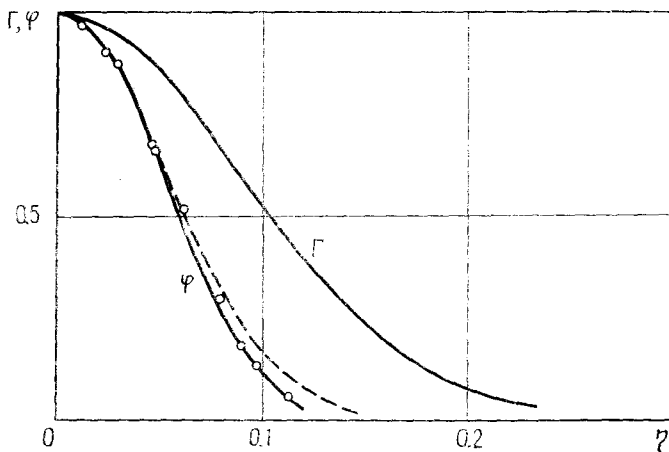


Рис. 12.

при следующих характерных граничных условиях:

$$\varphi = 1, \Gamma = 1 \quad (\eta = 0), \quad \varphi = 0, \Gamma = 0 \quad (\eta = \infty). \quad (10.15)$$

Для автомодельности необходимо, чтобы $x(\Gamma_0 - \Gamma) = F(\eta)$. Отсюда разность между текущим значением Γ и отсчетным уровнем Γ_0 должна убывать как x^{-1} , т. е. турбулентность в следе стремится к локально-равновесному состоянию.

На рис. 11 приведены экспериментальные данные [147] для следа за цилиндром. Кружками обозначен измеренный поперечный профиль скорости, а треугольниками — измерения коэффи-

циента перемежаемости на расстояниях $x/d = 500 \div 900$ (d — диаметр обтекаемого цилиндра). Сплошные линии — числовой расчет системы (10.14) при $n = 0$, граничных условиях Коши

$$\varphi = 1, \quad \Gamma = 1, \quad d\varphi/d\eta = 0, \quad d\Gamma/d\eta = 0 \quad (\eta = 0) \quad (10.16)$$

и значениях параметров

$$\frac{v}{U_\infty d} = 0.016, \quad A = 0.36, \quad \frac{B_0 v}{\rho l^2} (\Gamma_0 - \Gamma) x = 1.$$

Расчет приводит к выполнению условий (10.15) при $\eta = \infty$. Распределение скорости без учета перемежаемости дано штриховой линией.

На рис. 12 приведены аналогичные кривые для следа за телом вращения. Как и в плоском случае, принято $A = 0.36$, $Bx = 1$, но $v = 0.00125 U_\infty d$, где d — диаметр миделевого сечения. Экспериментальные точки соответствуют расстоянию от тела $x/d = 12$ и $x/d = 18$.

11. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Пространственное осреднение, хотя бы в неявном виде, применяется всегда при построении балансовых полевых уравнений механики сплошных сред и, в частности, при использовании знаменитого тетраэдра Коши для введения самого понятия тензора напряжений. Осреднение по поперечному сечению потока или тела является также общепринятым приемом, приводящим к простому и практичному построению, например к гидравлическим теориям потоков и т. д. Собственно в теории турбулентности еще в исходной работе О. Рейнольдса [71] были указаны два приема введения средних параметров потока — для некоторого объема и для некоторого промежутка времени. Вопрос о выборе «представительного» интервала осреднения, который должен включать в себя весь ансамбль реализаций, так же актуален для временного осреднения [82], как и при пространственном осреднении.

Хотя О. Рейнольдс [71] сохранял компоненты касательных турбулентных напряжений R_{ij} и R_{ji} различными, а также упоминал о моменте количества движения в турбулентном потоке, итальянец Г. Маттиоли, по-видимому, впервые рассматривал осредненные уравнения импульса и кинетического момента как фундаментальные и независимые уравнения турбулентности [130—132]. Маттиоли вводил все необходимые дополнительные характеристики турбулентного состояния — вихрь, момент инерции и момент внутренних сил. Однако он считал, что вихрь кинематически связан с полем средних скоростей, момент инерции — постоянная величина, а момент внутренних сил пропор-

ционален производной от вихря. Само условие независимости уравнения момента количества движения Маттиоли использует далее для определения длины смещения l (или, иначе, турбулентной вязкости). Попытки применить эту теорию к конкретным расчетам были предприняты самим Маттиоли [132], а также Г. А. Гуржиенко [18—20]¹. Все же в последующем направление, указанное Г. Маттиоли, не было по достоинству оценено и развито. Хотя Т. Карман [34] и заметил «интересную теорию турбулентного переноса», но считал при этом, что силы Маттиоли «несколько непонятны». Работы Маттиоли даже не упоминаются в списках литературы к монографиям энциклопедического характера (например, [46]). Может быть, это связано с тем, что в течение многих лет главное внимание было обращено на развитие статистической теории турбулентности, на которую вначале возлагали [144] основные надежды в смысле разрешения трудностей практической аэродинамики.

Интерес к механике Коссера [108] в целом был возрожден практически работами К. Труделла и Дж. Эриксона в 50-х годах [92, 149]. Механикам хорошо известно последующее повсеместное увлечение моментными теориями, которое привело на сегодня к признанному успеху в теории жидких кристаллов [5, 24, 92]. Что касается теории турбулентности, то перестановочность индексов в тензорах одноточечных корреляций скоростей и отождествление последних с тензором напряжений Рейнольдса служило главным аргументом против применения моментных теорий. Решающий контраргумент состоял в том, что при введении макронапряжений фактическое осреднение проводится по ориентированной площадке [57], и это правило автоматически выполняется при применении пространственного осреднения к исходным уравнениям Навье—Стокса.

Пространственное осреднение было в явном виде применено и в теории твердых гетерогенных сред (композитов) [40] и даже в экзотическом случае движения льда на поверхности океана [29, 84] (льдины могут вращаться и сохранять свой кинетический момент в течение конечного интервала времени). Фактически приемы пространственного осреднения привели к введению дополнительных вращательных степеней свободы (в форме квантованных циркуляций) в теории жидкого гелия [79, 85, 93]. Отметим также работы, нацеленные на создание моделей турбулентности в виде систем вихрей в идеальной жидкости [95]. Возможную асимметрию тензора напряжений подчеркивал в своих оригинальных лекциях известный физик Х. Юкава [94]. Про-

¹ Внимание автора на работы Г. А. Гуржиенко обратили Л. Г. Лойцянский (написавший предисловие к статье [18]) и Г. И. Петров. Последний отметил также произвол выбора момента инерции в теории Маттиоли. Именно поэтому в данной статье столь большое внимание уделено этому вопросу.

цедура пространственного осреднения была подвергнута разбору в материалах для специальной дискуссии¹, причем альтернативы анализа [4, 8, 9] также привели к моментным (или, иначе — асимметричным или микрополярным) математическим моделям.

Формально модель микрополярной жидкости для турбулентного течения предлагалась Эрингером [112, 113] и некоторыми его коллегами, однако в ряде случаев стыковка основных понятий этих двух теорий была иной, чем в данной статье. Ближе всего к развитому здесь построению оказался К. Феррари [115], который фактически показал, при каких предположениях относительно избыточной завихренности теория Маттиоли согласуется с общей трехмерной моделью асимметричной гидромеханики [58, 111]. Отметим также работы Г. Науэ [47, 135], предлагавшего для турбулентных потоков целую цепочку феноменологических уравнений возрастающего ранга (которые также получаются при пространственном осреднении уравнений Навье—Стокса — см. (2.25)).

Как известно, моментные теории, включающие внутренний масштаб l , дают наиболее яркие проявления своей специфики вблизи от внешних границ среды (потока). Однако именно формулировка граничных условий для угловых скоростей вызывает наибольшие затруднения, хотя и были сделаны некоторые формальные предложения [6, 113]. Хорошо известно, что турбулентность генерируется на внешних границах потоков, и адекватные граничные условия должны включать в себя этот механизм. Если обратиться к традиционной феноменологии турбулентности, то в ней можно задать граничное условие лишь для трансляционных средних скоростей, и оно формулируется как условие прилипания. Только в асимметричной модели имеется дополнительная степень свободы — угловая скорость вихря, а следовательно, можно сформулировать условия генерации турбулентности.

В самом деле, при одномерном течении турбулизованной жидкости усилие на стенках канала представимо как сумма двух слагаемых:

$$\tau_* = \nu (\partial U / \partial n) + 2\gamma\omega, \quad (11.1)$$

второе из которых соответствует наличию вихрей с избыточной угловой скоростью ω . На стенке, генерирующей турбулентность, можно задать, например, постоянный источник вихрей, более медленных, чем средняя завихренность, в виде

$$\omega = \kappa\omega_0, \quad \kappa = -\operatorname{sgn} \Omega = \operatorname{sgn} (\partial U / \partial n), \quad \omega_0 > 0, \quad (11.2)$$

¹ См. сб. «Проблемы осреднения и построения континуальных моделей в механике сплошной среды» (Изд-во МГУ, 1980, 93 с.). Инициатива проведения дискуссии принадлежала Л. И. Седову.

причем из условий подобия следует

$$\omega_0 e/U = \varphi(e/L; Ue/\nu_0). \quad (11.3)$$

Здесь e/L — степень шероховатости, e — высота бугорка, $Re = Ue/\nu_0$ — число Рейнольдса обтекаемого бугорка, $Sh_* = \omega_0 e/U$ — некоторый аналог числа Струхала.

В простейшем линейном варианте зависимости $Re(Sh_*)$ имеем

$$\omega_0 = N \left(\frac{e}{L} \right) \frac{U^2}{\nu_0}. \quad (11.4)$$

Таким образом, угловая избыточная скорость генерируемых на стенке вихрей пропорциональна квадрату характерной скорости потока (расхода). Вычисления (при $J_{km} = J \delta_{km}$, $J = \text{const}$) показывают, что окончательная формула для зависимости имеет характерный для турбулентных течений квадратичный вид [66]. Однако при постоянных коэффициентах вязкости ν , γ , η удастся добиться соответствия с профилем скорости лишь при введении «скорости скольжения» U_s на стенках канала, т. е. за счет отказа от условия прилипания.

Перед лицом подобных трудностей следует обратиться к имеющимся экспериментальным данным о тонкой структуре турбулентного потока вблизи стенки. В этом отношении особое значение имеют стереоскопические наблюдения А. К. Пратури и Р. С. Бродки [152]. Из их данных следует, что на стенке зарождаются поперечные вихри в согласии с правилом (11.2), затем они уходят от стенки, увеличиваются в размере, слабеют и разворачиваются. С другой стороны, известные опыты Конт-Белло и Лауфера [36] были обработаны Н. М. Дмитриевым и М. В. Лурье [25, 43] с континуальных (немоментных) позиций, но с сохранением возможной анизотропии вязкости ν . При этом было выявлено наличие на оси турбулентного потока в канале характерной анизотропии. Если же обратиться к простейшей микрополярной теории, то в силу симметрии на оси потока должно быть выполнено условие $\omega = 0$, т. е. сама избыточная угловая скорость не может порождать турбулентную анизотропию. Поэтому, как и в теории жидких кристаллов, вязкостная анизотропия может быть связана с ориентацией осей турбулентных образований (молей), которые, по-видимому, нельзя трактовать как шаровые образования.

Наконец, среди постулатов осреднения, которыми часто пользуются (см. [37]) в традиционной теории турбулентности, центральное место занимает постулат о коммутативности операций осреднения и дифференцирования

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle, \quad (11.5)$$

где символ $\langle \dots \rangle$ означает избранную процедуру осреднения. Рассмотрим с этих позиций операцию пространственного осреднения. Нетрудно видеть, что левая часть выражения (11.5) представима в виде [63]

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle &= \frac{1}{\Delta X_j} \int_{x_j - (\Delta X_j/2)}^{x_j + (\Delta X_j/2)} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle f \rangle_j dx_j = \\ &= \frac{\langle f \rangle_j (X_j + \Delta X_j/2) - \langle f \rangle_j (X_j - \Delta X_j/2)}{\Delta X_j} = \frac{\Delta \langle f \rangle_j}{\Delta X_j}, \end{aligned} \quad (11.6)$$

где $\langle f \rangle_j = \langle f \rangle_j(X_j)$. Отсюда следует правило перестановочности осреднения и дифференцирования, но это свойство есть следствие изменения масштаба описания. Действительно, если $\langle f \rangle_j$ [63] уже не зависит от параметра случайности (площадка осреднения ΔS_j включает в себя весь ансамбль реализаций, т. е. является представительной), а $\Delta \langle f \rangle_j / \Delta X_j \approx \partial \langle f \rangle_j / \partial X_j$ — дифференциальная операция в новом масштабе, то имеем окончательно

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle_j}{\partial X_j}. \quad (11.7)$$

Итак, именно процедура пространственного осреднения объясняет постулат коммутативности, причем важным условием является переход от осреднения по объему ΔV к осреднению по ориентированной площадке. Аналогичные проблемы возникают при разработке алгоритмов численного счета уравнений математической физики, когда по дифференциальным уравнениям строятся их конечно-разностные аналоги. Можно понимать эти уравнения как новые континуальные уравнения в новом (большем) масштабе. Ясно, что первые и вторые уравнения могут различаться — в случае высокой степени неоднородности. Более того, лучшими окажутся те числовые схемы счета, в которых будет предусмотрено выполнение большего числа из цепочки балансовых уравнений (2.23). Что касается разности в правилах осреднения для разных величин, то она уже встречалась в теории турбулентности (напомним хотя бы о лагранжевых и эйлеровых масштабах корреляций [129]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтомоделности. — М.: Машиностроение, 1975.
2. Артемов М. А., Ивченко В. О., Николаевский В. Н. О параметризации мезомасштабных вихрей в численных моделях крупномасштабной океанической циркуляции. Труды Арктич. и Антарктич. НИИ, т. 387. — Л.: Гидрометеиздат, 1982.

3. Афанасьев Е. Ф., Николаевский В. Н. К построению асимметричной гидродинамики суспензий с вращающимися твердыми частицами.— В сб.: Проблемы гидромеханики и механики сплошной среды (к 60-летию Л. И. Седова).— М.: Наука, 1969.
4. Аэро Э. Л. Структурно-феноменологический подход к задачам механики сплошных сред.— В сб.: Проблемы осреднения и построения континуальных моделей в механике сплошной среды.— Изд-во МГУ, 1980.
5. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н. Гидромеханика жидких кристаллов. Итоги науки и техники.— Гидромеханика, т. 7.— М.: ВИНТИ, 1973.
6. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. Асимметрическая гидромеханика.— ПММ, 1964, т. 29, вып. 2.
7. Багрянцев Н. В. О расчете глобальной циркуляции в двухслойном океане с учетом мезомасштабных движений.— Труды Арктич. и Антарктич. НИИ, т. 387.— Л.: Гидрометеониздат, 1982.
8. Бердичевский В. Л. Об осреднении периодических структур.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
9. Бердичевский В. Л. Уравнения механики жидкости с частицами.— В сб.: Проблемы осреднения и построения континуальных моделей в механике сплошной среды.— Изд-во МГУ, 1980.
10. Биркгоф Г., Сарантанелло Э. Струи, следы и каверны.— М.: Мир, 1964.
11. Бувеч Ю. А., Николаевский В. Н. Теория турбулентности с анизотропией вихревого характера.— В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа.— М.: Наука, 1972.
12. Бреннер Г. Реология двухфазных систем.— В сб.: Реология суспензий.— М.: Мир, 1975.
13. Бреховских Л. М. (и др.). Некоторые результаты гидрофизического эксперимента на полигоне в Тропической Атлантике. Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана, 1971, т. 7, № 5.
14. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах.— М.: Наука, 1970.
15. Воронов В. А. Решение задачи о крупномасштабной океанической циркуляции при учете мезомасштабных движений.— Труды Арктич. и Антарктич. НИИ, т. 357.— Л.: Гидрометеониздат, 1979.
16. Воронов В. А., Ивченко В. О. Об учете влияния мезомасштабных движений на крупномасштабную океаническую циркуляцию. Океанология, 1978, т. 18, № 6.
17. Гольдштейн С., ред. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости.— М.: ИЛ, 1948.
18. Гуржиенко Г. А. Влияние вязкости жидкости на законы турбулентного течения в прямой цилиндрической трубе с гладкими стенками.— Труды ЦАГИ, вып. 303.— М., 1936.
19. Гуржиенко Г. А. Учет вязкости в теории турбулентности Кармана.— Труды ЦАГИ, вып. 322.— М., 1937.
20. Гуржиенко Г. А. Об установившемся турбулентном течении в конических диффузорах с малыми углами растворения.— Труды ЦАГИ, вып. 462.— М., 1939.
21. Данилов А. И., Ивченко В. О., Николаевский В. Н. О крупномасштабной циркуляции баротропного океана с параметризацией синоптических вихрей.— ДАН СССР, т. 262, № 6, 1982.
22. Данилов А. И. Нестационарная баротропная циркуляция с учетом влияния подсеточного масштаба.— Труды Арктич. и Антарктич. НИИ, т. 387.— Л.: Гидрометеониздат, 1982.
23. Де Гроот С. Р., Сатторп Л. Г. Электродинамика.— М.: Наука, 1982.
24. Де Жен П. Физика жидких кристаллов.— М.: Мир, 1977.
25. Дмитриев Н. М., Лурье М. В. О реологической модели анизотропной турбулентности.— ДАН СССР, 1975, т. 225, № 4.

26. Жуковский Н. Е. Вихревая теория лобового сопротивления (1919). Собр. соч., 1949, М.—Л.: ГТТИ, т. 4.
27. Ивченко В. О. О применении асимметричной механики в геофизической гидродинамике.—Труды Арктич. и Антарктич. НИИ, т. 357.—Л.: Гидрометеиздат, 1979.
28. Ивченко В. О., Клепиков А. В. Квазигеострофическая модель циркуляции океана с параметрическим учетом мезомасштабных движений.—Труды Арктич. и Антарктич. НИИ, т. 387.—Л.: Гидрометеиздат, 1982.
29. Ивченко В. О., Масловский М. И. Об асимметричной динамике ледяного покрова.—Труды Арктич. и Антарктич. НИИ, т. 357.—Л.: Гидрометеиздат, 1979.
30. Искендеров Д. Ш. Обтекание тела турбулентным потоком суспензии вращающихся твердых частиц.—Прикладная механика, т. 16, № 2, 1980.
31. Искендеров Д. Ш. Уравнения турбулентного потока с перемежаемостью.—Прикладная механика, т. 16, № 12, 1980.
32. Казан Б. А., Лайхтман Д. Л., Оганесян Л. А., Пясковский Р. В. Численный эксперимент по сезонной изменчивости глобальной циркуляции в баротропном океане.—Изв. АН СССР. сер. Физика атмосферы и океана, т. 8, № 10, 1972.
33. Казко Г. В. О модели циркуляции океана в примитивных уравнениях с параметризацией мезомасштабной завихренности.—Труды Арктич. и Антарктич. НИИ, т. 387.—Л.: Гидрометеиздат, 1982.
34. Карман Т. Некоторые вопросы теории турбулентности.—В сб.: Проблемы турбулентности.—М.—Л.: ОНТИ, 1936.
35. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.—ДАН СССР, т. 30, № 4, 1941.
36. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками.—М.: Мир, 1968.
37. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2.—М.—Л.: ГТТИ, 1948.
38. Лайхтман Д. Л., Казан Б. А., Оганесян Л. А., Пясковский Р. В. О глобальной циркуляции в баротропном океане переменной глубины.—ДАН СССР, т. 198, № 2, 1971.
39. Ландау Л. Д., Лифшиц Г. М. Механика сплошных сред, изд. 2.—М.: Гостехиздат, 1953.
40. Левин В. М., Николаевский В. Н. Осреднение по объему и континуальная теория упругих сред с микроструктурой. В сб.: Современные проблемы механики и авиации.—М.: Машиностроение, 1982.
41. Листров А. Т. О модели вязкой жидкости с несимметричным тензором напряжений.—ПММ, т. 31, вып. 1, 1967.
42. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.—М.: Наука, 1970.
43. Лурье М. В., Дмитриев Н. М. Локальная модель турбулизованной среды.—ДАН СССР, т. 239, № 1, 1976.
44. Миндлин Р. Д. Микроструктура в линейной упругости.—В сб.: Механика, 1964, № 4 (86).
45. Монин А. С., Каменкович В. Н., Корт В. Г. Изменчивость Мирового океана.—Л.: Гидрометеиздат, 1974.
46. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 1—2.—М.: Физматгиз, 1965—1967.
47. Науэ Г. Законы сохранения неклассической гидродинамики и их применение к турбулентным каналовым течениям.—Численные методы механики сплошной среды, т. 4, № 1, 1973.
48. Невзглядов В. Г. Термодинамика турбулентных систем.—ЖЭТФ, 1960, т. 39, вып. 6/12.
49. Нгуен Ван Дьен, Листров А. Т. О неизотермической модели несимметричных жидкостей.—Изв. АН СССР, Мех. жидк. газа, 1967, № 5.

50. *Немировский Ю. В., Хейнлоо Я. Л.* Об осредненных характеристиках движения турбулизованной электропроводящей жидкости в плоском канале во внешних однородных электрическом и магнитном полях.— *Магн. гидродин.*, 1976, № 3.
51. *Немировский Ю. В., Хейнлоо Я. Л.* Локально-вихревой подход при описании вращательно-неизотропных турбулентных потоков, ч. 1—2.— *Изв. СО АН СССР, сер. техн. н.*, 1978, вып. 3, № 13.
- + 52. *Немировский Ю. В., Хейнлоо Я. Л.* Локально-вихревая теория турбулентных течений.— *Новосибирск: НГУ*, 1980.
53. *Немировский Ю. В., Хейнлоо Я. Л.* Вращательно-анизотропные турбулентные течения в каналах и трубах.— *Новосибирск: НГУ*, 1982.
54. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред.— *М.: Наука*, 1978.
55. *Нигматулин Р. И., Николаевский В. Н.* Диффузия вихря и сохранение момента количества движения в динамике неполярных жидкостей.— *ПММ*, т. 34, вып. 2, 1970.
56. *Николаевский В. Н.* Конвективная диффузия в пористых средах.— *ПММ*, т. 23, вып. 6, 1959.
57. *Николаевский В. Н.* Асимметричная механика континуумов и осредненное описание турбулентных течений.— *ДАН СССР*, т. 184, № 6, 1969.
- + 58. *Николаевский В. Н.* Асимметричная механика турбулентных потоков. *ПММ*, т. 34, вып. 3, 1970.
59. *Николаевский В. Н.* Асимметричная механика турбулентных потоков. Энергия и энтропия.— *ПММ*, т. 47, вып. 1, 1973.
60. *Николаевский В. Н.* Тензор напряжений и осреднение в механике сплошных сред.— *ПММ*, т. 39, № 2, 1975.
61. *Николаевский В. Н.* Некоторые современные проблемы механики многофазных смесей.— В сб.: *Современные проблемы теоретической и прикладной механики*.— *Киев: Наукова думка*, 1978.
62. *Николаевский В. Н.* Осреднение по объему как метод построения математических моделей сред с внутренней структурой.— *Изв. АН Арм. ССР, Механика*, т. 32, № 4, 1979.
63. *Николаевский В. Н.* Построение континуальных моделей сред с микроструктурой методом осреднения.— В сб.: *Проблемы осреднения и построения континуальных моделей в механике сплошной среды*.— *Изд-во МГУ*, 1980.
64. *Николаевский В. Н.* Физико-математические основы теории гетерогенных сред и теории фильтрации. В сб.: *Динамика многофазных сред*.— *Новосибирск: Ин-т теор. прикл. мех.*, 1981.
65. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред.— *М.: Недра*, 1970.
66. *Николаевский В. Н., Искендеров Д. Ш., Коржов Е. Н.* Турбулентная жидкость как сплошная среда с внутренней структурой.— В сб.: *Труды III Всесоюзного семинара по моделям механики сплошной среды*.— *Новосибирск: Вычисл. Центр СО АН СССР*, 1976.
67. *Новожилов В. В.* Реология установившихся турбулентных течений несжимаемой жидкости.— *Изв. АН СССР, Мех. жидк. газов*, 1973, № 3.
68. *Прандтль Л.* Результаты работ последнего времени по изучению турбулентности.— В сб.: *Проблемы турбулентности*.— *М.— Л.: ОНТИ*, 1936.
69. *Прандтль Л.* *Гидроаэромеханика*, изд. 2.— *М.: ИЛ*, 1951.
70. *Рахматулин Х. А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сплошных сред. *ПММ*, т. 20, вып. 2, 1956.
71. *Рейнольдс О.* Динамическая теория движения несжимаемой вязкой жидкости и определение критерия.— В сб.: *Проблемы турбулентности*.— *М.— Л.: ОНТИ*, 1936.
72. *Рей В.* Течения со значительными ориентационными эффектами.— *Ракетная техника и космонавтика*, т. 14, № 1, 1976.
- + 73. *Седов Л. И.* *Механика сплошной среды*, изд. 2, т. 1—2, 1973.

74. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости.— М.: ИЛ, 1963.
75. Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью.— М.: Мир, 1971.
- +76. Тамм И. Е. Основы теории электричества.— М.—Л.: ГИТТЛ, 1949.
77. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом.— М.: ИЛ, 1959.
78. Тейлор Дж. О переносе вихрей и тепла при турбулентном движении жидкостей.— В сб.: Проблемы турбулентности.— М.—Л.: ОНТИ, 1936.
79. Тилли Д. Р., Тилли Дж. Сверхтекучесть и сверхпроводимость.— М.: Мир, 1977.
80. Трусделл К. Этапы развития понятия напряжения.— В сб.: Проблемы механики сплошной среды.— М.: Изд-во АН СССР, 1961.
81. Фридман А. А., Келлер Л. В. Дифференциальные уравнения турбулентного движения сжимаемой жидкости.— В кн.: А. А. Фридман. Избранные труды.— М.: Наука, 1966.
- +82. Фрост У., Моулден Т., ред. Турбулентность. Принципы и применения.— М.: Мир, 1980.
- +83. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.— М.: Мир, 1976.
- +84. Хейсин Д. Е. К выводу осредненных уравнений динамики ледяного покрова с учетом асимметрии тензора внутренних напряжений.— Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, т. 13, № 8, 1977.
- +85. Хиллс Р., Робертс П. Механика сверхтекучей жидкости при высокой плотности вихревых линий.— В сб.: Вихревые движения жидкости.— М.: Мир, 1979.
86. Хинце И. Турбулентность. Ее механизм и теория.— М.: Физматгиз, 1963.
87. Цебер А. О. Некоторые особенности явлений переноса в суспензиях с внутренними вращениями.
88. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974.
89. Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физики?— М.: ИЛ, 1947.
90. Штеенбек М., Краузе Ф. Возникновение магнитных полей звезд и планет в результате турбулентного движения их вещества.— Магн. гидродин., 1967, № 3.
91. Эйништейн А. Новое определение размеров молекул (1905). Собр. научн. трудов, т. 3.— М.: Наука, 1966.
- +92. Эриксен Дж. Исследования по механике сплошных сред.— М.: Мир, 1977.
- +93. Эткин Р., Фокс Н. Мультиполярный подход к жидкому гелию II.— В сб.: Вихревые движения жидкости.— М.; Мир, 1979.
94. Юкава Х. Лекции по физике.— М.: Энергоиздат, 1981.
95. Яненко Н. Н., Григорьев Ю. Н., Левинский В. Б., Шавалиев М. Ш. Неравновесная статистическая механика систем точечных вихрей в идеальной жидкости и ее приложения к моделированию турбулентности.— Новосибирск. 1982, ИТПМ, Препринт № 22—82.
97. Янтовский Е. И. Об аналогии между переходом с двумерной турбулентности и ориентационным намагничиванием.— Магн. гидродин., 1974, № 2.
98. Allen S. J., Kline K. A., Ling C. C. Transient shear flow of fluids with deformable microstructure. Acta mech., v. 18, 1—20, 1973.
99. Artemov M. A., Nikolaevski V. N. On equation of asymmetric turbulence in magnetohydrodynamics. Lett. in Appl. Engng. Sci., v. 4, No 3, 1976.
100. Bagriantzev N. V., Danilov A. I., Ivchenko V. O., Nikolaevsky V. N. Orientational effects in geophysical fluid dynamics. Int. J. Engng. Sci., v. 21, no 7, 1983 (Физ.-тех. ин-т им. А. Ф. Иоффе, Ленинград, 1982, Препринт № 768).
101. Bear J. Dynamics of fluids in porous media. NY-L-Amsterdam: Elsevier, 1972.
102. Blackwelder R. F., Kovaszny L. S. G. Time scales and correlations in a turbulent boundary layer. Phys. Fluids, v. 9, No 9, 1972.

103. *Chatwin P. C.* The vorticity equation as an angular momentum equation. *Proc. Camb. Phil. Soc.* v. 74, part 2, 1973.
104. *Chevray R.* The turbulent wake of a body of revolution. *Trans. Amer. Mech. Eng., ser D (J. Basic Engng)*, v. 90, No 2, 1968.
105. *Chevray R., Kovasznay L. G. S.* Turbulence measurements in the wake of a thin plate. *AIAA J.*, 1969, v. 7, No 8.
106. *Crow S. C.* Viscoelastic properties of a fine-grained incompressible turbulence. *J. Fluid Mech.*, 1968, v. 33, part 1.
107. *Corrsin S., Kistler A.* Free-stream boundaries of turbulent flows. 1955, NACA Report 1244.
108. *Cosserat E. et F.* *Theorie des corps deformables.* Paris: Herman, 1909.
109. *Daily J. W.* Some aspects of flowing suspensions. *Proc. IX Midwestern Mechanics Conference.* Madison, Wisconsin, August 16—18, 1965.
110. *Dopazo C.* On conditioned averages for intermittent turbulent flows. *J. Fluid Mechanics*, v. 81, pt 3, 1977.
111. *Eringen A. C.* Simple microfluids. *Int. J. Engng Sci.*, v. 2, No 2, 1964.
112. *Eringen A. C., Chang T. S.* A micropolar description of hydrodynamic turbulence. *Recent Advances Engng. Sci.*, v. 5, pt 2, 1970.
113. *Eringen A. C.* Micromorphic description of turbulent channel flow. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 39, No. 1, 1972.
114. *Fenton D. L., Stukel J. J.* Flow of a particulate suspension in the wake of a circular cylinder. *Int. J. Multiphase Flow*, v. 3, No 2, 1976.
115. *Ferrari C.* On the differential equations of turbulent flow.—В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа.—М.: Наука, 1972.
116. Free turbulent shear flows. *Proc. Conference at NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, July 20—21, 1972*, v. 2—Summary of data. Washington D. C., NASA-SP-321, 1973.
117. *Haken H.* Synergetics. Berlin—Heidelberg—NY.: 1978.
118. *Hellerman S.* An adapted estimate of the wind stress on the world ocean. *Monthly Weather Rev.*, v. 95, No. 9, 1967.
119. *Howard L. N.* Divergence formulas involving vorticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, v. 1, pp. 113—123, 1958.
120. *Iskenderov D. Sh., Nikolaevskii V. N.* Turbulent wake of a body and asymmetric hydrodynamics. *Lett. Appl. Engng Sci.*, 1977, v. 5, No 3.
121. *Ivchenko V. O.* Fluid dynamics on a rotating plane: its averaged equations. *Lett. Appl. Engng. Sci.*, 1978, v. 5, No. 6.
122. *Kiniaki T., Naomichi H.* Turbulent near wake of a flat plate. Pt 1. Incompressible flow. *Bull. Japan Soc. Mech. Engng.*, v. 17, No. 108, 1974.
123. *Kline K. A.* Prediction from polar fluid theory which are independent of spin boundary condition. *Trans. Soc. Rheol.*, 1975, v. 19, p. 139.
124. *Kline K. A., Carmi Sh.* On the stability of motions of a dilute suspension of a rigid spherical particles. *Bull. de l'acad. Polonaise des Sci., ser. des sci. techn.*, v. 20, No. 9, 1972.
125. *Kline K. A., Sandberg T. K.* A polar fluid estimate of relative force. *Acta Mech.*, v. 26, 201—222, 1977.
126. *Kovasznay L. S. G.* Structure of the turbulent boundary layer. *Phys. Fluids*, v. 10, pt 2, 25—30, 1967.
127. *Kovasznay L. S. G., Kibens V., Blackwelder R. F.* Large-scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 1970, pt 2, v. 41, 1970.
128. *Lin C. C.* On periodically oscillating wake in the Oseen approximation. In: *Studis in mathematics and mechanics presented to R. Von Mises*, Acad. Press, 1954.
129. *Liepmann H. W.* Aspects of the turbulence problem. *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, v. 3, No 5/6, 1952.

130. *Mattioli G. D.* Sur la theorie de la turbulence dans canaux, C. R. Acad. des Sci., Paris, v. 196, No. 8, 1933.
131. *Mattioli G. D.* Teoria della turbolenza. Rend. Acad. Naz. dei Lincei, v. 17, No. 13, 1933.
132. *Mattioli G. D.* Teoria dinamica dei regimi fluidi turbolenti. Padova: CEDAM, 1937.
133. *Maugin G. A., Eringen A. C.* Deformable magnetically saturated media. Pt. 1—2, J. Math. Phys., v. 13, No. 2, 9, 1972.
134. *Maugin G. A., Eringen A. C.* Polarized elastic materials with electronic spin — a relativistic approach. J. Math. Phys., v. 13, No. 11, 1972.
135. *Naue G., Kohlmann J., Schmidt W., Scholz R., Wolf P.* Modellierung und berechnung turbulenter stromungen und anwendungen in der technik. Teil 1—2, Technische Mech., 1(1980) 1, 3 (1982), 1.
136. *Nee V. W., Kovasznyai L. S. G.* Simple phenomenological theory of turbulent shear flows. Phys. Fluids, 1969, v. 12, No. 3.
137. *Nikolaevskii V. N.* On some relaxation processes connected with heterogeneity of continuous media. In: Appl. Mech. Proc. 11th Int. Congress of Appl. Mech., Munich, 1964, Springer, 1966.
138. *Nikolaevskii V. N.* Asymmetric mechanics of turbulence. The transfer of momentum and vorticity in a wake behind the body. In: Omaggio a Carlo Ferrari, Torino: Libreria Editrice Universitaria, Levrotto & Bella, 1974.
139. *Nikolaevskii V. N.* On nonlinearity and anisotropy of turbulent viscosity. Lett. Appl. Engng. Sci., v. 3, 395—404, 1975.
140. *Nikolaevskii V. N.* Short note on a space averaging in continuum mechanics. Int. J. Multiphase Flow, v. 6, No. 4, 1980.
141. *Pekeris C. L., Accad Y.* Solution of Laplaces equations for the M_2 tide in the World ocean. Phil. Roy. Soc. London, v. 265, 225—234, 1969.
142. *Praturi A. K., Brodkey R. S.* A stereoscopic visual study of coherent structures in turbulent shear flow. J. Fl. Mech., v. 89, pt. 2, 1979.
143. *Saffman P. G.* A model for inhomogeneous turbulent flow. Proc. Roy. Soc. London, A, v. 317, 417—433, 1970.
144. *Sears W. R., Sears M. R.* The Karman years at GALCIT. Annual Rev. Fluid Mechanics, v. 11, 1980.
145. *Stojanovic R.* Recent developments in the theory of polar continua. Wien — NY; Springer, 1972.
146. *Taylor G. I.* Eddy motion in the atmosphere. Philos. Trans. Roy. Soc. London, A, v. 215, 1—26, 1915.
147. *Townsend A. A.* The fully developed turbulent wake of a circular cylinder. Austr. J. Sci. Res., A, v. 2, No. 2, 1949.
148. *Truesdell C.* Sulle basi della termomechanica. Rend. della Acad. Nazion. dei Lincei, ser. vii, v. XXII, Gennaio a Febr., 33—38, 158—166, 1957.
149. *Truesdell C.* Six lectures on Modern natural philosophy, NY: Springer, 1966.
150. *Wang C. C.* A new representation theorem for isotropic functions. Arch. Rational Mech. Anal., v. 36, No. 3, 1970.